Rotation

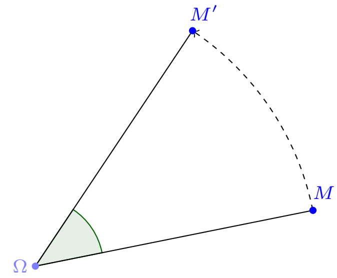
1 Rotation et rotation réciproque

1.1 Rotation

Définition

Soit Ω un point du plan orienté dans le sens direct et α un nombre réel.La rotation de centre Ω et d'angle α est la transformation du plan notée r ou $r(\Omega,\alpha)$,qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

$$r(M)=M' \iff \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}$$



Exemples

Soient M et Ω deux points du plan.Construire M' l'image de M par la rotation $r(\Omega,\alpha)$ dans les cas suivants :

a) $r\left(\Omega,\frac{\pi}{3}\right)$. b) $r\left(\Omega,-\frac{\pi}{4}\right)$. c) $r\left(\Omega,\frac{2\pi}{3}\right)$.

Remarques

— M' appartient au cercle de centre Ω et de rayon ΩM.
— La médiatrice du segment $[MM']$ passe par Ω.
— Le triangle $M\Omega M'$ est isocèle de sommet Ω.
— On a $r(\Omega)=\Omega$.On dit que Ω est un point invariant par la rotation r.
— Si $\alpha\neq 2k\pi$;$k\in\mathbb{Z}$ alors Ω est le seul point invariant par la rotation r.
— Si $\alpha=2k\pi$;$k\in\mathbb{Z}$ alors $r(M)=M$ .Tout point du plan est invariant.
— Si $\alpha=\pi$ alors r est la symétrie centrale de centre Ω.

1.2 Rotation réciproque

Définition

La rotation $r(\Omega,-\alpha)$ de centre Ω et d'angle $-\alpha$ est appelé la rotation réciproque de $r(\Omega,\alpha)$ notée r^{-1} et on a : $r(M)=M'\iff r^{-1}(M')=M$.

2 Propriétés de la rotation

Propriétés

Soit r une rotation de centre Ω et d'angle α.

— Si $r(A)=A'$ et $r(B)=B'$ alors $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\alpha[2\pi]$.
— La rotation conserve la distance. Si $r(A)=A'$ et $r(B)=B'$ alors $AB=A'B'$.
— La rotation conserve les mesures d'angles orientés.Si A,B,C et D quatre points tels que $A\neq B$ et $C\neq D$ et $r(A)=A'$,$r(B)=B'$,$r(C)=C'$,$r(D)=D'$ alors : $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$.

- La rotation conserve le barycentre.Soit G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).Si $r(A)=A'$,$r(B)=B'$ et $r(G)=G'$ alors G' est le barycentre des points pondérés (A',α) et (B',β)
- La rotation conserve le milieu d'un segment.Soit I est le milieu du segment $[AB]$ et $r(A)=A'$,$r(B)=B'$et $r(I)=I'$ alors I' est le milieu du segment $[A'B']$.
- La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.Soient A,B ,C et D' des points du plan tels que :$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.Si $r(A)=A'$,$r(B)=B'$,$r(C)=C'$ et $r(D)=D'$ alors :$\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}$.

3 Images de figures par rotation

Propriétés

Soit r une rotation de centre Ω et d'angle α.A,B,O,A',B' et O' des points du plan tels que :$r(A)=A'$,$r(B)=B'$ et $r(O)=O'$.

- L'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite $(A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ par la rotation r est le segment $[A'B']$.
- L'image de la demi-droite $[AB)$ par la rotation r est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image du cercle $C(O;R)$ de centre O et de rayon R par la rotation r est le cercle $C'(O',R)$ de centre O' et de rayon R.
- Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
- Si $r((D))=(D')$,$r((\Delta))=(\Delta')$,$r(M)=M'$ où $M\in(D)\cap(\Delta)$ alors :$M'\in(D')\cap(\Delta')$.