Les Équations,les inéquations et les systèmes

1 Équations du premier degré à une inconnue.

1.1 Définition

Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité entre deux expressions algébriques contenant une seule variable de degré au plus égal à 1.
Ce type d'équations peut se ramener à la forme réduite : $ax + b = 0$ ou $ax = b$.
Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs pour lesquelles l'égalité est vraie. Ces valeurs sont les solutions de l'équation.
S désigne l'ensemble des solutions.

Exemples

1.2 Équation-produit

Définition

Une équation du type $P(x)\times Q(x) = 0$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques s'appelle une équation-produit.

Exemple

Une équation du type $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une équation-produit.

théorème du produit nul

Pour tous nombres réels a et b :$a \times b = 0$ équivalent à $a = 0$ ou $b = 0$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2x + 3)(x - 4) = 0$

1.3 Équation-quotient

Définition

Une équation du type $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, avec $P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$ s'appelle une équation-quotient.

Exemple

Une équation du type $\dfrac{(ax+b)}{(cx+d)} = 0$ où $cx+d \neq 0$ et $ax+b=0$ est une équation-produit.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{2x-3}{x+2} = 0$.

1.4 Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\dfrac{2(x-1)}{6} - \dfrac{3(2x+1)}{6} = \dfrac{3-4x}{3}$.

b) $(3x-4)(5x+1) - 2(3x-4)(1-x) = 0$.

c) $(2x-1)^2 = 9$.

d) $(x-4)^2 = (x+3)^2$.

e) $x^3 - 1 + 3(x^2-1) = 0$.

f) $x^2 - 6x + 9 = 0$

g) $|x| = 3$.

h) $|2x-7| = 0$.

i) $|2x-3| = |2-x|$.

j) $3|x| + 7 = 0$.

k) $|x-2| - 2|x| = 2x - 3$.

l) $\dfrac{x+2}{2-x} = 0$.

m) $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{5}{x+3} = 0$.

n) $\sqrt{x} = 7$.

o) $\sqrt{2x-1} = x - 2$.

1.5 Mise en équation d'un problème

Exemples

1. Lors d'un match de football dans un village, il y avait 1000 spectateurs.
   Les spectateurs assis dans les tribunes paient 100DH le billet d'entrée. Les spectateurs debout derrière les grilles paient 50DH le billet d'entrée.
   La recette totale du match est de 82700DH.
   Calculer le nombre de spectateurs de chaque catégorie.

2. Deux champs rectangulaires $ABCD$ et $ABEF$ ont un côté commun $[AB]$.
   On pose $AB = x$.
   Les deux autres côtés sont aussi exprimés en fonction de x : $BC = 4x - 3$ et $BE = 2x + 3$.
   Déterminer x pour que ces deux champs aient la même aire.

2 Inéquations du premier degré à une inconnue.

2.1 Définition

On appelle inéquation du premier degré à une inconnue toute inéquation sous la forme $ax + b < 0$ ou $ax + b > 0$ ou $ax + b \leq 0$ ou $ax + b \geq 0$, x est l'inconnue. a et b deux réels donnés.
L'ensemble des valeurs réelles x vérifiant l'inéquation s'appelle l'ensemble de solutions de cette inéquation noté S.

Exemples

2.2 Le signe de $ax + b$

Soit $P(x) = ax + b$ et $a \neq 0$

- si $x \geq \frac{-b}{a}$ alors $ax + b$ et a ont même signe .
- si $x \leq \frac{-b}{a}$ alors $ax + b$ et $-a$ ont même signe .

On résume le signe de $P(x)$ dans le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $-\frac{b}{a}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$ax + b$	

Ce tableau est appelé le tableau de signes de $P(x)$

Exemples

3 Équations du second degré à une inconnue.

3.1 Définition

On appelle équation du second degré à une inconnue toute équation s'écrit sous la forme ax^2+bx+c ou x est l'inconnue et a ,b et c des réels donnés avec $a \neq 0$.
Le nombre réel $\Delta = b^2-4ac$ désigne le discriminant de cette équation.

3.2 La forme canonique du trinôme ax^2+bx+c

Propriété

a,b et c sont trois réels tel que $a \neq 0$.Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :$ax^2+bx+c = a[(x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}]$ avec $\Delta = b^2-4ac$.
L'expression $ax^2+bx+c = a[(x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}]$ est appelée la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c.

Remarques

— On dit quel Le nombre réel $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du polynôme ax^2+bx+c.
— Toute solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est une racine du trinôme ax^2+bx+c

Exemple

Donner la forme canonique du trinome :$2x^2-5x+2$

3.3 Résolution d'une équation du second degré à une inconnue.

Propriété

Soit l'équation $(E) : ax^2+bx+c=0$ ou a,b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et Δ le discriminant de (E).Soit S l'ensemble des solutions.

— si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution :$S = \varnothing$

— si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une seule solution :$S = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

— si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes :$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2+x+2=0$.
2. $\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+1=0$.
3. $3x^2+7x+5=0$

3.4 Factorisation et signe du trinome ax^2+bx+c

.

Propriété 1

Soient $P(x) = ax^2+bx+c$ et Δ son discriminant.

— si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

— si si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a(x-x_0)^2$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

— si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ ne peut pas être factoriser.

Propriété 2 **:**

Soient $P(x) = ax^2+bx+c$ et Δ son discriminant.

— si $\Delta > 0$ alors $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2.Le tableau de signe du polynôme $P(x)$ est de la forme :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		le signe de a	0	le signe de $-a$	0	le signe de a	

Avec : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

— si $\Delta = 0$ alors $P(x)$ admet une racine x_0 .Le tableau de signe du polynôme $P(x)$ est de la forme :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		le signe de a	0	le signe de a	

Avec : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

— si $\Delta < 0$ alors le tableau de signe du polynôme $P(x)$ est de la forme :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		le signe de a	

Exercice 2

1. Factoriser les polynômes suivants :

(a)$P(x) = x^2-7x+12$

(b)$P(x) = -\sqrt{3}x^2+6x-3\sqrt{3}$

(c) $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$ (d) $P(x) = -2x^2 - x - 3$

2. On considére le polynôme : $P(x) = 2x^4 + 2(\sqrt{2} - 1)x^3 - (2\sqrt{2} + 11)x^2 - (12\sqrt{2} + 1)x - 6$.
   (a) Montrer que : $P(x) = (x^2 - x - 6)(2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1)$.
   (b) Factoriser le polynôme $Q(x)$ défini par : $Q(x) = x^2 - x - 6$.
   (c) Factoriser $R(x)$ défini par : $R(x) = 2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1$.Puis factoriser $P(x)$.

Exercice 3

. Étudier le signe de trinômes suivants :

a) $2x^2 - 5x - 3$; b) $-x^2 + 6x - 7$; c) $x^2 - x\sqrt{8} + 2$; d) $-3x^2 + 3x - 2$;

4 Inéquation du second degré

4.1 Définition

Toute inéquation de la forme $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ où a,b et c des réels avec $a \neq 0$ est appelée inéquation du second degré.
Résoudre l'inéquation, c'est trouver toutes les valeurs pour lesquelles l'inégalité est vraie.Ces valeurs sont les solutions de l'inéquation.
S désigne l'ensemble des solutions.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivants :

a) $x^2 + x - 1 \leq 0$; b) $-2x^2 + 4x + 1 \geq 3$; c) $-2x^2 + x\sqrt{8} + 1 < 0$;

d) $(3x + 1)(x^2 + x - 2) > 0$; e) $\frac{4x^2+x-3}{2x^2-9x-5} \leq 0$; f) $\sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3}$

5 Équation du premier degré à deux inconnues

Dans la suite $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que :$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Définition

Toute égalité s'écrit sous la forme $ax + by + c = 0$ tels que a,b et c des nombres réels donnés,x et y deux inconnues est appelé équation du premier degré à deux inconnues.
Les solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ sont tous les couples $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient l'égalité.
S est l'ensemble des solutions de l'équation.

Exercice 5

.

1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : (E) : $3x - 2y + 1 = 0$.
   (a) Écrire x en fonction de y et déduire les solutions de (E).
   (b) Écrire y en fonction de x et déduire une autre forme de l'ensemble des solutions.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivants :
   $x + 2y - 1 = 2$; $3x - 1 = 0$; $-4y = 3$.

6 Systéme de deux équations du premier degré à deux inconnues

Propriété

Soit le système (S) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$. tels que a,a',b et b' sont des nombres réels.

Le nombre $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-ba'$ est appelé le déterminant du système (S).

— Si $D \neq 0$ alors le système (S) est appelé système de Cramer,et admet une seule solution,c'est le couple (x,y) tels que : $x = \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}} = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ et $y = \frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}} = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$.
avec : $\mathrm{D}x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb'-bc'$ et $\mathrm{D}y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac'-ca'$.

— Si $D=0$ et $\mathrm{D}x = \mathrm{D}y = 0$ alors les solutions du système (S) sont les solutions de l'équation $ax+by=c$.

— Si $D=0$ et $\mathrm{D}x \neq 0$ ou $\mathrm{D}y \neq 0$ alors le système (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+4y=0 \\ 3x+2b'y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -8x+4y=15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -4x-12y=8 \\ 2x+6y=-4 \end{cases}$

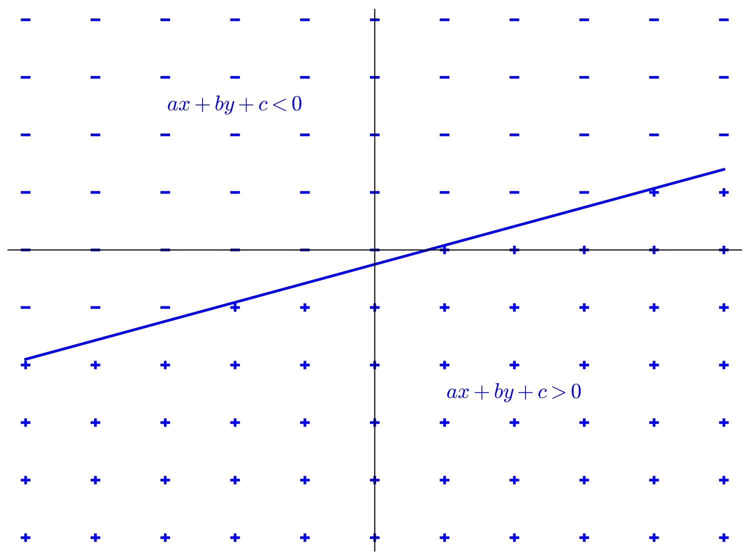
7 Régionnement et Signe de $ax+by+c$

Propriété

On considère la droite (D) : $ax+by+c=0$.
La droite (D) définit deux demi-plan ouverts :

— L'un deux est l'ensemble des points $M(x,y)$ qui vérifient l'inégalité $ax+by+c>0$.

— L'autre est l'ensemble des points $M(x,y)$ qui vérifient l'inégalité $ax+by+c<0$.



Remarque

Pour déterminer le signe de $ax+by+c$,il suffit de substituer les coordonnés d'un point $A(x_0;y_0)$ n'appartenant pas à la droite (D).

— le signe de $ax+by+c$ dans le demi-plan contenant le point A est celui de ax_0+by_0+c.

— le signe de $ax+by+c$ dans le demi-plan ne contenant pas le point A est le signe opposé de ax_0+by_0+c.

Exercice 7

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes :

a) $2x+3x-1>0$

b) $-3x+2x<4$

c) $-x-2y+1\geq 0$

d) $-2x+3y+4\leq 0$

e) $2y-1>0$.

8 Résolution graphique d'un système d'inéquations

Exercice 8

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+y<0 \\ 3x+y\leq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+4>0 \\ 2x+5y+8>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y\geq 1 \\ -x+2y\geq 4 \end{cases}$

9 Résolution de d'autre type de système

9.1 Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété 1

Soit $(E) : ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ et Δ le discriminant.
On suppose que $\Delta>0$.Alors (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 vérifiant : $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ et $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$.

Propriété 2

On considère le système suivant : $(S') : \begin{cases} x+y=p \\ xy=q \end{cases}$.
L'équation $(E) : t^2-pt+q=0$ est appelé l'équation équivalente du système (S').Le discriminent de cette équation est :$\Delta=p^2-4q$.
Soit S l'ensemble des solutions du système (S')

— Si $p^2-4q>0$ alors $S=\{(X_1;X_2);(X_2;X_1)\}$ avec X_1 et X_2 les solutions de l'équation (E).
— Si $p^2-4q=0$ alors $S=\{(X_0;X_0)\}$ avec X_0 la solution de l'équation (E).
— Si $p^2-4q<0$ alors le système (S') n'admet pas de solution. $S=\emptyset$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systémes suivants :

a) $\begin{cases} x+y=\frac{1}{6} \\ xy=-\frac{1}{6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=0 \\ x+y=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$