Chapitre 1

Ensemble $\mathbb{N}$ et notions en arithmétique

Sommaire

1 Notation

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et on écrit $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$.
On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, et on écrit $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$.

2 Parité d'un entier

2.1 Entier pair – Entier impair

Définitions

Soit a un entier naturel

- On dit que a est « **pair** » s'il est divisible par 2. a s'écrit alors sous la forme $2n$ où n est un entier naturel.
- On dit que a est « **impair** » s'il n'est pas divisible par 2. a s'écrit alors sous la forme $2n + 1$ où n est un entier naturel (ou $2n - 1$ si n est un entier naturel non nul).

Exemples

- 754 est un nombre pair. Car $754 = 2 \times 377$.
- 537 est un nombre impair. Car $537 = 2 \times 268 + 1 = 2 \times 269 - 1$.
- $A = 2n + 2$, où n est un entier naturel, est un nombre pair.

  En effet : $A = 2(n + 1)$.

  on pose $k = n + 1$.

  Donc $A = 2k$.

Remarques

- Étudier la parité d'un entier c'est déterminer s'il est pair ou impair.
- Deux entiers sont dits de même parité s'ils sont soit tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

2.2 Opérations sur les entiers pairs et les impairs

2.2.1 Addition

Activité

Soient a et b deux entiers naturels. Étudier la parité de $a + b$ dans les cas suivants :

1. a est pair et b est impair.
2. a et b sont pairs.
3. a et b sont impairs.

Propriété

- La somme de deux entiers de la même parité donne un entier pair.
- La somme de deux entiers de parité différente donne un nombre impair.

2.2.2 Multiplication

Activité

Soient a et b deux entiers naturels. Étudier la parité de $a \times b$ dans les cas suivants :

- a est pair et b est impair.
- a et b sont pairs.
- a et b sont impairs.

Propriété

Seul Le produit de deux entiers impairs donne un entier impair. Dans tous les autres cas le produit est un entier pair.

2.2.3 Puissance

Propriété

Soit a et n deux entiers naturels avec $n \neq 0$.
- Si a est pair alors a^n est pair.
- Si a est impair alors a^n est impair.

Exercice

Soit n un entier naturel. Étudier la parité des nombres suivants : $8n+7$; $3n+6$; n^3-n+1.

3 Multiples et diviseurs d'un entier

3.1 Multiples d'un entier

Définition

Soient a et b deux entiers naturels.
On dit que « a **est un multiple de** b » s'il existe un entier naturel k tel que : $a = bk$.

Exemples

426 est un multiple de 71, car $426 = 71 \times 6$.
426 est aussi un multiple de 6.

Propriétés

Soient a, b et c des entiers naturels.
- Si a est un multiple de b et b est un multiple de c, alors a est un multiple de c.
- Si a et b sont deux multiples de c, alors $a+b$ est un multiple de c.
- Si a et b sont deux multiples de c, avec $a \geq b$, alors $a-b$ est un multiple de c.
- Si a est un multiple de b, alors ac est aussi un multiple de b, pour c quelconque.

Exemples

- 12 est un multiple de 6, et 6 est un multiple de 3, alors 12 est un multiple de 3.
- 28 et 36 sont deux multiples de 2, alors $36+28=64$ et $36-28=8$ sont des multiples de 2.
- 25 est un multiple de 5, alors $25 \times 2 = 50$ et $25 \times 3 = 75$ sont des multiples de 5.

Exercice

1. Déterminer l'entier naturel n, dans les cas suivants : (a) $8n < 90 < 8(n+1)$; (b) $5n < 32 < 5(n+1)$.
2. Encadrer entre deux multiples successives de 9, les entiers suivants : 30 ; 123 ; 7 ; 49.

3.2 Plus petit commun multiple de deux entiers

Définition

Soient a et b deux entiers naturels.
Le plus petit des multiples communs non nuls de a et b s'appelle le « **plus petit commun multiple de** a **et** b », et on le note $\text{PPCM}(a;b)$.

Exemple

Les multiples de 6 sont : $M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; \ldots\}$
Les multiples de 8 sont : $M_8 = \{0; 8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; \ldots\}$
Les multiples commun de 6 et 8 sont : $\{0; 24; 48; \ldots\}$
Le plus petit commun multiple de 6 et 8 est : $\text{PPCM}(6; 8) = 24$

Exercice

Déterminer les multiples de 9 et 12, inférieurs à 40, et en déduire le $\text{PPCM}(9; 12)$.

3.3 Diviseurs d'un entier

Définition

Soient a et b deux entiers naturels.
On dit que « a **est un diviseur de** b » ou « a **divise** b » si b est un multiple de a.

Exemple

6 est un diviseur de 426, car $426 = 71 \times 6$.
71 est aussi un diviseur de 426.

Propriété

Soient a, b et c des entiers naturels.

- Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
- Si a divise à la fois b et c, alors a divise $b + c$, et si $b \geq c$, alors a divise $b - c$.
- Si a divise b, alors a divise bc quel que soit le nombre c.

Exemple

- 3 est un diviseur de 6, et 6 est un diviseur de 12, alors 3 est un diviseur de 12.
- 12 et 4 sont deux diviseurs de 48, alors $12 + 4 = 16$ et $12 - 4 = 8$ sont des diviseurs de 48.
- 7 est un diviseur de 14, alors $14 \times 2 = 28$ et $14 \times 3 = 42$ sont des diviseurs de 7.

Exercice

Soit a, b, d et r des entiers naturels tels que :

- d est un diviseur à la fois de a et de b.
- r est le reste de la division euclidienne de a et b (c-à-d : il existe un entier q tel que $a = bq + r$).

Montrer que d est un diviseur de r.

3.4 Plus grand commun diviseur de deux entiers

Définition

Soient a et b deux entiers naturels.
Le plus grand parmi les diviseurs communs des deux entiers a et b s'appelle le « **plus grand commun diviseur de** a **et** b », et on le note $\text{PGCD}(a; b)$.

Exemple

Les diviseurs de 12 sont : $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
Les diviseurs de 30 sont : $D_{30} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$.
Les diviseurs communs de 12 et 30 sont : $\{1; 2; 3; 6\}$.
Le plus grand commun diviseurs de 30 et 12 est : $\text{PGCD}(12; 30) = 6$.

Exercice

Déterminer le $\text{PGCD}(a; b)$ et simplifier la fraction $\frac{a}{b}$, dans les cas suivants :
(a) $a = 24$ et $b = 15$; (b) $a = 56$ et $b = 72$; (c) $a = 448$ et $b = 350$.

Remarque

Si $\text{PGCD}(a; b) = 1$, alors a et b sont dits « **premiers entre eux** ».
Dans ce cas, la fraction $\frac{a}{b}$, ou $\frac{b}{a}$, est irréductible.
À titre d'exemple, 8 et 15 sont premiers entre eux puisque $\text{PGCD}(8; 15) = 1$.
Il en résulte que la fraction $\frac{8}{15}$ est irréductible.

3.5 Critères de divisibilité par quelques entiers

Règles

- **Un entier est divisible par** 2, si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- **Un entier est divisible par** 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (un procédé à répéter sur la somme obtenue).
- **Un entier est divisible par** 4, si l'entier formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- **Un entier est divisible par** 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- **Un entier est divisible par** 6, s'il est divisible par 2 et par 3.
- **Un entier est divisible par** 7, si le nombre des dizaines additionner à cinq fois le chiffre des unités, est divisible par 7 (un procédé à répéter sur la somme obtenue).
- **Un entier est divisible par** 8, si la somme de quatre fois les centaines et deux fois le chiffre des dizaines, additionner au chiffre des unités est divisible par 8 (un procédé à répéter sur la somme obtenue).
- **Un entier est divisible par** 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9 (un procédé à répéter sur la somme obtenue).
- **Un entier est divisible par** 10, si son chiffre des unités est 0.
- **Un entier est divisible par** 11, si le chiffre des unités soustrait de le nombre des dizaines est divisible par 11 (un procédé à répéter sur la différence obtenue).

Exemples

- 17381 est divisible par 7 car :

  $1738 + 5 \times 1 = 1743 \quad 174 + 5 \times 3 = 189 \quad 18 + 5 \times 9 = 63 \quad 6 + 5 \times 3 = 21 = 7 \times 3$
- 72984 est divisible par 8 car :

  $729 \times 4 + 8 \times 2 + 4 = 2936 \quad 29 \times 4 + 3 \times 2 + 6 = 128 \quad 1 \times 4 + 2 \times 2 + 8 = 16 = 8 \times 2$
- 108636 est divisible par 11 car :

  $10863 - 6 = 10857 \quad 1085 - 7 = 1078 \quad 107 - 8 = 99 = 11 \times 9$

4 Décomposition d'un entier

4.1 Nombres premiers

Définition

Soit a un entier naturel.
On dit que « a **est un nombre premier** » s'il admet uniquement deux diviseurs : 1 et a.

Exemples

5 et 13 sont des nombres premiers, alors que 6 et 12 ne le sont pas.

Remarques

- 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.
- Tous les nombres premiers différents de 2 sont impairs.

Propriété

Soit a un entier naturel.
Si pour tout nombre premier p, vérifiant $p^2 < a$, p ne divise pas a ,alors a est premier.
Sinon, alors a n'est pas premier.

Exemple

113 est un nombre premier. En effet, on a :

- $2^2 < 113$ et 2 ne divise pas 113.
- $3^2 < 113$ et 3 ne divise pas 113.
- $5^2 < 113$ et 5 ne divise pas 113.
- $7^2 < 113$ et 7 ne divise pas 113.
- $11^2 > 113$.

Donc 113 est premier.

Exercice

Vérifier que 197 est premier. Est-ce le cas pour 259 ?

4.2 Décomposition en produit de facteurs premiers

Définition

Soit a un entier naturel supérieur à 2.
L'écriture de a sous forme de produit de nombres premiers s'appelle la « **décomposition de a en produit de facteurs premiers** ».

Exemple

La décomposition de 420 en produit de facteurs premiers est $840 = 2^3 \times 5 \times 3 \times 7$. En effet, on a :

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

La décomposition en produit de facteurs premiers peut être utilisée pour déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels. En effet,

- Le PPCM des deux entiers s'obtient en multipliant tous les facteurs communs ou non, chacun d'eux étant affecté de son plus grand exposant.
- Le PGCD des deux entiers s'obtient en multipliant les facteurs communs, chacun d'eux étant affecté de son plus petit exposant.

Exemple

Afin de déterminer le PPCM$(270; 360)$ et le PGCD$(270; 360)$, on décompose 270 et 360 en produit de facteurs premier. On a :

270	2
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

360	2
180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

Donc : $270 = 3^3 \times 5 \times 2$ et $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
D'où : $\text{PPCM}(270; 360) = 3^3 \times 2^3 \times 5 = 1080$ et $\text{PGCD}(270; 360) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

5 Exercices

Exercice 1

Soit n un entier naturel. Étudier la parité des nombres suivants :
(a) $2n+3$; (b) $10n+5$; (c) $4n+2$; (d) $(2n+1)-(2n-1)$; (e) $(n+2)(n+3)$; (f) $2n^2+4n+5$; (g) $(2006)^2n^2+(2005)^2$; (h) $(2n+1)^2-4n-1$; (i) $n^3+13n+17$.

Exercice 2

1. Quels sont les diviseurs de 84, strictement inférieurs à 21 ?
2. Quels sont les multiples de 456, compris entre 500 et 2500 ?
3. Déterminer le PGCD et le PPCM des entiers suivants en passant par la décomposition en facteurs premiers : (a) 120 et 144 ; (b) 540 et 168 ; (c) 225, 75 et 525 ; (d) 126, 123 et 270.
4. Déterminer les nombres premiers parmi les nombres suivants : (a) 210 ; (b) 543 ; (c) 781 ; (d) 2005 ; (e) 97 ; (f) 117.

Exercice 3

1. Décomposer en facteurs premiers les entiers 18900 et 945.
2. Simplifier les nombres $\dfrac{18900}{945}$ et $\sqrt{18900}$.

Exercice 4

Montre que a est un multiple de b dans les cas suivants : (i) $a = 3333$ et $b = 33$; (ii) $a = 142128$ et $b = 7$.

Exercice 5

Soient x ; y et z des entiers naturels.
1. Soit $A = y + 10x$ et $B = x + 10y$. Montrer que $A + B$ est divisible par 11.
2. Soient $N = z + 10y + 100x$ et $M = 100z + 10y + x$
   (a) Montrer que si $N > M$ alors $N - M$ est un multiple de 99.
   (b) Montrer que si $x + y + z = 9$ alors N est divisible par 9.
   (c) Montrer que si $y = x + z$ alors N est un multiple de 11.

Exercice 6

Soit a et b deux entiers naturels tels que $ab = 2880$ et $\text{PGCD}(a; b) = 24$. Déterminer a et b.

Exercice 7

1. Développer et réduire $(n+1)^2 - n^2$, où n est un entier naturel.
2. En déduire que tout entier naturel impair est la différence des carrés de deux entiers naturels successifs.

3. Appliquer le résultat précédent aux nombres 39 et 31.

Exercice 8

Soit a un entier naturel.
On dit que a **est un carré parfait** si $a = b^2$ où b est un entier naturel.
Soit n un entier naturel.

1. Montrer que le nombre $(n^3 + 3n^2 + n)(n^3 + 3n^2 + n + 2) + 1$ est un carré parfait.
2. Montrer que le nombre $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ est un carré parfait.

Exercice 9

1. Déterminer les diviseurs de 22.
2. En déduire tous les entiers naturels x et y vérifiant $(y + 1)(x + 2) = 22$.
3. Déterminer tous les entiers naturels x et y vérifiant $xy + x + y = 30$.

Exercice 10

Deux livres A et B ont respectivement 378 et 420 pages chacun. Chacun des deux livres est formé de chapitres qui ont le même nombre de pages.

1. Déterminer le nombre maximal de pages qu'on peut avoir dans un chapitre.
2. En déduire le nombre de chapitres dans chacun des deux livres.

Exercice 11

Deux voitures partent, en même temps, de la ligne de départ, et font plusieurs tours d'un même circuit.
La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1. Y-a-t-il des moments (autres que le départ) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
2. Préciser le nombre de tours fait par chaque voiture, avant que les deux voitures ne se croisent.

Exercice 12

Soient x et y deux entiers naturels tels que $2^{x-2} + 7^{2y+1} + 6^x = 16844$ $(x \geq 2)$.

1. Montrer que $2^{x-2}(1 + 4 \times 3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$.
2. Montrer que $16844 - 7^{2y+1}$ est impair.
3. Déduire que $x = 2$ et déterminer la valeur de y.