APPLICAZIONI LINEARI

Esercizi

Esercizio 1. Sia

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to (x + 2y + z, y + z).$$

(1) Verificare che f è lineare.
(2) Determinare una base di $\ker(f)$ e stabilire se f è iniettiva.
(3) Calcolare $w := f(2, 1, 3)$ e determinare $f^{-1}(w)$

Svolgimento. Verifichiamo che f è lineare. A tale scopo siano $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Risulta

$$\begin{aligned} f(x,y,z)+f(x',y',z') &= (x+2y+z, y+z)+(x'+2y'+z', y'+z') = \\ &= (x+2y+z+x'+2y'+z', y+z+y'+z') = \\ &= ((x+x')+2(y+y')+(z+z'), (y+y')+(z+z')) = \\ &= f(x+x', y+y', z+z'), \\ \alpha f(x,y,z) &= (\alpha(x+2y+z), \alpha(y+z)) = \\ &= ((\alpha x)+2(\alpha y)+(\alpha z), (\alpha y)+(\alpha z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z). \end{aligned}$$

Per determinare una base di $\ker(f)$ conviene prima descrivere tale insieme. Affinché $(x, y, z) \in \ker(f)$ si deve avere $(x + 2y + z, y + z) = (0, 0)$ ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

In particolare $\ker(f) = \{\ (z, -z, z) \in \mathbb{R}^3\ \}$. Quindi una base di $\ker(f)$ è costituita da $((1, -1, 1))$. f non è iniettiva poiché $\ker(f) \neq \{0\}$.

Si noti che anche senza fare conti è chiara la non iniettività di f. Infatti per una qualsiasi applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vale $n = \dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{im}(g))$: quindi, affiché g sia iniettiva, è necessario (ma non sufficiente) che $n \leq m$.

Infine sia $w := f(v) \in \mathbb{R}^2$. Allora ricordo che $f^{-1}(w) = v + \ker(f)$. Quindi se $v = (2, 1, 3)$ si ha

$$f^{-1}(w) = \{\ (2 + h, 1 - h, 3 + h) \in \mathbb{R}^3 \mid h \in \mathbb{R}\ \}.$$

Esercizio 2. Siano $V := \mathbb{R}^4$, $W := \mathbb{R}^3$.

(1) Verificare che i vettori
$$v_1 := (1,0,0,0), \quad v_2 := (1,3,5,0), \quad v_3 := (3,2,-1,1), \quad v_4 := (1,1,0,0)$$
formano una base $\mathcal{B}$ di V.

(2) Siano
$$w_1 := (1,0,1), \quad w_2 := (1,1,0), \quad w_3 := (1,0,0).$$
Verificare che $\mathcal{C} := (w_1, w_2, w_3)$ è una base di W.

(3) Si dimostra che esiste un'unica applicazione lineare $f\colon V \to W$ tale che
$$\begin{aligned} f(v_1) &:= w_1 + w_3, \quad f(v_2) := -w_1 + w_2, \\ f(v_3) &:= w_3, \quad f(v_4) := 3w_1 + 2w_2 - w_3. \end{aligned}$$
Determinare $M(f)$.

Svolgimento. Per verificare che $\mathcal{B}$ è una base procediamo calcolando il rango della matrice avente le componenti dei vettori come righe. Tale matrice è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
che ha rango 4 (si noti che la matrice è ridotta per colonne).

Analogamente $\mathcal{C}$ è una base. Infatti la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 3 (è ridotta per colonne).

Per calcolare $M(f)$ si può procedere sfruttando la linearità di f e calcolando $f(e_i)$. Risulta
$$\begin{gathered} e_1 = v_1, \quad e_2 = -v_1 + v_4, \\ e_3 = 2v_1/5 + v_2/5 - 3v_4/5, \quad e_4 = -3v_1/5 + v_2/5 + v_3 - 13v_4/5, \end{gathered}$$
quindi si ottiene
$$\begin{gathered} f(e_1) = f(v_1) = w_1 + w_2 = (2,0,1), \\ f(e_2) = f(-v_1 + v_4) = 2w_1 + 2w_2 - 2w_3 = (2,2,2), \\ f(e_3) = f(2v_1/5 + v_2/5 - 3v_4/5) = -8w_1/5 - w_2 + w_3 = (-8/5, -1, -8/5), \\ f(e_4) = f(-3/5v_1 + v_2/5 + v_3 - 13v_4/5) = \\ = -43w_1/5 - 5w_2 + 3w_3 = (-53/5, -5, -43/5). \end{gathered}$$

Quindi

$$f(e_1) = (2,0,1), \quad f(e_2) = (2,2,2),$$
$$f(e_3) = (-8/5,-1,-8/5), \quad f(e_4) = (-21/5,-17/5,5).$$

Concludiamo allora che

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8/5 & -21/5 \\ 0 & 2 & -1 & -17/5 \\ 1 & 2 & -8/5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Siano

$$u := (0,2,0,1), \quad v := (2,0,0,0)$$
$$V := \{ \ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = x + t = 0 \ \}.$$

Esiste unico $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ tale che $f(u) = u - v$, $f(v) = u + v$, $V \subseteq \ker(f)$. Determinare $M(f)$.

Svolgimento. Per calcolare $M(f)$ è necessario determinare $f(e_i)$. A tale scopo si può costruire una base $\mathcal{C}$ con i dati noti, determinare le immagini dei suoi vettori e, come nell'esercizio precedente, ottenere da queste informazioni le immagini dei vettori $f(e_i)$.

Si noti che i vettori $v_1 := u$ e $v_2 := v$ sono linearmente indipendenti. Una base di $\ker(f)$ è data dai vettori le cui componenti sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + t = 0. \end{cases}$$

Quindi $V = \mathcal{L}((0,1,1,0),(1,0,0,-1))$. Consideriamo i vettori $v_3 := (0,1,1,0)$ e $v_4 := (1,0,0,-1)$ e verifichiamo che $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ è base di $\mathbb{R}^4$. A tale scopo calcoliamo

$$\varrho \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando sulle righe

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che è ridotta per colonne ed ha rango 4, dunque $\mathcal{C}$ è base. Risulta $e_1 = v_2/2$, $e_2 = v_1/2 - v_2/4 + v_4/2$, $e_3 = -v_1/2 + v_2/4 + v_3 - v_4/2$, $e_4 = v_2/2 - v_4$.

Risulta

$$f(v_1) = (-2, 2, 0, 1), \quad f(v_2) = (2, 2, 0, 1), \quad f(v_3) = f(v_4) = (0, 0, 0, 0),$$

quindi

$$\begin{gathered} f(e_1) = (1, 1, 0, 1/2), \quad f(e_2) = (-3/2, 1/2, 0, 1/4), \\ f(e_3) = (3/2, -1/2, 0, -1/4), \quad f(e_4) = (1, 1, 0, 1/2), \end{gathered}$$

da cui si ricava che

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ definito da

$$f(x, y, z, t) := (-x + z, -y + t, x - z, y - t).$$

Determinare la dimensione ed una base di $\ker(f)$ e di $\mathrm{im}(f)$.

Svolgimento. Affinché $v = (a, b, c, d) \in \ker(f)$ si deve avere

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - d = 0. \end{cases}$$

In particolare

$$\ker(f) = \{\ (a, b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\ \} = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)).$$

Si verifica facilmente che $v_1 := (1, 0, 1, 0), v_2 := (0, 1, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ è una base di $\ker(f)$ e, dunque, $\dim(\ker(f)) = 2$.

Poiché $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, segue che $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$. Ricordo che $\mathrm{im}(f) = \mathcal{L}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$, pertanto, per determinare una base $\mathcal{C}$ di $\mathrm{im}(f)$, è sufficiente individuare due vettori linearmente indipendenti fra $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$. Per esempio $v_3 := f(e_1) = (-1, 0, 1, 0)$ e $v_4 := f(e_2) := (0, -1, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, quindi possiamo scegliere $\mathcal{C} := (v_3, v_4)$.

Esercizio 5. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da

$$f(a, b, c) := (a - hc, b - hb, c - ha).$$

Determinare una base di $\ker(f)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Risulta $(a,b,c) \in \ker(f)$ se e solo se (a,b,c) è soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ -h & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Procedendo con operazioni elementari di riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ -h & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + hR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & 1-h^2 \end{pmatrix}$$

si osserva che se $h \neq \pm 1$ l'unica soluzione è quella banale, perciò $\ker(f) = \{0\}$ in questo caso.

Se, invece, $h = 1$ il sistema si riduce alla sola equazione $a - c = 0$. In particolare

$$\ker(f) = \{\ (a,b,a)\ \}$$

ed una base di $\ker(f)$ è $\mathcal{C} := ((1,0,1),(0,1,0))$.

Infine, se $h = -1$ il sistema si riduce a

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2b = 0. \end{cases}$$

In particolare

$$\ker(f) = \{\ (a,0,-a)\ \}$$

ed una base di $\ker(f)$ è in tal caso $\mathcal{D} := ((1,0,-1))$.

Esercizio 6. Siano

$$v_1 := (0,0,2,-1), \quad v_2 := (-1,1,2,1), \quad v_3 := (0,1,0,2), \quad v_4 := (0,0,0,1).$$

(1) Verificare che (v_1,v_2,v_3,v_4) è base di $\mathbb{R}^4$.
(2) Esiste unico $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ tale che

$$f(v_1) = f(v_2) = v_1 - v_3, \quad f(v_3) = v_1, f(v_4) = 0.$$

Calcolare $M(f)$.
(3) Trovare basi di $\ker(f)$ e di $\mathrm{im}(f)$.

Svolgimento. Per verificare che $\mathcal{B} := (v_1,v_2,v_3,v_4)$ è base di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente dimostrare che i quattro vettori v_1,v_2,v_3,v_4 sono linearmente indipendenti. A tale scopo basta verificare che

$$\varrho \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4,$$

il che è chiaro in quanto la matrice è ridotta per righe.

Risulta che

$$e_1 = -v_1 + v_2 - v_3, \quad e_2 = v_3 - 2v_4, \quad e_3 = v_1/2 + v_4/2, \quad e_4 = v_4,$$

perciò

$$\begin{gathered} f(e_1) = f(-v_1 + v_2 - v_3) = f(v_3) = v_1 = (0, 0, 2, -1), \\ f(e_2) = f(v_3 - 2v_4) = f(v_3) = v_1 = (0, 0, 2, -1), \\ f(e_3) = f(v_1/2 + v_4/2) = f(v_1)/2 = v_1/2 - v_3/2 = (0, -1/2, 1, -3/2), \\ f(e_4) = f(v_4) = 0. \end{gathered}$$

sicché

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$M(f) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2/4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

risulta $\varrho(M(f)) = 2$, quindi $\dim(\ker(f)) = 2$. Per determinare una base di $\ker(f)$ basta allora trovare vettori $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti e tali che $f(v) = 0$. Poiché $f(v_1) = f(v_2)$ ed $f(v_4) = 0$ segue che basta scegliere $w_1 := v_1 - v_2 = (1, -1, 0, -2)$, $w_2 := v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Concludiamo che $\mathcal{B} := ((1, -1, 0, -2), (0, 0, 0, 1))$ è base di $\ker(f)$.

Infine per trovare una base di $\mathrm{im}(f)$ è sufficiente estrarre una base dall'insieme $\{(0, 0, 2, -1), (0, 0, 2, -1), (0, -1/2, 1, -3/2), (0, 0, 0, 0)\}$. Quindi una base di $\mathrm{im}(f)$ è, per esempio, $\mathcal{C} := ((0, 0, 2, -1), (0, -1/2, 1, -3/2))$.

Quiz

Quiz 1. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$M(f) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Esiste un isomorfismo $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$M(g \circ f) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Esiste un isomorfismo $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$M(g \circ f) := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Esiste un isomorfismo $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$M(g \circ f \circ g^{-1}) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Esiste un isomorfismo $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $M(g \circ f)$ sia la matrice nulla.

Svolgimento. Ricordo che se M è la matrice associata ad un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $r = \varrho(M)$ allora $r = \dim(\mathrm{im}(f))$ e $n - r = \dim(\ker(f))$.

Essendo $M(g \circ f) = M(g)M(f)$ e poiché g è un isomorfismo (dunque $M(g)$ è invertibile), segue allora che $\varrho(M(g \circ f)) = \varrho(M(f))$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché allora

$$\varrho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 2 = \varrho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Segue che le due matrici non possono rappresentare lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

L'affermazione b) è vera. Sia g tale che

$$M(g) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora si verifica direttamente che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione c) è falsa. Infatti

$$\begin{aligned} \det(M(g \circ f \circ g^{-1})) &= \det(M(g)) \det(M(f)) \det(M(g^{-1})) = \\ &= \det(M(g)) \det(M(f)) \det(M(g))^{-1} = \det(M(f)). \end{aligned}$$

Si conclude allora osservando che $\det(M(f)) = 4$, $\det(\det(M(g \circ f \circ g^{-1})) = 1$. Si noti che in questo caso non si può procedere come nel caso a) perchè le matrici hanno entrambe rango 3.

L'affermazione d) è falsa. Infatti basta procedere come nel caso a) osservando che il rango della matrice nulla è 0.

Quiz 2. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $(1,0,0) \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$ ed $f(0,1,0) \notin \ker(f)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\mathrm{im}(f) = \mathcal{L}(f(0,1,0))$.
b) $\ker(f) = \mathcal{L}((1,0,0))$.
c) $f(1,1,0) \in \ker(f)$.
d) $f(1,1,0) = (0,0,0)$.

Svolgimento. Osserviamo che $\dim(\ker(f)), \dim(\mathrm{im}(f)) \geq 1$, in quanto $(1,0,0) \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Inoltre per definizione $f(0,1,0) \in \mathrm{im}(f)$. Si noti che $f(0,1,0) \notin \mathcal{L}((1,0,0)$: infatti se così fosse $f(0,1,0) \notin \mathcal{L}((1,0,0) \subseteq \ker(f)$, cioè $f(0,1,0) \in \ker(f)$. Segue che $\dim(\mathcal{L}((1,0,0), f(0,1,0))) = 2$ da cui $\dim(\mathrm{im}(f)) \geq 2$. Poiché $\dim(\ker(f)) \geq 1$ e $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, otteniamo $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$, $\dim(\ker(f)) = 1$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ dunque $\mathrm{im}(f)$ è generato da non meno di due vettori.

L'affermazione b) è vera. Infatti $\dim(\ker(f)) = 1$, dunque $\ker(f)$ è generato da ogni vettore non nulloche gli appartiene.

L'affermazione c) è falsa. Infatti $(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$, dunque

$$f(1,1,0) = f(1,0,0) + f(0,1,0) = f(0,1,0) \neq 0.$$

L'affermazione d) è falsa. Infatti $f(1,1,0) = (0,0,0)$ se e solo se $(1,1,0) \in \ker(f)$ che come visto sopra è falsa.

Quiz 3. Esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che

$$\ker(f) = V := \{\ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 2z = 0\ \}?$$

a) No, perché $\dim(V) = 2$.
b) No, perché $\dim(V) = 3$.
c) Si, perché $\dim(V) = 2$.
d) No, perché V non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento. Osserviamo che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione $\dim(V) = 2$: infatti ha come base $((-2, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$. Ricordo che $4 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$.

L'affermazione a) è vera. Infatti essendo $\dim(\ker(f)) = \dim(V) = 2$ segue $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (si ricordi che f è suriettiva).

L'affermazione b) è falsa. Infatti $\dim(V) = 2$ e non 3.

L'affermazione c) è falsa. Infatti il fatto che $\dim(V) = 2$ implica che f non può essere suriettiva.

L'affermazione d) è falsa. Infatti V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

Quiz 4. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ tale che $f^{-1}(1, 2) = (k + 1, 3 - k)$, $k \in \mathbb{R}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $(1, 3) \in \ker(f)$.
b) $\mathrm{im}(f) = \mathcal{L}((1, 3))$.
c) f è un isomorfismo.
d) $(1, -1) \in \ker(f)$.

Svolgimento. Ricordo che $2 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti se fosse $(1, 3) \in \ker(f)$ si avrebbe $f(1, 3) = (0, 0)$. D'altra parte $(1, 3) \in f^{-1}(1, 2)$ (si prenda $k = 0$), dunque $f(1, 3) = (1, 2)$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti $(1, 3), (2, 2) \in f^{-1}(1, 2)$ (si prenda $k = 0, 1$ rispettivamente), dunque $(0, 0) = (1, 2) - (1, 2) = f(2, 2) - f(1, 3) = f((2, 2) - (1, 3)) = f(1, -1)$. Perciò $\ker(f) \neq \{0\}$, sicché $\dim(\mathrm{im}(f)) \leq 1$. Poiché $(1, 2) \in \mathrm{im}(f)$ si ha $\mathrm{im}(f) = \mathcal{L}((1, 2))$ e si vede che $(1, 3) \notin \mathcal{L}((1, 2))$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se f fosse un isomorfismo sarebbe iniettiva, dunque dovrebbe essere $f(2, 2) \neq f(1, 3)$, mentre, invece, $f(2, 2) = f(1, 3) = (1, 2)$.

L'affermazione d) è vera. Infatti si è osservato sopra che $\mathcal{L}((1, -1)) \subseteq \ker(f)$ e che $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$, quindi $\dim(\ker(f)) = 1$ e, perciò, deve valere l'eguaglianza.

Quiz 5. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$f(1, 1, 1) = f(0, 1, 2) = f(h, 2, 3) = (0, 0, 0).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) f è l'endomorfismo nullo per ogni $h \in \mathbb{R}$.
b) f è univocamente determinato.
c) Se $h \neq 1$ esistono infiniti endomorfismi che soddisfano le condizioni di cui sopra.
d) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Svolgimento. Si ponga

$$a := (1, 1, 1), \quad b := (0, 1, 2), \quad c_h := (h, 2, 3).$$

Notiamo che $c_1 = a + b$. Invece, se $h \neq 1$, i vettori a, b, c_h sono linearmente indipendenti, quindi (a, b, c_h) è una base di V in questi caso.

L'affermazione a) è falsa. Infatti $a+b = c_1$. $\mathcal{C} := (a, b, e_3)$ è base di $\mathbb{R}^3$: allora si può dimostrare che esiste ed è unico un endomorfismo f tale che $f(a) = f(b) = 0$ (e, dunque, $f(c_1) = f(a + b) = 0$) ed $f(e_3) \neq 0$. Allora f soddisfa le condizioni ma non è identicamente nullo.

L'affermazione b) è falsa. Infatti non è verificata, come mostrato sopra, nel caso $h = 1$ (e solo in questo), in quanto f è univocamente individuato dall'immagine di e_3 che può essere scelta arbitrariamente.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se $h \neq 1$ (a, b, c_h) è una base di V, dunque f è univocamente individuata dalla sua azione su a, b, c_h (ed è l'endomorfismo nullo).

Per esclusione l'affermazione d) è vera.

Quiz 6. Si consideri

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\to (x + y - z, -x - y + z). \end{aligned}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\ker(f)$ contiene il solo vettore nullo.
b) $\ker(f) = \mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$.
c) $\ker(f)$ ha come base $((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$.
d) $\ker(f) = \mathcal{L}((1, 2, 3))$.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti $\dim(\mathrm{im}(f)) \leq 2$: d'altra parte $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, quindi $\dim(\ker(f)) \geq 1$.

L'affermazione b) è vera. Infatti si verifica per sostituzione nella formula di f che $\mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)) \subseteq \ker(f)$. Si noti che $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 2)$ sono linearmente indipendenti e che $(1, 1, 2) - (1, 0, 1) = (0, 1, 1)$, quindi $\dim(\ker(f)) \geq \dim(\mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))) = 2$. D'altra parte $f(1, 0, 0) = (1, -1)$, dunque $\dim(\mathrm{im}(f)) \geq 1$. Poiché $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$ si ha $\dim(\ker(f)) = 2$ da cui segue $\mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)) = \ker(f)$ in quanto l'uno sottospazio dell'altro e di eguale dimensione.

L'affermazione c) è falsa. Infatti $(1, 1, 2) - (1, 0, 1) = (0, 1, 1)$ quindi i vettori $(1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)$ non sono linearmente indipendenti e, pertanto, non possono formare una base.

L'affermazione d) è falsa. Infatti $(1, 0, 1) \in \ker(f) \setminus \mathcal{L}((1, 2, 3))$.