収束による位相の定義について [*]

mathmathniconico[†]

2018 年 5 月 19 日

1 まえがき

函数解析を学んでいると、弱位相という概念が出てくる。これはバナッハ空間 X の位相であり、有界線型汎函数による弱収束の言葉で説明されることが一般的である。つまりネット x_α が x に弱収束するとは、任意の有界線型汎函数 $f \in X^*$ に対し、実数として $f(x_\alpha)$ が $f(x)$ に収束することを指す。位相について知っていればこの説明は納得できないかもしれない。厳密には線型位相空間の一種として、原点 0 の基本近傍系を定義する必要がある。それは有限個の $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ 及び $\varepsilon > 0$ について

$$\{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon\}$$

で表される集合全体である。

ここで疑問に思うのは、形式的な収束の概念のみを抜き出して、元の位相を復元できるかどうかである。つまり今定義したように「収束するネット」と「収束先」の情報から位相を定義し、その位相における収束と、あらかじめ与えた収束の情報が一致するだろうか。かつてこの問題について悩んだ記憶はあるが、そのまま記憶の彼方にあるということは、当時の私は解決に至らなかったようである。

下調べでは同様の疑問がいくつか見つかった。[*1] mathoverflow[*2]では Kelly の General Topology[*3]が参照されている。74 ページ（ビューワーだと 92）に条件が載っているが、あまり美しくない。証明は読んでない。ただ、一応公理化は可能だということが分かる。

仕方ないので、自分で考えることにした。以前、閉包作用子による位相の導入（クラトウスキイの公理系）を紹介したが、これを利用する。

[†] http://arxiv.hatenablog.com/, https://mathtod.online/@mathmathniconico

[*1] https://oshiete.goo.ne.jp/qa/2597346.html

[*2] https://mathoverflow.net/questions/19285/how-do-you-axiomatize-topology-via-nets

[*3] https://archive.org/details/GeneralTopology

2　収束族

定義 2.1

$(A, \leq_A)$ を半順序集合とする。任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、ある $\gamma \in A$ が存在して $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$ が成り立つとき、有向集合であるという。

$(B, \leq_B)$ が $(A, \leq_A)$ の部分有向集合であるとは、$B \subset A$ であり、$\leq_A$ の B への制限が $\leq_B$ に一致し、任意の $\alpha \in A$ について、ある $\beta \in B$ が存在して $\alpha \leq \beta$ を満たすときをいう。

$(G_\alpha, \leq_\alpha)$ を $\alpha \in A$ で添え字付けられた有向集合の族とする。$G = \prod_{\alpha \in A}$ 上の半順序を成分毎に定める。すなわち $\gamma = (\gamma_\alpha), \delta = (\delta_\alpha) \in G$ に対し、$\gamma_\alpha \leq_\alpha \delta_\alpha$ が任意の $\alpha \in A$ で成り立つとき $\gamma \leq \delta$ と定める。このとき $(G, \leq)$ は有向集合となるので、これを有向集合の積と呼ぶ。

定義 2.2

$(A, \leq_A)$ を有向集合とする。集合 X において、A から X への写像を X 上の有向ネット、あるいは単にネットといい、$(x_\alpha : \alpha \in A) \subset X$ と表す。

$(B, \leq_B)$ が部分有向集合のとき、$(x_\beta : \beta \in B) \subset X$ を部分ネットという。

例えば一点集合 $A = \{*\}$ は自明に有向集合を定める。このとき $x \in X$ に対し $* \mapsto x$ は有向ネットを定める。

定義 2.3: 収束族

ネット $(x_\alpha : \alpha \in A) \subset X$ 及び $x \in X$ の組が集合 $\mathscr{A}$ の元であることを、

$$x_\alpha \xrightarrow[\mathscr{A}]{\alpha \in A} x$$

と表すとしよう。$\mathscr{A}$ が以下の性質を満たすとき、X 上の収束族と呼ぶ。

(1) 任意の $x \in X$ について、$x \xrightarrow[\mathscr{A}]{} x$ である。

(2) $x_\alpha \xrightarrow[\mathscr{A}]{\alpha \in A} x$ なら、部分有向集合 $(B, \leq_B)$ について $x_\beta \xrightarrow[\mathscr{A}]{\beta \in B} x$ である。

(3) $x_\alpha \xrightarrow[\mathscr{A}]{\alpha \in A} x$ かつ、$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E \cup F$ なら、ある部分有向集合 $(B, \leq_B)$ が存在して、$\{x_\beta\}_{\beta \in B} \subset E$ または $\{x_\beta\}_{\beta \in B} \subset F$ が成り立つ。

(4) $x_\alpha^{\gamma_\alpha} \xrightarrow[\mathscr{A}]{\gamma_\alpha \in G_\alpha} x_\alpha$ かつ、$x_\alpha \xrightarrow[\mathscr{A}]{\alpha \in A} x$ なら、$x_\alpha^\gamma \xrightarrow[\mathscr{A}]{(\alpha, \gamma) \in A \times G} x$ である。

定理 2.4

$\mathscr{A}$ を収束族とする。空でない $S \subset X$ に対して

$$k(S) := \left\{ x \in X : \exists x_\alpha \xrightarrow[\mathscr{A}]{\alpha \in A} x, \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset S \right\}$$

と定めると、k はクラトウスキイの公理系を満たす。(ただし $k(\emptyset) = \emptyset$ と定める。)

(証明) 公理系を満たすことは簡単で、というか満たすように公理を定めたといって良い。実際 $k(\emptyset) = \emptyset$ は定義より明白。1 番目の条件より $S \subset k(S)$ も分かる。$A, B \subset A \cup B$ より、$k(A \cup B) \supset k(A) \cup k(B)$ も自明。$x \in k(A \cup B)$ とすると、$\{x_\alpha\} \subset A \cup B$ を取れるが、3 番目の条件から部分ネットが A または B に含まれることが分かり、更に 2 番目の条件から $x \in k(A)$ あるいは $x \in k(B)$ が従う。$k(k(S)) = k(S)$ も 4 番目の条件より従う。$\square$

こうして位相が定まるが、重要なのは、位相における収束と一致するかどうかである。クラトウスキイの公理系では $k(S)$ は S の閉包と一致していた。

定理 2.5

$\mathscr{A}$ を収束族とする。$(x_\alpha : \alpha \in A)$ を有向ネット、$x \in X$ とする。以下は同値である。

(a) $x_\alpha \xrightarrow[\mathscr{A}]{\alpha \in A} x$ である。

(b) $\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$ である。つまり上で定めた位相の意味で収束する。

(証明) $x_\alpha \xrightarrow[\mathscr{A}]{\alpha \in A} x$ とする。$S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ とすると、$x \in k(S)$ である。x の開近傍 U を取る。任意の $\gamma \in A$ について、ある $\delta \geq \gamma$ が存在して $x_\delta \notin U$ とする。このとき $\{x_\delta\} \subset U^c$ は部分ネットとなり、更に $x_\delta \to x$ である。U^c は閉集合だから $x \in k(U^c) = U^c$ となり矛盾する。故に $\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$ が成り立つ。

逆に $\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$ とする。$x \in k(S)^c$ とすると、$k(S)^c$ は開集合だから、ある $\gamma \in A$ が存在して、任意の $\delta \geq \gamma$ に対して $x_\delta \in k(S)^c$ である。これは矛盾する。$\square$

次は収束族と名付けるために大事な定理である。

定理 2.6

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。収束ネットの収束先全体を $\mathscr{A}$ とする。このとき $\mathscr{A}$ は収束族である。

（証明）1 番目は自明。

2 番目を示す。$\lim_{\alpha\in A} x_\alpha = x$ とする。$(B, \leq_B)$ を部分ネットとする。開近傍 $x \in U$ を取ると、ある $\gamma \in A$ が存在して、$\delta \geq \gamma$ なら $x_\delta \in U$ となる。ここで部分有向集合の定義より、γ に対し、ある $\beta \in B$ を $\beta \geq \gamma$ となるように取れる。$\delta \geq \beta \geq \gamma$ について $x_\delta \in U$ となる。故に $\lim_{\beta\in B} x_\beta = x$ を得る。

3 番目を示す。$\lim_{\alpha\in A} x_\alpha = x$ は $\{x_\alpha\} \subset E \cup F$ を満たすとする。このとき $x \in \overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$ だから、$x \notin \overline{E}$ と仮定してよい。$U = \overline{E}^c$ は開集合だから、ある $\gamma \in A$ が存在して $\delta \geq \gamma$ なら $x_\delta \in U$ が成り立つ。特に $B := \{\delta \in A : \delta \geq \gamma\}$ は部分有向集合であるため、$\{x_\delta\}_{\delta\in B} \subset U$ となる。特に $\{x_\delta\}_{\delta\in B} \subset F$ である。

4 番目を示す。$\lim_{\gamma_\alpha\in G_\alpha} x_\alpha^{\gamma_\alpha} = x_\alpha, \lim_{\alpha\in A} x_\alpha = x$ とする。開近傍 $x \in U$ を取ると、ある $\alpha \in A$ が存在して $\beta \geq \alpha$ なら $x_\beta \in U$ である。この $x_\beta \in U$ に対し、ある $\gamma_\beta \in G_\beta$ が存在して、$\delta_\beta \geq \gamma_\beta$ なら $x_\beta^{\delta_\beta} \in U$ である。選択公理を使い $\beta \ngeq \alpha$ について γ_β を適当に取り、$\gamma \in G$ を定める。このとき $(\beta, \delta) \geq (\alpha, \gamma)$ なら $x_\beta^{\delta_\beta} \in U$ である。$\square$

従って、収束族は位相空間の公理系であることが分かる。

3 あとがき

有向集合を高々可算集合に制限すれば、有向点列に対しても同様の議論ができる。これは示していないが、恐らく有向ネットによる位相が第 1 可算公理を満たせば一致すると思われる。

バナッハ空間の話でも、弱収束により収束族を定義でき、弱位相と上で定めた位相は一致するはずだ。

上記の話は、位相の公理系それぞれに対して、有用な例を与えることが出来たということで非情に嬉しい結果だと感じる。開基があれば開集合系から位相が定義できる。ザリスキー位相は閉集合系で定める。群など、何か演算があって位相を入れるときはハウスドルフの公理系が使える。そして収束族のために、クラトウスキイの公理系が使える。

ちなみに境界の性質を抜き出して位相を定義することが可能か、という疑問についても昔考えたことがある。これは確か可能だったはずだが、一意性が成り立たない。つまり定義された位相の境界は、あらかじめ与えた境界と一致しない。上手く定義すればこれも解決できるかもしれないが。興味があればどなたかやってみてください。

収束族の定義は、グロタンディークによる位相の定義とどことなく類似を見ることが出来て興味深い。