Geometria 1

a cura di
Davide Ferracin

Indice

1 Fondamenti **1**

2 Geometria Euclidea **3**

2.1 Geometria Euclidea: definizione 4
2.2 Vettore 5
2.2.1 Vettore colonna, vettore riga 5
2.2.2 Vettore in geometria mono, bi e tri-dimensionale 5
2.2.3 Componenti di un vettore 5
2.2.4 Rappresentazione canonica 5
2.2.5 Lunghezza di un vettore in R^n 5
2.2.6 dot product or scalar product 5
2.2.7 NOTAZIONE 5
2.2.8 NOTE 5
2.2.9 APPROFONDIMENTI 5
2.3 Reference 6
2.4 Sistema di Riferimento 7
2.4.1 ESEMPIO 7
2.5 Sistema Cartesiano 8
2.6 Geometria Euclidea 3d 9
2.7 Segmento 10
2.8 Insieme di Vettori Applicati 11
2.9 Piano 12
2.10 DEFINIZIONE - ASSIOMA CHE DIVENTA DEFINIZIONE??!!! 13
2.11 Equazione Cartesiana del Piano 14
2.12 Equazione Cartesiana Retta sul Piano 15
2.13 Equazione Parametrica Retta nello Spazio (1) 16
2.14 Equazione Cartesiana della Retta 17
2.15 Rette Complanari 18
2.16 Superficie 19

3 Forme Bilineari **21**

4 Geometria Proiettiva **23**

5 Coniche **25**

6 Dati di lavoro **27**

Capitolo 1

Fondamenti

1.1 Introduzione

Lo scopo di queste pagine è di mettere lo studente in grado di apprendere in maniera autonoma i concetti e gli strumenti della geometria. Le pagine sono rivolte a studenti dei corsi di Matematica in quanto le conoscenze sono presentate sotto forma di definizioni, teoremi e relative dimostrazioni applicando le tecniche e gli strumenti della logica matematica. I concetti, seppur presentati il più possibile in maniera formale, sono accompagnati da commenti scritti con il linguaggio dello studente. Infatti, vengono associate al formalismo puro tipico della matematica moderna un linguaggio comune e comprensibile a tutti. Per questo si cerca di spiegare parola per parola il significato dei termini delle definizioni, dei teoremi e di ogni altro enunciato. Le pagine di teoria sono accompagnate da esercitazioni pratiche sia di esercizi ed esami svolti e sia di esercizi da svolgere in autonomia. Altro obiettivo è quello di contenere in un'unica trattazione tutto il sapere matematico necessario per superare tutti gli esami di geometria proposti nei corsi universitari di Matematica e di ogni altro corso di laurea che include anche lo studio della geometria. Le pagine sono strutturate in un indice in cui si trova il syllabus (il nostro programma di studio) e di una pagina per ogni concetto. Le pagine sono scritte in latex e trasformate in html per la visualizzazione. E' possibile convertire anche in formato pdf.

1.1.1 I link

Ogni pagina che espone un concetto contiene un certo numero di link. I link che mostrarno l'url, per esempio: `http://calvino.polito.it/~tedeschi/geometria/`, sono link esterni al documento. I link che non mostrano l'url, per esempio: Geometria euclidea, sono link interni. Se cliccate su un link esterno relativo a esercizi allora tutto bene ma se cliccate link esterni di teoria può darsi che la pagina non sia completa o sia scritta in maniera non del tutto comprensibile. In quest'ultimo caso potete avvisare i partecipanti al progetto, aprendo un issue su github.

1.1.2 Prerequisites

Costanza nello studio, dedicare il giusto tempo, meglio un pò al giorno tutti i giorni.

Capitolo 2

Geometria Euclidea

2.1 Geometria Euclidea: definizione

Definizione 2.1.1. *E' la classica geometria che si studia alle scuole elementari, medie e superiori. E' quella che si basa sugli Elementi di Euclide dove i concetti fondamentali (ovvero gli assiomi) sono quelli di punto, retta, etc.*

2.2 Vettore

2.2.1 Vettore colonna, vettore riga

Un vettore in uno spazio n-dimensionale è un insieme ordinato formato da n valori.

2.2.2 Vettore in geometria mono, bi e tri-dimensionale

Un vettore è un oggetto che ha una direzione e una lunghezza. In questo caso si dimostrerà che un vettore può essere rappresentato come da definizione precedente.

2.2.3 Componenti di un vettore

2.2.4 Rappresentazione canonica

2.2.5 Lunghezza di un vettore in R^n

The length of a vector v in R^n is the square root of the sum of the squares of tis components.

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}$$

This is a natural generalization of the Pythagorean Theorem.

2.2.6 dot product or scalar product

The dot product (or inner product or scalar product) of two n-component real vectors is the linear combination of their components.

$$uv = u_1 v_1 + ... + u_n v_n$$

squares of its components.

2.2.7 NOTAZIONE

2.2.8 NOTE

Le due definizioni sono equivalenti nel senso che si possono rappresentare i vettori della definizione 2 come vettori della definizione 1.

Attenzione alla definizione di vettore libero.

Attenzione all'uguaglianza tra due vettori. Due vettori sono uguali quando hanno la stessa rappresentazione canonica.

2.2.9 APPROFONDIMENTI

- http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/book.pdf
- https://www.math10.com/en/geometry/vectors-operations/vectors-operations.html
- http://www.math.utah.edu/online/2210/notes/ch13.pdf
- http://www.ncert.nic.in/ncerts/l/lemh204.pdf

2.3 Reference

Osservazione 2.3.1. reference as puntatore???

Osservazione 2.3.2.
- TITLE

2.4 Sistema di Riferimento

Definizione 2.4.1. *from wikipedia italiano:*

Si definisce sistema di riferimento l'insieme dei riferimenti o coordinate utilizzate per individuare la posizione di un oggetto nello spazio. A seconda del numero di riferimenti usati, si può parlare di: sistema di riferimento monodimensionale, bidimensionale, tridimensionale.

Definizione 2.4.2. *from wikipedia in english:*

In geometry, a coordinate system is a system which uses one or more numbers, or coordinates, to uniquely determine the position of a point or other geometric element on a manifold such as Euclidean space...

Osservazione 2.4.3. Come dice il nome stesso, dobbiamo fissare un "punto" dal quale osservare i nostri "oggetti". Questo concetto deriva più dalla fisica che dalla matematica. Vi sono tanti esempi che posso chiarificare. In qualche modo sistema di riferimento si potrebbe anche chiamare punto di osservazione.

Da notare che per la definizione italiana, sistema di riferimento e sistema di coordinate sono la stessa cosa, sono sinonimi. Mentre se cerchiamo reference system in inglese ci troviamo qualcosa come "frame of reference" che tratta argomenti di fisica. Quindi nel mondo anglosassone il nostro sistema di riferimento prende il nome di coordinate system. Peccato però che le due definizioni sono diverse non solo nella forma ma anche nella sostanza. La definizione inglese, che secondo me è da preferire, mette bene in risalto l'obiettivo del "sistema delle coordinate" ovvero quello di rappresentare tramite dei numeri o altre strutture matematiche più complesse (per esempio vettori di R^n) la posizione degli elementi geometrici (punti, rette, solidi, etc).

2.4.1 ESEMPIO

The simplest example of a coordinate system is the identification of points on a line with real numbers using the number line. In this sytem, an arbitrary piont O (the origin) is chosen on a given line. The coordinate of a point P is defined as the signed distance from O to P, where the signed distance is the distance taken as positive or negative depending on which side of the line P lies. Each point is given a unique coordinate and each real numebr is the coordinate of a unique point.

Osservazione 2.4.4.

- https://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_di_riferimento
- https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_system

2.5 Sistema Cartesiano

Definizione 2.5.1. *Il sistema cartesiano è un sistema di riferimento formato da n rette ortogonali, intersecantesi tutte in un punto chiamato origine, su ciascuna delle quali si fissa un orientamento (sono quindi dette orientate) e per le quali si fissa anche un'unità di misura (cioè si fissa una metrica di solito euclidea) che consente di identificare qualsiasi punto dell'insieme mediante n numeri reali. In questo caso si dice che i punti di questo insieme sono in uno spazio di dimensione n.*

Definizione 2.5.2. *from wikipedia in english:*

A Cartesian coordinate system is a coordinate system that specifies each point uniquely in a plain by a pair of numerical coordinates, which are the signed distances to the point from two fixed perpendicular directed lines, measured in the same unit of length. Each reference line is called coordinate axis or just axis of the system, and the point where they meet is its origin, usually at ordered pair $(0, 0)$*. The coordinates can also be defined as the positions of the perpendicular projections of the point onto the two axes, expressed as signed distances from the origin.*

Osservazione 2.5.3. Ogni punto è identificato da una coppia di numeri (x, y) dove il primo numero rappresenta la distanza dall'asse y mentre il secondo numero rappresenta la distanza dall'asse x. Pensateci è proprio così! Il fatto è che se parliamo di distanza, allora dobbiamo definire che cosa si intende per distanza.

Per definizione (che vuol dire?), esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano cartesiano e le coppie ordinate di numeri reali. L'insieme di tutte le coppia di numeri reali, R^2 è un R-spazio vettoriale.

Osservazione 2.5.4.

- https://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_di_riferimento_cartesiano
- https://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

2.6 Geometria Euclidea 3d

Definizione 2.6.1. *Uno spazio euclideo è uno spazio affine in cui valgono gli assiomi e i postulati della geometria euclidea.*

Osservazione 2.6.2.

- https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_euclideo
- https://www.britannica.com/topic/Euclidean-space
- http://www.molwick.com/it/relativita/324-geometria-spazio.html
- http://www.dmmm.uniroma1.it/~giuseppe.accascina/Tesi_di_Laurea/2005-Piselli-Geometria_euclidea_dello_spazio/2005-Piselli-Tesi.pdf
- http://www.treccani.it/enciclopedia/tag/spazio-tridimensionale-euclideo/

2.7 Segmento

Definizione 2.7.1. *Un segmento è un vettore applicato in un punto A e terminante in un punto B.*

Osservazione 2.7.2. Il concetto di segmento è la corrispondenza 1 a 1 tra lo studio della geometria con gli strumenti tradizionali ed il concetto di vettore.

Osservazione 2.7.3.

- http://calvino.polito.it/~casnati/Geometria15BCG/GeometriaNuovo/GeometriaNuovo7.pdf

2.8 Insieme di Vettori Applicati

Definizione 2.8.1. *Fissiamo arbitrariamente nello spazio tridimensionale della geometria euclidea un punto O e consideriamo l'insieme di tutti i vettori dello spazio applicati in O. Tale insieme lo chiameremo V_O^3 (si legge V con O cubo).*

Osservazione 2.8.2. In questa definizione si cerca già di trovare un appiglio per passare dallo studio della geometria euclidea classica così come è stata fatta dai tempi di Euclide ai giorni nostri ovvero nel modo in cui viene studiata nella scuola dell'obbligo alla geometria così come la si studia nei corsi universitari di Matematica. Stiamo cercando di trovare un modo per studiare, rappresentare etc. la geometria con la notazione algebrica (o anche analitica) tipica della matematica pura. Per capire la differenza prendete un libro di geometria della scuola dell'obbligo e confrontatelo con un libro universitario di geometria.

E' importante in questa definizione iniziare questo passaggio da geometria classica a geometria analitica studiata con gli strumenti dell'algebra lineare etc.

Adesso fissate bene nella mente l'immagine classica dello spazio rappresentato con gli assi cartesiani e immaginate un qualsiasi punto.

Dimostreremo che è possibile passare dalla rappresentazione classica a quella di V_O^3 a quella di R^3.

Osservazione 2.8.3.

- http://progettomatematica.dm.unibo.it/GeomSpazio3/Sito/Pagine/tesi.html

2.9 Piano

Definizione 2.9.1. *Si intende il piano euclideo quello che si studia nelle scuole dell'obbligo, vedi approfondimenti.*

Osservazione 2.9.2. Daremo anche una definizione algebrica.

Osservazione 2.9.3.

- https://it.wikipedia.org/wiki/Geometria_euclidea
- https://it.wikipedia.org/wiki/Assioma
- http://www.astrofilibresciani.it/Biblioteca_UAB/Biblioteca/euclid_p.pdf
- http://www.webalice.it/francesco.odetti/EuclideSlidesCpct.pdf
- http://www.scienzaatscuola.it/euclide/index.html

2.10 DEFINIZIONE - ASSIOMA CHE DIVENTA DEFINIZIONE??!!!

Definizione 2.10.1. *Sia π il piano passante per un punto P_0 ortogonale ad un vettore $n \neq o$. Allora π è il luogo dei punti P dello spazio tali che il vettore P_0P è ortogonale al vettore n, ovvero:*

$$\pi = \{P \in S_3 | P_0P \cdot n = o\}$$

Osservazione 2.10.2. Qui stiamo facendo una cosa di estrema importanza stiamo formulando in linguaggio matematico moderno quello che per Euclide era un concetto primitivo non dimostrabile (e non definibile! in un certo senso).

Vorrei capire però se $P_0P \cdot n$ è il prodotto scalare o vettoriale?

Osservazione 2.10.3.

- `http://calvino.polito.it/~salamon/P/G/alga11.pdf`

2.11 Equazione Cartesiana del Piano

Definizione 2.11.1. *Ogni equazione lineare in x, yez del tipo $ax + by + cz + d = 0$ rappresenta, a meno di un fattore moltiplicativo non nullo, l'equazione cartesiana di un piano nello spazio S_3 (chi essere S_3???).*

Osservazione 2.11.2. In realtà qui la questione riguarda un teorema il cui risultato è utilizzatissimo nelle applicazioni pratiche.

Si dimostrerà che ogni equazione di primo grado in x, y e z del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0$$

con $a, b, c, d \in R$ e a, b, c non contemporaneamente tutti uguali a zero, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta un piano. Viceversa, ogni piano dello spazio è rappresentabile tramite un'equazione lineare in x, y, z del tipo suddetto.

Osservazione 2.11.3.

- http://progettomatematica.dm.unibo.it/GeomSpazio3/Sito/Pagine/indiceFRAME.html
- http://calvino.polito.it/~salamon/P/G/alga11.pdf
- http://calvino.polito.it/~casnati/Geometria05BCG/Geometria/Geometria9.pdf

2.12 Equazione Cartesiana Retta sul Piano

Osservazione 2.12.1.

- https://it.wikipedia.org/wiki/Retta_nel_piano_cartesiano

2.13 Equazione Parametrica Retta nello Spazio (1)

Definizione 2.13.1. *L'equazione parametrica di una retta parallela al vettore (non nullo)* (a, b, c) *è passante per il punto* (x_0, y_0, z_0) *è*

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \tag{2.13.1}$$

con $t \in R$

Osservazione 2.13.2. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane di una retta nello spazio passante per due punti: `http://www.matematicamente.it/forum/retta-passante-per-due-punti-nello-spazio-t48348.html`

Osservazione 2.13.3.

- `http://www.matematicamente.it/formulario-dizionario/formulario/geometria-analitica-nello-spazio-retta/`
-

2.14 Equazione Cartesiana della Retta

Osservazione 2.14.1.

- http://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/geometria-dello-spazio/675-equazioni-cartesiane-della-retta-nello-spazio.html
- http://www1.mat.uniroma1.it/people/garroni/pdf/Lezione7.pdf
- http://science.unitn.it/~carrara/INGTN10_11/corres04.pdf

2.15 Rette Complanari

Definizione 2.15.1. *Due rette si dicono complanari se appartengono allo stesso piano.*

Osservazione 2.15.2. Calcolare se due rette sono complanari:

- http://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/6183-rette-complanari.html

Osservazione 2.15.3.
- http://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/6183-rette-complanari.html

2.16 Superficie

Capitolo 3

Forme Bilineari

- Forme bilineari: Matrice associata a una forma bilineare.
- Forme simmetriche e antisimmetriche.
- Basi ortogonali.
- Esistenza di basi ortogonali per le forme simmetriche.
- Forme bilineari simmetriche reali.
- Teorema di Sylvester.
- Teorema spettrale reale.
- Cenno alle forme hermitiane e al teorema spettrale complesso.
- Coniche e quadriche di R^n e loro classificazione affine ed euclidea.

Capitolo 4

Geometria Proiettiva

Capitolo 5

Coniche

Capitolo 6

Dati di lavoro

da aggiungere in geometria euclidea:

- Punto
- Retta
- Rette ortogonali
- Rette sghembe
- Piano
- Fasci