华南农业大学
2021–2022 学年第一学期期末考试试卷

授课课时：48 学时　　考试时长：120 分钟
课程名称：**常微分方程**　　适用对象：2019 级信息与计算科学 1-2 班
试卷命题人：加绒　　试卷审核人：加绒

注：带 ⁎ 号的为我记不太清楚的题目！对此一般作化简处理，或替换为同类型的题目。

一　选择题 (共 15 分，每题 3 分)

1. 下列微分方程为二阶线性方程的是 ( ).

   A. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+12xy=0$

   B. $2\,(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y^2=0$

   C. $3\,\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x=\sin y$

   D. $x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy=\sin x$

2. 微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个特解 $y_1=e^x, y_2=xe^x, y_3=x^2e^x$，则微分方程的通解为 ( ).

   A. $y=(C_1+C_2x)xe^x+e^x$

   B. $y=(C_1+C_2x)xe^x-e^x$

   C. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x+$

   D. $y=(C_1+C_2x)xe^x+(1-C_1-C_2)e^x$

3. ⁎ 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}-x=0$ 的基本解组 ( ).

   A. $1,-1,i,-i$

   B. $1,0,i,-i$

   C. $e^t,e^{-t},\cos t,\sin t$

   D. $e^t,1,\cos t,\sin t$

4. 李普希茨条件是一阶线性微分方程的解存在唯一的 ( ) 条件.

   A. 充分

   B. 必要

   C. 充分必要

   D. 必要不充分

5. 微分方程 $N(x,y)\mathrm{d}x+M(x,y)\mathrm{d}y=0$ 存在积分因子 μ 的充分必要条件为 ( ).

A. $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial x}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial y}$

B. $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

C. $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial x}\neq\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial y}$

D. $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

(以下拓展题目留给读者复习用)

6. 以下各函数组在它们相应的定义区间内线性相关的有 ( ).

A. $\sin 2t, \cos t, \sin t$

B. $\cos 2t, 1, \cos^2 t$

C. $1, x, x^2$

D. e^t, te^t, t^2e^t

7. 微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 存在只与 x 有关的积分因子的充分必要条件为 ( ).

A. $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(y)$

B. $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-N}=\psi(y)$

C. $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\psi(x)$

D. $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)$

二　填空题 (共 15 分，每题 3 分)

1. 方程 $xy'+y=xy^2\ln x$ 通过变换____________ 可化为线性方程.

2. $*$ 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ 通过变换____________ 可化为齐次方程.

3. $*$ 已知某一四阶实常系数线性齐次方程只有特征根 $0,\pm 4i$,则还原该微分方程为____________.

4. $*$(完全记不清了) 方程 $y''+4y'+4y=0$ 的基本解组为____________.

5. 二阶欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=0$ 通过变换____________ 可化为二阶常系数齐次线性微分方程.

(以下拓展题目留给读者复习用)

6. 已知某曲线上任一点平分过该点的法线夹在两坐标轴之间的线段,则该曲线方程为____________.

7. 如果 $x(t)$ 是方程 $x' = Ax$ 满足初始条件 $x(t_0) = \eta$ 的解，那么 $x(t) =$____________.

8. 对于二阶线性齐次方程 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$(其中 $p(t), q(t)$ 为连续函数)，若有____________ 成立，则 $x = t$ 是方程的解.

三 ※ 计算题 (共 24 分，每题 6 分)

求下列微分方程的通解:

1. $(3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^3)\mathrm{d}y = 0$

2. $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + (\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2$

3. $x' + \sqrt{1 - (x')^2} = 0$

4. $x'' - 2x' + 2x = te^t \cos t$

(以下拓展题目留给读者复习用)

5. $x(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 - 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x = 0$

6. $(xye^{\frac{x}{y}}+y^2)\mathrm{d}x - x^2e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y = 0$

7. $xx'' + (x')^2 = 0$

四　大题 (第 1-3 题每题 12 分，第 4 题 10 分)

1. (12 分)⋇(表述未必严谨) 设 $x_1(t), x_2(t)$ 是二阶齐次线性微分方程 $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, t \in [0,1]$ 的任意两个解 (其中 $a_1(t), a_2(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续)，由 $x_1(t), x_2(t)$ 所构成的朗斯基行列式记为 $W(t)$，试证：

   (1) $W(t)$ 可以表示为
   $$W(t) = W(0)\cdot \exp\{-\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\}.$$

   (2) 设 $x_1(0) = x_2(0) = 0$，求证 $x_1(t), x_2(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上线性相关.

2. (12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足
   $$f(x) = xe^x - \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}x,$$
   求 $f(x)$.

3. (12 分) 设 $(x,y)\in D:|x+1|\leqslant 1,|y|\leqslant 1$，求初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y^2\\ y(0)=0\end{cases}$ 的解的存在区间，并求第三次近似解，给出在解的存在区间的误差估计.

4. (10 分)$\ast$ 考虑某种物质 A 经化学反应全部生成另一种物质 B. 设 A 的初始质量为 m_0 克，在 1 小时后生成 B 物质 g 克，试求：

(1) 经过 3 小时后，A 物质起反应的量是多少?

(2) 经过多少小时后，A 物质中 75% 的量已经起了反应?