Le calcul trigonométrique

1 Rappels

1.1 Relations trigonométrique

Propriétés

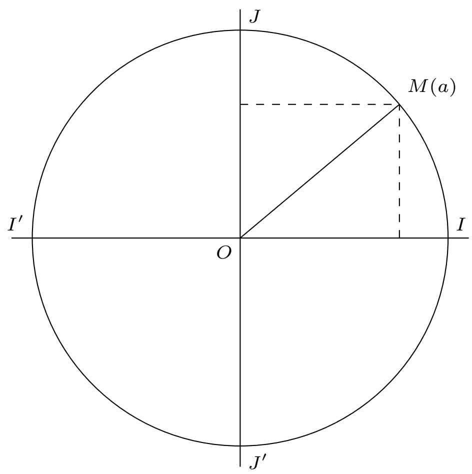
1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $\cos^2(\alpha) + \sin^2\alpha = 1$
3. Pour tout $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
   $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
   $\sin^2\alpha = \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
   $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$
   $\text{cotan}(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)} = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
4. Les valeurs particulières suivantes de sin, cos et tan sont à connaitre absolument :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

1.2 Formules trigonométriques

A partir des lignes trigonométriques de a, on peut obtenir sans calculs celles de $-a$, $a+\pi$, $\pi - a$, $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} + a$:

$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(-a) = -\sin a$	$\tan(-a) = -\tan a$
$\cos(a+\pi) = -\cos a$	$\sin(a+\pi) = -\sin a$	$\tan(a+\pi) = \tan a$
$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \dfrac{-1}{\tan a}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \dfrac{1}{\tan a}$



1.3 Équations et inéquations trigonométriques

1. On considère l'équation :$\cos(x) = a$ et $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$.
   — Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
   — Si $a = 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
   — Si $a = -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
   — Si$-1 < a < 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi \text{où} k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\cos(\alpha) = a$.
2. On considère l'équation :$\sin(x) = b$ et $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$.
   — Si $b > 1$ ou $b < -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
   — Si $b = 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
   — Si $b = -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
   — Si$-1 < b < 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi \text{où} k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\sin(\alpha) = b$.
3. On considère l'équation :$\tan(x) = c$ et $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$.
   $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.Avec $\tan(\alpha) = c$

1.4 Activités

1. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté ayant pour mesure x (en radian) dans chacun des cas suivants :
   a) $x = \frac{-3\pi}{2}$ b) $x = \frac{-17\pi}{4}$ c) $x = \frac{23\pi}{4}$ d) $x = \frac{-5\pi}{2}$
   e) $x = \frac{-4\pi}{3}$ f) $x = \frac{27\pi}{3}$ g) $x = \frac{2005\pi}{3}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.Simplifier les expressions suivantes :
   (a) $\cos(\pi + x) - \cos(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
   (b) $\cos(\frac{5\pi}{2} + x) + \sin(x - \frac{7\pi}{2})$
   (c) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) + \cos(x - 3\pi)$
   (d) $\cos(5\pi + x) + \sin(11\pi - x) - \sin(\frac{9\pi}{2} - x) + \cos(2\pi - x)$
   (e) $\tan(-x) + \tan(x + \pi) + \tan(x - 3\pi)$
3. (a) Calculer :$\cos(\frac{-3\pi}{4})$; $\sin(\frac{53\pi}{6})$ et $\tan(\frac{37\pi}{4})$.
   (b) Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{6\pi}{3} + \sin\frac{8\pi}{3}$
   $S_2 = \cos^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{4\pi}{10} + \cos^2\frac{6\pi}{10} + \cos^2\frac{9\pi}{10}$
   $S_3 = \tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{2\pi}{5} + \tan\frac{3\pi}{5} + \tan\frac{4\pi}{5}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $\cos(x) = \frac{-1}{2}$ b) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin(x) = \frac{1}{2}$
   d) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\tan(x) = \sqrt{3}$ f) $\tan(x) = -1$
5. Résoudre dans I les inéquations suivantes :
   a) $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$; $I = [0; 2\pi]$ b) $2\cos(x) + \sqrt{3} > 0$; $I = [-\pi; \pi]$ c) $2\sin(x) + 1 < 0$; $I = [-\pi; \pi]$
   d) $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $I = [0; 2\pi]$ e) $\tan(x) \geq \sqrt{3}$; $I = [0; 2\pi]$ f) $\tan(x) + 1 < 0$; $I = [-\pi; \pi]$

2 Transformation de $\cos(a\pm b)$,$\sin(a\pm b)$ et $\tan(a\pm b)$

Voir activité 3 p 138.

Propriétés

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on a :

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

$$\text{avec } a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\ b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\ a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ et } a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Exercice 1

1. Calculer cos,sin et tan de nombres réels $\frac{7\pi}{12}$,$\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.
2. Calculer
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad \frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)}$$
3. Calculer $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.
4. Simplifier les expressions suivantes : $\sin(2x)\cos(5x)+\sin(5x)\cos(2x)$ et $\cos(3x)\cos(x)+\sin(x)\sin(3x)$.
5. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$,on a :
$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0 \quad \text{et} \quad \sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$
6. Déterminer $\tan(x)$ sachant que : $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$.
7. Calculer $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$ sachant que : $\tan(a)=\frac{3}{5}$ et $\tan(b)=-\frac{4}{3}$.

Conséquences

Pour tout a de $\mathbb{R}$,on a :

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}=\frac{2\,\text{cotan}(a)}{\text{cotan}^2(a)-1}=\frac{2\cos(a)\sin(a)}{\cos^2(a)-\sin^2(a)} \qquad a\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \text{ et } a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)} \quad a\neq\pi+2k\pi \quad , \quad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\cos(a)}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1+\cos(a)}{2}$$

$$\tan(a)=\frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \quad a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad , \quad \sin(a)=\frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \cos(a)=\frac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \quad a\neq\pi+2k\pi$$

Exercice 2

1. Calculer cos,sin et tan de nombres réels $\frac{\pi}{12}$et $\frac{\pi}{8}$.
2. Calculer $\cos(2x)$ Dans les cas suivants : $\cos(x)=-\frac{1}{3}$; $\cos(x)=\frac{3}{5}$; $\sin(x)=\frac{3}{4}$; $\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Calculer $\sin(2x)$ Dans les cas suivants :
$$\sin(x)=\frac{3}{5},\ \text{et} x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] ; \cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \text{et} x\in[\pi,2\pi] ; \sin(x)=\frac{4}{5},\ \text{et} x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right].$$
4. Calculer $\tan(2x)$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ sachant que : $\tan(x)=\sqrt{3}$.
5. Calculer $\cos(8x)$ et $\tan(8x)$ et $\sin(8x)$ sachant que : $\tan(4x)=5$.

3 Transformation de produits en sommes

Propriétés

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$
$$\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$
$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$$

Exercice 3

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2(x) - \frac{3}{4}$
2. Écrire en somme les expressions suivantes :$A(x) = \cos(x)\cos(3x)\cos(5x)$ et $B(x) = \sin(x)\sin(3x)\sin(5x)$.
3. Écrire en somme $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$.

4 transformation sommes en produits

Propriétés

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$:

$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $A(x) = \sin(x)+\sin(3x)+\sin(5x)+\sin(7x)$.

1. Écrire en produit les expressions :$\sin(x)+\sin(7x)$ et $\sin(3x)+\sin(5x)$.
2. Déduire que : $A(x) = 4\cos(x)\cos(2x)\sin(4x)$.
3. Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $A(x) = 0$.

5 Transformation de l'expression $\alpha\cos(a)+\beta\sin(a)$

Pour tout a et b de $\mathbb{R}^*$,on a :

$$\alpha\cos(a)+\beta\sin(a) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos(a)+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin(a)\right)$$

et on a :

$$\begin{cases} -1 \leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leqslant 1 \\ \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Il existe un nombre réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sin(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \cos(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{cases}$$

On déduit que :

$$\alpha\cos(a)+\beta\sin(a) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\cos(\theta)\cos(a)+\sin(\theta)\sin(a)) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(a-\theta) \quad \text{ou}$$
$$\alpha\cos(a)+\beta\sin(a) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\sin(\theta)\cos(a)+\cos(\theta)\sin(a)) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(a+\theta)$$

Propriété

Pour tout a et b de $\mathbb{R}^*$,il existe un réel θ tel que :

$$\alpha\cos(a)+\beta\sin(a) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(a+\theta) \quad \text{ou} \quad \alpha\cos(a)+\beta\sin(a) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(a-\theta)$$

Exercice 5

1. Simplifier les expressions suivantes :$\cos(x) + \sin(x)$ et $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   $(E_3) :\ \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$ et $(E_2) :\ \cos(2x) - \sin(2x) = -1$ et $(E_1) :\ \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = \sqrt{3}$