# Notions de Logique

## 1 Propositions logiques.

### 1.1 Définition

On appelle proposition un énoncé mathématique qui peut être vrai ou faux.Pas les deux en même temps.

**Exemples**

1. "$1+1=2$" est une proposition vraie.
2. "7 est un entier pair" est une proposition fausse.
3. "Dans l'espace si deux droites sont perpendiculaires toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre" est une proposition vraie.

**Remarque**

On désigne par 1 ou V la valeur de vérité d'une proposition vraie et par 0 ou F la valeur de vérité d'une proposition fausse.

### 1.2 Négation.

**Définition**

A une proposition P,on peut associer sa négation notée (NonP) ou $\rceil P$ ou $\bar{P}$ qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.
Table de vérité de la négation :

| $P$ | $NonP$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

**Exemples**

— P :"$1+\sqrt{3}>2$" est une proposition vraie.
— $\bar{P}$ :"$1+\sqrt{3}\leq 2$" est une proposition fausse.
— R :"$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$" est une proposition fausse.
— $\bar{R}$ :"$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$" est une proposition vraie.

### 1.3 Conjonction et disjonction

#### 1.3.1 Conjonction

**Définition**

A deux propositions P et Q,on peut associer la conjonction notée P ET Q ou $P\wedge Q$ qui est :
— Vraie si les deux propositions P et Q sont vraie.
— Fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.
Table de vérité de la conjonction :

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

**Exemples**

1. Soit $ABCD$ un rectangle.La proposition "l'angle $A\hat{B}C$ est droit et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu" est vraie.
2. Soit $ABC$ un triangle.La proposition "$AB > AC + BC$ et $A\hat{B}C + A\hat{C}B + C\hat{A}B = \pi$" est fausse.
3. Si P est une proposition alors la proposition $P \wedge \bar{P}$ est fausse.

### 1.3.2 Disjonction

**Définition**

A deux propositions P et Q,on peut associer la disjonction notée P OU Q ou $P \vee Q$ qui est :
— Vraie si l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie.
— Fausse si les deux propositions sont fausses.
Table de vérité de la disjonction :

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

**Exemples**

1. Soit $ABC$ un triangle.La proposition "$AB > AC + BC$ ou $A\hat{B}C + A\hat{C}B + C\hat{A}B = \pi$" est vraie.
2. Si P est une proposition alors la proposition $P \vee \bar{P}$ est vraie.

## 1.4 Implication et équivalence

### 1.4.1 Implication

**Définition**

A deux propositions P et Q ,on peut associer la proposition $P \Rightarrow Q$ qui est :
— Vraie si P est fausse ou si P et Q sont vraies.
— Fausse si P est vraie et Q est fausse.
Table de vérité de l'implication :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

**Remarques**

— Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies ,alors nécessairement Q est vraie.
— La notation logique $P \Rightarrow Q$ correspond en français à la phrase "Si P alors Q".
— L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle la réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.Si une implication est vraie ,sa réciproque n'est pas forcement vraie.

**Exemples**

1. "$0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$"
2. "$x \in ]-\infty;-4[ \Rightarrow x^2+3x-4>0$ "
3. "$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$"
4. "$2+2=5 \Rightarrow \sqrt{2}=2$"
5. Soient $a$ et $b$ deux réels.Alors :
   — "$a=b \Rightarrow a^2=b^2$".
   — "$a^2=b^2 \Rightarrow a=b$".

**Remarque**

L'implication est transitive.Autrement dit :Si P,Q et R trois propositions on a : $(P \Rightarrow Q) Et (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

### 1.4.2 Équivalence

**Définition**

A deux propositions P et Q ,on peut associer la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ qui est :
— Vraie si P et Q sont vraies ou P et Q sont fausse
— Fausse sinon.
Table de vérité de l'équivalence :

| $P$ | $Q$ | $P \Longleftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

**Exemple**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x+1>2x &\Longleftrightarrow x<1 \\ &\Longleftrightarrow x \in ]-\infty;1[ \end{aligned}$$

**Remarques**

— Si P et $P \Longleftrightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie.
— Si Q et $P \Longleftrightarrow Q$ sont vraies alors P est vraie.
— La notation logique $P \Longleftrightarrow Q$ correspond en français à la phrase "P si et seulement si Q".
— L'équivalence est symétrique.Autrement dit : $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \Longleftrightarrow P)$
— L'équivalence est transitive.Autrement dit :Si P,Q et R trois propositions on a : $(P \Longleftrightarrow Q) Et (Q \Longleftrightarrow R) \Rightarrow (P \Longleftrightarrow R)$.
— Pour montrer que deux propositions dépendant des mêmes propositions P et Q sont équivalentes,il suffit de prouver qu'elles ont même tables de vérité.

**Propositions**

Soient P et Q deux propositions logiques on a :

1. $P \Longleftrightarrow \bar{\bar{P}}$
2. $P(\wedge Q) \Longleftrightarrow (Q \wedge P)$
3. $(P \vee Q) \Longleftrightarrow (Q \vee P)$
4. $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$
5. $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$
6. $(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\bar{P} \Rightarrow Q)$

7. $(\overline{P \wedge Q}) \Longleftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$(Loi de Morgan).
8. $(\overline{P \vee Q}) \Longleftrightarrow (\bar{P} \wedge \bar{Q})$(Loi de Morgan).
9. $(\overline{P \Longrightarrow Q}) \Longleftrightarrow (P \wedge \bar{Q})$.

**Proposition :Distributivité**

Soients $P$,$Q$ et $R$ trois propositions logiques.Alors on a :
— $((P \vee Q) \wedge R) \Longleftrightarrow ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$.
— $((P \wedge Q) \vee R) \Longleftrightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$.

**Exemple**

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y = -3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = -3 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -3 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

# 2 Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

## 2.1 Définition des quantificateurs.

On se donne un ensemble $E$ et $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction des éléments $x$ de $E$.Par exemple,on considère la proposition "$x^2 = 1$" dépendant d'un réel $x$.On ne peut pas dire que la phrase "$x^2 = 1$" est vraie ou fausse tant qu'on ne sait pas ce que vaut $x$.Une telle proposition,dont les valeurs de vérité sont fonction d'une(ou plusieurs)variable(s) s'appelle une fonction propositionnelle notée $P(x)$ ,$P(x, y)$,$P(x, y, z)$...

**Définition**

— La proposition :"Pour tous les éléments $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit "$\forall x \in E, P(x)$".
— La proposition :"Il existe au moins un élément $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit "$\exists x \in E, P(x)$".
— La proposition :"Il existe un et un sul élément $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit "$\exists! x \in E, P(x)$".
— $\forall$ s'appelle le quantificateur universel.
— $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.

**Exemples**

1. "$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$" est une proposition vraie.
2. "$\exists n \in \mathbb{N}^*; n < 0$" est une proposition fausse.
3. $f$ s'annule au moins sur $\mathbb{R}$
   $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
4. $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$.

## 2.2 Négation d'une proposition avec quantificateurs

**Propriété**

Soients $E$ un ensemble et $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction des éléments $x$ de $E$.
$(\overline{\forall x \in E, P(x)}) \Longleftrightarrow (\exists x \in E, \overline{P(x)})$
$(\overline{\exists x \in E, P(x)}) \Longleftrightarrow (\forall x \in E, \overline{P(x)})$

**Exemple**

La négation de la proposition :"$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$" est "$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$".

### 2.3 Propriétés des quantificateurs avec deux variables.

Dans ce qui suit, $P(x,y)$ désigne une proposition dont les valeurs de vérité dépendant de deux variables $x$ et $y$.

**propriété**

1. $((\forall x \in E)(\forall y \in E), P(x,y)) \iff ((\forall y \in E)(\forall x \in E), P(x,y))$
2. $((\exists x \in E)(\exists y \in E), P(x,y)) \iff ((\exists y \in E)(\exists x \in E), P(x,y))$
   On peut permuter des quantificateurs de même nature.

**Remarques**

1. La phrase "$(\forall x \in E)(\forall y \in E), P(x,y)$ ",on peut s'écrire plus simplement "$\forall (x,y) \in E^2, P(x,y)$".
2. La phrase "$(\exists x \in E)(\exists y \in E), P(x,y)$ ",on peut s'écrire plus simplement "$\exists (x,y) \in E^2, P(x,y)$".
3. On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.
4. Quand on écrit $\exists x\ \forall y$ l'élément $x$ est fourni une bonne fois pour toutes avant les $y$ et est donc constant quand $y$ varie.
5. Quand on écrit $\forall y\ \exists x$ l'élément $x$ est fourni après chaque $y$.Il dépend de $y$ et peut donc varier quand $y$ varie.

**Exemple**

1. "$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}), m > n$".C'est à dire pour chaque entier ,on peut trouver un entier strictement plus grand.Cette proposition est vraie $(m = n+1)$
2. "$(\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}), m > n$".C'est à dire il y'a un entier plus grand que tous les entiers.Cette proposition est fausse.

**Propriété**

1. $\overline{(\forall x \in E)(\exists y \in E), P(x,y)} \iff ((\exists x \in E)(\forall y \in E), \overline{P(x,y)})$.
2. $\overline{(\exists x \in E)(\forall y \in E), P(x,y)} \iff ((\forall x \in E)(\exists y \in E), \overline{P(x,y)})$.

## 3 Les lois logiques et méthodes de raisonnement

**Définition**

Toute proposition construite à partir d'autres propositions liées entre elles par des connecteurs et qui est vraie indépendamment des propositions qui la composent,est une loi logique.

### 3.1 Raisonnement par déduction

**le Schéma du raisonnement par déduction**

Quand $P$ est une proposition vraie ,et$P \Longrightarrow Q$ est une proposition vraie,on peut affirmer que $Q$ est une proposition vraie.Sachant que l'implication est transitive,une démonstration prend très souvent la forme suivante :$P$ est vraie et $P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R \Longrightarrow .... \Longrightarrow S \Longrightarrow T$ est vraie, et on a donc montrer que $T$ est vraie.

**Exemples**

1. Soient $a$ et $b$ deux reels tels que $a+b=1$. Montrer que $ab \leq \dfrac{1}{4}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x} \Longrightarrow x = 0$

### 3.2 Raisonnement par contraposée

**le Schéma du raisonnement par contraposée**

Pour monter que $P \Longrightarrow Q$ est une proposition vraie,On montre que $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$ est une proposition vraie.
$\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$ est appelée la contraposée de $P \Longrightarrow Q$.

**Exemples**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.Montrer que : $n^2 - 1$ n'est pas divisible par $8 \Longrightarrow$ n est pair
2. Montrer que :$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,$x \neq y \Longrightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

### 3.3 Raisonnement par équivalence

**le Schéma du raisonnement par équivalence**

Il consiste à appliquer la loi logique :si $P \Longleftrightarrow Q$ et $Q \Longleftrightarrow R$ alors $P \Longleftrightarrow R$(L'équivalence est transitive)

**Exemples**

1. Monter que $\forall x \in \mathbb{R}^+$,$\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Longleftrightarrow x = 1$.
2. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;$xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

### 3.4 Raisonnement par disjonction des cas

**le Schéma du raisonnement par disjonction des cas**

On applique ce raisonnement lorsqu'on veut démontrer une implication de la forme ($P$ ou $Q$) $\Longrightarrow R$,on utilise alors la lois logique :[($P$ ou $Q$) $\Longrightarrow R$] $\Longleftrightarrow$ [$(P \Longrightarrow R)$et$(Q \Longrightarrow R)$]

**Exemples**

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,$\sqrt{x^2+1} + x > 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :$x^2 - |x+4| + 3 = 0$.
3. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.

### 3.5 Raisonnement par l'absurde

**le Schéma du raisonnement par l'absurde**

On veut montrer qu'une proposition $P$ est vraie.On suppose que c'est sa négation $\bar{P}$ est vraie et on montre que cela entraine une proposition fausse.On en conclut que $P$ est vraie.
Quand $\bar{P} \Longrightarrow Q$ est une proposition vraie ,et $Q$ est une proposition fausse,On peut affirmer que $\bar{P}$ est fausse,et par suite $P$ est vraie.

**Exemples**

Montrer que :$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

### 3.6 Raisonnement par récurrence

**le Schéma du raisonnement par récurrence**

On considère une proposition qui dépend d'un entier $n$ notée $P(n)$.Cette proposition est appelée l'hypothèse de récurrence.La méthode alors est la suivante :
Initialisation : On montre que la proposition $P(n_0)$ est vraie pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$(bien Souvent $n_0 = 0$).
Hérédité :On montre que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.On rédige de la manière suivante :
On suppose $P(n)$ pour un certain $n \geq n_0$ et on montre $P(n+1)$.
Conclusion :Par principe de récurrence,$P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

**Exemples**

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,$2^n \geq 1 + n$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $5/7^n - 2^n$