Représentation graphique d'une fonction numérique.

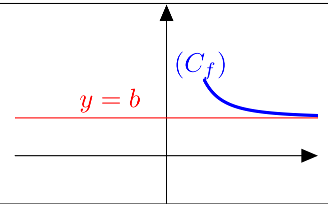
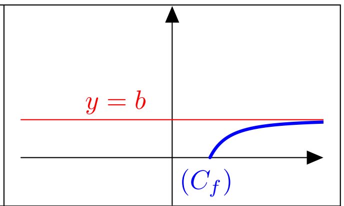
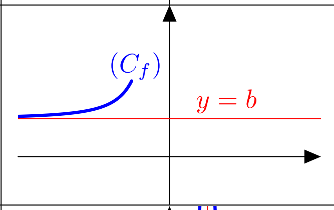
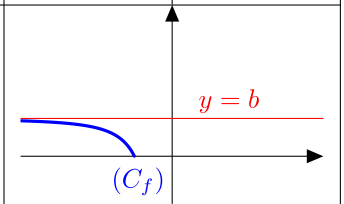
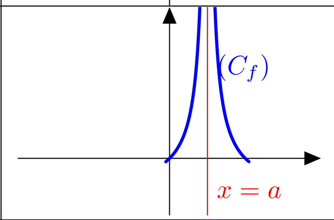
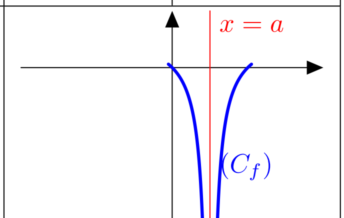
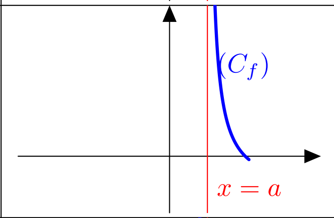
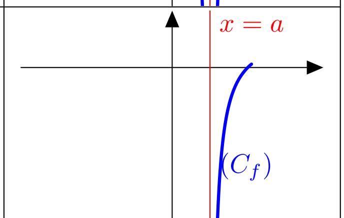
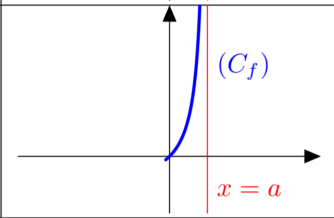
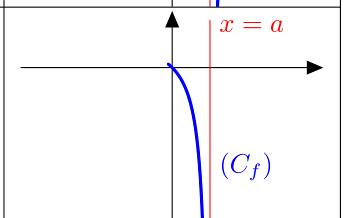
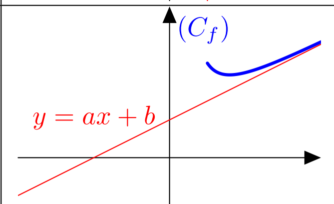
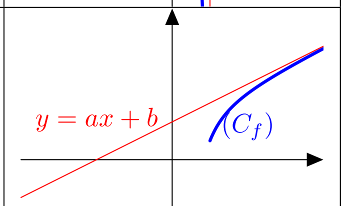
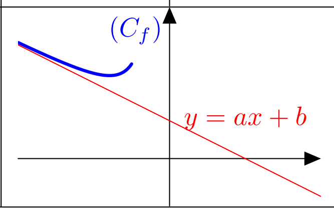
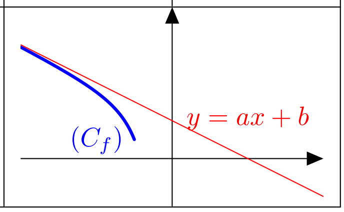
Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Branche infinie d'une courbe de fonction.

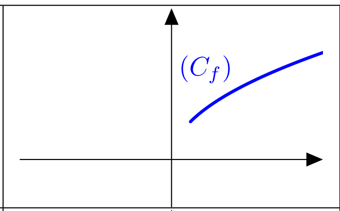
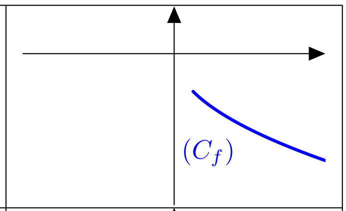
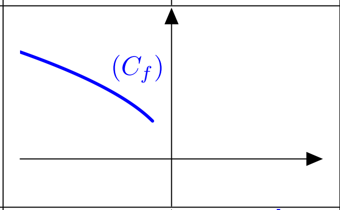
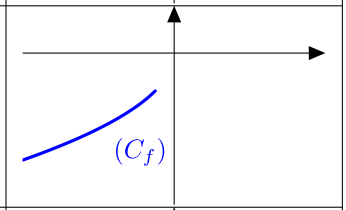
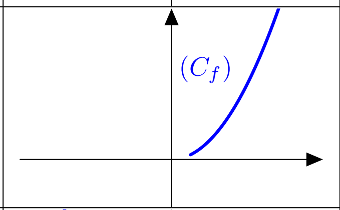
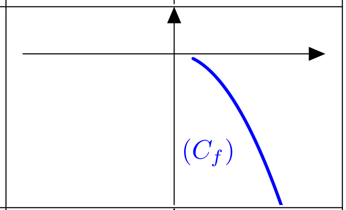
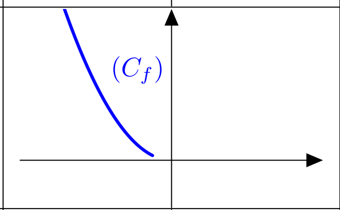
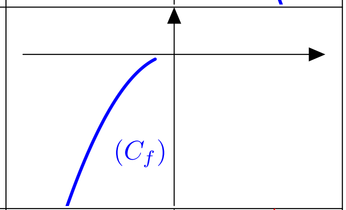
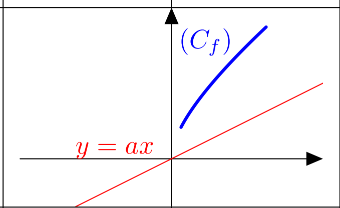
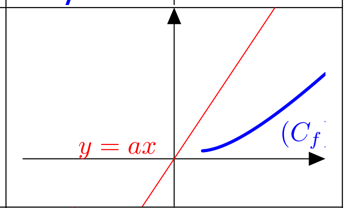
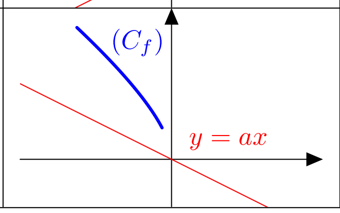
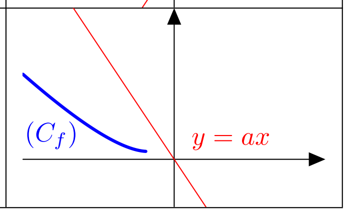
Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et (C_f) sa courbe représentative.On dit que (C_f) admet une branche infinie si x ou $f(x)$ tend vers l'infini.

1.1 Les asymptotes

Asymptote horizontale	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$	La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=b$ au voisinage de $+\infty$.		
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=b$ au voisinage de $-\infty$. .		
Asymptote verticale	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$	La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=a$ au voisinage de a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\infty$	La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=a$ au voisinage de a .		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\infty$	La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=a$ au voisinage de a.		
Asymptote oblique	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ avec $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b$ ou $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$	La courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$.		
		La courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $-\infty$.		

1.2 les branches paraboliques

<table>
<tr>
<td rowspan="6">Branche parabolique</td>
<td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
Avec
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=0$</td>
<td>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
avec
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$</td>
<td>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
avec
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=a\neq 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=\infty$</td>
<td>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $-\infty$.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Application

Étudier les branches infinies de la courbe (C_{f_i}) de f_i.
$f_1:\ x\mapsto \frac{3x+1}{2x-3}$; $f_2:\ x\mapsto \frac{x^2}{3x+2}$; $f_3:\ x\mapsto \sqrt{x+4}$; $f_4:\ x\mapsto x^2+2$

2 Concavité d'une courbe-Points d'inflexion.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et (C_f) sa courbe représentative.

— On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives ,si (C_f) est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

— On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives ,si (C_f) est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

— Soit $a\in I$.On dit que $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion si la courbe (C_f) change de concavité.

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$.

1. Si f'' est positive sur I,alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives.
2. Si f'' est négative sur I,alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives.
3. Si f'' s'annule en a en changeant de signe,alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

Application

1. Étudier la concavité de la courbe (C_{f_i}) la courbe représentative de f_i dans chacun des cas suivants : $f_1 : x \mapsto x^2$; $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$; $f_3 : x \mapsto -x^3 - x^2 + 2x - 1$;
2. Déterminer le point d'inflexion de (C_{f_i}) la courbe représentative de f_i. $f_1 : x \mapsto x^3$; $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$; $f_3 : x \mapsto x^3 + x^2 - 2x + 1$; $f_4 : x \mapsto x^4$;

3 Axe et symétrie-Centre de symétrie.

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur D et (C_f) sa courbe représentative.

1. La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétries de la courbe (C_f) si et seulement si
$\begin{cases} \forall x \in D_f : (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(2a - x) = f(x) \end{cases}$.
2. Le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :
$\begin{cases} \forall x \in D_f : (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$.

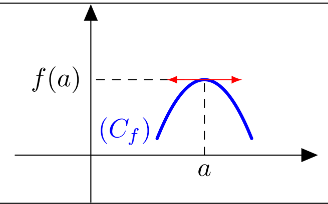
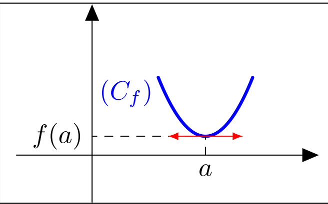
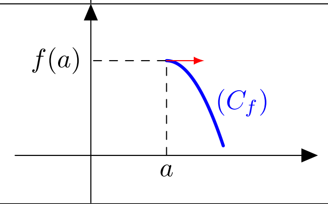
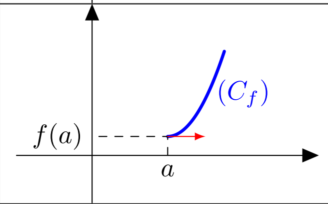
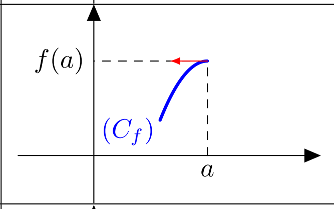
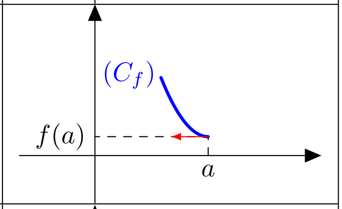
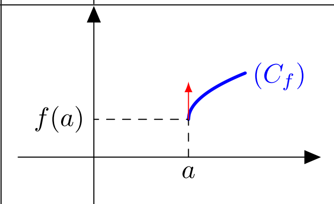
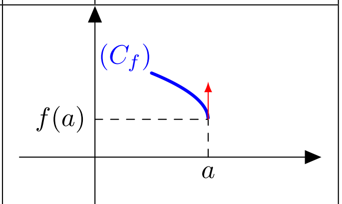
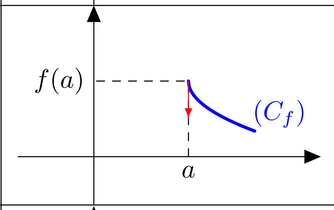
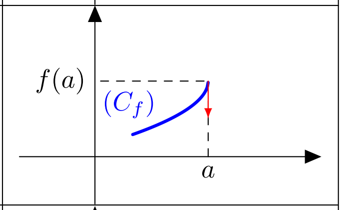
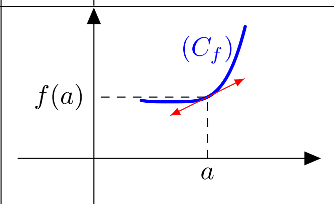
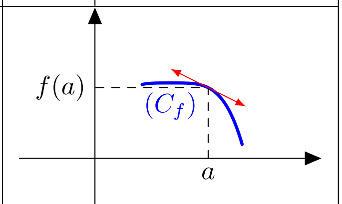
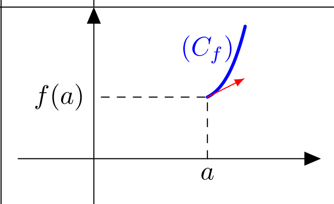
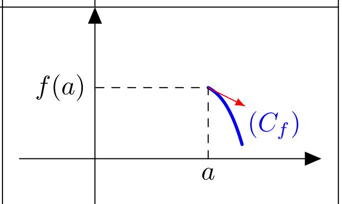
Application

1. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C) de $f : x \mapsto x^2 - x + \frac{5}{4}$.
2. Montrer que le point $I(-2; 1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C) de $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$.

4 Plan d'étude d'une fonction.

— Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
— Étudier la parité,la périodicité de f.Rechercher des centres ou des axes de symétrie puis puis déterminer son ensemble d'étude.
— Étudier la dérivabilité de f.
— Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
— Étudier le signe de $f'(x)$ et déduire les variations de f.Donner le tableau de variations de f.
— Étudier les branches infinies .
— Étudier les positions relatives de la courbe de f par rapport aux asymptotes s'ils existent.
— Déterminer s'il existe des points d'intersection de la courbe de f avec les axes du repère.
— Déterminer les tangentes à la courbe de f en des points particuliers.
— Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent en calculant la dérivée seconde.
— Construire la courbe de f.

5 Les tangentes.

Tangente horizontale	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$	La courbe (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$	La courbe (C_f) admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$	La courbe (C_f) admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse a.		
Tangente verticale	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	La courbe (C_f) admet une demi- tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a.		
Tangente oblique	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\neq 0$	La courbe (C_f) admet une tangente de coefficient directeur b au point d'abscisse a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\neq 0$	La courbe (C_f) admet une demi-tangente de coefficient directeur b au point d'abscisse a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\neq 0$	La courbe (C_f) admet une demi-tangente de coefficient directeur b au point d'abscisse a.