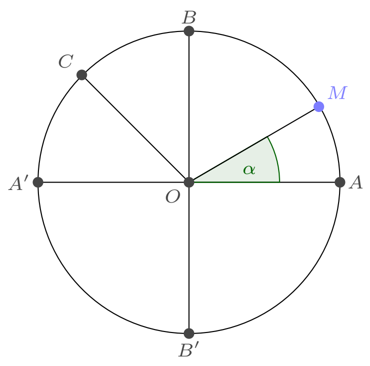
Le calcul trigonométrique

1 Unité de mesure des angles

Activité

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon 1.On considère les points A,B,C,A' ,B' et M sur le cercle (voir la figure).



1. Calculer le périmètre du cercle $(\mathcal{C})$.
2. Compléter le tableau suivant :

L'angle central	$A\hat{O}A'$	$A\hat{O}B$	$A\hat{O}C$	$A\hat{O}B'$	$A\hat{O}M$
Mesure de l'angle en degré					$\alpha°$
Longueur de l'arc correspondant					l

3. Calculer le coefficient de proportionnalité du tableau.
4. Déterminer l en fonction de α et π .

1.1 Définition

— Le radian est l'unité de mesure des angles noté rad.
— $1rad$ est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur un cercle de rayon 1 un arc de longueur 1.
— Il existe une autre unité de mesure des angles appelée "Grade" noté gr.
— La mesure de l'angle plat en degré est 180° ,en radian est π et en grade est 200.
On a :$\dfrac{a}{180°} = \dfrac{b}{\pi} = \dfrac{c}{200}$
Avec :
a : la mesure de l'angle en degré.
b : la mesure de l'angle en radian .
c : mesure de l'angle en grade.

Exemple

Compléter le tableau suivant :

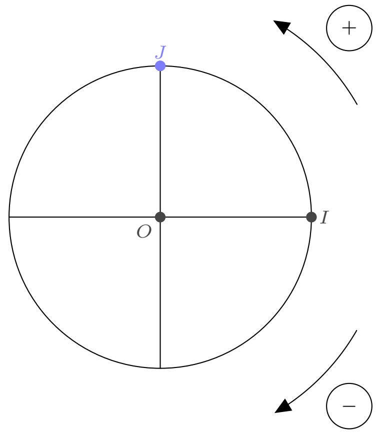
Mesure de l'angle en degré	20°		135°		270°		10°	
Mesure de l'angle radian		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{12}$

2 Le cercle trigonométrique et les abscisses curvilignes d'un point

2.1 Le cercle trigonométrique

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O,d'origine I et de rayon 1 orienté dans le sens indiqué par la flèche (appelé sens direct ou sens trigonométrique), c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



2.2 les abscisses curvilignes d'un point

Activité

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle trigonométrique de centre O et d'origine $I.M$ un point du cercle tel que l'angle $I\hat{O}M$ a pour mesure α rad.
Soit M' un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $I\hat{O}M'$ a pour mesure $\alpha + 2\pi$ rad.
Que peut-on dire sur M et M' ?

Définition

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle trigonométrique de centre O et d'origine $I.M$ un point du cercle tel que l'angle $I\hat{O}M$ a pour mesure α en radian.

— α est appelé abscisse curviligne du point M.
— Tout nombre de la forme $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est aussi abscisse curviligne du point M.
— Parmi toutes abscisses curvilignes du point M ,il y en a une et une seule appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$,appelée l'abscisse curviligne principale du point M.

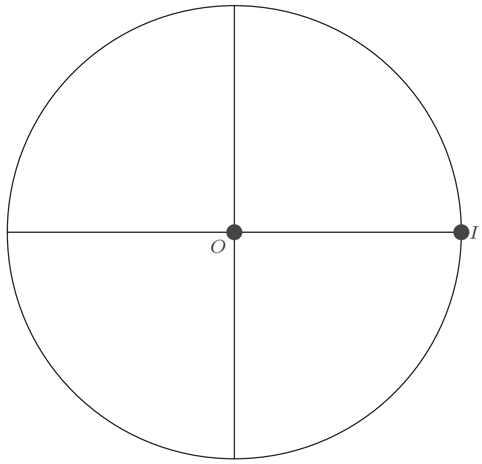
Remarques

— Si α_0 est l'abscisse curviligne principale du point M,alors toute autre abscisse curviligne du point M est de la forme :$\alpha_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et on note $M(\alpha_0 + 2k\pi)$.
— Si α et β sont des abscisses curvilignes d'un même point M,alors il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que :$\alpha - \beta = 2k\pi$ ou $\alpha \equiv \beta[2\pi]$ (α est congrue à β modulo 2π).

Exercices d'applications

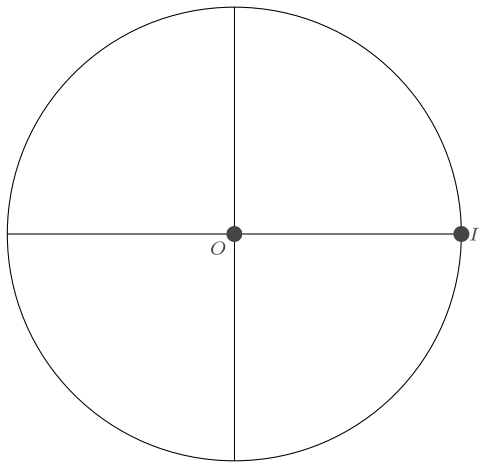
— Exercice 1 :
Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique : A$(\frac{\pi}{6})$; B$(\frac{\pi}{4})$; C$(\frac{\pi}{3})$; D$(\frac{\pi}{2})$; E$(\frac{3\pi}{4})$; F$(\frac{-\pi}{6})$; G$(\frac{-\pi}{4})$;

H($\frac{-\pi}{3}$) ; K($\frac{-\pi}{2}$) ; L($\frac{-3\pi}{4}$)



— Exercice 2 :
Est-ce que $\alpha = \dfrac{14\pi}{5}$ et $\beta = \dfrac{-6\pi}{5}$ représentent les abscisses curvilignes d'un même point ?.

— Exercices 3 :
Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique : M($\dfrac{37\pi}{4}$) ; A($\dfrac{-3\pi}{4}$) ; B($\dfrac{-21\pi}{4}$).



— Exercice 4 :
Déterminer la mesure principale de l'angle orienté ayant pour mesure x (en radian) dans chacun des cas suivants :

a) $x = \dfrac{-3\pi}{2}$ b) $x = \dfrac{-17\pi}{4}$ c) $x = \dfrac{23\pi}{4}$

d) $x = \dfrac{-5\pi}{2}$ e) $x = \dfrac{-4\pi}{3}$ f) $x = \dfrac{27\pi}{3}$

g) $x = \dfrac{2005\pi}{3}$

3 L'angle orienté de deux vecteurs non nuls

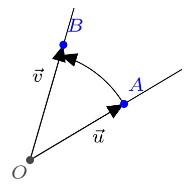
Dans la suite le plan est orienté dans le sens positif.

Définition

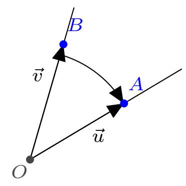
soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient A et B deux points du plan tels que :$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.Alors :

- L'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ est un angle orienté (On tourne de $\overrightarrow{OA}$ vers $\overrightarrow{OB}$). La mesure de cet angle est noté $(\overline{\vec{u},\vec{v}})$
- L'angle $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ est un angle orienté de sens contraire.Et on a : $(\overline{\vec{v},\vec{u}}) = -(\overline{\vec{u},\vec{v}})$

L'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$:



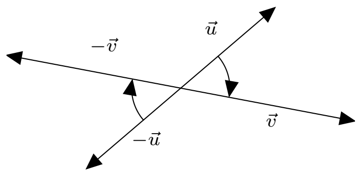
L'angle $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$:

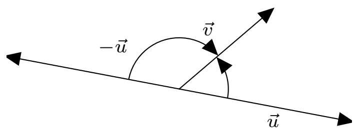


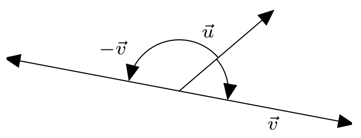
Propriétés

soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls .

1. $(\overline{\vec{u},\vec{u}}) \equiv 0[2\pi]$.
2. $(\overline{\vec{v},\vec{u}}) \equiv -(\overline{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$.
3. $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) + (\overline{\vec{v},\vec{w}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{w}})[2\pi]$ (Relation de Chasles).
4. Soient α et β deux réels non nuls.
   - Si $\alpha\beta > 0$ alors $(\overline{\alpha\vec{u},\beta\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$.
   - Si $\alpha\beta < 0$ alors $(\overline{\alpha\vec{u},\beta\vec{v}}) \equiv \pi + (\overline{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$.
5. $(\overline{-\vec{u},-\vec{v}}) \equiv \cdots\cdots[2\pi]$.
6. $(\overline{-\vec{u},\vec{v}}) \equiv \cdots\cdots[2\pi]$.
7. $(\overline{\vec{u},-\vec{v}}) \equiv \cdots\cdots[2\pi]$.







Exercice1

Donner la mesure principale de l'angle $(\widehat{\vec{v},\vec{t}})$ dans les cas suivants :

1. $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$,$(\overline{\vec{u},\vec{w}}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overline{\vec{w},\vec{t}}) = \frac{5\pi}{6}$
2. $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$,$(\overline{-\vec{u},-\vec{w}}) = \frac{2\pi}{4}$ et $(\overline{\vec{t},\vec{w}}) = \frac{5\pi}{6}$
3. $(\overline{2\vec{u},-2\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$,$(\overline{\vec{v},3\vec{w}}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overline{-\vec{w},\vec{t}}) = \frac{5\pi}{6}$

Exercice 2

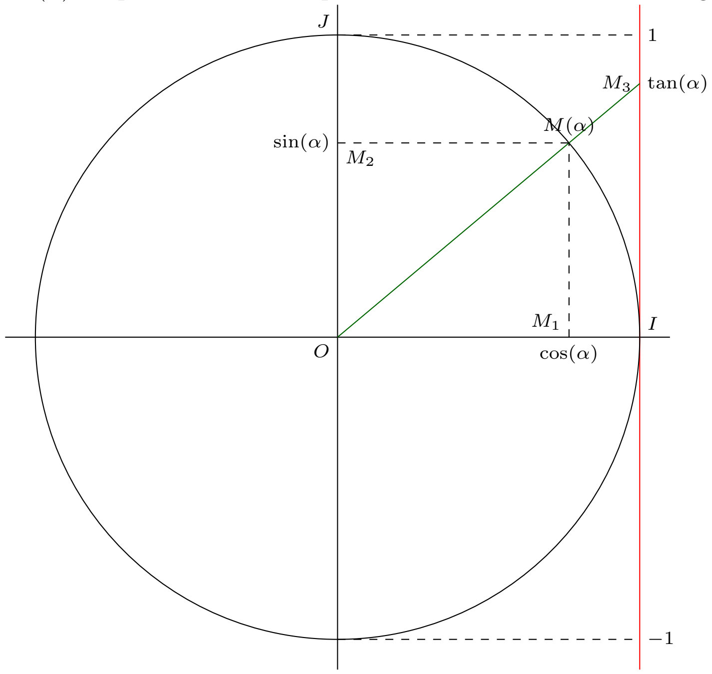
Soit $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct et $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique associé.

1. Placer sur le cercle $(\mathcal{C})$ les points M et N tels que :$(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$ et $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$
2. Quelle est la nature du triangle OMN ?

4 Les lignes trigonométriques

4.1 Définition

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I.Soit J un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et le repère $(O;I;J)$ est orthonormé.
$(O;I;J)$ est appelé le repère associé au cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$.
Soit (T) la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ au point I.Et M un point du cercle d'abscisse curviligne α(Voir la figure)



- M_1 le projeté orthogonal du point M sur la droite (OI).
- M_2 le projeté orthogonal du point M sur la droite (OJ).
- M_3 le point d'intersection de la droite (OM) et la tangente (T).
- L'abscisse du point M s'appelle cosinus de α noté $cos(\alpha)$.
- L'ordonnée du point M s'appelle sinus de α noté $sin(\alpha)$.
- L'abscisse du point M_3 dans le repère $(O;J)$ est appelé tangente de α noté $\tan(\alpha)$.

4.2 Relations trigonométrique

Propriétés

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $\cos^2(\alpha) + \sin^2\alpha = 1$
3. Pour tout $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a :
   $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
   $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
   $\sin^2\alpha = \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
   $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$
4. Les valeurs particulières suivantes de sin, cos et tan sont à connaitre absolument :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

5.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cos(x)$				

x	$-\pi$	0	π
$sin(x)$			

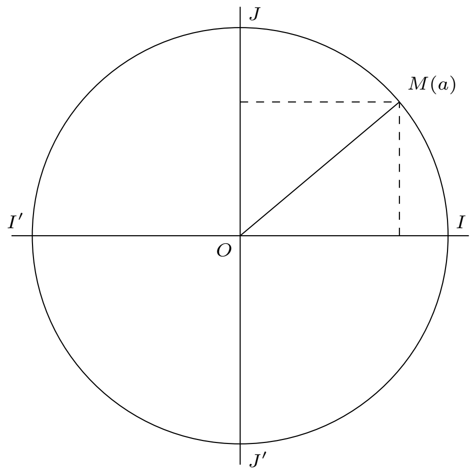
Exercice

1. Soit $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ tel que :$\sin\alpha = 0,6$. Calculer $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.
2. Soit $\beta \in [0, \pi]$ tel que :$\cos\beta = \dfrac{-1}{3}$. Calculer $\sin\beta$ et $\tan\beta$.
3. Soit $\beta \in [0, \pi]$ tel que :$\cos\beta = \dfrac{-1}{3}$. Calculer $\sin\beta$ et $\tan\beta$.
4. Soit $\gamma \in]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ tel que :$\tan\gamma = \dfrac{-1}{3}$. Calculer $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$.
5. Soit $a \in]\dfrac{\pi}{2}, \pi[$ tel que :$\cos a = \dfrac{-12}{13}$. Calculer $\tan a$ et $\sin a$.

5 Formules trigonométriques

A partir des lignes trigonométriques de a, on peut obtenir sans calculs celles de $-a$, $a+\pi$, $\pi - a$, $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} + a$:

$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(-a) = -\sin a$	$\tan(-a) = -\tan a$
$\cos(a+\pi) = -\cos a$	$\sin(a+\pi) = -\sin a$	$\tan(a+\pi) = \tan a$
$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{-1}{\tan a}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a}$



Exercices

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.Simplifier les expressions suivantes :
   (a) $\cos(\pi + x) - \cos(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
   (b) $\cos(\frac{5\pi}{2} + x) + \sin(x - \frac{7\pi}{2})$
   (c) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) + \cos(x - 3\pi)$
   (d) $\cos(5\pi + x) + \sin(11\pi - x) - \sin(\frac{9\pi}{2} - x) + \cos(2\pi - x)$
   (e) $(3\cos(x) + 4\sin(x))^2 + (3\sin(x) - 4\cos(x))^2$
   (f) $\tan(-x) + \tan(x + \pi) + \tan(x - 3\pi)$
2. (a) Calculer :$\cos(\frac{-3\pi}{4})$; $\sin(\frac{53\pi}{6})$ et $\tan(\frac{37\pi}{4})$.
   (b) Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{6\pi}{3} + \sin\frac{8\pi}{3}$
   $S_2 = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$
   $S_3 = \cos^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{4\pi}{10} + \cos^2\frac{6\pi}{10} + \cos^2\frac{9\pi}{10}$

6 Équations et inéquations trigonométriques

1. On considère l'équation :$\cos(x) = a$ et $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$.
   — Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
   — Si $a = 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
   — Si $a = -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
   — Si$-1 < a < 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\cos(\alpha) = a$.
2. On considère l'équation :$\sin(x) = b$ et $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$.
   — Si $b > 1$ ou $b < -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
   — Si $b = 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
   — Si $b = -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
   — Si$-1 < b < 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\sin(\alpha) = b$.
3. On considère l'équation :$\tan(x) = c$ et $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$.
   $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.Avec $\tan(\alpha) = c$

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{7})$ b) $\cos(x) = -\cos(\frac{\pi}{7})$ c) $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{8})$ d) $\sin(x) = -\sin(\frac{\pi}{8})$

e) $\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{12})$ f) $\tan(x) = -\tan(\frac{\pi}{5})$ g) $\cos(2x) = \sin(x)$ h) $\sin(2x) = \sin(x)$

i) $\tan(2x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ j) $\tan(2x) = \tan(x)$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \dfrac{-1}{2}$ b) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$

d) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\tan(x) = \sqrt{3}$ f) $\tan(x) = -1$

6.1 Inéquations trigonométrique

Exercice 1

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

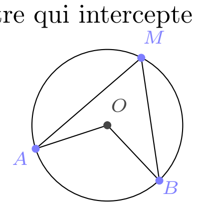
a) $\cos(x) \leq \frac{1}{2}\,;\, I = [0; 2\pi]$ b) $2\cos(x) + \sqrt{3} > 0\,;\, I = [-\pi; \pi]$ c) $2\sin(x) + 1 < 0\,;\, I = [-\pi; \pi]$

d) $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\, I = [0; 2\pi]$ e) $\tan(x) \geq \sqrt{3}\,;\, I = [0; 2\pi]$ f) $\tan(x) + 1 < 0\,;\, I = [-\pi; \pi]$

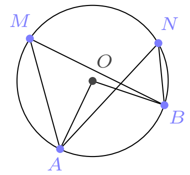
7 Angles inscrits et quadrilatères inscriptibles

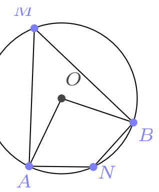
Définitions et propriétés

— Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et rayon r, A et B deux points de ce cercle et M un point variable sur le cercle $(\mathcal{C})$. L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc AB. $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre correspondant.la mesure de l'angle inscrit est la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



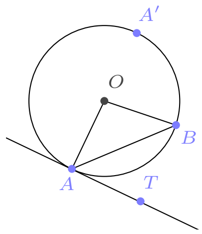
— Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure ou supplémentaires.





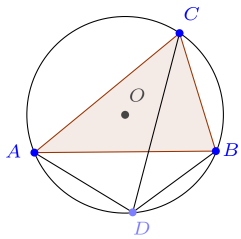
— Dans le cas où $A = M$,On considère la tangente (AT) en A au cercle $(\mathcal{C})$.Soit A' diamétralement opposé à

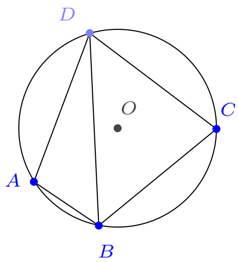
A.On a $\widehat{BAT} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.



— Soient A ,B et C trois points non alignée et soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.Soit D un point du plan.

Le point D appartient au cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ ou $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$.





— Soit ABC un triangle et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit au triangle ABC.
On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.On désigne par S l'air du triangle ABC.
On a :$S = \frac{1}{2}ab\sin(\hat{C}) = \frac{1}{2}ac\sin(\hat{B}) = \frac{1}{2}bc\sin(\hat{A})$
$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})} = 2r$.
$S = \frac{abc}{4r}$

— Soit ABC un triangle et $(\mathcal{C})$ son cercle inscrit. Si p est le demi-périmètre du triangle ABC et r le rayon du cercle, alors :$S = pr$