# Limite d'une fonction numérique.

## 1 Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$.

### 1.1 Définition

**Définition**

- Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ ou $]a;+\infty[$ avec $(a \in \mathbb{R})$.Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$,alors on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.De même on définit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ .
- Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$ avec $(b \in \mathbb{R})$.Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $-\infty$,alors on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.De même on définit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ .

### 1.2 Limites usuelles

On admet les limites suivantes :

$\forall a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{|x|\to+\infty} a = a$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ est pair} \\ -\infty & n \text{ est impair} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

**Exemples**

$\lim\limits_{x\to-\infty} 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-5}} = \ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{-6}} = \ldots\ldots\ldots$

## 2 Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$.

### 2.1 Définition

**Définition**

- Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ ou $]a;+\infty[$ avec $(a \in \mathbb{R})$ et soit $l \in \mathbb{R}$.Si $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $+\infty$,alors on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
- Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$ avec $(b \in \mathbb{R})$ et soit $l \in \mathbb{R}$.Si $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $-\infty$,alors on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

### 2.2 limites usuelles

On admet les limites suivantes :

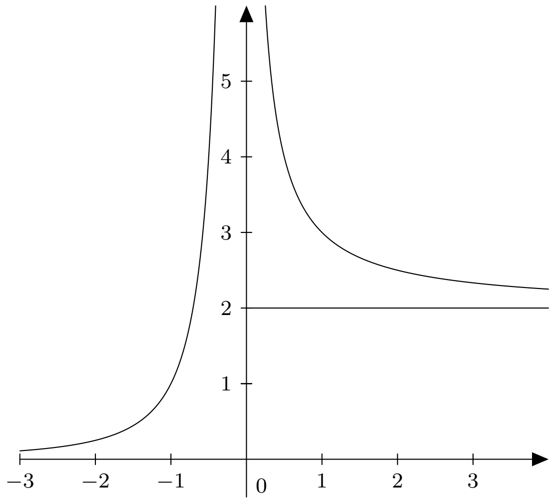
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

**Exemples**

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^6} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. La figure suivante représente la courbe d'une fonction est définie sur $\mathbb{R}$.Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$




**Propriété**

Soit $f$ une fonction numérique ,et $l$ un nombre réel.

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - l) = 0$

— $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - l) = 0$

Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^2+x}{x^2} = -1$

# 3 Limite finie et infinie d'une fonction en un point.

## 3.1 Définition

**Définition**

Soit $a$ et $l$ deux nombres réels.Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha; a+\alpha[$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$,ou sur un ensemble de la forme $]a-\alpha; a[\cup]a; a+\alpha[$.

— Si $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$,alors on note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ .

— Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $a$,alors on note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ .(On définit de la même façon $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$)

**Propriété**

Si $f$ admet une limite $l$ en $a$,alors cette limite est unique.

## 3.2 Limites usuelles

On admet les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} a = a \ (a \in \mathbb{R})$ $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$

# 4 Limite à droite et limite à gauche d'une fonction numérique.

**Définition**

Soit $f$ une fonction numérique.Soit $a$ et $l$ deux nombres réels.

— Si $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$ à droite (C'est-à-dire $x > a$),alors on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

— Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand $x$ tend vers $a$ à droite (C'est-à-dire $x > a$),alors on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$).

— Si $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$ à gauche (C'est-à-dire $x < a$),alors on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

— Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand $x$ tend vers $a$ à gauche (C'est-à-dire $x < a$),alors on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$).

## 4.1 Limites usuelles

$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ est pair} \\ -\infty & n \text{ est impair} \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

**Théorème**

Soit $f$ une fonction numérique. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Longleftrightarrow (\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x))$

**Exemple**

On considère $f$ une fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x \geqslant 0 \\ f(x) = x^2 & x < 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

# 5 Opération sur les limites.

Dans tout ce qui suit,$a$ est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.$l$ et $l'$ sont deux nombres réels.Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en $a$.Soit $f$ et $g$ deux fonctions numériques.

## 5.1 Limite d'une somme.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | Forme indéterminée | |

## 5.2 Limite d'un produit.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ | $l$ | $l > 0$ | $l < 0$ | $l > 0$ | $l < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$ | $ll'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | Forme indéterminée | | | |

### 5.3 Limite d'un quotient.

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ ou $l<0$ | $+\infty$ ou $l>0$ | $+\infty$ ou $l>0$ | $-\infty$ ou $l<0$ | $0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\neq 0$ | $\pm\infty$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $0^+$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^-$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I | |

F.I : Forme indéterminée

**Exemples**

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} 2x = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{-3}{x^2} = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to -\infty} -5x^3 = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} + \frac{-9}{x^9} = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} -x + \frac{1}{4\sqrt{x}} = \cdots\cdots\cdots$

## 6 Limite d'une fonction polynôme-Limite d'une fonction rationnelle.

**Propriété**

Soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynômes et $a$ un réel.

— $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$. $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ si $Q(a)\neq 0$.

— Si $ax^n$ et $bx^m$ sont respectivement les termes du plus haut degré des polynômes $P$ et $Q$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} ax^n$. $\lim\limits_{x\to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} ax^n$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$.

**Exemples**

— Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 5x + 3 = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to -1} 2x^3 + 5x = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{6x^2-7x+1}{x-2} = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} -3x^2 + 5x + 1 = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to -\infty} -\frac{x^2+x-1}{-x^3+3x^2-2x+5} = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{|3x-5|} = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (-x-4)(x^2-3x-1)^3 = \cdots\cdots\cdots$

— Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{-x+3} = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^3-1}{x^2-x} = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x+3}{1-x^2} = \cdots\cdots\cdots$

## 7 Limites de fonctions irrationnelles.

**Propriété**

Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où $a$ est un réel et $\forall x \in [a;+\infty[; f(x) \geq 0$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $l \geq 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ,alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

**Remarque**

Cette propriété reste valable si on calcule la limite quand $x$ tend vers $-\infty$ ou vers un réel $a$.

**Exemples**

Calculer les limites suivants :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-2} \sqrt{-x^3 + x + \frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^4+8x}{-x+5}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 - \sqrt{1-2x}$

## 8 Limite de fonctions trigonométriques.

**Propriété**

$\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

$\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{bx^2} = \frac{a}{2b}$

$\lim\limits_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$ $(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$. $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

**Exemples**

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 2\cos(x) - \sin(2x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1} \cos(3x)\tan(\pi x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(5x)}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(4x)}{\tan(2x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(x)}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\tan(x)-3}{3x-\pi}$

## 9 Exemples de calcul de limite-forme indéterminée

**Exemples**

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}(x^3 + x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x + x^2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+3x+2}{x+1}$

## 10 Limites et ordre.

**Propriété**

Soit $a$ un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et $I$ est un intervalle au voisinage de $a$.Soit $f$, $u$ et $v$ des fonctions numériques définies sur $I$.

$$\begin{cases} \forall x \in I: \ u(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \begin{cases} \forall x \in I: \ |f(x) - b| \leqslant u(x) \\ \lim\limits_{x \to a} u(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$\begin{cases} \forall x \in I: \ u(x) \geqslant f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \begin{cases} \forall x \in I: \ u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \\ \lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = b \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b$$

**Exemples**

1. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ x^2 - x \leqslant f(x) \leqslant x^2 + x$ Calculer les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$
   d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
   e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$
2. Soit $f$ une fonction numérique définie par :$f(x) = 2 + \pi x^2 \cos(\frac{\pi}{x^2})$
   (a) Montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R}^*); |f(x) - 2| \leq \pi x^2$.
   (b) Déduire :$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
3. En utilisant un encadrement convenable,calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x - \cos(x)$