1. 从正态总体 $N(3.4,\ 6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间 $(1.4,\ 5.4)$ 内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大？

附表：标准正态分布表 98数一考研题

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

2. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}\,(n\geq 2)$，其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$$

的数学期望 $E(Y)$. 01数一考研题

3. 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$，$Y=\frac{1}{X^2}$，则（ ）.

(A) $Y\sim\chi^2(n)$; (B) $Y\sim\chi^2(n-1)$;

(C) $Y\sim F(n,1)$; (D) $Y\sim F(1,\ n)$. 03数一考研题

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n\geq 2)$ 为来自总体 $N(0,\ 1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则（ ）. 05数一考研题

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$; (B) $nS^2\sim\chi^2(n)$;

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$; (D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.

1. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，试分别用矩估计法和最大似然估计法求的估计量. 97数一考研题

2. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$. 99数一考研题

小测一：

1. n 至少取35.

2. $2(n-1)\sigma^2$.

3. C

4. D

小测二：

1. $\dfrac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$, $-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

2. (1) $2\bar{X}$; (2) $\dfrac{\theta^2}{5n}$.

期中小测答案解析

——独自完成，如有错漏，欢迎提出！

1.$\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\Rightarrow\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\dfrac{d}{2}$.其中$d$为区间长度.由题,$1-\alpha=0.95,\alpha=0.05$,

$\sigma=6,z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96,d=5.4-1.4=4$.于是,$n>\left(\dfrac{2\sigma}{d}z_{\alpha/2}\right)^2=34.5744$.故$n$至少取35.

2.解法一:
$$\begin{aligned}Y&=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\bar{X}\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2+X_{n+i}^2+4\bar{X}^2+2X_iX_{n+i}-4X_i\bar{X}-4X_{n+i}\bar{X}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+X_{n+i}^2)+\sum_{i=1}^{n}4\bar{X}^2+\sum_{i=1}^{n}2X_iX_{n+i}+\sum_{i=1}^{n}\left(-4X_i\bar{X}-4X_{n+i}\bar{X}\right)\\&=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+4n\bar{X}^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}-4\bar{X}\sum_{i=1}^{2n}X_i\\&=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+4n\bar{X}^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}-4\bar{X}\cdot 2n\bar{X}\\&=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2-4n\bar{X}^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}\end{aligned}$$

因$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}\,(n\geqslant 2)$为简单随机样本,故两两相互独立且$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)\,(\sigma>0,i=1,2,\cdots,2n)$.

故对$\forall i=1,2,\cdots,2n,E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2,E(X_i^2)=D(X_i)+E(X_i)^2=\sigma^2+\mu^2,E\left(\bar{X}\right)=\mu$,

$D\left(\bar{X}\right)=\dfrac{\sigma^2}{2n},E\left(\bar{X}^2\right)=D\left(\bar{X}\right)+E\left(\bar{X}\right)^2=\dfrac{\sigma^2}{2n}+\mu^2,E(X_iX_{n+i})=E(X_i)E(X_{n+i})=\mu^2$.

进而,$E(Y)=\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}E(X_i^2)-4nE\left(\bar{X}^2\right)+2\sum_{i=1}^{n}E(X_iX_{n+i})$

$=\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}(\sigma^2+\mu^2)-4n\left(\frac{\sigma^2}{2n}+\mu^2\right)+2\sum_{i=1}^{n}\mu^2=2n(\sigma^2+\mu^2)-(2\sigma^2+4n\mu^2)+2n\mu^2=2(n-1)\sigma^2$.

解法二: 考虑$(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2}),\cdots,(X_n+X_{2n})$,将其视作取自总体$N(2\mu,2\sigma^2)$的简单随机样本,

则其样本均值为$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\bar{X}$,样本方差为$\displaystyle\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i+X_{n+i})-2\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}Y$.

由于$E\left(\dfrac{1}{n-1}Y\right)=2\sigma^2$,知$E(Y)=2(n-1)\sigma^2$.

3. C. $X=\dfrac{A}{\sqrt{B/n}}$, *which* $A\sim N(0,1),B\sim\chi^2(n).A^2\sim\chi^2(1),\dfrac{1}{X^2}=\dfrac{B/n}{A^2/1}\sim F(n,1)$.

4. D.

$A.D\left(n\bar{X}\right)=n^2\cdot\dfrac{1}{n}=n\neq 1;B.\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$或检验方差.

$C.\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n}\cdot\bar{X}}{S}\sim t(n-1);D.X_1^2\sim\chi^2(1),\displaystyle\sum_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$,由定义显然...

1.矩估计量: $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}\ (\theta>-1)$,

解得$\theta=\dfrac{2\mu_1-1}{1-\mu_1}$.用样本矩$A_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$替换总体矩$\mu_1$,得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$.

最大似然估计量: 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的样本值,则似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}[(\theta+1)x_i^{\theta}],& 0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n).\\ 0, & else.\end{cases}$$

当$0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n)$时,$L(\theta)>0$,且有$\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln[(\theta+1)x_i^{\theta}]=\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln(\theta+1)+\theta\ln x_i)$.

令$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\theta+1}+\ln x_i\right)=0$,解得参数$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

从而可知参数θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

2.(1)$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta} x\cdot\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{2}$,

解得$\theta=2\mu_1$.用样本矩$A_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$替换总体矩$\mu_1$,得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=2\bar{X}$.

(2)$D\left(\hat{\theta}\right)=D\left(2\bar{X}\right)=D\left(\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{4}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)$.

$E(X_i)=E(X)=\dfrac{1}{2}\theta$,$E(X_i^2)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}x^2\cdot\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{10}\theta^2$.

$D(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2=\dfrac{3}{10}\theta^2-\left(\dfrac{1}{2}\theta\right)^2=\dfrac{1}{20}\theta^2$,进而$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{4}{n^2}\cdot\dfrac{1}{20}\theta^2\cdot n=\dfrac{\theta^2}{5n}$.