La droite dans le plan

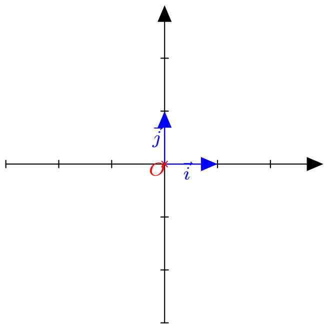
1 Repère du plan -Coordonnées d'un point,d'un vecteur.

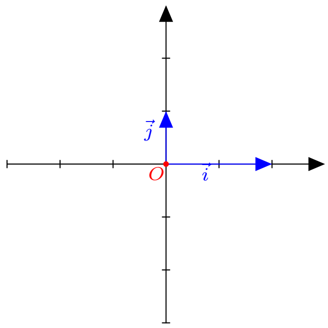
1.1 Repère du plan

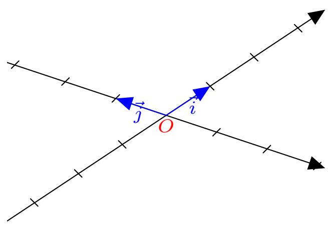
définition

Un repère du plan est constitué de trois points non alignés.(O, I, J) est appelé un repère :
O est l'origine.
(OI) est l'axe des abscisses.
(OJ) est l'axe des ordonnées.
Ce repère est également noté $(O, \vec{i}, \vec{j})$,en posant :$\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
Les deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ constituent la base du repère.
Si $(OI) \perp (OJ)$ alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthogonal.
Si de plus $OI = OJ = 1$ alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.

Exemples



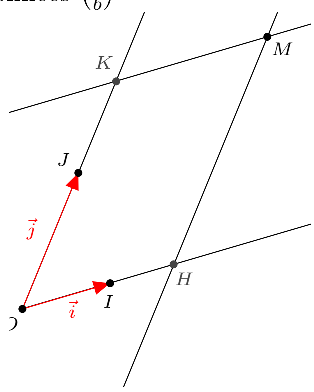




1.2 Coordonnées d'un point,d'un vecteur

Définition

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.M un point quelconque.On pose :$\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
Soit H le projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ),donc il existe x tel que $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$.
Soit K le projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI),donc il existe y tel que $\overrightarrow{OK} = y\vec{j}$.
On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$.
Donc :$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
le couple (x, y) est appelé les coordonnées du point M et on note :$M(x, y)$ ou $M\binom{x}{y}$.
x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M.
De la même façon le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{a}{b}$



1.3 Égalité de deux vecteurs

Propriété

Deux vecteurs sont égaux si,et seulement si,leurs coordonnés dans un repère donné sont égales.
Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.Si $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$,alors $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$.

1.4 Régles de calcul sur les coordonnées

Propriétés

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.On considère $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$.

1. $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$.
2. $\vec{u}+\vec{v}(x+x',y+y')$
3. $k\vec{u}(kx,ky)$ avec $k\in\mathbb{R}$.
4. Si M est le milieu du segment $[AB]$ alors :$M(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2})$
5. Si $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormée : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

1.5 Exercices

Exercice 1

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.On considère les points $A(1;2)$ et $B(-5,2)$.

1. Représenter dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points A et B.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et calculer la distance AB.
3. Déterminer les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$.
4. Déterminer les coordonnées du point C vérifiant : $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.
5. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que :$\vec{U}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}$

Exercice 2

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O et G le centre de gravité du triangle ABC.
Déterminer les coordonnées des points A , B , C, D , O et G dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

2 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Activité

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ .Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.

Propriétè

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ .Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.
le nombre $xy'-x'y$ est appelé le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$,et on écrit : $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.
Si $xy'-x'y\neq 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires .

Exemples

Étudier la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :

1. $\vec{u}(-2;1)$ et $\vec{v}(1;\frac{-1}{2})$.
2. $\vec{u}(2\sqrt{2};\sqrt{3})$ et $\vec{v}(-\sqrt{3};\sqrt{2})$.
3. $\vec{u}(2m-3;m+3)$ et $\vec{v}(1;4)$ avec $m \in \mathbb{R}$.

3 La droite dans le plan

3.1 vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit A un point du plan P et $\vec{u}$ un vecteur non nul.La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$;et on note $D(A;\vec{u}) = \{M \in P / \overrightarrow{AM} = k\vec{u}; k \in \mathbb{R}\}$

Remarque

Le vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}$
Exemples :

— si $A(1;3)$ et $B(-1;2)$ le vecteur directeur de la droite (AB) est $\vec{u}(\ ;\ )$.
— On considère la droite (D) d'équation $y = 3x - 1$.Déterminer $\vec{u}$ le vecteur directeur de la droite (D).

3.2 Représentation paramétrique d'une droite

Activité

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.Soit (D) la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et $\vec{u}(a;b)$ le vecteur directeur de (D).
Montrer que : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$. avec $t \in \mathbb{R}$

Définition

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.Soit $A(x_A;y_A)$ et $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul.
Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$. avec $t \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de la droite (D) passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b)$.

Exemple

On considère le point $A(3;-2)$ et le vecteur $\vec{u}(4;2)$.la représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est : $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

4 Équation cartésienne d'une droite dans le plan

Définition

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est appelée équation cartésienne de la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

Propriété

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.On considère La droite (D) passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b)$.
Pour tout point $M(x;y) \in (D)$, on a :$\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$

Exercice

Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) dans les cas suivant :

1. la droite (D) passant par $A(3;-2)$ et $B(1;-2)$.
2. la droite (D) passant par $A(3;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4;1)$.
3. la représentation paramétrique de la droite (D) est :$\begin{cases} x=3-t \\ y=1+2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Remarques

— Toute équation de la forme $y=mx+p$ est appelé l'équation réduite de la droite (D).
m est le coefficient directeur ou la pente de la droite (D).
p est l'ordonnée à l'origine.
— Toute droite (D) parallèle à l'axe des abscisses et passant par $A(x_A;y_A)$ est d'équation $y=y_A$.
— Toute droite (D) parallèle à l'axe des ordonnées et passant par $A(x_A;y_A)$ est d'équation $x=x_A$.

5 Positions relatives de deux droites

Rappel

Soient (D) et (D') deux droites du plan telles que : $(D):y=mx+p$ et $(D'):y=m'x+p'$.
— $(D)//(D')$ si et seulement si $m=m'$.
— (D) et (D') sont sécantes si et seulement si $m\neq m'$.
— $(D)\perp(D')$ si et seulement si $m\times m'=-1$

Soient (D) et (D') deux droites du plan,$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.
— $(D)//(D')$ si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v})=0$.
— (D) et (D') sont sécantes si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v})\neq 0$.

Exercice

Étudier la position de (D) et (D') dans les cas suivants :

1. $(D):\begin{cases} x=2+t \\ y=2+3t \end{cases}$ et $(D'):\begin{cases} x=4+2k \\ y=3-k \end{cases}$ avec $(t,k)\in\mathbb{R}^2$
2. $(D):2x-3y+1=0$ et $(D'):x-4y-2=0$
3. $(D):x+y-2=0$ et $(D'):\begin{cases} x=4+2t \\ y=1+3t \end{cases}$.
4. $(D):\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \end{cases}$ et $(D'):\begin{cases} x=1-k \\ y=-1-2k \end{cases}$ avec $(t,k)\in\mathbb{R}^2$