Dérivation.

1 Dérivabilité d'une fonction en un point.

1.1 Nombre dérivé.

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I.
- On appelle taux d'accroissement (ou taux de variation) de la fonction f entre a et $a+h$, le nombre t défini par :$t = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- La fonction f admet un nombre dérivé, noté $f'(a)$, en a, si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite, c'est à dire :$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ ou $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Exemples

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants :

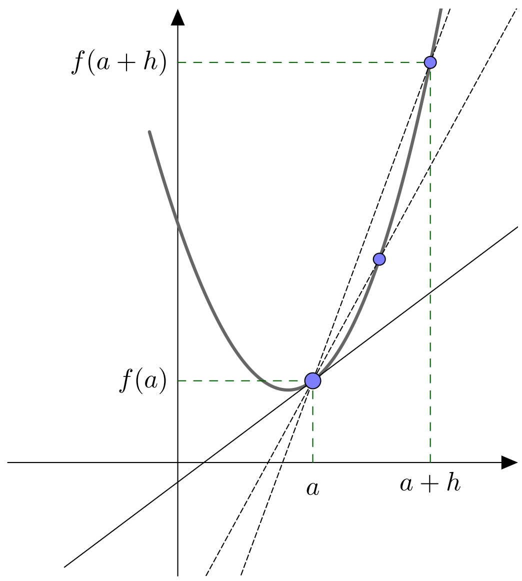
a) $f(x) = x^2$ et $a = 2$.
b) $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 0$.
c) $f(x) = \cos(x)$ et $a = \frac{\pi}{2}$.
d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ et $a = 1$.
e) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ et $a = 0$.

1.2 Interprétation géométrique du nombre dérivé-Tangente à la courbe d'une fonction en un point.

Définition

Soit f une fonction dérivable en un point a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.La droite (T) qui passe par $A(a; f(a))$ et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A .Une équation de la tangente (T) est :$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Soient $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$ deux points de $(\mathcal{C}_f)$ et $h \neq 0$. Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM). Lorsque h tend vers 0,le point M se rapproche du point A et la droite (AM) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$.



Exemples

Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au point A d'abscisse a ,dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$ et $a = 1$.
b) $f(x) = 3x^2 + 2$ et $a = -1$.
c) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $a = 1$.
d) $f(x) = \cos(2x)$ et $a = \frac{\pi}{3}$.
e) $f(x) = 2\tan(x)$ et $a = \frac{\pi}{4}$.

1.3 Approximation d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine.

Définition

Soit f une fonction dérivable en un point a.

— La fonction $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ (ou encore la fonction $h \mapsto f'(a)h + f(a)$) est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a.

— Le nombre $f'(a)h + f(a)$ est l'approximation affine du réel $f(a+h)$ au voisinage de zéro.On écrit $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$.

Application

1. Déterminer une approximation affine au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes :$h \mapsto (2+h)^2$; $h \mapsto (1+h)^3$;$h \mapsto \frac{1}{h+1}$ et $h \mapsto \sqrt{1+h}$.
2. Déduire des valeurs approchées de $(2,00003)^2$;$(1,002)^3$;$\sqrt{1,0008}$ et $\frac{1}{1,006}$.

2 Dérivabilité à droite-Dérivabilité à gauche.

2.1 Définition et propriété

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a si le taux d'accroissement de f admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a .

Cette limite est appelée nombre dérivé à droite (resp.à gauche) et on note :

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$ ou $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_d(a)$.

(resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$ ou $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_g(a)$).

Propriété

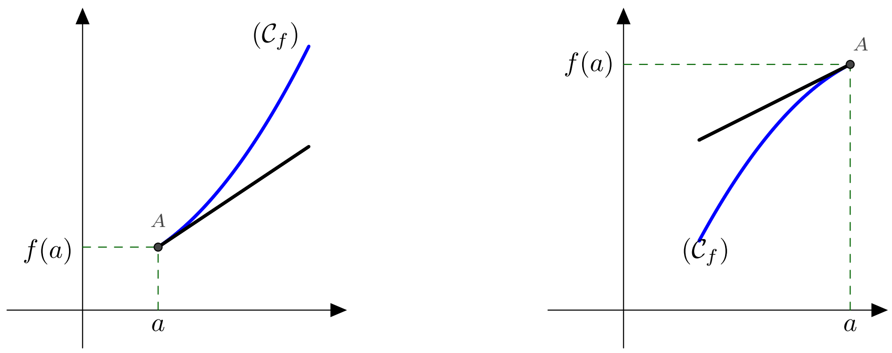
f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a ,f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$.
.

2.2 Interpretation géométrique- Demi-tangente en point d'une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

— Si f est dérivable à droite en a alors,la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$ d'équation : $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$ avec $x \geq a$.

— Si f est dérivable à gauche en a alors,la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$ d'équation : $y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$ avec $x \leq a$.



Application

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 et donner une interprétation géométrique du résultat.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction $g : x \mapsto |x| - x^2$ en -1 et donner une interprétation géométrique du résultat.

3 Fonction dérivée d'une fonction.

3.1 Dérivabilité sur un intervalle-Fonction dérivée

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Si la fonction f admet un nombre dérivé en tout point de I,on dit que la fonction f est dérivable sur I. La fonction, notée f', définie sur I qui a tout x associe son nombre dérivé est appelée fonction dérivée de f ($f' : x \mapsto f'(x)$).

3.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
a	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \geq 1)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Exemples

$(-3)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(x)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(x^4)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{11}{5}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(x^2)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(x^{57})' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(\sqrt{x})' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(\sqrt{7})' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(x^3)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(x^{2016})' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(\cos(x))' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 1

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

fonction	dérivable sur l'intervalle	Fonction dérivée
$u+v$	I	$(u+v)'=u'+v'$
ku $(k\in\mathbb{R})$	I	$(ku)'=ku'$

Exemples

Déterminer le domaine de définition de f' la fonction dérivée de f et calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ b) $f(x)=\sqrt{x}-\sin(x)$ c) $f(x)=3x-5$

d) $f(x)=-x^2+4x-5$ e) $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$ f) $f(x)=\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{4}x^3+5x-2$

Propriété 2

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	dérivable sur l'intervalle	Fonction dérivée
uv	I	$(uv)'=u'v+uv'$
u^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	I	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$

Exemples

Déterminer le domaine de définition de f' la fonction dérivée de f et calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=(2x-3)(4-x)$ b) $f(x)=2x\cos(x)$ c) $f(x)=\sin^5(x)$

d) $f(x)=(x^3-4x-5)^{11}$ e) $f(x)=(x-3)^5(x+4)^3$

Propriété 3

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que $v(x)\neq 0$ sur I.

Fonction	Dérivable sur l'intervalle	Fonction dérivée
$\frac{1}{v}$	I	$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	I	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
v^n $(n\in\mathbb{Z}^*)$	I	$(v^n)'=nv^{n-1}v'$

Exemples

Déterminer le domaine de définition de f' la fonction dérivée de f et calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+7}{x-1}$ c) $f(x)=\tan(x)$

d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{4x-3}$ e) $f(x)=(2x^3-16)^{-2}$

Propriété 4

Soit u une fonction dérivable sur I telle que :$\forall x\in I : u(x)>0$.

Fonction	Dérivable sur l'intervalle	Fonction dérivée
$\sqrt{u}$	I	$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemples

Déterminer le domaine de définition de f' la fonction dérivée de f et calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{3x-4}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$ c) $f(x) = 2\sqrt{1-\cos(x)}$

Propriété 5

Soit u une fonction dérivable sur I telle que $\forall x \in I : ax+b \in I$.

Fonction	Dérivable sur l'intervalle	Fonction dérivée
$x \mapsto u(ax+b)$	I	$(u(ax+b))' = a \times u'(ax+b)$

Exemples

Déterminer le domaine de définition de f' la fonction dérivée de f et calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sin(2x+7)$ b) $f(x) = \cos(\frac{x}{3})$ c) $f(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Remarque

— Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
— Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

3.4 Fonction dérivée seconde-Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
— Si la fonction dérivée f' est dérivable sur I,alors sa fonction dérivée est appelée la dérivée seconde de la fonction f et on la note f''.
— Si la fonction dérivée f'' est dérivable sur I,alors sa fonction dérivée est appelée la dérivée troisième de la fonction f et on la note f'''ou $f^{(3)}$.(et ainsi de suite).
— La fonction dérivée d'ordre n de la fonction f où $n \geq 1$ est notée $f^{(n)}$ et on a $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Exemple

Calculer la dérivée troisième de la fonction $f: \ x \mapsto x^3 - \cos(2x)$.

4 Applications de la dérivation.

4.1 Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur I.
— f est croissante $\Longleftrightarrow \forall x \in I : f'(x) \geq 0$.
— Si f' est strictement positive sur I ,sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I
— f est décroissante $\Longleftrightarrow \forall x \in I : f'(x) \leq 0$.
— Si f' est strictement négative sur I ,sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I
— f est constante $\Longleftrightarrow \forall x \in I : f'(x) = 0$

Exemples

Étudier la monotonie de chacune des fonctions suivantes sur le domaine de définition et dresser le tableau de variation.

a) $x \mapsto -x^2+4x-2$ b) $x \mapsto x^3-3x+1$ c) $x \mapsto \dfrac{x-2}{x+1}$ d) $x \mapsto \sqrt{x-4}$

4.2 Calcul des limites en utilisant la notion de la dérivée

Exemples

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{6}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

4.3 Extremums d'une fonction dérivable

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur I et a un élément de I.
- Si f admet un extremum local au point a, alors $f'(a)=0$.
- Si f' s'annule en a en changeant de signe ,alors $f(a)$ est un extremum local de la fonction f sur I.

$f(a)$ est une valeur minimale

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$f(a)$ est une valeur maximale

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Exemple

Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x)=x^3+4x^2-11x+3$.

5 Equation différentielle :$y^{''}+\omega^2 y=0$.

Définition

Soit ω un nombre réel.
- Toute équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.
- Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'égalité $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ pour tout réel x, est appelée solution de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$.

Propriété

Soit ω un réel .On considère une équation différentielle (E) : $y''+\omega^2 y=0$.
- Si $\omega=0$,alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y : x \mapsto ax+b$ où a et b deux réels.
- Si $\omega \neq 0$,alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$y :\ x \mapsto a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$$
où a et b deux réels.

Applications

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y''+y=0; \quad y''+3y=0; \quad 4y''+y=0; \quad -2y''=y$$