Devoir libre n^o 1

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel .
   (a) Étudier la parité des nombres suivants : n^2+3n+4 ;$(2021)^n+4$ et $2n^3+17n$
   (b) Chercher tous les entiers naturels n tel que : $\dfrac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que : $\dfrac{2^n}{5^m} \in \mathbb{D}$ pour tout m et n de $\mathbb{N}$.
   (d) Montrer que : $A = 7^{n+1} + 8 \times 7^n$ est divisible par 15.
2. Soient $a = 3060$; $b = 1224$ et $c = 71$.
   (a) Montrer que c est un nombre premier.
   (b) Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers.
   (c) Déterminer $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$.
   (d) Simplifier $A = \dfrac{a}{b}$,$B = \dfrac{7}{a} + \dfrac{11}{b}$ et $C = \sqrt{ab}$.

Exercice 2

1. Factoriser les expressions suivantes :
   $A = (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - 2)(1 - x)$

   $B = x^3 - 8$

   $C = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2 - 3)$.
2. Développer et réduire : $(x - \sqrt{3})(2 - x)(x + \sqrt{3}) - (x - 3)^3$.

Exercice 3

ABC est un triangle.Soient I,J et K des points du plan tels que

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,; \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} \quad \text{et } \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CB}$.
2. Construire les points I,J et K.
3. (a) Montrer que :$\overrightarrow{IJ} = \dfrac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) En déduire que I,J et K sont des points alignés.
4. soit F un point tel que :$\overrightarrow{AF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$.
   (a) Construire F.
   (b) Montrer que :$\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
   (c) Montrer que F est le milieu du segment $[BC]$.