Measure Theory

測度論ノート

mathmathniconico

version 0.7.0

mathmathniconico（http://arxiv.hatenablog.com/, https://mathtod.online/@mathmathniconico）

目次

第 1 章

測度論の基礎

1.1　可測空間と測度空間

伊藤清という数学者は、確率とはルベーグ測度のことである、と言ったとか言わなかったとか。コルモゴロフに始まる測度論を用いた確率論の公理化は数学的に明瞭で、厳密に取り扱うのが面倒なことを除けば疑う余地はない。最近はゲーム理論的な解釈もあるらしいが、枠組みとしては測度論を使うのが自然だろう。

1.1.1　可測空間と圏

測度論を圏の枠組みで捉えるのであれば、対象としてまず考えられるのは可測空間だろう。

定義 1.1.1

集合 S において $\mathscr{A} \subset 2^S$ が次の 3 条件を満たすとき、$\mathscr{A}$ は S 上の σ-加法族であるという。

(1) $\emptyset \in \mathscr{A}$ である。

(2) $A \in \mathscr{A}$ なら $S \backslash A \in \mathscr{A}$ である。

(3) $A_n \in \mathscr{A}$ なら $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ である。

このとき組 $(S, \mathscr{A})$ を可測空間（measurable space）といい、集合 $A \in \mathscr{A}$ は $\mathscr{A}$-可測、あるいは単に可測である、などという。

定義に解釈を求めても仕方ないが、可算という視点で物事を捉える、というのが測度論の基本的な考え方とするならば、有限の立場で議論する論理学（特に命題論理）のアナロジーという意味で、この定義は自然なものだと考えられる。

σ-加法族は歴史的な経緯から呼び方が安定しない。他に完全加法族、可算加法族、σ-集合代数、σ-集合体、σ-体、トライブ（tribe）などと呼ばれているようだ。

例えば自明なものとして、$\{\emptyset, S\}$ や 2^S などが σ-加法族となる。

σ-加法族は基本的な集合演算に関して閉じている。即ち可測な集合の差集合 $A \backslash B$（$A, B \in \mathscr{A}$）

や可算交叉 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$（$A_n \in \mathscr{A}$）などは全て可測である。

命題 1.1.2

写像 $f\colon S \to T$ について以下が成り立つ。

(1) $(T, \mathscr{B})$ が可測空間なら $f^{-1}(\mathscr{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$ は S 上の σ-加法族となる。

(2) $(S, \mathscr{A})$ が可測空間なら $f(\mathscr{A}) := \{B \subset T : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ は T 上の σ-加法族となる。（$\{f(A) : A \in \mathscr{A}\}$ ではないことに注意。）

ひとまず対象については可測空間を考えるとして、次に考えるべきは射であろう。

定義 1.1.3

$(S, \mathscr{A}), (T, \mathscr{B})$ を可測空間とする。写像 $f\colon S \to T$ が $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$ を満たすとき、つまり任意の $B \in \mathscr{B}$ について $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ を満たすとき、f は $\mathscr{A}/\mathscr{B}$-可測、あるいは単に可測であるという。

この定義であれば、$\mathscr{B}$ から $\mathscr{A}$ への写像として定めれば良いのではないかと思うかもしれない。しかし、あくまで全体空間における写像として考えるのには理由があって、それは「測ることのできない集合」を念頭に入れているからである。可測でなくても測りたい集合が存在する。このようなものについて議論するために全体空間が必要なのだ。

可測写像の合成は可測であり、恒等写像はもちろん可測である。故に可測空間と可測写像は圏の対象と射を定める。これを圏 **meas** と記すことにする。

1.1.2 σ-加法族の生成と可測空間の積

次に可測空間 $X = (S, \mathscr{A})$ と可測空間 $Y = (T, \mathscr{B})$ の対象としての積 $X \prod^{\mathrm{cat}} Y$ を考えたい。射が全体空間における写像であることを考えれば、あるいは集合の圏 **Set** への忘却函手の存在を考えれば、積対象の全体空間は $S \times T$ で定めるのが妥当だろう。更に射影 $p\colon X \prod^{\mathrm{cat}} Y \to X$ の存在を考慮すると、少なくとも $A \times T, S \times B$（$A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}$）の形をした集合は可測となる必要がある。しかし一般にこれらの集合は σ-加法族を成さない。このような場合には生成という方法が有効になる。

まず σ-加法族の任意の交叉は σ-加法族である。つまり任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\mathscr{A}_\lambda$ を σ-加法族とすると、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{A}_\lambda$ も σ-加法族となる。そこで生成を次のように定義する。

定義 1.1.4

$\mathscr{G} \subset 2^S$ について、$\mathscr{G}$ を含む S 上の σ-加法族全体の交叉を $\sigma[\mathscr{G}]_S$、あるいは単に $\sigma[\mathscr{G}]$ で記し、$\mathscr{G}$ により X 上で生成された σ-加法族と呼ぶ。このとき $A \in \sigma[\mathscr{G}]$ は $\mathscr{G}$-可測であるという。

値域の可測性が生成により与えられているとき、写像の可測性は生成元のみを考えれば十分である。

命題 1.1.5

$(S, \mathscr{A}), (T, \sigma[\mathscr{G}])$ を可測空間とする。写像 $f\colon S \to T$ について以下は同値である。

(a) f は可測写像である。

(b) 任意の $G \in \mathscr{G}$ について $f^{-1}(G) \in \mathscr{A}$ である。

（証明）上から下は明白。下が成り立つとすると、任意の $G \in \mathscr{G}$ について $G \in f(\mathscr{A})$ が成り立つ。すなわち $\mathscr{G} \subset f(\mathscr{A})$ となるが、今 $f(\mathscr{A})$ は σ-加法族であるから、生成の最小性より $\sigma[\mathscr{G}] \subset f(\mathscr{A})$ が従う。これは f が可測であることを表している。□

定義 1.1.6

$\mathscr{A} \times T \cup S \times \mathscr{B} = \{A \times T, S \times B : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ により生成される $S \times T$ 上の σ-加法族を $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ と記し、積 σ-加法族という。また組 $(S \times T, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ を積可測空間という。

積可測空間が圏 **meas** における積対象であることを示すために、普遍性を示そう。

命題 1.1.7

$(P, \mathscr{F})$ を可測空間、$f\colon P \to S, g\colon P \to T$ を可測写像とする。このとき唯一つの可測写像 $h\colon P \to S \times T$ が存在して、図式を可換にする。

（証明）$h(x) := (f(x), g(x))$ と定めればよい。可測性は先の命題より $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}$ について $h^{-1}(A \times T), h^{-1}(S \times B) \in \mathscr{F}$ を示せばよいが、例えば

$$h^{-1}(A \times T) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(T) \in \mathscr{F}$$

より f, g の可測性から従う。

逆に図式を可換にする h はこのような形をしていなければならない。□

三つ以上の積について、積が結合的であることや交換できること、普遍性を満たすことも示すこ

とが出来る。この意味で圏 **meas** は任意の有限積を持つことが分かる。

1.1.3　測度空間と圏

測度とは、長さや面積、体積といった概念の抽象化あるいは精密化である。σ-加法族と違い簡単には作ることができないため、適切な集合族の上で定義された「前測度」を拡張して構成されることが多い。より広い意味ではバナッハ空間に値を持つ測度などが定義されるが、ここでは単純に $[0,\infty]$ 値のものを考える。

S を空でない集合とする。一般に集合族 $\emptyset \in \mathscr{G} \subset 2^S$ から $[0,\infty]$ への写像 μ のことを集合函数という。集合函数の性質について述べた定義はいくつかあるので、適宜紹介していこうと思う。集合 A, B は $A \cap B = \emptyset$ のとき互いに素であるという。

(1) $\mu(\emptyset) = 0$ のとき μ は正値（positive）であるという。

(2) 互いに素な $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{G}$ に対し、

$$A := \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{G} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$$

が成り立つとき μ は有限加法的（finite-additive）であるという。

(3) 互いに素な $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ に対し、

$$A := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{G} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

が成り立つとき μ は可算加法的（countable-additive）であるという。

定義 1.1.8

$\mathscr{A} \subset 2^S$ を σ-加法族とする。集合函数 $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ が正値かつ可算加法的であるとき、μ は $\mathscr{A}$ 上の測度（measure）、あるいは μ を可測空間 $(S, \mathscr{A})$ 上の測度といい、組 $(S, \mathscr{A}, \mu)$ を測度空間と呼ぶ。

例えば次のようなものがある。

(1) 可測な集合に対して 0 を対応させる写像は測度になる。これを自明測度と呼ぶ。

(2) $A \in \mathscr{A}$ が有限集合なら元の個数を対応させ、無限集合のときは ∞ を対応させると測度になる。これを数え上げ測度（counting measure）と呼ぶ。

(3) $x \in S$ に対して写像 $\delta_x\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ を、$x \in A$ なら $\delta_x(A) = 1$ と定め、$x \notin A$ なら $\delta_x(A) = 0$ と定めると測度になる。これをディラック測度（Dirac's measure）と呼ぶ。

圏 **meas** に替わるものを考えるとき、測度空間を対象とするものは当然その候補となる。射に関して言うと、圏 **meas** への忘却函手の存在という観点からすれば、可測写像であることはもちろん前提となるだろう。ここで問題となるのはその範囲をどうするかである。以下 $(S, \mathscr{A}, \mu_S), (T, \mathscr{B}, \mu_T)$ を測度空間、$f\colon S \to T$ を可測写像としよう。測度の情報をなるべく取り入れるのであれば、測度

保存 $\mu_S(f^{-1}(B)) = \mu_T(B)$（$B \in \mathscr{B}$）を仮定すると良く、実際いくつかの論文ではこれが仮定されている。ただこれでは射が少なすぎる気がしなくもない。そこで測度空間を対象とする 3 つの圏を定める。

(1) 任意の $B \in \mathscr{B}$ について $\mu_S(f^{-1}(B)) = \mu_T(B)$ を満たす（測度保存な）可測写像を射とする圏を $\mathbf{Meas}_=$ と記す。
(2) 任意の $B \in \mathscr{B}$ について $\mu_S(f^{-1}(B)) \leq \mu_T(B)$ を満たす（測度増大な）可測写像を射とする圏を $\mathbf{Meas}_\leq$ と記す。
(3) 任意の可測写像を射とする圏を $\mathbf{Meas}$ と記す。

これらの圏は可測空間の圏 $\mathbf{meas}$ よりずっと豊かな構造を持つ。そのため与えられた 2 つの測度空間が積対象を持つかどうかでさえ簡単には述べることができない。

1.2 外測度と測度

この節より用いる集合函数に関する諸定義を述べておこう。S を空でない集合とする。$\emptyset \in \mathscr{G} \subset 2^S$ とし、$\mu \colon \mathscr{G} \to [0, \infty]$ を集合函数とする。

(1) $A, B \in \mathscr{G}$ について $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$ が成り立つとき μ は単調（monotone）であるという。

(2) $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{G}$ に対し、

$$A := \bigcup_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{G} \Rightarrow \mu(A) \le \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$$

が成り立つとき μ は有限劣加法的（finite-subadditive）であるという。

(3) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ に対し、

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{G} \Rightarrow \mu(A) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

が成り立つとき μ は可算劣加法的（countable-subadditive）であるという。

σ-加法族上の測度は上記の性質を全て満たしている。

1.2.1 外測度

定義 1.2.1

集合函数 $\mu \colon 2^S \to [0, \infty]$ が正値、単調、可算劣加法的のとき、外測度（outer measure）あるいはカラテオドリ（Caratheodory's）の外測度と呼ぶ。

測度の概念については、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の n 次元体積が念頭にあることは言うまでもない。まず矩形に対し、各辺の「長さ」の積をその体積とする。ここである図形 A の体積が知りたければ、十分小さな矩形で覆い、その体積の和を調べ、更にその下限を取ることで「外側の体積」とする。これが外測度を導入する理由である。

以下 $\emptyset \in \mathscr{E} \subset 2^S$ とする。$A \subset S$ について、$\mathscr{C} \subset \mathscr{E}$ が A の被覆であるとは、$\mathscr{C}$ が可算集合であり、$A \subset \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$ を満たすこととする。

補題 1.2.2

$\emptyset \in \mathscr{E} \subset 2^S$ とする。$\mathscr{E}$ 上の集合函数 $\mu_0 \colon \mathscr{E} \to [0,\infty]$ は正値とする。このとき集合函数 $\mu \colon 2^S \to [0,\infty]$ を

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu_0(C) : \mathscr{C} \subset \mathscr{E} \text{は} A \text{の被覆} \right\}$$

と定める。（ただし A が $\mathscr{E}$ の可算個の元で覆えないときは $\mu(A) := \infty$ と定める。）このとき μ は外測度となる。

（証明）$\mathscr{C} = \{\emptyset\}$ を取れば $\emptyset$ の被覆となるから $\mu(\emptyset) \le \mu_0(\emptyset) = 0$ なので正値である。

また $A \subset B$ に対して B の被覆は A の被覆でもあるから単調性も従う。

可算劣加法的であることを示すために $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^S$ を取り $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする。正の実数 $\varepsilon > 0$ を固定する。このとき A_n の被覆 $\mathscr{C}_n$ を、

$$\sum_{C \in \mathscr{C}_n} \mu_0(C) \le \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たすように取れる。（A_n の何れかが $\mathscr{E}$ の可算個の元で覆えないときは A も覆えないため、$\infty \le \infty$ となり主張は正しい。）このとき $\mathscr{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n$ は A の被覆であり、

$$\begin{aligned}\mu(A) &\le \sum_{C\in\mathscr{C}} \mu_0(C) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{C\in\mathscr{C}_n} \mu_0(C) \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) + \varepsilon\end{aligned}$$

となる。ε は任意だから $\mu(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ を得る。□

一般に $E \in \mathscr{E}$ なら $\{E\}$ が E の被覆となるので $\mu(E) \le \mu_0(E)$ が成り立つ。

補題の方法で定義された外測度を $\mu_0 \colon \mathscr{E} \to [0,\infty]$ から誘導された外測度と呼ぶこともある。この値については次の特徴付けがある。

命題 1.2.3

$\emptyset \in \mathscr{E} \subset 2^S$ とする。μ を $\mu_0 \colon \mathscr{E} \to [0,\infty]$ から誘導された外測度とする。このとき $B \subset S$ について

$$\mu(B) = \inf\{\mu(A) : A \in \sigma[\mathscr{E}], B \subset A\}$$

が成り立つ。特にこの式を実現する $A \in \sigma[\mathscr{E}]$ が存在する。

（証明）まず $A \in \sigma[\mathscr{E}]$ が $B \subset A$ を満たすとする。外測度は単調だから $\mu(B) \leq \mu(A)$ が従う。特に（左辺）$\leq$（右辺）であり、また逆を示すときには $\mu(B) < \infty$ としてよいことが分かる。このとき $\mathscr{C} \subset \mathscr{E}$ を B の被覆とする。すると σ-加法性より $B \subset \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C \in \sigma[\mathscr{E}]$ であるから、

$$\inf\{\mu(A) : A \in \sigma[\mathscr{E}], B \subset A\} \leq \mu\left(\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C\right) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu(C) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu_0(C)$$

を得る。被覆の下限を取れば（左辺）$\geq$（右辺）も分かる。

今示した式より、$\{A_n\} \subset \sigma[\mathscr{E}]$ として $B \subset A_n$ 及び $\mu(A_n) \searrow \mu(B)$ を満たすものが取れる。このとき $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma[\mathscr{E}]$ について、$B \subset A \subset A_n$ だから単調性より $\mu(B) \leq \mu(A) \leq \mu(A_n)$ が成り立つ。特に右辺は $\mu(B)$ へ収束するから $\mu(A) = \mu(B)$ が従う。□

1.2.2 外測度による測度の構成

次の定義を導入したことこそ、カラテオドリの偉大なところであろう。私自身はこの定義についてよく理解していないのだが。

定義 1.2.4

外測度 μ に対し、$A \subset S$ がカラテオドリ可測、あるいは μ-可測であるとは、任意の $E \subset S$ について $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \backslash A)$ が成り立つことをいう。

根源的な着想はルベーグに依るらしい。ルベーグ自身は E として矩形を考えていた。

ところで $E = (E \cap A) \cup (E \backslash A)$ であるから、外測度の可算劣加法性より $\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \backslash A)$ は常に成り立つ。つまりカラテオドリ可測であることを示すには $\mu(E) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \backslash A)$ を示せば十分である。

補題 1.2.5

$A, B \subset S$ とする。A がカラテオドリ可測なら、任意の $E \subset S$ について

$$\mu(E \cap (A \cup B)) = \mu(E \cap A) + \mu((E \backslash A) \cap B)$$

が成り立つ。特に A と B が互いに素なら

$$\mu(E \cap (A \sqcup B)) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$$

が成り立つ。

（証明）A がカラテオドリ可測なら、任意の $E \subset S$ について

$$\begin{aligned}\mu(E \cap (A \cup B)) &= \mu((E \cap (A \cup B)) \cap A) + \mu((E \cap (A \cup B)) \backslash A) \\ &= \mu(E \cap A) + \mu((E \backslash A) \cap B)\end{aligned}$$

が従う。□

定理 1.2.6

外測度 $\mu \colon 2^S \to [0, \infty]$ について、$\mathscr{M}_\mu$ をカラテオドリ可測な集合全体とする。このとき $\mathscr{M}_\mu$ は σ-加法族であり、μ の $\mathscr{M}_\mu$ への制限は可測空間 $(S, \mathscr{M}_\mu)$ 上の測度となる。

（証明）まず $E \subset S$ について $\mu(E \cap \emptyset) + \mu(E \backslash \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(E) = \mu(E)$ より $\emptyset$ はカラテオドリ可測である。

また A がカラテオドリ可測なら

$$\mu(E \cap (S \backslash A)) + \mu(E \backslash (S \backslash A)) = \mu(E \backslash A) + \mu(E \cap A) = \mu(E)$$

より $S \backslash A$ もカラテオドリ可測となる。

次に $\mathscr{M}_\mu$ が有限和に関して閉じていることを述べる。A, B をカラテオドリ可測とすると、補題より任意の $E \subset S$ について

$$\mu(E \cap (A \cup B)) = \mu(E \cap A) + \mu((E \backslash A) \cap B)$$

が成り立つ。一方 $E \backslash (A \cup B) = (E \backslash A) \backslash B$ であるから、

$$\mu(E \cap (A \cup B)) + \mu(E \backslash (A \cup B)) = \mu(E \cap A) + \mu((E \backslash A) \cap B) + \mu((E \backslash A) \backslash B)$$

となる。右辺は B の μ-可測性より $\mu(E \cap A) + \mu(E \backslash A)$ となり、これは再び A の μ-可測性より $\mu(E)$ と一致する。従って $A \cup B$ はカラテオドリ可測となる。あとはこれを繰り返せば良い。

ここまでの議論で、$\mathscr{M}_\mu$ は有限加法族と呼ばれる集合族になることが分かる。（有限加法族についてはまた改めて議論するが、σ-加法族の条件で可算和の代わりに有限和としたもの。）有限加法族 $\mathscr{A}$ に対しては、有限交叉や差集合で閉じている。実際 $A, B \in \mathscr{A}$ に対して $S = S \backslash \emptyset \in \mathscr{A}$ であり、$A \cap B = A \backslash (S \backslash B) \in \mathscr{A}$ であり、$A \backslash B = S \backslash ((S \backslash A) \cup B) \in \mathscr{A}$ である。

ここで μ の $\mathscr{M}_\mu$ への制限を ν と書くことにする。$\nu \colon \mathscr{M}_\mu \to [0, \infty]$ は有限加法的である。実際 $A, B \in \mathscr{M}_\mu$ について、補題より任意の $E \subset S$ について

$$\mu(E \cap (A \sqcup B)) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$$

が成り立つ。特に $E=S$ と置けば

$$\nu(A\sqcup B)=\mu(A\sqcup B)=\mu(A)+\mu(B)=\nu(A)+\nu(B)$$

が分かる。$\mathscr{M}_\mu$ は有限加法族なので m 個の和を 2 個ずつ考えれば ν が有限加法的であることも分かる。

さて $\mathscr{M}_\mu$ が σ-加法族であることを示すために $\{A_n\}\subset\mathscr{M}_\mu$ を取る。$B_m:=\bigcup_{n=1}^m A_n$ と置けば、B_m はカラテオドリ可測であり $B_m\nearrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=:B$ である。ここで

$$C_1:=B_1, C_n:=B_n\backslash B_{n-1}$$

と定めれば C_n もカラテオドリ可測であり、$B_m=\bigsqcup_{n=1}^m C_n$ と非交叉和で書ける。補題より任意の $E\subset S$ に対して

$$\mu(E\cap B_m)=\sum_{n=1}^m\mu(E\cap C_n)$$

が成り立つ。単調性より $\mu(E\backslash B)\leq\mu(E\backslash B_m)$ が成り立つので、B_m の μ-可測性より

$$\mu(E)=\mu(E\cap B_m)+\mu(E\backslash B_m)\geq\sum_{n=1}^m\mu(E\cap C_n)+\mu(E\backslash B)$$

となる。m は任意だから $\mu(E)\geq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(E\cap C_n)+\mu(E\backslash B)$ となる。ここで

$$E\cap B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E\cap C_n)$$

だから、外測度の可算劣加法性より $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(E\cap C_n)\geq\mu(E\cap B)$ が成り立つ。従って $\mu(E)\geq\mu(E\cap B)+\mu(E\backslash B)$ となり、これは B がカラテオドリ可測であることを意味している。

最後に ν が可算加法的であることを示すために、互いに素な $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{M}_\mu$ を取る。$\mathscr{M}_\mu$ は σ-加法族であるから $A:=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathscr{M}_\mu$ である。外測度の可算劣加法性より

$$\nu(A)=\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(A_n)$$

である。また単調性及び ν が有限加法的であることから

$$\nu(A)=\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\geq\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^m A_n\right)=\nu\left(\bigsqcup_{n=1}^m A_n\right)=\sum_{n=1}^m\nu(A_n)$$

が分かる。m は任意だから $\nu(A)\geq\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(A_n)$ を得る。□

1.3 有限加法族と測度

この節より用いる集合函数に関する諸定義を述べておこう。S を空でない集合とする。$\emptyset \in \mathscr{G} \subset 2^S$ とし、$\mu \colon \mathscr{G} \to [0, \infty]$ を集合函数とする。

(1) 互いに素な $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ に対し、

$$A := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{G} \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

が成り立つとき μ は弱可算劣加法的（weak countable-subadditive）であるという。

(2) 互いに素な $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ に対し、

$$A := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{G} \Rightarrow \mu(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

が成り立つとき μ は弱可算優加法的（weak countable-superadditive）であるという。

(3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ に対し、

$$A_n \nearrow A \in \mathscr{G} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

が成り立つとき μ は増大列連続であるという。

(4) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ に対し、

$$A_n \searrow A \in \mathscr{G}, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

が成り立つとき μ は減少列連続であるという。

減少列連続は $\mu(A_1) < \infty$ を仮定しているので注意すること。

1.3.1 有限加法族

さて測度は外測度より構成できるのだが、その値については簡単な特徴付けがあるくらいで、具体的な値を求めることは難しい。そこで基本となる集合族のクラスを絞り、その上に測度の類似物を与えることで、測度への拡張問題として捉えなおす。これは例えば $\mathbb{R}$ 上の a から b までの区間に対し $|b-a|$ を対応させるようなことを考える。

前節の定理の証明中でも軽く触れたが、有限加法族とは σ-加法族の条件のうち可算和を有限和に置き換えたものを満たすクラスのことである。このクラスにおいても測度の類似物を考えることができ、これを「有限加法族上の前測度」という。前測度という言葉は標語的に用いるもので、より正確を期するには「有限加法族上の正値有限加法的集合函数」と述べるべきだろう。

この節で述べる「有限加法族上の前測度」について成り立つ性質は、もちろん σ-加法族上の測度に対しても成り立つ。

定義 1.3.1

集合 S において $\mathscr{A} \subset 2^S$ が次の 3 条件を満たすとき、$\mathscr{A}$ は S 上の有限加法族であるという。

(1) $\emptyset \in \mathscr{A}$ である。

(2) $A \in \mathscr{A}$ なら $S \backslash A \in \mathscr{A}$ である。

(3) $A, B \in \mathscr{A}$ なら $A \cup B \in \mathscr{A}$ である。

有限加法族は、有限交叉や差集合で閉じている。つまり $A, B \in \mathscr{A}$ なら $A \cap B, A \backslash B \in \mathscr{A}$ が成り立つ。

有限加法族も歴史的経緯から名前が安定しない。集合代数や集合体とも呼ばれる。

注意 1.3.2

有限加法族 $\mathscr{A}$ 上の集合函数 $\mu \colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ に関して、次は同値となる。

(a) μ は有限加法的である。

(b) 互いに素な $A, B \in \mathscr{A}$ について $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ が成り立つ。

また同様に次も同値となる。

(a) μ は有限劣加法的である。

(b) $A, B \in \mathscr{A}$ について $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ が成り立つ。

この注意は前節の定理の証明中にも暗に使用している。

1.3.2 有限加法族上の前測度

定義 1.3.3

$\mathscr{A} \subset 2^S$ を有限加法族とする。集合函数 $\mu \colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ が正値かつ有限加法的であるとき、μ は有限加法族 $\mathscr{A}$ 上の前測度（premeasure）あるいはジョルダン測度という。

有限加法族上の前測度は単調かつ有限劣加法的である。実際 $A, B \in \mathscr{A}$ について

$$A \subset B \Rightarrow \mu(B) = \mu(A \sqcup (B \backslash A)) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A)$$

である。また

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \sqcup (B \backslash A)) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

である。

補題 1.3.4

μ は有限加法族 $\mathscr{A} \subset 2^S$ 上の前測度とする。以下は同値である。

(a) μ は可算加法的である。

(b) μ は可算劣加法的である。

(c) μ は弱可算劣加法的である。

（証明）(a) なら (b)、(b) なら (c) は明白なので (c) なら (a) を示そう。そのためには弱可算優加法的であることを示せば良い。$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ は互いに素であるとし、$A := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ であるとする。μ は単調かつ有限加法的なので、m に対して

$$\mu(A) \geq \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

が成り立つ。m は任意なので $\mu(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ が成り立つ。□

既に外測度から測度を構成できることを示したが、この定理を用いると有限加法族上の前測度に対し、その拡張となる測度を構成するための必要十分条件を得ることが出来る。

定理 1.3.5: ホップの拡張定理

μ は有限加法族 $\mathscr{A} \subset 2^S$ 上の前測度とする。以下は同値である。

(a) $\sigma[\mathscr{A}]$ 上の測度 $\widehat{\mu}$ が存在して $\widehat{\mu}|_{\mathscr{A}} = \mu$ を満たす。つまり $A \in \mathscr{A}$ なら $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ が成り立つ。

(b) μ は弱可算劣加法的である。

（証明）(a) から (b) は明らかなので逆を示す。

$\mu \colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ から誘導される外測度を $\widehat{\mu}$ と置く。このとき $\widehat{\mu}$-可測集合全体 $\mathscr{M}_{\widehat{\mu}}$ は σ-加法族であり、$\widehat{\mu}$ はその上の測度となる。

まず $\sigma[\mathscr{A}] \subset \mathscr{M}_{\widehat{\mu}}$ を示そう。そのためには最小性より $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_{\widehat{\mu}}$ を示せば十分である。$A \in \mathscr{A}$ 及び $E \subset S$ を取る。更に E の被覆 $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ を取れば、$\mathscr{A}$ は有限加法族であるから $\{C \cap A : C \in \mathscr{C}\}, \{C \backslash A : C \in \mathscr{C}\}$ はそれぞれ $E \cap A, E \backslash A$ の被覆となる。更に μ は有限加法的だから

$$\widehat{\mu}(E \cap A) + \widehat{\mu}(E \backslash A) \leq \sum_{C\in\mathscr{C}} (\mu(C \cap A) + \mu(C \backslash A)) = \sum_{C\in\mathscr{C}} \mu(C)$$

となる。右辺の下限を取れば $\widehat{\mu}(E)$ となるため、A はカラテオドリ可測であることが分かる。

以上により $\widehat{\mu}$ は $\sigma[\mathscr{A}]$ 上の測度となることが分かった。最後に $\mathscr{A}$ 上での値を見てみよう。

まず $A \in \mathscr{A}$ に対して定義より $\widehat{\mu}(A) \leq \mu(A)$ が成り立つ。逆に A の被覆 $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ に対して

$$A = A \cap \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} (A \cap C)$$

となるが、ここで補題より μ の弱可算劣加法性は可算加法性、特に可算劣加法性と同値であった。故に $A \cap C \in \mathscr{A}$ 及び単調性から

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{C \in \mathscr{C}} (A \cap C)\right) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu(A \cap C) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu(C)$$

が従う。右辺の下限を取れば $\mu(A) \leq \widehat{\mu}(A)$ を得る。□

こうして有限加法族とその上の前測度が与えられたとき、その拡張となる σ-加法族とその上の測度が存在することが示された。ちなみに拡張の一意性までは言えない。

更に次の命題も成り立つ。つまり前測度が測度に拡張されることは、集合族に対するある種の連続性のようなものが成り立つことを意味している。

命題 1.3.6

μ は有限加法族 $\mathscr{A} \subset 2^S$ 上の前測度とする。以下は同値である。

(a) μ は可算加法的である。

(b) μ は増大列連続かつ減少列連続である。

(c) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ に対し、

$$A_n \nearrow A \in \mathscr{A}, \mu(A) = \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \infty$$
$$A_n \searrow \emptyset, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$$

が成り立つ。

(証明) (a) なら (b) が成り立つことを示そう。まず増大列連続であることを示す。$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ が $A_n \nearrow A \in \mathscr{A}$ を満たすとする。$A = A_1 \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{n+1} \backslash A_n)$ だから、μ の可算加法性より $\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_{n+1} \backslash A_n)$ となる。一方 $A_n = A_1 \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n} (A_{k+1} \backslash A_k)$ だから

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{k+1} \backslash A_k) = \mu(A)$$

を得る。次に減少列連続であることを示そう。$B_n \searrow B \in \mathscr{A}, \mu(B_1) < \infty$ とする。$B_n = B \sqcup \bigsqcup_{k \geq n} (B_k \backslash B_{k+1})$ だから、可算加法性より特に $n = 1$ として $\infty > \mu(B_1) \geq$

$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n\backslash B_{n+1})$ が従う。つまり $\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq n}\mu(B_k\backslash B_{k+1})=0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\mu(B)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq n}\mu(B_k\backslash B_{k+1})=\mu(B)$$

を得る。

(b) なら (c) は定義より明らか。

(c) なら (a) が成り立つことを示そう。$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{A}$ は互いに素であるとし、$A:=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathscr{A}$ であるとする。$B_m:=\bigsqcup_{n=1}^{m}A_n\in\mathscr{A}$ とすると $B_m\nearrow A$ である。$\mu(A)=\infty$ のとき仮定より

$$\mu(A)=\infty=\lim_{m\to\infty}\mu(B_m)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\mu(A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$$

となる。$\mu(A)<\infty$ のときは $C_1:=A, C_{m+1}:=A\backslash B_m$ とすると $C_m\searrow\emptyset$ かつ $\mu(C_1)=\mu(A)<\infty$ である。特に $B_m\subset A$ なので $\mu(C_{m+1})=\mu(A)-\mu(B_m)$ が成り立つ。仮定より $\lim_{m\to\infty}\mu(C_m)=0$ だから

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)=\lim_{m\to\infty}\mu(B_m)=\mu(A)-\lim_{m\to\infty}\mu(C_{m+1})=\mu(A)$$

となる。□

1.4 半加法族と測度

ホップの拡張定理が述べていることは、有限加法族上の前測度について σ-加法族上の測度へと拡張できるかは簡単な条件で調べることが出来るということだった。しかし有限加法族上の前測度でさえ、簡単には与えることはできない。そこで更に簡単な集合族のクラスとその上の前測度より、有限加法族上の前測度を構成すること、および σ-加法族上の測度へと拡張することを考えたい。

有限加法族については前節で述べたが、ここではその生成について述べておこう。まず有限加法族も σ-加法族と同様に、任意の交叉で有限加法族となる。

定義 1.4.1

$\mathscr{G} \subset 2^S$ について、$\mathscr{G}$ を含む S 上の有限加法族全体の交叉を $\sigma_0[\mathscr{G}]_S$、あるいは単に $\sigma_0[\mathscr{G}]$ で記し、$\mathscr{G}$ により S 上で生成された有限加法族と呼ぶ。

特に $\sigma_0[\mathscr{G}]$ は $\mathscr{G}$ を含む最小の有限加法族となる。

1.4.1 半加法族

定義 1.4.2

集合 S において $\mathscr{S} \subset 2^S$ が次の 3 条件を満たすとき、$\mathscr{S}$ は S 上の半加法族であるという。

(1) $\emptyset \in \mathscr{S}$ である。

(2) $A, B \in \mathscr{S}$ なら $A \cap B \in \mathscr{S}$ である。

(3) $A \in \mathscr{S}$ なら有限個の互いに素な元 $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ を用いて $S \backslash A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ と表せる。

この定義がどこから来るのか疑問に思うかもしれないが、一つの理由としては拡張定理の証明にある。証明では有限加法族の性質を、まず $\{C \cap A\}, \{C \backslash A\}$ が $E \cap A, E \backslash A$ の被覆であることを示すのに用いた。そこで $C \backslash A = C \cap (S \backslash A)$ に注意しつつ、有限加法族の 2 番目の条件を緩めたのが上の定義になる。被覆となるためには $S \backslash A$ 自身が $\mathscr{A}$ の元である必要はなく、$\mathscr{A}$ による有限和で表せればよいという発想である。

半加法族も名前が安定しない。集合半代数などと呼ばれたこともある。

$\mathscr{S} \subset 2^S$ を半加法族とする。$A, B \in \mathscr{S}$ に対し、半加法族の定義より $S \backslash B = \bigsqcup_{i=1}^m B_i$ と表せる。従って

$$A \backslash B = A \cap (S \backslash B) = A \cap \bigsqcup_{i=1}^m B_i = \bigsqcup_{i=1}^m (A \cap B_i)$$

となるが、右辺は $A \backslash B$ が $\mathscr{S}$ による非交叉有限和で表せることを意味している。(この性質は後で半環の節で述べる。) これより半加法族において、非自明だが面白い性質を示すことができる。

補題 1.4.3

$\mathscr{S} \subset 2^S$ を半加法族とする。任意の $A \in \mathscr{S}$ 及び $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ に対し、互いに素な $B_1, \ldots, B_m \in \mathscr{S}$ が存在して

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$$

と表せる。

（証明）上の議論より $A\setminus A_1 = \bigsqcup_{j=1}^m C_j$ なる互いに素な $\{C_j\} \subset \mathscr{S}$ が取れる。$(A\setminus A_1)\setminus A_2 = \bigsqcup_{j=1}^m (C_j\setminus A_2)$ より、再び $C_j\setminus A_2 = \bigsqcup_{k=1}^{m_j} D_{j,k}$ なる互いに素な $\{D_{j,k} : k = 1, \ldots, m_j\} \subset \mathscr{S}$ が取れて、$(A\setminus A_1)\setminus A_2 = \bigsqcup_{j=1}^m \bigsqcup_{k=1}^{m_j} D_{j,k}$ を満たす。このとき $\{D_{j,k}\} \subset \mathscr{S}$ は互いに素である。以上を繰り返せば良い。□

半加法族の生成する有限加法族は、元の形が良く分かる集合になっている。

命題 1.4.4

$\mathscr{S} \subset 2^S$ を半加法族とする。このとき $\sigma_0[\mathscr{S}]$ は $\mathscr{S}$ の元の非交叉有限和で表される集合全体である。

（証明）$\mathscr{S}$ の元の非交叉有限和で表される集合全体を $\mathscr{A}$ と書く。$\sigma_0[\mathscr{S}] \supset \mathscr{A}$ は明らかなので逆を示そう。$\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ なので、$\mathscr{A}$ が有限加法族であることを示せば良い。$\emptyset \in \mathscr{A}$ は明白。$A, B \in \mathscr{A}$ に対して $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, B = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ （$A_i, B_j \in \mathscr{S}$）と表せば、$A \cap B = \bigsqcup_{i,j} A_i \cap B_j$ であり、$\mathscr{S}$ は半加法族だから $A_i \cap B_j \in \mathscr{S}$ である。従って $A \cap B \in \mathscr{A}$ が分かる。$S\setminus A = \bigcap_{i=1}^n (S\setminus A_i)$ だが、$A_i \in \mathscr{S}$ より $S\setminus A_i$ は $\mathscr{S}$ の元の非交叉有限和で表せる。つまり $S\setminus A_i \in \mathscr{A}$ である。既に示したように $\mathscr{A}$ は有限交叉で閉じているから $S\setminus A \in \mathscr{A}$ である。以上により $\mathscr{A}$ は有限加法族であり、生成の最小性から $\sigma_0[\mathscr{S}] = \mathscr{A}$ を得る。□

1.4.2　半加法族上の前測度

定義 1.4.5

$\mathscr{S} \subset 2^S$ を半加法族とする。集合函数 $\mu\colon \mathscr{S} \to [0, \infty]$ が正値かつ有限加法的であるとき、μ は半加法族 $\mathscr{S}$ 上の前測度という。

有限加法族上の前測度のときとは違い、有限加法性は「互いに素な $A, B \in \mathscr{S}$ に対して $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ が成り立つ」を条件にすることはできない。

半加法族上の前測度は単調かつ有限劣加法的であるが、少し一般的な形で述べておくと便利である。

命題 1.4.6

μ を半加法族 $\mathscr{S} \subset 2^S$ 上の前測度とする。次が成り立つ。

(1) $A \in \mathscr{S}$ 及び互いに素な $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{S}$ に対し、

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$$

が成り立つ。

(2) $B \in \mathscr{S}$ 及び $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{S}$ に対し、

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow \mu(B) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$

が成り立つ。

特に μ は単調かつ有限劣加法的である。

（証明）補題より互いに素な $D_1, \dots, D_m \in \mathscr{S}$ が存在して $A \backslash \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} D_j$ と表せる。$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$ とする。このとき $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{m} D_j$ であり、μ は有限加法的であるから

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu(D_j) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

が成り立つ。

$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ とする。$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap B_i)$ なので、

$$C_i := (B \cap B_i) \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} (B \cap B_j)$$

と置けば、$B = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$ と互いに素な和で表せる。ここで $B \cap B_j \in \mathscr{S}$ だから、補題より互いに素な $\{D_{i,j} : j = 1, \dots, n_i\} \subset \mathscr{S}$ が存在して $C_i = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} D_{i,j}$ と表せる。μ は有限加法的であり、$\bigsqcup_{j=1}^{n_i} D_{i,j} = C_i \subset B_i$ であるから、上の結果より

$$\mu(B) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{n_i} D_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \mu(D_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$

が成り立つ。□

半加法族 $\mathscr{S} \subset 2^S$ について $\sigma_0[\mathscr{S}]$ は $\mathscr{S}$ の元の非交叉有限和として表される集合全体だったことを思い出そう。つまり $A \in \sigma_0[\mathscr{S}]$ について互いに素な $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ が存在して $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ と表せる。

命題 1.4.7

μ を半加法族 $\mathscr{S} \subset 2^S$ 上の前測度とする。集合函数 $\mu_0 \colon \sigma_0[\mathscr{S}] \to [0, \infty]$ を $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \in \sigma_0[\mathscr{S}]$ に対し、

$$\sigma_0(A) = \sigma_0 \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

で定める。このとき μ_0 は有限加法族 $\sigma_0[\mathscr{S}]$ 上の前測度となる。

（証明）μ_0 が well-defined であることを示そう。すなわち $\mu_0(A)$ が A の表示に依らないことを示す。$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{j=1}^m A'_j$ とする。μ は有限加法的であるから

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap A'_j) = \sum_{j=1}^m A'_j$$

となり、表示に依らないことが分かる。

$\mu_0(\emptyset) = 0$ は明白。$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, B = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ は互いに素であるとする。$\{A_i, B_j\}$ も互いに素だから、

$$\mu_0(A \sqcup B) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \mu(B_j) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$$

を得る。□

上記命題において、定義から明らかに μ の拡張となる $\sigma_0[\mathscr{S}]$ 上の前測度は一意的であることが分かる。

補題 1.4.8

μ を半加法族 $\mathscr{S} \subset 2^S$ 上の前測度、その拡張を $\mu_0 \colon \sigma_0[\mathscr{S}] \to [0, \infty]$ とする。このとき以下は同値である。

(a) μ_0 は可算加法的である。

(b) μ は弱可算劣加法的である。

（証明）上から下は明らかなので逆を示そう。互いに素な $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma_0[\mathscr{S}]$ を取り、$B := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma_0[\mathscr{S}]$ とする。このときある有限集合 $\mathscr{A}_n, \mathscr{B} \subset \mathscr{S}$ が存在して

$$A_n = \bigsqcup_{G\in\mathscr{A}_n} G, \qquad B = \bigsqcup_{H\in\mathscr{B}} H$$

と表せる。

まず $\mathscr{A} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ だから、

$$\bigsqcup_{H\in\mathscr{B}} H = B = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{G\in\mathscr{A}_n} G = \bigsqcup_{G\in\mathscr{A}} G$$

が成り立つ。ここで $H \in \mathscr{B}$ について $H = \bigsqcup_{G\in\mathscr{A}} (G\cap H)$ である。$\mathscr{S}$ は半加法族だから $G\cap H \in \mathscr{S}$ であり、従って仮定より

$$\mu(H) \leq \sum_{G\in\mathscr{A}} \mu(G\cap H)$$

を得る。同様に $G \in \mathscr{A}$ について $G = \bigsqcup_{H\in\mathscr{B}} (H\cap G)$ であり、μ は有限加法的だから $\mu(G) = \sum_{H\in\mathscr{B}} \mu(H\cap G)$ を得る。以上より

$$\begin{aligned}
\mu_0(B) &= \sum_{H\in\mathscr{B}} \mu(H) \leq \sum_{H\in\mathscr{B}} \sum_{G\in\mathscr{A}} \mu(G\cap H) \\
&= \sum_{G\in\mathscr{A}} \mu(G) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{G\in\mathscr{A}_n} \mu(G) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n)
\end{aligned}$$

となる。（ここで非負実数に関する和の順序の交換可能性を用いた。）つまり μ_0 は弱可算劣加法的である。μ_0 は有限加法族上の前測度だから、これは可算加法的であることと同値である。□

補題より半加法族上の前測度について、可算加法性、可算劣加法性、弱可算劣加法性は全て同値となる。

定理 1.4.9: 半加法族上の前測度に対する拡張定理

μ は半加法族 $\mathscr{S} \subset 2^S$ 上の前測度とする。以下は同値である。

(a) $\sigma[\mathscr{S}] = \sigma[\sigma_0[\mathscr{S}]]$ 上の測度 $\widehat{\mu}$ が存在して $\widehat{\mu}|_{\mathscr{S}} = \mu$ を満たす。つまり $A \in \mathscr{S}$ なら $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ が成り立つ。

(b) μ は弱可算劣加法的である。

（証明）ホップの拡張定理の証明に沿って示すことが出来る。$\mu_0\colon \sigma_0[\mathscr{S}] \to [0,\infty]$ を μ の拡張とする。

まず外測度 $\widehat{\mu}$ の構成に関しては、μ から誘導される外測度も μ_0 から誘導される外測度も等しい。これは $\sigma_0[\mathscr{S}]$ の元が $\mathscr{S}$ の元の非交叉有限和で書けることに依る。

次に $\mathscr{S} \subset \mathscr{M}_{\widehat{\mu}}$ を示したい。$A \in \mathscr{S}$ 及び $E \subset S$ を取る。$\mathscr{S}$ は半加法族なので $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ が存在して $S \backslash A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ と表せる。E の被覆 $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ を取れば、$\{C \cap A : C \in \mathscr{C}\} \subset \mathscr{S}$ は $E \cap A$ の被覆となる。また $C \in \mathscr{C}$ について

$$C \backslash A = C \cap (S \backslash A) = C \cap \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{i=1}^n (C \cap A_i)$$

より $\{C \cap A_i : C \in \mathscr{C}, i = 1, \ldots, n\} \subset \mathscr{S}$ は $E \backslash A$ の被覆となる。故に

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(E \cap A) + \widehat{\mu}(E \backslash A) &\leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu(C \cap A) + \sum_{C \in \mathscr{C}} \sum_{i=1}^n \mu(C \cap A_i) \\ &= \sum_{C \in \mathscr{C}} \left(\mu(C \cap A) + \sum_{i=1}^n \mu(C \cap A_i) \right) \end{aligned}$$

となる。このとき

$$C = (C \cap A) \sqcup (C \backslash A) = (C \cap A) \sqcup (C \cap A_1) \sqcup \cdots \sqcup (C \cap A_n)$$

であるから、$C \in \mathscr{C}$ より μ の有限加法性が使えて結局

$$\mu(C \cap A) + \sum_{i=1}^n \mu(C \cap A_i) = \mu(C)$$

が従う。

残りの部分はホップの拡張定理と同様に従う。ただし補題より半加法族上でも μ の弱可算劣加法性が可算加法性と同値であることを用いる。□

1.5 積測度空間と測度の一致

1.5.1 積可測空間上の測度

測度空間 $(S,\mathscr{A},\mu_S)$ 及び $(T,\mathscr{B},\mu_T)$ に対して、積可測空間 $(S\times T,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ 上の測度を構成しよう。積 σ-加法族は

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\sigma[\mathscr{A}\times T\cup S\times\mathscr{B}]$$

と定義されるが、基となる集合族 $\mathscr{A}\times T\cup S\times\mathscr{B}$ はやや扱い難い。

命題 1.5.1

$S\in\mathscr{G}\subset 2^S, T\in\mathscr{H}\subset 2^T$ とする。このとき

$$\sigma[\mathscr{G}\times T\cup S\times\mathscr{H}]=\sigma[\mathscr{G}\times\mathscr{H}]$$

が成り立つ。特に $(S,\mathscr{A}),(T,\mathscr{B})$ が可測空間のとき

$$\sigma[\mathscr{A}\times T\cup S\times\mathscr{B}]=\sigma[\mathscr{A}\times\mathscr{B}]$$

が成り立つ。

（証明）$S\in\mathscr{G},T\in\mathscr{H}$ より $\mathscr{G}\times T\cup S\times\mathscr{H}\subset\mathscr{G}\times\mathscr{H}$ である。故に左辺は右辺を含む。$G\times H\in\mathscr{G}\times\mathscr{H}$ を取る。このとき

$$G\times H=G\times T\cap S\times H\in\sigma[\mathscr{G}\times T\cup S\times\mathscr{H}]$$

より、逆も成り立つ。□

$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ は次の意味で都合が良い。

命題 1.5.2

$(S,\mathscr{A}),(T,\mathscr{B})$ は可測空間とする。このとき $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ は半加法族である。

（証明）まず $\emptyset=\emptyset\times\emptyset\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ である。次に $A\times B,C\times D\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ に対し、

$$A\times B\cap C\times D=(A\cap C)\times(B\times D)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$$

である。また

$$(S\times T)\backslash(A\times B)=(S\backslash A)\times B\sqcup(S\backslash A)\times(T\backslash B)\sqcup(A\times(T\backslash B)$$

より、$\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ の元の非交叉有限和で書ける。従って $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ は半加法族である。□

さて、$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma[\mathscr{A} \times \mathscr{B}]$ 上の測度を構成するために拡張定理を用いることを考えたい。そのためにはまず、半加法族 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 上の前測度を与えなければならない。

補題 1.5.3

$(S, \mathscr{A}, \mu_S), (T, \mathscr{B}, \mu_T)$ を測度空間とする。このとき集合函数 $\mu\colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to [0, \infty]$ を、$A \times B \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ に対し

$$\mu(A \times B) := \mu_S(A)\mu_T(B)$$

で定めると、μ は半加法族 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 上の前測度となる。

（証明）正値であることは明らかなので、有限加法的であることを示す。$A_1 \times B_1, \ldots, A_n \times B_n \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ に対し、$\bigsqcup_{i=1}^n A_i \times B_i = A \times B \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ であるとする。このとき

$$\mu(A \times B) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i \times B_i)$$

が成り立つことを n に関する帰納法で示そう。

$n = 1$ のときは $\mu(A \times B) = \mu(A_1 \times B_1)$ より正しい。

$n = k$ に対して成り立つとして、$n = k + 1$ を考える。このとき

$$(A_{k+1} \times B_{k+1}) \sqcup \bigsqcup_{i=1}^k (A_i \times B_i) = A \times B$$

だから、

$$(A \backslash A_{k+1}) \times (B \backslash B_{k+1}) = \bigsqcup_{i=1}^k (A_i \backslash A_{k+1}) \times (B_i \backslash B_{k+1})$$

が成り立つ。帰納法の仮定より

$$\mu_S(A \backslash A_{k+1})\mu_T(B \backslash B_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \mu_S(A_i \backslash A_{k+1})\mu_T(B_i \backslash B_{k+1})$$

が成り立つ。同様にして

$$\mu_S(A \backslash A_{k+1})\mu_T(B \cap B_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \mu_S(A_i \backslash A_{k+1})\mu_T(B_i \cap B_{k+1})$$

$$\mu_S(A \cap A_{k+1})\mu_T(B \backslash B_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \mu_S(A_i \cap A_{k+1})\mu_T(B_i \backslash B_{k+1})$$

も成り立つ。ここで $i=1,\dots,k$ について $\mu_S(A_i\cap A_{k+1})\mu_T(B_i\cap B_{k+1})>0$ と仮定すると、

$$(A_i\cap A_{k+1})\times(B_i\cap B_{k+1})=(A_i\times B_i)\cap(A_{k+1}\times B_{k+1})\neq\emptyset$$

となり矛盾する。故に $\mu_S(A_i\cap A_{k+1})\mu_T(B_i\cap B_{k+1})=0$ であり、

$$\begin{aligned}
\mu(A\times B)&=\mu_S(A)\mu_T(B)\\
&=(\mu_S(A\backslash A_{k+1})+\mu_S(A\cap A_{k+1}))(\mu_T(B\backslash B_{k+1})+\mu_T(B\cap B_{k+1}))\\
&=\sum_{i=1}^{k}(\mu_S(A_i\backslash A_{k+1})+\mu_S(A_i\cap A_{k+1}))(\mu_T(B_i\backslash B_{k+1})+\mu_T(B_i\cap B_{k+1}))\\
&+\mu_S(A_{k+1})\mu_T(B_{k+1})\\
&=\sum_{i=1}^{k+1}\mu_S(A_i)\mu_T(B_i)
\end{aligned}$$

を得る。□

定理 1.5.4

上記補題の μ は弱可算劣加法的である。

（証明）集合 X 上の可算被覆 $\mathscr{C}\subset 2^X$ について考える。すなわち $\mathscr{C}=\{C_1,C_2,\dots\}$ は $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$ を満たすとする。写像 $f\colon X\to 2^{\mathbb{N}}$ を $x\in X$ に対し、$x\in C_n$ なら $f(x)_n:=1$、$x\notin C_n$ なら $f(x)_n:=0$ により定める。このとき f は単射であり、

$$f^{-1}(a)=\bigcap_{a_i=1}C_i\cap\bigcap_{a_i=0}(X\backslash C_i)$$

が成り立つ。特に $f^{-1}(0)=0$ であり、$X=\bigsqcup_{a\in 2^{\mathbb{N}}}f^{-1}(a)$ が成り立つ。

互いに素な $\{A_n\times B_n\}\subset\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ について、$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\times B_n=A\times B\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ であるとする。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=A,\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n=B$ より、写像 $f\colon A\to 2^{\mathbb{N}},g\colon B\to 2^{\mathbb{N}}$ を上記のように定めることができる。このとき $\mathscr{A},\mathscr{B}$ は σ-加法族だから、$f^{-1}(a)\in\mathscr{A},g^{-1}(b)\in\mathscr{B}$ が成

り立つ。μ_S, μ_T は測度だから可算加法的、つまり

$$
\begin{aligned}
\mu(A \times B) &= \mu_S(A)\mu_T(B) \\
&= \left(\sum_{a \in 2^{\mathbb{N}}} \mu_S(f^{-1}(a))\right)\left(\sum_{b \in 2^{\mathbb{N}}} \mu_T(g^{-1}(b))\right) \\
&= \sum_{a,b} \mu_S(f^{-1}(a))\mu_T(g^{-1}(b)) \\
&= \sum_{a,b} \mu(f^{-1}(a) \times g^{-1}(b))
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ところで $(x, y) \in A \times B$ について、ある n が存在して $(x, y) \in A_n \times B_n$ である。このとき $f(x)_n = g(y)_n = 1$ であるから、任意の n について $a_n \neq b_n$ となる a, b について $f^{-1}(a) \times g^{-1}(b) = \emptyset$ となる。従って

$$
\begin{aligned}
\sum_{a,b} \mu(f^{-1}(a) \times g^{-1}(b)) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{a_n = 1} \sum_{b_n = 1} \mu(f^{-1}(a) \times g^{-1}(b)) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{a_n = 1} \sum_{b_n = 1} \mu_S(f^{-1}(a))\mu_T(g^{-1}(b)) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_S(A_n)\mu_T(B_n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \times B_n)
\end{aligned}
$$

が分かる。以上より μ が弱可算劣加法的であることが示された。□

従って拡張定理より μ の拡張となる $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma[\mathscr{A} \times \mathscr{B}]$ 上の測度が存在する。これをもって測度空間 $(S, \mathscr{A}, \mu_S), (T, \mathscr{B}, \mu_T)$ の積としたいのだが、実は拡張は一意でない。

1.5.2 ディンキン族

定義 1.5.5

集合 S において $\mathscr{D} \subset 2^S$ が次の 3 条件を満たすとき、$\mathscr{D}$ は S 上のディンキン族であるという。

(1) $S \in \mathscr{D}$ である。

(2) $A, B \in \mathscr{D}, A \subset B$ なら $B \backslash A \in \mathscr{D}$ である。

(3) $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ が単調増大列（$D_1 \subset D_2 \subset \cdots$）なら $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathscr{D}$ である。

明らかに $\emptyset \in \mathscr{D}$ である。また σ-加法族はディンキン族である。

ディンキン族も任意の交叉でディンキン族となるため、生成を考えることができる。

定義 1.5.6

$\mathscr{G} \subset 2^S$ について、$\mathscr{S}$ を含むディンキン族全体の交叉を $D[\mathscr{G}]_S$、あるいは単に $D[\mathscr{G}]$ で記し、$\mathscr{G}$ により S 上で生成されたディンキン族と呼ぶ。

$D[\mathscr{G}]$ は $\mathscr{G}$ を含む最小のディンキン族である。

命題 1.5.7

$\mathscr{G} \subset 2^S$ とする。$A \in D[\mathscr{G}]$ に対して

$$\mathscr{D}_A := \{B \in D[\mathscr{G}] : A \cap B \in D[\mathscr{G}]\}$$

と定めると $\mathscr{D}_A$ はディンキン族となる。

（証明）$A \cap X = A \in D[\mathscr{G}]$ より $X \in \mathscr{D}_A$ である。$B, C \in D[\mathscr{G}], B \subset C$ に対して $A \cap (C \backslash B) = (A \cap C) \backslash (A \cap B)$ となる。ここで $A \cap B, A \cap C \in D[\mathscr{G}]$ は $A \cap B \subset A \cap C$ を満たすので、$C \backslash B \in \mathscr{D}_A$ が分かる。単調増大列 $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D[\mathscr{G}]$ を取る。$A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n)$ だが、これは単調増大列 $\{A \cap B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D[\mathscr{G}]$ の極限で表せる。故に $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathscr{D}_A$ も従う。$\square$

補題 1.5.8: ディンキンの補題

$\mathscr{G} \subset 2^S$ は有限交叉で閉じるとする。すなわち $G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}$ について、

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathscr{G}$$

であるとする。このとき $D[\mathscr{G}] = \sigma[\mathscr{G}]$ が成り立つ。

（証明）σ-加法族はディンキン族であるから、最小性より $D[\mathscr{G}] \subset \sigma[\mathscr{G}]$ である。逆は $D[\mathscr{G}]$ が σ-加法族であることを示せばよい。

$A \in \mathscr{G}$ とする。任意の $G \in \mathscr{G}$ に対し仮定より $A \cap G \in \mathscr{G} \subset D[\mathscr{G}]$ であるから $\mathscr{G} \subset \mathscr{D}_A$ が分かる。$\mathscr{D}_A$ はディンキン族だから最小性より $D[\mathscr{G}] \subset \mathscr{D}_A$ を得る。逆も定義より明らかなので、$A \in \mathscr{G}$ は $D[\mathscr{G}] = \mathscr{D}_A$ を満たす。

ここで

$$\mathscr{D} := \{A \in D[\mathscr{G}] : \mathscr{D}_A = D[\mathscr{G}]\}$$

と定める。上の議論より $\mathscr{G} \subset \mathscr{D}$ となる。そこで $\mathscr{D}$ が S 上のディンキン族となることを

示そう。$\mathscr{D}_X = D[\mathscr{G}]$ より $X \in \mathscr{D}$ である。$A, B \in \mathscr{D}, A \subset B$ とする。$G \in \mathscr{G}$ に対し $G \cap (B \backslash A) = (G \cap B) \backslash (G \cap A) \in D[\mathscr{G}]$ が成り立つ。故に $\mathscr{D}_{B \backslash A}$ は $\mathscr{G}$ を含むディンキン族となり $\mathscr{D}_{B \backslash A} = D[\mathscr{G}]$ を満たす。同様に単調増大列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ を取れば、$G \in \mathscr{G}$ に対し $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}) \cap G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (G \cap A_n)$ が成り立つ。これは単調増大列 $\{G \cap A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D[\mathscr{G}]$ の極限だから結局 $D[\mathscr{G}] = \mathscr{D}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}}$ を得る。以上により $\mathscr{D}$ は S 上のディンキン族となる。特に $\mathscr{G}$ を含むことから $\mathscr{D} = D[\mathscr{G}]$ が従う。

最後に $\mathscr{D}$ が σ-加法族であることを示そう。$A, B \in \mathscr{D}$ に対し、$A \backslash B = A \backslash (A \cap B) \in \mathscr{D}$ である。特に $\emptyset = X \backslash X \in \mathscr{D}$ となる。また $A \cup B = X \backslash ((X \backslash A) \cap (X \backslash B)) \in \mathscr{D}$ も分かる。$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ について、$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ と定めれば $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ は単調増大列となる。従って $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathscr{D}$ となる。$\square$

1.5.3 測度の一致

定義 1.5.9

単調な集合函数 $\mu \colon \mathscr{G} \to [0, \infty]$ に対し以下を定める。

(1) $S \in \mathscr{G}$ であり、$\mu(G) < \infty$ のとき μ は有限（finite）であるという。

(2) ある $\{G_n\} \subset \mathscr{G}$ が存在して $G_n \nearrow S, \mu(G_n) < \infty$ を満たすとき μ は σ-有限であるという。

命題 1.5.10

可測空間 $(S, \mathscr{A})$ 上の有限な測度 μ_1, μ_2 に対し、$\mu_1(S) = \mu_2(S)$ なら

$$\mathscr{D} := \{D \in \mathscr{A} : \mu_1(D) = \mu_2(D)\}$$

はディンキン族である。

（証明）定義より $S \in \mathscr{D}$ である。$A, B \in \mathscr{D}, A \subset B$ とする。μ_j は有限な測度だから $\mu_j(B \backslash A) = \mu_j(B) - \mu_j(A)$ となる。故に $B \backslash A \in \mathscr{D}$ となる。また単調増大列 $\{A_n\} \subset \mathscr{D}$ に対し、$A_0 := \emptyset, B_n := A_n \backslash A_{n-1}$ と定めれば

$$\mu_j\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}\right) = \mu_j\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_j(A_n \backslash A_{n-1})$$

が成り立つ。$A_n \backslash A_{n-1} \in \mathscr{D}$ より $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$ が従う。$\square$

定理 1.5.11

$\mathscr{G} \subset 2^S$ は有限交叉で閉じるとする。$\sigma[\mathscr{G}]$ 上の測度 μ_1, μ_2 は、$\mathscr{G}$ 上で一致し、更に $\mu_0 := \mu_j|_{\mathscr{G}}$ は σ-有限とする。このとき $\mu_1 = \mu_2$ が成り立つ。

（証明）単調増大な $\{G_n\} \subset \mathscr{G}$ を、$G_n \nearrow S, \mu_0(G_n) < \infty$ を満たすように取る。$A \in \sigma[\mathscr{G}]$ に対して $A \cap G_n \nearrow A$ であるから、増大列連続性より $\mu_j(A) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap G_n)$ が成り立つ。

$A \in \sigma[\mathscr{G}]$ に対して $\widetilde{\mu}_j(A) := \mu_j(A \cap G_n)$ と定めると、$\widetilde{\mu}_j$ は $\sigma[\mathscr{G}]$ 上の有限な測度となる。ここで

$$\mathscr{D}_n := \{A \in \sigma[\mathscr{G}] : \widetilde{\mu}_1(A) = \widetilde{\mu}_2(A)\}$$

と置くと、先の命題よりこれはディンキン族となる。ディンキンの補題より $\sigma[\mathscr{G}] = D[\mathscr{G}]$ であるから、最小性より $\mathscr{D}_n = \sigma[\mathscr{G}]$ となる。よって $\mu_1(A \cap G_n) = \mu_2(A \cap G_n)$ であるから、$\mu_1 = \mu_2$ が従う。□

系 1.5.12

$(S, \mathscr{A}, \mu_S), (T, \mathscr{B}, \mu_T)$ を測度空間とする。μ_S, μ_T が σ-有限であるとき、前測度 $\mu \colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to [0, \infty]$ の拡張は一意的である。

（証明）$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A}, \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{B}$ として

$$A_n \nearrow S, \qquad B_n \nearrow T, \qquad \mu_S(A_n), \mu_T(B_n) < \infty$$

を満たすように取る。ここで $C_n = A_n \times B_n \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ とすれば

$$C_n \nearrow S \times T, \qquad \mu(C_n) = \mu_S(A_n)\mu_T(B_n) < \infty$$

が成り立つ。従って μ は σ-有限であるため、定理から拡張は一意的であることが分かる。□

定義 1.5.13

系において μ の拡張となる可測空間 $(S \times T, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ 上の測度は一意的に存在する。これを $\mu_S \otimes \mu_T$ と記し、μ_S と μ_T の積測度と呼ぶ。このとき $(S \times T, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu_S \otimes \mu_T)$ を積測度空間と呼ぶ。

ただし積測度空間は圏における積対象ではない。

第 2 章

位相構造と測度論

2.1　ボレル集合族

数学における主要な構造の一つに位相構造というものがある。位相空間に関する和書も、測度論と同様に良書が数多くあるので詳しくはそちらに譲る。ちなみに自分は記述が丁寧で内容が濃いにも拘わらず薄くて携帯性の良い内田伏一を推している。この文章を読むためには wikipedia の記述で十分なのだが、関連項目に絞って記述しておくのも悪くないので、この節を設けることにした。

2.1.1　位相空間と連続写像

定義 2.1.1

集合 X において $\mathcal{O} \subset 2^X$ が次の 3 条件を満たすとき、$\mathcal{O}$ は X 上の位相（topology）あるいは開集合系であるという。

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$ である。

(2) $U, V \in \mathcal{O}$ なら $U \cap V \in \mathcal{O}$ である。

(3) $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda \in \mathcal{O}$ なら $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である。

このとき組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間といい、集合 $U \in \mathcal{O}$ は（$\mathcal{O}$-）開集合（open set）であるという。

例えば $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ は包含関係における最小の位相を定め、密着位相（indiscrete topology）と呼ばれる。また $\mathcal{O} = 2^X$ は包含関係における最大の位相を定め、離散位相（discrete topology）と呼ばれる。この二つは自明（trivial）な位相とも呼ばれる。

位相は「近さ」の一般化であるとよく言われるが、上の定義だとその感覚が良く分からないだろう。実は位相には同値な公理系が複数存在し、そのうちの一つに「近傍系」を利用するものがある。これを説明するために幾つかの用語を定義しよう。

定義 2.1.2

$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする。$F\subset X$ が $X\backslash F\in\mathcal{O}$ を満たすとき、($\mathcal{O}$-) 閉集合（closed set）であるという。

演習 2.1.3

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において、閉集合全体 $\mathfrak{A}$ は以下を満たす。

(1) $X\in\mathfrak{A},\emptyset\in\mathfrak{A}$ である。

(2) $F,G\in\mathfrak{A}$ なら $F\cup G\in\mathfrak{A}$ である。

(3) $\lambda\in\Lambda$ について $F_\lambda\in\mathfrak{A}$ なら $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\mathfrak{A}$ である。

逆にこれを満たす $\mathfrak{A}\subset 2^X$ に対し、$\mathfrak{A}$ を閉集合とする X 上の位相が唯一つ存在する。

定義 2.1.4

$(X,\mathcal{O})$ を位相空間、$A\subset X$ とする。$x\in X$ について以下を定める。

(1) ある開集合 $U\in\mathcal{O}$ が存在して $x\in U\subset A$ が成り立つとき x は A の内点であるという。A の内点全体を A^i あるいは A° で表し、A の内部（interior）あるいは開核という。

(2) x が $X\backslash A$ の内点であるとき x は A の外点であるという。A の外点全体を A^e で表し、A の外部（exterior）という。

(3) x が A の内点でも外点でもないとき x は A の境界点であるという。A の境界点全体を A^f で表し、A の境界（frontier）という。

(4) 任意の開集合 $U\in\mathcal{O}$ について $x\in U$ なら $U\cap A\neq\emptyset$ が成り立つとき x は A の触点であるという。A の触点全体を $\overline{A}$ あるいは A^a で表し、A の閉包（closure）という。

A^i は A に含まれる最大の開集合であり、$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である。
写像 $i\colon A\mapsto A^i$ を開核作用子、写像 $k\colon A\mapsto\overline{A}$ を閉包作用子という。

演習 2.1.5

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において、開核作用子は $A,B\subset X$ について以下を満たす。

(1) $i(X)=X$ である。

(2) $i(A)\subset A$ である。

(3) $i(A\cap B)=i(A)\cap i(B)$ である。

(4) $i(i(A))=i(A)$ である。

逆にこれを満たす写像 i に対し、$i(A)$ を A の内部とする X 上の位相が唯一つ存在する。

（ヒント）$\mathcal{O} := \{U : i(U) = U\}$ とすればよい。□

演習 2.1.6: クラトウスキイの公理系

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において、閉包作用子は $A, B \subset X$ について以下を満たす。

(1) $k(\emptyset) = \emptyset$ である。

(2) $k(A) \supset A$ である。

(3) $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$ である。

(4) $k(k(A)) = k(A)$ である。

逆にこれを満たす写像 k に対し、$k(A)$ を A の閉包とする X 上の位相が唯一つ存在する。

（ヒント）$\mathcal{O} := \{U : k(X \backslash U) = X \backslash U\}$ とすればよい。□

定義 2.1.7

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間、$a \in X$ とする。$N \subset X$ が $a \in N^i$ を満たすとき、a の近傍（neighborhood）であるという。a の近傍全体を $\mathfrak{N}(a)$ で表し、a の近傍系という。

演習 2.1.8: ハウスドルフの公理系

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において、近傍系は $a \in X$ について以下を満たす。

(1) $X \in \mathfrak{N}(a)$ であり、$N \in \mathfrak{N}(a)$ なら $a \in N$ である。

(2) $N, M \in \mathfrak{N}(a)$ なら $N \cap M \in \mathfrak{N}(a)$ である。

(3) $N \in \mathfrak{N}(a)$ であり、$N \subset M$ なら $M \in \mathfrak{N}(a)$ である。

(4) $N \in \mathfrak{N}(a)$ について、ある $M \in \mathfrak{N}(a)$ が存在し、任意の $b \in M$ について $N \in \mathfrak{N}(b)$ が成り立つ。

逆にこれを満たす写像 $a \mapsto \mathfrak{N}(a)$ に対し、$\mathfrak{N}(a)$ を a の近傍系とする X 上の位相が唯一つ存在する。

（ヒント）$\mathcal{O} := \{N : a \in N \Rightarrow N \in \mathfrak{N}(a)\}$ とすればよい。□

次に連続写像を定義する。

定義 2.1.9

$(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間、$a\in X$ とする。写像 $f\colon X\to Y$ が

$$N\in\mathfrak{N}(f(a))\Rightarrow f^{-1}(N)\in\mathfrak{N}(a)$$

を満たすとき、f は a において連続（continuous）であるという。

命題 2.1.10

$(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。写像 $f\colon X\to Y$ に関して以下は同値である。

(a) 任意の $a\in X$ において f は連続である。
(b) $U\subset Y$ が $\mathcal{O}_Y$-開集合なら $f^{-1}(U)\subset X$ は $\mathcal{O}_X$-開集合である。
(c) $F\subset Y$ が $\mathcal{O}_Y$-閉集合なら $f^{-1}(F)\subset X$ は $\mathcal{O}_X$-閉集合である。
(d) 任意の $A\subset X$ に対し $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ が成り立つ。

（証明）略。□

定義 2.1.11

上の 4 条件の何れか（従って全て）を満たすとき、f は位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ から $(Y,\mathcal{O}_Y)$ への連続写像という。

連続写像の合成は連続写像であり、恒等写像は連続写像である。故に位相空間と連続写像は圏の対象と射を定める。これを位相空間の圏といい圏 **Top** と記す。

2.1.2 ボレル集合族

定義 2.1.12

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し、位相により生成される σ-加法族 $\sigma[\mathcal{O}]$ をボレル集合族と呼ぶ。特に $\sigma[\mathcal{O}]$-可測であることをボレル可測であるという。

ボレル集合族は、位相が明らかな場合は $\mathscr{B}_X$ や $\mathscr{B}(X)$ などと記すこともある。

位相空間 $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ に対し、連続写像 $f\colon X\to Y$ は $\mathcal{O}_Y$-開集合を $\mathcal{O}_X$-開集合に引き戻す。従って f は可測空間 $(X,\sigma[\mathcal{O}_X])$ から $(Y,\sigma[\mathcal{O}_Y])$ への可測函数を定め、更にこれは圏 **Top** から圏 **meas** への函手を定める。この函手をボレル函手と呼ぶことにする。

位相も σ-加法族と同様に、直接指定されて表されるという状況はあまり多くなく、大抵は基本となる集合族が位相を「生成」していると考える。「生成」の方法はいくつかあるが、ここでは開基というものを紹介しよう。

定義 2.1.13

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間、$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ とする。任意の開集合 $U \in \mathcal{O}$ に対し、ある $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ が存在して $U = \cup\mathcal{B}_0$ と表せるとき、$\mathcal{B}$ は位相 $\mathcal{O}$ の開基（open basis）であるという。

言い換えれば、任意の開集合 $U \in \mathcal{O}$ 及び $x \in U$ に対し、適当な $B \in \mathcal{B}$ を取れば $x \in B \subset U$ が成り立つようにできる。

注意 2.1.14

集合族 $\mathfrak{A} \subset 2^X$ について $\mathfrak{A}$ が空でないときは

$$\cup\mathfrak{A} = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A, \qquad \cap\mathfrak{A} = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$$

と定め、

$$\cup\emptyset = \emptyset, \qquad \cap\emptyset = X$$

と定める。

通常の位相を持ったユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の開基としては、例えば開区間全体がある。当然開集合全体も開基であり、位相については様々な開基を考えることが出来る。しかし、開基が定める位相は次の命題より一意的である。

命題 2.1.15

X を集合、$\mathcal{B} \subset 2^X$ とする。次は同値である。

(a) $\mathcal{B}$ はある位相の開基である。

(b) 次の 2 条件を満たす。

(1) $X = \cup\mathcal{B}$ である。

(2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 及び $x \in B_1 \cap B_2$ について、ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \in B \subset B_1 \cap B_2$ を満たす。

このとき $\mathcal{B}$ を開基とする位相は一意的である。

（証明）位相 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{B}$ を開基とするなら、

$$\mathcal{O} = \{\cup\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \subset \mathcal{B}\}$$

という等式を満たさなければならない。一意性はこれより明らか。また下の 2 条件を満たすとき、この等式で定めた $\mathcal{O}$ は位相を定め、$\mathcal{B}$ はその開基となる。上から下も簡単。□

さて位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開基 $\mathcal{B}$ について考えるとき、当然問題となってくるのは、開基により生成される σ-加法族 $\sigma[\mathcal{B}]$ と、位相により生成される σ-加法族 $\sigma[\mathcal{O}]$ との関係である。もちろん $\sigma[\mathcal{B}] \subset \sigma[\mathcal{O}]$ は成り立つが、これは必ずしも一致するとは限らない。

定義 2.1.16

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。位相 $\mathcal{O}$ が、高々可算個の開集合からなる開基を持つとき、第 2 可算公理を満たすという。

補題 2.1.17

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たし、開基 $\mathcal{B}$ はその可算開基を含むとする。このとき $\sigma[\mathcal{O}] = \sigma[\mathcal{B}]$ が成り立つ。

（証明）開集合 $U \in \mathcal{O}$ について、$\mathcal{B}$ は可算開基 $\mathcal{B}'$ を含むので、$\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{B}'$ を取り $U = \cup \mathcal{B}'_0$ と表せる。このとき $O \in \sigma[\mathcal{B}]$ を得るから、最小性より $\sigma[\mathcal{O}] \subset \sigma[\mathcal{B}]$ が従う。□

2.1.3 積位相空間とボレル集合族

位相空間に対しても積を考えることが出来る。我々は可測空間において有限積しか今の所は考えていないので、位相空間においても同様に有限積のみを考えることにする。

定義 2.1.18

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y = \{U \times V : U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\} \subset 2^{X \times Y}$$

は開基の 2 条件を満たし、ある一意的な位相 $\mathcal{O} \subset 2^{X \times Y}$ の開基となる。この位相を箱型積位相（box product topology）と呼び、$(X \times Y, \mathcal{O})$ を箱型積位相空間という。

実は、任意の添え字を持つ位相空間の族について、その直積集合上に積位相と呼ばれる位相を定めることができ、これを積位相空間、あるいは単に積空間と呼ぶ。このとき積空間と各成分への射影は普遍性を満たし、圏 **Top** における積対象となる。積空間の位相は一般的に箱型積位相とは異なるものだが、添え字集合が有限のときには一致する。従って上で定めた箱型積位相空間 $(X \times Y, \mathcal{O})$ は、積空間であり、$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の積対象でもある。これより、以下では「箱型」という用語は省略して述べる。

命題 2.1.19

$(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。$\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y$ を $\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_Y$ の開基とすれば、$\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y$ は積位相の開基となる。

特に $\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y$ が可算のとき、$\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y$ も可算である。故に有限積は第 2 可算公理を保つ。

（証明）開基の 2 条件が成り立つことを示せば良い。□

位相空間 $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ について、$\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y$ をその開基、$(X\times Y,\mathcal{O})$ をその積空間とする。このとき

$$\sigma[\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y]\subset\sigma[\mathcal{B}_X\times Y\cup X\times\mathcal{B}_Y]\subset\sigma[\mathcal{O}_X\times Y\cup X\times\mathcal{O}_Y]\subset\sigma[\mathcal{O}]$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}\sigma[\mathcal{B}_X]\otimes\sigma[\mathcal{B}_Y]&:=\sigma\left[\sigma[\mathcal{B}_X]\times Y\cup X\times\sigma[\mathcal{B}_Y]\right]=\sigma\left[\sigma[\mathcal{B}_X]\times\sigma[\mathcal{B}_Y]\right],\\ \sigma[\mathcal{O}_X]\otimes\sigma[\mathcal{O}_Y]&:=\sigma\left[\sigma[\mathcal{O}_X]\times Y\cup X\times\sigma[\mathcal{O}_Y]\right]=\sigma\left[\sigma[\mathcal{O}_X]\times\sigma[\mathcal{O}_Y]\right]\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}\sigma[\mathcal{B}_X\times Y\cup X\times\mathcal{B}_Y]&\subset\sigma[\mathcal{B}_X]\otimes\sigma[\mathcal{B}_Y],\\ \sigma[\mathcal{O}_X\times Y\cup X\times\mathcal{O}_Y]&\subset\sigma[\mathcal{O}_X]\otimes\sigma[\mathcal{O}_Y]\end{aligned}$$

も成り立つ。

ここで興味があるのは、これらの包含関係が「いつ」等号となるかという疑問である。この一つの答えを、我々は第 2 可算公理の文脈で得ることが出来る。

定理 2.1.20

位相空間 $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ は第 2 可算公理を満たし、$\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y$ はその可算開基とする。積位相を $\mathcal{O}$ とすれば、

$$\sigma[\mathcal{O}]=\sigma[\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y]=\sigma[\mathcal{B}_X]\otimes\sigma[\mathcal{B}_Y]=\sigma[\mathcal{O}_X]\otimes\sigma[\mathcal{O}_Y]$$

が成り立つ。

（証明）補題より $\sigma[\mathcal{B}_X]=\sigma[\mathcal{O}_X],\sigma[\mathcal{B}_Y]=\sigma[\mathcal{O}_Y]$ 及び $\sigma[\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y]=\sigma[\mathcal{O}]$ が成り立つ。従って上の議論から $\sigma[\mathcal{O}]\subset\sigma[\mathcal{O}_X]\otimes\sigma[\mathcal{O}_Y]$ となるため、逆を示せば良い。

$f\colon X\times Y\to X, g\colon X\times Y\to Y$ を射影とする。このとき積位相の定義より f,g は連続写像となるから、可測写像でもある。従って普遍性より、唯一つの可測写像 $h\colon(X\times Y,\sigma[\mathcal{O}])\to(X\times Y,\sigma[\mathcal{O}_X]\otimes\sigma[\mathcal{O}_Y])$ が存在して、図式を可換にする。このとき h は定め方より恒等写

像となるが、可測性より $\sigma[\mathcal{O}_X] \otimes \sigma[\mathcal{O}_Y] \subset \sigma[\mathcal{O}]$ を得る。□

定理の示すところは、可算開基を持つ位相空間について、積位相空間のボレル集合族は、ボレル集合族の積 σ-加法族である、ということであり、ボレル集合族の表記に倣えば $\mathscr{B}_{X\times Y} = \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$ が成り立つということを意味している。この意味でボレル函手は有限積に関して自然に振舞うことが分かる。

2.2 ルベーグ-スティルチェス測度

ここでは測度の例として、(ボレル集合族上の) ルベーグ測度を定義する。ルベーグ測度の構成法はいくつかあるが、ここでは右連続非減少函数の定めるスティルチェス測度の 1 つとして与える。

2.2.1 半環と測度

測度について議論する上で恐らく最弱の集合族の 1 つが半環だろう。

定義 2.2.1

集合 S において $\mathscr{S} \subset 2^S$ が次の 3 条件を満たすとき、$\mathscr{S}$ は S 上の半環であるという。

(1) $\emptyset \in \mathscr{S}$ である。

(2) $A, B \in \mathscr{S}$ なら $A \cap B \in \mathscr{S}$ である。

(3) $A, B \in \mathscr{S}$ なら有限個の互いに素な元 $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{S}$ を用いて $A \backslash B = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$ と表せる。

半加法族は半環であり、半環が全体集合 S を含むとき半加法族となる。
半加法族に対して成り立った補題が、半環上でも全く同じ証明により成立する。

補題 2.2.2

$\mathscr{S} \subset 2^S$ を半環とする。任意の $A \in \mathscr{S}$ 及び $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ に対し、互いに素な $B_1, \ldots, B_m \in \mathscr{S}$ が存在して

$$A \backslash \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$$

と表せる。

定義 2.2.3

$\mathscr{S} \subset 2^S$ を半環とする。集合函数 $\mu \colon \mathscr{S} \to [0, \infty]$ が正値かつ有限加法的であるとき、μ は半環 $\mathscr{S}$ 上の前測度という。

次の命題も半加法族のときと全く同様に示すことができる。

命題 2.2.4

μ を半環 $\mathscr{S} \subset 2^S$ 上の前測度とする。次が成り立つ。

(1) $A \in \mathscr{S}$ 及び互いに素な $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ に対し、

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$$

が成り立つ。

(2) $B \in \mathscr{S}$ 及び $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{S}$ に対し、

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow \mu(B) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$

が成り立つ。

特に μ は単調かつ有限劣加法的である。

上の補題と命題から、次の命題を示すことができる。

命題 2.2.5

μ を半環 $\mathscr{S} \subset 2^S$ 上の前測度とする。$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ に対し、互いに素な $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ が存在して、

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} D_n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n)$$

を満たす。

(証明) $B_1 = A_1, B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ とする。補題より互いに素な $D_{n,1}, \ldots, D_{n,m_n} \in \mathscr{S}$ が存在して $B_n = \bigsqcup_{i=1}^{m_n} D_{n,i}$ と表せる。このとき $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ が成り立つ。μ は単調かつ有限加法的なので

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m_n} \mu(D_{n,i})$$

となる。

半環上の前測度に対する測度への拡張問題については以下の定理が成り立つ。

定理 2.2.6: カラテオドリの拡張定理

μ は半環 $\mathscr{S} \subset 2^S$ 上の前測度とする。以下は同値である。

(a) $\sigma[\mathscr{S}]$ 上の測度 $\widehat{\mu}$ が存在して $\widehat{\mu}|_{\mathscr{S}} = \mu$ を満たす。つまり $A \in \mathscr{S}$ なら $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ が成り立つ。

(b) μ は弱可算劣加法的である。

（証明）ホップの拡張定理と同様に証明したい。まず外測度 $\widehat{\mu}$ の構成に関しては、μ から誘導される外測度を考える。

次に $\mathscr{S} \subset \mathscr{M}_{\widehat{\mu}}$ を示したい。$A \subset \mathscr{S}$ 及び $E \subset S$ を取る。E の被覆 $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ を取れば、$\{C \cap A : C \in \mathscr{C}\} \subset \mathscr{S}$ は $E \cap A$ の被覆となる。また半環の定義より各 $C \in \mathscr{C}$ に対して、互いに素な $D_1^C, \ldots, D_{n(C)}^C \in \mathscr{S}$ が存在して $C \backslash A = \bigsqcup_{i=1}^{n(C)} D_i^C$ と表せる。このとき $\{D_i^C : C \in \mathscr{C}, 1 \leq i \leq n(C)\} \subset \mathscr{S}$ は $E \backslash A$ の被覆となる。故に

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(E \cap A) + \widehat{\mu}(E \backslash A) &\leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu(C \cap A) + \sum_{C \in \mathscr{C}} \sum_{i=1}^{n(C)} \mu(D_i^C) \\ &= \sum_{C \in \mathscr{C}} \left(\mu(C \cap A) + \sum_{i=1}^{n(C)} \mu(D_i^C) \right)\end{aligned}$$

となる。このとき

$$C = (C \cap A) \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{n(C)} D_i^C$$

であるから、$C \in \mathscr{S}$ より μ の有限加法性が使えて結局

$$\mu(C \cap A) + \sum_{i=1}^{n(C)} \mu(D_i^C) = \mu(C)$$

が従う。

以上により $\widehat{\mu}$ は $\sigma[\mathscr{S}]$ 上の測度となることが分かった。最後に $\mathscr{S}$ 上での値を見てみよう。まず $A \in \mathscr{S}$ に対して定義より $\widehat{\mu}(A) \leq \mu(A)$ が成り立つ。逆を示すために A の被覆 $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ を取る。先の命題より、互いに素な $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ が存在して

$$\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} D_n, \qquad \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu(C) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(D_n)$$

を満たす。$\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ も A の被覆となるから、μ の弱可算劣加法性及び単調性より

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap D_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap D_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(D_n) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu(C)$$

を得る。右辺の下限を取れば $\mu(A) \leq \widehat{\mu}(A)$ が従う。□

定理により、半環上の前測度に対しても、可算加法性、可算劣加法性、弱可算劣加法性は全て同値となる。

2.2.2 スティルチェス測度

この節では、ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の通常の位相 $\mathcal{O}$ において、ボレル集合族 $\sigma[\mathcal{O}]$ 上の測度として、スティルチェス測度の構成を行う。一般論ではなく具体例に関する内容であることから、連続性の公理に始まる実数 $\mathbb{R}$ の性質、あるいは距離空間としての位相的性質、そして解析的な連続性の扱い方などについては既知とする。和書なら杉浦光夫「解析入門」が網羅的である。ここで用いる大事な性質を一つ挙げるならば、有界閉区間のコンパクト性である。即ち、閉区間を任意個の開区間で覆ったとき、その中の有限個を選んで再び閉区間を覆うようにできる。コンパクト性については後の章で改めて議論する。

まず $\mathcal{O}$ は開区間から為る可算開基 $\mathcal{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ を持つ。つまり第 2 可算公理を満たすのだが、$\mathcal{O}$ は測度論的には扱い難い。そこで次の集合族について考える。

命題 2.2.7

空集合及び左半開区間から為る集合を $\mathscr{I} := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$ とする。このとき $\mathscr{I}$ は半環であり、$\sigma[\mathcal{O}] = \sigma[\mathscr{I}]$ を満たす。

（証明）$\mathscr{I}$ が半環となることは良いだろう。差集合を取るときが特殊で、$(a,b] \subset (c,d]$ のときに限り $(c,d] \backslash (a,b] = (c,a] \sqcup (b,d]$ となるので $\mathscr{I}$ の元の非交叉有限和である。

$(a,b] \in \mathscr{I}$ に対し、$a < c < b$ なる $c \in \mathbb{Q}$ を取る。また数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ を、$a_n \searrow a, b_n \searrow b, a < a_n < c < b < b_n$ を満たすように取る。このとき

$$(a,b] = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (c, b_n) \right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, c) \right)$$

であるから、$(a,b] \in \sigma[\mathcal{B}]$ を得る。

逆に $(a,b) \in \mathcal{B}$ に対し、数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ を $a < b_n < b$ を満たすように取る。このとき

$$(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a, b_n]$$

であるから、$(a,b) \in \sigma[\mathscr{I}]$ を得る。□

以下ボレル集合族 $\sigma[\mathcal{O}] = \sigma[\mathcal{B}] = \sigma[\mathscr{I}]$ のことを $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ で表す。

命題 2.2.8

$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は右連続な非減少函数とする。$(a, b] \in \mathscr{I}$ に対し

$$\mu((a, b]) := \varphi(b) - \varphi(a)$$

と定めると、μ は半環 $\mathscr{I}$ 上の前測度となる。

（証明）μ が有限加法的であることは明らかだろう。実際 $(a, b] = (a_1, b_1] \sqcup \cdots (a_n, b_n]$ とすると、$a_1 = a, a_{n+1} = b_n, b_n = b$ より、

$$\begin{aligned}\mu((a, b]) &= \varphi(b) - \varphi(a) \\ &= (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) + \cdots + (\varphi(b_1) - \varphi(a_1)) \\ &= \mu((a_n, b_n]) + \cdots + \mu((a_1, b_1])\end{aligned}$$

が成り立つ。

μ が弱可算劣加法的であることを示そう。$(a, b] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n]$ とする。$\varepsilon > 0$ とする。φ は右連続だから、十分小さな $\delta, \delta_n > 0$ を取り、

$$\varphi(a + \delta) - \varphi(a) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varphi(b_n + \delta_n) - \varphi(b_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

を満たすようにできる。$[a + \delta, b] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n + \delta_n)$ より、コンパクト性から有限集合 $F \subset \mathbb{N}$ を選び、特に $(a + \delta, b] \subset \bigcup_{n\in F}(a_n, b_n + \delta_n]$ が成り立つようにできる。μ は半環 $\mathscr{I}$ 上の前測度だから、

$$\begin{aligned}\mu((a, b]) &= \varphi(b) - \varphi(a) \\ &< \varphi(b) - \varphi(a + \delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \mu((a + \delta, b]) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{n\in F}\mu((a_n, b_n + \delta_n]) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sum_{n\in F}\mu((a_n, b_n]) + \varepsilon \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu((a_n, b_n]) + \varepsilon\end{aligned}$$

を得る。ε は任意だから、μ の弱可算劣加法性が従う。□

拡張定理より $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の測度であり、$\mathscr{I}$ 上で μ と一致するものが存在する。特に μ は σ-有限なので、拡張された測度も σ-有限である。更に $\mathscr{I}$ は有限交叉で閉じるので、このような測度は一意的である。

定義 2.2.9

右連続な非減少函数 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し、$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の σ-有限な測度で、$(a, b] \in \mathscr{I}$ に対して $\mu((a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a)$ となるものを、（ボレル集合族 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の）スティルチェス測度（Stieltjes measure）と呼ぶ。

特に $\varphi(x) = x$ のとき、（ボレル集合族 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の）ルベーグ測度（Lebesgue measure）と呼ぶ。