Devoir Libre

Exercice 1

1. Soit x un nombre réel.
   (a) Calculer $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   (b) Déduire que $\cos(x)\sin(x)=\cos^2(x-\frac{\pi}{4})-\dfrac{1}{2}$.
2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x)=\cos(4x)+\sin(4x)-\sqrt{2}\sin(8x)$
   (a) Montrer que :$\cos(4x)+\sin(4x)=\sqrt{2}\cos(4x-\frac{\pi}{4})$ et que $\sqrt{2}\sin(8x)=2\sqrt{2}\cos(4x)\sin(4x)$.
   (b) Déduire que :$\forall x\in\mathbb{R}\,;f(x)=\sqrt{2}[-2\cos^2(4x-\frac{\pi}{4})+\cos(4x-\frac{\pi}{4})+1]$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :$-2X^2+X+1=0$ et factoriser le polynôme $-2X^2+X+1$.
   (d) Déduire que $f(x)=-\sqrt{2}(\cos(4x-\frac{\pi}{4})-1)(2\cos(4x-\frac{\pi}{4})+1)$
   (e) Montrer que :$\forall x\in\mathbb{R}\,;f(x)=2\sqrt{2}\sin^2(2x-\frac{\pi}{8})[1+2\cos(4x-\frac{\pi}{4})]$.
   (f) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :$f(x)=0$.

Exercice 2

Soit $x\in\mathbb{R}$.On pose $A(x)=2\cos^2(x)+\sqrt{3}\sin(2x)-2\sqrt{2}\sin(x)-2$

1. Calculer $A(\dfrac{\pi}{6})$ et $A(\dfrac{\pi}{3})$.
2. Montrer que :$(\forall x\in\mathbb{R})$:$A(x)=2\sin(x)(\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)-\sqrt{2})$.
3. Montrer que :$(\forall x\in\mathbb{R})$:$\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=2\cos(x+\frac{\pi}{6})$.
4. Déduire que $(\forall x\in\mathbb{R})$:$A(x)=2\sin(x)(2\cos(x+\frac{\pi}{6})-\sqrt{2})$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$.
6. Résoudre dans $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ l'inéquation $A(x)>0$.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{2+u_n} \end{cases}$

1. Calculer $u_1$et u_2.
2. Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n>3$.
3. Vérifier que :$(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n^2-2u_n-3=(u_n+1)(u_n-3)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
5. Déduire que :$(\forall n\in\mathbb{N})$: $3<u_n\leq 4$.
6. On considère (w_n) une suite définie par :$w_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+1}$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique.Donner sa raison et son premier terme w_0.

(b) Exprimer w_n en fonction de n,puis déduire que : $u_n = \dfrac{3 \times 5^{n+1} + 1}{5^{n+1} - 1}$.

(c) Exprimer la somme $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ en fonction de n.

(d) Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})$:$w_n = 1 - \dfrac{4}{u_n + 1}$

(e) Déduire $S'_n = \dfrac{1}{u_0 + 1} + \dfrac{1}{u_1 + 1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n + 1}$ en fonction de n.

7. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - 3 < \dfrac{1}{5}(u_n - 3)$.

(b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $u_n - 3 < \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.