les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,$\mathbb{D}$,$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

1 Ensembles des nombres

1.1 Définitions

- Les nombres entiers naturels forment un ensemble noté $\mathbb{N}$ et on écrit :$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3...\}$.
- Les nombres entiers relatifs forment un ensemble noté $\mathbb{Z}$ et on écrit :$\mathbb{Z} = \{....; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3...\}$.
- Les nombres décimaux sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$, avec a un entier relatif et n un entier naturel forment un ensemble noté $\mathbb{D}$.
- Les nombres rationnels sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{b}$ tel que a un entier relatif et b un entier naturel non nul forment un ensemble noté $\mathbb{Q}$
- les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$. l'ensemble des nombres réels est aussi l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

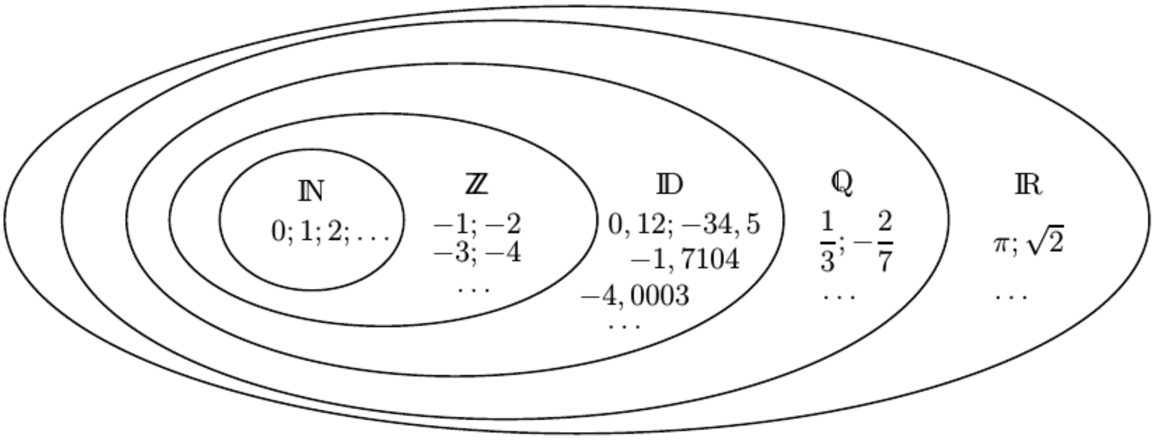
Exercice

Compléter le tableau suivant en mettant une croix dans la case convenable.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
25					
-12					
$-5,2$					
$\frac{-12}{3}$					
$\frac{\sqrt{81}}{3}$					
$\frac{5}{4}$					
$\frac{2}{3}$					
$\frac{\pi}{3}$					
$\sqrt{3}+2$					

1.2 Notations et remarques

- Le symbole"$\in$"signifie "appartient à", par exemple 11 est un élément de $\mathbb{N}$ on écrit $11 \in \mathbb{N}$ par contre -3 n'appartient pas à $\mathbb{N}$,on écrit $-3 \notin \mathbb{N}$
- Le symbole " $\subset$" signifie "est inclus dans ",par exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$,Car tout entier naturel est un entier relatif.
  $\mathbb{D}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{Z}$,on écrit $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$,c'est-à-dire il existe un élément dans $\mathbb{D}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels non nul.De même pour $\mathbb{Z}^*$,$\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$.
- $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n}/a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}/a \in \mathbb{Z}$et $b \in \mathbb{N}^*\}$
- On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset R$



— $\mathbb{Z}^+$ est l'ensemble des entiers relatifs positifs et $\mathbb{Z}^-$ est l'ensemble des entiers relatifs négatif.De même pour $\mathbb{D}^+$ et $\mathbb{D}^-$;$\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{Q}^-$;$\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$

Exercice

Compléter en utilisant les symboles : "$\in$" ,"$\notin$" , "$\subset$" et "$\not\subset$" :
$28,13 \ldots \mathbb{D}$; $-\sqrt{4}$ ....$\mathbb{N}$; $\frac{5}{4} \ldots \mathbb{D}$; $\mathbb{R}^+ \ldots \mathbb{R}$; $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{N}$; $10^{-2} \ldots \mathbb{R}^-$; $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{R}$; $-\pi \ldots \mathbb{R}^+$; $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{Q}^-$; $\frac{1}{3} \ldots \mathbb{Z}^+$

2 Opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$

2.1 L'addition dans $\mathbb{R}$

Propriétés

Soient a ; b et c des nombres réels , on a :
- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
- $a + 0 = 0 + a = a$
- $(-a) + a = a + (-a) = 0$ $(-a)$ est l'opposé de a

2.2 Multiplication dans $\mathbb{R}$

Propriétés

Soient a ; b et c des nombres réels , on a :
- $a \times b = b \times a$
- $a(bc) = (ab)c = abc$
- $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = \frac{a}{a} = 1$; $a \neq 0$ $\frac{1}{a}$ est l'inverse de a .
- $1 \times a = a \times 1 = a$

2.3 Opérations sur les fractions

Propriétés

Soient a ; b ; c et d des nombres réels tel que $bd \neq 0$, on a :
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$
- $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$; $a \neq 0$ et $b \neq 0$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ alors $ad = bc$
- $\dfrac{a}{b} = 1$ alors $a = b$
- $\dfrac{a}{b} = 0$ alors $a = 0$

3 Les racines carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif.On appele racine carrée de a le nombre réel positif b tel que :$a = b^2$ et on écrit $b = \sqrt{a}$.

Exemples

$\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{49} = 7$.

Propriétés

a et b deux nombres de $\mathbb{R}^+$ on a :

- $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$; $n \in \mathbb{N}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$; $b > 0$
- $\sqrt{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a} = a$; $a > 0$
- $a = b$ équivaut à $\sqrt{a} = \sqrt{b}$
- $\sqrt{a} = 0$ équivaut à $a = 0$

.

Exercices

- Exercice 1 :
  Simplifier l'écriture des nombres suivants : $\sqrt{27} \times 5\sqrt{6}$; $7\sqrt{75} - 2\sqrt{12}$; $(11\sqrt{5} - 5\sqrt{11})(11\sqrt{5} + 5\sqrt{11})$; $3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$
- Exercice 2 :
  Soit $X = \sqrt{10 - \sqrt{84}} + \sqrt{10 + \sqrt{84}}$
  1. Développer X^2, puis en déduire X.
- Exercice 3 :
  Ecrire les fractions sans racine carrée au dénominateur : $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{2 + \sqrt{5}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

4 Puissances - Puissances de 10 - Écriture scientifique

4.1 Puissances

Définition

Soient a un réel non nul et n un entier naturel .
On a : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
et $a^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \cdots \times \frac{1}{a}}_{n \text{ facteurs}}$
a^{-n} est l'inverse de a
Le nombre a^n est appelé la puissance de a ,d'exposant n.
Le nombre a^{-n} est appelé la puissance de a d'exposant $-n$

Propriétés

Soient a et b deux réels non nuls , n et m deux entiers relatifs,on a :
$a^n \times b^n = (ab)^n$; $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $(a^n)^m = a^{nm}$; $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

4.2 Puissances de 10

Définition

Soit n un entier naturel non nul
$10^0 = 1$ et $10^1 = 10$
$10^n = 1\underbrace{000 \cdots 000}_{n \text{ zéros}}$
et $10^{-n} = \underbrace{0,00 \cdots 0}_{n \text{ zéros}}1$

4.3 Écriture scientifique

Définition

Tout nombre décimal b s'écrit sous la forme $b = a \times 10^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq a < 10$ (si b est positive) ou $-10 < a \leq -1$ (si b est négatif).
Cette écriture s'appelle :l'écriture scientifique du nombre décimal b .

5 Identités remarquables - Développement et factorisation

Soients a ,b et k des réels , on a :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Définition

Développer un produit ,c'est le transformer en une somme.
Factoriser une somme ,c'est la transformer en un produit .

Exercices

— Exercice 1 : Développer et réduire les expressions suivantes. $(x-\dfrac{2}{3})^2$; $(2x+1)^2+(4x-1)(4x+1)$; $(2x+3)^3$; $(x-2)^3$

— Exercice 2 : Factoriser les expressions suivantes .
$(3x+2)(x-1)-(1-x)(-2x+1)$; $12x^3-16x^2+32x$; $16-4x^2$; $(4x-8)(3x-1)-x^2+4x-4$; $64x^3-27$; x^2-2x-3.