Indice

1 Presentazione **7**

2 Introduzione **9**
2.1 Introduzione, Introduction 9

I Mathematical logic and foundations 11

3 Mathematical logic and foundations **13**

4 Semiotica **15**

II Combinatorics 17

5 Combinatorics **19**

6 Permutations, words, matrices **21**
6.1 Composizione di permutazioni = Prodotto di cicli 22

7 Partitions of sets **25**
7.1 Partitions, Their Properties, and Their Graphical Representation. [3] 25
7.2 Definizioni di partizione 25

III Algebraic Geometry 27

8 Algebraic Geometry **29**

9 The birth of geometry. [9] **31**
9.1 Euclidean geometry 31
9.1.1 The Theory of Conics of Apollonius 32

IV Operator Theory 35

10 Operator Theory **37**

V Geometry 39

11 Geometry 41

11.1 Introduzione . . . 41
11.1.1 I link . . . 41
11.1.2 Prerequisites . . . 41
11.2 Geometria Euclidea . . . 41
11.3 Vettore . . . 42
11.3.1 Vettore colonna, vettore riga . . . 42
11.3.2 Vettore in geometria mono, bi e tri-dimensionale . . . 42
11.3.3 Componenti di un vettore . . . 42
11.3.4 Rappresentazione canonica . . . 42
11.3.5 Lunghezza di un vettore in R^n . . . 42
11.3.6 dot product or scalar product . . . 42
11.3.7 NOTAZIONE . . . 43
11.3.8 NOTE . . . 43
11.4 Algebra Lineare . . . 43
11.5 Introduzione tratta dal libro "Introduzione all'algebra lineare" Prof. Fioresi-Morigi 43
11.6 DEFINIZIONE . . . 46
11.7 DEFINIZIONE . . . 46
11.8 DEFINIZIONE . . . 46
11.9 NOTAZIONE . . . 46
11.10ESEMPIO . . . 46
11.11APPROFONDIMENTI . . . 46
11.12Matrice . . . 46
11.13DEFINIZIONE . . . 46
11.14DEFINIZIONE . . . 46
11.15ESEMPIO . . . 46
11.16DEFINIZIONE . . . 47
11.17Introduzione . . . 47
11.18DEFINIZIONE . . . 47
11.19SIMBOLI . . . 47
11.20DEFINIZIONE . . . 47
11.21DEFINIZIONE . . . 48
11.22Definizione (1) . . . 48
11.23Definizione (2) . . . 48
11.24APPROFONDIMENTI . . . 48
11.25DEFINIZIONE . . . 48
11.26Descrizione . . . 48
11.27Proprietá . . . 48
11.28ESEMPIO . . . 48
11.29DEFINIZIONE . . . 48
11.30NOTE . . . 49
11.31Definizione . . . 49
11.32DEFINIZIONE . . . 49

VI Global analysis, analysis on manifolds **51**

12 Global analysis, analysis on manifolds **53**

13 Pareto Optimality **55**
13.1 Pareto Optimality and Social Optimality. [2] 55
13.2 Pareto Optimality. [1] 55

VII Probability **57**

14 Probability **59**

15 Definition of Probability **61**
15.1 Numero aleatorio 61
15.2 Probabilities as set functions. [8] 61

VIII Game theory, economics, social and behavioral sciences **63**

16 Game theory, economics, social and behavioral sciences **65**

17 Computational Methods **67**

18 Game theory **69**
18.1 ACHTUNG! 69
18.2 Todos 69

19 Preface **71**

20 How to study Game Theory **73**
20.1 Shift of Emphasis from Economics to Games. [3] 73

21 Introduction to Game Theory **75**

22 Games classification **77**
22.1 General Principles of Classification and of Procedure. [3] 77

23 What is a game? **79**
23.1 The Elements of the Game. [3] 79
23.2 Rappresentazione matematica degli elementi di un gioco 79

24 Axiomatic Formulation (of a Game). **81**

25 Preferences **83**
25.1 Preferences 83
25.1.1 Rational preferences 83
25.1.2 Utility representation 83

26 Randomness **85**
26.1 Discrete random variables: lotteries 85
26.2 Probabilities, set functions and voting games 85

27 Strategies v. 10/10/2017 **87**
27.0.1 Multistage games . . . 87
27.0.2 Dominated and dominant strategies . . . 87
27.1 Randomization and expected payoffs . . . 87
27.1.1 Mixed strategies . . . 87
27.1.2 Domination in mixed strategies . . . 87
27.1.3 Best responses . . . 87
27.1.4 Nash equilibrium . . . 87
27.1.5 Strong equilibrium . . . 87

28 Strategies v. 26/10/2017 **89**
28.1 Information in multistage games . . . 89
28.2 Dominated and dominant strategies . . . 90
28.3 Deletion of dominated strategies . . . 90
28.4 Equilibrium . . . 90

29 Strategy **91**
29.1 Explanation of the Termini Technici. [3] . . . 91
29.2 Rappresentazione matematica della strategia . . . 92
29.3 Dominant and dominated strategies . . . 92

30 Zero-Sum Games **93**
30.1 Preliminary Survay. [3] . . . 93
30.1.1 General viewpoints. [3] . . . 93
30.1.2 The one-person game. [3] . . . 93
30.1.3 Chance and probability. [3] . . . 93
30.1.4 The next objective. [3] . . . 93

31 Non-Zero-Sum Games **95**

32 Esercitazione 1 **97**

33 Definitions **99**
33.1 Pareto . . . 99
33.1.1 pareto-dominates . . . 99

34 Types of cooperative games **101**

35 Order: posets and lattices **103**
35.1 Order: posets and lattices . . . 103
35.1.1 Maximal chains of subsets and permutations . . . 104
35.1.2 Subset of Boolean lattices . . . 104

36 Möbius inversion **105**

37 Incidence algebra **107**
37.0.1 Incidence algebra . . . 107
37.0.2 Möbius inversion . . . 107
37.0.3 Vector spaces and bases . . . 107
37.0.4 Lattice functions . . . 107

38 Formulario di Teoria dei Giochi **109**

39 Potential games **113**
39.1 Congestion games 113

Capitolo 1

Presentazione

bla bla

Capitolo 2

Introduzione

2.1 Introduzione, Introduction

Mathematics è il tentativo di raccolta di appunti e materiale per studiare con profitto nei corsi di laurea in Matematica.

Il programma di riferimento è, principalmente, quello dell'Università di Bologna, anche se, non essendo iscritto a nessuno corso, ho cercato di integrare i programmi (syllabus) con i corsi di altre Universitá. Diciamo che la matematica é tale. Comunque, nel confrontare i vari corsi proposti dalle varie universitá mi sono accorto che argomenti trattati in geometria vengano trattati in altri corsi denominati algebra lineare oppure, geometria e algebra.

Pertanto, mi sono preso la libertá di organizzare tutti i concetti di tutte le materie in un unico corpo. Questo punto non è banale perché apre alcune questioni oggi approfondite in corsi quali *Interazione persona-computer*, *Semantic web*, *Intelligenza artificiale*, *Logica*, *Machine learning*, *Mathematical Knowledge Management*, etc.

Il materiale raccolto é ancora in fase embrionale.

Nota

Il materiale contenuto nella cartella di google drive è ad accesso limitato. Per accedere cliccare sul link seguente e seguire le istruzioni per ottenere l'accesso alla cartella. `https://drive.google.com/drive/folders/0Bx2fZ0r5vhSSSDdvWkVjNG9YQjQ`

Introduzione

I libri che trovate nella folder, sono stati raccolti seguendo la bibliografia proposta dai Docenti di Università italiane e straniere. Si trovano i classici di algebra, analisi, geometria, etc. Inoltre, ho selezionato alcuni libri perchè hanno una data stampa risalenete al massimo agli ultimi tre anni che in genere sono fatti bene perchè raccolgono le esperienze maturate studiando i testi che li hanno preceduti.

Oltre a libri, troverete dispense, papers, etc. Al momento non ho fatto distinzione tra libri o altro pdf ma ho semplicemente suddiviso il materiale seguendo più o meno le materie indicate nel Syllabus e quindi troverete le seguenti cartelle: Algebra, Analisi, Topologia, Geometria, etc.

Come utilizzare il materiale pdf

Esistono buoni articoli che ci danno una panoramica su come utilizzare un libro di testo o una dispensa. Alcuni professori, specie nelle lezioni introduttive, danno informazioni riguardanti lo studio della materia nel suo complesso e con esso anche un accenno sull'utilizzo dei libri di testo.

Parte I

Mathematical logic and foundations

Capitolo 3

Mathematical logic and foundations

Capitolo 4

Semiotica

Multirappresentazione

Parte II

Combinatorics

Capitolo 5

Combinatorics

Capitolo 6

Permutations, words, matrices

Definizione 6.0.1. *Sia X un insieme non vuoto. Si dice permutazione su X ogni applicazione bigettiva di X in se stesso.*

In generale, per indicare una permutazione si usano le lettere greche minuscole, es. σ, e la cosiddetta notazione matriciale, nella quale sono riportarte (nella seconda riga) le immagini secondo σ degli elementi di X (scritti nella prima riga):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Definizione 6.0.2 (Permutazione identica - elemento neutro rispetto alla composizione di permutazioni)**.** *In questa notazione, l'applicazione identica corrisponde ad una matrice con due righe uguali:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$$

Indicheremo tale applicazione (detta permutazione identica), più semplicemente, con il simbolo id.

Definizione 6.0.3 (Inversa di una permutazione)**.** *per ottenere l'inversa di una permutazione basta scambiare la prima e la seconda riga e riordinare la prima.*

Definizione 6.0.4 (Insieme delle permutazioni)**.** *Denoteremo con $S(X)$ l'insieme delle permutazioni su X.*

Il numero di elementi di $S(X)$ è uguale a $n!$, dove n è il numero di elementi dell'insieme X.

Definizione 6.0.5 (Ciclo di una permutazione (1))**.** *Per ciclo di una permutazione si intende il nome della notazione utilizzata per rappresentare una permutazione.*

Definizione 6.0.6 (Ciclo di una permutazione (2))**.** *Sia n un intero positivo. Si dice ciclo (o permutazione ciclica) ogni $\sigma \in S_n$ per cui esistono un intero positivo l e $a_1, ..., a_l \in \{1, ..., n\}$ a due a due distinti tali che*

- $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, ..., \sigma(a_l) = a_1$*;*
- $\sigma(k) = k$ *per ogni* $k \in \{1, ..., n\} \setminus \{a_1, ..., a_l\}$.

Il numero l si dice lunghezza di σ. Una permutazione ciclica di lunghezza l si dice anche l-ciclo.

Definizione 6.0.7 (Ciclo di una permutazione (2))**.** *Sia r un intero positivo, $2 \leq r \leq n$ e siano dati r elementi distinti $i_1, i_2, ..., i_r \in X = \{1, 2, ..., n\}$. Col simbolo $\gamma = (i_1 i_2 ... i_r)$ si denoti la permutazione $\gamma \in S_n$ tale che:*

1. *$\gamma(i_k) = i_k$ se $i_k \notin \{i_1, i_2, ..., i_r\}$*
2. *$\gamma(i_k) = i_{k+1}$ se $1 \leq k \leq r-1$*
3. *$\gamma(i_r) = i_1$*

Tale permutazione è detta ciclo di lunghezza r. Se il ciclo ha lunghezza 2 viene detto trasposizione o scambio.

Il solo ciclo di lunghezza 1 è la permutazione identica.

Il ciclo di lunghezza 2 è detto trasposizione o scambio.

La scrittura ciclica di un l-ciclo non è unica. Se $l > 1$, il ciclo ammette esattamente l scritture cicliche distinte, ottenute tramite rotazioni successive degli indici verso sinistra.

Un ciclio è una lista di indici fra parentesi, e conveniamo che rappresenti la permutazione che associa a ogni indice nel ciclo quello successivo.

Ad esempio, il ciclo

$$(12345)$$

rappresenta la permutazione che manda 1 in 2, 2 in 3 e così via fino a 5 in 1. Due cicli sono disgiunti se non hanno lettere in comune. Per esempio, (123) e (45) sono disgiunti, ma (123) e (124) no.

6.1 Composizione di permutazioni = Prodotto di cicli

Per scrivere la composizione di permutazioni rappresentate da cicli, basta scrivere i cicli di seguito.

Non è difficile calcolare la permutazione risultante da una composizione di cicli: basta, per ogni lettera, "seguire il suo destino" lungo i vari cicli. Per esempio,

$$(123)(135)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 Cicli \end{pmatrix}$$

Come abbiamo fatto il conto? Cominciamo da 1: il primo ciclo manda 1 in 2, il secondo non tocca il 2, il terzo manda 2 in 4: concludiamo che i tre cicli mandano 1 in 4. Il primo ciclo manda 2 in 3, il secondo 3 in 5, e il terzo non tocca 5: concludiamo che i tre cicli mandano 2 in 5, e così via. Notate che alla fine del conto c'è un controllo di coerenza molto semplice: tutti i numeri nella seconda riga devono essere distinti.

Definizione 6.1.1 (Decomposizione di una permutazione in cicli)**.** *Decomporre una permutazione in cicli disgiunti vuol dire rappresentarla sotto forma di cicli.*

Come fare a ottenere una rappresentazione in cicli di una permutazione? Basta "seguire" una lettera qualunque fino a trovare un ciclo: per esempio, in

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

abbiamo che 1 va in 3, 3 va in 2 e 2 va in 1; quindi il primo ciclo che troviamo è (123). A questo punto non ci rimane che 4, che però va in sé, e formerebbe un ciclo di lunghezza 1. I cicli di lunghezza 1 per convenzione non si scrivono, e quindi la permutazione si scrive (123).

NB: Secondo me se segui questo procedimento per forza di cose devi trovare cicli disgiunti.

Definizione 6.1.2 (Periodo di una permutazione)**.** *Data una qualsiasi permutazione, il suo periodo sarà il minimo comune multiplo dei periodi dei cicli disgiunti in cui essa si decompone.*

INTRODUZIONE:
Ogni permutazione di S_n, $n > 2$, è prodotto di trasposizioni. Osserviamo però che tali trasposizioni possono non essere disgiunte ed inoltre la rappresentazione di una permutazione como prodotto di trasposizioni non è unica. Ad esempio, la permutazione $\alpha = (123)$, si può scrivere come: $\alpha = (13)(12) = (12)(23) = (23)(13)$. Il teorema del segno di una permutazione ci dice però che la parità (ovvero il segno) di una permutazione rimane la stessa.

Definizione 6.1.3. *Sia $\alpha \in S_n$, $n \geq 2$. Si dice che α è pari se è prodotto di un numero pari di trasposizioni, dispari se è prodotto di un numero dispari di trasposizioni.*
Inoltre si dice che il segno di α, $sgn(\alpha)$, è 1 se α è pari, -1 se α è dispari.

Definizione 6.1.4 (Ordine o periodo di un ciclo di una permutazione)**.** *L'ordine o periodo di un ciclo è uguale al numero di elementi del ciclo.*

ESEMPIO:
Il ciclo (123) ha ordine 3.

Definizione 6.1.5. *Un 2-ciclo si chiama anche scambio o trasposizione*

ESEMPIO:
(12)

Definizione 6.1.6 (Permutazioni disgiunte)**.** *Due permutazioni α e β si definiscono disgiunte se gli oggetti che non sono fissi per una permutazione sono fissi per l'altra, ovvere se:*

$$(X \setminus F(\alpha)) \cap (X \setminus F(\beta)) = \varnothing$$

ESEMPIO 1:
Per esempio, (123) e (45) sono disgiunti, ma (123) e (124) no.
ESEMPIO 2:
In S_8, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ sono disgiunte, infatti $\{1, 3, 4, 7\} \cap \{2, 8\} = \varnothing$

Definizione 6.1.7 (Derangement)**.** *A derangement is a permutation of the elements of a set, such that no element appears in its original position.*

Definizione 6.1.8 (Number of derangement of a set)**.** *The number of derangement of a set of size n, usually written D_n, d_n, or !n, is called the "derangement number" or "de Montmort number". (These numbers are generalized to rencontres numbers).*
The number of derangements of an n-element set is called the nth derangement number or rencontres number, or the subfactorial of n and is sometimes denoted !n or D_n

Definizione 6.1.9 (Formula Derangement)**.**

$$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Definizione 6.1.10 (Formula partial derangement)**.** *La formula precendente è utilizzata quando vogliamo il numero delle permutazioni (o casi favorevoli, a volte negli esercizi) che hanno fixed* *point uguale a 0. In generale per $k > 0$ dove k rappresenta il numero di fixed point, la formula diventa:*

$$d_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

In altre parole, il derangment è un sottoinsieme dell'insieme delle permutazioni formato dalle permutazioni che non hanno punti fissi, cioè in cui nessun elemento è al suo posto.

The problem of counting derangements was first considered by Pierre Raymond de Montmort in 1708; he solved it in 1713, as did Nicholas Bernoulli at about the same time.

Definizione 6.1.11. *Il principio di inclusione-esclusione è un'identità che mette in relazione la cardinalità di un insieme, espresso come unione di insiemi finiti, con le cardinalità di instersezioni tra questi insiemi.*

IL principio è stato utilizzato da Nicolaus II Bernoulli (1695-1726); la formula viene attribuita ad Abraham de Moivre (1667-1754); per il suo utilizzo e per la comprensione della sua portata vengono ricordati Joseph Sylvester (1814-1897) ed Henri Poincaré (1854-1912).

Capitolo 7

Partitions of sets

7.1 Partitions, Their Properties, and Their Graphical Representation. [3]

Let a set Ω and a system of sets $\mathscr{A}$ be given. We say that $\mathscr{A}$ is a *partition in* Ω if it fulfills the two following requirements:

(8:B:a) Every element A of $\mathscr{A}$ is a subset of Ω, and not empty.

(8:B:b) $\mathscr{A}$ is a system of pairwise disjunct sets.

Attenzione perchè i requirements sopra potrebbero differire dalla norma. Infatti: 1. Gli insiemi potrebbero anche essere vuoti, 2. La somma di tutti gli elementi dei sottoinsiemi deve dare tutto l'insieme partizionato, qui non è richiesto.

This concept too has been the subject of an extensive literature. Cf. *Garrett Birkhoff*: Lattice Theory, New York 1940. This book is of wider interest for the understanding of the modern abstract method. Chapt. VI. deals with Boolean Algebras. Further literature is given there.

7.2 Definizioni di partizione

Definizione 7.2.1. *A set partition π of a set S is a collection $B_1, B_2, ..., B_k$ of nonempty disjoint subsets of S such that $\cup_{i=1}^{k} B_i = S$. The elements of a set partition are called* blocks*, and the size of a* block *B is given by $|B|$ the number of elements in B. We assume that $B_1, B_2, ..., B_k$ are listed in increasing order of their minimal elements, that is, min $B_1 <$ min $B_2 < ...$ min B_k. The set of all set partitions of S is denoted by $\mathscr{P}(S)$. [5]*

Parte III

Algebraic Geometry

Capitolo 8

Algebraic Geometry

Capitolo 9

The birth of geometry. [9]

Il capitolo ha l'obiettivo di chiarire le varie angolature da cui la geometria può essere studiata. Teniamo a mente che dal XVI secolo, le scienze, e di conseguenza la geometria e di conseguenza la matematica in generale, vengono studiate non soltanto più dal punto di vista qualitativo ma anche quantitativo. Per quanto riguarda la geometria, questo passaggio immagino, non avendo ancora capito se vero, che si rifletta con il passaggio dalla geometria euclidea a quella cartesiana per finire a quella affine ovvero allo studio della geometria dal punto di vista della teoria degli inseiemi. Per tutti i tipi di geometria che qui imprudentemente chiamo euclidea, cartesiana e affine vi è alla base un sistema di assiomi che sono il punto di partenza di ogni ragionamento ed il riferimento per il modello che andremo a costruire a partire da essi. Sarebbe bello poi concludere che della geometria cartesiana possiamo disinteressarcene ossia considerla subordinata alle altre due nel senso che essa viene utilizzata come una libreria grafica ossia per rappresentare graficamente/visivamente/senza parole le altre due geometrie. Ovvero un sistema configurabile in grado di disegnare punti, linee e curve. Forzando l'immaginazione la geometria cartesiana puè essere considerato un device [3]. Qui non interessa solo ...

L'unica geometria che a noi dovrebbe interessare è quella affine (o anche geometria combinatoria. [4]).

9.1 Euclidean geometry

Geometry was developed in various ancient civilizations. It was in ancient Greece that geometry apeeared in a complete form that can be regarded as the starting point of today's mathematics. Acually, geometry was developed as a practical science useful for surveying in other old civilizations, but in Greece it was also developed as an object of purely intellectual pursuit. Such developments by the school of Pythagoras had interactions with geometric views on numbers that were related to religious and philosophicals indeas. By around 300 B.C. the geometry of Euclid was presented in its complete form in the book *The Elements*. It is not know whether Euclid, supposed to be author of the treatise, actually lived or not. It is certain that many mathematicians participated in its development. **The treatise includes the theory of ratios and a geometric treatment of numbers, with geometry itself as the main theme**. In geometry, it started from a small number of postulates and logically deduced the properties of lines, triangles, circles, etc., and was regarded as the standard model for a systematic treatise in scholarly writing for a long time to come.

Although the axiomatic system for Euclidean geometry was reorganized by Hilbert and others around the turn of the 20th century, it is amazing that as early as the third and fourth centuries B.C. the method was established to deduce underlying properties of geometric objects. We could say that mathematics itself became an independent science with *The Elements*.

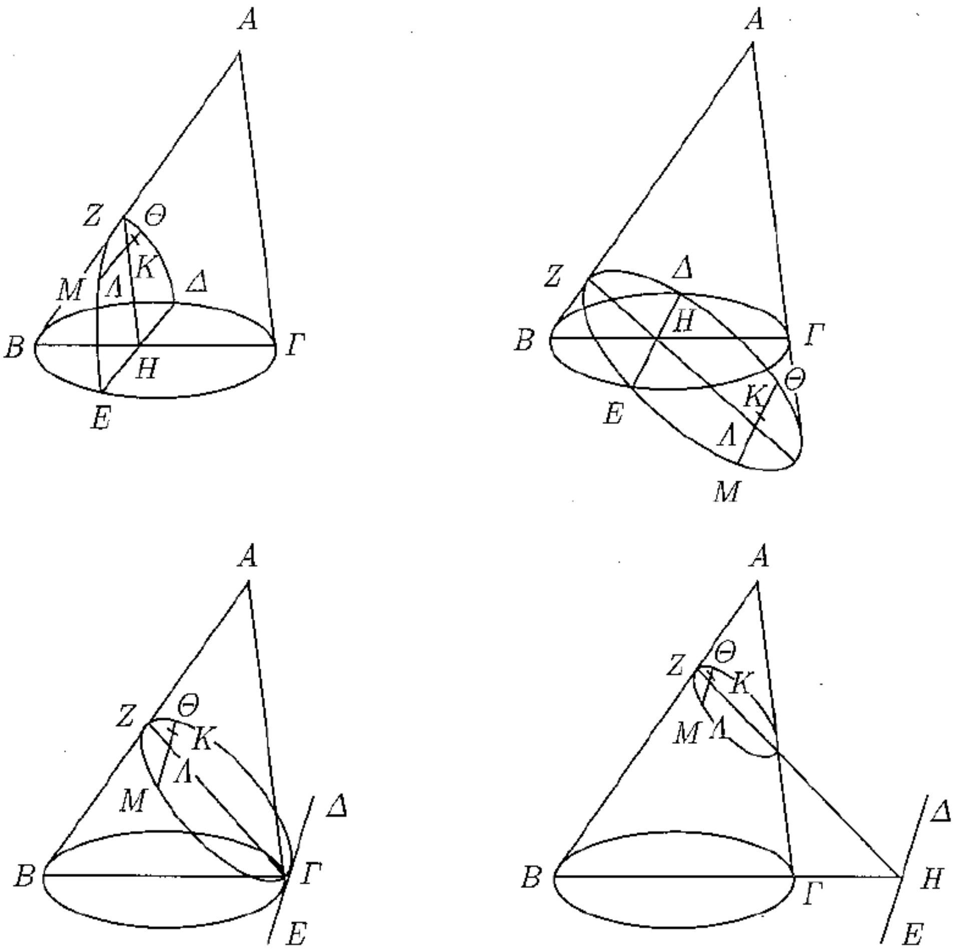
9.1.1 The Theory of Conics of Apollonius

The so-called Euclidean geometry treated in *The Elements* was concerned with lines and circles, in other words, it was the geometry of figures that can be drawn with ruler and compass. Although these objects led to interesting geometry, they were not sufficient, as was recognized in ancient Greece.

`http://mathworld.wolfram.com/GeometricCongruence.html`
`http://mathworld.wolfram.com/Isometry.html`
`http://planetmath.org/euclideantransformation`

`cite{coxeter01} Geometry revisited 1967`

TODO: FARE ESERCIZI A MANINA



Parte IV

Operator Theory

Capitolo 10

Operator Theory

Parte V

Geometry

Capitolo 11

Geometry

11.1 Introduzione

Lo scopo di queste pagine è di mettere lo studente in grado di apprendere in maniera autonoma i concetti e gli strumenti della geometria. Le pagine sono rivolte a studenti dei corsi di Matematica in quanto le conoscenze sono presentate sotto forma di definizioni, teoremi e relative dimostrazioni applicando le tecniche e gli strumenti della logica matematica. I concetti, seppur presentati il più possibile in maniera formale, sono accompagnati da commenti scritti con il linguaggio dello studente. Infatti, vengono associate al formalismo puro tipico della matematica moderna un linguaggio comune e comprensibile a tutti. Per questo si cerca di spiegare parola per parola il significato dei termini delle definizioni, dei teoremi e di ogni altro enunciato. Le pagine di teoria sono accompagnate da esercitazioni pratiche sia di esercizi ed esami svolti e sia di esercizi da svolgere in autonomia. Altro obiettivo è quello di contenere in un'unica trattazione tutto il sapere matematico necessario per superare tutti gli esami di geometria proposti nei corsi universitari di Matematica e di ogni altro corso di laurea che include anche lo studio della geometria. Le pagine sono strutturate in un indice in cui si trova il syllabus (il nostro programma di studio) e di una pagina per ogni concetto. Le pagine sono scritte in latex e trasformate in html per la visualizzazione. E' possibile convertire anche in formato pdf.

11.1.1 I link

Ogni pagina che espone un concetto contiene un certo numero di link. I link che mostrarno l'url, per esempio: `http://calvino.polito.it/~tedeschi/geometria/`, sono link esterni al documento. I link che non mostrano l'url, per esempio: Geometria euclidea, sono link interni. Se cliccate su un link esterno relativo a esercizi allora tutto bene ma se cliccate link esterni di teoria può darsi che la pagina non sia completa o sia scritta in maniera non del tutto comprensibile. In quest'ultimo caso potete avvisare i partecipanti al progetto, aprendo un issue su github.

11.1.2 Prerequisites

Costanza nello studio, dedicare il giusto tempo, meglio un pò al giorno tutti i giorni.

11.2 Geometria Euclidea

La geometria Euclidea bla bla bla

Definizione 11.2.1. *Si chiama* **geometria euclidea** *la classica geometria che si studia alle scuole elementari, medie e superiori. E' quella che si basa sugli Elementi di Euclide dove i concetti fondamentali (ovvero gli assiomi) sono quelli di punto, retta, etc.*

Definizione 11.2.2. *Si chiama* **segmento orientato (non banale)** *un segmento su cui sia stato scelto un verso, ovvero su cui si sia fissato un ordine tra i due estremi.*

Definizione 11.2.3. *Si chiama* **segmento orientato banale** *è quello che inizia in un punto A e finisce sempre in A.*

Definizione 11.2.4. *Si chiama* **insieme dei segmenti orientati** *l'insieme dei segmenti orientati.*

Osservazione 11.2.5. Ovviamente l'insieme dei segmenti orientati ̀contiene anche il segmento orientato banale per definizione.

Definizione 11.2.6. *L'***equipollenza** *è una relazione di equivalenza tra due segmenti orientati dell'insieme dei segmenti orientati.*

Definizione 11.2.7. *Si chiama* **vettore geometrico dello (o nello) spazio**

11.3 Vettore

11.3.1 Vettore colonna, vettore riga

Un vettore in uno spazio n-dimensionale è un insieme ordinato formato da n valori.

11.3.2 Vettore in geometria mono, bi e tri-dimensionale

Un vettore è un oggetto che ha una direzione e una lunghezza. In questo caso si dimostrerà che un vettore può essere rappresentato come da definizione precedente.

11.3.3 Componenti di un vettore

11.3.4 Rappresentazione canonica

11.3.5 Lunghezza di un vettore in R^n

The length of a vector v in R^n is the square root of the sum of the squares of tis components.

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}$$

This is a natural generalization of the Pythagorean Theorem.

11.3.6 dot product or scalar product

The dot product (or inner product or scalar product) of two n-component real vectors is the linear combination of their components.

$$uv = u_1 v_1 + ... + u_n v_n$$

squares of its components.

11.3.7 NOTAZIONE

11.3.8 NOTE

Le due definizioni sono equivalenti nel senso che si possono rappresentare i vettori della definizione 2 come vettori della definizione 1.

Attenzione alla definizione di vettore libero.

Attenzione all'uguaglianza tra due vettori. Due vettori sono uguali quando hanno la stessa rappresentazione canonica.

11.4 Algebra Lineare

11.5 Introduzione tratta dal libro "Introduzione all'algebra lineare" Prof. Fioresi-Morigi

Le applicazioni lineari sono funzioni tra spazi vettoriali che ne rispettano la struttura, cioè sono compatibili con le operazioni di somma tra vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Come vedremo le applicazioni lineari si rappresentano in modo molto efficace attraverso le matrici. Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre il concetto di applicazione lineare e capire come sia possibile associare univocamente una matrice ad ogni applicazione lineare tra R^n e R^m, una volta fissata in entrambi gli spazi la base canonica. Studieremo poi il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare fino ad arrivare al Teorema della dimensione, che rappresenta uno dei risultati più importanti della teoria sugli spazi vettoriali di dimensione finita.

Syllabus Algebra Lineare

Spazi Vettoriali

- Vettore
- Coordinate di un vettore
- Spazio Vettoriale
- Sottospazio vettoriale
- Combinazione lineare
- Spazio generato dai vettori $v_1, ..., v_k$
- Sistema di generatori
- Versore
- Interdipendenza lineare (Indipendenza lineare)
- Base di uno spazio vettoriale
- Base canonica
- Matrice di cambiamento di base
- Criterio di indipendenza
- Estrazione di una base

- Completamento a una base
- Dimensione di uno spazio vettoriale
- Componenti
- Somma diretta e somma
- Spazi quozienti
- Duale

Matrici

- Matrice
- Matrici identitá (identica)
- Matrice nulla
- Matrice opposta
- Insieme delle matrici $m \times n$: $M_{m,n}(K)$
- Matrice trasposta
- Properties of Transpose Matrices: http://www.math.nyu.edu/~neylon/linalgfall04/project1/dj/proptranspose.htm
- Help with proving that the transpose of the product of any number of matrices is equal to the product of their transposes in reverse.
- La trasposta della trasposta é la matrice stessa
- La trasposta della somma di due matrici è uguale alla somma delle due matrici trasposte
- L'ordine delle matrici si inverte per la moltiplicazione
- Se c é uno scalare, la trasposta di uno scalare é lo scalare invariato
- Nel caso di matrici quadrate, il determinante della trasposta é uguale al determinante della matrice iniziale
- La trasposta di una matrice invertibile é ancora invertibile e la sua inversa é la trasposta dell'inversa della matrice iniziale
- Se A é una matrice quadrata, allora i suoi autovalori sono uguali agli autovalori della sua trasposta
- Operazione di somma tra matrici
- Operazione di prodotto tra matrici
- Properties of matrix multiplication: https://www.khanacademy.org/math/precalculus/precalc-matrices/properties-of-matrix-multiplication/a/properties-of-matrix-multiplicati
- Operazione di prodotto tra uno scalare ed una matrice

- Matrice Quadrata
- Ordine di una matrice quadrata
- Determinante di una matrice quadrata
- Polinomio caratteristico di una matrice
- Autovalori di una matrice quadrata
- Autovalore
- Autovettore
- Molteplicità algebrica e geometrica
- Matrice diagonale
- Matrice diagonalizzabile

Sistemi lineari

- Sistema di che cosa?
- Sistema lineare e matrici.
- Sistema lineare
- Sistema omogeneo
- Risoluzione

Applicazioni lineari

- Introduzione alle applicazioni lineari
- Applicazione lineare
- Nucleo di un'applicazione lineare
- Immagine di un'applicazione lineare
- Base di un'applicazione linearea
- Cambio di base per un'applicazione lineare
- Applicazione lineare iniettiva
- Dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare
- Teorema della dimensione
- Matrice associata ad un'applicazione lineare tra spazi vettoriali
- Isomorfismo di applicazioni lineari
- Calcolo del nucleo e dell'immagine
- Diagonalizzazione
- Applicazione lineare diagonalizzabile

11.6 DEFINIZIONE

Un'applicazione lineare è iniettiva se il nucleo dell'applicazione è il vettore nullo.

11.7 DEFINIZIONE

La dimensione dell'imagine di un'applicazione lineare è uguale al rango della matrice associata all'applicazione lineare.

11.8 DEFINIZIONE

La matrice associata ad un'applicazione lineare tra spazi vettoriali si ottiene mettendo nelle colonne della matrice le immagini dei vettori della base canonica del dominio (o di altra base data).

11.9 NOTAZIONE

11.10 ESEMPIO

11.11 APPROFONDIMENTI

- http://www.dm.unibo.it/~ida/NoteGeometria1-25-5-16.pdf
- http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/book.pdf
- http://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/applicazioni-lineari/771-calcolare-dimensi
html

11.12 Matrice

$A = (a_{ij})_{i=1\ldots m, j=1\ldots n}$

la seguente notazione ritengo sia errata: $A = a_{ij}$

Perché stiamo cerchando di assegnare un elemento di una matrice ad una matrice.

Pertanto sarebbe corretto scrivere: $A = (a_{ij})$ oppure in maniera completa $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m, j=1\ldots n}$

11.13 DEFINIZIONE

Matrice che ha lo stesso numero di righe e colonne.

11.14 DEFINIZIONE

L'ordine di una matrice quadrata è il numero di righe o equivalentemente il numero di colonne.

11.15 ESEMPIO

Una matrice quadrata con n righe ed e colonne ha ordine n.

11.16 DEFINIZIONE

Sia A una matrice quadrata, t una incognita (la nostra x) e I_n la matrice identità di ordine n. Il polinomio caratteristico (nella incognita t) di una matrice è uguale al determinante della matrice:

$$A - tI_n$$

scriviamo:

$$p_A(t) := det(A - tI_n)$$

11.17 Introduzione

Sotto talune condizione riguardo ai tipi di matrice, cioé sul numero delle righe e delle colonne che le matrici che si intendono moltiplicare devono avere, definiamo un'operazione che chiamiamo *operazione di prodotto tra matrici* o *prodotto tra matrici* o *prodotto riga per colonna*. Bene, diciamolo subito, tra tutte le matrici dell'insieme $M_{m,n}$ é possibile moltiplicare tra di loro quelle in cui il numero di colonne della prima matrice corrisponde al numero di righe della seconda matrice. Per questo motivo viene chiamato prodotto righe per colonne.

Altra cosa da tenere presente é il fatto che la forma della matrice risultato puó essere diversa da quella delle matrici che abbiamo moltiplicato. Ed infatti, la matrice risultato sará composta da m righe ed n colonne, dove, m è il numero di righe della prima matrice e n è il numero di colonne della seconda matrice.

Definizione 11.17.1. *Se A è una matrice $m \times s$ e B è una matrice $s \times n$, definiamo il prodotto c_{ij} della riga i di A e della colonna j di B nel modo seguente:*

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & ... & a_{is} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ ... \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{is}b_{sj} = \sum_{h=1}^{s} a_{ih}b_{hj}$$

In altre parole, per ricavare l'elemento di posto (i, j) bisogna eseguire il prodotto riga per colonna tra la riga i e la colonna j.

Analogamente all'operazione di somma tra matrici, quello che è importante capire è quale formula è utilizzata per ricavare l'elemento di posto (i, j). Solo che, nel caso della somma tra matrici, l'operazione è banale ed immediata, qui invece l'operatore di sommatoria potrebbe dare qualche problema agli inizi, ma poi ci si fa l'abitudine.

11.18 DEFINIZIONE

L'operazione di somma tra matrici si effettua applicando l'operazione di somma del campo K di cui sono fatti gli elementi delle matrici. Le matrici devono avere lo stesso numero di righe e di colonne.

11.19 SIMBOLI

$A = B + C$

$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$

11.20 DEFINIZIONE

Gli autovalori di una matrice quadrata sono le radici del polinomio caratteristico.

11.21 DEFINIZIONE

L'insieme delle matrici mxn: $M_{m,n}(K)$ ha una struttura di spazio vettoriale con l'operazione di somma tra matrici.

11.22 Definizione (1)

Una matrice quadrata A si dice *diagonalizzabile* se esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

11.23 Definizione (2)

Una matrice è diagonalizzabile se:

1. Il numero degli autovalori, contati con la loro molteplicità, sia pari all'ordine della matrice.
2. La molteplicità geometrica di ciascun autovettore coincida con la relativa molteplicità algebrica.

11.24 APPROFONDIMENTI

- `http://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/matrici-e-vettori/1581-matrice-diagonalizz html`

11.25 DEFINIZIONE

Si chiama Spazio Vettoriale una qualunque struttura matematica che possiede determinate proprietá.

11.26 Descrizione

Affinché si possa parlare di spazio vettoriale occorrono almeno due insiemi generalmente indicati con V e K. Tra gli elementi di V é definita una funzione che associa ad ogni coppia di elementi di V un elemento di V. Tale funzione viene chiamata operazione di somma.

11.27 Proprietá

11.28 ESEMPIO

L'insieme dei numeri reali con l'operazione di somma con l'operazione di somma e prodotto. L'insieme dei vettori geometrici dello spazio con l'operazione di somma tra vettori e prodotti di vettori per uno scalare.

11.29 DEFINIZIONE

A basis for a vector space is a sequence of vectors that is linearly independent and that spans the space.

11.30 NOTE

A vector space can have many different bases.

Tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori.

11.31 Definizione

buona bibliografia qui: https://it.wikipedia.org/wiki/Coordinate_di_un_vettore

11.32 DEFINIZIONE

The dimension of a vector space is the number of vectors in any of its bases.

Parte VI

Global analysis, analysis on manifolds

Capitolo 12

Global analysis, analysis on manifolds

Capitolo 13

Pareto Optimality

13.1 Pareto Optimality and Social Optimality. [2]

In a Nash equilibrium, each player's strategy is a best response to the other player's strategy....???
Pareto Optimality. The first definition is

13.2 Pareto Optimality. [1]

We conclude this chapter (chap.4) introducing a property which may or may not be enjoyed by equilibria, that is, Pareto optimality. It must be said that, equilibria that are also Pareto optimal represent extremely stable solutions in that not only no player is better off by changing actions, but also no players can be better off by jointly deviating without causing a loss for at least one player.

> La cosa interessante is that pareto-optimality is defined as a property, e non importa se questa proprietà è in qualche modo connessa al concetto di equilibrio. Infine si ricorda che un equilibrio che sia anche pareto ottimale rappresenta l'eccezione e non la regola, semmai ci fosse una conessione di dipendenza tra il concetto di equilibrio e quello di paretto ottimalità
>
> **Definizione 13.2.1.** *A pair of strategies* (a_1^{PO}, a_2^{PO}) *is said to be Pareto optimal (PO) if there exists no other pair* (a_1, a_2) *such that for* $i = 1, 2$
>
> $$u_i(a_1, a_2) > u_i(a_1^{PO}, a_2^{PO}) \wedge u_{-i} \geq u(a_1^{PO}, a_2^{PO})$$
>
> Ora che abbiamo la formula della pareto optimality non ci resta che applicarla ad un esempio concreto.

```
LET N be SET players
Una volta stabilito il numero dei giocatori, tutte le tuple
hanno lunghezza |N|=:n
n lo utilizziamo solo per il numero dei giocatori
altri indici utilizzati saranno: i, j, d
LET A be SET alternatives
LET S be SET strategies WHERE s \in S = (a_1, ..., a_n) - 'a' for alternative(choice)
LET P be SET prospects(outcomes) WHERE p \in P = (p_1, ..., p_n) - 'p' for payoff
LET u be FUNCTION u : S --> P
```

`E.G. u(s) |--> (p_1, ..., p_n), p_1, ..., p_n \in R^n`

`l'operatore su tuple t_{-i} restituisce una tupla di lunghezza di t meno 1.`

Definizione 13.2.2. *Una strategia si dice* pareto-optimally *if there is no other strategy that adhere with the following conditions:*

1.

Parte VII

Probability

Capitolo 14

Probability

Capitolo 15

Definition of Probability

15.1 Numero aleatorio

bla

15.2 Probabilities as set functions. [8]

- Conceptually, probabilities are associated with *events or subsets* $A \in 2^X$ of atomic mutually exclusive events $x \in X$. In fact, a probability distribution is a *set function* satisfying $p(A) + p(B) = p(A \cap B) + p(A \cup B)$ for all $A, B \in 2^X$.

Quindi si richiede che gli elementi dell'insieme X dei possibili eventi (qui cè una certa ridondanza), piuttosto utilizzerei la terminilogia adottata da:

Intanto che cosa è un evento? Un evento è un numero aleatorio ossia un numero rappresentato da una lista non ordinata di valori.

Es. $x_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oppure $x_2 = \{0, 1\}$ oppure $x_3 = \{7\}$ x_1, x_2 e x_3 vengono chiamati numeri aleatori. x_3 pur essendo un insieme si potrebbe far corrispondere al numero 7. x_2 si chiama evento perchè può assumere soltanto due valori 0 e 1.

Parte VIII

Game theory, economics, social and behavioral sciences

Capitolo 16

Game theory, economics, social and behavioral sciences

Capitolo 17

Computational Methods

Vedi `http://gambit.sourceforge.net/gambit15/gui.html`

Capitolo 18

Game theory

18.1 ACHTUNG!

Appunti personali presi durante il corso di Giochi e Modelli Booleani (aka Teoria dei giochi (TG)) - 82114 - ANNO 2017/18 - tenuto dal Prof. Giovanni Rossi. Non avendo seguito tutto il corso, alcuni fatti potrebbero risultare distorti mentre altri potrebbero tornare utili.

18.2 Todos

In questa sezione ci sono le cose ancora da sistemare. vedi [7] pag.2 for constant sum game

Vedi capitolo 6 per descrizione gioco e primo approccio alla probability

Capitolo 19

Preface

Capitolo 20

How to study Game Theory

La teoria dei giochi deve essere studiata da due angolazioni, da due facce della stessa medaglia potremmo dire forzando un pò la fantasia. Ossia, il punto di vista della realtà che si vuole modellare, quindi per esempio l'economia ed il punto di vista del modello matematico sottostante. È chiaro che i due punti di vista hanno approcci e metodi differenti ma non è solo questo il punto. La dicotomia si concretizza nel fatto che l'insieme dei player sia rappresentato, per esempio, dal player set: $N = \{1, ..., n\}$. Cioè una volta stabilita la corrispondenza uno a uno, biunivoca tra realtà e matematica, possiamo tralasciare il punto di vista della realà ovvero possiamo disinteressarcene e prendiamo a considerare soltanto l'oggetto matematico rappresentato in questo caso dal player set $N = \{1, ..., n\}$. Se considero l'insieme power set 2^N, che cosa sto facendo? Dal punto di vista della matematica una cosa assolutamente lecita, devo capire di cosa si tratta e come faccio a manipolarla e dal punto di vista del ritorno alla realtà posso dire in questo caso che 2^N rappresenta l'insieme di tutte le possibili coalizioni di giocatori. Il power set lo vedremo e rivedremo quindi niente paura.

Ed infatti i padri della disciplina parlano di shift (spostamento) da teoria economica a matematica (e viceversa), cioè lo spostamento da realtà a modello matematico.

20.1 Shift of Emphasis from Economics to Games. [3]

Chapter II, GENERAL FORMAL DESCRIPTION OF GAMES OF STRATEGY, 5. Introduzione, 5.1 Shift of Emphasis from Economics to Games, [3].

> It should be clear from the discussions of Chapter I that a theory of rational behaviour - i.e. of the foundations of economics and of the main mechanisms of social organization - requires a thorough study of the "games of strategy." Consequently we must now take up the theory of games as an independent subject. In studying it as a problem in its own right, our point of view must of necessaty undergo a serious shift. In Chapter I our primary interest lay in economics. It was after having concived ourselves of the impossibility of making progress in that field without a previous fundamental understangin of the games that we gradually approached the formulations and the questions which are partial to that subject. But economic viewpoints remained nevertheless the dominant ones in all of

Chapter I. From this Chapter II on , however, we shall have to treat the games as games. Therefore we shall not mind if some points taken up have no economic connections whatever, - it would not be possible to do full justice to the subject otherwise. Of course most of the main concepts are still those familiar from the discussions of economic literature (cf. the next section) but the deails will often be altogether alien to it - and details, as usual, may dominate the exposition and overshadow the guiding principles.

Capitolo 21

Introduction to Game Theory

- Game theory "begins" in 1944 with the book [32] Games and Economic Behavior by von-Neumann and Morgestern.
- In 1953 Shapley publishes a fundamental paper [27] defining cooperative games, so that the former ones have been named "non-cooperative" (or strategic) ones thereafter.
- Given a set $N = \{1, ..., n\}$ of n players, a non-cooperative game consists of a product space $S_1 \times ... \times S_n$ of strategies, and n utilities or payoff functions $u_i : S_1 \times ... \times S_n \to R$, $1 \leq i \leq n$ measuring the "goodness" of strategy profiles $s \in S_1 \times ... \times S_n$ to players $i \in N$. This is the branch of game theory where the famous prisoner's dilemma and Nash equilibrium apply. On the other hand, a cooperative (coalitional) game is a set function $v : 2^N \to R_+$ such that $v(0) = 0$, where $2^N = \{A : A \subseteq N\}$ is the 2^n-set of coalitions A or subsets of N. Specifically, $v(A)$ is thought of as the worth of cooperation among all (and only) players $i \in A$ (or coalition members).
  1. Perchè 2?
  2. Ha senso la coalizione in cui sono presenti tutti i players?
- ...

Capitolo 22

Games classification

Come sono classificati i giochi? Cioè qual'è la terminologia adottata se facciamo variare alcune variabili/proprietà dei termini/oggetti coinvolti ossia players, randomizzazione, payoffs, alternative.

22.1 General Principles of Classification and of Procedure. [3]

Chapter II, GENERAL FORMAL DESCRIPTION OF GAMES OF STRATEGY, 5 Introduction, 5.2 General Principles of Classification and of Procedure.

[5.2.1.] Certain aspects of "games of strategy" which were already prominent in the last sections of Chapter I will not appear in the beginning stages of the discussions which we are now undertaking. Specifically: There will be at first no mention of coalitions between players and the compensations which they pay to each other. (Concerning these, cf. 4.3.2., 4.3.3., in Chapter I).

Per cui all'inizio trascuriamo il fatto che i giocatori possano cmq aiutarsi gli uni e gli altri. Da qui la principale suddivisione ossia tra giochi cooperativi e giochi non cooperativi. In realtà nel testo [3] la prima distinzione fondamentale è tra giochi a somma zero (mors tua vita mea) e giochi a somma diversa da zero, diciamo positiva. Ma cosa devo sommare?. Nel testo "The computational beauty of nature" si parla di competizione e cooperazione.

We give a brief account of the reasons, which will also throw some light on our general disposition of the subject.

An important viewpoint in classifying games is this: Is the sum of all payments received by all players (at the end of the game) always zero; or is this not the case? If it is zero, then one can say that the players pay only to each other, and that no production or destruction of goods is involved. All games which are actually played for enternainment are of this type. But the economically significant schemes are most essentially not such. There the sum of all payments, the total social product, will in general not be zero, and not even constant. I.e., it will depend on the behavior of the players - the participants in the social economy. This distinction was already mentioned in 4.2.1., particularly in footnote 2, p.34. We shall call games of the first-mentioned type *zero-sum* games, and those of the latter type *non-zero-sum* games.

We shall primarily construct a theory of the zero-sum games, but it will be found possible to dispose, with its help, of all games, without restriction. Precisely: We shall show that the general (hence in particular the variable sum) n-person game can be reduced to a zero-sum $n + 1$-person game. (Cf. 56.2.2.)

Wow calma un attimo. Di cosa stiamo parlando? Induzione matematica? cioè da dove saltano fuori n ed $n + 1$?

Now the theory of the zero-sum n-person game will be based on the special case of the zero-sum two-person game. (Cf. 25.2). Hence our discussion will begin with a theory of these games, which will indeed be carried out in Chapter III.

Now in zero-sum two person games coalitions and compensantions can play no role.

The only fully satisfactory "proof" of this assertion lies in the construction of a complete theory of all zero-sum two-person games, whithout use of those devices. This will be done in Chapter III, the decisive result being contained in 17. It ought to be clear by common sense, howerver, that "understandings" and "coalitions" can have no role here: Any such arrangement must involve at least two players - hence in this case all players - for whom the sum of payments is identically zero. I.e. there are no opponents left and no possible objectives.

The questions which are essential in these games are of a different nature. These are the main problems: How does each player plan his course - i.e. how does one formulate an exact concept of a strategy? What information is available to each player at every stage of the game? What is the role of a player being informed about the other player's strategy? About the entire theory of the game?

Capitolo 23

What is a game?

In questa sezione proviamo ad descrivere il gioco... Arriviamo addirittura a concludere che non è necessario alcuna "classificazione" among games because there exists just one true story about definition of game and was given by [3].

23.1 The Elements of the Game. [3]

Chapter II, GENERAL FORMAL DESCRIPTION OF GAMES OF STRATEGY, 6 The Simplified Concept of a Game, 6.2. The Elements of the Game

Let us now consider a game Γ of n players who, for the sake of brevity, will be denoted by 1, ..., n. The conventional picture provides that this game is a sequence of moves, and we assume that both the number and the arrangement of these moves is given *ab initio*.We shall see later that these restrictions are not really significant, and that they can be removed without difficulty. For the present let us denote the (fixed) number of moves in Γ by v - this is an integer $v = 1, 2, ...$ The moves themeselves we denote by ... capire che cavolo è quella Mmm???TODO

23.2 Rappresentazione matematica degli elementi di un gioco

- Player/s = SET
- Prospetto/outcome = ENNUPLA. e.g. (x), (a, b) dove a, b, x sono variabili logiche, al posto delle quali può andare un nostro tipo matematico a scelta.
- Strategia = ENNUPLA
- Utility Function = Data una strategia, restituisce un prospetto.
- Ordine = Serve per discernere le mosse dell'avversario e per ordinare le mie preferenze.
- Game = $p : 2^X \to [0, 1]$ - dato un insieme di players restituisce true se l'insieme soddisfa le regole del gioco.

- Rules = sono le specifiche implementazioni che diamo alla utiliti function e a tutto il resto.

Dovevo aspettermelo che con von Neumann saltava fuori qualche sorta di assiomatizzazione. Ed infatti...

Capitolo 24

Axiomatic Formulation (of a Game).

Capitolo 25

Preferences

25.1 Preferences

- In non-cooperative games (see above), the product space $S_1 \times ... \times S_n = X$ of strategies, over which every player $i \in N$ has preferences in the form of a utility function $u_i : S_1 \times ... \times S_n \to R$, is finite (unless otherwise specified).

25.1.1 Rational preferences

- The primitive ingredient of a choice problem is a set X of alternatives, which may be finite or infinite, and in this latter case either countable or uncountable.
  1. L'insieme X di questo punto e the product space $S_1 \times ... \times S_n = X$ sono due cose completamente diverse, giusto?
  2. Qui X è un generico insieme e quindi potrebbe anche essere quello del punto precedente? L'importante, come vedremo, che sia definita una relazione di preferenza?
- When denoting a finite alternative set by $X = X = \{x_1, ..., x_m\}$, the first m natural numbers $1, ..., m \in N$ are used as distinct "names" for the $|X| = m$ distinct alternatives.

25.1.2 Utility representation

Capitolo 26

Randomness

- The next step in the study of non-cooperative games is the understanding of strategies. As we shall see, the famous Nash equilibrium surely exists only when players $i \in N$ may each randomize over their finite strategy sets $S_1 = \{s_i^1, ..., s_i^{|S_i|}\}$.

26.1 Discrete random variables: lotteries

- ...
- By the way, also recall that a probability distribution over X is defined as any set function $p : 2^X \to [0, 1]$ satisfying $p(A) + p(B) = p(A \cap B) + p(A \cup B)$ for any two events or subsets (of elementary mutually exclusive events) $A, B \in 2^X$, as well as $p(X) = 1$, $p(\emptyset) = 0$; then, a main theorem on valuations of distributive lattices (such as Boolean lattice $2^X, \cap, \cup)$) $[1, p.190]$ entails $p(A) = \sum_{i \in A} p(\{i\})$ for all $A \in 2^X$ (this will be detailed when dealing with the *solution* of coalition (cooperative) games $v : 2^N \to R$, see below).
  1. Che significa $p(A) + p(B) = p(A \cap B) + p(A \cup B)$?
  2. $[1, p.190]$ cosa dovrei trovare? non ho capito?

26.2 Probabilities, set functions and voting games

  - Recall that the quantitative notion of probability is associated with *events or subsets $A \in 2^X$ of elementary, mutually exclusive (atomic) events.* In

Capitolo 27

Strategies v. 10/10/2017

- In simultaneous-move games all player move or take action simultaneously, hence choosing a strategy is the same as choosing an action. This is no longer true in multistage games, where choosing a strategy means choosing a sequence of (conditional) actions. Although in this course non-cooperative games shall be dealt with only in simultaneous-move form, still multistage games are briefly introduced hereafter to formalize both a general definition of strategies and the notion of (in)complete information.
- I - baudo - Multistage games vengono introdotti per generalità e per modellare la nozione di (in)complete information.
- before describing multistage games, the simultaneous-move setting enables to distinguish beetween outcomes of the game and strategy/action profiles. To this end, let each player $i \in N$ choose an action from a finite set $A_i = \{a_i^{1,\dots,a_i^{|A_i|}}\}$, where $|A_i| \geq 2$ for all $i \in N$. The product space $A = A_1 \times ... \times A_n$ contains all n-tuples or profiles of actions, with generic element $a = (a_1, ..., a_n) \in A$. Preferences

27.0.1 Multistage games

27.0.2 Dominated and dominant strategies

Strategy deletion

Prisoner's dilemma

27.1 Randomization and expected payoffs

27.1.1 Mixed strategies

27.1.2 Domination in mixed strategies

27.1.3 Best responses

27.1.4 Nash equilibrium

27.1.5 Strong equilibrium

Capitolo 28

Strategies v. 26/10/2017

Il concetto di strategia varia a seconda del tipo di gioco. Cosa vuol dire che il concetto varia? Vuol dire che a seconda del gioco è rappresentato da un certo tipo di oggetto matematico. Quasi sempre comunque la strategia è un elemento di un insieme più o meno complesso. Quindi secondo questo ragionamento l'alternative set, strategy set, action profiles, etc. sono tutte strutture matematiche che possono essere annoverate tra quelle che rappresentano il concetto di strategia del mondo reale ed i cui elementi sono, appunto, strategie.

Cominciamo con gli appunti del Prof. Giovanni Rossi ([8]).

- In *simultaneous-move games* alla players move only once, simultaneously, hence choosing a strategy is the same as choosing a move. This is no longer true in *multistage games*, where choosing a strategy means choosing a *sequence of (conditional) moves.* Although the non-cooperative games to be dealt with shall be in simultaneous-move form, still multistage games are briefly described below in order to formally define strategies in a most general setting, namely where players have either perfect or else incomplete information, this latter being commonly modeled by means of partitions.

28.1 Information in multistage games

- As the name clearly suggests, multistage games are played in discrete time $t = 0, 1, ..., T$, as $t = 0$ is the starting point or *root of the game tree* (defined hereafter), where some (at last one, and possibly all) players move; next, depending on previous moves, at each $t \geq 1$ a *node* is reached, corresponding either to a moment where at least one player has to move, or else to an end of the game or *leaf.* The concern is only with games where $T < \infty$ (for any leaf).
- Multistage games are thus commonly represented by a *rooted and directed (game) tree* $\mathfrak{T} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, $\mathbb{V} = \{v_0, v_1, ..., v_{|\mathbb{V}|-1}\}$

28.2 Dominated and dominant strategies

28.3 Deletion of dominated strategies

28.4 Equilibrium

Capitolo 29

Strategy

Che cos'è una strategia? Valuta i prospetti. Tutti i prospetti. Supponi per un attimo di essere un essere superiore e di conoscere tutti i possibili risultati dell'interazione tra due entità. Ops, scusate stavo correndo troppo. Supponiamo che le entità siano invece due persone, la persona (o player) p_1 e la persona p_2. Bene che cosa puoi fare? Bhè puoi pensare per esempio questo: "Se solo i giocatori conoscessero tutti i possibili esiti del gioco, di sicuro farebbero la scelta/mossa/strategia giusta". Ed infatti, per certi aspetti, nella teoria dei giochi è proprio così. Si dice con linguaggio tecnico che i players conoscono tutti i possibili prospetti(da prospetto: guardare innazi) del gioco. Se i giocatori hanno la possibilità di guardare tutti i prospetti (anche se randomizzati) allora si dice che il gioco è ad *informazione perfetta*, altrimenti, se alcuni prospetti non sono noti per qualche giocatore, allora il gioco si dice ad *informazione incompleta*.

Prima di addentrarci in formalismi che riguardano insiemi, ennuple, sottoinsiemi e mappe, lasciamo la parola a chi ha iniziato la discipline della teoria dei giochi.

29.1 Explanation of the Termini Technici. [3]

Chapter II, GENERAL FORMAL DESCRIPTION OF GAMES OF STRATEGY, 6 The Simplified Concept of a Game, 6.1 Explanation of the Termini Technici.

Before an exact definition of the combinatorial concept of a game can be given, we must first clarify the use of some termini. There are some notions which are quite fundamental for the discussion of games, but the use of which in everyday language is highly ambiguous. The words which describe them are used sometimes in one sense, sometimes in another, and occasionally - worst of all - as if they were synonyms. We must therefore introduce a definite usage of *termini technici*, and rigidly adhere to it in all that follows.

First, one must distinguish between the abstract concept of a *game*, and the individual *plays* of that game. The *game* is simply the totality of the rules which describe it.

Definizione 29.1.1. *A* game *is the totality of the rules which describe it.*

Every particular instance at which the game is played - in a particular way - from beginning to end, is a *play*. In most games everday usage calls a play equally a game; thus in chess, in poker, in many sports, etc. In Bridge a play corresponds to a "rubber" in Tennis to a "set" but unluckily in these games certain components of the play are again called "games". The French terminology is tolerably unambiguous: "game" = "jeu", "play" = "partie".

Second, the corresponding distinction should be made for the moves, which are the component elements of the game. A move is the occasion of a choice between various alternatives, to be made either by one of the players, or by some device subject to chance, under conditions precisely prescribed by the rules of the game. The *move* is nothing but this abstract "occasion", with the attendant details of description, - i.e. a component of the "game". The specific alternative chosen in a concrete instance - i.e. in a concete *play* - is the *choice*. Thus the moves are related to the choices in the same way as the game is to the play. The game consists of a sequence of moves, and the play of a sequence of choices. In this sense we would talk in chess of the first move, and of the choice "E2-E4".

Finally, the *rules* of the game should not be confused with the *strategies* of the players. Exact definitions will be given subsequently, but the distinction which we stress must be clear from the start. Each player selects his strategy - i.e. the general principles governing his choices - freely. While any particular strategy may be good or bad - provided that these concepts can be interpreted in an exact sense (cf. 14.5. and 17.8-17.10.) - it is within the player's discretion to use or to reject it. The rules of the game, however, are absolute commands. If the are ever infringed, then whole transaction by definition ceases to be game described by those rules. In many cases it is even physically impossible to violate them. E.g.: In Chess the rules of the game forbid a player to move his king into a position of "check". This is a prohibition in the same absolute sense in which he may not move a pawn sideways. But to move the king into a position where the opponent can "checkmate" him at the next move is merely unwise, but not forbidden.

29.2 Rappresentazione matematica della strategia

Generalmente una strategia (strategy profile) è una ennupla formata dalle strategie (strategy/alternative) dei singoli giocatori.

29.3 Dominant and dominated strategies

Let $x = (x_1, ..., x_n)$ and $y = (y_1, ..., y_n)$ be two different strategies, then x pareto domina y iif $x_i \leq y_i$ for all $i \in N$.

Capitolo 30

Zero-Sum Games

30.1 Preliminary Survay. [3]

30.1.1 General viewpoints. [3]

30.1.2 The one-person game. [3]

30.1.3 Chance and probability. [3]

30.1.4 The next objective. [3]

Capitolo 31

Non-Zero-Sum Games

Capitolo 32

Esercitazione 1

Nell'esercizio vedremo alcuni concetti visti durante la prima parte del corso del Prof. Giovanni Rossi.

Capitolo 33

Definitions

Cominiciamo col dare le definizioni dei concetti che vengono impiegati nell'esercizio.
Per *definizione* intendiamo una formula vera nel linguaggio della matematica basata sugli assiomi della teoria degli insiemi.

33.1 Pareto

Pareto cosa? Allora non avendo ben chiaro in mente di cosa andremo a parlare, tuttavia il processo di apprendimento per il tramite della funzione di ripartizione naturale aggrega, sotto il sostantivo oggettivato *pareto*, alcuni fatti.
Vediamo i fatti separatamente. Utilizzeremo da qui in avanti la p minuscola per indicare che l'entità reale del modello o l'oggetto matematico sottostante possiedono le proprietà richieste per essere considerate *pareto*.

33.1.1 pareto-dominates

Capitolo 34

Types of cooperative games

Although in the 70s attention has also been placed on cooperative games with a continuum of players in terms of measure theory (see [5] and related literature), nowadays cooperative games are for the most part dealt with in terms of a finite player set, usually denoted by $N = \{1, ..., n\}$. In particular, these games are approached through discrete mathematics as poset/lattice functions. That is, as real-valued functions defined on finite ordered structures.

Historically, the first cooperative games were defined in 1953 [27] as set functions $v : 2^N \to R_+, v(0) = 0$, with subsets $A \in 2^N$ referred to as coalitions (of players). These games may thus be called coalition games, although in many articles and books they are simply named cooperative games, as if exhausting the whole class of cooperative games.

1. Coalition games sono un tipo di cooperative game?
2. 2^N ? qual è il significato di questa notazione?
3. Prospetto?
4. Essential games?

Subsequently, in 1963, a further type of cooperative games entered the picture, involving partitions of players or coalition structures, i.e. partitions $P = \{A_1, ..., A_{|P|}\}$ of N. In particular, these second-generation cooperative games were named games in partition function form, and they are real-valued functions defined on pairs (A, P) such that $A \in 2^N$ and P is a partition of N such that $A \in P$. These pairs (A, P) are now referred to as "embedded coalitions" (or "embedded subsets" [13, 14]). These games pose serious problems in terms of lattice theory, as the corresponding ordered structure (i.e. of embedded subsets) currently needs ad hoc techniques for yielding a lattice (which in any case is not a geometric one, see below).

1. ...

Finally, in 1990, a third type of cooperative games was introduced and named "global games" [12]. These are simply real-valued partition functions, but still lead to embarassing results when it comes to define and quantify the so-called "solution". Roughly speaking, a solution of a cooperative games should determine the a priori worth, for each player, of playing the game. Somehow overcoming the mainstream literature, in the sequel we shall interpret solutions of cooperative games (of any kind) in terms M'́obius inversion and atomic/geometric lattices.

1. "of any kind" si rifesce ai tre tipi di giochi cooperativi o a tutti i giochi, sia cooperativi che non cooperativi?

Capitolo 35

Order: posets and lattices

35.1 Order: posets and lattices

Our concern is only with posets or ordered structures which are:

1. finite, i.e. $|X| < \infty$,
2. with a bottom element $x_\perp \in X, i.e. x \geq x_\perp$ for all $x \in X$,
3. with a top element $x^\top \in X$, i.e. $x^\top \geq x$ for all $x \in X$.

In particular, in the sequel our main concern shall be with the poset $(X, \geq)$ given by $(2^N, \supseteq)$ for a finite (player set) $N = \{1, ..., n\}$.

1. Quindi il top del poset $(2^N, \supseteq)$ is equals to 2^N and the bottom of $(2^N, \supseteq)$ is equals to ‰.

For all $x, y \in X$, the corresponding ***interval*** (or ***segment*** [25]) is the subset $[x, y] = \{z : x \leq z \leq y\} \subseteq X$; hence $x \leq y \Rightarrow [x, y] \neq$ ‰ while $[y, x] =$ ‰.
D - (baudo) - A partially ordered set is **locally finite** if each of its intervals has only finitely many elements.
A chain is a subset $K \subset X$ any two of whose elements are comparable, i.e. for all $x, y \in K$, either $[x, y] \neq$ ‰ or else $[y, x] \neq$ ‰ hold.
Dually, an antichain is a subset $AK \subset X$ any two of its elements are uncomparable, i.e. for all $x, y \in AK$, both $[x, y] =$ ‰ and $[y, x] =$ ‰ hold.
The length of a chain $K = \{x_0, ..., x_k\}$ is $|K| - 1 = k$.
The covering relation, denoted by $> *$, is defined as follows:
$x > *y \Leftrightarrow [y, x] = \{x, y\}$ (where $\{x, y\} = \{y, x\}$) for all $x, y \in X$.

1. Vorrei capire la direzione/terminologia. Anche rispetto al libro!?
2. Todo - copiare appunti dal quaderno

For $z \geq y$, a $(z - y)$-chain $K_*^{z-y} = \{y = x_0, x_1, ..., x_k = z\}$ is said to be maximal if $x_l > *x_{l-1}$ for all $0 < l \leq k$.

1. from the free dictionary: A sequence of $n + 1$ subsets of a set of n elements, such that the first member of the sequence is the empty set and each member of the sequence is a proper subset of the next one.

If for any $y, z \in X$ all maximal $(z - y)$-chains have the same length, then poset $(X, \geq)$ is said to satisfy the Jordan-Dedekind JD condition, in which case for every element $x \in X$ the length of any maximal $(x - x_\perp)$-chain is the *rank* of x. Formally, for any poset $(X, \geq)$ with bottom element $x_\perp$ and satisfying the JD condition, the rank function $r : X \to Z_+$ is defined recursively by

1. $r(x_\perp) = 0$
2. $x > *y \Rightarrow r(x) = r(y) + 1$.

Thus the rank measures the height of elements (in the Hasse diagram, see above and below).

APPUNTI UTILI PER QUESTA SEZIONE

- Let P be an ordered set. We say P has a **top** element if there exists $\top \in P$ with the property that $x \leq \top$ for all $x \in P$.
- uniquiness of the top (think of duality), antisymmetry etc.? Il top dovrebbe essere unico perchè se supponiamo che esista un altro top $t2$ tale che quindi $x \leq t2$ for all $x \in P$ ma allora si avrebbe $\top \leq t2 \Rightarrow t2! \leq \top$ per la proprietà antisimmetrica pertanto siamo giunti ad una contraddizione perchè avevamo supposto $\top$ essere un top.
- Let P be an ordered set and let $S \subseteq P$. An element $x \in P$ is an **upper bound** of S if $s \leq x$ for all $s \in S$.
- Upper bound is unique when it exists.
- Quindi posso dire che un top è un upper bound che sta dentro l'insieme P? Insomma che differenza cè tra upper bound e top?
- In a partially ordered set, an element p emphcovers an element q when the segment $[q, p]$ contains two elements. [25, 343]
- A lattice is a partially ordered set where max and min of two elements (we call them join and meet, as usual, and write $\vee$ and $\wedge$) are defined. [25, 342]
- A **segment** $[x, y]$, for x and y in a partially ordered set P, is the set of all elements z between x and y, that is, such that $x \leq z \leq y$. ... . A segment is endowed with the induced order structure; thus, a segment of a lattice is again a lattice. [25, 342]
- A partially ordered set is **locally finite** if every segment is finite. [25, 342]
- Let P be a non-empty ordered set.
  If $x \vee y$ and $x \wedge y$ exist fora all $x, y \in P$, then P is called a **lattice**.
  If $\vee S$ and $\wedge S$ exist for all $S \subseteq P$, then P is called a **complete lattice**.
- Totally ordered subsets of a poset play an important role in the theory of partial orders.
-

35.1.1 Maximal chains of subsets and permutations

35.1.2 Subset of Boolean lattices

Atomicity

Complementation

Capitolo 36

Möbius inversion

Möbius inversion applies to any (locally finite) poset, provided a bottom element exists [25]. For the Boolean lattice $(2^N, \cap, \cup)$ of subsets of N ordered by inclusion $\supseteq$ and the geometric lattice $(2^N, \vee, \wedge)$ of partitions of N ordered by coarsening $\geq$ [1, 31], the bottom elements are, respectively, the empty set ‰ and the fines partition $P_\perp = 1, ..., n$.

1. Locally finite poset - where all intervals are finite
2. Boolean lattice -
3. Geometric lattice

Capitolo 37

Incidence algebra

37.0.1 Incidence algebra

37.0.2 Möbius inversion

37.0.3 Vector spaces and bases

37.0.4 Lattice functions

Set functions and Boolean or Pseudo-Boolean functions

Polynomial multilinear extension of set functions

Capitolo 38

Formulario di Teoria dei Giochi

A, B, X, R, N, etc. for SETS a, b, x, r, n, etc. for ELEMENTS of above sets i, j, n, x, y, z, etc for INDICES of SETS or ELEMENTS (), for function application and tuples Indices are use to iterate over a set or to name the object to which belongs.

Doesn't exist a way to simulate hash map in mathematics.

Dobbiamo inventare un operatore o una struttura dati in grado di rappresentare in modo funzionale ai calcoli un hash map ovvero un oggetto che possiede, si porta dientro con se a sua volta un insieme.

Vi è quasi una certa ridondanza in questo fatto.

Ma in realtà si tratta solo di comprendere il significato dell'applicazione/funzione/mappa che assegna ad ogni elemento di un insieme, un altro insieme.

```
%% ATTENZIONE
l'indice n a volte seve per dare un nome e un numero, altre volte solo per dare un numero,
per esempio nella formula d_1, ..., d_n l'indice n significa prendo enne indici
senza che faccia specificatamente ad n che rappresenta il numero dei giocatori.
n indica due cose differenti!!! non sempre quando trovate n vuol dire che tale n si
intenda il numero di giocatori

%% VALUE
Si definisce value un qualunque numero reale.

    %% VOGLIAMO QUANTIFICARE (VALORIZZARE) - valori di R
    LET R be REAL SET
    LET v in R

    %% VOGLIAMO CONTARE (COUNT)           - valori di N
    LET n in N
    LET A be SET
    LET |A| := n
```

```
    %% VOGLIAMO RANDOMIZZARE. In questo caso occorre il value di un intero insieme.
    LET D be SET
    LET n INDICE of N
    LET D = {d_1, ..., d_n}
    LET [0,1] \in R
    LET d_1, ..., d_n \in [0,1]
    LET d_1 + ... + d_n = 1
    Ora che abbiamo costruito D (o DELTA) ovvero l'insieme randomizzatore
    lo possiamo utilizzare nei nostri calcoli.
```

```
LET A, B be SETS
LET B = {b}
LET b in R
LET {B} be an anonymous SET. In this case, {B} is a set with two elements:
B (which is a set) and 0 (the empty set).
LET a elements of A
LET value be a FUNCTION
LET value A \to {B} -- ABSTRACTION
LET value defined as a --> B in words: each elements of A is mapped to the same set B
    This fact is useful for successive steps, counting how many of...
LET value(a) --> SUM of elements of B
```

Now we are able to define randomness

```
LET A, B_1, ... B_n , {B_1, ..., B_n} be SETS   %% Here n is just an INDICES
LET a elements of A
LET value be a FUNCTION
LET value A \to {B_1, ..., B_n} -- ABSTRACTION
LET value defined as
```

So we are conducted to the definition of value of an element of a set. Whenever I get an element of a set I can ask for its value.

In questo modo non basta più dire che A e B sono insiemi ma occorre anche specificare la funzione value che restituisce il valore di un suo elemento, cioè una funzione che dato in input un elemento dell'insieme restituisce un valore.

Per convenzione e per semplificare i calcoli assumiamo che le funzioni value restituiscano sempre un insieme e che il value è dato dalla somma dei valori presenti nell'insieme restituito.

Let's define *Pareto*

Prima però proviamo a fare il passaggio successivo, prima abbiamo imparata a calcolare il valore del payoff di un giocatore ma questa cosa può anche essere sbagliata dal punto di vista della teoria dei giochi cooperativi. Adesso vogliamo introdurre la nozione di payoff per coalizione che come si può immaginare è la somma dei payoff dei singoli giocatori.

Altra cosa importante sarà quello di attivare il meccanismo della partizione (partizionamento) e della conseguente enumerazione di sotto-insiemi che godono di determinate proprietà.

Ed infine occorrerà passare alle boolean function.

Capitolo 39

Potential games

Un gioco a potenziale, o gioco con potenziale, è un gioco in cui l'incentivo per i giocatori per passare da una strategia ad un'altra puèssere espresso con una singola funzione globale, detta funzione potenziale, richiamando l'omonimo concetto fisico.

Il concetto fu introdotto da Dov Monderer e Lloyd Shapley nel 1996. Vedi [6].

La funzione potenziale si rivela uno strumento utile per analizzare gli equilibri di Nash in certi giochi, dato che gli incentivi di tutti i giocatori sono mappati in una singola funzione, e l'insieme degli equilibri di Nash si trova fra gli ottimi locali della funzione potenziale.

I massimi della funzione potenziale sono equilibri di Nash, mentre l'inverso non è sempre vero. L'uso dei massimi della funzione potenziale permette di raffinare l'insieme degli equilibri di Nash.

il [6] è un tantino complesso da leggere, pertanto inizierei da qualcosa di more simple.

...e congestion games...

39.1 Congestion games

Bibliografia

[1] Dario Bauso. "Game Theory: Models, Numerical Methods and Applications". In: *Foundations and Trends® in Systems and Control* 1.4 (2014), pp. 379–522. ISSN: 2325-6818. DOI: 10.1561/2600000003. URL: http://dx.doi.org/10.1561/2600000003.

[2] Jon Kleinberg David Easley. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World*. 429000/. URL: 429000/63cdda2920a2f0f2cdc6843a79b080d0.

[3] Oskar Morgenstern John Von Neumann. *Theory of Games and Economic Behaviour*. 3rd. Princeton University Press, 1972. ISBN: 0691041830. URL: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=DB5738DCB6A616942D248ABAB2D91434.

[4] Magliveras S.S. (eds.) Kramer E.S. *Finite Geometries and Combinatorial Designs*. 1208000/. URL: 1208000/ea325556e24f73e6ad8453d59478d17c.

[5] Toufik Mansour. *Combinatorics of Set Partitions*.

[6] Dov Monderer e Lloyd Shapley. "Potential Games". In: *Games and Economic Behavior* 14.1 (1996), pp. 124–143. URL: https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:gamebe:v:14:y:1996:i:1:p:124-143.

[7] S. Kotz Nikolai N. Vorob'ev. *Game Theory: Lectures for Economists and Systems Scientists*. 851000/. URL: 851000/437d405216d1de4642a796e92f5a44b2.

[8] Giovanni Rossi. *Games and Boolean Models*. type. institution.

[9] K. Ueno. *An Introduction to Algebraic Geometry*. 890000/. URL: 890000/28836e6a0e4fc5aa73865094371e57a0.