分类号: O241.82

密级:公开

单位代码:10636

学号:20210801068

硕士学位论文

中文论文题目:非线性分数阶薛定谔波动方程的

两类保结构数值方法

英文论文题目: Two Classes of Structure-Preserving Numerical

Methods for the Nonlinear Fractional

Schrödinger Wave Equations

论文作者:刘洋

指导教师:冉茂华

专业名称:计算数学

研究方向:偏微分方程数值解

所在学院:数学科学学院

论文提交日期:2024年3月20日

论文答辩日期:2024年5月20日

四川师范大学学位论文独创性声明

本人声明:所呈交学位论文非线性分数阶薛定谔波动方程的两类保结构数值方法,是本人在导师冉茂华指导下,独立进行研究工作所取得的成果.除文中已经注明引用的内容外,本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果.对本文的研究做出重要贡献的个人和集体,均已在文中以明确方式标明.本声明的法律结果由本人承担.

本人承诺:已提交的学位论文电子版与论文纸本的内容一致.如因不符而引起的学术声誉上的损失由本人自负.

学位论文作者:签字日期:年月日

四川师范大学学位论文版权使用授权书

本人同意所撰写学位论文的使用授权遵照学校的管理规定:

学校作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者须授权所在大学拥有学位论文的部分使用权,即:1)已获学位的研究生必须按学校规定提交印刷版和电子版学位论文,可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库供检索;2)为教学、科研和学术交流目的,学校可以将公开的学位论文或解密后的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所或在有关网络上供阅读、浏览.

本人授权万方数据电子出版社将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》,并通过网络向社会公众提供信息服务.同意按相关规定享受相关权益.

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名:

签字日期:年月日

导师签名:

签字日期:年月日

非线性分数阶薛定谔波动方程的两类保结构数值方法

计算数学专业

研究生:刘洋指导教师:冉茂华副教授

摘要:非线性分数阶薛定谔波动方程在非线性光学、传播动力学、水波动力学等物理问题中广泛应用,并具备重要的守恒特性.本文旨在研究二维非线性分数阶薛定谔波动方程的数值方法及其守恒性质.

首先,针对具有周期性边界条件的二维非线性分数阶薛定谔波动方程,考虑到显式松弛龙格库塔方法仅对二次形式的能量有效,本文通过引入标量辅助变量方法将其转化为一个等价系统,其四次形式的能量被重新表述为三个二次项和的形式.随后在时空方向上分别采用显式松弛龙格库塔方法和傅里叶拟谱方法对等价系统进行离散.构造出一个在时间方向可达任意高阶的显式保结构数值格式.这种格式易于推广到分数 Klein-Gordon-Schrödinger 方程等类似方程.通过数值实验验证了该格式在长时间仿真中的数值稳定性.

为了能同时守恒多个原始不变量,本文还基于分数阶拉普拉斯泛函变分原理推导出了非线性分数阶薛定谔波动方程的哈密顿结构.通过将分区平均向量场方法和傅里叶拟谱方法应用于哈密顿系统,构造了一个能同时守恒原始能量和质量的数值格式.并与其它方法进行了数值比较,结果表明本文提出的方法具有更好的能守恒原始不变量的性质.

关键词:非线性分数阶薛定谔波动方程哈密顿系统标量辅助变量方法

松弛龙格库塔方法分区平均向量场方法傅里叶拟谱方法

四川师范大学硕士学位论文

Two Classes of Structure-Preserving Numerical Methodsfor the Nonlinear Fractional Schrödinger Wave Equations

Computational Mathematics Major

Master: Liu Yang Supervisor: Ran Maohua

Abstract The nonlinear fractional Schrödinger equation ﬁnds wide applications in phys-ical problems such as nonlinear optics, propagation dynamics, and water wave dynamics, ex-hibiting signiﬁcant conservational properties. This study focuses on investigating numericalmethods and conservational properties of the two-dimensional nonlinear fractional Schrödingerequation.

Initially, for the two-dimensional nonlinear fractional Schrödinger equation with periodicboundary conditions, considering the limited effectiveness of explicit Runge-Kutta methodsfor quadratic energy forms, this paper transforms it into an equivalent system using a scalarauxiliary variable method, where the energy in quartic form is reformulated into a sum ofthree quadratic terms. Subsequently, explicit Runge-Kutta methods and Fourier pseudo spec-tral methods are employed to discretize the equivalent system in both spatial and temporaldirections, constructing an explicit structure-preserving numerical scheme of arbitrarily highorder in time. This scheme can be readily extended to similar equations like the fractionalKlein-Gordon-Schrödinger equation. Numerical experiments verify the numerical stability ofthis scheme over long-term simulations.

To conserve multiple original invariants simultaneously, this paper further derives theHamiltonian structure of the nonlinear fractional Schrödinger equation based on the fractionalLaplacian functional variational principle. By applying the partition-averaged vector ﬁeldmethod and Fourier pseudo spectral method to the Hamiltonian system, a numerical schemepreserving both original energy and mass is constructed. Numerical comparisons with othermethods demonstrate the superior conservation properties of the proposed method.

Keywords: Nonlinear Fractional Schrödinger Wave Equation Hamiltonian SystemScalar Auxiliary Variable Method Relaxation Runge-Kutta Metho Partitioned Vector

Field Method Fourier Spectral Method

四川师范大学硕士学位论文

插图和附表清单

表1.1 NFSWEs保结构方法对比...........................................2

表3.1当 N =32,T =1时,例3.1在时间方向的误差和收敛阶.................22

图3.1例3.1的一些松弛格式所对应的 maxm |γm −1|和 maxm |Sm(1)|...........22

图3.2当 N =32,τ=0.01时,例3.1取不同α对应的相对能量误差..............23

表3.2当 N =4, T =1时,例3.2在时间方向的误差和收敛阶..................24

图3.3例3.2的一些松弛格式所对应的 maxm |γm −1|和 maxm |Sm(1)|...........24

图3.4当 N =4,τ=0.01时,例3.2取不同α对应的相对能量误差..............25

表3.3当 N =4, T =1时,例3.3在时间方向的误差和收敛阶..................26

图3.5当 N =4,τ=0.01时,例3.3取不同α对应的相对能量误差..............26

表3.4当 N =4, T =1时,例3.4在时间方向的误差和收敛阶..................27

图3.6当 N =4,τ=0.01时,例3.4取不同α对应的相对能量误差..............28

图4.1当α=1.5时,例4.1中四种格式的收敛阶.............................38

图4.2当α=2.0时,例4.1中四种格式的收敛阶.............................39

图4.3在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散能量.............39

图4.4在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散质量.............40

表4.1在例4.1中,当α=2.0时,时刻 t = tn的离散能量 Hn...................41

表4.2在例4.1中,当α=1.3时,时刻 t = tn的离散质量 Gn...................41

表4.3在例4.1中,当α=1.6时,时刻 t = tn的离散质量 Gn...................41

表4.4在例4.1中,当α=2.0时,时刻 t = tn的离散质量 Gn...................42

图4.5在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散质量相对误差.....42

图4.6在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散能量相对误差.....42

图4.7当α=1.5时,例4.2中四种格式的收敛阶.............................43

图4.8当α=2.0时,例4.2中四种格式的收敛阶.............................43

图4.9在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散质量..............44

四川师范大学硕士学位论文

图4.10在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散能量.............44

图4.11在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散质量相对误差....45

图4.12在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散能量相对误差....45

表4.5在例4.2中,当α=2.0时,时刻 t = tn的离散能量 Hn...................46

表4.6在例4.2中,当α=1.3时,时刻 t = tn的离散质量 Gn...................46

表4.7在例4.2中,当α=1.6时,时刻 t = tn的离散质量 Gn...................46

表4.8在例4.2中,当α=2.0时,时刻 t = tn的离散质量 Gn...................47

图4.13示例4.2中,α=1.3时的波传播图...................................47

图4.14示例4.2中,α=1.6时的波传播图...................................48

图4.15示例4.2中,α=1.99时的波传播图...................................48

图4.16示例4.2中,α=2.0时的波传播图...................................49

目录

摘要 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . I

ABSTRACT. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . III

插图和附表清单 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . V

1 绪论 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.1 研究意义 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.2 研究背景与发展现状 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.3 研究内容 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.4 论文安排 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

2 预备知识 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

2.1 分数阶微积分理论 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

2.2 傅里叶谱方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.3 分区平均向量场方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

3.1 NFSWEs的 SAV格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

3.2 傅里叶拟谱离散格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

3.3 显式 SAV-RRK方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

3.4 显式 SAV-RRK方法的精度 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

3.4.1 松弛因子的估计 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

3.4.2 显式 SAV-RRK方法的截断误差. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

3.5 数值算例 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

3.6 小结 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

4.1 NFSWEs的哈密顿格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

4.2 傅里叶拟谱离散格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

4.3 PAVF-P方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

4.3.1 PAVF-P格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

4.3.2 离散守恒律 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

4.4 其他 AVF系列方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

4.5 数值算例 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

4.6 小结 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

5 总结与展望 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

5.1 本文总结 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

5.2 研究展望 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

参考文献 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

致谢 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

在校期间的科研成果 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59

1绪论

1.1研究意义

分数阶微积分理论是研究任意阶微分和积分的数学分支,它是整数阶微积分理论的拓展.这一理论起源于17世纪末,经过三个世纪的不懈努力,包括 Riemann-Liouville、Grüwald-Letnikov、Caputo和 Riesz在内的多种分数阶微积分理论被形成[1].尽管分数阶微积分的物理和几何解释存在挑战,但近几十年来,多个学科领域的研究表明,与整数阶微分方程相比,分数阶微分方程的保记忆性能有效地描述某些复杂问题.目前,分数阶微分方程已广泛应用于物理学、化学、生物学、水文学、混沌理论、复杂粘弹性材料、系统控制、信号处理、经济学等领域的诸多问题[2-9].

非线性分数阶薛定谔波动方程(NFSWEs)是对经典整数阶薛定谔波动方程的推广.

后者在 Klein-Gordon方程非相对论极限[10,11],等离子体中 Langmuir波包络近似[12],以

及光弹模型的 Sine-Gordon方程的调制平面脉冲近似[13,14]等物理场景中具有广泛应用,并且已得到深入研究[15-18].鉴于 NFSWEs中的分数阶拉普拉斯算子的非局部性,使其能

更好地描述许多经典薛定谔波动方程无法描述的新现象.然而,这也给 NFSWEs的数值求解带来了挑战.此外,与许多其他基于物理场景的微分模型一样, NFSWEs也具有一些守恒性质.因此,构造有类似离散结构的保结构数值方法尤为重要,甚至在某些领域,保

留原始微分方程的某些不变性质的能力已成为评估数值模拟成功与否的标准[19].鉴于

NFSWEs中的分数阶拉普拉斯算子的双重重要性,本文旨在构造两类数值求解 NFSWEs的高效保结构方法.

1.2研究背景与发展现状

非线性薛定谔方程是非线性科学中极具普适性的基本方程,在众多物理学领域都有

着广泛的应用.其重要性引起了学术界的普遍关注.基于有限差分法[20]、有限元法[21]、间断有限元法[22]、谱方法[23]的各类保结构数值方法被不断提出.就有限差分方法而言,

Bao等[16]建立了整数阶薛定谔波动方程在有限差分方法下误差限适用于一维、二维和

三维情形的一致误差估计. Wang和 Zhang[24]针对一类薛定谔波动方程初边值问题,给出

了一些新的守恒格式.利用 Leray-Schauder不动点定理证明了有限差分格式解的存在性,

并在能量范数下证明了 O(h2+τ2)阶差分解的唯一性、稳定性和收敛性. Zhang等[15]提

出了一种四层显式的有限差分保结构格式,并证明了其收敛性和稳定性. Li等[25]对具有

周期性边界条件的非线性整数阶薛定谔波动方程,构造了一个保结构的三层紧格式,并基于能量法证明了该格式在最大模范数下O(h4+τ2)阶的无条件稳定性和收敛性. Wang

四川师范大学硕士学位论文

等[26]采用正交样条配置法结合有限差分法给出了离散时间正交样条的配置格式,并从

理论上分析了这些格式的守恒性、收敛性和稳定性. Guo 等[27]在时空方向上分别应用

局部不连续 Galerkin方法、Crank-Nicholson格式进行离散,建立了能量守恒的全离散格式.随着分数阶微积分的发展,研究者开始重视分数阶模型的研究.例如,Wang 和 Xiao

[28]首先为非线性耦合分数阶薛定谔方程构造了一种离散质量守恒的 Crank-Nicolson差

分格式,然后,他们进一步提出了一种线性隐式格式,该格式保持修正后的离散质量和能

量[29]. Ran 和 Zhang [30]提出了一种隐式差分格式和线性差分格式,分别为非线性强耦合分数阶薛定谔方程保持原始和修正的质量和能量. Wang 和 Huang [31,32]推导出分数

阶薛定谔方程的能量和质量守恒 Crank-Nicolson差分格式和线性差分格式. Wang等[33]

提出了一种用于二维非线性空间分数阶薛定谔方程的分步谱 Galerkin方法,该方法仅保

持离散质量.针对模型 NFSWEs,Ran和 Zhang [34]首先构造了一种三层线性隐式差分格式,它能很好地保持修正后的离散质量和能量. Li和 Zhao [20]结合 Crank-Nicolson方法与 Galerkin 有限元方法以节省计算成本,设计了具有循环预调节器的快速 Krylov 子空

间求解器. Cheng 和 Qin [35]提出了一种基于 SAV 方法的线性隐式守恒数值格式,该格式仅保持修正后的能量. Hu等[36]分别在时间上应用 Crank-Nicolson、SAV和 ESAV方法,提出了三种能量守恒的谱 Galerkin 方法. Zhang 和 Ran [37]提出并分析了基于三角

SAV(T-SAV)方法的更高阶能量守恒差分格式.

如表1.1所示,尽管对于 NFSWEs数值算法的研究已有不少工作,但大多数方法仅关注一维情况,且在时间方向的精度未达到二阶,甚至是完全隐式的.此外,目前提出的算法仅能确保修正后的能量和(或)质量守恒.这意味着仍然存在许多未解决的问题,尤其是在高维情况下,需要高效、准确、显式以及能够同时保持原始能量和质量的数值方法.

表1.1 NFSWEs保结构方法对比

文献维度空间精度时间精度能量守恒质量守恒

[34]2016,Ran 1维2阶2阶修正能量修正质量

[20]2018,Li 1维2阶2阶修正能量修正质量

[38]2022,Pan 1维4阶2阶无无

[35]2022,Cheng 2维2阶2阶修正能量无

[36]2022,Hu 1维谱精度2阶修正能量无

[37]2023,Zhang 1维4阶2阶修正能量无

1.3研究内容

基于以上研究的空白,一方面,注意到在诸多高精度数值方法中,显式龙格-库塔(RK)方法因其高阶精度和易于实现的特性而备受青睐.然而,标准 RK 方法未必能够

满足系统所期望保留的某些物理特性.为了解决这一问题,Ketcheson [39]提出了松弛龙格

库塔(RRK)方法,该方法能够保证系统在任何内积范数下的守恒或稳定性.随后,RRK技

术被扩展到一般的凸量上[40].通过在 RK更新的每一步中引入一个松弛参数,可以强制

实现相对于任何凸泛函的守恒、耗散或其他属性.然而,这些优势的代价是必须求解一个非线性代数系统来确定松弛参数.不过,对于非二次不变量的情况,作者们并未考虑构建

显式的守恒格式.幸运的是,不变能量二次化(IEQ)方法[41,42]和 SAV方法[35]可以通过

变量替换将非二次能量转化为新变量的二次形式,而由此产生的等价系统仍然保留了关

于新变量的类似能量守恒性质. IEQ方法和 SAV方法已被广泛应用于梯度流模型[43-46].

例如,具有熔体对流[47]的树状凝固相场模型,具有一般非线性势的梯度流方程[48],外延

薄膜生长模型[49],基于 SAV [50]的任意高阶无条件能量稳定格式.受到这些发展的启发,

本文结合 SAV方法和显式 RRK方法,为一维和二维 NFSWEs构造了一种任意高阶的保结构显式数值格式.

另一方面,值得注意的是,目前提出的算法仅能确保修正后的能量和(或)质量守恒.

然而,平均向量场(AVF)方法能够保持哈密顿系统的原始能量[51,52].近提出的分区平均

向量场(PAVF)方法不仅可以保持原始能量,还有可能保持更多的守恒性质,已被用于构

造哈密顿常微分方程的保结构方法[53].需要注意的是,NFSWEs 的哈密顿格式的推导是

构造 PAVF格式的前提.据了解,目前对分数阶微分方程哈密顿结构的研究还很有限.最

近,Wang 和 Huang [54]提出了涉及分数阶拉普拉斯泛函的变分导数,将一维分数阶非线性薛定谔方程重构为一个哈密顿系统. Fu 和 Cai [55]推导了二维分数阶 Klein-Gordon-

Schr"odinger方程的哈密顿形式,并给出了守恒格式.基于这些思路,本文推导了具有周期边界条件的二维 NFSWEs的哈密顿格式,并通过升级版的分区平均向量场(PAVF)方法成功构建了能够同时守恒原始能量和原始质量的数值格式.

1.4论文安排

本文结构安排如下:

第2章简要介绍了分数阶微积分、傅里叶谱方法以及分区平均向量场方法.

第3章主要分为6节.在第3.1节中,通过引入一个标量辅助变量,将 NFSWEs 重构为一个等价系统.第3.2节至第3.3节通过对等价系统应用傅里叶拟谱方法以及显式RRK方法,构造了一个保结构的高阶显式格式.在第3.4节中,进一步估计引入的松弛系数,以确定松弛方法的精度.第3.5节通过数值算例验证了所提出格式的精度和守恒特性,并将其应用到其他类似方程以展示其普适性.最后,在第3.6节中进行了简要总结.

四川师范大学硕士学位论文

第4章主要分6节.在第4.1节,首先推导了 NFSWEs 的哈密顿结构,接着在4.2节中通过使用傅里叶拟谱方法在空间方向进行半离散.在第4.3节,通过使用升级版的PAVF 方法对前述空间半离散系统进行离散化,得到能够同时守恒原始能量和原始质量的数值格式,并证明了离散守恒定律.为了比较,在第4.4节中给出了用于求解 NFSWEs的其他二阶 AVF系列格式.在第4.5节,通过丰富的数值算例进一步验证了理论结果.第

4.6节简要总结了一些结论.

第5章为总结与展望.

2预备知识

在引入本文主要内容之前,本章首先介绍了分数阶微积分、傅里叶谱方法以及分区平均向量场方法.

2.1分数阶微积分理论

分数阶微积分理论是数学的重要分支,它是传统的整数阶微积分理论的推广.最早提出这一思想的是德国数学家 G.W.Leibniz.他在1695年给 L’Hôpital 的信件中讨论了

1/2阶倒数.在之后的300多年发展中,许多数学家为分数阶微积分理论作出了杰出的贡

献[56].研究者们发现,分数阶微分算子与整数阶微分算子不同,具有非局部性,非常适合

描述现实世界中具有记忆以及遗传性质的变化过程.它已成为描述各类复杂力学与物理行为的重要工具之一.分数阶微分方程被广泛地应用于反常扩散、黏弹性力学、流体力学、管道边界层效应、电磁波、量子经济等.然而,分数数阶微分方程的解析解通常包含一些特殊函数,如 Mittag-Lefﬂer函数、Fox函数和 Wright函数等,这些函数由无穷级数定义,其解析解很难显式给出.因此,对分数阶微分方程寻找有效的数值模拟方法就显得尤为重要.然而,到目前为止,关于分数阶微分方程的数值计算仍存在大量挑战性难题,例如长时间历程的计算和大空间区域的计算等.在对空间分数阶方程进行数值求解时,如何有效逼近分数阶拉普拉斯算子是最为关键的一步.在过去的几十年,众多数学家针对一问题进行了深入的研究,其中,最为有效的途径是利用分数阶拉普拉斯算子与 Riesz

导数在齐次 Dirichlet边界条件下的等价性关系[57,58],即

−(−∆)α/2u(x):=−1

2 cos απ

(

−∞D

α

xu(x)+ xD

α

+∞u(x)

)

,(2.1)

其中−∞D

α

xu(x)为左 Riemann-Liouville分数阶导数

−∞D

α

xu(x)=

Γ(2−α)

d2

dx2

∫ x

−∞

u(ξ)

(x−ξ)α−1

dξ,(2.2)

xD

α

+∞u(x)为右 Riemann-Liouville分数阶导数

xD

α

+∞u(x)=

Γ(2−α)

d2

dx2

∫−∞

x

u(ξ)

(ξ− x)α−1

dξ.(2.3)

注意到, Riesz分数阶导数可看作左右 Riemann-Liouville分数阶导数的线性组合.基于上述等价关系,对于分数阶拉普拉斯算子或 Riemann-Liouville分数阶导数的数值逼近已存

在很多数值方法,如有限元方法[59,60],间断 Galerkin方法[61],谱方法[62,63],有限差分方

法[64,65]等.此外,分数阶中心差分方法是对 Riesz导数的一个直接离散方法,该方法由

四川师范大学硕士学位论文

[66]首次提出,随后,基于带权平均思想,更高阶 Riesz导数逼近被提出[67,68].同时,分数

阶拉普拉斯算子有下列奇异积分形式的等价性[66]

(−∆)α/2u(x)= Cα

∫+∞

−∞

u(x)− u(y)

|x− y|1+α

dy,(2.4)

其中常数 Cα=

α2α−1Γ(α+1

2)

π1/2Γ(−α

2)

.基于上述等价性,许多学者也给出了很多数值方法[69,70].在

周期边界下,分数阶拉普拉斯算子定义为[71]

(−∆)α/2u(x)=

∑

k∈Z

|µk|αûkeiµkx,(2.5)

其中, x ∈ T, ûk 表示傅里叶系数,即

u =

∑

k∈Z

ûke

iµkx, ûk =

L

∫

T

u(x)e−iµkxdx,(2.6)

这里,µ=2π/L,T = R/LZ表示长度为 L的一维环面.

2.2傅里叶谱方法

对于在(−∞,∞)有定义且绝对可积、并在任一有限区间上满足狄利克莱条件的函数 u(x),傅里叶变换(Fourier transform)及其逆变换(inverse Fourier transform)定义为:

û(k)=

∫∞

−∞

u(x)e−ikx dx,(2.7)

u(x)=

2π

∫∞

−∞

û(k)eikx dk.(2.8)

上述定义式给出了一个傅里叶变换对,此处将它们记为 û(k)= F [u(x)]和 u(x)=F−1[û(k)].实际上,傅里叶变换对的定义并不是唯一的,两个定义式中的系数可以随意修改,只要它们的积为1/2π即可.此外,定义式中的 e−ikx 和 eikx(称为积分变换的核)也可以互换.容易知道,u(x)先后经过傅里叶变换及其逆变换仍将得到它本身,即:u(x)=F−1{F [u(x)]}.

通常来讲,若不对傅里叶变换加任何限定,那么它指的就是连续傅里叶变换,也就是针对定义在无限区间内的连续函数 u(x)的傅里叶变换,这是在理想条件下的数学定义.在实际应用中,尤其是计算机的信号采样、信号处理当中,信号是离散的、有限的,离散傅里叶变换就是针对这一情况提出的.对于序列 u1,..., uj,..., uN 的离散傅里叶变换及

逆变换定义为[72]:

N∑

−2π(j−1)(k−1)i

N , k =1,..., N,(2.9)

uj =

N

N∑

k=1

ûke

2π(j−1)(k−1)i

N , j =1,..., N.(2.10)同样,上述定义中的归一化系数也可以有其他选择,但它们的乘积必须为1/N .如果将序列 u1,..., uj,..., uN 看作等间隔空间(时间)点上的信号幅度值,那么经过离散傅里

叶变换得到的序列 û1,..., ûk,..., ûN 就是其相应的频谱信息.通过定义式(2.9)和(2.10)容易得到 ûk = ûk+N 和 uj = uj+N .可见,离散傅里叶变换已经隐含了周期性边界条件.

对于 F [u′(x)],由傅里叶变换的定义和分部积分法,得到:

F [u′(x)]=

∫∞

−∞

u′(x)e−ikx dx = u(x)e−ikx∣∣∞

−∞−

∫∞

−∞

u(x)(−ik)e−ikx dx.(2.11)当| x |→∞时, u(x)→0,则:

F [u′(x)]= ik

∫∞

−∞

u(x)e−ikx dx = ikF [u(x)].(2.12)

类似地,可以得到:

F

[

u(n)(x)

]

=(ik)nF [u(x)],(2.13)其中 u(n)(x)代表 u(x)的 n 阶导数.上式的意义在于:函数的求导运算在傅里叶变换的作用下,可转化为相对简单的代数运算,即: u(n)(x)= F−1{(ik)nF [u(x)]}.正是基于此原理,傅里叶谱方法利用傅里叶变换将偏微分方程中空域或时域上的求导运算简化为频域上的代数运算,求解后再通过傅里叶逆变换得到空域或时域上的结果.在代码层面上,Matlab提供的快速傅里叶变换函数 fft、逆变换函数 ifft以及强大的矩阵运算能力也为简洁、优雅地实现傅里叶谱方法奠定了基础.

2.3分区平均向量场方法

考虑以下哈密顿系统

dw

dt

= f(w)= Sk∇H(w), w(0)= w0,(2.14)其中 w ∈ Rk,Sk 是一个 k × k 的反对称矩阵,k 是偶数,哈密顿量 H(w)充分光滑.系统

(2.14)的二阶 AVF格式定义为

wm+1− wm

τ

=

∫1

f

(

εwm+1+(1−ε)wm

)

dε

= Sk

∫1

∇H

(

εwm+1+(1−ε)wm

)

dε,

(2.15)

其中τ是时间步长.不妨令 k =2d,w =(w1, w2,, wd;wd+1, wd+2,, w2d)

T =(y, z)T ,

则原始问题(2.14)可描述为如下等价系统:(

ẏ

)

(

Hy(y, z)

)

, y, z ∈ Rd,(2.16)

四川师范大学硕士学位论文

其中 S2d是一个辛矩阵.

AVF方法得到的数值格式只能保持原始哈密顿量,而在某些系统下,PAVF方法能够

保持额外的原始不变量.系统(2.14)的 PAVF格式定义为

τ

(

ym+1− ym

zm+1− zm

)

= S2d

(∫1

Hy (εy

m+1+(1−ε)ym, zm) dε∫1

Hz (y

m+1,εzm+1+(1−ε)zm) dε

)

.(2.17)

注意到 PAVF方法(2.17)仅具有一阶精度[53].为了提高精度将 PAVF方法与其伴随

方法相结合,得到 PAVF组合(PAVF-C)方法和 PAVF升级版(PAVF-P)方法.设上述

PAVF方法(2.17)为Φτ,其伴随方法Φ∗

τ定义如下

τ

(

ym+1− ym

zm+1− zm

)

= S2d

(∫1

Hy (εy

m+1+(1−ε)ym, zm+1) dε∫1

Hz (y

m,εzm+1+(1−ε)zm) dε

)

.(2.18)

PAVF组合法(PAVF-C)

Υτ:=Φ∗

τ

◦Φτ

,(2.19)

PAVF加法(PAVF-P)

Υ̂τ:=

(

Φ∗

τ

+Φτ

)

.(2.20)

可以验证,PAVF-C 以及 PAVF-P 方法均能在保持原始哈密顿量守恒的同时,额外保持某

些系统的其他不变量守恒,并且具有二阶精度[53].

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

本文主要考虑具有周期边界的空间非线性分数阶薛定谔波动方程(NFSWEs)的初

边值问题

utt +(−∆)α/2u+ iκut +β|u|2u =0, x ∈Ω, t ∈(0, T ],(3.1)

u(x,0)= u0(x), ut(x,0)= u1(x), x ∈Ω,(3.2)

u(x+L, t)= u(x, t), t ∈[0, T ],(3.3)

其中,i =

√

−1,1<α≤2,κ,β(>0)为实常数,u(x, t)是未知的复值函数,u0(x)和 u1(x)为已知的光滑函数,x ∈Ω⊂Rd (d=1,2),L是周期.分数阶拉普拉斯算子可以通过傅里叶变

换表示为:

(−∆)

α

2 u(x, t)= F−1[|ξ|αF(u(ξ, t))],(3.4)

其中,F 和 F−1分别表示傅里叶变换及其逆变换[73].

设 Lp(Ω)为定义在Ω上的可测复函数空间.定义内积和范数如下:

(u, v)=

∫

Ω

uv̄ dx,∥u∥Lp =

(∫

Ω

|u|pdx

)1

p

,1≤ p <∞,(3.5)

其中 v̄表示 v 的复共轭.与许多其他基于物理场景的微分模型一样,所研究的具有周期

性边界条件的初边值问题(3.1)-(3.3)具有如下两条守恒定律[16,34]

质量守恒:

G(t)=κ∥u(, t)∥2+2 Im (ut, u)= G(0),0≤ t ≤ T,(3.6)

能量守恒:

E(t)=∥ut(, t)∥2+

∥∥(−∆)

α

4 u(, t)

∥∥2+β

∥u(, t)∥4L4= E(0),0≤ t ≤ T,(3.7)

证明.将方程(3.1)与 u求内积,并取虚部,有

Im (utt, u)+ Im

(

(−∆)α/2u, u

)

+ Im (iκut, u)+ Im

(

β|u|2u, u

)

=0.(3.8)

不难验证

Im (utt, u)=

d

dt Im (ut, u), Im (iut, u)=

d

dt∥u(, t)∥

L2.(3.9)

四川师范大学硕士学位论文

将方程(3.9)代入方程(3.8)得到

κ

d

dt∥u(, t)∥

L2+2

d

dt Im (ut, u)=0,(3.10)

此处使用了 Im

(

(−∆)α/2u, u

)

=0,详见[74]引理3.1的证明.

类似地,将方程(3.1)与 ut求内积,并取实部,得到

Re (utt, ut)+ Re

(

(−∆)α/2u, ut

)

+ Re (iκut, ut)+ Re

(

β|u|2u, ut

)

=0.(3.11)

容易验证

Re (utt, ut)=

d

dt ∥ut(, t)∥

L2,Re

(

|u|2u, ut

)

=

d

dt∥u(, t)∥

L4.(3.12)

此外,有

Re

(

(−∆)α/2u, ut

)

=

d

dt

∥∥(−∆)α/4u(, t)

∥∥2

L2,(3.13)

参见[74]引理3.2的证明.将方程(3.12)和(3.13)代入方程(3.11)得到

d

dt ∥ut(, t)∥

L2+

d

dt

∥∥(−∆)α/4u(, t)

∥∥2

L2+

β

d

dt∥u(, t)∥

L4=0.(3.14)

其与方程(3.10)分别意味着质量守恒(3.6)和能量守恒(3.7).□

3.1 NFSWEs的 SAV格式

众所周知,所有的 RK方法都可以保持任意线性不变量,只有辛 RK方法能够保持任意二次不变量.然而,并不存在标准 RK 方法可以保持高于二次的不变量或非多项式不变量.为了克服这一限制并利用松弛 RK 方法保持二次不变量的特性,本节采用最近提出的 SAV方法将 NFSWEs (3.1)以二次能量泛函的等价形式重新表述.

为了保证能量的正性,在β

∥u(, t)∥4L4中添加一个正常数 C0来修改(3.7)中的能量.

鉴于 C0已知,这种修改对于(3.7)中系统的能量不变性没有实质性影响.因此,此处继续

使用 E(t)表示修改后的能量,即

E(t)

def

=∥ut(, t)∥2+

∥∥(−∆)

α

4 u(, t)

∥∥2+β

∥u(, t)∥4L4+ C0.(3.15)

在此基础上,引入一个标量辅助变量

H(t)+ C0,(3.16)

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

这里 H(t)

def

=β

∥u(, t)∥4L4.直接计算得到

wt =

√

H(t)+ C0

dH(t)

dt

=

√

H(t)+ C0

d

dt

∫

Ω

β

|u|4dx

=

β√

H(t)+ C0

∫

Ω

|u|2ℜ(uūt) dx

=ℜ

∫

Ω

β|u|2uūt√

H(t)+ C0

dx

=ℜ(b(u), ut),(3.17)

其中

b(u)

def

=βg(|u|2)u/

√

H(t)+ C0,(3.18)

ℜ表示实部,(,)表示Ω上的 L2内积.

因此,NFSWEs (3.1)-(3.3)可以等价地重新表述为

ut = v,(3.19)

vt =−(−∆)α/2u− iκv − b(u)w,(3.20)

wt =ℜ(b(u), ut),(3.21)

初始条件为

u(x,0)= u0(x), v(x,0)= u1(x), w(0)=

√

β

∥u0∥4L4+ C0.(3.22)

将系统(3.19)-(3.20)分别与 vt 和 ut 做内积,(3.21)乘以 w(t)并求和,然后在[0, t]上

积分,得到重构后的修正能量守恒定律

E(t)=∥v(, t)∥2+

∥∥(−∆)

α

4 u(, t)

∥∥2+ w2(t)= E(0),(3.23)

这与 NFSWEs (3.1)-(3.3)的原始能量守恒定律(3.7)本质上是一致的.

3.2傅里叶拟谱离散格式

傅里叶拟谱法是解决偏微分方程的一种成熟技术,它是非局部方法,这与分数阶薛定谔方程中的分数阶拉普拉斯算子的非局部性质相契合.傅里叶基函数是周期边界条件下的拉普拉斯算子的特征函数,且快速傅里叶变换(FFT)的使用使编程更加简便,可以大大减少计算量,提高计算效率.因此,本文利用傅里叶拟谱法对等价系统(3.19)到(3.22)进行空间离散化.

四川师范大学硕士学位论文

不失一般性,设空间维度为2(即 d =2).对于正整数M 和正偶数 Nx、Ny,定义τ=T/M ,hx = L/Nx,hy = L/Ny.令Ωh ={(xi, yj)|0≤ i ≤ Nx −1;0≤ j ≤ Ny −1},Ωτ=

{tm |0≤ m ≤M},Ωτ

h =Ωh ×Ωτ,其中 tm = mτ,xi = ihx,yj = jhy.在任意时间层 tm,定

义向量形式为

Um =

(

um0,0,, umNx−1,0, u

m

0,1,, umNx−1,1,, um0,Ny−1,, umNx−1,Ny−1

)T

,(3.24)

V m =

(

vm0,0,, vmNx−1,0, v

m

0,1,, vmNx−1,1,, vm0,Ny−1,, vmNx−1,Ny−1

)T

,(3.25)

Wm = wm.(3.26)

对于定义在Ωh上的任意网格函数 u和 v,定义离散内积和相关的离散范数如下

(u, v)= hxhy

Nx−1∑

i=0

Ny−1∑

j=0

ui,j v̄i,j,∥u∥=(u, u)

2,∥u∥∞= sup

(xi,yj)∈Ωh

|ui,j|.(3.27)

设(xi, yj)为傅里叶插值点, uN(x, y)为 u(x, y)的插值多项式函数,其中

uN(x, y)=

Nx/2∑

k1=−Nx/2

Ny/2∑

k2=−Ny/2

ũk1,k2e

iµ(k1(x+L)+k2(y+L)),(3.28)

这里µ=π/L,系数

ũk1,k2=

Nxck1

Nyck2

Nx−1∑

l1=0

Ny−1∑

l2=0

u(xl1, yl2)e

−iµ(k1(xl1

+L)+k2(yl2+L)),(3.29)

其中

ck1=

1, if |k1|< Nx

2, if |k1|= Nx

, ck2=

1, if |k2|< Ny

2, if |k2|= Ny

.(3.30)

因此

−(−∆)

α

2 uN (x, y)=−

Nx/2∑

k1=−Nx/2

Ny/2∑

k2=−Ny/2

∣∣(k1µ)2+(k2µ)

∣∣α2 ũk1,k2eiµ(k1(x+L)+k2(y+L)).

(3.31)

将(3.29)插入(3.31),并考虑在点(xi, yj)处得到的方程:

−(−∆)

α

2 uN (xi, yj)

=

Nx−1∑

l1=0

Ny−1∑

l2=0

u(xl1, yl2)

(

−

Nx/2∑

k1=−Nx/2

Ny/2∑

k2=−Ny/2

Nxck1

Nyck2

∣∣µ2 k2

∣∣α2 eiµ(k1(xi−xl1)+k2(yj−yl2))

)

=(DαU)i+jNx

,(3.32)

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

其中µ2 k2=µ2(k21+ k22),D

α是具有以下元素的谱对称微分矩阵:

(Dα)i+jNx,l1+l2Nx

=−

Nx/2∑

k1=−Nx/2

Ny/2∑

k2=−Ny/2

Nxck1

Nyck2

∣∣µ2 k2

∣∣α2 eiµ(k1(xi−xl1)+k2(yj−yl2)).

(3.33)

将傅里叶拟谱法应用于之前的等价系统(3.19)-(3.21),得到空间半离散系统如下:

Ut = V,(3.34)

Vt = DαU − iκV − b(U) W,(3.35)

Wt =ℜ(b(U), Ut),(3.36)

其初始条件为 U0, V 0,W 0,这里的表示向量之间的点乘.对于空间半离散系统(3.34)到(3.36),有以下定理.

定理3.1.空间半离散系统(3.34)-(3.36)具有半离散二次能量守恒律

dE

dt

=0,(3.37)

其中

E(U, V,W )

def

=∥V ∥2+∥D

α

2U∥2+(W )2.(3.38)

证明.将(3.34)和(3.35)分别与 Vt 和 Ut 做内积,同时将(3.36)乘以W ,得到以下方

程:

(Vt, Ut)=(Vt, V ),(3.39)

(Vt, Ut)=(DαU,Ut)− iκ(V, Ut)−W (b(U), Ut),(3.40)

WWt = Wℜ(b(U), Ut).(3.41)

将方程(3.39)-(3.41)相加,得到

(Vt, V )+WWt =(DαU,Ut)− iκ(V, Ut)−W (b(U), Ut)+Wℜ(b(U), Ut).(3.42)

取实部得

ℜ(Vt, V )+ℜ(WWt)=ℜ(DαU,Ut)−ℜ(iκ(V, Ut))−Wℜ(b(U), Ut)+Wℜ(b(U).Ut).

(3.43)

因此,

ℜ(Vt, V )+ℜ(WWt)=ℜ(DαU,Ut).(3.44)

四川师范大学硕士学位论文

注意到

ℜ(Vt, V )=

d

dt

∥V ∥2,ℜ(WWt)=

d

dt

(W )2,ℜ(DαU,Ut)=−1

d

dt

∥D

α

2U∥2,(3.45)

将(3.45)代入(3.44)得到

d

dt

(

∥V ∥2+∥D

α

2U∥2+(W )2

)

=0.(3.46)

证毕.□

3.3显式 SAV-RRK方法

为简洁起见,引入以下符号:

y =(U, V,W )T , y0=

(

U0, V 0,W 0

)T

,

f =(f 1, f 2, f 3)T

def

=(V,DαU − iκV − b(U) W,ℜ(b(U), Ut))T .

(3.47)

然后,基于 SAV方法的半离散系统(3.34)-(3.36)可以重写为:{

yt = f(y), t ∈(0, T ],y(0)= y0.

(3.48)

设 ym是 y (tm)的近似.(3.48)的 s级显式 RK格式[75]为:

Ymi = ym +τ

i−1∑

j=1

aijfmj, i =1,..., s,

ym+1= ym +τ

s∑

i=1

bifmi,

(3.49)

其中 fmj = f (Ymj),j =1,..., s.定义矩阵 A和向量 b如下:

A =(aij)s×s , aij =0对于 j ≥ i,

b =(b1,, bs)T ,

(3.50)

于是 s级显式 SAV-RK格式可以用 Butcher表表示为:

c A

bT

,(3.51)

其中向量 c =(c1, c2,..., cs)满足 ci =

s∑

j=1

aij ,i =1,..., s.

然而,众所周知,只有特定的隐式 RK方法可能是辛的或代数上稳定的,不存在辛的或代数稳定的显式 RK方法.这导致了显式 SAV-RK方法无法保持原始问题(3.48)的能量

守恒特性.因此,引入松弛 RK技术.具体而言,考虑在区间

t̂m, t̂m+1

,m ≥0上的单步操

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

作,设 ym

γ=

(

Um

γ, V

m

γ,Wm

γ

)T

是 y

(

t̂m

)

的数值逼近,那么对于(3.48),s级显式 SAV-RRK

方法定义为:

Ymi = ym

γ+τ

i−1∑

j=1

aijfmj, i =1,..., s,

ym+1

γ= ym

γ+γmτ

s∑

i=1

bifmi.

(3.52)

同样,s级 RRK方法(3.52)可以用 Butcher表表示为:

c A

b̃T

,(3.53)

其中 b̃=γmb,γm ̸=0,并且满足:

Em+1

γ= Em

γ,若

s∑

i=1

bifmi ̸=0,

γm =1,若

s∑

i=1

bifmi =0,

(3.54)

这里

Em

γ=∥V m

γ∥2+∥D

α

2Um

γ∥2+

(

Wm

γ

)2

.(3.55)

显式 SAV-RRK方法(3.52)的一个显著优势在于可以通过调整参数γm使其达到能量

守恒的目的.实际上,从式(3.54)中可知,当

s∑

i=1

bifmi =0时,取γm =1.当

s∑

i=1

bifmi ̸=0时

Em+1

γ=∥V m

γ∥2+∥D

α

2Um

γ∥2+

(

Wm

γ

)2

+

(

V m

γ,γmτ

s∑

i=1

bif

mi

)

+

(

γmτ

s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ

)

−

(

Um

γ, D

α

(

γmτ

s∑

i=1

bif

mi

))

−

(

γmτ

s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ

)

+2Wm

γγmτ

s∑

i=1

bif

mi +

(

γmτ

s∑

i=1

bif

mi

)2

.(3.56)

将其与(3.54)结合,得到:

γmτ

[(

V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi

)

+

( s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ

)

−

(

Um

γ, D

α

( s∑

i=1

bif

mi

))

−

( s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ

)

+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

]

+γ2mτ

[∥∥ s∑

i=1

bif

mi

∥∥2+∥∥D α

( s∑

i=1

bif

mi

)∥∥2+( s∑

i=1

bif

mi

)2]

=0,

这是关于γm的二次方程.注意到γm ̸=0,因此可得:

γm=

(

V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi

)

+

( s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ

)

−

(

Um

γ, Dα

( s∑

i=1

bif

mi

))

−

( s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ

)

+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

−τ

[∥∥ s∑

bif2

mi

∥∥2+∥∥D α

( s∑

bif1

mi

)∥∥2+( s∑

bif3

mi

)2].

四川师范大学硕士学位论文

这意味着当

s∑

i=1

bifmi ̸=0时,γm的值也可以通过式(3.57)显示计算确定.

实际上,定义在(3.54)中的γm 的值在τ→0时接近于1,这将在3.4.1节中进一步讨论.因此,显式 SAV-RRK方法(3.52)是良定的.此外,可以证明该方法具有以下定理中描述的能量守恒律.

定理3.2.设显式 SAV-RK方法(3.49)的阶数至少为2,则显式 SAV-RRK方法(3.52)的

解满足

Em+1

γ= Em

γ,(3.58)

其中 Em

γ由(3.55)定义.

证明.当

s∑

i=1

bifmi =0时,根据(3.52)中的第二个方程可知, ym+1

γ≡ ym

γ,它自动满足

式(3.58).对于

s∑

i=1

bifmi ̸=0的情况,可从条件(3.54)中得到式(3.58).证毕.□

3.4显式 SAV-RRK方法的精度

在本节中,将讨论显式 SAV-RRK方法(3.52)的精度.为此,首先估计松弛因子γm,它在接下来的分析中起着关键作用.虽然松弛因子γm往往在不同时间层会发生变化,但可

通过类似的方式在不同步骤上进行估计.因此,这里只考虑作区间

[

t̂m, t̂m+1

]

内的讨论.

3.4.1松弛因子的估计

因为

s∑

i=1

bifmi =0的情况很简单,本文将仅关注

s∑

i=1

bifmi ̸=0的情况.令

Sm(γ)=

∥∥V m

γ+γτ

s∑

i=1

bif

mi

∥∥2+∥∥D α

(

Um

γ+γτ

s∑

i=1

bif

mi

)∥∥2

+

(

Wm

γ+γτ

s∑

i=1

bif

mi

)2−∥V m

γ∥2−∥D

α

2Um

γ∥2−

(

Wm

γ

)2

,

(3.59)

则式(3.54)中定义的γm的值恰好是函数 Sm(γ)的非零根.此外,对 Sm(γ)有以下结果.

引理3.3.设显式 SAV-RK方法(3.49)的阶数为 p,则有

Sm(1)= O(τ p+1).(3.60)

证明.类似于[76]中引理3.1的证明,考虑初值问题{

ỹ′= f(ỹ), t ≥ t̂m,

(3.61)

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

其中 ym

γ是显式 SAV-RRK方法(3.52)的解.通过使用显式 SAV-RRK方法(3.52)进行单步

计算,得到数值解 ym+1

γ.根据式(3.59),有

Sm(γ)=∥V m+1

γ∥2+∥D

α

2Um+1

γ∥2+

(

Wm+1

γ

)2−∥V m

γ∥2−∥D

α

2Um

γ∥2−

(

Wm

γ

)2

=∥V m+1

γ∥2+∥D

α

2Um+1

γ∥2+

(

Wm+1

γ

)2−∥Ṽ(t̂m)∥2−∥D

α

2 Ũ(t̂m)∥2−

(

W̃(t̂m)

)2

.

(3.62)

从 ym

γ开始,对于足够小的τ,显式 SAV-RK方法(3.49)生成阶数为 p的数值解 ỹm+1,

有 ỹm+1= ỹ

(

t̂m +τ

)

+ O (τ p+1).值得注意的是,当γ=1时,由式(3.52)定义的显式

SAV-RRK方法将简化为由式(3.49)描述的显式 SAV-RK方法.也就是说,ym+1

γ= ỹm+1.因

此,可以得到

Sm(1)=∥Ṽ m+1∥2+∥D

α

2 Ũm+1∥2+

(

W̃m+1

)2−∥Ṽ(t̂m)∥2−∥D

α

2 Ũ(t̂m)∥2−

(

W̃(t̂m)

)2

=∥Ṽ m+1∥2−∥Ṽ(t̂m +τ)∥2+∥Ṽ(t̂m +τ)∥2−∥Ṽ(t̂m)∥2

+∥D

α

2 Ũm+1∥2−∥D

α

2 Ũ(t̂m +τ)∥2+∥D

α

2 Ũ(t̂m +τ)∥2−∥D

α

2 Ũ(t̂m)∥2

+

(

W̃m+1

)2−(W̃(t̂m +τ)

)2

+

(

W̃(t̂m +τ)

)2−(W̃(t̂m)

)2

=O

(

τ p+1

)

+2

∫ t̂m+τ

t̂m

[

ℜ

(

Vt, V

)

+ℜ

(

WWt

)

−ℜ

(

DαU,Ut

)]

dt.(3.63)

将式(3.44)代入方程(3.63)即可完成证明.□根据引理3.3,可以得到以下关于松弛因子γm的估计.

定理3.4.设显式 SAV-RK方法(3.49)的阶数为 p (p ≥2),那么在式(3.54)中定义的

松弛因子γm满足

γm =1+O(τ p−1).(3.64)

证明.根据

s∑

i=1

bifmi的值考虑两种情况.

情况1:当

s∑

i=1

bifmi =0时,根据式(3.54)中γm的定义,有γm =1,这显然满足(3.64).

情况2:当

s∑

i=1

bifmi ̸=0时,由式(3.56)可得

Sm(γ)= Em+1

γ− Em

γ

=γτ

[

(V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi)+(

s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ)−(Um

γ, D

α(

s∑

i=1

bif

mi))−(

s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ)

+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

]

+γ2τ2

[

∥

s∑

i=1

bif

mi∥2+∥D

α

2(

s∑

i=1

bif

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif

mi)

]

.

(3.65)

四川师范大学硕士学位论文

注意到 Sm(γ)是γ的二次函数,它有非零根

γ=

τ

[

(V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi)+(

s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ)−(Um

γ, Dα(

s∑

i=1

bif

mi))−(

s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ)+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

]

−τ2

[

∥

s∑

i=1

bif2

mi∥2+∥D α

2(

s∑

i=1

bif1

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif3

mi)

].

(3.66)

根据引理3.3,有

Sm(1)=τ

[

(V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi)+(

s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ)−(Um

γ, D

α(

s∑

i=1

bif

mi))−(

s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ)

+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

]

+τ2

[

∥

s∑

i=1

bif

mi∥2+∥D

α

2(

s∑

i=1

bif

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif

mi)

]

,

(3.67)

其阶数为 O(τ p+1).定义 f̃m = f

(

y

(

t̃m

))

,那么当τ→0时,有 fmi = f̃m +O(τ).因此,

有

τ2

[

∥

s∑

i=1

bif

mi∥2+∥D

α

2(

s∑

i=1

bif

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif

mi)

]

=τ2

[

∥

s∑

i=1

bif̃

mi∥2+∥D

α

2(

s∑

i=1

bif̃

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif̃

mi)

]

+O(τ3)

=O(τ2).(3.68)

将(3.68)和(3.67)代入(3.66)中,得到

γ=1+

O(τ p+1)

−τ2

[

∥

s∑

i=1

bif 2

mi∥2+∥D α

2(

s∑

i=1

bif 1

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif 3

mi)

]

=1+

O(τ p+1)

O(τ2)

=1+O(τ p−1).(3.69)

证毕.□

注记3.1.定理3.4表明,当τ→0时,松弛因子γm接近于1,这意味着松弛 RK方法可以被视为标准 RK方法的小扰动.

3.4.2显式 SAV-RRK方法的截断误差

基于定理3.4给出的松弛因子γm 的估计,本小节进一步研究显式 SAV-RRK 方法(3.52)的精度.

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

在这之前,将显式 SAV-RRK方法(3.52)重新表示为

Ymi = ym

γ+τ

i−1∑

j=1

aijfmj, i =1,..., s,

ym+1= ym

γ+τ

s∑

i=1

bifmi,

ym+1

γ= ym+1+(γm −1)

(

ym+1− ym

γ

)

.

(3.70)

前两个方程本质上构成标准的显式 SAV-RK方法.

数值解 ym+1

γ在 t̂m+1处可以从如下两种角度进行解释[39]

•增量方向技术(IDT)的角度:ym+1

γ被视为对 y

(

t̂m +τ

)

的近似,当m ≥0,t̂m = tm.

•松弛技术(RT)的角度:ym+1

γ被视为对 y

(

t̂m +γmτ

)

的近似,当m >0时,t̂m可能不

等于 tm.

值得注意的是,对数值解 ym+1

γ的不同解释可能导致不同的收敛结果.参考[77]中引

理2.7的证明思路,得到了以下结果.

定理3.5.设显式 SAV-RK方法(3.49)的阶数为 p (p ≥2),则有•对于 IDT,显式 SAV-RRK方法(3.52)的阶数为 p−1.•对于 RT,显式 SAV-RRK方法(3.52)的阶数为 p.

证明.设 t̂mi = t̂m + ciτ, i =1,..., s,则从式(3.70)中的第二个方程可以得到

y

(

t̂m +τ

)

= y

(

t̂m

)

+τ

s∑

i=1

bif

(

y

(

t̂mi

))

+O

(

τ p+1

)

.(3.71)

现在估计式(3.70)中第三个方程的截断误差.定义

ϕm(y(t))

def

= y

(

t̂m

)

+τ

s∑

i=1

bif

(

y

(

t̂mi

))

,

以及

y

(

t̂m+1

)

=ϕm(y(t))+(γm −1)

(

ϕm(y(t))− y

(

t̂m

))

+ Tm+1.(3.72)

利用定理3.4中给出的γm =1+O (τ p−1),可以从(3.71)中得到

Tm+1=y

(

t̂m+1

)

−ϕm(y(t))−(γm −1)

(

ϕm(y(t))−y

(

t̂m

))

=y

(

t̂m+1

)

−

(

y

(

t̂m+τ

)

−O(τ p+1)

)

−(γm −1)

(

y

(

t̂m +τ

)

−O(τ p+1)−y

(

t̂m

))

=y

(

t̂m+1

)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm −1)

(

y

(

t̂m +τ

)

−y

(

t̂m

))

+O(τ p+1)+O((γm −1)τ p+1)

=y

(

t̂m+1

)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm −1)y′(t̂m +τ

)

τ+O((γm −1)τ2)+O(τ p+1)

=y

(

)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm −1)y′(t̂m +τ

)

τ+O(τ p+1).

(3.73)

四川师范大学硕士学位论文

对于 IDT,ym+1

γ被视为在 t̂m +τ处的近似,因此 t̂m+1= t̂m +τ,这意味着

Tm+1=−(γm −1)y′(t̂m +τ

)

τ+O

(

τ p+1

)

= O (τ p).

也就是说,方法(3.52)的阶数为 p−1.

对于 RT,由于 ym+1

γ被视为在 t̂m +γmτ处的近似.再次使用上述估计中的 Taylor展

开,有

Tm+1=y

(

t̂m+τ+(γm−1)τ

)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm−1) y′

(

t̂m+τ

)

τ+O(τ p+1)

=y

(

t̂m+τ

)

+(γm−1)y′(t̂m+τ

)

τ+O((γm−1)2τ2)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm−1)y′(t̂m+τ

)

τ+O(τ p+1)

=O(τ p+1).(3.74)

这意味着方法(3.52)的阶数为 p.□

注记3.2.在计算中,IDT 方法的阶数可能高于预期,甚至可以达到 RT 方法的阶数,这可以在例3.1中观察到.

注记3.3.本章提出的方法很容易拓展到其他类似的分数阶方程,例如非线性分数阶波动方程和分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger方程等,详见算例3.3-算例3.4.

3.5数值算例

本节中将通过数值算例展示显式 SAV-RRK方法(3.52)的精度和守恒性质.

不失一般性的,在计算中使用了以下的显式 RK方法[78]:

1. RK(2,2):两级二阶 Heun方法

.(3.75)

2. RK(3,3):三级三阶 Heun方法

.(3.76)

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

3. RK(4,4):四级四阶 Gill方法

00000

√

2−1

1−

√

10−

√

1+

√

2−

√

2+

√

.(3.77)

值得一提的是,本章的主要关注点是时间方向精度.因此,这里没有展示空间方向精度.另外,鉴于数值算例中能量的固有正性,在计算中简单地设置常数 C0=0.

时间方向上的误差和收敛阶通过以下方式计算:

Error(τ)=∥UM

N − U2M

N ∥∞, order = log2

[

Error(τ)

Error(τ/2)

]

.(3.78)

为了展示守恒性能,定义相对能量误差:

REm

γ=

∣∣∣∣Em

γ− E0

γ

E0

γ

∣∣∣∣,(3.79)

其中 Em

γ表示时刻 tm处的离散能量.

算例3.1.考虑一维 NFSWEs (3.1)-(3.3),形式如下[34]:

utt +(−∆)α/2u+ iut +|u|2u =0,(x, t)∈(−25,25)×[0, T ],(3.80)

其中 u(x,0)=(1+ i)xe−10(1−x)2且 ut(x,0)=0.

不失一般性,取α=1.5、T =1.表3.1展示了标准 SAV-RK、SAV-RRK(RT)和SAV-RRK(IDT)方法在时间方向上的误差和收敛阶.可以看到,所有的 SAV-RRK(RT)方法在收敛阶与标准 SAV-RK 方法保持一致,而 SAV-RRK(IDT)方法表现不同. SAV-RRK(IDT)(2,2)和 SAV-RRK(IDT)(4,4)展示出了比在定理3.5中预期阶数更高的收敛阶.

而 SAV-RRK(IDT)(3,3)并没有出现升阶现象.这种不同的行为可能归因于 max

|γm −1|

的收敛阶对于 SAV-RRK(RT)(2,2)和 SAV-RRK(RT)(4,4)提高了一个阶,如图3.1所示.

四川师范大学硕士学位论文

表3.1当N =32,T =1时,例3.1在时间方向的误差和收敛阶

RK(Stage,Order)τ

SAV-RK SAV-RRK(RT) SAV-RRK(IDT)

Error(τ) order Error(τ) order Error(τ) order

RK(2,2)

0.11.8552E-04-1.9063E-04-2.0325E-04-

0.054.6601E-051.99314.7240E-052.01265.0585E-052.0065

0.0251.1671E-051.99741.1750E-052.00741.2387E-052.0298

0.01252.9200E-061.99902.9294E-062.00402.9549E-062.0677

0.006257.3022E-071.99967.3130E-072.00216.6665E-072.1481

RK(3,3)

0.17.6862E-06-2.9857E-06-1.7245E-04-

0.059.5269E-073.01223.9037E-072.93524.3389E-051.9907

0.0251.1866E-073.00525.0077E-082.96261.0873E-051.9966

0.01251.4809E-083.00236.3449E-092.98052.7208E-061.9986

0.006251.8497E-093.00117.9858E-102.99016.8049E-071.9994

RK(4,4)

0.13.7701E-07-3.8894E-07-7.0733E-07-

0.052.3572E-083.99942.3939E-084.02214.4585E-083.9878

0.0251.4730E-094.00031.4843E-094.01152.8080E-093.9889

0.01259.2041E-114.00039.2397E-114.00581.7743E-103.9842

0.006255.7518E-124.00025.7630E-124.00291.1309E-113.9718

此外,为估计松弛因子γm,在图3.1中展示了在不同的时间步长τ下的max

m

|γm −1|

和 max

m

|Sm(1)|的计算结果.从中可以看出上述两个量的阶数与理论结果一致.这证实了引理3.3和定理3.4中的理论结果.值得一提的是,当取不同的α的值时,可以得到类似的结果.

-7.5-7-6.5-6-5.5-5-4.5-4-3.5-3

log

10-10

10-9

10-8

10-7

10-6

10-5

10-4

10-3

10-2

m

a

x

m

|

m

-

|

SAV-RRK(2,2)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(4,4)

(a) maxm |γm −1|

-7.5-7-6.5-6-5.5-5-4.5-4-3.5-3

log

10-18

10-16

10-14

10-12

10-10

10-8

10-6

m

a

x

m

|

S m

(

)

|

SAV-RRK(2,2)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(4,4)

(b) maxm |Sm(1)|

图3.1例3.1的一些松弛格式所对应的 maxm |γm −1|和 maxm |Sm(1)|.

使用 SAV-RRK(4,4)方法,在长时间模拟(T =1000)中,针对不同α取值的相对能量演化如图3.2所示.这表明所提出的格式捕捉到了原始问题的保结构现象,并且其守恒性

能明显优 SAV方法[35]和三层线性隐式差分法[32].

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

01002003004005006007008009001000

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

Lnear-Implicit

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(a)α=1.3

01002003004005006007008009001000

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

Lnear-Implicit

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(b)α=1.6

01002003004005006007008009001000

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

Lnear-Implicit

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(c)α=1.9

01002003004005006007008009001000

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

Lnear-Implicit

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(d)α=2

图3.2当N =32,τ=0.01时,例3.1取不同α对应的相对能量误差.

算例3.2.考虑具有以下初值的二维 NFSWEs (3.1):

u(x, y,0)= sech

(

x2+ y2

)

, ut(x, y,0)= sin(x+y) sech

(

−2

(

x2+ y2

))

,(x, y, t)∈Ω×[0, T ],

其中Ω=[−5,5]×[−5,5].

设α=1.5和 T =1,表3.2和图3.3分别展示了时间方向上的收敛阶以及松弛因子γ相关的理论验证.可以观察到,与一维算例3.1不同,在二维情况下,SAV-RRK(IDT)方法未出现任何升阶现象.

四川师范大学硕士学位论文

表3.2当N =4, T =1时,例3.2在时间方向的误差和收敛阶

RK(Stage,Order)τ

SAV-RK SAV-RRK SAV-RRK(IDT)

Error(τ) order Error(τ) order Error(τ) order

RK(2,2)

0.13.0217E-03-3.0102E-03-1.5692E-02-

0.057.4615E-042.01787.4702E-042.01069.6213E-030.7057

0.0251.8513E-042.01091.8587E-042.00695.2472E-030.8747

0.01254.6090E-052.00604.6341E-052.00392.7312E-030.9420

0.006251.1497E-052.00321.1569E-052.00211.3923E-030.9721

RK(3,3)

0.11.2581E-04-3.9379E-05-3.2535E-03-

0.051.6180E-052.95895.5726E-062.82107.9304E-042.0365

0.0252.0532E-062.97837.4443E-072.90411.9546E-042.0205

0.01252.5863E-072.98899.6210E-082.95194.8500E-052.0108

0.006253.2454E-082.99441.2228E-082.97601.2078E-052.0056

RK(4,4)

0.17.9185E-06-8.0508E-06-3.4013E-05-

0.054.9103E-074.01134.9644E-074.01943.3898E-063.3268

0.0253.0531E-084.00753.0805E-084.01043.6901E-073.1995

0.01251.9026E-094.00421.9182E-094.00544.2681E-083.1120

0.006251.1873E-104.00221.1966E-104.00275.1191E-093.0596

-7.5-7-6.5-6-5.5-5-4.5-4-3.5-3

log

10-8

10-7

10-6

10-5

10-4

10-3

10-2

10-1

m

a

x

m

|

m

-

|

SAV-RRK(2,2)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(4,4)

(a) maxm |γm −1|

-7.5-7-6.5-6-5.5-5-4.5-4-3.5-3

log

10-11

10-10

10-9

10-8

10-7

10-6

10-5

10-4

10-3

10-2

10-1

m

a

x

m

|

S m

(

)

|

SAV-RRK(2,2)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(4,4)

(b) maxm |Sm(1)|

图3.3例3.2的一些松弛格式所对应的 maxm |γm −1|和 maxm |Sm(1)|.

并在图3.4中绘制了取不同的α时,使用 SAV-RRK(4,4)方法进行长时间模拟(T =

100)的相对能量误差.结果显示,所提出的方法可以在离散层面上精确地保持能量,且其

能量守恒性能显著优于 SAV方法[35].

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(a)α=1.3

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(b)α=1.6

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(c)α=1.9

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(d)α=2

图3.4当N =4,τ=0.01时,例3.2取不同α对应的相对能量误差.

算例3.3.考虑二维非线性分数阶波动方程[79]

 utt +(−∆)

α

2 u+ F ′(u)=0,(x, y, t)∈Ω×(0, T ],

u(x, y,0)=1

arctan

(

exp

(

−

√

x2+ y2

))

, ut(x, y,0)=0,

(3.81)

其中Ω=(−10,10)×(−10,10),取势能 F (u)= u2

(

u2−1

)

.

取α=1.5和 T =1,表3.3展示了标准 SAV-RK、SAV-RRK(RT)和 SAV-RRK(IDT)方法在时间方向上的误差和收敛阶.此外,图3.5展示了长时间模拟(T =100)的离散能量演化,这些数据是通过应用 SAV-RRK(4,4)方法计算获得.结果表明,所提方法对非线性分数阶波动方程也是有效的.

四川师范大学硕士学位论文

表3.3当N =4, T =1时,例3.3在时间方向的误差和收敛阶

RK(Stage,Order)τ

SAV-RK SAV-RRK(RT) SAV-RRK(IDT)

Error(τ) order Error(τ) order Error(τ) order

RK(2,2)

0.11.3395E-03-3.3870E-03-2.1470E-02-

0.053.4360E-041.96288.1480E-042.05551.0960E-020.9701

0.0258.6945E-051.98261.9951E-042.03005.5113E-030.9918

0.01252.1865E-051.99154.9347E-052.01542.7600E-030.9977

0.006255.4823E-061.99581.2270E-052.00781.3807E-030.9993

RK(3,3)

0.13.5168E-05-4.3927E-05-3.8213E-04-

0.054.3533E-063.01415.4825E-063.00228.0473E-052.2475

0.0255.3902E-073.01376.8378E-073.00321.8560E-052.1163

0.01256.7058E-083.00688.5344E-083.00224.4475E-062.0611

0.006258.3615E-093.00361.0659E-083.00121.0883E-062.0309

RK(4,4)

0.15.3561E-07-3.2716E-06-3.7745E-05-

0.053.6438E-083.87772.0654E-073.98554.8050E-062.9737

0.0252.3735E-093.94031.2898E-084.00126.0237E-072.9958

0.01251.5146E-103.97008.0476E-104.00247.5303E-082.9999

0.006259.5636E-123.98535.0241E-114.00169.4105E-093.0004

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(a)α=1.3

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(b)α=1.6

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(c)α=1.9

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(d)α=2

图3.5当N =4,τ=0.01时,例3.3取不同α对应的相对能量误差.

3 NFSWEs的任意高阶显式能量守恒方法

算例3.4.考虑二维分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger方程[55]

i∂tu−1

(−∆)

α

2 u+ uϕ=0,(x, y, t)∈Ω×(0, T ],

∂ttϕ+(−∆)

β

2ϕ+ϕ−|u|2=0,(x, y, t)∈Ω×(0, T ],

(3.82)

初始条件为

u(x, y,0)=(1+ i) exp

(

−|x|2

)

,ϕ(x, y,0)= sech

(

|x|2

)

,

∂tϕ(x, y,0)= sin(x+ y) sech

(

−2|x|2

)

,

(3.83)

其中Ω=[−10,10]×[−10,10].

与前面的例子类似,表3.4列出了α=β=1.5时的一些数值误差和时间方向收敛阶.

表3.4当N =4, T =1时,例3.4在时间方向的误差和收敛阶

RK(Stage,Order)τ

SAV-RK SAV-RRK(RT) SAV-RRK(IDT)

Error(τ) order Error(τ) order Error(τ) order

RK(2,2)

0.11.1875E-03-1.8837E-03-9.5325E-03-

0.052.7648E-042.10265.0394E-041.90236.7134E-030.5058

0.0256.6514E-052.05551.3036E-041.95083.8805E-030.7908

0.01251.6300E-052.02883.3151E-051.97542.0757E-030.9026

0.006254.0339E-062.01468.3587E-061.98771.0723E-030.9529

RK(3,3)

0.18.7748E-05-1.9567E-04-3.1789E-03-

0.051.1471E-052.93542.4630E-052.99008.2646E-041.9435

0.0251.4684E-062.96573.0916E-062.99402.1079E-041.9712

0.01251.8580E-072.98243.8731E-072.99685.3231E-051.9854

0.006252.3370E-082.99114.8471E-082.99831.3375E-051.9927

RK(4,4)

0.13.0741E-06-4.0627E-06-1.0278E-04-

0.051.9959E-073.94502.6020E-073.96471.3195E-052.9615

0.0251.2698E-083.97441.6461E-083.98251.6711E-062.9811

0.01258.0044E-103.98761.0350E-093.99132.1024E-072.9906

0.006255.0238E-113.99396.4882E-113.99572.6365E-082.9953

此外,使用不同α和β进行长时间模拟(T =100)的相对能量如图3.6所示.

四川师范大学硕士学位论文

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(a)α,β=1.3

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(b)α,β=1.6

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(c)α,β=1.9

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(d)α,β=2

图3.6当N =4,τ=0.01时,例3.4取不同α对应的相对能量误差.

3.6小结

本章首先考虑了具有周期性边界条件的二维非线性分数阶薛定谔波方程,并通过标量辅助变量方法将其转化为一个等价系统,其四次形式的能量被重新表述为三个二次项的和.随后,结合显式松弛龙格库塔方法成功构造了一个在时间方向可达任意高阶的显式保结构数值格式.最后,通过一系列数值实验验证了该格式在长时间仿真中的数值稳定性,并验证了所提方法对于其他类似的守恒问题也是有效的,如分数 Klein-Gordon-Schrödinger方程等.

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

4.1 NFSWEs的哈密顿格式

哈密顿结构对于构建 PAVF格式至关重要.然而,目前没有研究人员考虑过带有周期边界条件的 NFSWEs (3.1)-(3.3)的哈密顿结构.基于此,本小节推导了 NFSWEs的哈密顿结构.

设

u = p+ iq, ut =φ+ iψ,(4.1)

其中 p, q,φ,ψ均为实值函数.那么,NFSWEs (3.1)-(3.3)可以重写为

φt + iψt +(−∆)

α

2 p+ i (−∆)

α

2 q + iκφ−κψ+β

(

p2+ q2

)

(p+ iq)=0.(4.2)

分离实部和虚部,得到

φt +(−∆)

α

2 p−κψ+β

(

p2+ q2

)

p =0,

ψt +(−∆)

α

2 q +κφ+β

(

p2+ q2

)

q =0.(4.3)

即,NFSWEs (3.1)-(3.3)可以重写为一个等价的耦合系统

φt =−(−∆)

α

2 p+κψ−β

(

p2+ q2

)

p,(4.4)

ψt =−(−∆)

α

2 q −κφ−β

(

p2+ q2

)

q,(4.5)

pt =φ,(4.6)

qt =ψ,(4.7)

其中 p, q,φ,ψ满足周期边界条件.

为了得到 NFSWEs (3.1)-(3.3)的哈密顿形式,引入以下两个重要引理.

引理4.1.[55]给定1<α≤2,那么对于任何实值周期函数 p, q ∈ L2(Ω),有∫

Ω

(−∆)

α

2 pqdx =

∫

Ω

(−∆)

α

4 p(−∆)

α

4 qdx =

∫

Ω

p(−∆)

α

2 qdx.(4.8)

证明.根据 Plancherel定理,有∫

Ω

(−∆)

α

2 pqdx =(2L)2

∑

l1∈Z

∑

l2∈Z

∣∣v2l1+ v2l2

∣∣α2 p̂l1,l2 q̂l1,l2

=(2L)2

∑

l1∈Z

∑

l2∈Z

∣∣v2l1+ v2l2

∣∣α4 p̂l1,l2∣∣v2l1+ v2l2

∣∣α4 q̂l1,l2

∑

∑

∣∣v2l1+ v2l2

∣∣α2 q̂l1,l2.

(4.9)

四川师范大学硕士学位论文

于是∫

Ω

(−∆)

α

2 pqdx =

∫

Ω

(−∆)

α

4 p(−∆)

α

4 qdx =

∫

Ω

p(−∆)

α

2 qdx (4.10)

□

引理4.2.[54]对于形如

F [g]=

∫

Ω

f

(

g(x),(−∆)

α

4 g(x)

)

dx,(4.11)

的泛函 F [g], f 是Ω上的光滑函数,其变分导数如下

δF

δg

=

∂f

∂g

+(−∆)

α

∂f

∂

(

(−∆)

α

4 g

).(4.12)

证明.令ϕ(x)为带有周期边界条件的任意函数.由于分数阶拉普拉斯算子是线性算

子,根据变分导数的定义,有∫

Ω

δF

δg

ϕ(x)dx =

[

d

dµ

∫

Ω

f

(

g +µϕ,(−∆)

α

4 g +µ(−∆)

α

4ϕ

)

dx

]

µ=0

=

∫

Ω

(

∂f

∂g

ϕ+

∂f

∂

(

(−∆)

α

4 g

)(−∆)

α

4ϕ

)

dx

=

∫

Ω

(

∂f

∂g

ϕ+

(

(−∆)

α

∂f

∂

(

(−∆)

α

4 g

))ϕ) dx

=

∫

Ω

(

∂f

∂g

+(−∆)

α

∂f

∂

(

(−∆)

α

4 g

))ϕdx,

(4.13)

其中使用了式(4.8).基于ϕ(x)的任意性,通过变分法基本引理,可以得到式(4.12).□基于上述引理,可以得到以下结果.

定理4.3.设

G =κ

∫

Ω

(p2+ q2)dx+2 Im(

∫

Ω

(φ+ iψ)(p− iq)dx),(4.14)

H =

∫

Ω

(

(φ2+ψ2)+

(

(−∆)

α

4 p

)2

+

(

(−∆)

α

4 q

)2

+

β

(p2+ q2)2

)

dx.(4.15)

那么等价系统(4.4)-(4.7)具有以下两个守恒定律:

d

dt

G =0,

d

dt

H =0.(4.16)

证明.计算(4.4)和(4.5)与φ和ψ的内积,可以立即得到第一个守恒定律.注意到引理4.1,并将(4.4)-(4.7)与φt,ψt, pt,−qt分别做内积,可以推导出第二个守恒定律.证毕.□

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

定理4.4. NFSWEs (3.1)-(3.3)可以被重构为以下哈密顿系统:

φt

ψt

pt

qt

= J



δH/δφ

δH/δψ

δH/δp

δH/δq

,(4.17)

其中能量泛函H定义如式(4.15),哈密顿算符

J =



0κ−10

−κ00−1

,(4.18)

证明.注意到

(−∆)

α

4((−∆)

α

4 u(x, t))= F−1

[

|σ|

α

2 F(F−1

[

|σ|

α

2 F(u(σ, t))

]

)

]

= F−1

[

|σ|

α

2|σ|

α

2 F(u(σ, t))

]

= F−1[|σ|αF(u(σ, t))]

=(−∆)

α

2 u(x, t),(4.19)

并应用引理4.2中的分数阶变分原理,得到

δH

δp

=

(

2(−∆)

α

2 p+2β

(

p2+ q2

)

2p

)

=(−∆)

α

2 p+β

(

p2+ q2

)

p,(4.20)

δH

δq

=

(

2(−∆)

α

2 q +2β

(

p2+ q2

)

2q

)

=(−∆)

α

2 q +β

(

p2+ q2

)

q,(4.21)

δH

δφ

=φ,(4.22)

δH

δψ

=ψ.(4.23)

结合 NFSWEs (3.1)-(3.3)的等价形式(4.4)-(4.7),可得到

φt

ψt

pt

qt

=



0κ−10

−κ00−1





δH/δφ

δH/δψ

δH/δp

δH/δq

.(4.24)

证毕.□

四川师范大学硕士学位论文

4.2傅里叶拟谱离散格式

鉴于周期性边界条件,选择傅里叶拟谱法离散等价系统(4.4)-(4.7),得到如下的空间

半离散系统:

Φt = DαP +κΨ−β

(

P 2+Q2

)

P,(4.25)

Ψt = DαQ−κΦ−β

(

P 2+Q2

)

Q,(4.26)

Pt =Φ,(4.27)

Qt =Ψ,(4.28)

其中 P 2= P P ,而表示向量之间的点乘.

简洁起见,定义向量

Y =

(

ΦT ,ΨT , P T , QT

)

,(4.29)

则上述半离散系统可重新表示哈密顿形式

dY

dt

= f(Y )= S∇H(Y ),(4.30)

哈密顿能量定义如下

H(Y )=

(

(ΦTΦ+ΨTΨ)−P TDαP −QTDαQ+

β

(P 2+Q2)T (P 2+Q2)

)

,(4.31)

其中 S 是具有以下形式的反对称矩阵

S =



0κI −I 0

−κI 00−I

I 000

0 I 00

.(4.32)

此外,定义质量

G(Y )=κ∥P∥2+κ∥Q∥2+2ΨTP −2ΦTQ.(4.33)

定理4.5.半离散系统(4.25)-(4.28)具有质量和能量守恒定律:

dG(Y )

dt

=0,

dH(Y )

dt

=0.(4.34)

证明.根据式(4.33),可以推导出:

dG(Y )

dt

=2hxhy

(

κP TPt +κQTQt +ΨT

t P +ΨTPt −ΦT

t Q−ΦTQt

)

=2hxhy

(

κP TΦ+κQTΨ+P TDαQ−κP TΦ−βP T

(

P 2+Q2

)

Q

+ΨTΦ−QTDαP −κQTΨ+βQT

(

P 2+Q2

)

P −ΦTΨ

)

=0.(4.35)

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

基于矩阵 S 的反对称性质,结合式(4.30),有

dH(Y )

dt

=∇H(Y )Tf(Y )=∇H(Y )TS∇H(Y )=0.(4.36)

证毕.□

4.3 PAVF-P方法

4.3.1 PAVF-P格式

对哈密顿系统(4.30)应用 PAVF方法,得到 NFSWEs (3.1)-(3.3)的全离散格式如下:

δtΦ

m =

∫1

κHΨ

(

Φm+1,εΨm+1+(1−ε)Ψm, Pm, Qm

)

dε

−

∫1

HP

(

Φm+1,Ψm+1,εPm+1+(1−ε)Pm, Qm

)

dε,(4.37)

δtΨ

m =−

∫1

κHΦ

(

εΦm+1+(1−ε)Φm,Ψm, Pm, Qm

)

dε

+

∫1

HQ

(

Φm+1,Ψm+1, Pm+1,εQm+1+(1−ε)Qm

)

dε,(4.38)

δtP

m =

∫1

HΦ

(

εΦm+1+(1−ε)Φm,Ψm, Pm, Qm

)

dε,(4.39)

δtQ

m =

∫1

HΨ

(

Φm+1,εΨm+1+(1−ε)Ψm, Pm, Qm

)

dε.(4.40)

上述数值格式可以进一步整合为如下傅里叶拟谱 PAVF(FPAVF)格式:

δtΦ

m =κΨm+1

2+DαPm+1

2−β

(

(Pm+1)3+(Pm)2 Pm+1+(Pm+1)2 Pm

+(Pm)3+2Pm+1(Qm)2+2Pm (Qm)2

)

,(4.41)

δtΨ

m =−κΦm+1

2+DαQm+1

2−β

(

(Qm+1)3+(Qm)2 Qm+1+(Qm+1)2 Qm

+(Qm)3+2Qm+1(Pm+1)2+2Qm (Pm+1)2

)

,(4.42)

δtP

m =Φm+1

2,(4.43)

δtQ

m =Ψm+1

2.(4.44)

通过将(4.41)-(4.42)分别与δtP

m 和δtQ

m 做内积,即可证明 FPAVF格式的能量守恒性质.

不幸的是,此格式并不能保证质量守恒,这可以在数值算例中被反映出来.

四川师范大学硕士学位论文

FPAVF格式(4.41)-(4.44)的伴随格式为

δtΦ

m =κΨm+1

2+DαPm+1

2−β

(

(Pm+1)3+(Pm)2 Pm+1+(Pm+1)2 Pm

+(Pm)3+2Pm+1(Qm+1)2+2Pm (Qm+1)2

)

,(4.45)

δtΨ

m =−κΦm+1

2+DαQm+1

2−β

(

(Qm+1)3+(Qm)2 Qm+1+(Qm+1)2 Qm+(Qm)3+2Qm+1(Pm)2+2Qm (Pm)2

)

,(4.46)

δtP

m =Φm+1

2,(4.47)

δtQ

m =Ψm+1

2.(4.48)

将 FPAVF格式(4.41)-(4.44)与其伴随 FPAVF格式(4.45)-(4.48)相结合,得到傅里叶拟

谱 PAVF-P(FPAVF-P)格式如下:

δtΦ

m =κΨm+1

2+DαPm+1

2−β

(

(Pm+1)3+(Pm)2 Pm+1+(Pm+1)2 Pm

+(Pm)3+ Pm+1(Qm)2+ Pm (Qm)2+ Pm+1(Qm+1)2+ Pm (Qm+1)2

)

,

(4.49)

δtΨ

m =−κΦm+1

2+DαQm+1

2−β

(

(Qm+1)3+(Qm)2 Qm+1+(Qm+1)2 Qm

+(Qm)3+Qm+1(Pm+1)2+Qm (Pm+1)2+Qm+1(Pm)2+Qm (Pm)2

)

,

(4.50)

δtP

m =Φm+1

2,(4.51)

δtQ

m =Ψm+1

2.(4.52)

4.3.2离散守恒律

定理4.6. FPAVF-P格式(4.49)-(4.52)在离散意义上具有以下能量和质量守恒特性:

Gm+1= Gm, Hm+1= Hm,0≤ m ≤M −1,(4.53)

其中离散质量为

Gm =κ∥Pm∥2+κ∥Qm∥2+2(Ψm)T Pm −2(Φm)T Qm,(4.54)

离散能量为

Hm =

[((Φm)TΦm +(Ψm)TΨm)−(Pm)TDαPm −(Qm)TDαQm

((Pm)2+(Qm)2)T ((Pm)2+(Qm)2)].(4.55)

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

证明.将(4.49)与 Qm+1+Qm做内积,得到

(Qm+1+Qm)T δtΦ

m

=(Qm+1+Qm)TκΨm+1

2+(Qm+1+Qm)TDαPm+1

−(Qm+1+Qm)T

β

(

(Pm+1)3+(Pm)2 Pm+1+(Pm+1)2 Pm

+(Pm)3+ Pm+1(Qm)2+ Pm (Qm)2+ Pm+1(Qm+1)2+ Pm (Qm+1)2

)

.(4.56)

同样,将(4.50)与 Pm+1+ Pm做内积,得到

(Pm+1+ Pm)T δtΨ

m

=−(Pm+1+ Pm)TκΦm+1

2+(Pm+1+ Pm)TDαQm+1

−(Pm+1+ Pm)T

β

(

(Qm+1)3+(Qm)2 Qm+1+(Qm+1)2 Qm

+(Qm)3+Qm+1(Pm+1)2+Qm (Pm+1)2+Qm+1(Pm)2+Qm (Pm)2

)

(4.57)

将(4.57)与(4.56)相减,推导出

(Qm+1+Qm)T δtΦ

m −(Pm+1+ Pm)T δtΨ

m

=(Qm+1+Qm)TκΨm+1

2+(Pm+1+ Pm)TκΦm+1

2.(4.58)

注意到

δtP

m =Φm+1

2,δtQ

m =Ψm+1

2,

可以得到

(Qm+1+Qm)T δtΦ

m−(Pm+1+ Pm)T δtΨ

m

=(Qm+1+Qm)TκδtQ

m +(Pm+1+ Pm)TκδtPm.(4.59)

即

(Qm+1+Qm)T (Φm+1−Φm)−(Pm+1+ Pm)T (Ψm+1−Ψm)

=κ(∥Qm+1∥2−∥Qm∥2)+κ(∥Pm+1∥2−∥Pm∥2).(4.60)

将(4.51)和(4.52)交叉相乘

((Qm+1)TΦm+1−(Pm+1)TΨm+1)−((Qm)TΦm −(Pm)TΨm)

=((Qm)TΦm+1−(Pm)TΨm+1)−((Qm+1)TΦm −(Pm+1)TΨm).(4.61)

四川师范大学硕士学位论文

将(4.61)代入(4.60),得到

κ∥Pm+1∥2+κ∥Qm+1∥2+2(Pm+1)TΨm+1−2(Qm+1)TΦm+1

=κ∥Pm∥2+κ∥Qm∥2+2(Pm)TΨm −2(Qm)TΦm,(4.62)

这意味着

Gm+1= Gm.(4.63)

类似地,通过将(4.49)-(4.50)分别与δtP

m 和δtQ

m 作离散内积并求和,可以得到离散

能量守恒律

Hm+1= Hm.(4.64)

证毕.□

4.4其他 AVF系列方法

为了比较,本小节也给出了用于求解 NFSWEs (3.1)-(3.3)的以下两个二阶 AVF系列格式.

• FAVF(傅里叶拟谱 AVF)格式

δtΦ= DαPm+1

2+κΨm+1

2−β

(

3(Pm+1)3−5(Pm+1)2 Pm

−5(Pm)2 Pm+1+19(Pm)3−6Qm+1 Qm Pm +2Qm+1 Qm Pm+1

+3(Qm+1)2 Pm+1+(Qm)2 Pm+1−7(Qm+1)2 Pm +19(Qm)2 Pm

)

,(4.65)

δtΨ= DαQm+1

2−κΦm+1

2−β

(

3(Qm+1)3−5(Qm+1)2 Qm

−5(Qm)2 Qm+1+19(Qm)3−6Pm+1 Pm Qm +2Pm+1 Pm Qm+1

+3(Pm+1)2 Qm+1+(Pm)2 Qm+1−7(Pm+1)2 Qm +19(Pm)2 Qm

)

,(4.66)

δtP =Φm+1

2,(4.67)

2.(4.68)

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

• FPAVF-C(傅里叶拟谱 PAVF组合)格式

τ

(Φ∗−Φm)=

κ(Ψ∗+Ψm)+

Dα(P ∗+ Pm)−β

(

(P ∗)3+(Pm)2 P ∗

+(P ∗)2 Pm +(Pm)3+2P ∗(Qm)2+2Pm (Qm)2

)

,(4.69)

τ

(Ψ∗−Ψm)=−1

κ(Φ∗+Φm)+

Dα(Q∗+Qm)−β

(

(Q∗)3+(Qm)2 Q∗

+(Q∗)2 Qm +(Qm)3+2Q∗(P ∗)2+2Qm (P ∗)2

)

,(4.70)

τ

(P ∗− Pm)=

(Φ∗+Φm),(4.71)

τ

(Q∗−Qm)=

(Ψ∗+Ψm),(4.72)

τ

(

Φm+1−Φ∗)=1

κ(Ψm+1+Ψ∗)+

DαPm+1

2−β

(

(Pm+1)3+(P ∗)2 Pm+1

+(Pm+1)2 P ∗+(P ∗)3+2Pm+1(Qm+1)2+2P ∗(Qm+1)2

)

,(4.73)

τ

(

Ψm+1−Ψ∗)=−1

κ(Φm+1+Φ∗)+

DαQm+1

2−β

(

(Qm+1)3+(Q∗)2 Qm+1

+(Qm+1)2 Q∗+(Q∗)3+2Qm+1(P ∗)2+2Q∗(P ∗)2

)

,(4.74)

τ

(

Pm+1− P ∗)=1

(Φm+1+Φ∗),(4.75)

τ

(

Qm+1−Q∗)=1

(Ψm+1+Ψ∗),(4.76)

其中Φ∗,Ψ∗, P ∗, Q∗可理解为从前一层迭代得到的中间变量,作为计算后续层变量的输入.

注记4.1.类似于 FPAVF-P格式(4.49)-(4.52),容易证明上述 FPAVF格式(4.41)-(4.44)、FAVF格式(4.65)-(4.68)和 FPAVF-C格式(4.69)-(4.76)均在离散意义上保证原始能量守恒,但不保证原始质量守恒.离散能量的形式与(4.55)中定义的相同.

注记4.2.值得强调的是,用于求解 NFSWEs (3.1)-(3.3)的其他现有方法仅保持修正

后的能量和(或)修正后的质量.例如 SAV方法[35]仅保持修正后的能量,三层线性隐式

差分格式[34]保持修正后的能量和质量.然而,所提出的 FPAVF-P格式(4.49)-(4.52)在离散意义上同时保持原始质量和能量,这是本文的主要贡献之一.此外,FPAVF-P 格式(4.49)-

(4.52)在时间方向具有二阶精度,在空间方向具有谱精度.

4.5数值算例

本节给出了一些数值算例,为了展示守恒性能,通过以下方式计算能量和质量的相

对误差

∣∣,(4.77)

四川师范大学硕士学位论文

其中 Hn, Gn 分别表示 tn 时刻的离散能量和质量.在计算过程中为了获得数值误差,采

用以下误差函数

E(τ)=

∥∥UM

N − U2M

N

∥∥

∞=

∥∥∥∥U ( T

M

,

L

N

)

− U

(

T

2M

,

L

N

)∥∥∥∥

∞

,

E(N)=

∥∥UM

N − UM

2N

∥∥

∞=

∥∥∥∥U ( T

M

,

L

N

)

− U

(

T

M

,

L

2N

)∥∥∥∥

∞

.(4.78)

计算时间方向和空间方向的收敛阶

order =

 log2[E(τ)/E(τ/2)],在时间方向log2[E(N)/E(2N)],在空间方向.

(4.79)

算例4.1.考虑一维非线性分数阶波动方程(3.1)-(3.3):

utt +(−∆)α/2u+ iut +|u|2u =0,(x, t)∈Ω×[0, T ],(4.80)

初值条件为 u(x,0)=(1+ i)xe−10(1−x)2以及 ut(x,0)=0.

基于离散守恒律(4.53),有 Gn ≡ G0和 Hn ≡ H0,并且 G0, H0仅依赖于给定的初值函数 u(x,0)和 ut(x,0).很容易验证初值函数 u(x,0)在 x 远离 x =1的地方呈指数衰减趋向于零.这意味着初始值函数在有界区间Ω之外可以忽略不计.考虑到机器精度的限制,此处,取Ω=(−25,25).基于守恒律(3.6)和(3.7),利用高斯数值积分,

立即得到任意α下的原始质量 G(0)=0.812482096009503,以及α=2时的原始能量E(0)=4.56197648980619.

首先计算上述四种格式(FPAVF-P、FPAVF、FAVF 和 FPAVF-C 格式)在 T =1时,

α=1.5以及α=2.0的收敛阶数,见图4.1-4.2.很容易发现这四种格式在空间方向均具有谱精度,而 FPAVF格式在时间方向表现出一阶精度,其他格式则表现出二阶精度.

501001502002503003504004505005

N

-24

-22

-20

-18

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

l

o

g 2

E

(

N

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)τ=1/1000

-11-10.5-10-9.5-9-8.5-8

log

-24

-22

-20

-18

-16

-14

-12

l

o

g 2

E

(

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

slope=1

slope=2

(b) N =128

图4.1当α=1.5时,例4.1中四种格式的收敛阶.

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

501001502002503003504004505005

N

-24

-22

-20

-18

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

l

o

g 2

E

(

N

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)τ=1/1000

-11-10.5-10-9.5-9-8.5-8

log

-23

-22

-21

-20

-19

-18

-17

-16

-15

-14

-13

l

o

g 2

E

(

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

slope=1

slope=2

(b) N =128

图4.2当α=2.0时,例4.1中四种格式的收敛阶.

0501001502002503003504004505

t

n

1.7

1.75

1.8

1.85

1.9

1.95

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

linear-implicit

480485490495500

1.8478116922625

1.847811692263

1.8478116922635

1.847811692264

(a)α=1.3

050100150200250300350400450500

t

n

2.5

2.55

2.6

2.65

2.7

2.75

2.8

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

linear-implicit

480485490495500

2.649287400316

2.6492874003165

2.649287400317

2.6492874003175

(b)α=1.6

0501001502002503003504004505

t

n

3.85

3.9

3.95

4.05

4.1

4.15

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

linear-implicit

480485490495500

3.958428677

3.958428677005

3.95842867701

3.958428677015

(c)α=1.9

050100150200250300350400450500

t

n

4.45

4.5

4.55

4.6

4.65

4.7

4.75

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

linear-implicit

original

480485490495500

4.5619764897846

4.5619764897848

4.561976489785

4.5619764897852

4.5619764897854

(d)α=2.0

图4.3在例4.1中,当N =512且τ=0.01时,不同α下的离散能量.

图4.3显示了在不同α值下,通过 N =512和τ=0.01计算的不同时间段内的离散能量演化情况.可以观察到,特别是在α=2时,FPAVF-P、FPAVF、FAVF和 FPAVF-C格

式计算得到的离散能量均一致收敛到原始能量,而 SAV方法[35]和三层线性隐式差分格

四川师范大学硕士学位论文

式[34]的性能较差.这一现象与后两者仅保持修正后的能量而不是原始能量的理论分析

是一致的.

类似地,图4.4显示了在不同α值下,通过 N =512和τ=0.01计算的不同时间段内的离散质量演化情况.需要强调的是 SAV方法不具有质量守恒.可以看到,FPAVF-P格式收敛到原始质量,其他方法的性能相对较差,特别是 FAVF格式,而三层线性隐式差分格式保持了修正后的质量.此外,基于 FPAVF-C格式的离散质量显示出小幅度的频繁振荡.

050100150200250300350400450500

t

n

0.8121

0.8122

0.8123

0.8124

0.8125

0.8126

0.8127

0.8128

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

linear-implicit

original

480485490495500

0.812482

0.81248205

0.8124821

0.81248215

(a)α=1.3

050100150200250300350400450500

t

n

0.8121

0.8122

0.8123

0.8124

0.8125

0.8126

0.8127

0.8128

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

linear-implicit

original

480485490495500

0.812482

0.81248205

0.8124821

0.81248215

(b)α=1.6

050100150200250300350400450500

t

n

0.8116

0.8118

0.812

0.8122

0.8124

0.8126

0.8128

0.813

0.8132

0.8134

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

linear-implicit

original

480485490495500

0.8124815

0.812482

0.8124825

0.812483

(c)α=1.9

050100150200250300350400450500

t

n

0.8116

0.8118

0.812

0.8122

0.8124

0.8126

0.8128

0.813

0.8132

0.8134

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

linear-implicit

original

480485490495500

0.8124819

0.812482

0.8124821

0.8124822

(d)α=2.0

图4.4在例4.1中,当N =512且τ=0.01时,不同α下的离散质量.

更准确地说,表4.1到表4.4显示了不同α值下不同时间 t = tn时的离散能量Hn和离散质量 Gn 的值,这些值是通过取 N =512和τ=0.01获得的.从表4.1可以看出,提出的四种格式均保持了原始能量,而 SAV格式和三层线性隐式差分格式仅保持了修正后的能量.类似地,从表4.2到表4.4,观察到 FPAVF-P格式收敛到原始质量,其他方法性能较差,而三层线性隐式差分格式仅保持了修正后的质量.

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

表4.1在例4.1中,当α=2.0时,时刻 t = tn的离散能量Hn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C SAV Linear-Implicit FPAVF-P

04.5619764897854.5619764897854.5619764897854.4574148152004.4538610694864.561976489785

104.5619764897854.5619764897854.5619764897854.4574148152004.4538610694864.561976489785

1004.5619764897854.5619764897854.5619764897824.4574148151974.4538610694894.561976489785

2004.5619764897854.5619764897854.5619764897794.4574148151954.4538610694924.561976489785

3004.5619764897854.5619764897854.5619764897764.4574148151924.4538610694944.561976489785

4004.5619764897854.5619764897854.5619764897724.4574148151904.4538610694974.561976489785

5004.5619764897854.5619764897854.5619764897684.4574148151874.4538610695004.561976489785

Original energy:4.56197648980619

表4.2在例4.1中,当α=1.3时,时刻 t = tn的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C Linear-Implicit FPAVF-P

00.8124820960116430.8124861083728530.8124810932282880.8122692121050790.812482096009232

100.8124816529135070.8154484111308310.8124822286230690.8122692121054490.812482096009234

1000.8124797010903390.8153373076706380.8124820814398820.8122692121051190.812482096009236

2000.8124767556608140.8153527726117030.8124820910289160.8122692121052980.812482096009256

3000.8124717061453040.8153694483117090.8124821027526820.8122692121051930.812482096009262

4000.8124668715931410.8153754066484850.8124821124076290.8122692121053610.812482096009263

5000.8124633323903320.8153913139144980.8124821251797180.8122692121054090.812482096009261

Original mass:0.812482096009503

表4.3在例4.1中,当α=1.6时,时刻 t = tn的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C Linear-Implicit FPAVF-P

00.8124820960145260.8124879329043550.8124806374597910.8121913427907790.812482096009232

100.8124795428444670.8152906805977440.8124823389801610.8121913427908690.812482096009234

1000.8124719936780660.8149646109889010.8124820778302700.8121913427905190.812482096009245

2000.8124650769968410.8149341350726540.8124821689491700.8121913427904380.812482096009252

3000.8124619643071830.8150267341960110.8124821322847320.8121913427902110.812482096009255

4000.8124562277583880.8150451899713540.8124821324547830.8121913427900670.812482096009255

5000.8124474724604400.8150971800302550.8124821226647580.8121913427895780.812482096009251

Original mass:0.812482096009503

四川师范大学硕士学位论文

表4.4在例4.1中,当α=2.0时,时刻 t = tn的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C Linear-Implicit FPAVF-P

00.8124820960274260.8124925661353820.8124794807089460.8120072798291620.812482096009232

100.8125015746039360.8156906894665380.8124822085497500.8120072798291850.812482096009233

1000.8124851793199110.8155595298042660.8124822242951880.8120072798290680.812482096009234

2000.8124365987207680.8157372640577780.8124821774813250.8120072798289060.812482096009234

3000.8123955657375190.8159141796752230.8124821226494460.8120072798289990.812482096009235

4000.8123538308414310.8162272026560590.8124821017870710.8120072798289690.812482096009235

5000.8123178494933740.8163362217707070.8124821096576620.8120072798290370.812482096009234

Original mass:0.812482096009503

对于α̸=2的原始能量计算比较困难,于是从相对误差的角度验证了离散守恒定律,见图4.5到图4.6.同样,图中显示 FPAVF-P格式在保持原始质量守恒方面具有最佳性能.随着α的增加,它在保持原始能量方面的性能将更好.这些观察与之前的理论结果一致.

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-16

10-14

10-12

10-10

10-8

10-6

10-4

10-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

linear-implicit

(a)α=1.3

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-16

10-14

10-12

10-10

10-8

10-6

10-4

10-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

linear-implicit

(b)α=1.6

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-16

10-14

10-12

10-10

10-8

10-6

10-4

10-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

linear-implicit

(c)α=1.9

图4.5在例4.1中,当N =512且τ=0.01时,不同α下的离散质量相对误差

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-17

10-16

10-15

10-14

10-13

10-12

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

linear-implicit

(a)α=1.3

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-17

10-16

10-15

10-14

10-13

10-12

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

linear-implicit

(b)α=1.6

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-17

10-16

10-15

10-14

10-13

10-12

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

linear-implicit

(c)α=1.9

图4.6在例4.1中,当N =512且τ=0.01时,不同α下的离散能量相对误差

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

算例4.2.考虑带有初始值的二维非线性分数薛定谔波动方程(3.1)-(3.3):

u(x, y,0)= sech

(

x2+ y2

)

, ut(x, y,0)= sin(x+y)sech

(

−2(x2+ y2)

)

,(x, y, t)∈Ω×[0, T ],

(4.81)

其中Ω=[−5,5]×[−5,5].

类似于一维情况,首先计算 FPAVF-P、FPAVF、FAVF和 FPAVF-C格式在 T =1时α=1.5和α=2.0的收敛阶.误差变化如图4.7到图4.8所示.可以清晰地观察到这四种格式在空间方向都具有谱精度,而 FPAVF格式在时间方向表现出一阶精度,其他格式在时间方向表现出二阶精度.

0102030405060

N

-24

-22

-20

-18

-16

-14

-12

-10

l

o

g 2

E

(

N

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)τ=1/1000

-11-10.5-10-9.5-9-8.5-8

log

-26

-25

-24

-23

-22

-21

-20

-19

-18

-17

-16

l

o

g 2

E

(

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

slope=1

slope=2

(b) N =16

图4.7当α=1.5时,例4.2中四种格式的收敛阶.

0102030405060

N

-40

-35

-30

-25

-20

-15

-10

l

o

g 2

E

(

N

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)τ=1/1000

-11-10.5-10-9.5-9-8.5-8

log

-28

-26

-24

-22

-20

-18

-16

l

o

g 2

E

(

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

slope=1

slope=2

(b) N =16

图4.8当α=2.0时,例4.2中四种格式的收敛阶.

为了比较与现有方法的保结构能力,首先计算了原始质量和能量.注意到原始质量 G(t)与α无关,通过使用高斯数值积分,得到了任何α下的原始质量 G(0)=

3.14159265323701.类似地,可以得到α=2时的原始能量 E(0)=3.22697078976648.

四川师范大学硕士学位论文

0102030405060708090100

t

n

3.1412

3.1413

3.1414

3.1415

3.1416

3.1417

3.1418

3.1419

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

original

80859095100

3.141585

3.14159

3.141595

3.1416

(a)α=1.3

0102030405060708090100

t

n

3.1412

3.1413

3.1414

3.1415

3.1416

3.1417

3.1418

3.1419

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

original

80859095100

3.141585

3.14159

3.141595

3.1416

(b)α=1.6

0102030405060708090100

t

n

3.1412

3.1413

3.1414

3.1415

3.1416

3.1417

3.1418

3.1419

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

original

80859095100

3.141585

3.14159

3.141595

3.1416

(c)α=1.9

0102030405060708090100

t

n

3.1412

3.1413

3.1414

3.1415

3.1416

3.1417

3.1418

3.1419

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

original

80859095100

3.141585

3.14159

3.141595

3.1416

(d)α=2.0

图4.9在例4.2中,当N =64且τ=0.01时,不同α下的离散质量.

010203040506070809010

t

n

2.8

2.85

2.9

2.95

3.05

3.1

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

80859095100

2.9090061529

2.90900615295

2.909006153

2.90900615305

(a)α=1.3

0102030405060708090100

t

n

2.9

2.95

3.05

3.1

3.15

3.2

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

80859095100

3.0072433575

3.00724335755

3.0072433576

3.00724335765

(b)α=1.6

010203040506070809010

t

n

3.05

3.1

3.15

3.2

3.25

3.3

3.35

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

80859095100

3.16130761445

3.1613076145

3.16130761455

3.1613076146

(c)α=1.9

0102030405060708090100

t

n

3.1

3.15

3.2

3.25

3.3

3.35

3.4

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

80859095100

3.22697078735

3.2269707874

3.22697078745

3.2269707875

(d)α=2.0

图4.10在例4.2中,当N =64且τ=0.01时,不同α下的离散能量.

与一维问题不同,二维情况下没有三层线性隐式格式,因此只比较了 SAV方法与本

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

文提出的 FPAVF-P、FAVF和 FPAVF-C格式的性能.图4.9到图4.10展示了在不同α下通过 N =64和τ=0.01计算的离散质量和离散能量的演变.图4.11到图4.12展示了随时间变化的离散质量和能量相对误差的变化.可以观察到,FPAVF-P 格式在原始质量上收敛得很好,其他三种方法性能较差,尤其是 FAVF格式和 FPAVF格式(FPAVF格式的结果未显示,因为它更为糟糕).本章提出的三种格式都能很好地保持原始能量,而 SAV方法只能保持一个修正的能量.这些现象再次验证了理论结果的正确性.

0102030405060708090100

t

n

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)α=1.3

0102030405060708090100

t

n

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(b)α=1.6

0102030405060708090100

t

n

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(c)α=1.9

图4.11在例4.2中,当N =64且τ=0.01时,不同α下的离散质量相对误差

0102030405060708090100

t

n

-16

-15

-14

-13

-12

-11

-10

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

(a)α=1.3

0102030405060708090100

t

n

-16

-15

-14

-13

-12

-11

-10

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

(b)α=1.6

0102030405060708090100

t

n

-16

-15

-14

-13

-12

-11

-10

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

(c)α=1.9

图4.12在例4.2中,当N =64且τ=0.01时,不同α下的离散能量相对误差

更详细的比较结果见表4.5到表4.8,观察这些数据,可得到同样的结论.

四川师范大学硕士学位论文

表4.5在例4.2中,当α=2.0时,时刻 t = tn的离散能量Hn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C SAV FPAVF-P

03.226970787401763.226970787401763.226970787401733.212348627670943.22697078740176

103.226970787401763.226970787401763.226970787401683.212348627670623.22697078740176

203.226970787401763.226970787401763.226970787401723.212348627670663.22697078740176

403.226970787401753.226970787401763.226970787401823.212348627670333.22697078740176

603.226970787401763.226970787401763.226970787401913.212348627670353.22697078740176

803.226970787401763.226970787401753.226970787401993.212348627670733.22697078740176

1003.226970787401753.226970787401763.226970787402073.212348627670453.22697078740176

Original energy:3.22697078976648

表4.6在例4.2中,当α=1.3时,时刻 t = tn的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C FPAVF-P

03.141592976674553.141593618421523.141592412279093.14159265358976

103.141609522539333.135953748628703.141665056435693.14159265358963

203.141613435430993.144210893212613.141589650378083.14159265358952

403.141575390235643.143620670136543.141599171067593.14159265358932

603.141502493588463.142175087020133.141598685395563.14159265358912

803.141431741752143.141598262670153.141589466252013.14159265358895

1003.141356720716413.143287108639693.141582273197513.14159265358880

Original mass:3.14159265323701

表4.7在例4.2中,当α=1.6时,时刻 t = tn的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C FPAVF-P

03.141592976689403.141593618147293.141592412186833.14159265358976

103.141633893580313.137541918882093.141600726317923.14159265358928

203.141617161775233.144332224884253.141590448990673.14159265358919

403.141495540938943.144752133443083.141605006471973.14159265358901

603.141399979248553.142882562077793.141600234368123.14159265358885

803.141274886377523.142413926002163.141587684325133.14159265358871

1003.141152877663473.144893313853383.141594128224173.14159265358860

Original mass:3.14159265323701

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

表4.8在例4.2中,当α=2.0时,时刻 t = tn的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C FPAVF-P

03.141592977254703.141593619199023.141592411493243.14159265358976

103.141680002604123.143692150067213.141600701612083.14159265358976

203.141645445318493.145212501224013.141587452494533.14159265358976

403.141505356955003.145317028322093.141600318048293.14159265358976

603.141364385117273.145520138647663.141595605644813.14159265358976

803.141180132279913.147393299675433.141588001096443.14159265358976

1003.141011250599283.150118742733913.141547870195953.14159265358976

Original mass:3.14159265323701

最后,分别在图4.13-图4.16中展示了α=1.3,1.6,1.99,2时波的演化过程(取 N =

128、τ=0.01).可以观察到,阶数α将显著影响波的形状,当α变大时,波的形状变化更

快.具体来说,当α→2时,数值解收敛到经典的非线性薛定谔波动方程[15,24,25].

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(a) t =0s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(b) t =1s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(c) t =5s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(d) t =10s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(e) t =50s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(f) t =100s

图4.13示例4.2中,α=1.3时的波传播图.

四川师范大学硕士学位论文

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(a) t =0s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(b) t =1s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(c) t =5s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(d) t =10s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(e) t =50s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(f) t =100s

图4.14示例4.2中,α=1.6时的波传播图.

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(a) t =0s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(b) t =1s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(c) t =5s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(d) t =10s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(e) t =50s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(f) t =100s

图4.15示例4.2中,α=1.99时的波传播图.

4 NFSWEs的能量和质量守恒方法

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(a) t =0s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(b) t =1s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(c) t =5s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(d) t =10s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(e) t =50s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(f) t =100s

图4.16示例4.2中,α=2.0时的波传播图.

4.6小结

在本章中,首先重构分数非线性薛定谔波动方程为一个等价的哈密顿系统.通过将分区平均向量场加方法与傅里叶拟谱方法结合,基于得到的哈密顿系统构建了一个保结构格式.理论分析和数值结果表明,所提出的方法能够有效地保持原始能量和原始质量.

四川师范大学硕士学位论文

5总结与展望

5.1本文总结

本文致力于解决非线性分数阶薛定谔波动方程的数值求解问题,旨在发展高效、准确、显式的数值方法,以及能够同时保持原始能量和质量守恒的算法.在已有研究中,尽管存在一些关于 NFSWEs数值算法的研究,但主要集中在一维情况,且在时间方向的精度未能超过二阶,并且很多方法仅考虑了完全隐式的情况,留下了一系列开放问题.本文研究的一方面首先通过 SAV方法将 NFSWEs的非二次能量转化为新变量的二次形式,然后结合显式龙格库塔方法和松弛技术,提出了一种任意高阶的显式保结构数值格式.并将这一方法应用到 NFSWEs 等类似方程的数值求解中.另一方面,成功推导了具有周期边界条件的二维 NFSWEs的哈密顿形式,并采用 PAVF-P方法构建了能够同时守恒原始能量和质量的数值格式.

此外,本文使用了傅里叶拟谱方法作为空间离散方法,充分利用了其非局部性质和傅里叶基函数的特性,通过快速傅里叶变换提高了计算效率.

综合而言,本文在 NFSWEs数值求解方面取得了新的研究成果,提出的方法在长时间仿真具有良好的适用性,为未来相关研究提供了有益的参考.

5.2研究展望

在本文的基础上及研究过程中,发现存在以下改进空间:

(1)推广到高维问题:目前研究主要集中在二维问题的差分格式上,未来可将这些方法推广至更高维度,以数值求解三维或更高维度的分数阶方程.

(2)深入分析稳定性和收敛性:本文尚未对数值方法的收敛性及稳定性进行充分的分析.

未来考虑对提出的数值方法进行更深入的稳定性和收敛性分析,以验证其可靠性和有效性.

(3)提高 PAVF-P方法的收敛阶:本文仅构建了 PAVF-P的二阶的数值格式,未来的研究可以考虑构建更高阶的数值格式,以进一步提高数值方法的精度.

四川师范大学硕士学位论文

参考文献

[1] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional integrals and derivatives[M]. Gordon and breachscience publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993.

[2] Introduction to Fractional Calculus[M]. Chapman and Hall/CRC, 2015: 19-46.

[3] Handbook of Differential Equations - Stationary Partial Differential Equations[M]. Elsevier, 2008.

[4] Indeﬁnite Integrals[M]. Chapman and Hall/CRC, 2008: 121-130.

[5] Zhang X, Crawford J W, Deeks L K, et al. A mass balance based numerical method for the fractionaladvection-dispersion equation: Theory and application[J]. Water Resour Res, 2005, 41(7).

[6] Carreras B A, Lynch V E, Zaslavsky G M. Anomalous diffusion and exit time distribution of particletracers in plasma turbulence model[J]. Phys Plasmas, 2001, 8(12): 5096-5103.

[7] Magin R, Feng X, Baleanu D. Solving the fractional order Bloch equation[J]. Concept Magn Reson A,2009, 34A(1): 16-23.

[8] Zaslavsky G M, Stevens D, Weitzner H. Self-similar transport in incomplete chaos[J]. Phys Rev E,1993, 48(3): 1683-1694.

[9] Sun H, Chen Y, Chen W. Random-order fractional differential equation models[J]. Signal Process,2011, 91(3): 525-530.

[10] Tsutsumi M. Nonrelativistic approximation of nonlinear Klein-Gordon equations in two space dimen-sions[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1984, 8(6): 637-643.

[11] Machihara S, Nakanishi K, Ozawa T. Nonrelativistic limit in the energy space for nonlinear Klein-Gordon equations[J]. Math Ann, 2002, 322(3): 603-621.

[12] Colin T, Fabrie P. Semidiscretization in time for nonlinear Schrödinger-waves equations[J]. DiscreteCont Dyn-A, 1998, 4(4): 671-690.

[13] Bao W, Dong X, Xin J. Comparisons between sine-Gordon and perturbed nonlinear Schrödinger equa-

tions for modeling light bullets beyond critical collapse[J]. Phys. D: Nonlinear Phenom., 2010, 239

(13): 1120-1134.

[14] Xin J. Modeling light bullets with the two-dimensional sine-Gordon equation[J]. Phys. D: NonlinearPhenom., 2000, 135(3-4): 345-368.

[15] Zhang L, Chang Q. A conservative numerical scheme for a class of nonlinear Schrödinger equationwith wave operator[J]. Appl Math Comput, 2003, 145(2): 603-612.

[16] Bao W, Cai Y. Uniform Error Estimates of Finite Difference Methods for the Nonlinear SchrödingerEquation with Wave Operator[J]. SIAM J Numer Anal, 2012.

[17] Cheng X, Wu F. Several conservative compact schemes for a class of nonlinear Schrödinger equationswith wave operator[J]. Bound Value Probl, 2018, 2018(1): 40.

[18] Brugnano L, Zhang C, Li D. A class of energy-conserving Hamiltonian boundary value methods fornonlinear Schrödinger equation with wave operator[J]. Commun Nonlinear Sci, 2018, 60: 33-49.

[19] Li S, Vu-Quoc L. Finite Difference Calculus Invariant Structure of a Class of Algorithms for theNonlinear Klein-Gordon Equation[J]. SIAM J Numer Anal, 1995, 32(6): 1839-1875.

[20] Li M, Zhao Y L. A fast energy conserving ﬁnite element method for the nonlinear fractionalSchrödinger equation with wave operator[J]. Appl Math Comput, 2018, 338: 758-773.

四川师范大学硕士学位论文

[21] Karakashian O, Makridakis C. A space-time ﬁnite element method for the nonlinear Schrödingerequation: The discontinuous Galerkin method[J]. Math Comput, 1998, 67(222): 479-499.

[22] Zhang R, Yu X, Li M, et al. A conservative local discontinuous Galerkin method for the solution ofnonlinear Schrödinger equation in two dimensions[J]. Sci China Math, 2017, 60(12): 2515-2530.

[23] Gong Y, Wang Q, Wang Y, et al. A conservative Fourier pseudo-spectral method for the nonlinearSchrödinger equation[J]. J Comput Phys, 2017, 328: 354-370.

[24] Wang T c, Zhang L m. Analysis of some new conservative schemes for nonlinear Schrödinger equationwith wave operator[J]. Appl Math Comput, 2006, 182(2): 1780-1794.

[25] Li X, Zhang L, Wang S. A compact ﬁnite difference scheme for the nonlinear Schrödinger equationwith wave operator[J]. Appl Math Comput, 2012, 219(6): 3187-3197.

[26] Wang S, Zhang L, Fan R. Discrete-time orthogonal spline collocation methods for the nonlinearSchrödinger equation with wave operator[J]. J Comput Appl Math, 2011, 235(8): 1993-2005.

[27] Guo L, Xu Y. Energy Conserving Local Discontinuous Galerkin Methods for the NonlinearSchrödinger Equation with Wave Operator[J]. J Sci Comput, 2015, 65(2): 622-647.

[28] Wang D, Xiao A, Yang W. Crank-Nicolson difference scheme for the coupled nonlinear Schrödingerequations with the Riesz space fractional derivative[J]. J Comput Phys, 2013, 242: 670-681.

[29] Wang D, Xiao A, Yang W. A linearly implicit conservative difference scheme for the space fractionalcoupled nonlinear Schrödinger equations[J]. J Comput Phys, 2014, 272: 644-655.

[30] Ran M, Zhang C. A conservative difference scheme for solving the strongly coupled nonlinear frac-tional Schrödinger equations[J]. Commun Nonlinear Sci, 2016, 41: 64-83.

[31] Wang P, Huang C. An energy conservative difference scheme for the nonlinear fractional Schrödingerequations[J]. J Comput Phys, 2015, 293: 238-251.

[32] Wang P, Huang C. A conservative linearized difference scheme for the nonlinear fractional Schrödingerequation[J]. Numer Algorithms, 2015, 69(3): 625-641.

[33] Wang Y, Mei L, Li Q, et al. Split-step spectral Galerkin method for the two-dimensional nonlinearspace-fractional Schrödinger equation[J]. Appl Numer Math, 2019, 136: 257-278.

[34] Ran M, Zhang C. A linearly implicit conservative scheme for the fractional nonlinear Schrödingerequation with wave operator[J]. Int J Comput Math, 2016, 93(7): 1103-1118.

[35] Cheng X, Qin H, Zhang J. Convergence of an energy-conserving scheme for nonlinear space fractionalSchrödinger equations with wave operator[J]. J Comput Appl Math, 2022, 400: 113762.

[36] Hu D, Cai W, Gu X M, et al. Efﬁcient energy preserving Galerkin-Legendre spectral methods for

fractional nonlinear Schrödinger equation with wave operator[J]. Appl Numer Math, 2022, 172: 608-

628.

[37] Zhang X, Ran M, Liu Y, et al. A high-order structure-preserving difference scheme for generalizedfractional Schrödinger equation with wave operator[J]. Math Comput Simulat, 2023, 210: 532-546.

[38] Pan K, Zeng J, He D, et al. A fourth-order difference scheme for the fractional nonlinear Schrödingerequation with wave operator[J]. Appl Anal, 2022, 101(8): 2886-2902.

[39] Ketcheson D I. Relaxation Runge-Kutta Methods: Conservation and Stability for Inner-Product Norms[J]. SIAM J Numer Anal, 2019, 57(6): 2850-2870.

[40] Ranocha H, Ketcheson D I. Relaxation Runge-Kutta Methods for Hamiltonian Problems[J]. J Sci

Comput, 2020, 84(1): 17.

[41] Yang X, Ju L. Linear and unconditionally energy stable schemes for the binary ﬂuid-surfactant phaseﬁeld model[J]. Comput Method Appl M, 2017, 318: 1005-1029.

[42] Yang X, Ju L. Efﬁcient linear schemes with unconditional energy stability for the phase ﬁeld elasticbending energy model[J]. Comput Method Appl M, 2017, 315: 691-712.

[43] Zhao J, Wang Q, Yang X. Numerical approximations for a phase ﬁeld dendritic crystal growth model

based on the invariant energy quadratization approach[J]. Int J Numer Meth Eng, 2017, 110(3): 279-

300.

[44] Shen J, Xu J, Yang J. The scalar auxiliary variable (SAV) approach for gradient ﬂows[J]. J ComputPhys, 2018, 353: 407-416.

[45] Liu Z, Li X. The Exponential Scalar Auxiliary Variable (E-SAV) Approach for Phase Field Models andIts Explicit Computing[J]. SIAM J Sci Comput, 2020, 42(3): B630-B655.

[46] Cheng Q, Shen J. Multiple Scalar Auxiliary Variable (MSAV) Approach and its Application to thePhase-Field Vesicle Membrane Model[J]. SIAM J Sci Comput, 2018, 40(6): A3982-A4006.

[47] Chen C, Yang X. Efﬁcient numerical scheme for a dendritic solidiﬁcation phase ﬁeld model with meltconvection[J]. J Comput Phys, 2019, 388: 41-62.

[48] Yang X, Zhang G D. Convergence Analysis for the Invariant Energy Quadratization (IEQ) Schemes

for Solving the Cahn-Hilliard and Allen-Cahn Equations with General Nonlinear Potential[J]. J Sci

Comput, 2020, 82(3): 55.

[49] Cheng Q, Shen J, Yang X. Highly Efﬁcient and Accurate Numerical Schemes for the Epitaxial ThinFilm Growth Models by Using the SAV Approach[J]. J Sci Comput, 2019, 78(3): 1467-1487.

[50] Gong Y, Zhao J, Wang Q. Arbitrarily high-order unconditionally energy stable SAV schemes for gra-dient ﬂow models[J]. Comput. Phys. Commun., 2020, 249: 107033.

[51] Budd C, Iserles A, McLachlan R I, et al. Geometric integration using discrete gradients[J]. Philosoph-

ical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and EngineeringSciences, 1999, 357(1754): 1021-1045.

[52] Quispel G R W, McLaren D I. A new class of energy-preserving numerical integration methods[J]. J.Phys. A: Math. Theor., 2008, 41(4): 045206.

[53] Cai W, Li H, Wang Y. Partitioned averaged vector ﬁeld methods[J]. J Comput Phys, 2018, 370: 25-42.[54] Wang P, Huang C. Structure-preserving numerical methods for the fractional Schrödinger equation[J].Appl Numer Math, 2018, 129: 137-158.

[55] Fu Y, Cai W, Wang Y. Structure-preserving algorithms for the two-dimensional fractional Klein-Gordon-Schrödinger equation[J]. Appl Numer Math, 2020, 156: 77-93.

[56] 孙志忠,高广花. 分数阶微分方程的有限差分方法[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2021.

[57] Yang Q, Liu F, Turner I. Numerical methods for fractional partial differential equations with Rieszspace fractional derivatives[J]. Appl Math Model, 2010, 34(1): 200-218.

[58] Demengel F, Demengel G. Universitext: Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differen-tial Equations[M]. London: Springer, 2012.

[59] Deng W. Finite element method for the space and time fractional Fokker-Planck equation[J]. SIAM JNumer Anal, 2009, 47(1): 204-226.

[60] Ervin V J, Heuer N, Roop J P. Numerical approximation of a time dependent, nonlinear, Space-Fractional diffusion equation[J]. SIAM J Numer Anal, 2007, 45(2): 572-591.

[61] Xu Q, Hesthaven J S. Discontinuous galerkin method for fractional convection-diffusion equations[J].SIAM J Numer Anal, 2014, 52(1): 405-423.

四川师范大学硕士学位论文

[62] Zayernouri M, Karniadakis G E. Fractional spectral collocation method[J]. SIAM J Sci Comput, 2014,

36(1): A40-A62.

[63] Zeng F, Liu F, Li C, et al. A Crank-Nicolson ADI spectral method for a two-dimensional riesz spacefractional nonlinear reaction-diffusion equation[J]. SIAM J Numer Anal, 2014, 52(6): 2599-2622.

[64] Chen M, Deng W. Fourth order accurate scheme for the space fractional diffusion equations[J]. SIAMJ Numer Anal, 2014, 52(3): 1418-1438.

[65] Meerschaert M M, Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersionﬂow equations[J]. J Comput Appl Math, 2004, 172(1): 65-77.

[66] Du Q, Gunzburger M, Lehoucq R B, et al. Analysis and approximation of nonlocal diffusion problemswith volume constraints[J]. SIAM Rev, 2012, 54(4): 667-696.

[67] Ding H, Li C, Chen Y. High-order algorithms for Riesz derivative and their applications (II)[J]. JComput Phys, 2015, 293: 218-237.

[68] Zhang Y, Ding H, Luo J. Fourth-Order Compact Difference Schemes for the Riemann-Liouville andRiesz Derivatives[J]. Abstr. Appl. Anal., 2014, 2014: 1-4.

[69] Gao T, Duan J, Li X, et al. Mean exit time and escape probability for dynamical systems driven by lévynoises[J]. SIAM J Sci Comput, 2014, 36(3): A887-A906.

[70] Huang Y, Oberman A. Numerical methods for the fractional laplacian: A ﬁnite difference-quadratureapproach[J]. SIAM J Numer Anal, 2014, 52(6): 3056-3084.

[71] Guo B, Pu X, Huang F. Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions[M].WORLD SCIENTIFIC, 2015.

[72] 张晓. Matlab微分方程高效解法:谱方法原理与实现[M]. 北京: 机械工业出版社, 2015.

[73] Caffarelli L, Silvestre L. An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian[J]. Commun PartDiff Eq, 2007, 32(8): 1245-1260.

[74] Guo B, Han Y, Xin J. Existence of the global smooth solution to the period boundary value problem offractional nonlinear Schrödinger equation[J]. Appl Math Comput, 2008, 204(1): 468-477.

[75] Hairer E, Wanner G. Runge-Kutta Methods, Explicit, Implicit[M] Berlin, Heidelberg: Springer, 2015:

1282-1285.

[76] Li D, Li X, Zhang Z. Implicit-explicit relaxation Runge-Kutta methods: Construction, analysis andapplications to PDEs[J]. Math Comput, 2022, 92(339): 117-146.

[77] Ranocha H, Lóczi L, Ketcheson D I. General relaxation methods for initial-value problems with appli-cation to multistep schemes[J]. Numer Math, 2020, 146(4): 875-906.

[78] Shu C W, Osher S. Efﬁcient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. J Comput Phys, 1988, 77(2): 439-471.

[79] Wang N, Li M, Huang C. Unconditional Energy Dissipation and Error Estimates of the SAV Fourier

Spectral Method for Nonlinear Fractional Generalized Wave Equation[J]. J Sci Comput, 2021, 88(1):19.

致谢

值此毕业之际,我要向在我攻读硕士学位的三年中给予我帮助和支持的人们表示最真诚的感谢.

首先,我要衷心地感谢我的导师冉茂华教授,他是我在学术上的启蒙者和引路人.硕士3年期间,我多次恍然大悟,常常感到过去自己的许多稚嫩之处,也因此更是心存感激,感激冉老师对我的教导和支持.他为我提供了优良的研究条件和丰富的学术资源,让我能够接触到偏微分方程与数学物理领域的前沿知识和最新动态.他给予了我无私的指导和悉心的关怀,不仅教授了我专业知识和研究方法,还培养了我的思维能力和创新意识.他对我的论文提出了宝贵的修改意见和建议,使我的论文更加完善和规范.

其次,我要感谢我的师姐张溪、田智慧、曹晴,她们在学习上给予了我很多帮助和指导,在生活上给予了我很多关心和照顾.她们用自己的经验和知识为我解答了许多困惑和难题,让我受益匪浅.她们也是我的好朋友,我们一起分享快乐与悲伤,一起度过了难忘的时光.感谢我的同门杨丁、谭凤,他们是我的同道中人,我们一起参与课题研究、撰写论文、参加学术交流.我们相互鼓励、相互支持、相互进步,在学术上形成了良好的合作关系,在友谊上形成了深厚的情感纽带.感谢我的师妹张鹤赢、史心怡.她们在研究和实验方面给予了我很多的新思路和实质性的协助.

我还要特别感谢我的父母。他们是我生活中最坚实的后盾,他们的支持和鼓励是我不断前行的动力源泉。在我学业和研究中,他们给予了我无私的支持和理解,为我创造了良好的学习环境,并时刻鼓励我坚持追求自己的梦想。没有他们的支持和关爱,我将无法走到今天。

在此之外,还有许多其他人值得我感激:数学系里其他老师、我的室友、朋友等等.正是因为有这么一群人在背后默默地支持着我、陪伴着我、鞭策着我、期待着我,才使得这篇论文能够顺利完成,并且才使得这段硕士生涯能够充满意义.

最后再次向所有关心和爱护我的老师、同学、朋友、家人们表示感谢,愿你们工作顺利,学业有成,健康幸福.

四川师范大学硕士学位论文

在校期间的科研成果

在校期间的科研成果

[1] Liu Y, Ran M, Zhang L, Hamiltonian-preserving schemes for the two-dimensional fractional nonlinearSchrödinger wave equations[J]. Comput. Math. Appl,2023,150:54-69.

[2] Liu Y, Ran M, Arbitrarily high-order explicit energy-conserving methods for the generalized nonlinearfractional Schrödinger wave equations[J]. Math. Comput. Simulation,2023,216:126-144.

[3] Tian Z, Ran M, Liu Y, Higher-order energy-preserving difference scheme for the fourth-order nonlinearstrain wave equation, Comput[J]. Math. Appl,2023,135:124-133.

[4] Zhang X, Ran M, Liu Y, Zhang L, A high-order structure-preserving difference scheme for generalized

fractional Schrödinger equation with wave operator[J]. Math. Comput. Simulation,2023,210:532-

546.

[5] Feng Z, Ran M, Liu Y, An efﬁcient difference scheme for the non-Fickian time-fractional diffusionequations with variable coefﬁcient[J]. Appl. Math. Lett,2023,121:107489.