

Indice

0.1	Introduzione, Introduction	4
1	Fondamenti	7
1.1	DEFINIZIONE	7
1.2	DEFINIZIONE	7
1.3	SYLLABUS	7
1.4	Funzione	7
1.5	Derivata	7
2	Natura e scopo dell'opera	11
2.1	Libri	11
2.2	11
2.3	11
3	Dei segni in generale e dei segni adatti alla scienza della logica in particolare; delle leggi alle quali é sottoposta quest'ultima classe di segni	13
3.1	DEFINIZIONE	13
3.2	DEFINIZIONE	13
3.3	DEFINIZIONE	13
3.4	Elementi di logica dell'arcivescovo Whately	14
3.4.1	DEFINIZIONE	14
3.5	DEFINIZIONE	14
3.6	DEFINIZIONE (1)	14
3.7	DEFINIZIONE (2)	14
3.8	DEFINIZIONE (2)	14
3.9	Introduzione - Axiom of extensionality	14
3.10	NOTAZIONE	14
3.11	Passaggio da linguaggio naturale a linguaggio simbolico (linguaggio formale?) . . .	15
3.11.1	ESEMPI	15
3.12	Logica e Fondamenti	15
3.13	Introduction	15
3.14	Syllabus	15
3.15	Temi d'esame	16
3.16	Dispense di partenza	16
3.17	GOOGLE SEARCHES	16
3.18	Altre pagine latex da integrare in questi appunti	16
4	Algebra	17
4.1	Teoria dei Gruppi, Group Theory	17
4.2	DEFINIZIONE	18
4.3	APPROFONDIMENTI	18
4.4	Definizione	18
4.5	Prerequisites	18

4.6	Definizione	18
4.7	Approfondimenti	18
4.8	ENUNCIATO	18
4.9	DIMOSTRAZIONE	18
4.10	APPROFONDIMENTI	18
4.11	DEFINIZIONE	19
4.12	NOTAZIONE - FORMA MATRICIALE	19
4.13	NOTAZIONE (2) - CICLI	19
4.14	PERMUTAZIONE IDENTICA - ELEMENTO NEUTRO RISPETTO ALLA COM- POSIZIONE DI PERMUTAZIONI	19
4.15	INVERSA DI UNA PERMUTAZIONE	19
4.16	INSIEME DELLE PERMUTAZIONI	19
4.17	NOTE	19
4.18	APPROFONDIMENTI	19
4.19	DEFINIZIONE (1)	20
4.20	DEFINIZIONE (2)	20
4.21	DEFINIZIONE (3)	20
4.21.1	NOTE	20
4.22	NOTAZIONE	20
4.23	ESEMPIO	20
4.24	COMPOSIZIONE DI PERMUTAZIONI = PRODOTTO DI CICLI	21
4.25	APPROFONDIMENTI	21
4.26	DEFINIZIONE	21
4.27	ESEMPIO	21
4.28	APPROFONDIMENTI	21
4.29	DEFINIZIONE	21
4.30	NOTAZIONE	22
4.31	ESEMPIO	22
4.32	APPROFONDIMENTI	22
4.33	INTRODUZIONE	22
4.34	DEFINIZIONE	22
4.35	NOTAZIONE	22
4.36	ESEMPIO	22
4.37	APPROFONDIMENTI	22
4.38	DEFINIZIONE	22
4.39	NOTAZIONE	22
4.40	ESEMPIO	22
4.41	APPROFONDIMENTI	22
4.42	DEFINIZIONE	22
4.43	NOTAZIONE	23
4.44	ESEMPIO	23
4.45	APPROFONDIMENTI	23
4.46	DEFINIZIONE	23
4.47	NOTAZIONE	23
4.48	ESEMPIO 1	23
4.49	ESEMPIO 2	23
4.50	APPROFONDIMENTI	23
4.51	DEFINITION	23
4.52	NOTATION	23
4.53	FORMULA DERANGEMENT	23
4.54	FORMULA PARTIAL DERANGEMENT	24
4.55	NOTE	24
4.56	HISTORY	24
4.57	APPROFONDIMENTI	24

4.58	DEFINIZIONE	24
4.59	HISTORY	24
4.60	APPROFONDIMENTI	24
4.61	Analisi I	25
4.62	Analisi II	25
4.63	Analisi superiore	26
5	Geometria	27
5.1	Introduzione	27
5.1.1	I link	27
5.1.2	Prerequisites	27
5.2	Geometria Euclidea	27
5.3	Vettore	28
5.3.1	Vettore colonna, vettore riga	28
5.3.2	Vettore in geometria mono, bi e tri-dimensionale	28
5.3.3	Componenti di un vettore	28
5.3.4	Rappresentazione canonica	28
5.3.5	Lunghezza di un vettore in R^n	28
5.3.6	dot product or scalar product	28
5.3.7	NOTAZIONE	28
5.3.8	NOTE	28
5.4	Algebra Lineare	29
5.5	Introduzione tratta dal libro "Introduzione all'algebra lineare" Prof. Fiorese-Morigi	29
5.6	DEFINIZIONE	31
5.7	DEFINIZIONE	31
5.8	DEFINIZIONE	31
5.9	NOTAZIONE	32
5.10	ESEMPIO	32
5.11	APPROFONDIMENTI	32
5.12	Matrice	32
5.13	DEFINIZIONE	32
5.14	DEFINIZIONE	32
5.15	ESEMPIO	32
5.16	DEFINIZIONE	32
5.17	Introduzione	32
5.18	DEFINIZIONE	33
5.19	SIMBOLI	33
5.20	DEFINIZIONE	33
5.21	DEFINIZIONE	33
5.22	Definizione (1)	33
5.23	Definizione (2)	33
5.24	APPROFONDIMENTI	33
5.25	DEFINIZIONE	34
5.26	Descrizione	34
5.27	Proprietá	34
5.28	ESEMPIO	34
5.29	DEFINIZIONE	34
5.30	NOTE	34
5.31	Definizione	34
5.32	DEFINIZIONE	34

6 Computer Science	35
6.1 Latex	35
6.2 APPROFONDIMENTI	36
6.3 Introduzione	36
6.4 Generale	36
6.5 A risk Perspective	36
6.6 Applicazioni Big Data in finanza	37
6.7 Calcolo stocastico per la finanza	37
6.8 Counterparty Credit Risk	38
6.9 Equazioni alle derivate parziali e metodi di approssimazione numerica	38
6.10 Excel e VBA per la finanza	38
6.11 Finanza Computazionale	38
6.12 Fixed Income Trading	39
6.13 Introduzione all'ambiente e al linguaggio Matlab	39
6.14 Matematica finanziaria e strumenti di mercato	39
6.15 Metodi di calibrazione	39
6.16 Metodi econometrici in finanza	40
6.17 Misurazione del rischio finanziario	40
6.18 Misurazione del rischio in Solvency 2	40
6.19 Misure di rischio finanziario: sviluppi recenti	40
6.20 Modern Interest Rates	40
6.21 Rischio di credito	41
6.22 Struttura a termine dei tassi	41
6.23 RESOURCES	42
6.24 Journals	42
6.25 Books, Buk, Libri	42
6.26 Pagine simili	42
6.27 Corsi matematica triennale	42
6.27.1 Deutschland	43
6.27.2 Deutschland	43
6.28 Corsi informatica magistrale	43
6.29 Programmi in fase di acquisizione	43
6.30 Docenti, Teachers	43
6.31 Corsi Singoli	43
6.32 Varie	43

0.1 Introduzione, Introduction

Mathematics è il tentativo di raccolta di appunti e materiale per studiare con profitto nei corsi di laurea in Matematica.

Il programma di riferimento è, principalmente, quello dell'Università di Bologna, anche se, non essendo iscritto a nessuno corso, ho cercato di integrare i programmi (syllabus) con i corsi di altre Università. Diciamo che la matematica é tale. Comunque, nel confrontare i vari corsi proposti dalle varie università mi sono accorto che argomenti trattati in geometria vengano trattati in altri corsi denominati algebra lineare oppure, geometria e algebra.

Pertanto, mi sono preso la libertà di organizzare tutti i concetti di tutte le materie in un unico corpo. Questo punto non è banale perché apre alcune questioni oggi approfondite in corsi quali *Interazione persona-computer*, *Semantic web*, *Intelligenza artificiale*, *Logica*, *Machine learning*, *Mathematical Knowledge Management*, etc.

Il materiale raccolto é ancora in fase embrionale.

Nota

Il materiale contenuto nella cartella di google drive è ad accesso limitato. Per accedere cliccare sul link seguente e seguire le istruzioni per ottenere l'accesso alla cartella. <https://drive.google.com/drive/folders/0Bx2fZ0r5vhSSSDdvWkVjNG9YQjQ>

Introduzione

I libri che trovate nella **folder**, sono stati raccolti seguendo la bibliografia proposta dai Docenti di Università italiane e straniere. Si trovano i classici di algebra, analisi, geometria, etc. Inoltre, ho selezionato alcuni libri perchè hanno una data stampa risalente al massimo agli ultimi tre anni che in genere sono fatti bene perchè raccolgono le esperienze maturate studiando i testi che li hanno preceduti.

Oltre a libri, troverete dispense, papers, etc. Al momento non ho fatto distinzione tra libri o altro pdf ma ho semplicemente suddiviso il materiale seguendo più o meno le materie indicate nel **Syllabus** e quindi troverete le seguenti cartelle: Algebra, Analisi, Topologia, Geometria, etc.

Come utilizzare il materiale pdf

Esistono buoni articoli che ci danno una panoramica su come utilizzare un libro di testo o una dispensa. Alcuni professori, specie nelle lezioni introduttive, danno informazioni riguardanti lo studio della materia nel suo complesso e con esso anche un accenno sull'utilizzo dei libri di testo.

Capitolo 1

Fondamenti

1.1 DEFINIZIONE

Metamathematics is the study of the tools or techniques needed by an undergraduate student in order to be able to study mathematics profitably.

1.2 DEFINIZIONE

La teoria ingenua degli insiemi è un modello matematico che si pone alla base di tutta la matematica. Purtroppo successivamente si scoprirono dei bug ovvero il modello portava a dei paradossi e quindi fu aggiustata da Zermelo, Fraenkel e Skolem (ZFS).

Ecco il modello ingenuo: Un insieme è una collezione di elementi distinti con due particolarità:

- gli elementi dell'insieme possono essere, a loro volta, insiemi.
- esiste un insieme composto da nessun insieme, detto insieme vuoto.

1.3 SYLLABUS

- Logic: <http://cgi.csc.liv.ac.uk/~frank/teaching/comp118/history.pdf>
- Funzione
- Derivata
- People
- Cronologia generale: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Chronology/index.html>
- Biografie: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html>

1.4 Funzione

La parola "funzione" appare per la prima volta verso la fine del XVII secolo, nella corrispondenza tra Leibniz e Johann Bernoulli; tuttavia è solo con l'opera di Eulero che questo concetto si afferma come uno dei principali strumenti dell'analisi.

1.5 Derivata

Il calcolo differenziale nasce soprattutto per affrontare problemi di geometria, in particolare quello delle tangenti.

PREFAZIONE

Il lavoro che segue non é la ristampa di un trattato precedente dello stesso autore, intitolato *L'analisi matematica della logica*. Le sue prime parti sono, é vero, dedicate allo stesso argomento, e il libro incomincia stabilendo il medesimo sistema di leggi fondamentali, ma i suoi metodi sono piú generali e il campo delle sue applicazioni é di gran lunga piú ampio. Il libro espone i risultati, maturati in anni di studio e di riflessione, di un principio d'indagine relativo alle operazioni dell'intelletto, la cui prima esposizione fu stesa in poche settimane da che fu concepita l'idea.

Questo é il secondo lavoro di boole ma e da considerare quello principale. Per fare un analogia struts... Bisogna prima di leggere questo trattato leggere altri due trattati che erano le basi per poter leggere il libro di Boole nel 1850. *Elementi di logica* dell'arcivescovo Whately oppure *Lineamenti delle leggi del pensiero* del signor Thomson.

Capitolo 2

Natura e scopo dell'opera

2.1 Libri

- cite1
- cite2

2.2

Scopo di questo trattato é d'indagare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente per mezzo delle quali si attua il ragionamento; di dar loro espressione nel linguaggio simbolico di un calcolo e d'istituire, su questo fondamento, la scienza della logica costruendone il metodo; di fare, di questo stesso metodo, la base di un metodo generale per l'applicazione della dottrina matematica della probabilità e, in ultimo, di ricavare dai diversi elementi di verità portati alla luce nel corso di queste indagini alcune indicazioni probabili sulla natura e la costituzione della mente umana.

2.3

Non c'è quasi bisogno di ricordare che questo progetto non é del tutto originale, e tutti sanno che i filosofi hanno dedicato una parte considerevole della loro attenzione a quelle che sono, dal punto di vista pratico, le sue suddivisioni principali: la logica e la teoria della probabilità. Nella forma che le fu data dagli antichi e dagli Scolastici, la logica é quasi esclusivamente associata al grande nome di Aristotele: e fino ai giorni nostri, salvo alcuni cambiamenti inessenziali, é rimasta praticamente tal quale fu presentata all'antica Grecia nelle disquisizioni in parte tecniche e in parte metafisiche dell'*Organon*. Dal canto suo, l'indirizzo della ricerca originale si é orientato principalmente verso questioni di filosofia generale le quali, pur essendo sorte fra le dispute dei logici, sono andate oltre quello che erano all'origine, dando alle epoche successive della speculazione la loro inclinazione e il loro carattere particolari. Le età di Porfirio e Proclo, di Anselmo e Abelardo, di Ramus e Descartes, conclusesi con la contestazione di Bacone e Locke, stanno davanti alla nostra mente come esempi delle più remote influenze che questo studio ha esercitato sul cammino del pensiero umano: in parte perché hanno suggerito fecondi argomenti di discussione, in parte perché hanno dato luogo alle critiche contro le sue pretese illegittime. Dall'altra parte, la storia della teoria della probabilità é stata contraddistinta in misura molto maggiore da quel costante sviluppo che costituisce la caratteristica propria della scienza. Il genio precoce di Pascal alle origini di questa disciplina, le più profonde tra le speculazioni matematiche di Laplace nelle sue fasi più mature (e qui non faccio menzione di altri nomi, non meno noti di questi) furono impegnati nel perfezionamento di questa teoria. Come lo studio della logica ha esercitato la propria influenza sul pensiero per le questioni di metafisica, ad esso affini, cui ha dato occasione, così quello della teoria della probabilità deve ritenersi importante per lo sviluppo che ha impresso alle parti più astratte della scienza matematica. Si é inoltre ritenuto giustamente che ciascuna di queste discipline avesse di mira, oltre che fini pratici, anche fini teorici. L'oggetto della logica, infatti, non é solo quello di metterci in grado di

trarre inferenze corrette da premesse date, né l'unica pretesa della teoria della probabilità é quella di insegnarci come fondare su solide basi il mestiere di assicuratore sulla vita o di raccogliere in formule i dati significativi delle innumerevoli osservazioni che si compiono in astronomia, in fisica, o in quel campo delle ricerche sociali che oggi va rapidamente acquistando importanza. Entrambi questi studi presentano anche un interesse di altro genere, derivante dalla luce che gettano sui poteri dell'intelletto. C'insegnano in qual modo il linguaggio e il numero servano da strumento e da ausilio ai processi del ragionamento; ci rivelano, in certa misura, la connessione esistente fra i diversi poteri del nostro comune intelletto; mettono davanti a noi, nei due dominî della conoscenza dimostrativa e di quella probabile, i modelli essenziali della verità e della correttezza: modelli che non sono stati ricavati dall'esterno, ma sono profondamente radicati nella costituzione delle facoltà dell'uomo. Questi fini speculativi non cedono né in dignità, né, si potrebbe aggiungere, in importanza, agli scopi pratici con il perseguimento dei quali sono stati spesso associati nel corso della loro storia. Lo svelare le leggi e le relazioni più nascoste di quelle facoltà superiori del pensiero grazie alle quali giungiamo a possedere, o portiamo a compimento, tutto ciò che va oltre la pura e semplice conoscenza percettiva del mondo e di noi stessi, é un fine la cui dignità non ha certo bisogno di essere raccomandata a uno spirito raziocinante.

Capitolo 3

Dei segni in generale e dei segni adatti alla scienza della logica in particolare; delle leggi alle quali é sottoposta quest'ultima classe di segni

3.1 DEFINIZIONE

Aristotelian or traditional logic is a “subject-predicate” logic and is therefore concerned only with a portion of the sum total of logical truth.

It confines itself to the four forms of categorical proposition known as the A, E, I, and O forms.

In the second place, it treats subalternation as a valid form of inference. That is, it assigns (tacitly at least) conventional meanings, different from those employed in modern (i.e. symbolic or mathematical) logic, to the four categorical forms, meanings such that subalternation holds.

These two characteristics, however, are not sufficient to define Aristotelian logic. For an indefinite number of systems could be devised which possess these two properties. Since further distinguishing traits of Aristotelian logic will appear only in the course of our investigation, a definition of Aristotelian logic framed in terms of its essential properties cannot be given at the outset.

3.2 DEFINIZIONE

Constructive mathematics is distinguished from its traditional counterpart, classical mathematics, by the strict interpretation of the phrase “there exists” as “we can construct”. In order to work constructively, we need to re-interpret not only the existential quantifier but all the logical connectives and quantifiers as instructions on how to construct a proof of the statement involving these logical expressions.

3.3 DEFINIZIONE

Intuitionistic logic, sometimes more generally called constructive logic, refers to systems of symbolic logic that differ from the systems used for classical logic by more closely mirroring the notion of constructive proof. In particular, systems of intuitionistic logic do not include the law of the excluded middle and double negation elimination, which are fundamental inference rules in classical logic. [k1]

Intuitionistic logic encompasses the principles of logical reasoning which were used by L. E. J. Brouwer in developing his intuitionistic mathematics, beginning in [1907]. Because these principles also underly Russian recursive analysis and the constructive analysis of E. Bishop and his followers, intuitionistic logic may be considered the logical basis of constructive mathematics.

3.4 Elementi di logica dell'arcivescovo Whately

3.4.1 DEFINIZIONE

Gli *Elementi di logica* del 1853 dell'arcivescovo Whately era il testo che Boole consiglia di leggere prima di leggere il suo trattato del 1954.

3.5 DEFINIZIONE

Dato un insieme numerabile di simboli é possibile trovare, per ogni formula, un algoritmo che mi dica se quella formula é o no derivabile dall'insieme di simboli e dalle regole date.

3.6 DEFINIZIONE (1)

An interpretation is an assignment of meaning to the symbols of a formal language.
assignment = ??? symbol = ??? formal language = ???

3.7 DEFINIZIONE (2)

An interpretation I is a function which assigns to any atomic formula p_i a truth value

$$I(p_i) \in 0, 1$$

If $I(p_i) = 1$ then p_i is called true under the interpretation I If $I(p_i) = 0$ then p_i is called false under the interpretation I

3.8 DEFINIZIONE (2)

An interpretation A is a structure

3.9 Introduzione - Axiom of extensionality

Dovrebbe essere abbastanza evidente che, l'uguaglianza tra due strutture matematiche, é un fatto "quasi" arbitrario e quindi in un certo senso devo definire che cosa si intende per uguaglianza tra due insiemi. Ebbene, Zermelo identifica tale concetto di uguaglianza con il concetto di estenzionalità, cioè di estensione. Dietro questo assioma c'è dell'altro. In un certo senso, si potrebbe dire che é il meccanismo del contare all'interno della teoria degli insiemi. Quindi dall'assioma non ricavo "quanti" sono gli elementi dei due insiemi ma sono certo del fatto che i due insiemi contengono lo "stesso numero" di elementi.

3.10 NOTAZIONE

$$\forall A \forall B (\forall X (X \in A \Leftrightarrow X \in B) \Rightarrow A = B)$$

3.11. PASSAGGIO DA LINGUAGGIO NATURALE A LINGUAGGIO SIMBOLICO (LINGUAGGIO FORMALE?)

3.11 Passaggio da linguaggio naturale a linguaggio simbolico (linguaggio formale?)

3.11.1 ESEMPI

3.12 Logica e Fondamenti

3.13 Introduction

La logica si divide in logica dei predicati e logica delle proposizioni. La logica dei predicati è la logica delle proposizioni con l'aggiunta dei quantificatori per ogni (\forall) ed esiste (\exists). Quando si passa alla logica dei predicati sembra che le proposizioni vengano rappresentate come delle funzioni.

3.14 Syllabus

- Notion
- Symbol
- Variable (symbol)
- Language
- Reasoning
- Magnitude
- Law of excluded middle
- Propositional function
- **Appartenenza**
- Inclusione
- Uguaglianza (tra insiemi)
- **Teoria ingenua degli insiemi**
- Cantor = teoria dei numeri e teoria (ingenua) degli insiemi
- **Esistenza**
- **Transfinito**
- Coerenza
- Indipendenza
- **Sviluppi decimali**
- Funziona caratteristica di un sottoinsieme.
- Rappresentazione posizionale dei numeri
- **Interpretation**
- **Passaggio da linguaggio naturale a linguaggio simbolico (linguaggio formale?)**
- **Classical Logic**
- **Formal Logic**

- [Intuitive Logic](#)
- Constructive Logic
- [Constructive Mathematics](#)
- Symbolic Logic
- [Entscheidungsproblem](#)
- [Recursive Function Theory](#)

3.15 Temi d'esame

- 1

3.16 Dispense di partenza

- Dispense Prof. Placci Unibo
- <http://www.settheory.net/>
- <http://www.mafy.lut.fi/study/LogicAndDiscreteMethods/Lectures/Lecture2.pdf>
- <http://cse.unl.edu/~choueiry/F07-235/files/PredicatesQuantifiers.pdf>
- <http://cgi.csc.liv.ac.uk/~frank/teaching/comp118/lecture2.pdf>
- http://emilkirkegaard.dk/en/wp-content/uploads/0415400678.Routledge.Logic_.An_.Introduction.Dec_.2005.pdf

3.17 GOOGLE SEARCHES

- predicate logic solved examples

3.18 Altre pagine latex da integrare in questi appunti

- <https://github.com/baudo2048/appunti>

Capitolo 4

Algebra

4.1 Teoria dei Gruppi, Group Theory

Definizione 4.1.1. Si chiama Gruppo un qualunque insieme non vuoto G in cui è possibile definire un'operazione da G in G che abbia le seguenti caratteristiche:

- $a, b \in G$ implies that $a * b \in G$. (We describe this by saying that G is closed under $*$).
- Given $a, b, c \in G$, then $a * (b * c) = (a * b) * c$. (This is described by saying that the associative law holds in G).
- There exists a special element $e \in G$ such that $a * e = e * a = a$ for all $a \in G$. (e is called the identity or unit element of G).
- For every $a \in G$ there exists an element $b \in G$ such that $a * b = b * a = e$. (We write this element b as a^{-1} and call it the inverse of a in G).

Osservazione 4.1.2. L'insieme $A(S)$ di tutte le permutazioni con l'operazione di composizione tra funzioni.

Definizione 4.1.3. A group G is said to be a finite group if it has a finite number of elements.

Definizione 4.1.4. The order of a group is its cardinality, i.e., the number of elements in its set. Also, the order, sometimes period, of an element a of a group is the smallest positive integer m such that $a^m = e$ (where e denotes the identity element of the group, and a^m denotes the product of m copies of a). If no such m exists, a is said to have infinite order.

Osservazione 4.1.5. NB: La stessa definizione può essere data con la notazione additiva.

Osservazione 4.1.6. The order of a group G is denoted by $ord(G)$ or $|G|$ and the order of an element a is denoted by $ord(a)$ or $|a|$.

Definizione 4.1.7. A nonempty subset, H , of a group G is called a subgroup of G if, relative to the product in G , H itself forms a group.

Osservazione 4.1.8. We stress the phrase "relative to the product in G ". Take, for instance, the subset $A = \{1, -1\}$ in Z , the set of integers. Under the multiplication of integers, A is a group. But A is not a subgroup of Z viewed as a group with respect to $+$.

Osservazione 4.1.9. From intro to paragraph about Subgroup From Abstract Algebra by Herstein

In order for us to find out more about the makeup of a given group G , it may be too much of a task to tackle all of G head-on. It might be desirable to focus our attention on appropriate pieces of G , which are smaller, over which we have some control, and are such that the information gathered about them can be used to get relevant information and insight about G itself. The question then becomes: What should serve as suitable pieces for this kind of dissection of G ?

Clearly, whatever we choose as such pieces, we want them to reflect the fact that G is a group, not merely any old set.

A group is distinguished from an ordinary set by the fact that it is endowed with a well-behaved operation. It is thus natural to demand that such pieces above behaved reasonably with respect to the operation of G . Once this is granted, we are led almost immediately to the concept of a subgroup of a group.

4.2 DEFINIZIONE

A cyclic group or monogenous (ermafrodita?, monogenetico?) group is a group that is generated by a single element. That is, it consists of a set of elements with a single invertible associative operation, and it contains an element g such that every other element of the group may be obtained by repeatedly applying the group operation or its inverse to g . Each element can be written as a power of g in multiplicative notation, or as a multiple of g in additive notation. This element g is called a generator of the group. [cyclicgroup1]

4.3 APPROFONDIMENTI

- EN.WIKIPEDIA.ORG: Cyclic group [cyclicgroup1]
- EN.WIKIPEDIA.ORG: Generating set of a group [cyclicgroup2]
- DISPENSA: Elementi periodici. Teoremi di Lagrange, Eulero e Fermat. Gruppi ciclici. [cyclicgroup3]

4.4 Definizione

Sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Chiamiamo nucleo di f , e lo indichiamo con $\ker f$ (oppure $\ker(f)$), il sottoinsieme $f^{-1}(1')$, dove $1'$ è l'elemento neutro di G' . [progm1]

In questa definizione occorre notare che per trovare il \ker bisogna trovare l'insieme degli elementi neutri di G' e tramite l'inversa risalire agli elementi del \ker .

4.5 Prerequisites

- Elemento neutro

4.6 Definizione

Dati due gruppi (G, \cdot) e (H, \circ) , una funzione $f : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo se $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$

4.7 Approfondimenti

capitolo del libro ARTIN

4.8 ENUNCIATO

4.9 DIMOSTRAZIONE

4.10 APPROFONDIMENTI

- EN.WIKIPEDIA.ORG: Lagrange's theorem (group theory) [orderofgroup2]

4.11 DEFINIZIONE

Sia X un insieme non vuoto. Si dice permutazione su X ogni applicazione bigettiva di X in se stesso. [permutazione1]

4.12 NOTAZIONE - FORMA MATRICIALE

In generale, per indicare una permutazione si usano le lettere greche minuscole, es. σ , e la cosiddetta notazione matriciale, nella quale sono riportate (nella seconda riga) le immagini secondo σ degli elementi di X (scritti nella prima riga):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

[permutazione1]

4.13 NOTAZIONE (2) - CICLI

see [Ciclo di una permutazione](#)

4.14 PERMUTAZIONE IDENTICA - ELEMENTO NEUTRO RISPETTO ALLA COMPOSIZIONE DI PERMUTAZIONI

In questa notazione, l'applicazione identica corrisponde ad una matrice con due righe uguali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Indicheremo tale applicazione (detta permutazione identica), più semplicemente, con il simbolo *id.* [permutazione1]

4.15 INVERSA DI UNA PERMUTAZIONE

per ottenere l'inversa di una permutazione basta scambiare la prima e la seconda riga e riordinare la prima. [permutazione2]

4.16 INSIEME DELLE PERMUTAZIONI

Denoteremo con $S(X)$ l'insieme delle permutazioni su X . [permutazione1]

Il numero di elementi di $S(X)$ è uguale a $n!$, dove n è il numero di elementi dell'insieme X .

4.17 NOTE

Una permutazione è una funzione

4.18 APPROFONDIMENTI

- [DISPENSA: Gruppi di permutazioni](#) [permutazione1]
- [DISPENSA: Permutazioni](#) [permutazione2]
- [DISPENSA: Orbite e cicli di una permutazione.](#) [permutazione4]
- [PROGETTO MATEMATICA: Permutazioni](#) [permutazione3]

4.19 DEFINIZIONE (1)

Per ciclo di una permutazione si intende il nome della notazione utilizzata per rappresentare una permutazione.

4.20 DEFINIZIONE (2)

Sia n un intero positivo. Si dice ciclo (o permutazione ciclica) ogni $\sigma \in S_n$ per cui esistono un intero positivo l e $a_1, \dots, a_l \in \{1, \dots, n\}$ a due a due distinti tali che

- $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_l) = a_1$;
- $\sigma(k) = k$ per ogni $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$.

Il numero l si dice lunghezza di σ . Una permutazione ciclica di lunghezza l si dice anche l -ciclo.

4.21 DEFINIZIONE (3)

Sia r un intero positivo, $2 \leq r \leq n$ e siano dati r elementi distinti $i_1, i_2, \dots, i_r \in X = \{1, 2, \dots, n\}$. Col simbolo $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_r)$ si denoti la permutazione $\gamma \in S_n$ tale che:

1. $\gamma(i_k) = i_k$ se $i_k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$
2. $\gamma(i_k) = i_{k+1}$ se $1 \leq k \leq r-1$
3. $\gamma(i_r) = i_1$

Tale permutazione è detta ciclo di lunghezza r . Se il ciclo ha lunghezza 2 viene detto trasposizione o scambio.

4.21.1 NOTE

Il solo ciclo di lunghezza 1 è la permutazione identica.

Il ciclo di lunghezza 2 è detto trasposizione o scambio.

La scrittura ciclica di un l -ciclo non è unica. Se $l > 1$, il ciclo ammette esattamente l scritture cicliche distinte, ottenute tramite rotazioni successive degli indici verso sinistra.

4.22 NOTAZIONE

Un ciclo è una lista di indici fra parentesi, e conveniamo che rappresenti la permutazione che associa a ogni indice nel ciclo quello successivo.

4.23 ESEMPIO

Ad esempio, il ciclo

$$(12345)$$

rappresenta la permutazione che manda 1 in 2, 2 in 3 e così via fino a 5 in 1. Due cicli sono disgiunti se non hanno lettere in comune. Per esempio, (123) e (45) sono disgiunti, ma (123) e (124) no.

4.24 COMPOSIZIONE DI PERMUTAZIONI = PRODOTTO DI CICLI

Per scrivere la composizione di permutazioni rappresentate da cicli, basta scrivere i cicli di seguito.

Non è difficile calcolare la permutazione risultante da una composizione di cicli: basta, per ogni lettera, "seguire il suo destino" lungo i vari cicli. Per esempio,

$$(123)(135)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{Cicli}$$

Come abbiamo fatto il conto? Cominciamo da 1: il primo ciclo manda 1 in 2, il secondo non tocca il 2, il terzo manda 2 in 4: concludiamo che i tre cicli mandano 1 in 4. Il primo ciclo manda 2 in 3, il secondo 3 in 5, e il terzo non tocca 5: concludiamo che i tre cicli mandano 2 in 5, e così via. Notate che alla fine del conto c'è un controllo di coerenza molto semplice: tutti i numeri nella seconda riga devono essere distinti.

4.25 APPROFONDIMENTI

- DISPENSA: Orbite e cicli di una permutazione [[permutazione4](#)]
- DISPENSA: Permutazioni [[permutazione2](#)]

4.26 DEFINIZIONE

Decomporre una permutazione in cicli disgiunti vuol dire rappresentarla sotto forma di cicli.

4.27 ESEMPIO

Come fare a ottenere una rappresentazione in cicli di una permutazione? Basta "seguire" una lettera qualunque fino a trovare un ciclo: per esempio, in

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

abbiamo che 1 va in 3, 3 va in 2 e 2 va in 1; quindi il primo ciclo che troviamo è (123). A questo punto non ci rimane che 4, che però va in sé, e formerebbe un ciclo di lunghezza 1. I cicli di lunghezza 1 per convenzione non si scrivono, e quindi la permutazione si scrive (123).

NB: Secondo me se segui questo procedimento per forza di cose devi trovare cicli disgiunti.

4.28 APPROFONDIMENTI

- DISPENSA: Permutazioni [[permutazione2](#)]
- DISPENSA: Orbite e cicli di una permutazione [[permutazione4](#)]
- DISPENSA: Lezione 9 http://www.science.unitn.it/~luminati/didattica/md/1998/diario/Lezione_9.htm
- ESERCIZI SVOLTI: Algebra 1 http://www.mat.uniroma3.it/users/gabelli/AL1_06_07/soluzioni2esonero.pdf

4.29 DEFINIZIONE

Data una qualsiasi permutazione, il suo periodo sarà il minimo comune multiplo dei periodi dei cicli disgiunti in cui essa si decompone.

4.30 NOTAZIONE**4.31 ESEMPIO****4.32 APPROFONDIMENTI**

- FAQ <https://it.answers.yahoo.com/question/index?qid=20090214091406AAUSspi>

4.33 INTRODUZIONE

Ogni permutazione di S_n , $n > 2$, è prodotto di trasposizioni. Osserviamo però che tali trasposizioni possono non essere disgiunte ed inoltre la rappresentazione di una permutazione come prodotto di trasposizioni non è unica. Ad esempio, la permutazione $\alpha = (123)$, si può scrivere come: $\alpha = (13)(12) = (12)(23) = (23)(13)$. Il teorema del segno di una permutazione ci dice però che la parità (ovvero il segno) di una permutazione rimane la stessa.

4.34 DEFINIZIONE

Sia $\alpha \in S_n$, $n \geq 2$. Si dice che α è pari se è prodotto di un numero pari di trasposizioni, dispari se è prodotto di un numero dispari di trasposizioni.

Inoltre si dice che il segno di α , $sgn(\alpha)$, è 1 se α è pari, -1 se α è dispari.

4.35 NOTAZIONE**4.36 ESEMPIO****4.37 APPROFONDIMENTI**

- <http://progettomatematica.dm.unibo.it/Permutazioni/fr6.htm>

4.38 DEFINIZIONE

L'ordine o periodo di un ciclo è uguale al numero di elementi del ciclo.

4.39 NOTAZIONE**4.40 ESEMPIO**

Il ciclo (123) ha ordine 3.

4.41 APPROFONDIMENTI

- FAQ <https://it.answers.yahoo.com/question/index?qid=20090214091406AAUSspi>
- TESI: Il gruppo simmetrico S_n [[simmetrico1](#)]

4.42 DEFINIZIONE

Un 2-ciclo si chiama anche scambio o trasposizione

4.43 NOTAZIONE**4.44 ESEMPIO**

(12)

4.45 APPROFONDIMENTI

- <http://web.tiscali.it/algebraastratta/mInsiemi/Permutazioni.htm>

4.46 DEFINIZIONE

Due permutazioni α e β si definiscono disgiunte se gli oggetti che non sono fissi per una permutazione sono fissi per l'altra, ovvero se:

$$(X \setminus F(\alpha)) \cap (X \setminus F(\beta)) = \emptyset$$

4.47 NOTAZIONE**4.48 ESEMPIO 1**

Per esempio, (123) e (45) sono disgiunti, ma (123) e (124) no.

4.49 ESEMPIO 2

In S_8 , $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ sono disgiunte, infatti $\{1, 3, 4, 7\} \cap \{2, 8\} = \emptyset$

4.50 APPROFONDIMENTI

- TESI DI LAUREA: Il gruppo simmetrico S_n [simmetrico1]

4.51 DEFINITION

A derangement is a permutation of the elements of a set, such that no element appears in its original position. [derangement]

4.52 NOTATION

The number of derangement of a set of size n , usually written D_n , d_n , or $!n$, is called the "derangement number" or "de Montmort number". (These numbers are generalized to rencontres numbers). [derangement]

The number of derangements of an n -element set is called the n th derangement number or rencontres number, or the subfactorial of n and is sometimes denoted $!n$ or D_n

4.53 FORMULA DERANGEMENT

$$d_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

4.54 FORMULA PARTIAL DERANGEMENT

La formula precedente è utilizzata quando vogliamo il numero delle permutazioni (o casi favorevoli, a volte negli esercizi) che hanno fixed point uguale a 0. In generale per $k > 0$ dove k rappresenta il numero di fixed point, la formula diventa:

$$d_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

4.55 NOTE

In altre parole, il derangment è un sottoinsieme dell'insieme delle permutazioni formato dalle permutazioni che non hanno punti fissi, cioè in cui nessun elemento è al suo posto.

4.56 HISTORY

The problem of counting derangements was first considered by Pierre Raymond de Montmort in 1708; he solved it in 1713, as did Nicholas Bernoulli at about the same time. [**derangement**]

4.57 APPROFONDIMENTI

- [WIKIPEDIA: Derangement](#)
- [DISPENSA: Derangement.pdf](#)
- [OEIS: Number of derangement](#)

4.58 DEFINIZIONE

Il principio di inclusione-esclusione è un'identità che mette in relazione la cardinalità di un insieme, espresso come unione di insiemi finiti, con le cardinalità di intersezioni tra questi insiemi.

4.59 HISTORY

IL principio è stato utilizzato da Nicolaus II Bernoulli (1695-1726); la formula viene attribuita ad Abraham de Moivre (1667-1754); per il suo utilizzo e per la comprensione della sua portata vengono ricordati Joseph Sylvester (1814-1897) ed Henri Poincaré (1854-1912).

4.60 APPROFONDIMENTI

- PAPER [[pinclescl](#)]

Funzioni elementari

- [Tangent](#)
- [Arcsine](#)
- Valore assoluto, esponenziali, logaritmi, radici, equazioni e disequazioni
- [Valore assoluto](#)
- [Funzione esponenziale](#)

4.61 Analisi I

- Funzione continua
- Limite
- TEOREMA di Weierstrass. Una funzione continua in un insieme E compatto ha massimo e minimo.
- Successione
- Derivata
- Integrale
- Lebesgue

4.62 Analisi II

- Serie in R e C .
- Successioni e serie di funzioni: convergenza puntuale e uniforme.
- Serie di potenze.
- Sviluppabilità in serie di Taylor.
- Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali.
- Teoremi del valor medio.
- Formula di Taylor.
- Funzioni convesse.
- Massimi e minimi locali.
- Invertibilità locale, funzioni implicite.
- Estremi vincolati (moltiplicatori di Lagrange).
- Il teorema del punto fisso per le contrazioni.
- Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie, problema di Cauchy: esistenza locale e prolungabilità delle soluzioni; metodi risolutivi per equazioni di tipo particolare.
- Equazioni e sistemi lineari: integrale generale, risoluzione di equazioni e sistemi a coefficienti costanti.
- Elementi di teoria della misura e integrazione secondo Lebesgue in R^N .
- Cenni su integrali curvilinei, campi vettoriali, potenziale.

4.63 Analisi superiore

- Elementi di teoria astratta della misura.
- Misure di Borel e di Radon.
- Decomposizione di Lebesgue, Teorema di Radon-Nikodym.
- Spazi L^p : completezza, densità di alcune classi di funzioni (funzioni semplici, funzioni continue), regolarizzazione (mollificatori di Friedrichs).
- Spazi di Banach e spazi di Hilbert.
- Teorema di Baire.
- Teoremi di Hahn-Banach, di Banach-Steinhaus e del grafico chiuso.
- Trasformata di Fourier in L^1 , nello spazio di Schwarz S e in L^2 .
- Derivate deboli e spazi di Sobolev.
- Teorema di Lax-Milgram e problema di Dirichlet per operatori ellittici del secondo ordine.

Capitolo 5

Geometria

5.1 Introduzione

Lo scopo di queste pagine è di mettere lo studente in grado di apprendere in maniera autonoma i concetti e gli strumenti della geometria. Le pagine sono rivolte a studenti dei corsi di Matematica in quanto le conoscenze sono presentate sotto forma di definizioni, teoremi e relative dimostrazioni applicando le tecniche e gli strumenti della logica matematica. I concetti, seppur presentati il più possibile in maniera formale, sono accompagnati da commenti scritti con il linguaggio dello studente. Infatti, vengono associate al formalismo puro tipico della matematica moderna un linguaggio comune e comprensibile a tutti. Per questo si cerca di spiegare parola per parola il significato dei termini delle definizioni, dei teoremi e di ogni altro enunciato. Le pagine di teoria sono accompagnate da esercitazioni pratiche sia di esercizi ed esami svolti e sia di esercizi da svolgere in autonomia. Altro obiettivo è quello di contenere in un'unica trattazione tutto il sapere matematico necessario per superare tutti gli esami di geometria proposti nei corsi universitari di Matematica e di ogni altro corso di laurea che include anche lo studio della geometria. Le pagine sono strutturate in un indice in cui si trova il syllabus (il nostro programma di studio) e di una pagina per ogni concetto. Le pagine sono scritte in latex e trasformate in html per la visualizzazione. E' possibile convertire anche in formato pdf.

5.1.1 I link

Ogni pagina che espone un concetto contiene un certo numero di link. I link che mostrano l'url, per esempio: <http://calvino.polito.it/~tedeschi/geometria/>, sono link esterni al documento. I link che non mostrano l'url, per esempio: [Geometria euclidea](#), sono link interni. Se cliccate su un link esterno relativo a esercizi allora tutto bene ma se cliccate link esterni di teoria può darsi che la pagina non sia completa o sia scritta in maniera non del tutto comprensibile. In quest'ultimo caso potete avvisare i partecipanti al progetto, aprendo un issue su github.

5.1.2 Prerequisites

Costanza nello studio, dedicare il giusto tempo, meglio un pò al giorno tutti i giorni.

5.2 Geometria Euclidea

La geometria Euclidea bla bla bla

Definizione 5.2.1. *Si chiama geometria euclidea la classica geometria che si studia alle scuole elementari, medie e superiori. E' quella che si basa sugli Elementi di Euclide dove i concetti fondamentali (ovvero gli assiomi) sono quelli di punto, retta, etc.*

Definizione 5.2.2. *Si chiama segmento orientato (non banale) un segmento su cui sia stato scelto un verso, ovvero su cui si sia fissato un ordine tra i due estremi.*

Definizione 5.2.3. *Si chiama segmento orientato banale è quello che inizia in un punto A e finisce sempre in A .*

Definizione 5.2.4. *Si chiama insieme dei segmenti orientati l'insieme dei segmenti orientati.*

Osservazione 5.2.5. Ovviamente l'insieme dei segmenti orientati contiene anche il segmento orientato banale per definizione.

Definizione 5.2.6. *L'equipollenza è una relazione di equivalenza tra due segmenti orientati dell'insieme dei segmenti orientati.*

Definizione 5.2.7. *Si chiama vettore geometrico dello (o nello) spazio*

5.3 Vettore

5.3.1 Vettore colonna, vettore riga

Un vettore in uno spazio n -dimensionale è un insieme ordinato formato da n valori.

5.3.2 Vettore in geometria mono, bi e tri-dimensionale

Un vettore è un oggetto che ha una direzione e una lunghezza. In questo caso si dimostrerà che un vettore può essere rappresentato come da definizione precedente.

5.3.3 Componenti di un vettore

5.3.4 Rappresentazione canonica

5.3.5 Lunghezza di un vettore in R^n

The length of a vector v in R^n is the square root of the sum of the squares of its components.

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

This is a natural generalization of the Pythagorean Theorem.

5.3.6 dot product or scalar product

The dot product (or inner product or scalar product) of two n -component real vectors is the linear combination of their components.

$$uv = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$

squares of its components.

5.3.7 NOTAZIONE

5.3.8 NOTE

Le due definizioni sono equivalenti nel senso che si possono rappresentare i vettori della definizione 2 come vettori della definizione 1.

Attenzione alla definizione di vettore libero.

Attenzione all'uguaglianza tra due vettori. Due vettori sono uguali quando hanno la stessa rappresentazione canonica.

5.4 Algebra Lineare

5.5 Introduzione tratta dal libro "Introduzione all'algebra lineare" Prof. Fiorese-Morigi

Le applicazioni lineari sono funzioni tra spazi vettoriali che ne rispettano la struttura, cioè sono compatibili con le operazioni di somma tra vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Come vedremo le applicazioni lineari si rappresentano in modo molto efficace attraverso le matrici. Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre il concetto di applicazione lineare e capire come sia possibile associare univocamente una matrice ad ogni applicazione lineare tra R^n e R^m , una volta fissata in entrambi gli spazi la base canonica. Studieremo poi il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare fino ad arrivare al Teorema della dimensione, che rappresenta uno dei risultati più importanti della teoria sugli spazi vettoriali di dimensione finita.

Syllabus Algebra Lineare

Spazi Vettoriali

- Vettore
- Coordinate di un vettore
- Spazio Vettoriale
- Sottospazio vettoriale
- Combinazione lineare
- Spazio generato dai vettori v_1, \dots, v_k
- Sistema di generatori
- Versore
- Interdipendenza lineare (Indipendenza lineare)
- Base di uno spazio vettoriale
- Base canonica
- Matrice di cambiamento di base
- Criterio di indipendenza
- Estrazione di una base
- Completamento a una base
- Dimensione di uno spazio vettoriale
- Componenti
- Somma diretta e somma
- Spazi quozienti
- Duale

Matrici

- [Matrice](#)
- Matrici identità (identica)
- Matrice nulla
- Matrice opposta
- [Insieme delle matrici \$m \times n\$: \$M_{m,n}\(K\)\$](#)
- Matrice trasposta
- Properties of Transpose Matrices: <http://www.math.nyu.edu/~neylon/linalgfall04/project1/dj/proptranspose.htm>
- Help with proving that the transpose of the product of any number of matrices is equal to the product of their transposes in reverse.
- La trasposta della trasposta è la matrice stessa
- La trasposta della somma di due matrici è uguale alla somma delle due matrici trasposte
- L'ordine delle matrici si inverte per la moltiplicazione
- Se c è uno scalare, la trasposta di uno scalare è lo scalare invariato
- Nel caso di matrici quadrate, il determinante della trasposta è uguale al determinante della matrice iniziale
- La trasposta di una matrice invertibile è ancora invertibile e la sua inversa è la trasposta dell'inversa della matrice iniziale
- Se A è una matrice quadrata, allora i suoi autovalori sono uguali agli autovalori della sua trasposta
- [Operazione di somma tra matrici](#)
- [Operazione di prodotto tra matrici](#)
- Properties of matrix multiplication: <https://www.khanacademy.org/math/precalculus/precalt-matrices/properties-of-matrix-multiplication/a/properties-of-matrix-multiplication>
- Operazione di prodotto tra uno scalare ed una matrice
- [Matrice Quadrata](#)
- [Ordine di una matrice quadrata](#)
- [Determinante di una matrice quadrata](#)
- [Polinomio caratteristico di una matrice](#)
- [Autovalori di una matrice quadrata](#)
- [Autovalore](#)
- Autovettore
- Molteplicità algebrica e geometrica
- Matrice diagonale
- [Matrice diagonalizzabile](#)

Sistemi lineari

- Sistema di che cosa?
- Sistema lineare e matrici.
- Sistema lineare
- Sistema omogeneo
- Risoluzione

Applicazioni lineari

- [Introduzione alle applicazioni lineari](#)
- Applicazione lineare
- Nucleo di un'applicazione lineare
- Immagine di un'applicazione lineare
- Base di un'applicazione lineare
- Cambio di base per un'applicazione lineare
- [Applicazione lineare iniettiva](#)
- [Dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare](#)
- Teorema della dimensione
- [Matrice associata ad un'applicazione lineare tra spazi vettoriali](#)
- Isomorfismo di applicazioni lineari
- Calcolo del nucleo e dell'immagine
- Diagonalizzazione
- Applicazione lineare diagonalizzabile

5.6 DEFINIZIONE

Un'applicazione lineare è iniettiva se il nucleo dell'applicazione è il vettore nullo.

5.7 DEFINIZIONE

La dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare è uguale al rango della matrice associata all'applicazione lineare.

5.8 DEFINIZIONE

La matrice associata ad un'applicazione lineare tra spazi vettoriali si ottiene mettendo nelle colonne della matrice le immagini dei vettori della base canonica del dominio (o di altra base data).

5.9 NOTAZIONE

5.10 ESEMPIO

5.11 APPROFONDIMENTI

- <http://www.dm.unibo.it/~ida/NoteGeometria1-25-5-16.pdf>
- <http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/book.pdf>
- <http://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/applicazioni-lineari/771-calcolare-dimensione.html>

5.12 Matrice

$$A = (a_{ij})_{i=1\dots m, j=1\dots n}$$

la seguente notazione ritengo sia errata: $A = a_{ij}$

Perché stiamo cercando di assegnare un elemento di una matrice ad una matrice.

Pertanto sarebbe corretto scrivere: $A = (a_{ij})$ oppure in maniera completa $A = (a_{ij})_{i=1\dots m, j=1\dots n}$

5.13 DEFINIZIONE

Matrice che ha lo stesso numero di righe e colonne.

5.14 DEFINIZIONE

L'ordine di una matrice quadrata è il numero di righe o equivalentemente il numero di colonne.

5.15 ESEMPIO

Una matrice quadrata con n righe ed n colonne ha ordine n .

5.16 DEFINIZIONE

Sia A una **matrice quadrata**, t una incognita (la nostra x) e I_n la matrice identità di **ordine** n . Il polinomio caratteristico (nella incognita t) di una matrice è uguale al **determinante** della matrice:

$$A - tI_n$$

scriviamo:

$$p_A(t) := \det(A - tI_n)$$

5.17 Introduzione

Sotto talune condizione riguardo ai tipi di matrice, cioè sul numero delle righe e delle colonne che le matrici che si intendono moltiplicare devono avere, definiamo un'operazione che chiamiamo *operazione di prodotto tra matrici* o *prodotto tra matrici* o *prodotto riga per colonna*. Bene, diciamolo subito, tra tutte le matrici dell'insieme $M_{m,n}$ è possibile moltiplicare tra di loro quelle in cui il numero di colonne della prima matrice corrisponde al numero di righe della seconda matrice. Per questo motivo viene chiamato prodotto righe per colonne.

Altra cosa da tenere presente è il fatto che la forma della matrice risultato può essere diversa da quella delle matrici che abbiamo moltiplicato. Ed infatti, la matrice risultato sarà composta da m righe ed n colonne, dove, m è il numero di righe della prima matrice e n è il numero di colonne della seconda matrice.

Definizione 5.17.1. Se A è una matrice $m \times s$ e B è una matrice $s \times n$, definiamo il prodotto c_{ij} della riga i di A e della colonna j di B nel modo seguente:

$$c_{ij} = (a_{i1} \quad \dots \quad a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \dots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{is}b_{sj} = \sum_{h=1}^s a_{ih}b_{hj}$$

In altre parole, per ricavare l'elemento di posto (i, j) bisogna eseguire il prodotto riga per colonna tra la riga i e la colonna j .

Analogamente all'operazione di somma tra matrici, quello che è importante capire è quale formula è utilizzata per ricavare l'elemento di posto (i, j) . Solo che, nel caso della somma tra matrici, l'operazione è banale ed immediata, qui invece l'operatore di sommatoria potrebbe dare qualche problema agli inizi, ma poi ci si fa l'abitudine.

5.18 DEFINIZIONE

L'operazione di somma tra matrici si effettua applicando l'operazione di somma del campo K di cui sono fatti gli elementi delle matrici. Le matrici devono avere lo stesso numero di righe e di colonne.

5.19 SIMBOLI

$$A = B + C$$

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$

5.20 DEFINIZIONE

Gli autovalori di una matrice quadrata sono le radici del polinomio caratteristico.

5.21 DEFINIZIONE

L'insieme delle matrici $m \times n$: $M_{m,n}(K)$ ha una struttura di spazio vettoriale con l'operazione di somma tra matrici.

5.22 Definizione (1)

Una matrice quadrata A si dice *diagonalizzabile* se esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

5.23 Definizione (2)

Una matrice è diagonalizzabile se:

1. Il numero degli autovalori, contati con la loro molteplicità, sia pari all'ordine della matrice.
2. La molteplicità geometrica di ciascun autovettore coincida con la relativa molteplicità algebrica.

5.24 APPROFONDIMENTI

- <http://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/matrici-e-vettori/1581-matrice-diagonalizzabile.html>

5.25 DEFINIZIONE

Si chiama Spazio Vettoriale una qualunque struttura matematica che possiede determinate proprietà.

5.26 Descrizione

Affinché si possa parlare di spazio vettoriale occorrono almeno due insiemi generalmente indicati con V e K . Tra gli elementi di V è definita una funzione che associa ad ogni coppia di elementi di V un elemento di V . Tale funzione viene chiamata operazione di somma.

5.27 Proprietà

5.28 ESEMPIO

L'insieme dei numeri reali con l'operazione di somma con l'operazione di somma e prodotto. L'insieme dei vettori geometrici dello spazio con l'operazione di somma tra vettori e prodotti di vettori per uno scalare.

5.29 DEFINIZIONE

A basis for a vector space is a sequence of vectors that is linearly independent and that spans the space.

5.30 NOTE

A vector space can have many different bases.
Tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori.

5.31 Definizione

buona bibliografia qui: https://it.wikipedia.org/wiki/Coordinate_di_un_vettore

5.32 DEFINIZIONE

The dimension of a vector space is the number of vectors in any of its bases.

Capitolo 6

Computer Science

6.1 Latex

Multicolumns

```
\usepackage{multicol}

\begin{multicols}{3}
[
\section{First Section}
All human things are subject to decay. And when fate summons, Monarchs must obey.
]
Hello, here is some text without a meaning.
\vfill\null
\columnbreak

This text should show what
a printed text will look like at this place.
\vfill\null
\columnbreak

If you read this text, you will get no information. Really? Is there
no information? Is there...
\end{multicols}
```

Latex to html

How to insert custom css in htlatex:

In fase di studio abbiamo:

<https://tex.stackexchange.com/questions/202229/how-can-i-override-tex4hts-css-in-a-single-css-file>
<https://github.com/michal-h21/helpers4ht/wiki/tex4ht-tutorial>
<https://www.tug.org/applications/tex4ht/mn-commands.html#QQ1-9-41>
<https://tex.stackexchange.com/questions/179345/changing-a-tex4ht-css-class>
<http://www.tug.org/applications/tex4ht/mn11.html#mn21-1>
<http://www.tug.org/applications/tex4ht/mn21.html#mn21-3>
<https://tex.stackexchange.com/questions/62729/specify-output-directory-for-htlatex>

- Simboli: <http://web.ift.uib.no/Teori/KURS/WRK/TeX/symALL.html>
- Simboli: http://latex.wikia.com/wiki/List_of_LaTeX_symbols

- Formule matematiche: https://it.wikipedia.org/wiki/Aiuto:Formule_matematiche_TeX
- Accenti: <http://www.dmi.units.it/~logar/didattica/corsoLatex/lezione2B.pdf>
- input vs include: <https://tex.stackexchange.com/questions/246/when-should-i-use-input-vs-include>
- Document title: https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Title_Creation
- Del CSS precompilato: <https://github.com/baudo2048/latex-simple-css/tree/master>
- documentclass: <http://www.guit.sssup.it/phpbb/viewtopic.php?t=9634&view=next>

6.2 APPROFONDIMENTI

- https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Special_Characters
- <http://rpi.edu/dept/arc/training/latex/resumes/>
- <https://tex.stackexchange.com/questions/14559/moderncv-themes>
- http://python.net/~goodger/professional/cv/resume_David_Goodger.pdf

6.3 Introduzione

Coming soon...

6.4 Generale

- Contabilità
- Bilanci
- Controllo di gestione
- Logistica
- Cash Flow

6.5 A risk Perspective

- RISK AND RISK MANAGEMENT
- THE INVESTMENT INDUSTRY
- BASEL - Overview and Scope
- MIFID - A Risk Perspective
- UCITS - Key aspects
- MARKET RISK
- OPERATIONAL RISK
- CREDIT RISK
- ESMA (ex CESR) - Role and scope
- ESMA Risk Dashboard: monitoring the Risks

- EMIR - Scope and main obligation
- CCPs - Scope and key aspects
- ISDA and Collateral management

6.6 Applicazioni Big Data in finanza

- Introduzione, obiettivi e strumenti
- Introduzione ai problemi di classificazione
- Metodi di ricampionamento: cross-validation, Monte Carlo e bootstrap
- Metodi di regolarizzazione: Ridge, Lasso e tecniche collegate
- Modelli non lineari
- Metodi basati su alberi di classificazione e regressione

6.7 Calcolo stocastico per la finanza

- Spazi di probabilità, variabili aleatorie e distribuzioni
- Indipendenza, prodotto di misure e distribuzione congiunta
- Teorema di Radon-Nikodym, cambio di misura di probabilità e attesa condizionata
- Processi stocastici, moto Browniano e martingale
- Il modello binomiale
- Integrale stocastico e calcolo di Ito multidimensionale. Equazioni differenziali stocastiche e risoluzione numerica
- Teorema di rappresentazione delle martingale e Teorema di Girsanov
- Modello di Black&Scholes (B&S): equazioni differenziali paraboliche, valutazione neutrale al rischio e copertura di derivati nel modello B&S
- Analisi della volatilità: volatilità storica e implicita, effetto smile e struttura a termine della volatilità. Cenni ad estensioni del modello di B&S: modelli CEV, shifted lognormal, volatilità locale, path-dependent e stocastica
- Cenni a metodi di approssimazione numerica: metodo Monte Carlo e metodo delle differenze finite
- Definizione e proprietà dei processi di Lévy
- Processi di Lévy esponenziali e valutazione di derivati
- Metodi di Fourier

6.8 Counterparty Credit Risk

The aim of the course is to introduce the basic concepts underlying Counterparty Credit Risk (CCR) in terms of:

- Regulatory requirements
- Economic nature of the risk
- Risk mitigation
- Risk monitoring
- Pricing

The course will treat the main risk management aspects related to both: i) modeling credit exposure and ii) pricing counterparty risk.

6.9 Equazioni alle derivate parziali e metodi di approssimazione numerica

Il corso fornisce le competenze di base per trattare le equazioni differenziali di Black & Scholes relative alle opzioni europee, alle opzioni americane e alle opzioni asiatiche. Verranno adeguatamente approfonditi gli aspetti dell'implementazione numerica.

Gli argomenti trattati sono i seguenti:

Teoria generale delle equazioni differenziali alle derivate parziali di diffusione e metodi di approssimazione numerica della soluzione. Applicazioni all'equazione di Black & Scholes e ad alcuni modelli a volatilità stocastica; Equazioni differenziali di tipo diffusione-trasporto: teoria generale e metodi numerici. Applicazioni alle opzioni asiatiche e ad un modello per le opzioni europee dove la volatilità dipende dalla storia del titolo sottostante; Problemi relativi alle equazioni differenziali con ostacolo. Applicazioni alle opzioni americane, sia per il classico modello di Black & Scholes, sia per le opzioni che dipendano dalla storia del titolo sottostante. Il materiale didattico verrà distribuito nel corso delle lezioni.

6.10 Excel e VBA per la finanza

Il corso offre una panoramica di Microsoft Excel ® utilizzato come strumento di analisi finanziaria.

In particolare, dopo una prima parte dedicata alle funzioni di base del software, verranno affrontati i problemi applicativi inerenti all'ambito matematico-finanziario, utilizzando anche le potenzialità offerte dal linguaggio Visual Basic integrato in Excel (VBA).

Gli argomenti del corso saranno:

Presentazione di Excel ® Funzioni di base del foglio elettronico Creazione di grafici e tabelle Tabelle pivot e reportistica Implementazione di procedure automatiche Applicazioni alla matematica finanziaria: in particolare simulazioni Montecarlo per il pricing di prodotti derivati.

6.11 Finanza Computazionale

Metodi numerici per la valutazione di derivati finanziari:

Introduzione alla programmazione con Matlab. Grafica in Matlab. Algebra lineare in Matlab con cenni sulla vettorializzazione del codice. Cenni di calcolo numerico (errori in aritmetica finita). Risoluzione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali. PDE paraboliche: differenze finite, metodi implicito, esplicito, Crank-Nicholson e theta-method. Alberi Binomiali: valutazione di opzioni europee di opzioni europee ed americane. Riduzione degli errori tramite tecnica "control-variate". Metodo Monte Carlo: generazione di scenari, approssimazione delle equazioni differenziali stocastiche, metodi di riduzione della varianza. Metodi basati sulla trasformata di Fourier discreta.

Trasformata di Fourier e sue proprietà. Metodi per la valutazioni di opzioni europee. Calibrazione di modelli a dati di mercato. - Tutti gli esercizi verranno svolti in Matlab(R).

Testi di riferimento:

- Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Paul Glasserman, Springer, 2004
- Numerical Methods in Finance and Economics (seconda edizione), Paolo Brandimarte, Wiley, 2006
- Numerical Methods and Optimization in Finance, Manfred Gilli, Dietmar Maringer and Enrico Schumann, Academic Press, 2011

6.12 Fixed Income Trading

Il corso ha l'obiettivo di approfondire le peculiarità del mercato dei tassi di interesse, con approfondimenti sul mercato obbligazionario e sugli strumenti derivati. Lo scopo è quello di spiegare le relazioni esistenti tra mercati segmentati e a volte inefficienti e di costruire modelli di pricing che tengano conto di queste caratteristiche. Verranno analizzati casi concreti per documentare come i modelli matematici teorici vengano applicati nella realtà del trading, con quali limiti e con quali opportunità.

Gli argomenti trattati sono i seguenti:

Tassi risk free Bootstrapping Tassi spot e tassi forward Pricing di obbligazioni Building blocks Determinazione del "Fair Price" Analisi di sensitività Relative value (Asset swap vs Credit Default Swap) Trading Inefficienze e opportunità di mercato Arbitraggi e algorithmic trading

6.13 Introduzione all'ambiente e al linguaggio Matlab

Introduzione all'ambiente Matlab. Linguaggio di programmazione Matlab: uso di array, costrutti di programmazione, funzioni. Funzioni predefinite Matlab. Funzioni matematiche, manipolazione di array, funzioni grafiche 2D e 3D. Esempi ed esercizi guidati in laboratorio.

6.14 Matematica finanziaria e strumenti di mercato

Il corso si propone di fornire le nozioni elementari per la comprensione delle leggi che regolano i mercati finanziari. Verranno introdotti i principali strumenti del mercato dei capitali, della liquidità e del credito.

Il corso si concluderà con una breve introduzione ai principali modelli di asset allocation.

Gli argomenti trattati sono i seguenti:

Introduzione alla matematica finanziaria: Regimi di capitalizzazione, valore attuale e sconto, tassi equivalenti e basi temporali. Rendite e costituzione di un capitale. Ammortamento di un prestito, tassi reali, tassi nominali, tasso di inflazione. Introduzione al mercato dei capitali: Libor, Euribor, Eonia, Depositi, Repo. Derivati di tasso (future, opzioni e IRS). Bond and loans (tasso fisso, zero coupon, tasso variabile, inflation linked). Introduzione agli strumenti azionari e derivati: Azioni ed asset pricing, opzioni europee, relazioni di parità, strategie. Opzioni esotiche. Derivati sul credito: CDS e Asset Swaps. Introduzione all'asset allocation: definizione di indici e benchmark. Modello di Markowitz, Sharpe. Modello di allocazione alla Black-Litterman. - Il materiale didattico verrà distribuito nel corso delle lezioni.

6.15 Metodi di calibrazione

Gli argomenti trattati sono i seguenti:

Identificazione di parametri in equazioni differenziali paraboliche. Problema dei minimi quadrati non lineari. Risoluzione numerica di un problema di minimi quadrati non lineari: condizioni di ottimalità. Metodi di discesa: ordine di convergenza. Metodi del gradiente e metodi quasi Newton. Funzione Matlab LSQNONLIN. Esempi di applicazione in ambito finanziario in Matlab.

6.16 Metodi econometrici in finanza

Introduzione, obiettivi e strumenti Rendimenti finanziari: definizioni e proprietà Strumenti statistici per l'analisi descrittiva e grafica dei dati Distribuzioni di probabilità univariate: definizioni e proprietà Distribuzioni di probabilità multivariate: definizioni e proprietà Modello di regressione lineare e minimi quadrati ordinari Capital Asset Pricing Model Modello di regressione non lineare e minimi quadrati non lineari Estensioni del modello di regressione Modelli lineari per serie storiche Modelli GARCH Cointegrazione.

6.17 Misurazione del rischio finanziario

Il corso si propone di introdurre le principali idee e tecniche che stanno alla base dell'attività di misurazione del rischio finanziario, con particolare riferimento al rischio di mercato e di liquidità.

Gli argomenti trattati sono:

Tipologie di rischi finanziari. Fattori di rischio e variabile Profit&Loss (PL). Approccio "sensitivities", approssimazioni Delta e Delta-Gamma Quantili, Value-at-Risk e Expected Shortfall. Metodo storico, semplice e pesato. Metodo analitico: PL lineari con 1 e con più fattori di rischio. PL non-lineari, metodo analitico e metodo Monte Carlo. Back-testing di VaR e ES Approccio degli "stress-test". Normativa di Basilea III: principali aspetti operativi. Microstruttura dei mercati e misurazione del rischio di liquidità.

6.18 Misurazione del rischio in Solvency 2

Il corso ha per oggetto la presentazione della nuova normativa di vigilanza prudenziale Solvency II prevista per le compagnie assicurative a partire dal 1 gennaio 2016 con particolare focus sulla modalità di misurazione del rischio.

In particolare verranno descritti gli elementi di base necessari per la determinazione del market consistent balancesheet Solvency II e degli own funds e verrà descritta la modalità di misurazione del rischio e del Solvency Capital Requirement (SCR) previsti dalla normativa in base alla formula standard.

Inoltre, verranno presentati i requisiti previsti dalla normativa per le imprese che decidono di dotarsi di un modello interno per la misurazione dei rischi e verrà riportata una breve descrizione del modello interno sviluppato presso il Gruppo Unipol.

6.19 Misure di rischio finanziario: sviluppi recenti

Durante il corso, che si pone come naturale complemento a quello di "Misurazione del rischio finanziario", verranno presentati alcuni recenti sviluppi in tema di misure di rischio che stanno avendo un significativo impatto operativo.

Gli argomenti trattati saranno:

Coerenza di una misura di rischio Forecasting, backtesting ed "elicibility" di una misura di rischio Rischio di stima e di modello.

6.20 Modern Interest Rates

- Interest rate basics

Dimensions and units in finance and other disciplines Interest rates definition and conventions Multiple types of interest rates - Interest rate market

Deposits The money market: central banks, interbank, retail Libor/Euribor/Eonia/Repo interest rates How the market changed: stylized facts and overview of market data Symmetry breaking and market segmentation after the credit crunch Credit and liquidity components Counterparty risk and collateral From Libor to OIS discounting - Modern interest rate modelling

Notation and basic assumptions Short rate, bank account, Zero Coupon Bond, probability measure Feynman-Kac and Girsanov theorems Replication Black-Scholes-Merton, modern perspective Multiple funding sources Funding and funding value adjustment (FVA) Collateral: perfect, partial, hedge collateral Stochastic funding rates, multiple currencies - Pricing of linear interest rate derivatives

A simple credit model to explain multiple interest rates Spot, forward and instantaneous forward rates Forward Rate Agreement Futures Overnight Indexed Swap Swap, forward swap measure Basis Swap Bond - Multiple-curve framework

Modern multiple curve pricing & hedging market practice Multiple curves construction Selection of bootstrapping instruments, market data Bootstrapping formulas Interpolation Handling negative rates Exogenous bootstrapping Turn of year effect Multiple curves, multiple deltas, multiple hedging Performance, Sanity checks Lab session: yield curve bootstrapping implementation - Forward rate modelling: single rates

Black's model Beyond the Black's model Stochastic volatility SABR model Handling negative rates, shifted Black, shifted SABR - Pricing of interest rate volatility product

Cap/Floor Swaption, cash vs physical settlement Market quotations - Multiple volatility cubes

Modern multiple curve, multiple volatility market practice Main issues Swaptions volatility cube Caps/Floors volatility cube Handling multiple rate tenors, Kienitz model Lab session: SABR implementation - Convexity adjustment and Constant Maturity Swaps

IRS convexity adjustment Constant Maturity Swaps CMS convexity adjustment SABR calibration to Swaptions and CMSs CMS Options CMS Spread Options Bootstrapping implied correlations - Short rate modelling and forward rate modelling

Instantaneous forward rates: the HJM model Short rate models, Vasicek and Hull-White models Libor Market Model (LMM) Dealing with multiple curves and negative rates - Conclusions and references

6.21 Rischio di credito

Nel corso ci si propone di fornire modelli e nozioni matematico-probabilistiche di base per studiare i problemi legati al rischio di credito, in particolare, il prezzaggio di prodotti sensibili al rischio di credito (defaultable zero-coupon bonds, credit default swaps, ecc.). Particolare attenzione sarà portata ai modelli a struttura affine.

Si studierà dapprima il caso di una sola controparte fallimentare per poi estendere lo studio anche al rischio di credito di portafoglio.

- Testo di riferimento: A.J. McNeil, R.Frey, P.Embrechts, "Quantitative Risk Management", Princeton Series in Finance, Princeton University Press 2005, edizione rivista 2015. Capitolo 10.

Altri riferimenti:

- T.R. Bielecki, M.Rutkowski, "Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging", Springer Finance 2004. - D. Filipovic, "Term Structure Models", Springer Verlag 2009. Capitolo 12. - D. Brigo, F. Mercurio, "Interest Rate Models - Theory and Practice", Springer Verlag. Capitoli 21,22,23 della seconda edizione 2006.

6.22 Struttura a termine dei tassi

Durante il corso verrà fornita un'introduzione alla modellistica della struttura a termine dei tassi (modelli per il tasso spot; impostazione secondo Heath-Jarrow-Morton per i tassi istantanei a termine; modelli di mercato), così come delle tecniche di base utilizzate nello studio dei problemi legati ai tassi di interesse (tecniche legate alla struttura a termine affine; tecniche di cambio di numerario).

Accenni verranno fatti anche ai problemi di calibrazione dei modelli ai dati di mercato e verrà studiato il prezzaggio dei principali derivati dei tassi (FRAs, Caps e Floors, Swaptions). Per facilitare la comprensione, ci si concentrerà principalmente sulla situazione pre-crisi di modelli a

curva singola con accenno anche ai modelli muti-curva che sono stati introdotti dopo la grande crisi.

Testi di riferimento:

- T. Bjoerk, "Arbitrage Theory in Continuous Time", Oxford University Press; 3a edizione 2009. - D. Brigo e F. Mercurio, "Interest Rate Models, Theory and Practice", Springer-Verlag, 2da edizione 2006. - Z. Grbac e W.J. Runggaldier, "Interest rate modeling: post-crisis challenges and approaches", Springer Briefs in Quantitative Finance, 2015.

6.23 RESOURCES

- <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-s096-topics-in-mathematics-with-applications-in-video-lectures/lecture-1-introduction-financial-terms-and-concepts/>, sono arrivato al minuto 26
- <http://www.dm.unibo.it/finanza/>

6.24 Journals

- <http://www.scielo.br/>

6.25 Books, Buk, Libri

- <http://www.scielo.br/>
- <http://gen.lib.rus.ec/>
- Libri

6.26 Pagine simili

- <http://www.ripmat.it/index.html>
- <http://www.youmath.it/>
- <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/index.html>
- <http://calvino.polito.it/~casnati/Geometria15BCG/dispensegeometria15BCG.htm>

6.27 Corsi matematica triennale

Italia

- Catania: <http://web.dmi.unict.it/Didattica/Laurea%20Triennale%20in%20Matematica%20L-35/Insegnamenti%20Attivati>
- Cosenza: <https://www.mat.unical.it/matematica/CorsiTriennale>
- Bologna: <http://corsi.unibo.it/laurea-matematica/Pagine/PianiDidattici.aspx>
- Messina: http://www.unime.it/it/didattica/offerta_didattica/_offerta/2016/10050/2011/9999
- Padova: <http://matematica.math.unipd.it/laurea/assettodidatticolaura.html>
- Palermo: <http://www.unipa.it/dipartimenti/dimatematicaeinformatica/cds/matematica2102/?pagina=insegnamenti>
- Udine: <https://www.uniud.it/it/didattica/info-didattiche/programmi-insegnamenti/laurea-matematica>

6.27.1 Deutschland

- Gottingen: <https://www.univz.uni-goettingen.de/qisserver/rds?state=wtree&search=1&trex=step&root120171=268301|267767|262440|255417&P.vx=kurz>

Corsi matematica magistrale

Italia

- Cosenza: <https://www.mat.unical.it/matematica/CorsiMagistrale>
- Padova: <http://matematica.math.unipd.it/laureamagistrale/assettoDidatticoMagistrale.html>

6.27.2 Deutschland

- Gottingen: <https://www.univz.uni-goettingen.de/qisserver/rds?state=wtree&search=1&trex=step&root120171=268301|267767|262440|260667&P.vx=kurz>

6.28 Corsi informatica magistrale

- Functional languages - Padova: <http://informatica.math.unipd.it/laureamagistrale/functionallanguages.html>

6.29 Programmi in fase di acquisizione

- Algebra 1 - Barnabei - 28357-2017/18: <http://www.scienze.unibo.it/it/corsi/insegnamenti/insegnamento/2017/412476>
- Algebra 2: <http://www.scienze.unibo.it/it/corsi/insegnamenti/insegnamento/2016/323880>

6.30 Docenti, Teachers

- Kai-Wen Lan: <http://www-users.math.umn.edu/~kwlan/academic.html>
- Monica Idà: <http://www.dm.unibo.it/~ida/>

6.31 Corsi Singoli

- Pisa: 15 per ciascun credito + 16 imposta bollo.
- Padova: 182,50 per ogni insegnamento.
- Teramo: 150 per ogni insegnamento.
- Udine: 200 per ogni insegnamento.

6.32 Varie

- Elenco università: <http://www.cestor.it/atenei/indice.htm>
- Deutch - English dictionary: <http://www.henkede.de/maple/woerterbuch.htm>
- Italiano - Tedesco: <https://it.langenscheidt.com/italiano-tedesco/>
- Italiano - Francese: <http://dizionario.reverso.net/italiano-francese/>

- Italiano - Spagnolo: <http://dizionario.reverso.net/italiano-spagnolo/>
- Dizionario di matematica tecnico si trova nella folder dei books.