Les polynômes

1 Définition-Égalité de polynômes

1.1 Définitions et vocabulaire

- Un monôme est une expression de la forme ax^n avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.Le nombre a est appelé coefficient du monôme et le naturel n son degré.
- La somme finie de monôme est appelée un polynôme.
- Toute expression de la forme $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et a_0 ;$a_1 \cdots a_n$ les coefficients de P est appelé le polynôme de degré n.Le degré d'un polynôme est l'exposant de la plus grande puissance de x à coefficient non nul.On le notera $deg(P)$ ou $d°P$.Dans ce cas ,on écrit : $deg(P) = n$.
- Toute expression de la forme $ax + b$ s'appelle un binôme du premier degré avec $a \in \mathbb{R}^*$.
- Toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$ s'appelle un trinôme du second degré avec $a \in \mathbb{R}^*$.
- On note souvent un polynôme par l'une des notations : $P(x)$;$Q(x)$;$R(x)$ ou $S(x) \cdots$.
- Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls et on a pour tout x de $\mathbb{R}$;$P(x) = 0$.

1.2 Égalité de deux polynômes.

Propriété

. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exercice d'application 1

Déterminer les réels a , b et c sachant que $P(x) = Q(x)$ dans les cas suivants :

1. $P(x) = 3x^2 + (b-1)x$ et $Q(x) = (a+1)x^2 + 2x + c$.
2. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ et $Q(x) = (x+1)(x-3)(ax+b)$

2 Somme et produit de deux polynômes

.

2.1 Activités

Activité 1 :

Soit $S(x)$ la somme de $P(x)$ et $Q(x)$ tels que : $P(x) = -7x^3 + 2x + 11$ et $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x$.Compléter le tableau suivant :

$P(x)$	$-7x^3$		$2x$	11
$Q(x)$	$2x^3$	$-4x^2$	$--5x$	
$S(x)$				

Activité 2 :

Soit $R(x)$ le produit de $P(x)$ et $Q(x)$ tels que : $P(x) = x^2 - x + 1$ et $Q(x) = -x^3 + x - 2$.Calculer $R(x)$.

2.2 Défintions

- La somme de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme qu'on note $(P+Q)(x)$ définie par $(P+Q)(x) = P(x)+Q(x)$.Et on a :
  $d°(P+Q) \leq \sup(d°P; d°Q)$
- Le produit de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme qu'on note $(P \times Q)(x)$ défini par $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$.Et on a :$d°P \times Q = d°P + d°Q$ avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynôme non nuls.

3 Division par $x-a$.

3.1 Division euclidienne par $x-a$

.

Définition

: Soit $P(x)$ un polynôme de degré n avec $n \in \mathbb{N}^*$et a un nombre réel.
Il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que :$P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$.

- Le polynôme $Q(x)$ s'appelle le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-a$.
- Le nombre réel $P(a)$ s'appelle le reste de la division euclidienne $P(x)$ par $x-a$.

3.2 Racine d'un polynôme.

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel .
On dit que a est une racine du polynôme $P(x)$ si $P(a) = 0$.

3.3 Divisibilité par $x-a$.

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n avec $n \in \mathbb{N}^*$ et a un nombre réel .
$P(x)$ est divisible par $x-a$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que :$P(x) = (x-a)Q(x)$.

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n avec $n \in \mathbb{N}^*$ et a un nombre réel .
$P(x)$ est divisible par $x-a$ si et seulement si a est une racine du polynôme $P(x)$.