# L'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

## 1 Ordre et opérations

### 1.1 Définition

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels.

1. On dit que $a$ est supérieur ou égal à $b$ et on écrit $a \geq b$,si on a :$a - b \geq 0$.
2. On dit que $a$ est supérieur strictement à $b$ et on écrit $a > b$,si on a :$a - b > 0$.
3. On dit que $a$ est inférieur ou égal à $b$ et on écrit $a \leq b$,si on a :$a - b \leq 0$.
4. On dit que $a$ est inférieur strictement ou égal à $b$ et on écrit $a < b$,si on a :$a - b < 0$.

**Exemple**

$a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{5}{6}$.

### 1.2 Ordre et addition

**Propriété**

Soient $a$,$b$ et $c$ des nombres réels.Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.

**Exemple**

$a = 1 + \sqrt{12}$ et $b = \frac{1}{3} + \sqrt{12}$

**Conséquence**

Soients $a$,$b$,$c$ et $d$ des nombres réels. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

**Exemple**

$a = \frac{4}{5} + \sqrt{2}$ et $b = \frac{5}{4} + \sqrt{3}$

### 1.3 Ordre et multiplication

**Propriété**

Soient $a$,$b$ et $c$ des nombres réels.

— Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$.
— Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$.

**Conséquence**

Soients $a$,$b$,$c$ et $d$ des nombres réels positifs . Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

**Propriété**

Soient $a$,$b$ et $c$ des nombres réels. Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.

### 1.4 Ordre et opposé

**Propriété**

Soient $a$ et$b$ deux nombres réels. Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$.

### 1.5 Ordre et inverse

**Propriété**

Soient $a$ et$b$ deux nombres réels non nuls et de même signe. Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

**Exemple**

$a = \frac{1}{3-\sqrt{3}}$ et $b = \frac{1}{4-\sqrt{3}}$

### 1.6 Ordre et Carré

**Propriété**

Soient $a$ et$b$ deux nombres réels.
- Si $a \leq b$ et ($a$,$b$ de $\mathbb{R}^+$)alors $a^2 \leq b^2$.
- Si $a \leq b$ et ($a$,$b$ de $\mathbb{R}^-$)alors $a^2 \geq b^2$.

### 1.7 Ordre et racine carrée

**Propriété**

Soient $a$ et$b$ deux nombres réels positifs. Si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

## 2 Encadrement

### 2.1 Définition

Soient $a$,$b$ et $x$ des réels.Encadrer $x$ signifie trouver deux réels $a$ et $b$ tels que :$a \leq x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x \leq b$ ou $a < x < b$.
- Le nombre réel positif $b - a$ est appelé amplitude de l'encadrement.
- $a$ est appelé une valeur approchée par défaut de $x$ à $b - a$ prés.
- $b$ est appelé une valeur approchée par excès de $x$ à $b - a$ prés.

### 2.2 Encadrement et opérations

**Propriétés**

Soient $a$,$b$,$c$,$d$,$x$ et $y$ tels $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.On a :
1. $a + c \leq x + y \leq b + d$.
2. $a - d \leq x - y \leq b - c$.
3. $ac \leq xy \leq bd$.($a$,$b$,$c$ et $d$ de $\mathbb{R}^+$).
4. $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$.($a$ et $b$ de $\mathbb{R}^+$) et ($c$ et $d$ de $\mathbb{R}^{+*}$)

**Exercices d'applications**

1. Comparer les nombres $x$ et $y$ dans chacun des cas suivants : $x = 1 - \dfrac{1732}{735}$ et $y = \dfrac{1}{100} + 1$ ; $x = \sqrt{2}$ et $y = \dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$ ; $x = \sqrt{3} - 1$ et $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ ; $x = 17\sqrt{2}$ et $y = 15\sqrt{3}$
2. On donne les encadrements suivants : $2 \leq x \leq 4$ et $-6 \leq y \leq -1$.Donner un encadrement de $x^2$ ; $y^2$ ; $x + y$ ; $2x - 3y$ ; $xy$ ; $\dfrac{1}{x}$.

# 3 Distance et la valeur absolue

## 3.1 Définition

Sur une droite graduée $\Delta(O; I)$,on considère un point $A$ d'abscisse $x$.La distance $OA$ est appelé la valeur absolue de $x$ et on écrit :$OA = |x|$.

**Remarque**

Soit $x$ un nombre réel.On a :$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

## 3.2 Distance entre deux points

**Propriété**

Sur une droite graduée $\Delta(O; I)$,on considère $A$ et $B$ deux points d'abscisses $x$ et $y$ respectifs.On a $AB = |x - y|$.

## 3.3 Proprietés

Soient $x$ et $y$ deux réels.On a :

1. Si $|x| = 0$ alors $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$ et $|x - y| = |y - x|$.
3. Si $|x| = |y|$ alors $x = y$ ou $x = -y$.
4. $|x|^2 = |x^2| = x^2$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$.
6. $|xy| = |x||y|$
7. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$,$(y \in \mathbb{R}^*)$.
8. $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $|x - y| \geq |x| - |y|$.

# 4 Intervalles

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leq b$.

| Ensemble des réels $x$ tel que | Représentation sur la droite gradué | Notation | Nomination |
|---|---|---|---|
| $a \leq x \leq b$ |  | $[a; b]$ | Intervalle borné, fermé en $a$ et $b$. |
| $a < x < b$ |  | $]a; b[$ | Intervalle borné, ouvert en $a$ et $b$. |
| $a \leq x < b$ |  | $[a; b[$ | Intervalle borné, fermé en $a$ et ouvert en $b$. |
| $a < x \leq b$ |  | $]a; b]$ | Intervalle borné, ouvert en $a$ et fermé en $b$. |
| $x \leq a$ |  | $]-\infty; a]$ | Intervalle non borné, fermé en $a$. |
| $x < a$ |  | $]-\infty; a[$ | Intervalle non borné, ouvert en $a$. |
| $x \geq b$ |  | $[b; +\infty[$ | Intervalle non borné, fermé en $b$. |
| $x > b$ |  | $]b; +\infty[$ | Intervalle non borné, ouvert en $b$. |

**Remarques**

1. Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres.
2. le symbole $+\infty$ se lit "plus infini".
3. le symbole $-\infty$ se lit "moins infini".
4. $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$,$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ et $\mathbb{R} = ]-\infty; 0]$.
5. Soit $[a; b]$ un intervalle.
   — Le nombre $|a-b|$ est appelé l'amplitude de l'intervalle $[a; b]$.
   — Le nombre $c = \frac{a+b}{2}$ est appelé le milieu de l'intervalle $[a; b]$.
   — Le nombre $r = \frac{|a-b|}{2}$ est appelé le rayon de l'intervalle $[a; b]$.

## 4.1 Intersection et réunion

**Définition**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$.
— On note l'intersection de deux intervalles $I$ et $J$ :$I \cap J$ et on écrit :$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} / x \in I \text{ et } x \in J\}$
— On note la réunion de deux intervalles $I$ et $J$ :$I \cup J$ et on écrit :$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} / x \in I \text{ ou } x \in J\}$

**Exemples**

1. $I = ]-3; 4]$ et $J = ]2; 5]$.
2. $I = ]-\infty; 4]$ et $J = ]-1; +\infty[$.
3. $I = ]-5; 2]$ et $J = [3; 7[$.

# 5 Intervalles et valeur absolue

| Ensemble des réels $x$ tel que | Écriture en utilisant les intervalles | Représentation sur la droite gradué |
|---|---|---|
| $\|x\| \leq r$ | $x \in [-r; r]$ |  |
| $\|x\| < r$ | $x \in ]-r; r[$ |  |
| $\|x\| \geq r$ | $x \in ]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[$ |  |
| $\|x\| > r$ | $x \in ]-\infty; -r[ \cup ]r; +\infty[$ |  |
| $\|x-a\| \leq r$ | $x \in [a-r; a+r]$ |  |
| $\|x-a\| < r$ | $x \in ]a-r; a+r[$ |  |
| $\|x-a\| \geq r$ | $x \in ]-\infty; a-r] \cup [a+r; +\infty[$ |  |
| $\|x-a\| > r$ | $x \in ]-\infty; a-r[ \cup ]a+r; +\infty[$ |  |

# 6 Approximations et approximations décimales

## 6.1 Approximation

**Définition**

Soient $a$ et $x$ deux réels et $r$ un réel strictement positif.

1. Si $a \leq x \leq a+r$ on dit que $a$ est une approximation(ou valeur approchée) du réel $x$ par défaut à $r$ près.
2. Si $a-r \leq x \leq a$ on dit que $a$ est une approximation(ou valeur approchée) du réel $x$ par excès à $r$ près.
3. Si $|x-a| \leq r$ on dit que $a$ est une approximation(ou valeur approchée) du réel $x$ à $r$ près.

## 6.2 Approximation décimale

**Définition**

Si $x$ est un réel et $p$ est un entier relatif alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :$p.10^{-n} \leq x \leq (p+1).10^{-n}$.

— $p.10^{-n}$ est appelé une approximation décimale par défaut du réel $x$ à $10^{-n}$ près.

— $(p+1)10^{-n}$ est appelé une approximation décimale par excès du réel $x$ à $10^{-n}$ près.