

DEVOIR LIBRE 1

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel .
 - (a) Étudier la parité des nombres suivants : (i) $n^2 + 3n + 4$ (ii) $(2021)^n + 4$ (iii) $2n^3 + 17n$
 - (b) Chercher tous les entiers naturels n tel que : $\frac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$.
 - (c) Montrer que : $\frac{2^n}{5^m} \in \mathbb{D}$ pour tout m et n de \mathbb{N} .
 - (d) Montrer que : $A = 7^{n+1} + 8 \times 7^n$ est divisible par 15.
2. Soient $a = 3060$, $b = 1224$ et $c = 71$.
 - (a) Montrer que c est un nombre premier.
 - (b) Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers.
 - (c) Déterminer $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$.
 - (d) Simplifier (i) $A = \frac{a}{b}$ (ii) $B = \frac{7}{a} + \frac{11}{b}$ (iii) $C = \sqrt{ab}$

Exercice 2

1. Factoriser les expressions suivantes :
 - (a) $A = (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - 2)(1 - x)$
 - (b) $B = x^3 - 8$
 - (c) $C = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2 - 3)$
2. Développer et réduire : $(x - \sqrt{3})(2 - x)(x + \sqrt{3}) - (x - 3)^3$.

mygray[title=Exercice 1] ABC est un triangle.

Soient I , J et K des points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CB}$.
2. Construire les points I , J et K .
3. (a) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
 (b) Exprimer le vecteur \overrightarrow{IK} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
 (c) En déduire que les points I , J et K sont alignés.
4. Soit F un point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$.
 - (a) Construire le point F .
 - (b) Montrer que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
 - (c) Montrer que F est le milieu du segment $[BC]$.

CORRECTION DU DEVOIR LIBRE 1

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel .

(a) i. Étudier la parité de $n^2 + 3n + 4$

On a $n^2 + 3n + 4 = (n^2 + n) + 2(n + 2)$.

Puisque n^2 et n sont de même parité, alors leur somme $n^2 + n$ est pair.

Et on a $2(n + 2)$ est pair.

Donc $(n^2 + n) + 2(n + 2)$ est pair.

D'où $n^2 + 3n + 4$ est pair.

ii. Étudier la parité de $(2021)^n + 4$

On a 2021 est impair, alors $(2021)^n$ l'est aussi.

Et puisque 4 est pair, alors $(2021)^n + 4$ est impair.

iii. Étudier la parité de $2n^3 + 17n$

On a $2n^3 + 17n = 2(n^3 + 8n) + n$

Et on a $2(n^3 + 8n)$ est pair.

Donc, si n est pair, alors $2(n^3 + 8n) + n$ l'est aussi.

Et si n est impair, alors $2(n^3 + 8n) + n$ l'est aussi.

D'où $2n^3 + 17n$ a la même parité que n .

(b) Chercher tous les entiers naturels n tel que : $\frac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier naturel tel $\frac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$.

Alors $n+2$ divise $2n+7$.

D'autre part, on a $2n+7 = 2(n+2) + 3$.

Alors $\frac{2n+7}{n+2} = 2 + \frac{3}{n+2}$

Donc $n+2$ est un diviseur de 3.

Les diviseurs de 3 sont 1 et 3, alors $n+2 = 1$ ou $n+2 = 3$.

Donc $n = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$ ou $n = 3 - 2 = 1 \in \mathbb{N}$.

D'où, l'unique entier naturel n vérifiant $\frac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$ est $n = 1$.

(c) Montrer que : $\frac{2^n}{5^m} \in \mathbb{D}$ pour tout m et n de \mathbb{N} .

On a $\frac{2^n}{5^m} = \frac{2^n \times 2^m}{5^m \times 2^m} = \frac{2^{n+m}}{(5 \times 2)^m} = \frac{2^{n+m}}{10^m}$.

Puisque $\frac{2^{n+m}}{10^m} \in \mathbb{D}$, alors $\frac{2^n}{5^m} \in \mathbb{D}$.

(d) Montrer que : $A = 7^{n+1} + 8 \times 7^n$ est divisible par 15.

On a $A = 7^{n+1} + 8 \times 7^n = 7^n \times 7 + 8 \times 7^n = 7^n \times (7 + 8) = 7^n \times 15$.

D'où A est divisible par 15.

2. Soient $a = 3060$, $b = 1224$ et $c = 71$.

(a) Montrer que c est un nombre premier.

On a $2^2 = 4 < 71$, et 2 ne divise pas 71.

$3^2 = 9 < 71$, et 3 ne divise pas 71.

$5^2 = 25 < 71$, et 5 ne divise pas 71.

$7^2 = 49 < 71$, et 7 ne divise pas 71.

$11^2 = 121 > 71$, alors $c = 71$ est un nombre premier.

(b) Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} \text{On a } a = 3060 & 2 \\ 1530 & 2 \\ 765 & 3 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r|l} b = 1224 & 2 \\ 612 & 2 \\ 306 & 2 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{D'où } a = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 17 \quad \text{et} \quad b = 2^3 \times 3^2 \times 17.$$

(c) Déterminer $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$.

$$\text{On a } PGCD(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 17 = 612 \quad \text{et} \quad PPCM(a, b) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17 = 6120.$$

(d) i. Simplifier $A = \frac{a}{b}$.

$$\text{On a } a = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 17 = 5 \times PGCD(a, b) \quad \text{et} \quad b = 2^3 \times 3^2 \times 17 = 2 \times PGCD(a, b).$$

$$\text{Alors } A = \frac{a}{b} = \frac{5 \times \cancel{PGCD(a, b)}}{2 \times \cancel{PGCD(a, b)}} = \frac{5}{2}.$$

ii. Simplifier $B = \frac{7}{a} + \frac{11}{b}$.

$$\text{On a } PPCM(a, b) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17 = a \times 2 = b \times 5.$$

$$\text{Alors } B = \frac{7}{a} + \frac{11}{b} = \frac{7 \times 2}{a \times 2} + \frac{11 \times 5}{b \times 5} = \frac{14}{PPCM(a, b)} + \frac{55}{PPCM(a, b)} = \frac{69}{6120}.$$

iii. Simplifier $C = \sqrt{ab}$.

$$\text{On a } a = 5 \times PGCD(a, b) \quad \text{et} \quad b = 2 \times PGCD(a, b).$$

$$\text{Donc } ab = (5 \times PGCD(a, b)) \times (2 \times PGCD(a, b)) = 10 \times (PGCD(a, b))^2.$$

$$\text{D'où } C = \sqrt{ab} = \sqrt{10 \times (PGCD(a, b))^2} = PGCD(a, b) \times \sqrt{10} = 612\sqrt{10}.$$

Exercice 2

1. (a) Factoriser $A = (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - 2)(1 - x)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } A &= (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - 2)(1 - x) \\ &= (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - (\sqrt{2})^2)(1 - x) \\ &= (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(1 - x) \\ &= (x - \sqrt{2})[(3x - 1) + (x + \sqrt{2})(1 - x)] \\ &= (x - \sqrt{2})[3x - 1 + x - x^2 + \sqrt{2} - x\sqrt{2}] \\ &= (x - \sqrt{2})[-x^2 + 4x - x\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}] \\ &= (x - \sqrt{2})[-x^2 + (4 - \sqrt{2})x - 1 + \sqrt{2}] \end{aligned}$$

(b) Factoriser $B = x^3 - 8$.

$$\begin{aligned} \text{On a } B &= x^3 - 8 \\ &= x^3 - 2^3 \\ &= (x - 2)(x^2 + x \times 2 + 2^2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

(c) Factoriser $C = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2 - 3)$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } C &= x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2 - 3) \\
&= x^2 - x\sqrt{3} - x\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + (x^2 - 3) \\
&= x(x - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \\
&= (x - \sqrt{3})[x - \sqrt{3} + (x + \sqrt{3})] \\
&= (x - \sqrt{3})[x - \cancel{\sqrt{3}} + x + \cancel{\sqrt{3}}] \\
&= 2x(x - \sqrt{3})
\end{aligned}$$

2. Développer et réduire : $(x - \sqrt{3})(2 - x)(x + \sqrt{3}) - (x - 3)^3$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } B &= (x - \sqrt{3})(2 - x)(x + \sqrt{3}) - (x - 3)^3 \\
&= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(2 - x) - (x - 3)^3 \\
&= (x^2 - (\sqrt{3})^2)(2 - x) - (x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3) \\
&= (x^2 - 3)(2 - x) - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) \\
&= (2x^2 - x^3 - 6 + 3x) - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) \\
&= 2x^2 - x^3 - 6 + 3x - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 \\
&= -2x^3 + 11x^2 - 24x + 21
\end{aligned}$$

Exercice 3

ABC est un triangle.

Soient I , J et K des points du plan tels que :

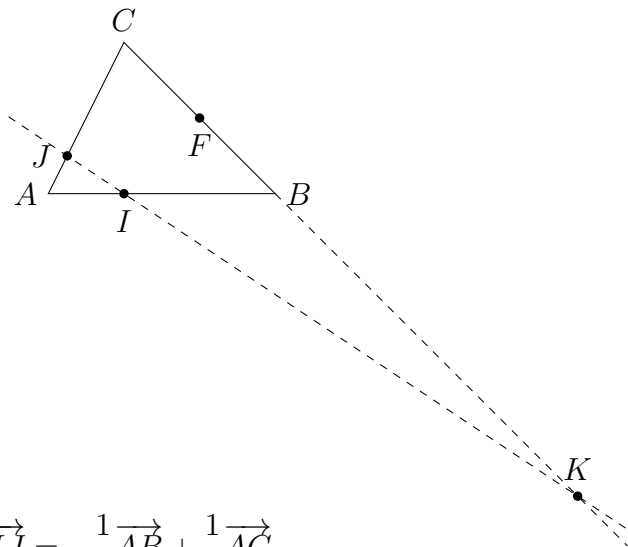
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CB}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \overrightarrow{BK} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}, \text{ alors } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}, \text{ donc } \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK} - \\
&\frac{1}{3}\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CK}.
\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CK}, \text{ et par suite } \overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CB}.$$

2. Construire les points I , J et K .



3. (a) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\
&= -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\
\text{D'où } \overrightarrow{IJ} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

- (b) Exprimer le vecteur \overrightarrow{IK} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

$$\begin{aligned}
\text{On a } \overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} \\
&= -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CB} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \frac{9}{3}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{8}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\
\text{D'où } \overrightarrow{IK} &= \frac{8}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

- (c) En déduire que les points I , J et K sont alignés.

$$\text{On a } -8\overrightarrow{IJ} = -8\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{8}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IK}.$$

Alors, les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} sont colinéaires.

D'où, les points I , J et K sont alignés.

4. Soit F un point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$.

- (a) Construire le point F .

Voir la figure.

- (b) Montrer que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \overrightarrow{AF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ} \\
&= \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\left(\frac{4}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2 \times \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
\text{D'où } \overrightarrow{AF} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

(c) Montrer que F est le milieu du segment $[BC]$.

$$\begin{aligned}\text{On a } \overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{2}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

D'où F est le milieu du segment $[BC]$.