Le Barycentre dans le plan

1 Barycentre de deux points pondérés

1.1 Point pondéré-Barycentre de deux points

Définition 1

Soit A un point du plan et α un nombre réel.Le couple $(A;\alpha)$ s'appelle un point pondéré,et le réel α s'appelle la masse du point A(On dit aussi que le point A est affecté du coefficient α).

Définition 2

On appelle barycentre de deux points pondérés (A,α) et (B,β) (avec $\alpha+\beta\neq 0$) le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

On fixe $\alpha+\beta\neq 0$ pour toute la suite.

cas particuliers :

— Si $\alpha=\beta$ alors G s'appelle l'isobarycentre dans le cas de deux points G est le mileu du segment $[AB]$.
— Si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$ alors on a $\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ d'où $G=B$.

1.2 Propriétés du barycentre de deux points

1.2.1 Homogénéité

Théorème

Le barycentre de deux points reste inchangé lorsqu'on remplace les deux coefficients par des coefficients proportionnels (non nuls).

Démonstration

soit $k\in\mathbb{R}^*$ et le point G barycentre des deux points (A,α) et (B,β) (avec $\alpha+\beta\neq 0$), on a : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ si on multiplie les deux membres de l'égalité par k on obtient :
$k\times\alpha\overrightarrow{GA}+k\times\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ donc G est le barycentre des deux points $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$

Application : Soit G le barycentre des points $(A,\frac{3}{4})$ et $(B,-\frac{1}{2})$, G est le barycentre des points $(A,3)$ et $(B,-2)$

1.2.2 Propriété caractéristique

Propriété

G est le barycentre des points (A,α) et (B,β) si, et seulement si pour tout M du plan on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

Démonstration

G est le barycentre des points (A,α) et (B,β) donc on a :
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ on utilise la relation de Chasles
$\alpha(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})+\beta(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{0}$ d'où
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{0}$

Alors : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

Remarques

1. G est le barycentre des points (A,α) et (B,β) si, et seulement si $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$.Cette relation permet de construire le point G.
   Il suffit d'appliquer la propriété avec le point $M=A$. Ce qui donne : $\alpha\overrightarrow{AA}+\beta\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}$ soit $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$. On a aussi : $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
2. Le barycentre de deux points(A,α) et (B,β), avec $\alpha+\beta\neq 0$, appartient à la droite (AB).

2 Barycentre de trois points pondérés

2.1 Définition

On appelle barycentre de trois points pondérés (A,α) , (B,β) et (C,γ) (avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$) le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

.

Cas particulier

Si $\alpha=\beta=\gamma$,alors le barycentre des points pondérés (A,α) , (B,β) et (C,γ) est appelé l'isobarycentre des points A,B et C.C'est le centre de gravité du triangle ABC (Dans le cas où les points A,B et C ne sont pas alignés).

2.2 Propriétés du barycentre de trois points

2.2.1 Propriété de l'homogénéité

Propriété

Si G est le barycentre de (A,α) , (B,β) et (C,γ) alors, pour tout réel k non nul G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$ et $(C,k\gamma)$

2.2.2 Propriété caractéristique

Propriété

G est le barycentre de trois points pondérés (A,α) , (B,β) et (C,γ) (avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$) si, et seulement si $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

Remarques

Pour $M=A$, on obtient $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.
On a aussi : $\overrightarrow{CG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$
et $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$

2.2.3 Associativité du barycentre

Propriété

G est le barycentre de trois points pondérés (A,α) , (B,β) et (C,γ) (avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$), on suppose de plus $(\alpha+\beta\neq 0)$ Si et seulement si G est le barycentre des deux points $(H,\alpha+\beta)$ et (C,γ) où H est le barycentre de (A,α) et (B,β).

3 Barycentre de quatre points pondérés

3.1 Définition

On appelle barycentre de quatre points pondérés (A,α) , (B,β) ,(C,γ) et (D,λ) (avec $\alpha+\beta+\gamma+\lambda\neq 0$) le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\lambda\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$$

.

3.2 Propriétés du barycentre de quatre points

3.2.1 Propriété de l'homogénéité

Propriété

Si G est le barycentre de (A,α) , (B,β) ,(C,γ) et (D,λ) alors, pour tout réel k non nul G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$,$(C,k\gamma)$ et $(D,k\lambda)$

3.2.2 Propriété caractéristique

Propriété

G est le barycentre de quatre points pondérés (A,α) , (B,β) , (C,γ) et (D,λ) (avec $\alpha+\beta+\gamma+\lambda\neq 0$) si, et seulement si
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\lambda\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\lambda)\overrightarrow{MG}$

Remarques

Pour $M=A$, on obtient $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{AC}+\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{AD}$.
On a aussi : $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{BA}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{BC}+\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{CG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{CA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{CB}+\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{DG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{DA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{DB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{DC}$

4 Coordonnées du barycentre

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$,soient (A,α) , (B,β), (C,γ) et $(D;\lambda)$ des points pondérés et $A(x_A;y_A)$,$B(x_B;y_B)$,$C(x_C;y$ et $D(x_D;y_D)$.

4.1 Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

G est le barycentre de deux points(A, α) et (B, β), avec $\alpha + \beta \neq 0$, a pour coordonnées $\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$.

4.2 Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

G est le barycentre de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) a pour coordonnées $\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$.

4.3 Coordonnées du barycentre de quatre points pondérés

G est le barycentre de quatre points pondérés (A, α) , (B, β) , (C, γ) et (D, λ) (avec $\alpha+\beta+\gamma+\lambda \neq 0$) a pour coordonnées

$\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \lambda x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \lambda}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \lambda y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \lambda}\right)$.