Claudio Canuto • Anita Tabacco

Analisi Matematica I

Teoria ed esercizi

4a edizione

Springer

UNITEXT

UNITEXT – La Matematica per il 3+2

Volume 82

http://www.springer.com/series/5418

Claudio Canuto · Anita Tabacco

Analisi Matematica I

4a edizione

Springer

Claudio Canuto
Dipartimento di Scienze Matematiche
Politecnico di Torino, Torino
Italia

Anita Tabacco
Dipartimento di Scienze Matematiche
Politecnico di Torino, Torino
Italia

UNITEXT – La Matematica per il 3+2
ISSN versione cartacea: 2038-5722 ISSN versione elettronica: 2038-5757

ISBN 978-88-470-5722-7 ISBN 978-88-470-5723-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4
Springer Milan Heidelberg New York Dordrecht London

© Springer-Verlag Italia 2014
Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org.
Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge. L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Layout copertina: Simona Colombo, Giochi di Grafica, Milano
Impaginazione: PTP-Berlin, Protago TEX-Production GmbH, Germany (www.ptp-berlin.eu)

Springer fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

a Dina,
luce di un sorriso
che l'ombra della vita
non può spegnere

Prefazione

Il presente testo intende essere di supporto ad un primo insegnamento di Matematica in quei corsi di studio (quali ad esempio Ingegneria, Informatica, Fisica) in cui lo strumento matematico è parte significativa della formazione dell'allievo. I concetti e i metodi fondamentali del calcolo differenziale ed integrale in una variabile sono presentati con l'obiettivo primario di addestrare lo studente ad un loro uso operativo, ma critico. La filosofia che ha ispirato l'impostazione generale è stata quella di presentare il materiale in modo chiaro e direttamente fruibile senza però rinunciare al rigore espositivo e scadere in un mero prontuario di regole e formule.

Alla luce degli attuali Ordinamenti Didattici, l'organizzazione di un primo corso di Matematica richiede spesso di effettuare delle scelte sui contenuti, sul linguaggio usato e sul livello di approfondimento con cui viene trattata la materia. In questa prospettiva, il testo permette tre diversi livelli di lettura. Il livello intermedio corrisponde, per ciascuno degli argomenti trattati, ai contenuti presentati negli undici capitoli in cui si articola il testo. I concetti sono dapprima introdotti in modo discorsivo e poi rigorosamente definiti; successivamente, si discutono le varie proprietà matematiche ad essi collegate e si delineano le metodologie di calcolo che ne derivano. I teoremi e le proprietà più importanti sono accompagnati dalla relativa dimostrazione.

Un livello di lettura più essenziale prevede l'omissione di tutte le dimostrazioni riportate, che a tale scopo sono facilmente distinguibili, e di quelle parti di testo presentate sotto la voce "Osservazione". Per facilitare lo studente, le formule assolutamente fondamentali, e quelle comunque importanti, sono state messe in rilievo mediante l'uso del colore, rispettivamente ciano e grigio. Alcune tabelle, nel testo e al fondo del libro, riassumono formule di uso frequente. Non si è invece voluto stabilire una classifica di importanza tra i teoremi, per lasciare al docente la libertà di operare eventuali scelte in tal senso.

Un terzo livello prevede anche la lettura del materiale contenuto nelle cinque appendici e permette all'allievo più motivato ed interessato di approfondire la sua preparazione. Riteniamo infatti che vada salvaguardata la possibilità, per gli studenti più capaci e volenterosi, di acquisire una formazione solida e completa, secondo la migliore tradizione universitaria italiana. Negli undici capitoli si trovano

numerosi riferimenti alle varie appendici, dove il lettore può trovare complementi e approfondimenti degli argomenti di volta in volta trattati. In tal modo, tutti gli enunciati presenti nel testo risultano corredati dalla rispettiva dimostrazione.

Per consentire un approccio morbido alla materia, nei primi due capitoli si è scelta una esposizione più discorsiva, in cui definizioni e proprietà sono sovente inglobate nel testo; nei capitoli successivi, la veste grafica mette in luce in modo più evidente tali strutture. Deliberatamente, di alcune definizioni e teoremi non si fornisce la forma più generale possibile, al fine di privilegiare l'immediatezza di comprensione da parte dello studente. Gli enunciati sono in genere immediatamente seguiti da numerosi esempi; lo stesso vale anche per la descrizione dei procedimenti di calcolo. Varie osservazioni fanno da complemento all'esposizione principale, mettendo in luce, fra l'altro, casi particolari ed eccezioni. Un rilevante numero di esercizi viene fornito al termine di ogni capitolo, permettendo all'allievo di valutare immediatamente lo stato delle conoscenze acquisite. Gli esercizi sono raccolti in gruppi che riprendono i principali argomenti trattati nel capitolo e sono ordinati per difficoltà crescente. Di tutti gli esercizi viene fornita la soluzione; per oltre la metà di essi, si delinea il procedimento risolutivo.

Nel testo saranno usate le seguenti convenzioni grafiche: le definizioni appaiono su sfondo grigio, mentre gli enunciati su sfondo ciano; gli esempi sono segnalati da una barra verticale in colore; gli esercizi di cui si fornisce la soluzione sono indicati con un riquadro nel testo (ad esempio $\boxed{12.}$).

Questo volume è dedicato all'amica Dina Giublesi, per molti anni preziosa collaboratrice, di cui sempre ricordiamo la luminosa figura.

Questa quarta edizione riflette l'esperienza didattica ormai decennale di uso del testo; tale esperienza, a nostro avviso, ha mostrato la validità dell'impostazione scelta. Siamo riconoscenti ai molti colleghi e studenti che ci hanno permesso, con i loro consigli, suggerimenti ed osservazioni, di giungere a questo risultato. Ringraziamo infine la dottoressa Francesca Bonadei, responsabile editoriale del programma di Matematica presso Springer Italia, per il costante incoraggiamento e per il caloroso sostegno nella preparazione della quarta edizione di questo volume.

Torino, agosto 2014 *Claudio Canuto, Anita Tabacco*

Indice

1 Nozioni di base 1
1.1 Insiemi 1
1.2 Elementi di logica matematica 5
1.2.1 Connettivi logici 5
1.2.2 Predicati 7
1.2.3 Quantificatori 7
1.3 Insiemi numerici 9
1.3.1 L'ordinamento dei numeri reali 12
1.3.2 La completezza di $\mathbb{R}$ 18
1.4 Fattoriali e coefficienti binomiali 19
1.5 Prodotto cartesiano 22
1.6 Relazioni nel piano 24
1.7 Esercizi 26
1.7.1 Soluzioni 27

2 Funzioni 33
2.1 Definizioni e primi esempi 33
2.2 Immagine e controimmagine 38
2.3 Funzioni suriettive e iniettive; funzione inversa 40
2.4 Funzioni monotòne 43
2.5 Funzioni composte 46
2.5.1 Traslazioni, cambiamenti di scala, riflessioni 48
2.6 Funzioni elementari e loro proprietà 49
2.6.1 Funzioni elevamento a potenza 51
2.6.2 Funzioni polinomiali e razionali 53
2.6.3 Funzioni esponenziali e logaritmiche 53
2.6.4 Funzioni trigonometriche e loro inverse 54
2.7 Esercizi 59
2.7.1 Soluzioni 61

3 Limiti e continuità I ... 67
3.1 Intorni ... 67
3.2 Limiti di successioni ... 68
3.3 Limiti di funzioni; continuità ... 75
3.3.1 Limiti all'infinito ... 75
3.3.2 Continuità. Limiti al finito ... 77
3.3.3 Limiti destro e sinistro; punti di discontinuità ... 85
3.3.4 Limiti di funzioni monotone ... 88
3.4 Esercizi ... 90
3.4.1 Soluzioni ... 90

4 Limiti e continuità II ... 93
4.1 Teoremi sui limiti ... 93
4.1.1 Teoremi di unicità e permanenza del segno ... 93
4.1.2 Teoremi del confronto ... 96
4.1.3 Algebra dei limiti; forme di indeterminazione di tipo algebrico ... 100
4.1.4 Teorema di sostituzione ... 107
4.2 Altri limiti notevoli; forme indeterminate di tipo esponenziale ... 110
4.3 Proprietà globali delle funzioni continue ... 113
4.4 Esercizi ... 120
4.4.1 Soluzioni ... 122

5 Confronto locale di funzioni. Successioni e serie numeriche ... 129
5.1 Simboli di Landau ... 129
5.2 Infinitesimi ed infiniti ... 136
5.3 Asintoti ... 141
5.4 Ulteriori proprietà delle successioni ... 143
5.5 Serie numeriche ... 148
5.5.1 Serie a termini positivi ... 153
5.5.2 Serie a termini di segno alterno ... 157
5.6 Esercizi ... 160
5.6.1 Soluzioni ... 163

6 Calcolo differenziale ... 175
6.1 La derivata ... 175
6.2 Derivate di funzioni elementari. Regole di derivazione ... 178
6.3 Punti di non derivabilità ... 184
6.4 Punti di estremo e punti critici di una funzione ... 187
6.5 I Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy ... 190
6.6 Prima e seconda formula dell'incremento finito ... 193
6.7 Intervalli di monotonia di una funzione ... 195
6.8 Derivate di ordine superiore ... 198
6.9 Convessità e flessi ... 199
6.9.1 Estensione del concetto di convessità ... 203

6.10 Studio di funzioni . . . 204
6.10.1 Le funzioni iperboliche . . . 206
6.11 Il Teorema di de l'Hôpital . . . 209
6.11.1 Applicazioni del Teorema di de l'Hôpital . . . 210
6.12 Esercizi . . . 212
6.12.1 Soluzioni . . . 216

7 Sviluppi di Taylor e applicazioni . . . 235
7.1 Le formule di Taylor . . . 235
7.2 Sviluppi di Taylor notevoli . . . 240
7.3 Operazioni sugli sviluppi di Taylor . . . 246
7.4 Uso degli sviluppi di Taylor nello studio locale di una funzione . . . 255
7.5 Esercizi . . . 260
7.5.1 Soluzioni . . . 262

8 Rappresentazioni del piano e dello spazio . . . 271
8.1 Coordinate polari, cilindriche, sferiche . . . 271
8.2 Vettori nel piano e nello spazio . . . 274
8.2.1 Vettori applicati nell'origine . . . 274
8.2.2 Modulo e prodotto scalare . . . 277
8.2.3 Vettori applicati in un punto . . . 283
8.3 Numeri complessi . . . 284
8.3.1 Operazioni algebriche . . . 284
8.3.2 Coordinate cartesiane . . . 286
8.3.3 Forma trigonometrica e forma esponenziale . . . 288
8.3.4 Potenze e radici . . . 290
8.3.5 Equazioni algebriche . . . 292
8.4 Curve nel piano e nello spazio . . . 294
8.5 Cenni alle funzioni di più variabili . . . 300
8.5.1 Continuità . . . 300
8.5.2 Derivate parziali e gradiente . . . 301
8.6 Esercizi . . . 305
8.6.1 Soluzioni . . . 308

9 Calcolo integrale I . . . 315
9.1 Primitive e integrali indefiniti . . . 316
9.2 Regole di integrazione indefinita . . . 320
9.2.1 Integrazione di funzioni razionali . . . 327
9.3 Integrali definiti . . . 333
9.4 Integrale secondo Cauchy . . . 334
9.5 Integrale secondo Riemann . . . 337
9.6 Proprietà dell'integrale definito . . . 344
9.7 Media integrale . . . 346
9.8 Il Teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 348
9.9 Regole di integrazione definita . . . 354

9.9.1 Applicazione al calcolo di aree . . . 356
9.10 Esercizi . . . 358
9.10.1 Soluzioni . . . 361

10 Calcolo integrale II . . . 373
10.1 Integrali impropri . . . 373
10.1.1 Integrali su intervalli illimitati . . . 373
10.1.2 Integrali di funzioni non limitate . . . 382
10.2 Altri integrali impropri . . . 386
10.3 Integrali curvilinei . . . 387
10.3.1 Lunghezza di un arco e ascissa curvilinea . . . 393
10.4 Integrali di linea . . . 395
10.5 Esercizi . . . 397
10.5.1 Soluzioni . . . 399

11 Equazioni differenziali ordinarie . . . 407
11.1 Definizioni generali . . . 407
11.2 Equazioni del primo ordine . . . 408
11.2.1 Equazioni a variabili separabili . . . 412
11.2.2 Equazioni lineari . . . 415
11.2.3 Equazioni omogenee . . . 417
11.2.4 Equazioni del secondo ordine riconducibili al primo . . . 419
11.3 Il problema di Cauchy per le equazioni del primo ordine . . . 420
11.3.1 Funzioni lipschitziane . . . 420
11.3.2 Una condizione di risolubilità del problema di Cauchy . . . 423
11.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti . . . 425
11.5 Esercizi . . . 431
11.5.1 Soluzioni . . . 433

Appendici . . . 445

A.1 Principio di induzione . . . 447

A.2 Complementi su limiti e continuità . . . 451
A.2.1 Limiti . . . 451
A.2.2 Funzioni elementari . . . 455
A.2.3 Numero di Nepero . . . 458

A.3 Complementi sulle proprietà globali delle funzioni continue . . . 461
A.3.1 Sottosuccessioni . . . 461
A.3.2 Funzioni continue su un intervallo . . . 463
A.3.3 Continuità uniforme . . . 467

A.4 Complementi sul calcolo differenziale 471
A.4.1 Formule di derivazione 471
A.4.2 Teorema di de l'Hôpital 474
A.4.3 Funzioni convesse 476
A.4.4 Formule di Taylor 478

A.5 Complementi sul calcolo integrale 483
A.5.1 Integrale di Cauchy 483
A.5.2 Integrale di Riemann 484
A.5.3 Integrali impropri 493

Tavole e formulari 497

Indice analitico 503

1

Nozioni di base

In questo capitolo introduttivo, vengono presentati in forma sintetica alcuni dei concetti matematici che stanno alla base del successivo studio dell'Analisi Matematica. Molti di essi dovrebbero essere già noti all'allievo, magari in una forma ancor più approfondita rispetto a quella usata nel seguito; alcuni, invece, sono probabilmente nuovi. In ogni caso, la trattazione seguente ha lo scopo di fissare molte delle notazioni e della simbologia matematica di uso frequente nei capitoli successivi.

1.1 Insiemi

Indicheremo gli **insiemi** prevalentemente con lettere maiuscole $X, Y, \ldots$, mentre gli elementi di un insieme saranno indicati con lettere minuscole $x, y, \ldots$. L'appartenenza di un elemento x all'insieme X sarà indicata dal simbolo $x \in X$ ('l'elemento x appartiene all'insieme X'), la non appartenenza dal simbolo $x \notin X$.

La maggior parte degli insiemi che considereremo saranno costruiti a partire da insiemi di numeri. Per la loro importanza, i principali insiemi numerici sono indicati con notazioni particolari; esse sono:

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi relativi
$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali
$\mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi.

Le definizioni ed alcune tra le principali proprietà di tali insiemi, con l'esclusione dell'ultimo, saranno brevemente ricordate nel § 1.3. L'insieme dei numeri complessi sarà trattato nel § 8.3.

Supponiamo di fissare un insieme non vuoto X, che consideriamo come *insieme ambiente.* Un **sottoinsieme** A di X è un insieme i cui elementi sono anche elementi

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I,* 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_1, © Springer-Verlag Italia 2014

Figura 1.1. Diagrammi di Venn (a sinistra) e complementare di un insieme (a destra)

di X; scriveremo $A \subseteq X$ ('A contenuto in X') se ammettiamo che il sottoinsieme A possa coincidere con X, oppure $A \subset X$ ('A contenuto propriamente in X') se A è un sottoinsieme *proprio* di X, cioè non contiene tutti gli elementi di X. Può essere utile, dal punto di vista intuitivo, rappresentare un sottoinsieme mediante una regione finita del piano, attraverso i cosiddetti *diagrammi di Venn* (si veda la Figura 1.1, a sinistra).

Un sottoinsieme può essere determinato elencando gli elementi di X che lo compongono

$$\boxed{A = \{x, y, \ldots, z\};}$$

l'ordine in cui compaiono gli elementi non è essenziale. L'uso di tale notazione è ovviamente limitata a sottoinsiemi contenenti pochi elementi. Più comunemente si userà la notazione

$$\boxed{A = \{x \in X \mid p(x)\} \qquad \text{oppure} \qquad A = \{x \in X \ : \ p(x)\}}$$

(che si legge 'A è il sottoinsieme degli elementi x di X tali che la condizione $p(x)$ è verificata'); $p(x)$ indica la *proprietà caratteristica* degli elementi del sottoinsieme, cioè la condizione vera per gli elementi del sottoinsieme e falsa per tutti gli altri elementi. Ad esempio, il sottoinsieme A dei numeri naturali minori o uguali a 4 può essere indicato come

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \qquad \text{oppure come} \qquad A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}.$$

L'espressione $p(x) =$'$x \leq 4$' è un esempio di *predicato logico*, su cui torneremo nel paragrafo successivo.

La collezione di tutti i sottoinsiemi di un insieme X costituisce l'**insieme delle parti** di X, denotato con $\mathcal{P}(X)$. Ovviamente, $X \in \mathcal{P}(X)$. Inoltre, tra i sottoinsiemi di X esiste l'**insieme vuoto**, ossia l'insieme che non contiene elementi; esso viene indicato con il simbolo $\emptyset$, dunque $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$. Tutti gli altri sottoinsiemi di X sono propri e non vuoti.

Se ad esempio consideriamo l'insieme ambiente $X = \{1, 2, 3\}$, abbiamo

$$\mathcal{P}(X) = \{\, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}.$$

Notiamo che X contiene 3 elementi (o, come si dice, ha *cardinalità* 3), mentre $\mathcal{P}(X)$ contiene $8 = 2^3$ elementi (ha cardinalità 8). In generale, se un insieme finito (cioè composto da un numero finito di elementi) ha cardinalità n, il suo insieme delle parti ha cardinalità 2^n.

A partire da uno o più sottoinsiemi di X, è possibile definire nuovi sottoinsiemi, attraverso operazioni insiemistiche. La più semplice di esse è il passaggio al complementare: se A è un sottoinsieme di X, si definisce **complementare** di A (in X) il sottoinsieme

$$\boxed{\mathcal{C}A = \{x \in X \mid x \notin A\}}$$

costituito da tutti gli elementi di X che non appartengono ad A (si veda la Figura 1.1, a destra).

Talvolta, per accentuare il fatto che il complementare di A è fatto rispetto ad X, si usa la notazione più precisa $\mathcal{C}_X A$. Le seguenti proprietà sono immediate:

$$\mathcal{C}X = \emptyset, \qquad \mathcal{C}\emptyset = X, \qquad \mathcal{C}(\mathcal{C}A) = A.$$

Ad esempio, se $X = \mathbb{N}$ e A indica il sottoinsieme dei numeri *pari* (cioè divisibili per 2), allora $\mathcal{C}A$ è il sottoinsieme dei numeri *dispari*.

Dati due sottoinsiemi A e B di X, si definisce **intersezione** di A e B il sottoinsieme

$$\boxed{A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

costituito da tutti gli elementi di X che appartengono sia ad A sia a B, mentre si definisce **unione** di A e B il sottoinsieme

$$\boxed{A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}}$$

costituito da tutti gli elementi che appartengono ad A oppure a B (in senso non alternativo). Si veda la Figura 1.2.

Figura 1.2. Intersezione e unione di insiemi

Riportiamo alcune delle proprietà di tali operazioni.

i) Proprietà booleane:

$$A \cap \mathcal{C}A = \emptyset, \qquad A \cup \mathcal{C}A = X;$$

ii) proprietà commutativa, associativa, distributiva:

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, & A \cup B &= B \cup A, \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C), & (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C); \end{aligned}$$

iii) leggi di De Morgan:

$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B, \qquad \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B.$$

Notiamo inoltre che la condizione $A \subseteq B$ equivale alla condizione $A \cap B = A$, oppure alla condizione $A \cup B = B$.

Altre due operazioni insiemistiche sono utili. Esse sono la **differenza** (non simmetrica) tra un sottoinsieme A ed un sottoinsieme B

$$\boxed{A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \mathcal{C}B}$$

(che leggiamo 'A meno B'), la quale seleziona gli elementi di A che non stanno in B, e la **differenza simmetrica** tra due sottoinsiemi A e B

$$\boxed{A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),}$$

la quale seleziona gli elementi che stanno in A oppure in B ma non in entrambi gli insiemi (si veda la Figura 1.3).

Ad esempio, se $X = \mathbb{N}$, A è l'insieme dei numeri pari e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}$ è l'insieme dei numeri interi minori o uguali a 10, allora $B \setminus A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ è l'insieme dei numeri dispari minori di 10, $A \setminus B$ è l'insieme dei numeri pari maggiori di 10, mentre $A \Delta B$ è l'unione di questi due insiemi.

Figura 1.3. Differenza $A \setminus B$ (a sinistra) e differenza simmetrica $A \,\Delta\, B$ (a destra) di insiemi

1.2 Elementi di logica matematica

Una **proposizione logica** è un enunciato del quale si può inequivocabilmente dire, in un certo contesto, se è vero o falso. Dunque una proposizione logica porta con sé un *valore di verità*, Vero o Falso; tale valore può venir rappresentato in vari modi, ad esempio attraverso il valore binario di un bit di memoria (1 oppure 0), o attraverso lo stato di un circuito elettrico (chiuso oppure aperto). Esempi di proposizioni logiche sono: '7 è un numero dispari' (Vero), '$3 > \sqrt{12}$' (Falso), 'Venere è una stella' (Falso), 'questo testo è scritto in italiano' (Vero), etc. Invece, l'enunciato 'Milano è lontana da Roma' non è una proposizione logica, in assenza di precisazioni sul concetto di lontananza; lo è però l'espressione 'Milano è più lontana di Torino da Roma'. Indicheremo le proposizioni logiche con lettere minuscole $p, q, r, \ldots$.

1.2.1 Connettivi logici

A partire da proposizioni logiche, possiamo ottenerne altre attraverso operazioni logiche, espresse da simboli detti *connettivi logici*.

L'operazione più semplice è la **negazione logica**: con il simbolo $\neg p$ (che leggiamo 'non p'), indichiamo la proposizione logica che è vera se p è falsa, ed è falsa se p è vera. Ad esempio, se $p =$ '7 è un numero razionale', allora $\neg p =$ '7 è un numero irrazionale'.

La **congiunzione logica** di due proposizioni p e q è la proposizione $p \wedge q$ (che leggiamo 'p e q'), la quale è vera se p e q sono entrambe vere, ed è falsa in tutti gli altri casi. Invece, la **disgiunzione logica** di p e q è la proposizione $p \vee q$ (che leggiamo 'p oppure q'), la quale è falsa se p e q sono entrambe false, ed è vera in tutti gli altri casi. Ad esempio, siano $p =$'7 è un numero razionale' e $q =$ '7 è un numero pari'; la proposizione $p \wedge q =$ '7 è un numero razionale pari' è falsa perché q è falsa, mentre la proposizione $p \vee q =$ '7 è un numero razionale oppure un numero pari' è vera perché p è vera.

Molti degli enunciati in Matematica sono del tipo: 'Se è vera l'ipotesi p, allora è vera la tesi q', altrimenti espresso come 'Condizione sufficiente affinché sia vera la tesi q è che sia vera l'ipotesi p', oppure ancora come 'Condizione necessaria affinché sia vera l'ipotesi p è che sia vera la tesi q'. Tali enunciati sono forme linguistiche diverse della stessa proposizione logica $p \Rightarrow q$ (che leggiamo 'p implica q'), detta **implicazione logica**. Per definizione, la proposizione $p \Rightarrow q$ è falsa se p è vera e q è falsa, mentre è vera in tutti gli altri casi. In altri termini, l'implicazione logica esclude che da una premessa vera si possa dedurre una conclusione falsa, mentre non esclude che la conclusione sia vera anche se la premessa è falsa. Così, la proposizione 'se piove, allora esco con l'ombrello' mi impedisce di uscire senza ombrello quando piove, ma non condiziona il mio comportamento se il cielo è sereno.

Si può verificare facilmente, considerando tutti i valori di verità possibili delle proposizioni p e q, che la proposizione $p \Rightarrow q$ ha gli stessi valori di verità della

proposizione $\neg p \vee q$. Pertanto, il connettivo logico $\Rightarrow$ può essere espresso in funzione dei connettivi primari $\neg$ e $\vee$.

Altri enunciati ricorrenti in Matematica sono del tipo: 'La tesi q è vera se e solo se l'ipotesi p è vera', oppure 'Condizione necessaria e sufficiente affinché sia vera la tesi q è che sia vera l'ipotesi p'. Tali enunciati corrispondono alla proposizione logica $p \Leftrightarrow q$ (che leggiamo 'p equivale a q'), detta **equivalenza logica**. Essa è vera se p e q hanno gli stessi valori di verità, ed è falsa se p e q hanno valori di verità diversi. Un esempio è l'enunciato 'un numero naturale è dispari se e solo se il suo quadrato è dispari'. La proposizione $p \Leftrightarrow q$ è la congiunzione delle due proposizioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, vale a dire le proposizioni $p \Leftrightarrow q$ e $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ hanno gli stessi valori di verità; dunque, il connettivo $\Leftrightarrow$ è esprimibile in funzione dei connettivi primari $\neg$, $\vee$ e $\wedge$.

La proposizione $p \Rightarrow q$ (cioè un enunciato del tipo 'se è vero p, allora è vero q') può essere espressa in varie altre forme, logicamente equivalenti ad essa. Tali forme rappresentano delle *regole di dimostrazione* per ottenere l'implicazione precedente. Ad esempio, $p \Rightarrow q$ è logicamente equivalente alla proposizione $\neg q \Rightarrow \neg p$, detta la sua *contronominale*; in formule, possiamo scrivere

$$(p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

La verifica è facile: per definizione, $p \Rightarrow q$ è falsa solo quando p è vera e q è falsa, cioè quando $\neg q$ è vera e $\neg p$ è falsa; ma quest'ultima situazione corrisponde precisamente al fatto che l'implicazione $\neg q \Rightarrow \neg p$ sia falsa. Dunque, abbiamo stabilito la seguente regola di dimostrazione: per dimostrare che se è vera l'ipotesi p allora è vera la tesi q, possiamo supporre falsa la tesi q e da ciò dedurre che è falsa l'ipotesi p. Ad esempio, se vogliamo dimostrare l'implicazione 'se un numero naturale è dispari, allora non è divisibile per 10', possiamo supporre che il numero sia un multiplo di 10 e da ciò dedurre (molto facilmente) che il numero è pari.

Un'altra regola di dimostrazione è la *dimostrazione per assurdo,* che useremo talvolta nel corso del nostro studio. Essa si esprime come

$$(p \Rightarrow q) \iff (p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p).$$

Ciò significa che per dimostrare l'implicazione $p \Rightarrow q$ possiamo equivalentemente procedere nel seguente modo: supponiamo che sia vera l'ipotesi p e che sia falsa la tesi q e usando ciò deduciamo l'assurdo che l'ipotesi p deve essere anche falsa.

Una forma più generale della dimostrazione per assurdo è espressa dalla formula

$$(p \Rightarrow q) \iff (p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r),$$

dove r è un'altra proposizione logica: l'implicazione $p \Rightarrow q$ equivale a supporre vera l'ipotesi p e falsa la tesi q, e a dedurre da ciò che una certa affermazione r risulta contemporaneamente vera e falsa (si noti che la proposizione $r \wedge \neg r$ è sempre falsa, qualunque sia il valore di verità di r).

Segnaliamo infine un'ulteriore regola di dimostrazione, detta Principio di induzione, per la quale rimandiamo all'Appendice A.1, pag. 447.

1.2.2 Predicati

Introduciamo ora un concetto importante. Chiamiamo **predicato logico** un enunciato $p(x, \ldots)$ dipendente da uno o più argomenti $x, \ldots$ variabili in opportuni insiemi, il quale diventa una proposizione logica (cioè assume valori di verità Vero o Falso) tutte le volte che fissiamo il/i suoi argomenti. Ad esempio, se x varia nell'insieme dei numeri naturali, l'enunciato $p(x) =$ 'x è un numero dispari' è un predicato: $p(7)$ è vero, $p(10)$ è falso, e così via. Se x e y variano nell'insieme degli studenti iscritti al Politecnico, l'enunciato $p(x, y) =$ 'x e y sono compagni di corso' è un predicato.

Notiamo che le operazioni logiche possono essere applicate anche ai predicati, dando luogo a nuovi predicati (ad esempio $\neg p(x)$, $p(x) \vee q(x)$, eccetera). Ciò, tra l'altro, stabilisce un preciso legame tra i connettivi logici primari $\neg, \wedge, \vee$ e le operazioni insiemistiche di passaggio al complementare, intersezione e unione. Infatti, tornando alla definizione $A = \{x \in X \mid p(x)\}$ di sottoinsieme A di un certo insieme ambiente X, la 'proprietà caratteristica' $p(x)$ degli elementi di A null'altro è se non un predicato logico, che è vero per tutti e soli gli elementi di A. Il complementare $\mathcal{C}A$ è allora ottenuto negando la proprietà caratteristica,

$$\mathcal{C}A = \{x \in X \mid \neg p(x)\},$$

mentre l'intersezione e l'unione di A con un secondo sottoinsieme $B = \{x \in X \mid q(x)\}$ sono ottenuti rispettivamente congiungendo e disgiungendo le proprietà caratteristiche:

$$A \cap B = \{x \in X \mid p(x) \wedge q(x)\}, \qquad A \cup B = \{x \in X \mid p(x) \vee q(x)\}.$$

Le proprietà delle operazioni insiemistiche ricordate nel paragrafo precedente corrispondono ad analoghe proprietà delle operazioni logiche, che il lettore potrà facilmente esplicitare.

1.2.3 Quantificatori

Dato un predicato $p(x)$, con x variabile in un certo insieme X, è naturale chiedersi se l'enunciato $p(x)$ sia vero *per tutti* gli elementi x, oppure chiedersi se *esista almeno un* elemento x per cui $p(x)$ sia vero. Quando ci poniamo tali domande, stiamo considerando le due proposizioni logiche

$$\boxed{\forall x,\ p(x) \quad \text{(che leggiamo '}\textit{per ogni } x\textit{, è vero } p(x)\text{')}}$$

e

$$\boxed{\exists x,\ p(x) \quad \text{(che leggiamo '}\textit{esiste almeno un } x\textit{, per cui è vero } p(x)\text{').}}$$

Se vogliamo essere più precisi ed indicare anche l'insieme di appartenenza di x, scriviamo rispettivamente '$\forall x \in X,\ p(x)$' e '$\exists x \in X,\ p(x)$'. Il simbolo $\forall$ ('per ogni')

viene detto **quantificatore universale**, mentre il simbolo $\exists$ ('esiste almeno') viene detto **quantificatore esistenziale**. (Talvolta si usa un terzo quantificatore, $\exists!$, che significa 'esiste esattamente un elemento' o 'esiste ed è unico'.)

Sottolineiamo il fatto che l'applicazione di un quantificatore a un predicato lo trasforma in una proposizione logica, della quale si può stabilire il valore di verità. Ad esempio, se consideriamo il predicato $p(x) =$ 'x è strettamente minore di 7', la proposizione '$\forall x \in \mathbb{N},\ p(x)$' è falsa (perché, ad esempio, $p(8)$ è falsa), mentre la proposizione '$\exists x \in \mathbb{N},\ p(x)$' è vera (ad esempio $x = 6$ soddisfa l'enunciato).

È utile soffermarsi sull'effetto della negazione logica su un predicato quantificato. Supponiamo ad esempio che x indichi il generico studente del Politecnico e sia $p(x) =$ 'x è di nazionalità italiana'. La proposizione '$\forall x,\ p(x)$' (cioè, 'tutti gli studenti del Politecnico sono di nazionalità italiana') è falsa. Pertanto, la sua negazione logica, '$\neg(\forall x,\ p(x))$' è vera; ma, attenzione!: essa non afferma che tutti gli studenti del Politecnico sono stranieri, bensì che 'esiste almeno uno studente del Politecnico che non è italiano'. Dunque, la negazione della proposizione '$\forall x,\ p(x)$' è la proposizione '$\exists x,\ \neg p(x)$'. In formule possiamo scrivere

$$\boxed{\neg(\forall x,\ p(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x,\ \neg p(x).}$$

In modo analogo, è facile convincersi che vale l'equivalenza logica

$$\boxed{\neg(\exists x,\ p(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x,\ \neg p(x).}$$

Se un predicato dipende da due o più argomenti, ciascuno di essi può essere quantificato. Tuttavia, l'*ordine* in cui compaiono i quantificatori può essere importante. Precisamente, due quantificatori dello stesso tipo (universale o esistenziale) possono essere scambiati senza modificare il valore di verità della proposizione; in altri termini, si ha

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \forall x\, \forall y,\ p(x,y) & \Longleftrightarrow & \forall y\, \forall x,\ p(x,y), \\ \exists x\, \exists y,\ p(x,y) & \Longleftrightarrow & \exists y\, \exists x,\ p(x,y). \end{array}}$$

Al contrario, lo scambio di due quantificatori di tipo diverso in genere porta a due proposizioni logiche diverse; pertanto, bisogna essere molto attenti nell'elencare i quantificatori.

A titolo di esempio, consideriamo il predicato $p(x,y) =$ '$x \geq y$', dove x e y variano nell'insieme dei numeri naturali. La proposizione '$\forall x\, \forall y,\ p(x,y)$' significa 'presi due numeri naturali qualunque, ciascuno è maggiore o uguale all'altro' ed è palesemente falsa. La proposizione '$\forall x\, \exists y,\ p(x,y)$', che significa 'preso un qualunque intero x, esiste un intero y minore o uguale a x', è vera: ad esempio, possiamo scegliere $y = x$. Invece la proposizione '$\exists x\, \forall y,\ p(x,y)$', che significa 'esiste un intero x maggiore o uguale di tutti gli interi', è falsa: ogni intero x ammette il successore $x+1$, strettamente maggiore di x. Infine, la proposizione '$\exists x\, \exists y,\ p(x,y)$' ('esistono almeno due interi, l'uno maggiore o uguale all'altro') è banalmente vera.

1.3 Insiemi numerici

Esaminiamo brevemente i principali insiemi numerici che saranno usati nel seguito. La trattazione è volutamente non esaustiva, in quanto le proprietà principali di tali insiemi dovrebbero essere già note all'allievo.

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. L'insieme è formato dai numeri $0, 1, 2, \ldots$ In esso sono definite le operazioni di somma e prodotto, che godono delle ben note proprietà commutativa, associativa e distributiva. Indicheremo con $\mathbb{N}_+$ l'insieme dei numeri naturali diversi da 0, ossia

$$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Un numero naturale n viene comunemente rappresentato secondo la *base decimale*, come $n = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_1 10 + c_0$, dove c_i sono interi compresi tra 0 e 9 detti *cifre decimali*; la rappresentazione è unica se supponiamo $c_k \neq 0$ quando $n \neq 0$. Scriveremo $n = (c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0)_{10}$ o, più semplicemente, $n = c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$. In luogo della base 10, si può usare come base un qualunque altro intero ≥ 2; un'alternativa piuttosto comune alla base decimale è costituita dalla base 2, o *base binaria*.

I numeri naturali possono anche essere rappresentati geometricamente, come punti su una retta. A tale scopo, è sufficiente fissare un primo punto O sulla retta, che chiameremo punto *origine* e che associamo al numero 0, ed un secondo punto P, diverso da O, che associamo al numero 1. Il verso di percorrenza della retta che porta da O a P è definito come *verso positivo*, mentre la lunghezza del segmento OP viene presa come *unità di misura* delle lunghezze. Riportando i multipli del segmento OP sulla retta, secondo il verso positivo, otteniamo i punti associati ai numeri naturali (si veda la Figura 1.4).

L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi. L'insieme contiene i numeri $0, +1, -1, +2, -2, \ldots$ L'insieme $\mathbb{N}$ può essere identificato al sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ formato dai numeri $0, +1, +2, \ldots$ I numeri $+1, +2, \ldots$ (rispettivamente $-1, -2, \ldots$) sono detti *interi positivi* (rispettivamente *interi negativi*). In $\mathbb{Z}$ sono definite le operazioni di somma e prodotto ed inoltre l'operazione di differenza, che è l'inversa della somma.

Un numero intero relativo può essere rappresentato in forma decimale come $z = \pm c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$. La rappresentazione geometrica dei numeri negativi estende quella dei naturali alla sinistra del punto origine (Figura 1.4).

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Un numero razionale è il quoziente di due interi relativi, di cui il denominatore è diverso da 0. Non è restrittivo supporre che il denominatore sia positivo, per cui ogni razionale può essere rappresentato come

Figura 1.4. Rappresentazione geometrica dei numeri

$$r = \frac{z}{n}, \qquad \text{con } z \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}_+.$$

Inoltre, possiamo supporre che la frazione sia ridotta ai minimi termini, ossia che z e n non abbiano fattori comuni; in tal modo, l'insieme $\mathbb{Z}$ è identificabile con il sottoinsieme dei razionali il cui denominatore è 1. In $\mathbb{Q}$ sono definite le operazioni di somma, prodotto e differenza; inoltre, tra due numeri razionali di cui il secondo sia diverso da 0 è definita l'operazione di quoziente, inversa del prodotto.

Un numero razionale ammette una rappresentazione in base decimale della forma[1] $r = \pm c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0 . d_1 d_2 \cdots$, che corrisponde all'espressione

$$r = \pm(c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_1 10 + c_0 + d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} + \cdots).$$

La sequenza di cifre decimali $d_1, d_2, \ldots$ dopo il punto soddisfa una e una sola delle seguenti proprietà: i) tutte le cifre sono 0 a partire da un certo indice $i \geq 1$ in poi (si ha in tal caso una *rappresentazione decimale limitata*; in genere le cifre nulle non vengono scritte), oppure ii) da un certo indice in poi, una sequenza finita di cifre decimali non tutte nulle, detta *periodo*, si ripete infinite volte (si ha in tal caso una *rappresentazione decimale illimitata periodica*; viene scritto un solo periodo, sopralineato). Ad esempio, sono rappresentazioni decimali di numeri razionali le espressioni

$$-\frac{35163}{100} = -351.6300\cdots = -371.63 \quad \text{e} \quad \frac{11579}{925} = 12.51783783\cdots = 12.51\overline{783}.$$

Notiamo che la rappresentazione decimale di certi numeri razionali non è unica. Infatti, se un numero ammette una rappresentazione decimale limitata, esso ammette anche la rappresentazione decimale illimitata periodica, ottenuta dalla prima diminuendo di una unità la cifra decimale non nulla che si trova più a destra e aggiungendo il periodo 9. Ad esempio, le rappresentazioni 1.0 e $0.\overline{9}$ definiscono lo stesso numero razionale 1; analogamente, 8.357 e $8.356\overline{9}$ sono rappresentazioni equivalenti del numero $\frac{4120}{493}$.

La rappresentazione geometrica di un numero razionale $r = \pm\frac{m}{n}$ si ottiene suddividendo il segmento OP in n parti uguali e riportando m multipli del segmento così ottenuto nel verso positivo o negativo a seconda del segno di r (Figura 1.4).

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Non tutti i punti di una retta corrispondono a numeri razionali, secondo la corrispondenza appena descritta. Ciò significa che, comunque si fissi una unità di misura, non tutte le lunghezze possono essere misurate attraverso suoi multipli e sottomultipli.

È noto fin dall'antichità che la diagonale di un quadrato non è *commensurabile* con il lato; ciò significa che la lunghezza d della diagonale non è proporzionale alla lunghezza ℓ del lato attraverso un fattore di proporzionalità razionale. Per convincerci di questo fatto, ricordiamo il Teorema di Pitagora: applicato a uno dei

[1] Preferiamo usare il punto, piuttosto che la virgola, per indicare l'inizio della parte non intera di un numero, in quanto questa notazione, di origine anglosassone, è universalmente adottata nel calcolo scientifico.

Figura 1.5. Il quadrato di lato ℓ e la sua diagonale

due triangoli equilateri rettangoli in cui la diagonale divide il quadrato (si veda la Figura 1.5), esso afferma che

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2, \qquad \text{cioè} \qquad d^2 = 2\ell^2.$$

Se chiamiamo p il fattore di proporzionalità tra la lunghezza della diagonale e la lunghezza del lato, cioè se $d = p\ell$, elevando al quadrato e sostituendo nella relazione precedente vediamo che necessariamente deve essere $p^2 = 2$. Diciamo che p è la *radice quadrata* di 2, che indichiamo con il simbolo $\sqrt{2}$.

Proprietà 1.1 *Se il numero p soddisfa $p^2 = 2$, allora p non è razionale.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esistano due naturali m ed n, necessariamente diversi da 0, tali che $p = \frac{m}{n}$. Supponiamo inoltre che m ed n non abbiano fattori comuni. Elevando al quadrato, si ottiene $\frac{m^2}{n^2} = 2$, vale a dire $m^2 = 2n^2$. Dunque m^2 è un numero pari, e ciò equivale al fatto che m è pari. Pertanto, sarà $m = 2k$ per un opportuno naturale k. Sostituendo nella relazione precedente, otteniamo $4k^2 = 2n^2$, cioè $n^2 = 2k^2$. Dunque anche n^2, e conseguentemente n, è pari. Siamo quindi giunti alla conclusione che m ed n sono entrambi pari, contro l'ipotesi che essi non abbiano fattori comuni. L'assurdo è nato dall'aver supposto p razionale.□

Un altro esempio rilevante di non commensurabilità razionale, anch'esso ben noto nell'antichità, riguarda la lunghezza di una circonferenza rispetto alla lunghezza del suo diametro. Anche in questo caso, è possibile dimostrare che il fattore di proporzionalità tra le due lunghezze, noto con il simbolo π, non può essere un numero razionale.

L'insieme dei numeri reali costituisce un'estensione dell'insieme dei numeri razionali; esso fornisce un *modello matematico della retta*, nel senso che ogni punto P della retta è associato ad uno e un solo numero reale x, detto l'*ascissa* di P, e viceversa. Esistono vari modi, tra loro equivalenti, per effettuare tale estensione; tuttavia, non vogliamo qui entrare in tali dettagli. Ricordiamo soltanto che, in

termini di rappresentazione in base decimale, i numeri reali possono dare luogo ad un qualunque allineamento di cifre dopo il punto. I numeri reali non razionali, detti numeri *irrazionali*, sono caratterizzati dall'avere una rappresentazione decimale *illimitata e non periodica*. Ad esempio, si ha

$$\sqrt{2} = 1.4142135623731\cdots \qquad \text{e} \qquad \pi = 3.1415926535897\cdots$$

Più che la costruzione dell'insieme $\mathbb{R}$, ciò che ci interessa sono le proprietà dei numeri reali, che ci permettono di operare su di essi. Tra queste, ne ricordiamo alcune tra le più rilevanti.

i) *Le operazioni aritmetiche definite sui razionali si estendono ai reali*, con analoghe proprietà.
ii) *L'ordinamento $x < y$ dei numeri razionali si estende ai reali*, ancora con analoghe proprietà. Approfondiremo questo argomento nel successivo § 1.3.1.
iii) *I numeri razionali sono densi nei reali.* Ciò significa che tra due numeri reali qualunque esistono infiniti numeri razionali. Questa proprietà implica che ogni numero reale può essere approssimato tanto bene quanto vogliamo da un numero razionale. Ad esempio, se $r = c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0.d_1 d_2 \cdots d_i d_{i+1} \cdots$ ha una rappresentazione decimale illimitata non periodica, esso può essere approssimato dal numero razionale $q_i = c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0.d_1 d_2 \cdots d_i$ ottenuto troncando la parte decimale di r dopo i cifre; al crescere di i, si ottengono approssimazioni di r via via più precise.
iv) *L'insieme dei numeri reali è completo.* Questa proprietà, che geometricamente equivale al fatto, già menzionato, che ogni punto di una retta può essere univocamente associato ad un numero reale, garantisce ad esempio l'esistenza della radice quadrata di 2, cioè la risolubilità in $\mathbb{R}$ dell'equazione $x^2 = 2$, così come la risolubilità di infinite altre equazioni, algebriche e non. Torneremo su questo aspetto nel successivo § 1.3.2.

1.3.1 L'ordinamento dei numeri reali

I numeri reali diversi da 0 si dividono in numeri positivi, che formano il sottoinsieme $\mathbb{R}_+$, e numeri negativi, che formano il sottoinsieme $\mathbb{R}_-$. Abbiamo quindi la partizione $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$. È utile definire anche l'insieme

$$\mathbb{R}_* = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$$

dei numeri positivi o nulli. I numeri positivi corrispondono a punti sulla retta che si trovano a destra dell'origine rispetto al verso di percorrenza positivo.

Anziché scrivere $x \in \mathbb{R}_+$, scriveremo più semplicemente $x > 0$ ('x è maggiore di 0'); analogamente, in luogo di $x \in \mathbb{R}_*$, scriveremo $x \geq 0$ ('x è maggiore o uguale a 0'). Possiamo allora definire un ordinamento tra i numeri reali, ponendo

$$x < y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y - x > 0.$$

L'ordinamento è *totale*, cioè presi comunque due numeri reali x e y distinti, è sempre vera una (e una sola) delle due condizioni $x < y$ oppure $y < x$. Dal punto di vista geometrico, la relazione $x < y$ significa che il punto sulla retta di ascissa x si trova alla sinistra del punto di ascissa y. Poniamo inoltre

$$\boxed{x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < y \quad \text{oppure} \quad x = y.}$$

Ovviamente, se $x < y$ allora si ha pure $x \leq y$. Ad esempio, le relazioni $3 \leq 7$ e $7 \leq 7$ sono vere, mentre la relazione $3 \leq 2$ è falsa.

La relazione di ordine $\leq$ (oppure $<$) interagisce con le operazioni algebriche di somma e prodotto nel modo seguente:

$$\boxed{\text{se } x \leq y \text{ e se } z \text{ è un qualunque numero reale, allora } x + z \leq y + z}$$

(cioè, aggiungendo ad ambo i membri di una disuguaglianza uno stesso numero reale, la disuguaglianza non cambia);

$$\boxed{\text{se } x \leq y \quad \text{e} \quad \text{se} \begin{cases} z \geq 0, & \text{allora} \quad xz \leq yz, \\ z < 0, & \text{allora} \quad xz \geq yz \end{cases}}$$

(cioè, moltiplicando ambo i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero positivo o nullo la disuguaglianza non cambia, mentre se il moltiplicatore è negativo la disuguaglianza si inverte). Ad esempio, moltiplicando per -1 la disuguaglianza $-3 \leq 2$ si ottiene $-2 \leq 3$. Notiamo che dalla proprietà precedente segue la ben nota *regola dei segni*: il prodotto di due numeri di segno concorde è positivo, di segno discorde è negativo.

Valore assoluto. Veniamo ora ad un concetto semplice ma importante. Dato un numero reale x, chiamiamo *valore assoluto* o *modulo* di x il numero reale

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}}$$

Abbiamo quindi $|x| \geq 0$ qualunque sia x in $\mathbb{R}$. Ad esempio, $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-5| = 5$. Dal punto di vista geometrico, $|x|$ rappresenta la distanza dall'origine del punto sulla retta di ascissa x; analogamente, il numero $|x - y| = |y - x|$ è la distanza tra due punti di ascissa rispettivamente x e y.

Saranno utili le seguenti relazioni, di facile verifica, che legano il valore assoluto alle operazioni algebriche:

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}} \tag{1.1}$$

(detta *disuguaglianza triangolare*) e

$$\boxed{|xy| = |x||y|, \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.}$$

Nel corso del nostro studio, dovremo risolvere equazioni e disequazioni che fanno intervenire il valore assoluto. Vediamo le più semplici. In base alla definizione,

$$|x| = 0$$

ammette l'unica soluzione $x = 0$; invece, se a è un qualunque numero > 0, l'equazione

$$|x| = a$$

ha due soluzioni, $x = a$ e $x = -a$. In sintesi,

$$\boxed{|x| = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pm a, \qquad \forall a \geq 0.}$$

Se invece vogliamo risolvere la disequazione

$$|x| \leq a, \qquad \text{con } a \geq 0,$$

consideriamo dapprima le soluzioni $x \geq 0$, per le quali si ha $|x| = x$ e dunque la condizione diventa semplicemente $x \leq a$; successivamente consideriamo le soluzioni $x < 0$, per le quali si ha $|x| = -x$, e in tal caso la condizione diventa $-x \leq a$, cioè $-a \leq x$. In conclusione, le soluzioni sono i reali x che soddisfano $0 \leq x \leq a$ oppure $-a \leq x < 0$, il che può essere scritto compattamente come

$$\boxed{|x| \leq a \qquad \Longleftrightarrow \qquad -a \leq x \leq a.} \tag{1.2}$$

Analogamente, è facile verificare che, se $b \geq 0$,

$$\boxed{|x| \geq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq -b \ \text{ oppure } \ x \geq b.} \tag{1.3}$$

Una disuguaglianza un poco più generale, del tipo

$$|x - x_0| \leq a,$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato e $a \geq 0$, equivale a $-a \leq x - x_0 \leq a$; sommando x_0 a ciascun termine, otteniamo

$$\boxed{|x - x_0| \leq a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a.} \tag{1.4}$$

Nelle disuguaglianze precedenti, possiamo sostituire il simbolo $\leq$ con il simbolo $<$.

Intervalli. Come mostra il semplice studio appena svolto, sovente in Analisi Matematica intervengono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ costituiti da tutti i numeri compresi tra due estremi fissati. Tali sottoinsiemi sono detti intervalli.

Definizione 1.2 *Siano a e b due numeri reali tali che $a \leq b$. Chiamiamo* **intervallo chiuso** *di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Se $a < b$, chiamiamo invece **intervallo aperto** *di estremi a e b l'insieme*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Una notazione equivalente per tale insieme è $]a, b[$.

Figura 1.6. Rappresentazione geometrica di un intervallo chiuso $[a, b]$ (a sinistra) e di un intervallo aperto (a, b) (a destra)

È possibile escludere dall'intervallo uno solo degli estremi, ottenendo l'intervallo *semi-aperto a destra* di estremi a e b

$$\boxed{[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}}$$

oppure l'intervallo *semi-aperto a sinistra*

$$\boxed{(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.}$$

Esempio 1.3

Si voglia determinare l'insieme A formato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$2 \leq |x| < 5.$$

Ricordando le (1.2) e (1.3), si ottiene facilmente che

$$A = (-5, -2] \cup [2, 5).$$

□

È utile considerare anche intervalli definiti da una sola disuguaglianza. Poniamo

$$\boxed{[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \qquad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},}$$

oppure

$$\boxed{(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.}$$

I simboli $-\infty$ e $+\infty$ non indicano numeri reali; essi permettono di estendere l'ordinamento dei reali, attraverso la convenzione che $-\infty < x$ e $x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In altri termini, la condizione $a \leq x$ equivale a $a \leq x < +\infty$, il che mostra che la notazione $[a, +\infty)$ è coerente con quella usata precedentemente nel caso di estremi reali. Talvolta è conveniente porre

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

In generale diremo che un intervallo I è **chiuso** se contiene i suoi estremi e **aperto** se non li contiene. I punti dell'intervallo che non sono estremi vengono detti **punti interni**.

Insiemi limitati. Veniamo ora al concetto di insieme limitato.

Definizione 1.4 *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diciamo che A è* **superiormente limitato** *se esiste un numero reale b tale che*

$$x \leq b, \qquad \textit{per ogni } x \in A.$$

Ogni b che soddisfa tale relazione viene detto **un maggiorante** *di A.*
Si dice che A è **inferiormente limitato** *se esiste un numero reale a tale che*

$$a \leq x, \qquad \textit{per ogni } x \in A.$$

Ogni a che soddisfa tale relazione viene detto **un minorante** *di A.*
Si dice infine che A è **limitato** *se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.*

In termini di intervalli, un insieme è superiormente limitato se è contenuto in un intervallo del tipo $(-\infty, b]$ per qualche $b \in \mathbb{R}$. Similmente, A è limitato se è contenuto in un intervallo del tipo $[a, b]$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. Non è difficile verificare che A è limitato se e solo se esiste un reale $c > 0$ tale che

$$|x| \leq c, \qquad \text{per ogni } x \in A.$$

Esempi 1.5

i) L'insieme $\mathbb{N}$ è inferiormente limitato (ogni numero $a \leq 0$ è un minorante di $\mathbb{N}$), ma non è superiormente limitato: infatti, vale la cosiddetta **proprietà di Archimede**: *per ogni numero reale $b > 0$, esiste un intero n tale che*

$$n > b. \tag{1.5}$$

ii) L'intervallo $(-\infty, 1]$ è superiormente limitato, ma non inferiormente limitato. L'intervallo $(-5, 12)$ è limitato.

iii) L'insieme

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} \tag{1.6}$$

è limitato; infatti si ha $0 \leq \dfrac{n}{n+1} < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

iv) L'insieme $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ è limitato. Infatti, se ad esempio $|x| > \frac{3}{2}$, necessariamente $x^2 > \frac{9}{4} > 2$ e dunque $x \notin B$; pertanto, $B \subset [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. □

Definizione 1.6 *Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$* **ammette massimo** *se esiste un elemento $x_M \in A$ tale che*

$$x \leq x_M, \qquad \textit{per ogni } x \in A.$$

L'elemento x_M (necessariamente unico) dicesi il **massimo dell'insieme** *A e viene denotato con $x_M = \max A$.*
Il **minimo** *di un insieme A, che indichiamo con $x_m = \min A$, è definito in modo analogo.*

Osserviamo che se un insieme ammette massimo, esso è superiormente limitato; infatti, il massimo dell'insieme è un maggiorante dell'insieme, anzi è facile vedere che è *il più piccolo dei suoi maggioranti*. Tuttavia, non vale il viceversa: un insieme può essere superiormente limitato senza ammettere massimo. Consideriamo ad esempio l'insieme A definito in (1.6). Abbiamo già osservato che 1 è un maggiorante dell'insieme. Tra tutti i maggioranti di A, 1 è privilegiato: è *il più piccolo dei maggioranti*. Per convincerci di questo fatto, facciamo vedere che ogni numero reale $r < 1$ non è un maggiorante di A: ciò significa che esiste un intero n tale che

$$\frac{n}{n+1} > r.$$

Tale disuguaglianza equivale a $\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{r}$, cioè $1 + \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{r}$, vale a dire $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1-r}{r}$, cioè ancora $n > \dfrac{r}{1-r}$. L'esistenza di tale n segue allora dalla proprietà di Archimede (1.5).

Dunque, 1 è il più piccolo dei maggioranti di A, ma non è il massimo di A, in quanto $1 \notin A$: non esiste nessun intero n tale che $\dfrac{n}{n+1} = 1$. Diciamo che 1 è l'*estremo superiore* di A e scriviamo $1 = \sup A$.

In modo analogo, se consideriamo l'intervallo $I = (0, 2)$, possiamo verificare che 2 è il più piccolo dei maggioranti di I, ma non appartiene ad I. Diciamo quindi che 2 è l'estremo superiore di I e scriviamo $2 = \sup I$.

Definizione 1.7 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Chiamiamo* **estremo superiore di** *A il più piccolo dei maggioranti di A; denotiamo tale numero reale con* $\sup A$.
Similmente, se $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme inferiormente limitato, chiamiamo **estremo inferiore di** *A il più grande dei minoranti di A; denotiamo tale numero reale con* $\inf A$.

Osserviamo che il numero $s = \sup A$ è caratterizzato dalle seguenti due condizioni:

$$\begin{array}{ll} i) & \text{per ogni } x \in A,\ x \leq s; \\ ii) & \text{per ogni reale } r < s, \text{ esiste un elemento } x \in A \text{ tale che } x > r. \end{array} \tag{1.7}$$

La prima condizione dice che s è un maggiorante di A; la seconda afferma che ogni numero minore di s *non è* un maggiorante di A, cioè che s è il più piccolo dei maggioranti di A.

Le condizioni (1.7) sono quelle da verificare per far vedere che un numero è l'estremo superiore di un insieme. È precisamente ciò che abbiamo fatto per asserire che 1 è l'estremo superiore dell'insieme A definito in (1.6).

Il concetto di estremo superiore estende quello di massimo di un insieme. Infatti, è immediato verificare che se un insieme A ha massimo x_M, allora tale numero è anche l'estremo superiore di A.

Se un insieme A non è superiormente limitato, diciamo che il suo estremo superiore è $+\infty$, ossia poniamo per definizione

$$\sup A = +\infty.$$

Analogamente, se A non è inferiormente limitato, poniamo $\inf A = -\infty$.

1.3.2 La completezza di $\mathbb{R}$

La proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ si esprime in varie forme, tra loro equivalenti. Probabilmente, lo studente ha già visto la proprietà di *separabilità delle classi contigue*: se decomponiamo $\mathbb{R}$ nell'unione di due sottoinsiemi disgiunti C_1 e C_2, tali che ogni elemento di C_1 sia minore o uguale di ogni elemento di C_2 (C_1 e C_2 sono detti *classi contigue*), allora esiste un (unico) elemento $s \in \mathbb{R}$ tale che

$$x_1 \leq s \leq x_2, \qquad \forall x_1 \in C_1,\ \forall x_2 \in C_2.$$

Un'altra forma della proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ è legata al concetto di estremo superiore di un insieme. Essa afferma precisamente che *ogni insieme superiormente limitato ammette in $\mathbb{R}$ estremo superiore*, cioè esiste un numero reale che è il più piccolo dei maggioranti dell'insieme.

È attraverso questa proprietà che, ad esempio, possiamo dimostrare l'esistenza in $\mathbb{R}$ della radice quadrata di 2, cioè di un numero (> 0) tale che $p^2 = 2$. Riprendendo infatti l'Esempio 1.5 iv), la completezza di $\mathbb{R}$ ci assicura l'esistenza dell'estremo superiore dell'insieme limitato $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$; sia esso indicato con p. Usando le proprietà di $\mathbb{R}$, è possibile far vedere che non può essere $p^2 < 2$ altrimenti p non sarebbe un maggiorante di B, né può essere $p^2 > 2$ altrimenti p non sarebbe il più piccolo dei maggioranti di B. Dunque necessariamente deve essere $p^2 = 2$. Si noti che l'insieme B, pur essendo contenuto in $\mathbb{Q}$, non potrebbe avere un estremo superiore razionale; infatti, abbiamo già osservato che se $p^2 = 2$, p non può essere razionale (Proprietà 1.1).

L'esempio ora discusso illustra come la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ sia alla base della possibilità di risolvere in $\mathbb{R}$ varie equazioni notevoli. In particolare, se consideriamo la famiglia di equazioni algebriche

$$x^n = a \tag{1.8}$$

con $n \in \mathbb{N}_+$ ed $a \in \mathbb{R}$, vale la pena di ricordare il seguente ben noto risultato.

Proprietà 1.8 *i) Sia $n \in \mathbb{N}_+$ dispari. Allora, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'equazione* (1.8) *ha in $\mathbb{R}$ esattamente una soluzione. Essa viene indicata con $x = \sqrt[n]{a}$ oppure con $x = a^{1/n}$, e detta la* **radice n-esima di** *a.*

ii) Sia $n \in \mathbb{N}_+$ pari. Allora, per ogni $a > 0$, l'equazione (1.8) *ha in $\mathbb{R}$ esattamente due soluzioni, di uguale valore assoluto ma di segno opposto; per $a = 0$ si ha la sola soluzione $x = 0$; per $a < 0$ non si hanno soluzioni in $\mathbb{R}$. La soluzione ≥ 0 dell'equazione viene indicata con $x = \sqrt[n]{a}$ oppure con $x = a^{1/n}$, e detta la* **radice n-esima (aritmetica) di** *a.*

1.4 Fattoriali e coefficienti binomiali

Introduciamo ora alcune quantità intere notevoli, che intervengono in diversi campi della Matematica.

Dato un numero intero $n \geq 1$, il prodotto di tutti gli interi compresi tra 1 ed n viene detto **fattoriale di** n ed indicato con il simbolo $n!$ (che si legge 'n fattoriale'). È conveniente definire anche il fattoriale di 0, ponendo $0! = 1$. Si ha dunque

$$\boxed{0! = 1, \qquad 1! = 1, \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = (n-1)!\, n \quad \text{per} \quad n \geq 2.} \tag{1.9}$$

Il fattoriale cresce molto rapidamente all'aumentare di n; ad esempio, $5! = 120$, $10! = 3628800$ mentre $100! > 10^{157}$.

Esempio 1.9

Supponiamo che un'urna contenga $n \geq 2$ palline di colore diverso. Chiediamoci: in quanti modi possiamo estrarre le palline dall'urna? Quando estraiamo la prima pallina, effettuiamo una scelta tra le n palline presenti nell'urna; poi estraiamo la seconda pallina, scegliendola tra le $n-1$ palline rimanenti; la terza è scelta tra le $n-2$ palline rimanenti, e così via. In totale, abbiamo dunque $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ risultati diversi dell'estrazione delle palline: $n!$ rappresenta il numero di possibili **disposizioni di n oggetti distinti in sequenza**, o – che è lo stesso – il numero di possibili **permutazioni** di n oggetti ordinati.
Se ci limitiamo a k estrazioni, con $0 < k < n$, abbiamo $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ risultati possibili. Tale espressione, che può essere scritta come $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, rappresenta il numero di possibili **disposizioni di n oggetti distinti in sequenze di k**.
Notiamo che se ammettiamo la ripetizione del colore, cioè se ogni volta che estraiamo una pallina immettiamo nell'urna un'altra pallina dello stesso colore, allora ad ogni estrazione scegliamo tra n palline di colore diverso. Se effettuiamo k estrazioni, con $k > 0$ arbitrario, abbiamo dunque n^k sequenze possibili di colori: n^k è il numero delle **disposizioni di n oggetti in sequenze di k, con ripetizione** (cioè ammettendo la ripetizione dell'oggetto). □

Dati due interi n e k tali che $0 \leq k \leq n$, definiamo il **coefficiente binomiale di indici n e k** come la quantità

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \tag{1.10}$$

(il simbolo $\binom{n}{k}$ si legge comunemente 'coefficiente binomiale n su k'). Osserviamo che se $0 < k < n$, possiamo scrivere

$$n! = 1\cdot\ldots\cdot n = 1\cdot\ldots\cdot(n-k)(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n = (n-k)!(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n$$

e dunque, semplificando e invertendo l'ordine dei fattori a numeratore, la (1.10) diventa

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!},} \tag{1.11}$$

che è un'altra espressione sovente usata per il coefficiente binomiale. Dalla definizione (1.10), segue poi facilmente che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

e che

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Inoltre, non è difficile verificare che, per ogni $n \geq 1$ e per ogni k tale che $0 < k < n$, vale la relazione

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \tag{1.12}$$

la quale fornisce un conveniente modo di calcolare i coefficienti binomiali in modo *ricorsivo*; ciò significa che i coefficienti di indice n possono essere facilmente calcolati una volta noti quelli di indice $n-1$. La formula suggerisce di disporre i coefficienti binomiali secondo una tabella di forma triangolare, nota come **triangolo di Tartaglia** (si veda la Figura 1.7), in cui ogni coefficiente di indice n, ad eccezione del primo e dell'ultimo, si trova al di sotto dei due coefficienti di indice $n-1$ che lo generano secondo la (1.12). Si osservi che la costruzione del triangolo di Tartaglia mostra che i coefficienti binomiali sono tutti numeri interi.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
1 \ldots & & & & & & & & \ldots 1
\end{array}$$

Figura 1.7. Triangolo di Tartaglia

I coefficienti binomiali traggono il loro nome dal fatto che essi intervengono nello sviluppo delle potenze di un binomio $a+b$ in termini dei prodotti delle potenze di a e b. Lo studente ricorda gli sviluppi notevoli

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{e} \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

I coefficienti che appaiono sono proprio i coefficienti binomiali relativi agli indici $n = 2$ e $n = 3$. In generale, per ogni $n \geq 0$, si ha la formula

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k,\end{aligned}} \tag{1.13}$$

nota come **formula del binomio di Newton**. Essa si dimostra usando la relazione (1.12), mediante il metodo di dimostrazione *per induzione* (si veda l'Appendice A.1, pag. 448).

Esempio 1.9 (seguito)

Date le n palline di colore diverso e fissato k con $0 \leq k \leq n$, chiediamoci ora quanti insiemi distinti di k palline possiamo formare.

Se procediamo estraendo una pallina dall'insieme iniziale, poi una pallina dall'insieme delle $n-1$ palline rimanenti, e così via per k volte, abbiamo, come già osservato, $n(n-1)\dots(n-k+1)$ risultati possibili. D'altro canto, l'estrazione delle stesse k palline in un ordine diverso porta al medesimo insieme. Ricordando che gli ordinamenti possibili di k palline sono $k!$, concludiamo che il numero di insiemi distinti di k palline è $\dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \dbinom{n}{k}$. Diremo che tale coefficiente binomiale rappresenta il numero di **combinazioni di n oggetti distinti in gruppi di k**. Equivalentemente, esso rappresenta il numero dei sottoinsiemi di k elementi contenuti in un insieme di n elementi.
Si osservi che, come mostra la (1.13) con $a = b = 1$, la somma di tutti i coefficienti binomiali di indice n è uguale a 2^n, che è precisamente il numero totale dei sottoinsiemi di un insieme di n elementi. □

1.5 Prodotto cartesiano

Siano X e Y due insiemi non vuoti. Presi un elemento x in X e un elemento y in Y, formiamo la **coppia ordinata**

$$(x, y)$$

avente come *prima componente* l'elemento x e come *seconda componente* l'elemento y. Notiamo che una coppia ordinata è concettualmente diversa da un insieme contenente due elementi. Come dice il nome, in una coppia ordinata è importante l'ordine in cui compaiono le componenti; ciò non è vero per un insieme. Se $x \neq y$, le coppie ordinate (x, y) e (y, x) sono diverse, mentre gli insiemi $\{x, y\}$ e $\{y, x\}$ coincidono.

L'insieme delle coppie ordinate (x, y) al variare di x in X e y in Y costituisce il **prodotto cartesiano** di X e Y, che indichiamo con $X \times Y$. In formula,

$$\boxed{X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.}$$

È possibile rappresentare graficamente il prodotto cartesiano come un rettangolo, in cui la base corrisponde all'insieme X e l'altezza corrisponde all'insieme Y (si veda la Figura 1.8).

Se gli insiemi X e Y sono diversi, il prodotto $X \times Y$ sarà diverso dal prodotto $Y \times X$; in altri termini, il prodotto cartesiano non è commutativo.

Se invece si ha $Y = X$, allora è consuetudine porre per brevità $X \times X = X^2$. In tal caso, è definito in X^2 il sottoinsieme

$$\Delta = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}$$

costituito dalle coppie aventi uguali componenti, che chiamiamo la *diagonale* del prodotto cartesiano.

Figura 1.8. Prodotto cartesiano di insiemi

L'esempio più significativo di prodotto cartesiano si ha quando $X = Y = \mathbb{R}$. L'insieme $\mathbb{R}^2$ è formato da tutte le coppie ordinate aventi componenti reali. Come l'insieme $\mathbb{R}$ costituisce un modello matematico della retta, così $\mathbb{R}^2$ *rappresenta un modello matematico del piano* (vedasi la Figura 1.9, a sinistra). Per definirlo, scegliamo una retta nel piano, sulla quale fissiamo un'origine O, un verso positivo di percorrenza e una unità di misura delle lunghezze. Tale retta costituirà l'*asse delle ascisse*. Successivamente, ruotiamo la retta attorno all'origine di 90° in senso antiorario, ottenendo l'*asse delle ordinate*. Abbiamo così ottenuto un *riferimento cartesiano* ortogonale isometrico (menzioniamo qui, senza ulteriori approfondimenti, che talvolta è utile considerare riferimenti cartesiani in cui gli assi non siano ortogonali tra loro e/o le unità di misura, talvolta dette *scale*, siano diverse sui due assi). Dato un qualunque punto P del piano, tracciamo le due parallele agli assi cartesiani passanti per P; indichiamo con x il numero reale associato al punto intersezione dell'asse delle ascisse con la parallela all'asse delle ordinate; similmente, sia y il reale associato al punto intersezione dell'asse delle ordinate con la parallela all'asse delle ascisse. In tal modo associamo univocamente a ogni punto P del piano una coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e viceversa. Diciamo che x è l'*ascissa* e y è l'*ordinata* di P; globalmente, x e y sono le *coordinate cartesiane* di P rispetto al riferimento scelto.

Figura 1.9. Modello matematico del piano (a sinistra) e dello spazio (a destra)

Il concetto di prodotto cartesiano può essere generalizzato al caso di più di due insiemi. Precisamente, dati n insiemi non vuoti $X_1, X_2, \ldots, X_n$, formiamo le $n-$uple ordinate

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

scegliendo ordinatamente, per $i = 1, 2, \ldots, n$, ciascuna componente x_i nell'insieme X_i. Il prodotto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ è costituito dall'insieme di tutte queste $n-$uple.

Se $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, poniamo più semplicemente $X \times X \times \ldots \times X = X^n$. In particolare, $\mathbb{R}^3$ è l'insieme delle terne (x, y, z) a componenti reali; esso costituisce un modello matematico dello spazio tridimensionale (vedasi la Figura 1.9, a destra).

1.6 Relazioni nel piano

Chiamiamo *piano cartesiano* un piano munito di un riferimento cartesiano ortogonale isometrico. Come abbiamo visto, esso può essere identificato al prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Ogni sottoinsieme non vuoto R di $\mathbb{R}^2$ definisce una **relazione** tra numeri reali; precisamente, diciamo che *x è in relazione con y attraverso R* se la coppia ordinata (x, y) appartiene a R. Il *grafico* della relazione è l'insieme dei punti del piano le cui coordinate stanno in R.

Sovente, una relazione è definita attraverso una o più equazioni o disequazioni, che fanno intervenire due variabili x e y. Il sottoinsieme R è allora definito come l'insieme di tutte le coppie (x, y) tali che x e y soddisfano la o le condizioni imposte. Identificare R significa spesso individuare il suo grafico nel piano. Vediamo alcuni esempi.

Esempi 1.10

i) Un'equazione del tipo

$$ax + by = c,$$

con a, b costanti non tutte nulle, definisce una retta. Se $b = 0$, la retta è parallela all'asse delle ordinate, mentre se $a = 0$ la retta è parallela all'asse delle ascisse. Supponendo $b \neq 0$, possiamo riscrivere l'equazione come

$$y = mx + q,$$

con $m = -\frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{b}$. Il valore m dicesi il *coefficiente angolare* della retta. La retta può essere tracciata determinando le coordinate di due punti su di essa, cioè trovando due coppie distinte (x, y) che soddisfano l'equazione. Notiamo in particolare che $c = 0$ (oppure $q = 0$) se e solo se l'origine appartiene alla retta. Ad esempio, l'equazione $x - y = 0$ definisce la bisettrice del primo e terzo quadrante.

ii) Se in luogo dell'equazione precedente consideriamo la disequazione

$$ax + by < c,$$

Figura 1.10. Grafico della relazione definita nell'Esempio 1.10 ii)

allora definiamo uno dei due semipiani in cui la retta di equazione $ax + by = c$ suddivide il piano (si veda la Figura 1.10). Ad esempio, se $b > 0$, otteniamo il semipiano che si trova al di sotto della retta in questione. L'insieme così determinato è aperto, ossia non comprende la retta, in quanto nella disequazione vale la disuguaglianza forte; se invece si considera la disequazione debole $ax + by \leq c$, allora si definisce un insieme chiuso, cioè contenente la retta che definisce il semipiano.

iii) Il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} y > 0, \\ x - y \geq 0, \end{cases}$$

definisce l'intersezione tra il semipiano aperto che si trova al di sopra dell'asse delle ascisse, e il semipiano chiuso che si trova al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante. Si ottiene quindi (Figura 1.11, a sinistra) l'angolo racchiuso tra il semiasse positivo delle ascisse e la bisettrice del primo quadrante (i punti sull'asse delle ascisse sono esclusi).

iv) La disequazione

$$|x - y| < 2$$

equivale, ricordando la (1.2), alla doppia disequazione

$$-2 < x - y < 2.$$

Figura 1.11. Grafici delle relazioni definite negli Esempi 1.10 iii) (a sinistra) e 1.10 iv) (a destra)

Figura 1.12. Grafici delle relazioni definite negli Esempi 1.10 v) (a sinistra) e 1.10 vi) (a destra)

A sua volta, la disequazione di sinistra equivale a $y < x + 2$ e dunque definisce il semipiano aperto al di sotto della retta $y = x + 2$; similmente, la disequazione di destra equivale a $y > x - 2$ e dunque definisce il semipiano aperto al di sopra della retta $y = x - 2$. In definitiva, otteniamo la striscia di piano racchiusa tra le due rette, con esclusione delle rette stesse (Figura 1.11, a destra).

v) Ricordando il Teorema di Pitagora, l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$

definisce il luogo dei punti P del piano che distano 1 dall'origine degli assi, ossia la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 (in trigonometria, essa prende il nome di *circonferenza trigonometrica*). Invece, la disuguaglianza

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

definisce il cerchio delimitato da tale circonferenza (Figura 1.12, a sinistra).

vi) L'equazione

$$y = x^2$$

definisce la parabola ad asse verticale di vertice l'origine, passante per il punto P di coordinate $(1, 1)$. Pertanto la doppia disequazione

$$x^2 \leq y \leq 1$$

definisce la regione di piano racchiusa inferiormente dalla parabola e superiormente dalla retta di equazione $y = 1$ (Figura 1.12, a destra). □

1.7 Esercizi

1. *Risolvere le seguenti disequazioni:*

a) $\dfrac{2x-1}{x-3} > 0$

b) $\dfrac{1-7x}{3x+5} > 0$

c) $\dfrac{x-1}{x-2} > \dfrac{2x-3}{x-3}$

d) $\dfrac{|x|}{x-1} > \dfrac{x+1}{2x-1}$

e) $\dfrac{2x+3}{x+5} \leq \dfrac{x+1}{|x-1|}$

f) $\sqrt{x^2-6x} > x+2$

g) $x-3 \leq \sqrt{x^2-2x}$

h) $\dfrac{x+3}{(x+1)^2\sqrt{x^2-3}} \geq 0$

i) $\sqrt{|x^2-4|} - x \geq 0$

ℓ) $\dfrac{x\sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4} - 1 > 0$

2. *Determinare i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$*:*

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2+4x+13 < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 3x^2+5 > 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : (x+2)(x-1)(x-5) < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{3x+1}{x-2} \geq 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-9} < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{7x+1} + x = 17\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x-4 \geq \sqrt{x^2-6x+5}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x+2 > \sqrt{x-1}\}$

3. *Determinare e rappresentare graficamente i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$*:*

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2 > 0\}$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-x^2| < 1\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \dfrac{y^2}{4} \geq 1\}$

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1+xy > 0\}$

f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \neq 0\}$

4. *Dire se i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$ *sono limitati superiormente e/o inferiormente, specificandone estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo:*

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = n \text{ oppure } x = \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 1 \text{ oppure } x = 20\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1 \text{ oppure } x = \dfrac{2n-3}{n-1},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{R} : z = xy \text{ con } x,y \in \mathbb{R},\ -1 \leq x \leq 2,\ -3 \leq y < -1\}$

1.7.1 Soluzioni

1. *Disequazioni:*

a) Si tratta di una disequazione fratta. Una frazione è positiva se e solo se numeratore e denominatore sono di segno concorde. Poiché $N(x) = 2x-1 > 0$ se $x > 1/2$ e $D(x) = x-3 > 0$ se $x > 3$, la disequazione è verificata per $x < 1/2$ oppure per $x > 3$.

b) $-\frac{5}{3} < x < \frac{1}{7}$.

c) Portiamo tutto al primo membro e semplifichiamo l'espressione:

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{2x-3}{x-3} > 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{-x^2+3x-3}{(x-2)(x-3)} > 0\,.$$

Le radici del numeratore non sono reali, quindi $N(x) < 0$ sempre. Pertanto la disequazione è verificata dove $D(x) < 0$, ossia per $2 < x < 3$.

d) Portiamo tutto al primo membro e semplifichiamo:

$$\frac{|x|}{x-1} - \frac{x+1}{2x-1} > 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{|x|(2x-1) - x^2 + 1}{(x-1)(2x-1)} > 0\,.$$

Poiché $|x| = x$ per $x \geq 0$ e $|x| = -x$ per $x < 0$, studiamo i due casi separatamente.
Se $x \geq 0$, la disequazione diventa

$$\frac{2x^2 - x - x^2 + 1}{(x-1)(2x-1)} > 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)(2x-1)} > 0\,.$$

Il numeratore non ha radici reali, quindi $x^2 - x + 1 > 0$ sempre. Pertanto la disequazione è verificata se il denominatore è positivo, ossia, tenendo conto del vincolo $x \geq 0$, per $0 \leq x < 1/2$ oppure per $x > 1$.
Per $x < 0$, si ha

$$\frac{-2x^2 + x - x^2 + 1}{(x-1)(2x-1)} > 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{-3x^2 + x + 1}{(x-1)(2x-1)} > 0\,.$$

Il numeratore $N(x)$ si annulla per $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ e per $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$, quindi $N(x) > 0$ per $x_1 < x < x_2$ (si osservi che $x_1 < 0$ e che $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$). Come prima il denominatore è positivo per $x < 1/2$ e per $x > 1$. Pertanto, tenendo conto del vincolo $x < 0$, la disequazione è verificata per $x_1 < x < 0$.
In conclusione, la disequazione è verificata per $x \in (x_1, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$.

e) $-5 < x \leq -2$, $-\frac{1}{3} \leq x < 1$, $1 < x \leq \frac{5+\sqrt{57}}{2}$;

f) $x < -\frac{2}{5}$.

g) Osserviamo dapprima che il secondo membro è sempre ≥ 0 dove è definito, ossia per $x^2 - 2x \geq 0$, cioè per $x \leq 0$ oppure $x \geq 2$. La disequazione è sicuramente verificata se il primo membro $x - 3$ è ≤ 0, ovvero per $x \leq 3$.
Se $x - 3 > 0$, eleviamo al quadrato entrambi i membri ottenendo

$$x^2 - 6x + 9 \leq x^2 - 2x \qquad \text{cioè} \qquad 4x \geq 9\,, \qquad \text{ossia} \qquad x \geq \frac{9}{4}\,.$$

Raccogliendo tutte le informazioni ottenute, concludiamo che la disequazione è verificata dove è definita, ossia per $x \leq 0$ oppure per $x \geq 2$.

h) $x \in [-3, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

i) Osserviamo che $|x^2-4| \geq 0$ e quindi $\sqrt{|x^2-4|}$ è sempre definita. Scriviamo la disequazione nella forma

$$\sqrt{|x^2-4|} \geq x\,.$$

Se $x \leq 0$, la disequazione è verificata in quanto il primo membro è sempre positivo. Se $x > 0$, eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$|x^2-4| \geq x^2\,.$$

Osserviamo che

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } x \leq -2 \text{ oppure } x \geq 2, \\ -x^2+4 & \text{se } -2 < x < 2\,. \end{cases}$$

Sia dapprima $x \geq 2$; la disequazione diventa $x^2-4 \geq x^2$ che non è mai vera. Sia ora $0 < x < 2$; si ha $-x^2+4 \geq x^2$ ovvero $x^2-2 \leq 0$. Dunque dovrà essere $0 < x \leq \sqrt{2}$.
In definitiva, la disequazione è verificata per $x \leq \sqrt{2}$.

ℓ) $x \in (-2, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$.

2. *Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:*

a) Poiché $x^2+4x+13 = 0$ non ha soluzioni reali, la condizione $x^2+4x+13 < 0$ non è mai verificata e il primo insieme è vuoto. Viceversa, $3x^2+5 > 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè il secondo insieme è tutto $\mathbb{R}$. Dunque $A = \emptyset \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

b) $B = (-\infty, -2) \cup (2, 5)$.

c) Possiamo scrivere

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-9} = \frac{(x-4)(x-1)}{(x-3)(x+3)}\,,$$

dunque il primo insieme è $(-3, 1) \cup (3, 4)$.
Per individuare il secondo insieme, risolviamo l'equazione irrazionale $\sqrt{7x+1}+x = 17$ che riscriviamo nella forma $\sqrt{7x+1} = 17-x$. Osserviamo che per l'esistenza del radicale deve essere $x \geq -\frac{1}{7}$ e che, essendo una radice quadrata sempre ≥ 0, dobbiamo imporre $17-x \geq 0$, ovvero $x \leq 17$. Per $-\frac{1}{7} \leq x \leq 17$, eleviamo al quadrato ambo i membri, ottenendo

$$7x+1 = (17-x)^2\,, \qquad x^2-41x+288 = 0\,.$$

L'ultima equazione ha due soluzioni $x_1 = 9$ e $x_2 = 32$; la seconda non è accettabile. Quindi il secondo insieme contiene soltanto $x = 9$.
In definitiva, $C = (-3, 1) \cup (3, 4) \cup \{9\}$.

d) $D = [1, +\infty)$.

Figura 1.13. Sono rappresentati i sottoinsiemi A e B relativi all'Esercizio 3

3. *Sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$*:*

a) La condizione è verificata se x e y sono di segno concorde, ossia nel primo e terzo quadrante, assi compresi (Figura 1.13, a sinistra).

b) Si veda la Figura 1.13, a destra.

c) Si ha

$$|y - x^2| = \begin{cases} y - x^2 & \text{se } y \geq x^2 \\ x^2 - y & \text{se } y \leq x^2 \,. \end{cases}$$

La condizione $y \geq x^2$ significa che stiamo considerando la regione del piano delimitata inferiormente dalla parabola $y = x^2$. In tale regione deve essere

$$y - x^2 < 1 \qquad \text{cioè} \qquad y < x^2 + 1\,,$$

ossia deve valere $x^2 \leq y < x^2 + 1$.
Viceversa, se $y < x^2$, si deve avere

$$x^2 - y < 1 \qquad \text{cioè} \qquad y > x^2 - 1\,,$$

ossia deve valere $x^2 - 1 < y \leq x^2$.
In conclusione, la regione cercata è compresa tra le due parabole (non incluse) $y = x^2 - 1$ e $y = x^2 + 1$ (Figura 1.14, a sinistra).

Figura 1.14. Sono rappresentati i sottoinsiemi C e D relativi all'Esercizio 3

Figura 1.15. Sono rappresentati i sottoinsiemi E e F relativi all'Esercizio 3

d) Si veda la Figura 1.14, a destra.

e) Se $x > 0$, la condizione $1 + xy > 0$ equivale a $y > -\frac{1}{x}$. Quindi si considerano i punti del primo e del quarto quadrante che si trovano al di sopra dell'iperbole $y = -\frac{1}{x}$.
Se $x < 0$, la condizione $1 + xy > 0$ equivale a $y < -\frac{1}{x}$ e pertanto è soddisfatta dai punti del secondo e del terzo quadrante che si trovano al di sotto dell'iperbole $y = -\frac{1}{x}$.
Se $x = 0$, la disequazione $1 + xy > 0$ è verificata per ogni y, ossia l'asse y appartiene all'insieme E.
Riassumendo, la regione cercata è compresa tra i due rami dell'iperbole (esclusa) $y = -\frac{1}{x}$ a cui va aggiunto l'asse y (Figura 1.15, a sinistra).

f) Si veda la Figura 1.15, a destra.

4. *Insiemi limitati e non:*

a) Risulta $A = \{1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\}$. Poiché $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset A$, l'insieme A non è superiormente limitato e quindi $\sup A = +\infty$ e il massimo non esiste.
Inoltre, ogni elemento di A è positivo e dunque A è inferiormente limitato. Verifichiamo che 0 è il massimo dei minoranti di A. Infatti, se $r > 0$ fosse un minorante di A, dovrebbe valere $\frac{1}{n^2} > r$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ non nullo. Questo equivale a $n^2 < \frac{1}{r}$, ovvero a $n < \frac{1}{\sqrt{r}}$, il che è assurdo in quanto l'insieme dei numeri naturali non è superiormente limitato. Inoltre $0 \notin A$ e quindi concludiamo che $\inf A = 0$ e A non ha minimo.

b) $\inf B = -1$, $\sup B = \max B = 20$, non esiste $\min B$.

c) Si ha $C = [0, 1] \cup \{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots\} \subset [0, 2)$; quindi C è limitato. Risulta $\inf C = \min C = 0$; inoltre, essendo $\dfrac{2n-3}{n-1} = 2 - \dfrac{1}{n-1}$, non è difficile verificare che $\sup C = 2$, ma il massimo non esiste.

d) $\inf C = \min C = -6$, $\sup B = \max B = 3$.

2

Funzioni

Esempi di funzioni ci provengono dalla vita quotidiana (ad ogni studente iscritto al Politecnico è univocamente associato un numero di matricola), dalla descrizione del mondo fisico (ad ogni punto di una regione dello spazio occupata da un fluido associamo la velocità della particella che in un certo istante transita per il punto), dall'economia (ad ogni giorno di apertura della borsa di Milano associamo l'indice Mibtel del mercato azionario), e così via.

Il concetto matematico di funzione unifica situazioni diverse.

2.1 Definizioni e primi esempi

Siano X e Y due insiemi. Una **funzione** f **definita in** X **a valori in** Y è una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in X$ *al più* un elemento $y \in Y$. L'insieme degli $x \in X$ a cui f associa un elemento di Y forma il **dominio** di f; esso è dunque un sottoinsieme di X, che indicheremo con $\operatorname{dom} f$. Scriveremo quindi

$$\boxed{f : \operatorname{dom} f \subseteq X \to Y.}$$

Se $\operatorname{dom} f = X$, diremo che f è definita **su** X e scriveremo più semplicemente $f : X \to Y$.

L'elemento $y \in Y$ associato ad un elemento $x \in \operatorname{dom} f$ si dice l'**immagine di** x **attraverso** f e si indica con $y = f(x)$. Talvolta si scrive

$$f : x \mapsto f(x).$$

L'insieme degli elementi y di tipo $y = f(x)$ forma l'**immagine di** f; esso è dunque un sottoinsieme di Y che indicheremo con $\operatorname{im} f$.

Il **grafico** di f è il sottoinsieme $\Gamma(f)$ del prodotto cartesiano $X \times Y$ costituito dalle coppie $(x, f(x))$ al variare di x nel dominio di f, ossia

$$\boxed{\Gamma(f) = \big\{(x, f(x)) \in X \times Y \ : \ x \in \operatorname{dom} f\big\}.} \tag{2.1}$$

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_2, © Springer-Verlag Italia 2014

Figura 2.1. Rappresentazione schematica di una funzione attraverso diagrammi di Venn

Nel seguito, considereremo nella maggior parte dei casi funzioni che operano tra insiemi di numeri. Se $Y = \mathbb{R}$, la funzione f dicesi **reale**. Se $X = \mathbb{R}$, la funzione dicesi **di variabile reale**. Osserviamo che il grafico di una funzione reale di variabile reale è un sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Un caso particolare notevole di funzione si ha quando $X = \mathbb{N}$ e il dominio della funzione contiene un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq n_0\}$ per un qualche intero $n_0 \geq 0$. Una tale funzione dicesi **successione**. Solitamente, denotata con a la successione, si preferisce indicare l'immagine dell'intero n con la notazione a_n piuttosto che con il simbolo $a(n)$; in altre parole scriveremo $a : n \mapsto a_n$. Un modo comunemente usato per indicare una successione è $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ (ignorando gli eventuali termini con $n < n_0$) o ancora più semplicemente $\{a_n\}$.

Esempi 2.1

Consideriamo dapprima alcuni esempi di funzioni reali di variabile reale.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = ax + b$ (con a, b coefficienti reali), il cui grafico è una retta (Figura 2.2, in alto a sinistra).

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^2$, il cui grafico è una parabola (Figura 2.2, in alto a destra).

iii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{1}{x}$, il cui grafico è un'iperbole riferita agli asintoti (Figura 2.2, in basso a sinistra).

iv) Una funzione reale di variabile reale può essere **definita a tratti**, ossia attraverso espressioni diverse su intervalli diversi. Un esempio è la funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - x & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ x - 1 & \text{se } 2 < x \leq 3, \end{cases} \tag{2.2}$$

e rappresentata in Figura 2.2, in basso a destra.

Figura 2.2. Grafico delle funzioni $f(x) = 2x - 2$ (in alto a sinistra), $f(x) = x^2$ (in alto a destra), $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (in basso a sinistra) e della funzione definita a tratti in (2.2) (in basso a destra)

Tra le funzioni definite a tratti, sono particolarmente significative:

v) la funzione **Valore assoluto** (Figura 2.3, in alto a sinistra)

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0; \end{cases}}$$

vi) la funzione **Segno** (Figura 2.3, in alto a destra)

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0; \end{cases}}$$

vii) la funzione **Parte intera** (Figura 2.3, in basso a sinistra)

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x] = \text{ il più grande intero relativo } \leq x}$$

(ad esempio, $[4] = 4$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-1] = -1$, $[-\frac{3}{2}] = -2$); si osservi che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $[x] \leq x < [x] + 1$;

Figura 2.3. Grafici delle funzioni Valore assoluto (in alto a sinistra), Segno (in alto a destra), Parte intera (in basso a sinistra) e Mantissa (in basso a destra)

viii) la funzione **Mantissa** (Figura 2.3, in basso a destra)

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = M(x) = x - [x];}$$

si osservi che, per la precedente proprietà della Parte intera, si ha sempre $0 \leq M(x) < 1$).

Vediamo ora qualche esempio di successione.

ix) La successione

$$a_n = \frac{n}{n+1} \tag{2.3}$$

è definita per ogni $n \geq 0$. I primi valori della successione sono

$$a_0 = 0\,, \quad a_1 = \frac{1}{2} = 0.5\,, \quad a_2 = \frac{2}{3} = 0.\overline{6}\,, \quad a_3 = \frac{3}{4} = 0.75\,.$$

Il grafico di tale successione è riportato in Figura 2.4 (in alto a sinistra).

x) La successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2.4}$$

è definita per ogni $n \geq 1$. I primi valori della successione sono

$$a_1 = 2\,, \quad a_2 = \frac{9}{4} = 2.25\,, \quad a_3 = \frac{64}{27} = 2.37\overline{037}\,, \quad a_4 = \frac{625}{256} = 2.44140625\,.$$

Il grafico di tale successione è riportato in Figura 2.4 (in alto a destra).

Figura 2.4. Grafico delle successioni (2.3) (in alto a sinistra), (2.4) (in alto a destra), (2.5) (in basso a sinistra) e (2.6) (in basso a destra)

xi) La successione

$$a_n = n! \tag{2.5}$$

associa ad ogni intero il suo fattoriale, definito in (1.9). Il grafico di tale successione è riportato in Figura 2.4 (in basso a sinistra); si noti che i valori assunti dalla successione crescono molto velocemente al crescere di n e quindi si sono utilizzate scale differenti sugli assi coordinati.

xii) La successione

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases} \qquad (n \geq 0) \tag{2.6}$$

alterna i valori $+1$ e -1 a seconda della parità di n. Il grafico di tale successione è riportato in Figura 2.4 (in basso a destra).

Infine, ecco due esempi di funzioni definite su $\mathbb{R}^2$ (funzioni di *due variabili reali*).

xiii) La funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

associa al generico punto P del piano, di coordinate (x, y), la sua distanza dall'origine degli assi.

xiv) La funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (y, x)$$

associa al punto P il punto P' simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. □

Si consideri una funzione definita in X a valori in Y. È bene prestare attenzione al fatto che il simbolo usato per indicare gli elementi di X (a cui sovente ci si riferisce come la *variabile indipendente*) e quello usato per indicare gli elementi di Y (la *variabile dipendente*), possono essere assolutamente arbitrari. Quello che realmente determina la funzione è il modo di associare ad ogni elemento del dominio il corrispondente elemento dell'immagine. Ad esempio, se x, y, z, t sono simboli per indicare numeri reali, le scritture $y = f(x) = 3x$, oppure $x = f(y) = 3y$, oppure ancora $z = f(t) = 3t$, denotano la *stessa* funzione, quella che ad ogni numero reale associa il suo triplo.

2.2 Immagine e controimmagine

Sia A un sottoinsieme di X. L'**immagine di A attraverso f** è l'insieme

$$\boxed{f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\} \subseteq \operatorname{im} f}$$

di tutte le immagini degli elementi di A. Si osservi che $f(A)$ è vuoto se e solo se A non contiene elementi del dominio di f. L'immagine $f(X)$ dell'intero insieme X è già stata indicata con $\operatorname{im} f$.

Sia poi y un generico elemento di Y; la **controimmagine di y attraverso f** è l'insieme

$$\boxed{f^{-1}(y) = \{x \in \operatorname{dom} f \ : \ f(x) = y\}}$$

degli elementi di X che hanno come immagine y. Notiamo che tale insieme è vuoto se e solo se y non sta nell'immagine di f. Se B è un sottoinsieme di Y, la **controimmagine di B attraverso f** è l'insieme

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} f \ : \ f(x) \in B\},}$$

unione di tutte le controimmagini degli elementi di B.

È facile verificare che $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ per ogni sottoinsieme A di $\operatorname{dom} f$, mentre $f(f^{-1}(B)) = B \cap \operatorname{im} f \subseteq B$ per ogni sottoinsieme B di Y.

Esempio 2.2

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. L'immagine attraverso f dell'intervallo $A = [1, 2]$ è l'intervallo $B = [1, 4]$. Al contrario, la controimmagine di tale B attraverso f è l'unione degli intervalli $[-2, -1]$ e $[1, 2]$, ossia l'insieme

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq |x| \leq 2\}$$

(si veda la Figura 2.5). □

I concetti di estremo superiore/inferiore e di massimo/minimo di un insieme, già introdotti nel § 1.3.1, possono essere particolareggiati al caso dell'immagine di una funzione.

Figura 2.5. Immagine di un intervallo (a sinistra) e controimmagine di un intervallo (a destra) per la funzione $f(x) = x^2$

Definizione 2.3 *Sia f una funzione reale, e sia A un sottoinsieme di* $\operatorname{dom} f$. *Chiamiamo* **estremo superiore di f su A** (*o* **in** A) *l'estremo superiore dell'immagine di A attraverso f; poniamo dunque*

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup f(A) = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Diciamo che f è **superiormente limitata su** A *se l'insieme $f(A)$ è superiormente limitato, cioè se $\sup_{x\in A} f(x) < +\infty$.*
Se $\sup_{x\in A} f(x)$ è finito ed appartiene ad $f(A)$, allora esso è il massimo di questo insieme. Tale numero viene detto il **valore massimo** (*o semplicemente il* **massimo**) **di f su** A *e indicato con $\max_{x\in A} f(x)$.*
I concetti di **estremo inferiore** *e di* **minimo** *di f su A sono definiti in modo analogo. Infine, f dicesi* **limitata su** A *se l'insieme $f(A)$ è limitato.*

Talvolta si usano le notazioni più sintetiche $\sup_A f$, $\max_A f$, etc.

Notiamo che il valore massimo $M = \max_A f$ di f sull'insieme A è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

i) M è un valore assunto dalla funzione su A, cioè

$$\text{esiste } x_M \in A \text{ tale che } f(x_M) = M;$$

ii) M è maggiore o uguale a ogni altro valore assunto dalla funzione su A, cioè

$$\text{per ogni } x \in A,\ f(x) \le M.$$

Esempio 2.4

Consideriamo la funzione $f(x)$ definita in (2.2). È facile verificare che

$$\max_{x\in[0,2]} f(x) = 3, \qquad \min_{x\in[0,2]} f(x) = 0, \qquad \max_{x\in[1,3]} f(x) = 3, \qquad \inf_{x\in[1,3]} f(x) = 1.$$

Il valore 1 non è assunto dalla funzione in alcun punto dell'intervallo $[1,3]$, dunque non esiste il minimo di f su tale insieme. □

2.3 Funzioni suriettive e iniettive; funzione inversa

Una funzione a valori in Y dicesi **suriettiva** (**su** Y) se $\operatorname{im} f = Y$; in altre parole, ogni $y \in Y$ è immagine di almeno un elemento $x \in X$. Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ con $a \neq 0$ è suriettiva su $\mathbb{R}$: il numero reale y è immagine di $x = \dfrac{y-b}{a}$. Al contrario, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è suriettiva su $\mathbb{R}$, in quanto il suo insieme immagine è l'intervallo $[0, +\infty)$.

Una funzione f dicesi **iniettiva** se ogni $y \in \operatorname{im} f$ è immagine di un solo elemento $x \in \operatorname{dom} f$. In altri termini, se si ha $y = f(x_1) = f(x_2)$ con x_1, x_2 elementi del dominio di f, allora necessariamente deve essere $x_1 = x_2$. Ciò, a sua volta, equivale alla condizione che, per ogni $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$,

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

(si veda la Figura 2.6). Se una funzione f è iniettiva, possiamo associare ad ogni elemento y dell'immagine l'unico elemento x del dominio tale che $f(x) = y$. Tale corrispondenza determina dunque una funzione definita in Y a valori in X, che viene detta **funzione inversa** di f ed indicata con il simbolo f^{-1}. Si ha quindi

$$x = f^{-1}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x)$$

Figura 2.6. Rappresentazione schematica di una funzione iniettiva e della sua inversa

(si osservi che la notazione volutamente confonde l'insieme controimmagine di y attraverso f con l'unico elemento in esso contenuto). La funzione inversa f^{-1} ha come dominio l'immagine di f e come immagine il dominio di f; in formule,

$$\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f, \qquad \operatorname{im} f^{-1} = \operatorname{dom} f.$$

Una funzione iniettiva è dunque **invertibile**; i due concetti (iniettività e invertibilità) coincidono.

Qual è il legame tra il grafico della funzione f, definito nella (2.1), e il grafico della funzione inversa f^{-1}? Abbiamo

$$\begin{aligned}\Gamma(f^{-1}) &= \{\big(y, f^{-1}(y)\big) \in Y \times X \ : \ y \in \operatorname{dom} f^{-1}\} \\ &= \{(f(x), x) \in Y \times X \ : \ x \in \operatorname{dom} f\}.\end{aligned}$$

Pertanto, il grafico della funzione inversa si ottiene da quello di f *scambiando tra loro* le componenti di ciascuna coppia. Nel caso di una funzione reale di variabile reale, tale scambio corrisponde, nel piano cartesiano, alla riflessione rispetto alla retta $y = x$. Pertanto, il grafico della funzione inversa si ottiene ribaltando il grafico della f rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (si veda la Figura 2.7,

Figura 2.7. Dal grafico di una funzione iniettiva al grafico della sua inversa

passaggio da a) a b)). Si noti, invece, che il problema di determinare esplicitamente l'espressione della funzione inversa nella forma $x = f^{-1}(y)$ può essere di difficile, se non addirittura di impossibile, soluzione.

Spesso, qualora sia possibile determinare la funzione inversa nella forma $x = f^{-1}(y)$, si preferisce tornare ad indicare la variabile indipendente (della f^{-1}) con il simbolo x e la variabile dipendente con il simbolo y, ottenendo così l'espressione $y = f^{-1}(x)$. Si esegue dunque un puro e semplice cambiamento di notazioni (si ricordi quanto detto alla fine del § 2.1). Ciò permette, ad esempio, di tracciare il grafico della funzione inversa sullo stesso riferimento cartesiano usato per rappresentare il grafico della funzione f (si veda la Figura 2.7, passaggio da b) a c)).

Esempi 2.5

i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ è iniettiva per ogni $a \neq 0$ (infatti, $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ ax_1 = ax_2 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$). La sua funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$, o, che è lo stesso, $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$.

ii) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ non è iniettiva perché $f(x) = f(-x)$ per ogni x reale. Tuttavia, se ci limitiamo a considerare valori ≥ 0 per la variabile indipendente, cioè se **restringiamo** f all'intervallo $[0, +\infty)$, allora la funzione risulta iniettiva (infatti, $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$). La funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, anch'essa definita su $[0, +\infty)$. Più comunemente, si dice che la funzione 'elevamento al quadrato' $y = x^2$ ha come funzione inversa (su $[0, +\infty)$) la funzione 'radice quadrata' $y = \sqrt{x}$. Notiamo che anche la restrizione di f all'intervallo $(-\infty, 0]$ fornisce una funzione iniettiva; in tal caso, la funzione inversa è $y = -\sqrt{x}$.

iii) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ è iniettiva. Infatti, $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$ in quanto $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \frac{1}{2}[x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2] > 0$ qualunque siano $x_1 \neq x_2$. La funzione inversa è la funzione 'radice cubica' $y = \sqrt[3]{x}$ definita su tutto $\mathbb{R}$. □

Osserviamo che, come fatto nell'esempio ii) precedente, se una funzione f non è iniettiva su tutto il suo dominio, lo può essere su un sottoinsieme $A \subseteq \operatorname{dom} f$. La **restrizione di** f **ad** A, cioè la funzione

$$f_{|A} : A \to Y \qquad \text{tale che} \qquad f_{|A}(x) = f(x)\,, \quad \forall x \in A\,,$$

risulta quindi invertibile.

Sia f definita su X a valori in Y. Se f è iniettiva e suriettiva su Y, si dice che f è una **biiezione** (o una **funzione biiettiva**) di X in Y. In tal caso, la funzione inversa f^{-1} è definita su Y, ed è anch'essa iniettiva e suriettiva (su X); dunque, è una biiezione di Y in X.

Ad esempio, le funzioni $f(x) = ax + b$ (con $a \neq 0$) e $f(x) = x^3$ sono biiezioni di $\mathbb{R}$ in sé. La funzione $f(x) = x^2$ è una biiezione dell'intervallo $[0, +\infty)$ in sé.

Se f è una biiezione di X in Y, si dice che gli insiemi X e Y sono in **corrispondenza biunivoca** attraverso f: ad ogni elemento di X corrisponde uno e un solo elemento di Y, e viceversa. L'allievo osservi che due insiemi *finiti* (cioè contenenti un numero finito di elementi) possono essere messi in corrispondenza biunivoca se e solo se hanno lo stesso numero di elementi. Al contrario, un insieme infinito può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio; ad esempio, la funzione (successione) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e il sottoinsieme formato dai numeri pari.

A conclusione di questo paragrafo, vogliamo menzionare un'importante interpretazione dei concetti di iniettività, suriettività e biiettività qui introdotti. Sovente, tanto nella Matematica pura quanto nelle sue applicazioni, si è interessati a risolvere un problema, o una equazione, che si scrive nella forma

$$f(x) = y$$

con f opportuna funzione tra due insiemi X e Y. La quantità y rappresenta il *dato* del problema, o il *termine noto* dell'equazione, mentre x rappresenta la *soluzione* del problema, o *l'incognita* dell'equazione. Ad esempio, dato il numero reale y, si vuole trovare x numero reale soluzione dell'equazione algebrica

$$x^3 + x^2 - \sqrt[3]{x} = y.$$

Ebbene, dire che la funzione f è suriettiva su Y equivale a dire che il problema o l'equazione che ci interessa ha almeno una soluzione per ogni y fissato in Y; dire che f è iniettiva significa che la soluzione, se esiste, è unica; finalmente, dire che f è una biiezione di X in Y equivale a dire che per ogni y fissato in Y esiste una e una sola soluzione $x \in X$.

2.4 Funzioni monotòne

Sia f una funzione reale di variabile reale. Indichiamo con I il dominio di f, oppure un intervallo contenuto nel dominio. Vogliamo descrivere in termini precisi la situazione in cui al crescere della variabile indipendente in I si ha una crescita, o una diminuzione, della variabile dipendente. Ad esempio, se aumentiamo la temperatura di un gas confinato in un recipiente, la sua pressione aumenta; viceversa, all'aumentare dei chilometri percorsi dall'ultimo rifornimento, la quantità di carburante in un'automobile diminuisce. Diamo la seguente definizione.

Definizione 2.6 *La funzione f dicesi* **monotòna crescente su** *I se, presi comunque due elementi x_1 e x_2 in I con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$; in simboli,*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2). \tag{2.7}$$

Figura 2.8. Funzione strettamente crescente (a sinistra) e funzione decrescente (a destra) su un intervallo I

La funzione f dicesi **monotòna strettamente crescente su** I *se vale la condizione*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,. \tag{2.8}$$

Notiamo che se una funzione è strettamente crescente allora è anche crescente, cioè la condizione (2.8) è più restrittiva della condizione (2.7).

Le definizioni di funzione **monotòna decrescente** e **monotòna strettamente decrescente su** I si ottengono dalle corrispondenti definizioni precedenti rovesciando le disuguaglianze tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

Si dice che una funzione f è (**strettamente**) **monotòna su** I se f è monotòna (strettamente) crescente oppure monotòna (strettamente) decrescente su I. Un intervallo I su cui f sia monotòna si chiama **intervallo di monotonia** di f.

Esempi 2.7

i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, per $a > 0$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, per $a = 0$ è costante su $\mathbb{R}$ (e dunque tanto monotòna crescente quanto monotona decrescente), per $a < 0$ è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

ii) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ è monotona strettamente crescente su $I = [0, +\infty)$; infatti, presi due numeri arbitrari $x_1, x_2 \geq 0$ con $x_1 < x_2$, si ha $x_1^2 \leq x_1 x_2 < x_2^2$. In modo analogo, si vede che f è monotona strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$. Non è difficile verificare che tutte le funzioni del tipo $y = x^n$ con $n \geq 4$ pari hanno, per quanto riguarda la monotonia, lo stesso comportamento della f (Figura 2.9, a sinistra).

iii) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ è monotona strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Tutte le funzioni del tipo $y = x^n$ con n dispari hanno lo stesso comportamento (Figura 2.9, a destra).

iv) Con riferimento agli Esempi 2.1, le funzioni $y = [x]$ (Parte intera di x) e $y = \mathrm{sign}(x)$ (Segno di x) sono monotone crescenti (ma non strettamente) su $\mathbb{R}$.

Figura 2.9. Grafici di alcune funzioni $y = x^n$, a sinistra con n pari e a destra con n dispari

Invece la funzione $y = M(x)$ (Mantissa di x) non è monotona su $\mathbb{R}$; essa è però strettamente crescente su ogni intervallo $[n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. □

Enunciamo ora un semplice ma significativo risultato.

Proposizione 2.8 *Se f è strettamente monotona sul suo dominio, allora f è iniettiva.*

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che f sia strettamente crescente. Presi due numeri $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ con $x_1 \neq x_2$, sarà $x_1 < x_2$ oppure $x_2 < x_1$. Nel primo caso, usando l'implicazione (2.8) otteniamo $f(x_1) < f(x_2)$ e dunque certamente $f(x_1) \neq f(x_2)$. Nel secondo caso, arriviamo alla stessa conclusione scambiando il ruolo di x_1 e x_2. □

Nell'ipotesi dell'enunciato appena dimostrato, esiste dunque la funzione inversa f^{-1}; è facile verificare che f^{-1} risulta anch'essa strettamente monotona, in modo concorde con f (cioè entrambe sono strettamente crescenti o strettamente decrescenti).
Ad esempio, la funzione strettamente crescente $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ ha come inversa la funzione $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, anch'essa strettamente crescente.

Notiamo che l'implicazione logica

$$f \text{ strettamente monotona sul suo dominio} \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ iniettiva}$$

non può essere rovesciata. In altri termini, una funzione f può essere iniettiva senza essere strettamente monotona sul suo dominio. Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è iniettiva, anzi è una biiezione di $\mathbb{R}$ in sé, ma non è né strettamente crescente, né strettamente decrescente su $\mathbb{R}$. Torneremo su questo punto nel successivo § 4.3.

È utile osservare che la somma di funzioni monotone concordi (cioè tutte crescenti oppure tutte decrescenti) è ancora una funzione monotona dello stesso tipo ed è strettamente monotona se almeno una delle funzioni lo è. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^5 + x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ in quanto somma di due funzioni che godono di tale proprietà. In base alla Proposizione 2.8, f è dunque invertibile; si noti tuttavia che non è possibile esplicitare la relazione $f(x) = y$ nella forma $x = f^{-1}(y)$.

2.5 Funzioni composte

Indichiamo con X, Y, Z tre insiemi. Sia f una funzione definita in X a valori in Y, e sia g una funzione definita in Y a valori in Z. Possiamo costruire una nuova funzione h definita in X a valori in Z ponendo

$$\boxed{h(x) = g(f(x)).} \tag{2.9}$$

La funzione h si dice **funzione composta di** f **e** g, e si indica con il simbolo $h = g \circ f$ (che si legge 'g composto f').

Esempio 2.9

Consideriamo le due funzioni reali di variabile reale $y = f(x) = x-3$ e $z = g(y) = y^2 + 1$. La funzione composta di f e g è $z = h(x) = g \circ f(x) = (x-3)^2 + 1$. □

Il dominio della funzione composta $g \circ f$ si determina, tenendo conto della definizione (2.9), in questo modo: affinché x appartenga al dominio di $g \circ f$, deve innanzitutto essere definito $f(x)$, dunque x deve stare nel dominio di f; inoltre, $f(x)$ deve essere un elemento del dominio di g. Pertanto,

$$\boxed{x \in \operatorname{dom} g \circ f \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \operatorname{dom} f \quad \text{e} \quad f(x) \in \operatorname{dom} g.}$$

Il dominio di $g \circ f$ è dunque un *sottoinsieme* del dominio di f (si veda la Figura 2.10).

Figura 2.10. Rappresentazione schematica di una funzione composta attraverso diagrammi di Venn

Esempi 2.10

i) Sia $f(x) = \dfrac{x+2}{|x-1|}$, il cui dominio è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; sia poi $g(y) = \sqrt{y}$, il cui dominio è l'intervallo $[0, +\infty)$. Il dominio di $g \circ f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{|x-1|}}$ è costituito dagli $x \neq 1$ tali che $\dfrac{x+2}{|x-1|} \geq 0$; dunque, $\operatorname{dom} g \circ f = [-2, +\infty) \setminus \{1\}$.

ii) Talvolta la funzione composta $g \circ f$ ha dominio vuoto. Ciò accade, ad esempio, se $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (per cui si ha sempre $f(x) \leq 1$) e $g(y) = \sqrt{y-5}$ (il cui dominio è $[5, +\infty)$). □

Il prodotto di composizione non è commutativo: se è possibile definire tanto $g \circ f$ quanto $f \circ g$ (ad esempio quando $X = Y = Z$), le due funzioni in generale non coincidono. Ad esempio, se $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$, si ha $g \circ f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, mentre $f \circ g(x) = 1 + x$.

Se f e g sono entrambe funzioni iniettive (oppure suriettive, oppure biiettive), non è difficile verificare che la funzione composta $g \circ f$ ha la stessa proprietà. In particolare, nel caso dell'iniettività, vale la formula

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} .$$

Inoltre, se f e g sono funzioni reali di variabile reale monotone, anche la $g \circ f$ sarà monotona: precisamente, sarà monotona crescente se f e g sono entrambe mo-

notone crescenti oppure monotone decrescenti, mentre sarà monotona decrescente negli altri casi. Verifichiamo una di tali proprietà. Sia ad esempio f crescente e g decrescente; se $x_1 < x_2$ sono due elementi di $\operatorname{dom} g \circ f$, allora dalla monotonia di f si deduce $f(x_1) \leq f(x_2)$; successivamente, la monotonia di g implica che $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$. Dunque $g \circ f$ risulta decrescente.

Osserviamo infine che se f è una funzione iniettiva (e dunque esiste la funzione inversa f^{-1}), si ha

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f, \\ f \circ f^{-1}(y) &= f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in \operatorname{im} f. \end{aligned}$$

Detta **funzione identità** su un insieme X la funzione $\mathrm{id}_X : X \to X$ tale che $\mathrm{id}_X(x) = x$ per ogni $x \in X$, si ha quindi $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\operatorname{dom} f}$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{im} f}$.

2.5.1 Traslazioni, cambiamenti di scala, riflessioni

Sia f una funzione reale di variabile reale (si consideri ad esempio la funzione rappresentata nella Figura 2.11). Fissato un numero reale $c \neq 0$, indichiamo con $t_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $t_c(x) = x + c$. La composizione di f con t_c ha l'effetto di una **traslazione** del grafico di f: precisamente, il grafico della funzione $f \circ t_c(x) = f(x + c)$ è traslato orizzontalmente rispetto al grafico di f, verso sinistra se $c > 0$, verso destra se $c < 0$. Similmente, il grafico di $t_c \circ f(x) = f(x) + c$ è traslato verticalmente rispetto al grafico di f, verso l'alto se $c > 0$, verso il basso se $c < 0$. Si veda per un esempio la Figura 2.12.

Fissato un numero reale $c > 0$, indichiamo poi con $s_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $s_c(x) = cx$. La composizione di f con s_c ha l'effetto di un **cambiamento di scala** nel grafico di f. Precisamente, se $c > 1$, il grafico della funzione $f \circ s_c(x) = f(cx)$ si 'comprime' orizzontalmente rispetto al grafico di f, verso l'asse delle ordinate; se invece $0 < c < 1$, il grafico si 'dilata' allontanandosi dall'asse delle ordinate. Un effetto analogo, ma in direzione verticale, si ha per la funzione $s_c \circ f(x) = cf(x)$: in questo caso, se $c > 1$ il grafico si 'dilata' allontanandosi dall'asse orizzontale,

Figura 2.11. Grafico di una funzione $f(x)$

Figura 2.12. Grafici delle funzioni $f(x+c)$ con $c > 0$ (in alto a sinistra), $f(x+c)$ con $c < 0$ (in alto a destra), $f(x) + c$ con $c < 0$ (in basso a sinistra), $f(x) + c$ con $c > 0$ (in basso a destra), dove $f(x)$ è la funzione rappresentata nella Figura 2.11

mentre se $0 < c < 1$ il grafico si 'comprime' verso l'asse orizzontale. Per un esempio, si veda la Figura 2.13.

Notiamo poi che il grafico di $f(-x)$ si ottiene **riflettendo** il grafico di $f(x)$ specularmente rispetto all'asse delle ordinate. Invece, il grafico della funzione $f(|x|)$ coincide con quello di f per $x \geq 0$, mentre si ottiene per riflessione speculare di quest'ultimo rispetto all'asse delle ordinate per $x < 0$. Infine, il grafico della funzione $|f(x)|$ coincide con quello di f dove $f(x) \geq 0$, mentre si ottiene dal grafico di f per riflessione speculare rispetto all'asse delle ascisse dove $f(x) < 0$. Per un esempio, si veda la Figura 2.14.

2.6 Funzioni elementari e loro proprietà

Premettiamo alcune utili definizioni.

Definizione 2.11 *Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio sia simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che se $x \in \operatorname{dom} f$ allora anche $-x \in \operatorname{dom} f$. La funzione f dicesi* **pari** *se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, mentre dicesi* **dispari** *se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$.*

Figura 2.13. Grafico della funzione $f(cx)$ con $c > 1$ (in alto a sinistra), della funzione $f(cx)$ con $0 < c < 1$ (in alto a destra), della funzione $cf(x)$ con $c > 1$ (in basso a sinistra), della funzione $cf(x)$ con $0 < c < 1$ (in basso a destra)

Notiamo che il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, mentre quello di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine. Osserviamo inoltre che se f è dispari e definita nell'origine, allora necessariamente si annulla nell'origine, in quanto si ha $f(0) = -f(0)$.

Definizione 2.12 *Una funzione* $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dicesi* **periodica di periodo** p *(con* $p > 0$ *reale) se* $\operatorname{dom} f$ *è un insieme invariante per traslazioni di* $\pm p$ *(cioè se* $x \pm p \in \operatorname{dom} f$ *per ogni* $x \in \operatorname{dom} f$*) e se vale la condizione* $f(x + p) = f(x)$ *per ogni* $x \in \operatorname{dom} f$.

È facile verificare che se f è periodica di periodo p, allora è periodica di ogni periodo mp ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) multiplo di p. Il più piccolo periodo, se esiste, si chiama **periodo minimo** della funzione. Una funzione costante è ovviamente periodica di ogni periodo $p > 0$ e quindi non ha periodo minimo.

Passiamo ora in rassegna le principali funzioni elementari.

Figura 2.14. Grafico della funzione $f(-x)$ (in alto a sinistra), della funzione $f(|x|)$ (in alto a destra), della funzione $|f(x)|$ (in basso a sinistra), della funzione $|f(|x|)|$ (in basso a destra)

2.6.1 Funzioni elevamento a potenza

Tali funzioni sono del tipo $y = x^\alpha$. Il caso $\alpha = 0$ è banale, in quanto abbiamo la funzione costante $y = x^0 = 1$. Supponiamo $\alpha > 0$. Per $\alpha = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ritroviamo le funzioni polinomiali $y = x^n$ definite su $\mathbb{R}$ e già considerate negli Esempi 2.7 ii) e iii). Se n è dispari, tali funzioni sono dispari, strettamente crescenti su $\mathbb{R}$ e hanno come immagine $\mathbb{R}$ (si ricordi la Proprietà 1.8). Se n è pari, le funzioni sono pari, strettamente decrescenti su $(-\infty, 0]$ e strettamente crescenti su $[0, +\infty)$; l'immagine è l'intervallo $[0, +\infty)$.

Consideriamo ora il caso $\alpha > 0$ razionale. Se $\alpha = \frac{1}{m}$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definiamo la funzione radice m-esima di x, indicata con $y = x^{1/m} = \sqrt[m]{x}$, come l'inversa della funzione $y = x^m$. Essa ha come dominio $\mathbb{R}$ se m è dispari, $[0, +\infty)$ se m è pari. Tale funzione è strettamente crescente e ha come immagine $\mathbb{R}$ oppure $[0, +\infty)$ a seconda che m sia dispari o pari.

In generale, per $\alpha = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, con $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ privi di fattori comuni, la funzione $y = x^{n/m}$ è definita come $y = (x^n)^{1/m} = \sqrt[m]{x^n}$. Questa funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ se m è dispari, $[0, +\infty)$ se m è pari. Essa è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ per ogni valore di n ed m, mentre per m dispari essa è strettamente

Figura 2.15. Grafici delle funzioni $y = x^{5/3}$ (a sinistra), $y = x^{4/3}$ (al centro) e $y = x^{3/2}$ (a destra)

crescente o strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$ a seconda che n sia pari o dispari. Consideriamo alcuni esempi (si veda la Figura 2.15). La funzione $y = x^{5/3}$ è definita su $\mathbb{R}$, è strettamente crescente e ha come immagine $\mathbb{R}$. La funzione $y = x^{4/3}$ è definita su $\mathbb{R}$, è strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e ha come immagine $[0, +\infty)$. Infine, la funzione $y = x^{3/2}$ è definita solo su $[0, +\infty)$, dove è strettamente crescente e ha immagine $[0, +\infty)$.

Introduciamo ora la generica funzione $y = x^\alpha$ con $\alpha > 0$ irrazionale. A tale fine, notiamo che se a è un numero reale non negativo, possiamo definire la potenza a^α con $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$, partendo dalle potenze ad esponente razionale e facendo uso della densità dei numeri razionali in $\mathbb{R}$. Se $a \geq 1$, possiamo infatti porre $a^\alpha = \sup\{a^{n/m} \mid \frac{n}{m} \leq \alpha\}$, mentre se $0 \leq a < 1$ poniamo $a^\alpha = \inf\{a^{n/m} \mid \frac{n}{m} \leq \alpha\}$. Pertanto, la funzione $y = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ risulta definita su $[0, +\infty)$ e si dimostra che è ivi strettamente crescente, con immagine l'intervallo $[0, +\infty)$.

Riassumendo, abbiamo definito le funzioni $y = x^\alpha$ per ogni valore di $\alpha > 0$. Esse sono tutte definite almeno su $[0, +\infty)$ e strettamente crescenti su tale intervallo; inoltre, tutte soddisfano $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. È utile osservare che, se $\alpha < \beta$, si ha

$$\boxed{0 < x^\beta < x^\alpha < 1, \quad \text{per} \quad 0 < x < 1, \qquad 1 < x^\alpha < x^\beta, \quad \text{per} \quad x > 1} \tag{2.10}$$

(si veda la Figura 2.16).

Figura 2.16. Grafici di alcune funzioni $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ per $x \geq 0$

Figura 2.17. Grafici di alcune funzioni $y = x^\alpha$ con $\alpha < 0$

Consideriamo infine il caso $\alpha < 0$. Poniamo per definizione $y = x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$. Il dominio è dunque il dominio di $y = x^{-\alpha}$ privato dell'origine. Ciascuna funzione è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$, mentre se $\alpha = -\frac{n}{m}$ con m dispari, la funzione su $(-\infty, 0)$ è strettamente crescente se n è pari, strettamente decrescente se n è dispari (si veda la Figura 2.17). Notiamo infine che, per ogni valore di $\alpha \neq 0$, la funzione inversa della funzione $y = x^\alpha$, ove definita, è la funzione $y = x^{1/\alpha}$.

2.6.2 Funzioni polinomiali e razionali

Una **funzione polinomiale** o, semplicemente, **polinomio** è del tipo $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$; n dicesi **grado** del polinomio. Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$; la funzione è pari (rispettivamente dispari) se e solo se tutti i coefficienti di indice dispari (rispettivamente pari) sono nulli (ricordare che 0 è un numero pari).

Una **funzione razionale** è del tipo $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con P e Q polinomi. Se P e Q non hanno fattori comuni, il dominio della funzione sarà $\mathbb{R}$ privato degli zeri del denominatore.

2.6.3 Funzioni esponenziali e logaritmiche

Sia a un numero reale > 0. In base a quanto visto sopra, la **funzione esponenziale** $y = a^x$ risulta definita per ogni valore reale x; essa soddisfa $y(0) = a^0 = 1$.

Se $a > 1$, la funzione è strettamente crescente; se $a = 1$, la funzione è costante uguale a 1, mentre se $a < 1$, la funzione è strettamente decrescente. Se $a \neq 1$, l'immagine è $(0, +\infty)$ (si veda la Figura 2.18). È utile ricordare le seguenti proprietà delle potenze: per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y\,, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}\,, \qquad (a^x)^y = a^{xy}\,.}$$

Figura 2.18. Grafici della funzione esponenziale $y = 2^x$ (a sinistra) e $y = (\frac{1}{2})^x$ (a destra)

Se $a \neq 1$, la funzione esponenziale è strettamente monotona su $\mathbb{R}$, dunque invertibile. La funzione inversa è la **funzione logaritmo** $y = \log_a x$, definita su $(0, +\infty)$ con immagine $\mathbb{R}$; essa soddisfa $y(1) = \log_a 1 = 0$. La funzione è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $a < 1$ (Figura 2.19). Le proprietà delle potenze sopra ricordate si traducono nelle seguenti relazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} &\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y > 0\,, \\ &\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \forall x, y > 0\,, \\ &\log_a(x^y) = y \log_a x, \quad \forall x > 0\,,\ \forall y \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}}$$

Figura 2.19. Grafici delle funzioni $y = \log_2 x$ (a sinistra) e $y = \log_{1/2} x$ (a destra)

2.6.4 Funzioni trigonometriche e loro inverse

Indichiamo qui con X, Y le coordinate nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Introduciamo la **circonferenza trigonometrica**, ossia la circonferenza di centro l'origine $O = (0, 0)$ e raggio unitario, avente quindi equazione $X^2 + Y^2 = 1$. A partire dal punto $A = (1, 0)$ di intersezione tra la circonferenza e il semiasse positivo delle

ascisse, percorriamo la circonferenza in senso antiorario oppure in senso orario. Precisamente, detto x un qualunque numero reale, indichiamo con $P(x)$ il punto sulla circonferenza ottenuto percorrendo la circonferenza in senso antiorario per un arco di lunghezza x se $x \geq 0$, oppure in senso orario per un arco di lunghezza $-x$ se $x < 0$. Il punto $P(x)$ individua un *angolo* nel piano, avente vertice in O e delimitato dalle semirette uscenti da O e passanti rispettivamente per A e per $P(x)$ (vedasi la Figura 2.20). Il numero x rappresenta la misura dell'angolo in *radianti*. L'angolo di 1 radiante è quello individuato sulla circonferenza trigonometrica dall'arco di lunghezza 1; tale angolo misura $\frac{360}{2\pi} = 57.2957795\cdots$ gradi. La Tabella 2.1 fornisce la corrispondenza tra misura in gradi e misura in radianti di alcuni angoli notevoli. Nel seguito, tutti gli angoli saranno misurati in radianti.

gradi	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabella 2.1. Corrispondenza tra gradi e radianti

Osserviamo che se incrementiamo o decrementiamo di 2π la lunghezza x, compiamo un intero giro della circonferenza rispettivamente in senso antiorario o orario, ritornando allo stesso punto $P(x)$. In altre parole, vale la relazione di periodicità

$$P(x \pm 2\pi) = P(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Indichiamo con $\cos x$ ('coseno di x') e con $\sin x$ ('seno di x') rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto $P(x)$, vale a dire poniamo $P(x) = (\cos x, \sin x)$. La

Figura 2.20. Circonferenza trigonometrica

Figura 2.21. Grafico della funzione $y = \sin x$

funzione coseno $y = \cos x$ e la **funzione seno** $y = \sin x$ sono dunque definite su $\mathbb{R}$ ed assumono tutti i valori dell'intervallo $[-1, 1]$; per la (2.11), sono funzioni periodiche di periodo minimo 2π. Esse soddisfano la relazione trigonometrica fondamentale

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{2.12}$$

È evidente dal significato geometrico che la funzione seno è dispari, mentre la funzione coseno è pari. L'andamento delle funzioni seno e coseno, è rappresentato nelle Figure 2.21 e 2.22.

Alcuni valori notevoli delle funzioni sono riportati nella seguente tabella (in cui k denota un qualunque intero relativo):

$\sin x = 0$	per $x = k\pi\,,$	$\cos x = 0$	per $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,,$
$\sin x = 1$	per $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,,$	$\cos x = 1$	per $x = 2k\pi\,,$
$\sin x = -1$	per $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,,$	$\cos x = -1$	per $x = \pi + 2k\pi\,.$

Figura 2.22. Grafico della funzione $y = \cos x$

Per quanto riguarda la monotonia, si ha

$$y = \sin x \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{strettamente crescente in } \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ \text{strettamente decrescente in } \left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \end{cases}$$

$$y = \cos x \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{strettamente decrescente in } [2k\pi, \pi + 2k\pi] \\ \text{strettamente crescente in } [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]. \end{cases}$$

Di notevole importanza sono le formule di addizione e sottrazione

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}}$$

Da esse, con opportune scelte degli argomenti, si ottengono ad esempio le formule di duplicazione

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1,} \tag{2.13}$$

oppure le formule di prostaferesi

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},} \tag{2.14}$$

$$\boxed{\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2},} \tag{2.15}$$

oppure ancora le relazioni

$$\boxed{\sin(x+\pi) = -\sin x, \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x,} \tag{2.16}$$

$$\boxed{\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x, \qquad \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x.} \tag{2.17}$$

Alla luce di quanto visto nel § 2.5.1, la prima delle relazioni (2.17), ci dice che il grafico della funzione coseno si ottiene da quello della funzione seno mediante una traslazione verso sinistra di $\pi/2$ (si vedano ancora le Figure 2.21 e 2.22).

La **funzione tangente** $y = \tan x$ (indicata anche con $y = \operatorname{tg} x$) e la **funzione cotangente** $y = \operatorname{cotan} x$ (indicata anche con $y = \operatorname{cotg} x$) sono definite rispettivamente come

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.}$$

Figura 2.23. Grafici delle funzioni $y = \tan x$ (a sinistra) e $y = \operatorname{cotan} x$ (a destra)

Ricordando la (2.16), è facile vedere che tali funzioni sono periodiche di periodo minimo π, anziché 2π. La funzione tangente è definita su $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, è strettamente crescente su ogni intervallo $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ ed assume in ciascuno di questi intervalli tutti i valori reali. Analogamente, la funzione cotangente è definita su $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, è strettamente decrescente su ogni intervallo $(k\pi, \pi + k\pi)$ ed assume in ciascuno di questi intervalli tutti i valori reali. Entrambe le funzioni sono dispari. I grafici di tali funzioni sono riportati nella Figura 2.23.

Ricordiamo che, dal punto di vista geometrico, la quantità $\tan x$ rappresenta l'ordinata del punto $Q(x)$ intersezione tra la semiretta uscente dall'origine e passante per $P(x)$ e la retta verticale passante per A (si veda ancora la Figura 2.20).

Le funzioni trigonometriche, in quanto periodiche, non sono ovviamente invertibili su tutto il loro dominio. Per effettuarne l'inversione, esse vengono ristrette ad un intervallo massimale di monotonia stretta; per ciascuna funzione, si sceglie un intervallo principale di invertibilità.

La funzione $y = \sin x$ è strettamente crescente nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La funzione inversa su tale intervallo viene detta **funzione arcoseno** e indicata con $y = \arcsin x$; essa è definita in $[-1, 1]$, è ivi strettamente crescente e ha come immagine l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. È una funzione dispari (si veda la Figura 2.24 a sinistra).

Similmente, la funzione $y = \cos x$ è strettamente decrescente nell'intervallo $[0, \pi]$. Restringendola a tale intervallo, se ne introduce la funzione inversa $y = \arccos x$, detta **funzione arcocoseno**, che risulta dunque definita in $[-1, 1]$, ivi strettamente decrescente e con immagine l'intervallo $[0, \pi]$ (si veda la Figura 2.24 a destra).

Infine, la funzione $y = \tan x$ è strettamente crescente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. La funzione inversa su tale intervallo viene detta **funzione arcotangente** e indicata con $y = \arctan x$ (o anche con $\operatorname{arctg} x$). Essa è definita su $\mathbb{R}$, è ivi strettamente crescente e ha come immagine l'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Anch'essa è una funzione dispari (si veda la Figura 2.25 a sinistra).

Figura 2.24. Grafici delle funzioni $y = \arcsin x$ (a sinistra) e $y = \arccos x$ (a destra)

Similmente, è possibile definire la **funzione arcocotangente** $y = \operatorname{arccotan} x$ come funzione inversa della funzione cotangente sull'intervallo $(0, \pi)$ (Figura 2.25 a destra).

Figura 2.25. Grafici delle funzioni $y = \arctan x$ (a sinistra) e $y = \operatorname{arccotan} x$ (a destra)

2.7 Esercizi

1. *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x-6}$

$\boxed{\text{b)}}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+5}$

c) $f(x) = \log(x^2 - x)$

$\boxed{\text{d)}}$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x+1} & \text{se } x \geq 0\,, \\ \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

2. *Determinare l'immagine delle seguenti funzioni:*

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

   b) $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

   c) $f(x) = \mathrm{e}^{5x+3}$

   d) $f(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x \geq 1\,, \\ -2x-5 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

3. *Determinare dominio e immagine della funzione* $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$*; disegnarne il grafico.*

4. *Sia* $f(x) = -\log(x-1)$*; determinare* $f^{-1}([0,+\infty))$ *e* $f^{-1}((-\infty,-1])$.

5. *Disegnare i grafici delle seguenti funzioni e indicare eventuali simmetrie e/o periodicità:*

   a) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$

   b) $f(x) = 1 + \cos 2x$

   c) $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

   d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x \leq 1\,, \\ -x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

6. *Si consideri la funzione* $f(x)$ *indicata in Figura 2.26; disegnare i grafici di*

$$f(x)-1,\ f(x+3),\ f(x-1),\ -f(x),\ f(-x),\ |f(x)|.$$

7. *Verificare che la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x) = x^2 - 2x + 5$ *non è invertibile. Individuare opportune restrizioni di* f *che siano invertibili e scrivere l'espressione delle loro inverse.*

Figura 2.26. Grafico della funzione f relativa all'Esercizio 6

8. *Determinare il più grande intervallo I su cui la funzione*

$$f(x) = \sqrt{|x-2| - |x| + 2}$$

è invertibile, disegnandone il grafico. Scrivere l'espressione della funzione inversa di f ristretta ad I.

9. *Verificare che $f(x) = (1+3x)(2x - |x-1|)$ definita su $[0, +\infty)$ è iniettiva. Determinare l'immagine e la funzione inversa di f.*

10. *Siano f e g le funzioni sotto assegnate. Scrivere le espressioni di $g \circ f$ e $f \circ g$, determinandone i domini.*

    a) $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = \log(1+x)$

    b) $f(x) = \dfrac{7x}{x+1}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$

11. *Data la funzione $h(x) = \dfrac{2e^x + 1}{e^{2x} + 2}$, esprimere h come prodotto di composizione in cui uno dei fattori è la funzione $f(x) = e^x$.*

12. *Date le funzioni $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = x^2 - 5x + 6$, ricavare l'espressione e tracciare i grafici delle funzioni*

$$h(x) = \min(f(x), g(x)) \qquad \text{e} \qquad k(x) = \max(h(x), 0).$$

2.7.1 Soluzioni

1. *Domini:*

a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

b) Si devono imporre le condizioni $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ e $x + 5 \neq 0$. La prima condizione equivale a $(x+1)(x-4) \geq 0$, ossia $x \in (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$; la seconda equivale a $x \neq -5$. In definitiva il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f = (-\infty, -5) \cup (-5, -1] \cup [4, +\infty).$$

c) $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

d) Per studiare il dominio di tale funzione definita a tratti, consideriamo separatamente i casi $x \geq 0$ e $x < 0$.
Per $x \geq 0$, dobbiamo chiedere che $2x + 1 \neq 0$, ovvero $x \neq -\frac{1}{2}$. Poiché $-\frac{1}{2} < 0$, la funzione è sempre definita per $x \geq 0$.
Per $x < 0$, imponiamo la condizione $x + 1 \geq 0$, ossia $x \geq -1$. Dunque la funzione, per x negativi, è definita in $[-1, 0)$.
In definitiva, $\operatorname{dom} f = [-1, +\infty)$.

2. *Immagini:*

a) La funzione $y = x^2$ ha immagine $[0, +\infty)$; dunque la funzione $y = x^2 + 1$ ha immagine $[1, +\infty)$. Passando ai reciproci, la funzione data ha immagine $(0, 1]$.

b) Si tratta di una funzione ottenuta traslando la funzione elementare $y = \sqrt{x}$ (che ha come immagine $[0, +\infty)$) dapprima verso sinistra di -2 ($y = \sqrt{x+2}$) e poi verso il basso di 1 ($y = \sqrt{x+2} - 1$). Se ne può quindi tracciare il grafico (Figura 2.27) e ottenere $\operatorname{im} f = [-1, +\infty)$.

Figura 2.27. Grafico della funzione $y = \sqrt{x+2} - 1$

In alternativa, si può procedere analiticamente e osservare che $0 \leq \sqrt{x+2} < +\infty$ implica $-1 \leq \sqrt{x+2} - 1 < +\infty$, da cui si ha ancora $\operatorname{im} f = [-1, +\infty)$.

c) $\operatorname{im} f = (0, +\infty)$; d) $\operatorname{im} f = (-7, +\infty)$.

3. Imponendo la condizione $\cos x - 1 \geq 0$, si ottiene $\cos x \geq 1$. Tale relazione è verificata solo per $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ dove il coseno vale 1; pertanto $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ e $\operatorname{im} f = \{0\}$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 2.28.

Figura 2.28. Grafico della funzione $y = \sqrt{\cos x - 1}$

4. $f^{-1}([0, +\infty)) = (1, 2]$ e $f^{-1}((-\infty, -1]) = [\mathrm{e} + 1, +\infty)$.

5. *Grafici e simmetrie/periodicità:*

a) La funzione è pari e non periodica, il grafico è mostrato in Figura 2.29 (in alto a sinistra).

b) La funzione è pari e periodica di periodo π, il grafico è mostrato in Figura 2.29 (in alto a destra).

Figura 2.29. Grafici relativi alle funzioni dell'Esercizio 5.a) (in alto a sinistra), 5.b) (in alto a destra), 5.c) (in basso a sinistra) e 5.d) (in basso a destra)

c) La funzione è dispari e periodica di periodo π, il grafico è mostrato in Figura 2.29 (in basso a sinistra).

d) La funzione non ha né simmetrie né periodicità, il grafico è mostrato in Figura 2.29 (in basso a destra).

6. I grafici richiesti sono mostrati in Figura 2.30.

Figura 2.30. Grafici relativi alle funzioni dell'Esercizio 6

7. La funzione rappresenta una parabola con vertice in $(1,4)$ e pertanto non è invertibile su $\mathbb{R}$ perché non è iniettiva (ad esempio $f(0) = f(2) = 5$). La funzione ristretta agli intervalli $(-\infty, 1]$ e $[1, +\infty)$ risulta invertibile e, ponendo

$$f_1 = f_{|(-\infty,1]} : (-\infty, 1] \to [4, +\infty) \,, \qquad f_2 = f_{|[1,+\infty)} : [1, +\infty) \to [4, +\infty) \,,$$

possiamo esplicitamente calcolare le espressioni di

$$f_1^{-1} : [4, +\infty) \to (-\infty, 1] \,, \qquad f_2^{-1} : [4, +\infty) \to [1, +\infty) \,.$$

Infatti dalla relazione $x^2 - 2x + 5 - y = 0$, ricaviamo

$$x = 1 \pm \sqrt{y - 4}.$$

Tenendo conto dell'immagine delle funzioni f_1^{-1} e f_2^{-1} e scambiando i ruoli delle variabili x e y, si ottiene

$$f_1^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x - 4} \,, \qquad f_2^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 4}.$$

8. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \le 0 \,, \\ \sqrt{4 - 2x} & \text{se } 0 < x \le 2 \,, \\ 0 & \text{se } x > 2 \,, \end{cases}$$

l'intervallo I cercato è $[0, 2]$ e il grafico di f è rappresentato in Figura 2.31.

Figura 2.31. Grafico della funzione $y = \sqrt{|x - 2| - |x| + 2}$

Inoltre $f([0, 2]) = [0, 2]$, dunque $f^{-1} : [0, 2] \to [0, 2]$. Posto $y = \sqrt{4 - 2x}$, risulta $x = \dfrac{4 - y^2}{2}$, da cui si ottiene $f^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$.

9. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 - 1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \,, \\ 3x^2 + 4x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e il grafico di f è rappresentato in Figura 2.32.

Figura 2.32. Grafico della funzione $y = (1 + 3x)(2x - |x - 1|)$

L'immagine di f è l'intervallo $[-1, +\infty)$. Per determinare l'espressione di f^{-1}, separiamo il caso $0 \le x \le 1$ dal caso $x > 1$. Per $0 \le x \le 1$, si ha $-1 \le y \le 8$, e

$$y = 9x^2 - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{y+1}{9}}.$$

Per $x > 1$, si ha $y > 8$, e

$$y = 3x^2 + 4x + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{-2 + \sqrt{3y+1}}{3}.$$

Pertanto

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{9}} & \text{se } -1 \le x \le 8\,, \\ \dfrac{-2 + \sqrt{3x+1}}{3} & \text{se } x > 8. \end{cases}$$

10. *Funzioni composte:*

a) Si ha $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3) = \log(1 + x^2 - 3) = \log(x^2 - 2)$ e dunque $\operatorname{dom} g \circ f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 > 0\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Inoltre $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\log(1 + x)) = (\log(1 + x))^2 - 3$ e quindi $\operatorname{dom} f \circ g = \{x \in \mathbb{R} : 1 + x > 0\} = (-1, +\infty)$.

b) $g \circ f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - 5x}{x + 1}}$ e $\operatorname{dom} g \circ f = (-1, \frac{2}{5}]$;

$f \circ g(x) = \dfrac{7\sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 - x} + 1}$ e $\operatorname{dom} f \circ g = (-\infty, 2]$.

11. $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$ e $h(x) = g \circ f(x)$.

Figura 2.33. Grafici delle parabole $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = x^2 - 5x + 6$

12. Disegnando i grafici delle parabole $f(x)$ e $g(x)$ (Figura 2.33), si vede che

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \leq 2\,, \\ x^2 - 5x + 6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

e il grafico di h è rappresentato in Figura 2.34, a sinistra.
Ragionando come sopra, si ha

$$k(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \leq 1\,, \\ 0 & \text{se } 1 < x < 3\,, \\ x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

e il grafico di k è rappresentato in Figura 2.34, a destra.

Figura 2.34. Grafici relativi alle funzioni h (a sinistra) e k (a destra) dell'Esercizio 12

3

Limiti e continuità I

In questo capitolo, affrontiamo lo studio del comportamento limite di una successione reale o di una funzione reale di variabile reale, e lo studio della continuità di una tale funzione.

3.1 Intorni

Nel definire i concetti di limite e di continuità, siamo condotti a considerare numeri reali 'vicini' ad un certo numero reale fissato, o, con linguaggio geometrico equivalente, punti della retta 'vicini' ad un punto fissato. Pertanto, iniziamo con il precisare il concetto matematico di intorno di un punto.

Definizione 3.1 *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto della retta reale, e sia $r > 0$ un numero reale. Chiameremo* **intorno di x_0 di raggio** r *l'intervallo aperto e limitato*

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| < r\}.$$

Ad esempio, l'intorno di 2 di raggio 10^{-1}, che indichiamo con la notazione $I_{10^{-1}}(2)$, è l'insieme dei numeri reali strettamente compresi tra 1.9 e 2.1. Interpretando la quantità $|x - x_0|$ come la **distanza** euclidea tra il punto x_0 e il punto x, possiamo dire che $I_r(x_0)$ è formato dai punti della retta reale che distano meno di r da x_0. Interpretando invece la quantità $|x - x_0|$ come lo **scarto**, o **errore** (assoluto), con cui il numero x approssima x_0, possiamo dire che $I_r(x_0)$ è formato da tutti i numeri reali che approssimano x_0 con un errore assoluto inferiore a r.

Figura 3.1. Intorno di x_0 di raggio r

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_3, © Springer-Verlag Italia 2014

Se, fissato x_0 in $\mathbb{R}$, facciamo variare r nell'insieme dei numeri reali strettamente positivi, otteniamo la **famiglia degli intorni** di x_0. Ogni intorno è contenuto strettamente in tutti gli intorni aventi raggio più grande, mentre contiene tutti gli intorni di raggio più piccolo.

Osservazione 3.2 Il concetto di intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ non è altro che un caso particolare dell'analogo concetto per un punto appartenente al prodotto cartesiano $\mathbb{R}^d$ (quindi al piano se $d = 2$, allo spazio se $d = 3$), che presentiamo nella Definizione 8.11.

Le successive definizioni di limite e di continuità, che si basano sul concetto di intorno, possono essere date direttamente per funzioni definite su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$, considerando le funzioni di una variabile reale come caso particolare corrispondente a $d = 1$. Preferiamo seguire un approccio più graduale, esaminando dapprima l'ambito monodimensionale e riservando il § 8.5 ad un cenno all'estensione al caso multidimensionale. □

È conveniente introdurre anche il concetto di intorno di uno dei punti all'infinito $+\infty$ o $-\infty$.

Definizione 3.3 *Per ogni numero reale $a \geq 0$, chiamiamo* **intorno di $+\infty$ di estremo inferiore** *a l'intervallo aperto superiormente illimitato*

$$I_a(+\infty) = (a, +\infty).$$

*Analogamente, l'***intorno di $-\infty$ di estremo superiore** *$-a$ sarà definito come*

$$I_a(-\infty) = (-\infty, -a).$$

Figura 3.2. Intorno di $-\infty$ (a sinistra) e di $+\infty$ (a destra)

La seguente notazione sarà utile nel seguito. Diremo che una proprietà matematica $P(x)$ vale 'in un intorno' (o 'nell'intorno') di un punto c (dove c indica tanto un numero reale x_0 quanto $+\infty$ o $-\infty$), se esiste un intorno di c tale che in ogni suo punto x, $P(x)$ è vera. Ad esempio, la funzione $f(x) = 2x - 1$ è strettamente positiva nell'intorno del punto $x_0 = 1$; infatti, si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in I_{1/2}(1)$.

3.2 Limiti di successioni

Consideriamo una successione reale $a : n \mapsto a_n$. Siamo interessati a studiare il comportamento dei valori a_n al crescere dell'indice n. Iniziamo con due esempi.

Esempi 3.4

i) Sia $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. I primi valori della successione sono riportati nella Tabella 3.1. Notiamo che essi 'si avvicinano a 1' al crescere di n. Più precisamente, il numero 1 può essere approssimato tanto bene quanto vogliamo dai valori a_n con indice n abbastanza grande; tale affermazione va intesa in questo senso preciso: comunque (piccolo) fissiamo lo scarto $\varepsilon > 0$, da un certo indice n_ε in poi tutti i valori a_n approssimano 1 con uno scarto inferiore a ε.
Infatti, la condizione $|a_n - 1| < \varepsilon$ equivale a $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, ossia $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$; se dunque definiamo $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ e se n è un qualunque intero $> n_\varepsilon$, avremo $n + 1 > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, cioè $|a_n - 1| < \varepsilon$. In altri termini, per ogni scarto $\varepsilon > 0$, esiste un intero n_ε tale che

$$n > n_\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - 1| < \varepsilon.$$

Facendo riferimento al grafico della successione (vedi Figura 3.3), possiamo anche dire che per tutti gli $n > n_\varepsilon$ i punti (n, a_n) del grafico sono racchiusi tra le due rette orizzontali di ordinate $1 - \varepsilon$ e $1 + \varepsilon$.

n	a_n
0	0.00000000000000
1	0.50000000000000
2	0.66666666666667
3	0.75000000000000
4	0.80000000000000
5	0.83333333333333
6	0.85714285714286
7	0.87500000000000
8	0.88888888888889
9	0.90000000000000
10	0.90909090909090
100	0.99009900990099
1000	0.99900099900100
10000	0.99990000999900
100000	0.99999000010000
1000000	0.99999900000100
10000000	0.99999990000001
100000000	0.99999999000000

n	a_n
1	2.0000000000000
2	2.2500000000000
3	2.3703703703704
4	2.4414062500000
5	2.4883200000000
6	2.5216263717421
7	2.5464996970407
8	2.5657845139503
9	2.5811747917132
10	2.5937424601000
100	2.7048138294215
1000	2.7169239322355
10000	2.7181459268244
100000	2.7182682371975
1000000	2.7182804691564
10000000	2.7182816939804
100000000	2.7182817863958

Tabella 3.1. Alcuni valori, approssimati alla 14-esima cifra decimale, delle successioni $a_n = \frac{n}{n+1}$ (a sinistra) e $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (a destra)

Figura 3.3. Convergenza della successione $a_n = \frac{n}{n+1}$

ii) Sia $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. I primi valori della successione sono riportati in Tabella 3.1. Si può intuire, o 'congetturare', che i valori della successione, al crescere di n, si avvicinano ad un certo numero reale, la cui rappresentazione decimale inizia con $2.718\ldots$
In effetti, è possibile dimostrare ciò: torneremo più avanti su questo esempio molto importante. □

Introduciamo ora, in modo preciso, il concetto di convergenza di una successione. Supporremo per semplicità che la successione sia definita sull'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ per un opportuno $n_0 \geq 0$.

Definizione 3.5 *Si dice che la successione* $a : n \mapsto a_n$ **tende al limite** $\ell \in \mathbb{R}$ (*oppure* **converge a** ℓ, *oppure* **ha limite** ℓ), *e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell,$$

se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ *esiste un intero* n_ε *tale che*

$$\forall n \geq n_0, \qquad n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Con la terminologia degli intorni, la condizione $n > n_\varepsilon$ può essere riscritta come $n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty)$, mentre la condizione $|a_n - \ell| < \varepsilon$ equivale a $a_n \in I_\varepsilon(\ell)$. Pertanto, la condizione di limite può essere espressa nel modo equivalente: per ogni intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ, esiste un intorno $I_{n_\varepsilon}(+\infty)$ di $+\infty$ tale che

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \qquad n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \quad \Rightarrow \quad a_n \in I_\varepsilon(\ell).}$$

Esempi 3.6

i) In base a quanto visto nell'Esempio 3.4 i), possiamo dire che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

ii) Verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2+5n^2} = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo far vedere che si ha

$$\left|\frac{3n}{2+5n^2}\right| < \varepsilon$$

per tutti i valori di n maggiori di un opportuno intero n_ε. Osservando che per $n \geq 1$

$$\left|\frac{3n}{2+5n^2}\right| = \frac{3n}{2+5n^2} < \frac{3n}{5n^2} = \frac{3}{5n},$$

avremo

$$\frac{3}{5n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{3n}{2+5n^2}\right| < \varepsilon.$$

D'altro canto,

$$\frac{3}{5n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{3}{5\varepsilon};$$

pertanto, possiamo porre $n_\varepsilon = \left[\frac{3}{5\varepsilon}\right]$. □

Esaminiamo ora un diverso comportamento di una successione al crescere di n. Consideriamo, ad esempio, la successione

$$a : n \mapsto a_n = n^2.$$

I primi valori sono riportati in Tabella 3.2.

Non solo i valori della successione non appaiono avvicinarsi ad alcun valore limite finito ℓ, ma essi non sono maggiorabili dall'alto: comunque (grande) fissiamo un numero reale $A > 0$, tutti gli a_n con n abbastanza grande, cioè maggiore di un opportuno intero n_A, saranno maggiori di A. Infatti, basta porre $n_A = [\sqrt{A}]$ e osservare che

$$n > n_A \;\Rightarrow n > \sqrt{A} \;\Rightarrow n^2 > A.$$

Diremo che la successione diverge a $+\infty$.

n	a_n
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
100	10000
1000	1000000

Tabella 3.2. Alcuni valori della successione $a_n = n^2$

In generale, definiamo il concetto di divergenza di una successione come segue.

Definizione 3.7 *Si dice che la successione* $a : n \mapsto a_n$ **tende a** $+\infty$ (*oppure* **diverge a** $+\infty$, *oppure* **ha limite** $+\infty$), *e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

se, per ogni numero reale $A > 0$ *esiste un intero* n_A *tale che*

$$\forall n \geq n_0, \qquad n > n_A \quad \Rightarrow \quad a_n > A. \tag{3.1}$$

In termini di intorni, possiamo dire che per ogni intorno $I_A(+\infty)$ di $+\infty$, esiste un intorno $I_{n_A}(+\infty)$ di $+\infty$ tale che

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \qquad n \in I_{n_A}(+\infty) \quad \Rightarrow \quad a_n \in I_A(+\infty).}$$

La definizione di

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty}$$

è analoga alla precedente: ora l'implicazione (3.1) va sostituita da

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \qquad n > n_A \quad \Rightarrow \quad a_n < -A.}$$

Esempi 3.8

i) In base a quanto visto sopra, possiamo affermare che

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

ii) Consideriamo la successione $a_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=0}^{n} k$ che associa ad n la somma dei numeri naturali fino ad n. Per determinarne il limite, mostriamo innanzitutto che vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{3.2}$$

che ha varie applicazioni in Matematica. A tale scopo, osserviamo che si ha anche $a_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 + 0 = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$ e pertanto

$$2a_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n\sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1),$$

da cui l'asserto. Verifichiamo ora che $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$. Osserviamo che $\frac{n(n+1)}{2} > \frac{n^2}{2}$. È possibile allora ragionare come nell'esempio precedente e, fissato $A > 0$, scegliere $n_A = [\sqrt{2A}]$. □

Una successione può dunque essere **convergente**, oppure **divergente** (a $+\infty$ o a $-\infty$). Se non è né convergente né divergente, diciamo che la successione è **indeterminata**. Ad esempio, è indeterminata la successione $a_n = (-1)^n$, che già conosciamo, oppure la successione

$$a_n = \big(1 + (-1)^n\big)\, n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Una condizione sufficiente, che permette di escludere il comportamento indeterminato di una successione, è la **monotonia**. Le definizioni di funzione monotona, date nel § 2.4, si applicano ovviamente alle successioni, che sono particolari funzioni definite solo sugli interi. Per le successioni, le condizioni di monotonia assumono una forma più semplice, nel senso che è sufficiente limitare il confronto a *tutte* le coppie di indici consecutivi n, $n+1$ appartenenti al dominio della successione. Così, ad esempio, una successione è **monotona crescente** se

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \qquad a_n \leq a_{n+1}.}$$

Le altre definizioni si scrivono in modo analogo. Vale allora il seguente risultato.

Teorema 3.9 *Sia $a : n \mapsto a_n$ una successione monotona. Allora, essa è convergente oppure divergente. Precisamente, nel caso in cui la successione sia crescente, si ha:*

i) Se la successione è superiormente limitata, cioè se esiste un maggiorante $b \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq b$ per ogni $n \geq n_0$, allora la successione **converge** *verso l'estremo superiore ℓ della sua immagine:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \sup\{a_n \ : \ n \geq n_0\}.$$

ii) Se la successione non è superiormente limitata, allora essa diverge a $+\infty$.

Nel caso in cui la successione sia decrescente, l'enunciato precedente si modifica in modo ovvio.

Dimostrazione. i) Supponiamo dapprima che la successione $\{a_n\}$ sia superiormente limitata, ovvero $\ell = \sup\{a_n \ : \ n \geq n_0\} \in \mathbb{R}$.
Ricordando le condizioni (1.7), per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un elemento a_{n_ε} tale che $\ell - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq \ell$. Per la monotonia della successione si ha $a_{n_\varepsilon} \leq a_n$, $\forall n \geq n_\varepsilon$; inoltre per definizione di estremo superiore $a_n \leq \ell$, $\forall n \geq n_0$. Ne segue che

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,,$$

dunque ogni a_n con $n \geq n_\varepsilon$ appartiene all'intorno di ℓ di raggio ε, ossia è verificata la condizione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell\,.$$

ii) Sia ora $\ell = +\infty$. Ciò significa che per ogni $A > 0$, esiste un elemento a_{n_A} tale che $a_{n_A} > A$. Usando ancora la monotonia della successione si ha $a_n \geq a_{n_A} > A$, $\forall n \geq n_A$. Dunque ogni a_n con $n \geq n_A$ appartiene all'intorno $I_A(+\infty) = (A, +\infty)$ di $+\infty$, ossia è verificata la condizione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,. \qquad \square$$

Esempio 3.10

Riprendiamo qui l'Esempio 3.4 i). La successione $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ è strettamente crescente. Infatti, la condizione $a_n < a_{n+1}$, cioè $\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n+1}{n+2}$, equivale a $n(n+2) < (n+1)^2$, ossia $n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$, che è verificata per ogni n. Inoltre, si ha $a_n < 1$ per ogni $n \geq 0$; anzi, come già osservato nel § 1.3.1, 1 è l'estremo superiore dell'insieme $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Pertanto, il teorema fornisce il risultato, già noto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. $\square$

Il numero e di Nepero

Riprendiamo la successione $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, già considerata nell'Esempio 3.4 ii). È possibile dimostrare che essa è strettamente crescente (dunque, in particolare, $a_n > 2 = a_1$ per ogni $n > 1$) e che è superiormente limitata (precisamente si ha $a_n < 3$ per ogni n). Pertanto, il Teorema 3.9 garantisce che la successione è convergente ad un limite, compreso tra 2 e 3, che tradizionalmente si indica con il simbolo e:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.} \tag{3.3}$$

Tale numero, detto **numero di Nepero**, riveste un ruolo fondamentale nella Matematica. Si dimostra che esso è irrazionale; le sue prime cifre decimali sono

$$\mathrm{e} = 2.71828182845905\cdots$$

Per le dimostrazioni si veda l'Appendice A.2.3, pag. 458.

Il numero e costituisce una tra le basi più usate per le funzioni esponenziali e logaritmiche. La funzione esponenziale $y = \mathrm{e}^x$ sarà talvolta indicata con la notazione $y = \exp x$. Il logaritmo in base e viene detto **logaritmo neperiano** o **naturale** e sarà indicato nel seguito con il simbolo log oppure ln, in luogo di $\log_{\mathrm{e}}$ (ricordiamo che il logaritmo in base 10, detto logaritmo decimale, viene indicato con il simbolo Log).

3.3 Limiti di funzioni; continuità

Sia f una funzione reale di variabile reale. Vogliamo descrivere il comportamento della variabile dipendente $y = f(x)$, allorché la variabile indipendente x 'si avvicina' ad un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, oppure ad uno dei punti all'infinito $-\infty$ o $+\infty$. È conveniente iniziare da quest'ultimo caso, poiché abbiamo già analizzato il comportamento di una successione all'infinito.

3.3.1 Limiti all'infinito

Supponiamo che f sia definita nell'intorno di $+\infty$. In analogia con quanto fatto per le successioni, diamo le seguenti definizioni.

Definizione 3.11 *Si dice che f* **tende al limite finito** $\ell \in \mathbb{R}$ **per** x **tendente a** $+\infty$*, e si scrive*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell,$$

se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un numero reale $B \geq 0$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x > B \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

In forma equivalente, la condizione ora enunciata richiede che per ogni intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ, esista un intorno $I_B(+\infty)$ di $+\infty$ tale che

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I_B(+\infty) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I_\varepsilon(\ell).}$$

Definizione 3.12 *Si dice che f* **tende a** $+\infty$ **per** x **tendente a** $+\infty$*, e si scrive*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

se, per ogni numero reale $A > 0$, esiste un numero reale $B \geq 0$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x > B \quad \Rightarrow \quad f(x) > A. \tag{3.5}$$

La definizione di funzione f tendente a $-\infty$ si ottiene dalla precedente sostituendo la condizione $f(x) > A$ con la condizione $f(x) < -A$. Invece, la notazione

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty}$$

significa $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

Se f è definita nell'intorno di $-\infty$, le Definizioni 3.11 e 3.12 si modificano in definizioni di limite (finito o infinito, sia esso indicato con L) per x tendente a $-\infty$; è sufficiente sostituire la condizione $x > B$ con $x < -B$. Si scriverà

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.}$$

Infine, la notazione

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = L}$$

significa che f ha lo stesso limite L (finito o infinito) sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$.

Esempi 3.13

i) Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{2x^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, la condizione $|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ equivale a

$$\left|\frac{4x-1}{2(2x^2+1)}\right| < \varepsilon.$$

Non è restrittivo supporre $x > \frac{1}{4}$, nel qual caso possiamo togliere il valore assoluto. Ora, usando semplici proprietà delle frazioni, si ha

$$\frac{4x-1}{2(2x^2+1)} < \frac{2x}{2x^2+1} < \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x} < \varepsilon \qquad \text{se } x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pertanto, la condizione (3.4) è soddisfatta ponendo $B = \max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

ii) Verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Fissato $A > 0$, la condizione $\sqrt{x} > A$ equivale a $x > A^2$, dunque possiamo porre $B = A^2$ e la (3.5) è soddisfatta.

iii) Verifichiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, la condizione

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-x}} < \varepsilon$$

equivale a $\sqrt{1-x} > \frac{1}{\varepsilon}$, cioè $1 - x > \frac{1}{\varepsilon^2}$, cioè ancora $x < 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$. Pertanto, se poniamo $B = \max\left(0, \frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)$, si ha

$$x < -B \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Figura 3.4. Grafici delle funzioni $f(x) = x^3 + 1$ (a sinistra) e $g(x) = x + [1 - x^2]$ (a destra), in un intorno dell'origine

3.3.2 Continuità. Limiti al finito

Ci occupiamo ora di studiare il comportamento dei valori $y = f(x)$ di una funzione f, quando x 'si avvicina' ad un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia definita in tutto un intorno di x_0, tranne eventualmente nel punto x_0 stesso. Iniziamo con alcuni esempi, che ci permettono di cogliere gli aspetti essenziali dei concetti di continuità e di limite finito. Fissiamo $x_0 = 0$ e consideriamo le tre funzioni reali di variabile reale $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + [1 - x^2]$ e $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; i loro grafici, in un intorno dell'origine, sono presentati nelle Figure 3.4 e 3.5.

Per quanto riguarda la funzione g, osserviamo che se $|x| < 1$, allora $0 < 1-x^2 \leq 1$ ed il valore 1 è assunto solo per $x = 0$; pertanto, nell'intorno dell'origine di raggio 1, si ha

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0\,, \\ x & \text{se } x \neq 0\,, \end{cases}$$

Figura 3.5. Grafico della funzione $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ in un intorno dell'origine

come mostrato dal grafico. Notiamo inoltre che la funzione h non è definita nell'origine.

Per ciascuna delle funzioni f e g, confrontiamo i valori assunti in punti x vicini all'origine, con il valore assunto nell'origine. Le due funzioni mostrano comportamenti diversi. Il valore $f(0) = 1$ può essere approssimato tanto bene quanto vogliamo da tutti i valori $f(x)$ con x abbastanza vicino a 0. Precisamente, fissato uno 'scarto' $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente piccolo), possiamo fare in modo che $|f(x) - f(0)|$ sia minore di ε per *tutte* le x tali che $|x - 0| = |x|$ sia minore di un opportuno numero reale $\delta > 0$. Infatti $|f(x) - f(0)| = |x^3| = |x|^3 < \varepsilon$ equivale a $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ e dunque è sufficiente porre $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Diremo allora che la funzione f è continua nell'origine.

Al contrario, il valore $g(0) = 1$ non può essere approssimato arbitrariamente bene da tutti i valori $g(x)$ con x vicino a 0. Ad esempio, se fissiamo $\varepsilon = \frac{1}{5}$, la condizione $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$ equivale a $\frac{4}{5} < g(x) < \frac{6}{5}$; ma tutte le x *diverse da* 0 e tali che ad esempio $|x| < \frac{1}{2}$, soddisfano $-\frac{1}{2} < g(x) = x < \frac{1}{2}$ e dunque la precedente limitazione per $g(x)$ non potrà essere verificata. Diremo allora che la funzione g non è continua nell'origine.

Possiamo però precisare meglio il comportamento di g in un intorno di 0, osservando che per valori di x via via più vicini a 0, *ma sempre diversi da* 0, i valori di $g(x)$ approssimano non già il valore $g(0)$, bensì il valore $\ell = 0$. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, se $x \neq 0$ soddisfa $|x| < \min(\varepsilon, 1)$, avremo $g(x) = x$ e $|g(x) - \ell| = |g(x)| = |x| < \varepsilon$. Diremo allora che la funzione g ha limite 0 per x tendente a 0.

Infine, per quanto riguarda la funzione h, essa non potrà essere detta continua nell'origine, semplicemente perché non ha senso il confronto dei valori $h(x)$, per x vicino a 0, con il valore della funzione nell'origine, che non è definito. Tuttavia, il grafico ci permette di intuire, o 'congetturare', che tali valori approssimano sempre meglio il valore $\ell = 1$ se l'argomento x è scelto via via più vicino all'origine. Siamo portati a dire che anche la funzione h ha limite per x tendente a 0, e tale limite vale 1. Dimostreremo tale affermazione più avanti.

Gli esempi ora visti ci introducono alle seguenti definizioni di continuità e di limite (finito).

Definizione 3.14 *Sia x_0 un punto del dominio di una funzione f. La funzione dicesi* **continua in** x_0 *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Con il linguaggio degli intorni, la condizione di continuità può essere espressa come: per ogni intorno $I_\varepsilon(f(x_0))$ di $f(x_0)$ esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ di x_0 tale che

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0)).} \tag{3.7}$$

Figura 3.6. Definizione di limite finito di una funzione

Definizione 3.15 *Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, tranne eventualmente nel punto x_0. Si dice che f* **ha limite** $\ell \in \mathbb{R}$ (*o* **tende a** ℓ) **per** x **tendente a** x_0*, e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Con il linguaggio degli intorni: per ogni intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ di x_0 tale che

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I_\varepsilon(\ell).}$$

La definizione di limite è illustrata graficamente nella Figura 3.6.

Esaminiamo comparativamente le due definizioni appena date. Nella definizione di continuità, i valori $f(x)$ vengono confrontati con il valore $f(x_0)$, mentre nella definizione di limite, essi vengono confrontati con un valore ℓ, che *può* essere diverso da $f(x_0)$, se f è definita in x_0. Inoltre, nella definizione di limite si esclude dal confronto il punto $x = x_0$: la condizione $0 < |x - x_0|$ significa proprio $x \neq x_0$; al contrario, l'implicazione (3.6) nella definizione di continuità è banalmente soddisfatta da $x = x_0$.

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se f è continua in x_0, allora è senz'altro soddisfatta la condizione (3.8) con $\ell = f(x_0)$; viceversa, se f ha limite $\ell = f(x_0)$ per x tendente a x_0, allora la condizione (3.6) è soddisfatta. Dunque, dire che f è continua in x_0 equivale a dire che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).} \tag{3.9}$$

Notiamo poi che, in entrambe le definizioni, fissato un valore arbitrario $\varepsilon > 0$, viene richiesto di determinare *almeno* un valore δ ('esiste un δ') strettamente positivo per cui valga l'implicazione (3.6) oppure (3.8). Se l'implicazione è vera per un certo δ, essa sarà sicuramente vera anche per ogni $\delta' < \delta$. La definizione non richiede affatto di determinare 'il più grande δ possibile' per cui l'implicazione sia soddisfatta. Tenendo ben presente questo concetto, sovente la verifica della condizione di continuità o di limite può essere resa più agevole.

Tornando ora alle funzioni f, g, h considerate all'inizio del paragrafo, possiamo dunque dire che la funzione f è continua in $x_0 = 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0),$$

mentre la funzione g ha limite 0 per x tendente a 0, ma non è continua:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \neq g(0).$$

Dimostreremo all'interno dell'Esempio 4.6 i) che anche la funzione h ha limite per x tendente a 0 e precisamente si ha

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 1.$$

Le funzioni g e h suggeriscono la seguente definizione.

Definizione 3.16 *Sia f una funzione definita in un intorno di x_0, escluso eventualmente il punto x_0. Se f ammette limite $\ell \in \mathbb{R}$ per x tendente a x_0 e se a) f è definita in x_0 ma $f(x_0) \neq \ell$, oppure b) f non è definita in x_0, diciamo che x_0 è* **punto di discontinuità eliminabile per** f.

La terminologia si spiega con il fatto che in tal caso possiamo o *modificare* la definizione della funzione in x_0 o *definire* la funzione in x_0, in modo da ottenere una funzione continua in x_0. Precisamente, la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ \ell & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

è tale che

$$\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell = \tilde{f}(x_0)$$

e dunque è continua in x_0.

Per le funzioni considerate sopra, abbiamo $\tilde{g}(x) = x$ in tutto un intorno dell'origine, mentre

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

In quest'ultimo caso, abbiamo quindi **prolungato per continuità** la funzione $y = \dfrac{\sin x}{x}$, assegnando il valore che la rende continua nell'origine. D'ora in avanti, quando faremo riferimento alla funzione $y = \dfrac{\sin x}{x}$, intenderemo sempre che è prolungata per continuità nell'origine.

Esempi 3.17

Verifichiamo che alcune funzioni elementari sono continue.

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax+b$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato. Per ogni $\varepsilon > 0$, la condizione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ equivale a $|a|\,|x - x_0| < \varepsilon$. Se $a = 0$, essa è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$; se invece $a \neq 0$, essa equivale a $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$. In tal caso, possiamo porre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ nella (3.6). La funzione f è dunque continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Verifichiamo che essa è continua nel punto $x_0 = 2$. Indichiamo due modi diversi di procedere. Fissato $\varepsilon > 0$, la condizione $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$, cioè $|x^2 - 4| < \varepsilon$, equivale a

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon. \tag{3.10}$$

Non è restrittivo supporre $\varepsilon \leq 4$ (infatti, si tenga presente che se la condizione $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ è soddisfatta per un certo ε, lo sarà pure per tutti gli $\varepsilon' > \varepsilon$); inoltre, cerchiamo x in un intorno di 2, dunque non è restrittivo considerare solo valori di $x > 0$. In tali ipotesi, la (3.10) equivale a

$$\sqrt{4 - \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon},$$

ossia a

$$-(2 - \sqrt{4 - \varepsilon}) < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2. \tag{3.11}$$

Ciò suggerisce di porre $\delta = \min(2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2)$ $(= \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$, come si verifica facilmente). Se dunque $|x - 2| < \delta$, allora è verificata la (3.11) che, come abbiamo visto, equivale a $|x^2 - 4| < \varepsilon$.
Notiamo che in questo modo, a costo di qualche passaggio algebrico, abbiamo determinato il *più grande valore* di δ per cui la condizione $|x^2 - 4| < \varepsilon$ è soddisfatta. Abbiamo osservato sopra che non è richiesto determinare il massimo valore di δ. Pertanto, possiamo procedere in modo diverso. Osserviamo che $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2|\,|x + 2|$. Se limitiamo x ad un intorno di 2 di raggio < 1, avremo $-1 < x - 2 < 1$, cioè $1 < x < 3$, cioè ancora $3 < x + 2 = |x + 2| < 5$. Pertanto,

$$|x^2 - 4| < 5|x - 2|. \tag{3.12}$$

Se vogliamo avere $|x^2 - 4| < \varepsilon$, sarà dunque sufficiente imporre che $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$; ricordando che la (3.12) è stata ottenuta sotto la condizione $|x - 2| < 1$, potremo quindi porre $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$ e la condizione di continuità (3.6) sarà soddisfatta.

Notiamo che la scelta di limitarci ad un intorno di raggio < 1 è arbitraria: avremmo potuto fissare un qualunque altro intorno 'di lavoro' abbastanza piccolo, ottenendo una diversa espressione di δ; ma sempre sarebbe stato possibile soddisfare la condizione di continuità.
Notiamo infine che con un ragionamento analogo si può verificare che f è continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Verifichiamo che essa è continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Innanzi tutto, stabiliamo una semplice ma importante disuguaglianza.

Lemma 3.18 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$,*

$$|\sin x| \leq |x| \tag{3.13}$$

e l'uguaglianza si ha solo per $x = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$; in tal caso, facendo riferimento alla Figura 3.7, si ha che la lunghezza del segmento PH (cateto del triangolo rettangolo PHA) è minore della lunghezza del segmento PA (ipotenusa del triangolo), la quale a sua volta è minore della lunghezza dell'arco di circonferenza PA tra P e A (la distanza tra due punti è minima se il cammino è in linea retta). In formule,

$$\overline{PH} < \overline{PA} < \overset{\frown}{PA}\,.$$

Ora, per definizione $\overline{PH} = \sin x > 0$, mentre $\overset{\frown}{PA} = x > 0$ (gli angoli sono misurati in radianti). Dunque, la (3.13) è vera. Se

Figura 3.7. Dimostrazione della disuguaglianza $|\sin x| \leq |x|$

$-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, ci si riconduce al caso appena considerato osservando che $|\sin x| = \sin|x|$ con $0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}$. Infine, se $|x| > \frac{\pi}{2}$, si ha $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$ e dunque ancora la disuguaglianza è soddisfatta. □

Grazie alla (3.13), possiamo verificare la continuità della funzione seno. Infatti, ricordando la formula di prostaferesi (2.14)

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2},$$

usando la (3.13) e il fatto che $|\cos t| \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1 = |x - x_0|. \end{aligned}$$

Dunque, fissato $\varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \varepsilon$ si avrà pure $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$; in altri termini, la condizione di continuità (3.6) è soddisfatta da $\delta = \varepsilon$.
Con un ragionamento analogo, usando la formula di prostaferesi (2.15), si dimostra che la funzione $g(x) = \cos x$ è continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Definizione 3.19 *Sia I un insieme contenuto in* $\operatorname{dom} f$. *La funzione f dicesi* **continua su** I (*o* **in** I), *se f è continua in ogni punto di I.*

Il risultato che ora enunciamo è di particolare importanza e verrà usato implicitamente in diverse occasioni nel seguito. Per la sua dimostrazione si veda l'Appendice A.2.2, pag. 456.

Proposizione 3.20 *Tutte le funzioni elementari (polinomi e funzioni razionali, funzioni elevamento a potenza, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali e le loro funzioni inverse) sono continue in tutto il loro dominio.*

Segnaliamo che esiste un concetto di continuità di una funzione su un sottoinsieme del suo dominio più forte di quello introdotto nella Definizione 3.19; esso prende il nome di *continuità uniforme*. Rimandiamo all'Appendice A.3.3, pag. 467, per la definizione e le principali proprietà.

Torniamo al concetto di limite. Una funzione f, definita in un intorno di x_0, tranne eventualmente in x_0, può assumere valori via via più grandi quando la variabile indipendente x assume valori via via più vicini a x_0. Se consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2},$$

definita in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, e fissiamo un numero reale $A > 0$ arbitrariamente grande, abbiamo $f(x) > A$ per tutte le $x \neq x_0$ tali che $|x-3| < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$. Siamo portati a dire che f *tende a* $+\infty$ per x tendente a x_0; la definizione precisa è la seguente.

Definizione 3.21 *Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, tranne eventualmente nel punto x_0. Si dice che f* **ha limite** $+\infty$ (*o* **tende a** $+\infty$) **per** x **tendente a** x_0*, e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

se per ogni $A > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > A. \tag{3.14}$$

Con il linguaggio degli intorni, diremo che per ogni intorno $I_A(+\infty)$ di $+\infty$ esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ di x_0 tale che

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I_A(+\infty).}$$

La definizione di

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

si ottiene dalla precedente sostituendo la condizione $f(x) > A$ con $f(x) < -A$. Scriveremo inoltre

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$$

per indicare che $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$. Ad esempio, la funzione iperbole

$$f(x) = \frac{1}{x}\,,$$

il cui grafico è rappresentato nella Figura 2.2, *non ha limite* per x tendente a 0, in quanto in ogni intorno $I_\delta(0)$ dell'origine la funzione assume sia valori positivi arbitrariamente grandi, sia valori negativi arbitrariamente piccoli. Invece, la funzione $|f(x)|$ tende a $+\infty$ per x tendente a 0. Infatti, fissato $A > 0$ arbitrario, si ha

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad |x| < \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|} > A.$$

Dunque, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

3.3.3 Limiti destro e sinistro; punti di discontinuità

Come mostra l'esempio precedente, una funzione può avere un diverso comportamento limite a destra e a sinistra di x_0. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ assume valori sempre più grandi quando x assume valori *positivi* via via più vicini a 0; invece, f assume valori sempre più piccoli, quando x assume valori *negativi* via via più vicini a 0. Se consideriamo la funzione mantissa $y = M(x)$ (il cui grafico è rappresentato nella Figura 2.3 di pag. 36), in un intorno di $x_0 = 1$ di raggio < 1 si ha

$$M(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1, \\ x - 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Dunque, M assume valori sempre più vicini a 0 quando x assume valori > 1 via via più prossimi a 1, mentre M assume valori sempre più vicini a 1 quando x assume valori < 1 via via più prossimi a 1.

Siamo dunque portati a introdurre il concetto di *limite destro* e *limite sinistro*. A tale scopo, definiamo **intorno destro di** x_0 **di raggio** $r > 0$ l'intervallo semiaperto e limitato

$$\boxed{I_r^+(x_0) = [x_0, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x - x_0 < r\}.}$$

L'**intorno sinistro di** x_0 **di raggio** $r > 0$ sarà definito in modo analogo:

$$\boxed{I_r^-(x_0) = (x_0 - r, x_0] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x_0 - x < r\}.}$$

Se, nelle definizioni di limite di f per x tendente a x_0 date nel paragrafo precedente (si vedano le Definizioni 3.15 e 3.21), sostituiamo la condizione $0 < |x - x_0| < \delta$ (vale a dire $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$) con la condizione $0 < x - x_0 < \delta$ (vale a dire $x \in I_\delta^+(x_0) \setminus \{x_0\}$), otteniamo le corrispondenti definizioni di **limite destro di** f **per** x **tendente a** x_0, o **limite di** f **per** x **tendente a** x_0 **da destra**; un tale limite sarà indicato con il simbolo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Esplicitiamo la definizione nel caso del limite finito.

Definizione 3.22 *Sia f una funzione definita in un intorno destro di $x_0 \in \mathbb{R}$, tranne eventualmente nel punto x_0. Si dice che f* **ha limite destro** $\ell \in \mathbb{R}$ **per** x **tendente a** x_0*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad 0 < x - x_0 < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

In termini di intorni: per ogni intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ esiste un intorno destro $I_\delta^+(x_0)$ di x_0 tale che

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I_\delta^+(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I_\varepsilon(\ell).}$$

In modo analogo, possiamo dare una definizione di continuità da destra.

Definizione 3.23 *Sia f una funzione definita in un intorno destro di $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che la funzione è* **continua da destra in** x_0 *se*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Osserviamo che se una funzione è definita solo in un intorno destro di x_0, la condizione di continuità da destra coincide con quella di continuità data in (3.6). Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, definita solo per $x \in [0, +\infty)$, è continua in 0.

Le definizioni di limite sinistro di f per x tendente a x_0 e di continuità da sinistra in x_0 sono analoghe alle precedenti, usando ora gli intorni sinistri di x_0; il limite sinistro sarà indicato con il simbolo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Non è difficile verificare la seguente proprietà, che fornisce un criterio talvolta utile nello studio dei limiti e della continuità.

Proposizione 3.24 *Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, tranne eventualmente nel punto x_0. La funzione f ha limite L (finito o infinito) per x tendente a x_0 se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di f per x tendente a x_0, e tali limiti sono entrambi uguali a L.*

Una funzione f definita in un intorno di x_0 è continua in x_0 se e solo se è continua da destra e da sinistra in x_0.

Tornando agli esempi precedenti, si verifica facilmente che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} M(x) = 0; \qquad \lim_{x \to 1^-} M(x) = 1.$$

Si noti che $M(1) = 0$, dunque $\lim_{x \to 1^+} M(x) = M(1)$, vale a dire la funzione $M(x)$ è continua da destra in $x_0 = 1$ (mentre la funzione non è continua da sinistra, e dunque non è continua in $x_0 = 1$).

Definizione 3.25 *Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, tranne eventualmente nel punto x_0. Se f ha, per x tendente a x_0, limiti destro e sinistro finiti ma diversi tra loro, diciamo che x_0 è* **punto di discontinuità di prima specie** (*o* **di salto**) *per f. Il* **salto** *di f in x_0 è definito come*

$$[f]_{x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Dunque, possiamo dire che la funzione mantissa ha salto $= -1$ in $x_0 = 1$ e, in generale, in ogni punto $x_0 = n \in \mathbb{Z}$.

Anche la funzione $y = [x]$ (parte intera di x) ha una discontinuità di salto in ogni $x_0 = n \in \mathbb{Z}$, con salto $= 1$, in quanto

$$\lim_{x \to n^+} [x] = n; \qquad \lim_{x \to n^-} [x] = n - 1.$$

La funzione $y = \operatorname{sign}(x)$ (segno di x) ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$, con salto $= 2$; infatti,

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x) = 1; \qquad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = -1.$$

Definizione 3.26 *Un punto di discontinuità che non sia eliminabile o di prima specie viene definito* **punto di discontinuità di seconda specie**.

Tale situazione si realizza ad esempio quando f non ammette limite (né destro né sinistro) per x tendente a x_0. La funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$ (vedasi la Figura 3.8 e, per una giustificazione, la successiva Osservazione 4.19).

Figura 3.8. Grafico della funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

3.3.4 Limiti di funzioni monotone

La condizione di monotonia restringe i casi possibili di comportamento limite di una funzione. Valgono infatti i seguenti risultati.

Teorema 3.27 *Sia f una funzione definita e monotona in un intorno destro $I^+(c)$ del punto c (dove c può essere un numero reale oppure $-\infty$), escluso al più il punto c stesso. Allora esiste, finito o infinito, il limite destro per $x \to c$ e precisamente si ha*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x \in I^+(c),\, x > c\} & \text{se } f \text{ è crescente,} \\ \sup\{f(x) : x \in I^+(c),\, x > c\} & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Analogamente, se f una funzione definita e monotona in un intorno sinistro $I^-(c)$ del punto c (dove c può essere un numero reale oppure $+\infty$), escluso al più il punto c stesso, si ha

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in I^-(c),\, x < c\} & \text{se } f \text{ è crescente,} \\ \inf\{f(x) : x \in I^-(c),\, x < c\} & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che se f è crescente nell'intorno destro $I^+(c)$ di c allora

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I^+(c),\, x > c\}\,.$$

Tutti gli altri casi si dimostrano in maniera analoga.
Sia dapprima $\ell = \inf\{f(x) : x \in I^+(c),\, x > c\} \in \mathbb{R}$. Le condizioni che caratterizzano un estremo inferiore (analoghe alle (1.7)) sono le seguenti:

i) *per ogni $x \in I^+(c) \setminus \{c\}$, $f(x) \geq \ell$;*
ii) *per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un elemento $x_\varepsilon \in I^+(c) \setminus \{c\}$ tale che $f(x_\varepsilon) < \ell + \varepsilon$.*

Per la monotonia della funzione abbiamo

$$f(x) \leq f(x_\varepsilon)\,, \qquad \forall x \in I^+(c) \setminus \{c\},\, x < x_\varepsilon\,.$$

Ne segue che

$$\ell - \varepsilon < \ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon\,, \qquad \forall x \in I^+(c) \setminus \{c\},\, x < x_\varepsilon\,;$$

dunque ogni $f(x)$ appartiene all'intorno di ℓ di raggio ε se $x \neq c$ appartiene all'intorno destro di c di estremo superiore x_ε. Pertanto è verificata la condizione

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell\,.$$

Sia ora $\ell = -\infty$; ciò significa che per ogni $A > 0$ esiste $x_A \in I^+(c) \setminus \{c\}$ tale che $f(x_A) < -A$. Usando ancora la monotonia della funzione, abbiamo $f(x) \leq f(x_A) < -A$, $\forall x \in I^+(c) \setminus \{c\}$ e $x < x_A$. Dunque ogni $f(x)$ appartiene all'intorno di $-\infty$ di estremo superiore $-A$ se $x \neq c$ appartiene all'intorno destro di c di estremo superiore x_A. Se ne conclude che

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty\,. \qquad \square$$

Dal teorema precedente segue immediatamente che una funzione monotona definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ può avere in tale punto solo una discontinuità di prima specie. Si ha infatti il seguente corollario.

Corollario 3.28 *Sia f definita e monotona in un intorno $I(x_0)$ di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora esistono finiti il limite destro e sinistro per $x \to x_0$ e precisamente si ha*

i) se f è crescente, allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x);$$

ii) se f è decrescente, allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Dimostrazione. Sia f crescente. Per ogni $x \in I(x_0)$ con $x < x_0$, si ha $f(x) \leq f(x_0)$ e dunque, applicando il teorema precedente, si ottiene

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I(x_0),\, x < x_0\} \leq f(x_0).$$

Similmente, per $x \in I(x_0)$ con $x > x_0$, si ha

$$f(x_0) \leq \inf\{f(x) : x \in I(x_0),\, x > x_0\} = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Pertanto vale l'implicazione *i)*.
Analogamente si dimostra l'implicazione *ii)*. $\square$

3.4 Esercizi

1. *Verificare, mediante la definizione, che*

   a) $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$

   b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{1-2n} = -\infty$

   c) $\lim_{x\to1} (2x^2+3) = 5$

   d) $\lim_{x\to2^\pm} \dfrac{1}{x^2-4} = \pm\infty$

   e) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -1$

   f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1-x} = -\infty$

2. *Sia* $f(x) = \operatorname{sign}(x^2-x)$. *Discutere l'esistenza del limiti*

$$\lim_{x\to0} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1} f(x)$$

   e studiare la continuità della funzione.

3. *Determinare i valori del parametro reale* α *per cui le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio:*

   a) $f(x) = \begin{cases} \alpha \sin(x+\frac{\pi}{2}) & \text{se } x>0\,, \\ 2x^2+3 & \text{se } x\le 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 3e^{\alpha x-1} & \text{se } x\ge 1\,, \\ x+2 & \text{se } x<1 \end{cases}$

3.4.1 Soluzioni

1. *Verifiche di limite:*

a) Fissiamo un numero reale $A>0$; è sufficiente scegliere un qualunque intero $n_A \ge A$ e osservare che se $n>n_A$, si ha

$$n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \ge n > n_A \ge A.$$

Dunque $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$.

b) Fissiamo un numero reale $A>0$ e osserviamo che $\frac{n^2}{1-2n} < -A$ equivale a $\frac{n^2}{2n-1} > A$. Per $n\ge1$, questo equivale a $n^2-2An+A>0$. Pertanto, se consideriamo un intero $n_A \ge A+\sqrt{A(A+1)}$, la disuguaglianza è verificata per ogni $n>n_A$.

c) Fissato $\varepsilon>0$, studiamo la condizione $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. Si ha

$$|2x^2+3-5| = 2|x^2-1| = 2|x-1|\,|x+1| < \varepsilon\,.$$

Non è restrittivo supporre che x appartenga all'intorno di 1 di raggio 1. Ciò equivale a

$$-1 < x - 1 < 1\,, \quad \text{da cui} \quad 0 < x < 2 \quad \text{e} \quad 1 < x + 1 = |x + 1| < 3.$$

Pertanto

$$|2x^2 + 3 - 5| < 2 \cdot 3|x - 1| = 6|x - 1|.$$

L'espressione di destra risulta $< \varepsilon$ se $|x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$. Sarà dunque sufficiente porre $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{6})$ per ottenere la tesi.

2. Poiché $x^2 - x > 0$ per $x < 0$ e $x > 1$, la funzione $f(x)$ risulta così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \text{ e } x > 1\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e } x = 1\,, \\ -1 & \text{se } 0 < x < 1\,. \end{cases}$$

La funzione f è dunque costante negli intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$. Pertanto

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1,$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1.$$

Quindi i limiti richiesti non esistono. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ tranne nei punti $x = 0$ e $x = 1$ nei quali presenta discontinuità di salto.

3. *Continuità:*

a) Il dominio di f è $\mathbb{R}$ e la funzione è continua per $x \neq 0$ qualunque sia α. Per studiare la continuità in $x = 0$, osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x^2 + 3) = 3 = f(0)\,,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \alpha \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \alpha.$$

Pertanto f è continua anche in $x = 0$ se $\alpha = 3$.

b) $\alpha = 1$.

4

Limiti e continuità II

Proseguiamo lo studio dei limiti di funzioni, elaborando strumenti che facilitino il calcolo di limiti, senza dover verificare ogni volta la condizione contenuta nella definizione. Successivamente, introduciamo il concetto di forma indeterminata e ricaviamo vari limiti notevoli. L'ultima parte del capitolo è dedicata allo studio delle proprietà delle funzioni continue su intervalli della retta reale.

4.1 Teoremi sui limiti

Nel seguito, con il simbolo c indicheremo uno qualunque dei simboli x_0, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$, ∞ introdotti precedentemente; pertanto, con $I(c)$ si indicherà di volta in volta un intorno $I_\delta(x_0)$ di $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio δ, oppure un intorno destro $I_\delta^+(x_0)$ o sinistro $I_\delta^-(x_0)$ di x_0 di raggio δ, oppure un intorno $I_B(+\infty)$ di $+\infty$ di estremo inferiore $B > 0$, oppure un intorno $I_B(-\infty)$ di $-\infty$ di estremo superiore $-B$, oppure ancora un intorno $I_B(\infty) = I_B(-\infty) \cup I_B(+\infty)$ di ∞.

Supporremo d'ora in avanti (e salvo diverso avviso) che $f, g, h, \ldots$ siano funzioni *definite in tutto un intorno di* c salvo al più nel punto c. La notazione $\lim_{x \to c} f(x)$ indicherà, a seconda del valore di c, il limite di f per x tendente a $x_0 \in \mathbb{R}$, oppure il limite destro o sinistro di f per x tendente a x_0, oppure il limite di f per x tendente a $+\infty$ o a $-\infty$, o per $|x|$ tendente a $+\infty$.

4.1.1 Teoremi di unicità e permanenza del segno

Iniziamo con lo stabilire l'unicità del limite. Tale risultato giustifica l'uso della locuzione "il limite di f", in luogo di "un limite di f".

Teorema 4.1 (**di unicità del limite**) *Supponiamo che f ammetta limite ℓ (finito o infinito) per x tendente a c. Allora f non ha altri limiti per x tendente a c.*

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_4, © Springer-Verlag Italia 2014

Figura 4.1. Gli intorni di ℓ e ℓ' di raggio $\varepsilon \leq \frac{1}{2}|\ell - \ell'|$ sono disgiunti

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: supponiamo che esista un altro limite $\ell' \neq \ell$ e facciamo vedere che da ciò si ottiene una contraddizione. Consideriamo solo il caso in cui ℓ e ℓ' siano entrambi finiti; gli altri casi si possono facilmente analizzare adattando il ragionamento successivo. Osserviamo innanzi tutto che, essendo $\ell' \neq \ell$, esistono un intorno $I(\ell)$ di ℓ e un intorno $I(\ell')$ di ℓ' disgiunti tra loro, cioè tali che

$$I(\ell) \cap I(\ell') = \emptyset. \tag{4.1}$$

Infatti, è sufficiente considerare per ciascun punto un intorno di raggio ε minore o uguale alla semidistanza tra i centri, cioè $\varepsilon \leq \frac{1}{2}|\ell - \ell'|$ (si veda la Figura 4.1).
Considerato allora l'intorno $I(\ell)$ di ℓ, dall'ipotesi $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ segue che esiste un intorno $I(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I(\ell);$$

similmente, considerato l'intorno $I(\ell')$ di ℓ', da $\lim_{x \to c} f(x) = \ell'$ segue che esiste un intorno $I'(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I'(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I(\ell').$$

L'intersezione dei due intorni $I(c)$ e $I'(c)$ è ancora un intorno di c; esso contiene infiniti elementi del dominio di f, in quanto abbiamo supposto che f sia definita in tutto un intorno di c (tranne al più in c). Pertanto, se $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ indica un qualunque elemento appartenente a entrambi gli intorni e diverso da c, si avrà

$$f(\bar{x}) \in I(\ell) \cap I(\ell'),$$

cioè i due intorni $I(\ell)$ e $I(\ell')$ non sono disgiunti. Ma ciò contraddice la (4.1). □

La seconda proprietà che consideriamo riguarda il legame tra il segno del limite e il segno della funzione f nell'intorno di c.

Teorema 4.2 (di permanenza del segno) *Supponiamo che f ammetta limite ℓ (finito o infinito) per x tendente a c. Se $\ell > 0$ oppure $\ell = +\infty$, esiste un intorno $I(c)$ di c tale che f è strettamente positiva in $I(c) \setminus \{c\}$. Un risultato analogo vale per il segno negativo.*

Figura 4.2. Il Teorema di permanenza del segno

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che ℓ sia finito > 0. Consideriamo l'intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ di raggio $\varepsilon = \ell/2 > 0$. In base alla definizione di limite, esiste un intorno $I(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I_\varepsilon(\ell).$$

Osservando che $I_\varepsilon(\ell) = (\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}) \subset (0, +\infty)$, concludiamo che tutti i valori di $f(x)$ sono strettamente positivi.
Se $\ell = +\infty$, è sufficiente fissare un qualunque intorno $I_A(+\infty) = (A, +\infty)$ di $+\infty$ (con $A > 0$) e applicare la definizione di limite. □

L'implicazione logica del teorema di permanenza del segno può essere "quasi" rovesciata, secondo l'enunciato seguente.

Corollario 4.3 *Supponiamo che f ammetta limite ℓ (finito o infinito) per x tendente a c. Se esiste un intorno $I(c)$ di c tale che $f(x) \geq 0$ in $I(c) \setminus \{c\}$, allora $\ell \geq 0$ oppure $\ell = +\infty$. Un risultato analogo vale per il segno negativo.*

Dimostrazione. Per assurdo, se fosse $\ell = -\infty$ oppure $\ell < 0$, il Teorema di permanenza del segno implicherebbe l'esistenza di un intorno $I'(c)$ di c tale che $f(x) < 0$ in $I'(c) \setminus \{c\}$. Nell'intersezione dei due intorni $I(c)$ e $I'(c)$, si avrebbe contemporaneamente $f(x) < 0$ e $f(x) \geq 0$, il che è assurdo. □

Notiamo che anche facendo l'ipotesi più forte $f(x) > 0$ in $I(c)$ non potremmo escludere che ℓ sia nullo. Infatti, se ad esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

abbiamo $f(x) > 0$ in ogni intorno dell'origine, eppure $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

4.1.2 Teoremi del confronto

Vediamo ora alcuni risultati in cui si confronta il comportamento di due o più funzioni per x tendente a c. Innanzitutto, il corollario appena visto può essere generalizzato come segue.

Corollario 4.4 (**Primo teorema del confronto**) *Supponiamo che per x tendente a c, la funzione f abbia limite ℓ mentre la funzione g abbia limite m (entrambi finiti o infiniti). Se esiste un intorno $I(c)$ di c tale che $f(x) \leq g(x)$ in $I(c) \setminus \{c\}$, allora $\ell \leq m$.*

Dimostrazione. Se $\ell = -\infty$ oppure $m = +\infty$, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, consideriamo la funzione ausiliaria $h(x) = g(x) - f(x)$. Per ipotesi, si ha $h(x) \geq 0$ in $I(c) \setminus \{c\}$. Inoltre, il successivo Teorema 4.10 sull'algebra dei limiti ci assicura che

$$\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} g(x) - \lim_{x \to c} f(x) = m - \ell.$$

Applicando il Corollario precedente alla funzione h, otteniamo $m - \ell \geq 0$, cioè la tesi. □

Stabiliamo ora due utili condizioni che assicurano l'esistenza del limite di una funzione; esse si basano sul confronto del comportamento della funzione in un intorno di c con quello di altre funzioni, di cui è noto il limite.

Teorema 4.5 (**Secondo teorema del confronto - caso finito**) *Siano date tre funzioni f, g ed h; supponiamo che f ed h abbiano lo stesso limite finito per x tendente a c:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = \ell.$$

Se esiste un intorno $I(c)$ di c nel quale siano definite le tre funzioni (tranne al più nel punto c) e tale che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \qquad \forall x \in I(c) \setminus \{c\}, \tag{4.2}$$

allora si ha anche

$$\lim_{x \to c} g(x) = \ell.$$

Dimostrazione. Verifichiamo la definizione di limite per g. Fissato un intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ, dall'ipotesi $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ deduciamo l'esistenza di un intorno $I'(c)$ di c tale che

Figura 4.3. Il secondo Teorema del confronto

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I'(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I_\varepsilon(\ell).$$

Notiamo che la condizione $f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$ può essere scritta equivalentemente come $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, ossia ancora, ricordando la (1.4), come

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon. \tag{4.3}$$

Similmente, dall'ipotesi $\lim_{x \to c} h(x) = \ell$ deduciamo l'esistenza di un intorno $I''(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} h, \qquad x \in I''(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon. \tag{4.4}$$

Definiamo l'intorno $I'''(c) = I(c) \cap I'(c) \cap I''(c)$. In $I'''(c) \setminus \{c\}$ sono verificate le tre condizioni (4.2), (4.3) e (4.4), dunque in particolare si ha

$$x \in I'''(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioè $g(x) \in I_\varepsilon(\ell)$. La dimostrazione del teorema è conclusa. □

Esempi 4.6

i) Dimostriamo il limite fondamentale

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \tag{4.5}$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $y = \dfrac{\sin x}{x}$ è pari, infatti $\dfrac{\sin(-x)}{-x} =$

Figura 4.4. Il settore circolare OAP è strettamente contenuto nel triangolo OAQ

$\dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$. Dunque, è sufficiente far tendere x a 0 per valori positivi, ossia dimostrare che $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Ricordando la (3.13), per ogni $x > 0$ si ha $\sin x < x$, cioè $\dfrac{\sin x}{x} < 1$. Per ottenere una limitazione inferiore, supponiamo $x < \frac{\pi}{2}$ e consideriamo sulla circonferenza trigonometrica il punto A di coordinate $(1, 0)$, il punto P di coordinate $(\cos x, \sin x)$ e il punto Q di coordinate $(1, \tan x)$ (si veda la Figura 4.4). Il settore circolare OAP è strettamente contenuto nel triangolo OAQ, dunque

$$\text{area } OAP < \text{ area } OAQ.$$

Essendo

$$\text{area } OAP = \frac{\overline{OA} \cdot \overset{\frown}{AP}}{2} = \frac{x}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{area } OAQ = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AQ}}{2} = \frac{\tan x}{2},$$

si ha

$$\frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2\cos x}, \qquad \text{cioè} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

In conclusione, per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ abbiamo

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

La continuità della funzione coseno assicura che $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$. Pertanto, applicando il secondo Teorema del confronto, otteniamo la tesi.

ii) Vogliamo ora studiare il comportamento limite della funzione $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ per x tendente a $+\infty$. A tale scopo, ricordiamo che per ogni x reale si ha

$$-1 \le \sin x \le 1. \tag{4.6}$$

Dividendo ciascun termine per $x > 0$, le disuguaglianze si conservano; pertanto, in ogni intorno $I_A(+\infty)$ di $+\infty$ si ha

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Posto $f(x) = -\frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$ ed osservato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, deduciamo dal teorema precedente che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

□

Il limite studiato nel secondo esempio è un caso particolare della situazione considerata nel seguente corollario, che è una utile conseguenza del Teorema 4.5.

Corollario 4.7 *Sia f una funzione* **limitata** *in un intorno di c, cioè esistono un intorno $I(c)$ ed una costante $C > 0$ tali che*

$$|f(x)| \leq C, \qquad \forall x \in I(c) \setminus \{c\}. \tag{4.7}$$

Sia poi g una funzione tale che

$$\lim_{x\to c} g(x) = 0.$$

Allora si ha anche

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0.$$

Dimostrazione. Ricordando la definizione di limite, è immediato verificare che $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x\to c} |g(x)| = 0$. Dalla (4.7) otteniamo

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq C|g(x)|, \qquad \forall x \in I(c) \setminus \{c\},$$

e concludiamo applicando il Teorema 4.5. □

Teorema 4.8 (**Secondo teorema del confronto - caso infinito**) *Siano date due funzioni f e g ed esista il limite*

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty.$$

Se esiste un intorno $I(c)$ di c nel quale siano definite entrambe le funzioni (tranne al più nel punto c) e tale che

$$f(x) \leq g(x), \qquad \forall x \in I(c) \setminus \{c\}, \tag{4.8}$$

allora si ha anche

$$\lim_{x\to c} g(x) = +\infty.$$

Un risultato analogo vale nel caso del limite $-\infty$.

Dimostrazione. È un semplice adattamento alle nuove ipotesi della dimostrazione del Teorema 4.5, e viene lasciata al lettore. □

Esempio 4.9

Si voglia calcolare il limite della funzione $g(x) = x + \sin x$ per x tendente a $+\infty$. Usando nuovamente la (4.6), si ha

$$x - 1 \leq x + \sin x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posto $f(x) = x - 1$, essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, deduciamo dal teorema che

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty.$$

□

4.1.3 Algebra dei limiti; forme di indeterminazione di tipo algebrico

Passiamo ora a studiare il comportamento del limite rispetto alle operazioni algebriche di somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni.

A tale scopo, estendiamo dapprima le operazioni aritmetiche sui numeri reali, considerando per quanto possibile anche i simboli $+\infty$ e $-\infty$. Poniamo pertanto per definizione:

$$\begin{aligned}
+\infty + s &= +\infty && (\text{se } s \in \mathbb{R} \text{ oppure } s = +\infty)\\
-\infty + s &= -\infty && (\text{se } s \in \mathbb{R} \text{ oppure } s = -\infty)\\
\pm\infty \cdot s &= \pm\infty && (\text{se } s > 0 \text{ oppure } s = +\infty)\\
\pm\infty \cdot s &= \mp\infty && (\text{se } s < 0 \text{ oppure } s = -\infty)\\
\frac{\pm\infty}{s} &= \pm\infty && (\text{se } s > 0)\\
\frac{\pm\infty}{s} &= \mp\infty && (\text{se } s < 0)\\
\frac{s}{0} &= \infty && (\text{se } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ oppure } s = \pm\infty)\\
\frac{s}{\pm\infty} &= 0 && (\text{se } s \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Non sono invece definite le espressioni

$$\pm\infty + (\mp\infty), \qquad \pm\infty - (\pm\infty), \qquad \pm\infty \cdot 0, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Il seguente risultato è di fondamentale importanza.

Teorema 4.10 (**Algebra dei limiti**) *Supponiamo che, per x tendente a c, la funzione f ammetta limite ℓ (finito o infinito) e la funzione g ammetta limite m (anch'esso finito o infinito). Allora, ogniqualvolta l'espressione a secondo membro è definita, si ha*

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\ell\pm m,$$
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\,g(x)\big)=\ell\,m,$$
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}$$

(*in quest'ultimo caso supponiamo inoltre che $g(x)\neq 0$ in un intorno di c escluso al più il punto c*).

Dimostrazione. Dimostriamo due di tali relazioni, rimandando la verifica delle altre all'Appendice A.2.1, pag. 453. Stabiliamo innanzitutto la relazione

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=\ell+m,$$

nel caso in cui ℓ ed m siano entrambi finiti. Fissato $\varepsilon>0$, consideriamo l'intorno di ℓ di raggio $\varepsilon/2$; per ipotesi, esiste un intorno $I'(c)$ di c tale che

$$\forall x\in\operatorname{dom} f,\qquad x\in I'(c)\setminus\{c\}\quad\Rightarrow\quad|f(x)-\ell|<\varepsilon/2.$$

Similmente, esiste un intorno $I''(c)$ di c tale che

$$\forall x\in\operatorname{dom} g,\qquad x\in I''(c)\setminus\{c\}\quad\Rightarrow\quad|g(x)-m|<\varepsilon/2.$$

Poniamo $I(c)=I'(c)\cap I''(c)$. Allora, se $x\in\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g$ appartiene a $I(c)\setminus\{c\}$, entrambe le disuguaglianze precedenti saranno soddisfatte; dunque, ricordando la disuguaglianza triangolare (1.1),

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(\ell+m)|&=|(f(x)-\ell)+(g(x)-m)|\\&\le|f(x)-\ell|+|g(x)-m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

il che dimostra la tesi.

Verifichiamo ora che

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\,g(x)\big)=+\infty$$

nel caso in cui $\ell=+\infty$ e m sia finito e >0. Fissato un numero reale $A>0$, consideriamo l'intorno di $+\infty$ di estremo inferiore $B=2A/m>0$. Per ipotesi, esiste un intorno $I'(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I'(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad f(x) > B.$$

D'altra parte, considerato l'intorno di m di raggio $m/2$, esiste un intorno $I''(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} g, \qquad x \in I'(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < m/2,$$

vale a dire $m/2 < g(x) < 3m/2$. Poniamo $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$. Allora, se $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ appartiene a $I(c) \setminus \{c\}$, entrambe le condizioni precedenti saranno soddisfatte; pertanto

$$f(x)\, g(x) > f(x)\, \frac{m}{2} > B\frac{m}{2} = A.$$

Dunque la tesi è dimostrata. □

Corollario 4.11 *Siano f e g due funzioni continue in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\, g(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (quest'ultima nel caso in cui $g(x_0) \neq 0$) sono continue in x_0.*

Dimostrazione. La continuità di f e g in x_0 equivale al fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ (si ricordi la (3.9)). È dunque sufficiente applicare il teorema precedente. □

Corollario 4.12 *Ogni funzione razionale è continua in tutto il suo dominio. In particolare, ogni funzione polinomiale è continua in tutto $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Abbiamo verificato al punto i) dell'Esempio 3.17 che la funzione costante $y = a$ e la funzione lineare $y = x$ sono continue su tutto $\mathbb{R}$; dunque, ogni funzione del tipo $y = ax^n$ (con $n \in \mathbb{N}$) è continua su $\mathbb{R}$. Conseguentemente, i polinomi, essendo somme di funzioni di questo genere, sono continui su $\mathbb{R}$; le funzioni razionali, essendo quozienti di polinomi, sono continue laddove il loro denominatore non si annulla. □

Esempi 4.13

i) Si voglia calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - 3\cos x}{5 + x \sin x} = \ell.$$

Numeratore e denominatore sono ottenuti attraverso operazioni algebriche su funzioni continue. Inoltre, il denominatore non si annulla in $x = 0$. Pertanto, sostituendo ad x il valore 0, otteniamo $\ell = -3/5$.

ii) Si voglia studiare il comportamento limite della funzione $y = \tan x$ per x tendente a $\frac{\pi}{2}$. Poiché

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

otteniamo dal teorema precedente

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Possiamo essere più precisi, studiando il segno della funzione in un intorno di $\frac{\pi}{2}$. Si ha $\sin x > 0$ in tutto un intorno di $\frac{\pi}{2}$, mentre $\cos x > 0$ (rispettivamente < 0) in un intorno sinistro (rispettivamente destro) di $\frac{\pi}{2}$. Pertanto, concludiamo che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}} \tan x = \mp\infty.$$

iii) Sia $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una funzione razionale, che supponiamo già ridotta ai minimi termini, nel senso che i polinomi P e Q non hanno fattori comuni. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ uno zero di Q, cioè $Q(x_0) = 0$; si ha certamente $P(x_0) \neq 0$, altrimenti P e Q avrebbero il fattore $(x - x_0)$ in comune. Dunque

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \infty.$$

Anche in questo caso, lo studio del segno di $R(x)$ in un intorno di x_0 permette di essere più precisi. Ad esempio, la funzione $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$ è positiva in un intorno sinistro di $x_0 = 1$ e negativa in un intorno destro, dunque

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - x} = \mp\infty;$$

al contrario, la funzione $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x + 1}$ è negativa in tutto un intorno di $x_0 = 1$ e pertanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 1} = -\infty. \qquad \square$$

Il Teorema 4.10 non fornisce alcuna indicazione sul comportamento limite di una espressione algebrica, nei tre casi di seguito elencati, in cui l'espressione viene detta **forma indeterminata** (o **forma di indeterminazione**) di tipo algebrico.

i) Relativamente all'espressione $f(x) + g(x)$ (rispettivamente $f(x) - g(x)$), quando entrambe le funzioni tendono a ∞ con segno discorde (rispettivamente concorde); una tale forma indeterminata viene indicata con il simbolo

$$\infty - \infty.$$

ii) Relativamente all'espressione $f(x)\,g(x)$, quando una funzione tende a ∞ e l'altra tende a 0; una tale forma indeterminata viene indicata con il simbolo

$$\infty \cdot 0.$$

iii) Relativamente all'espressione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, quando entrambe le funzioni tendono a ∞ oppure a 0; tali forme indeterminate vengono indicate rispettivamente con i simboli

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{0}{0}.$$

Quando ci troviamo di fronte a una forma indeterminata, non possiamo dire a priori quale sia il suo comportamento limite. Infatti, come mostrano gli esempi sotto riportati, ogni comportamento è possibile: limite infinito, limite finito diverso da 0 oppure uguale a 0, non esistenza del limite. Ogni forma indeterminata deve quindi essere studiata singolarmente, spesso con molta attenzione.

Stabiliremo nel seguito il comportamento limite di un certo numero di forme indeterminate notevoli. A partire da esse, usando i teoremi sui limiti presentati in questo paragrafo, sarà possibile lo studio di forme indeterminate più complesse. Altri strumenti per analizzare il comportamento limite di forme indeterminate saranno forniti più avanti: essi sono il confronto locale tra funzioni mediante i simboli di Landau (§ 5.1), il Teorema di de l'Hôpital (§ 6.11) e gli sviluppi di Taylor (§ 7.1 e seguenti).

Esempi 4.14

i) Supponiamo che x tenda a $+\infty$. Definiamo le funzioni $f_1(x) = x + x^2$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = x + \frac{1}{x}$, $f_4(x) = x + \sin x$. Poniamo inoltre $g(x) = x$. Usando il Teorema 4.10 oppure ricordando l'Esempio 4.9, è facile verificare che tutte le funzioni tendono a $+\infty$. Tuttavia, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f_1(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \big(f_2(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \big(f_3(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Invece, il limite di $f_4(x) - g(x) = \sin x$ non esiste, in quanto la funzione $\sin x$ è periodica e dunque per x tendente a $+\infty$ essa assume infinite volte tutti i valori compresi tra -1 e 1.

ii) Supponiamo ora che x tenda a 0. Definiamo le funzioni $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Poniamo inoltre $g(x) = x^2$. Tutte queste funzioni tendono a 0 (per quanto riguarda la f_4, è sufficiente applicare il Corollario 4.7). Tuttavia, si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} x = 0,$$
$$\lim_{x\to0} \frac{f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to0} \frac{f_3(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \frac{1}{x} = \infty,$$

mentre il quoziente $\dfrac{f_4(x)}{g(x)} = \sin\dfrac{1}{x}$ non ha limite per x tendente a 0 (per la dimostrazione vedasi la successiva Osservazione 4.19).

iii) Studiamo il comportamento di una funzione polinomiale

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

per $x \to \pm\infty$. Osserviamo che tale funzione può dar luogo ad una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$, a seconda del segno dei coefficienti e del grado dei monomi. Tale forma di indeterminazione si risolve raccogliendo il monomio di grado massimo x^n, vale a dire

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

L'espressione in parentesi tende ad a_n per $x \to \pm\infty$, pertanto

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n = \infty}$$

e il segno del limite si determina facilmente. Ad esempio,

$$\lim_{x\to-\infty} (-5x^3 + 2x^2 + 7) = \lim_{x\to-\infty} (-5x^3) = +\infty.$$

Consideriamo ora una funzione razionale già ridotta ai minimi termini

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad (a_n,\, b_m \neq 0,\ m > 0).$$

Per $x \to \pm\infty$, essa dà luogo ad una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Trattando numeratore e denominatore come sopra, si ottiene

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \infty & \text{se } n > m\,, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m\,, \\ 0 & \text{se } n < m\,. \end{cases}}$$

Ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{x - x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{-x^2} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^5 + 2x^3 - 7}{8x^5 - x^4 + 5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^5}{8x^5} = -\frac{1}{2}\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2 - x + 5}{-x^3 + 9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2}{-x^3} = 0.$$

iv) La funzione $y = \dfrac{\sin x}{x}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$ per $x \to 0$; abbiamo dimostrato al punto i) degli Esempi 4.6 che il suo limite vale 1. Da ciò, possiamo dedurre il comportamento della forma indeterminata $y = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ per $x \to 0$, anch'essa di tipo $\frac{0}{0}$. Infatti, abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}.$$

Ricordando la relazione trigonometrica fondamentale $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ed usando il Teorema 4.10, otteniamo che il primo limite vale

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=1.$$

Usando ancora il Teorema 4.10, deduciamo che il secondo limite vale $\frac{1}{2}$. Concludiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.}$$

□

Negli esempi precedenti abbiamo studiato il comportamento limite di alcune funzioni elementari in certi estremi del loro dominio. Per completezza, riportiamo nella tabella successiva i limiti più significativi delle principali funzioni elementari, già considerate nel § 2.6. Per le relative giustificazioni si veda l'Appendice A.2.2, pag. 455.

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha=0\qquad \alpha>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha=0\,,\qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha=+\infty\qquad \alpha<0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}x^{n-m}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=0\qquad a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0\,,\qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty\qquad a<1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty\qquad a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty\qquad a<1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sin x\,,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\cos x\,,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\tan x\qquad \text{non esistono}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^\pm}\tan x=\mp\infty\,,\qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{x\to\pm 1}\arcsin x=\pm\frac{\pi}{2}=\arcsin(\pm 1)$$

$$\lim_{x\to+1}\arccos x=0=\arccos 1\,,\qquad \lim_{x\to-1}\arccos x=\pi=\arccos(-1)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\frac{\pi}{2}$$

4.1.4 Teorema di sostituzione

Il seguente risultato è di grande rilevanza teorica e nello stesso tempo fornisce una regola utilissima per il calcolo dei limiti.

Teorema 4.15 *Supponiamo che esista (finito o infinito)*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell. \tag{4.9}$$

Sia poi g una funzione definita in un intorno di ℓ (escluso al più il punto ℓ) e tale che

i) se $\ell \in \mathbb{R}$, g è continua in ℓ;

ii) se $\ell = +\infty$ oppure $\ell = -\infty$, esiste (finito o infinito) $\lim_{y\to\ell} g(y)$.

Allora, esiste il limite per x tendente a c della funzione composta $g \circ f$ e si ha

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = \lim_{y\to\ell} g(y). \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Poniamo $m = \lim_{y\to\ell} g(y)$ (notiamo che nel caso *i)* sarà $m = g(\ell)$). Fissato un qualunque intorno $I(m)$ di m, grazie alle ipotesi *i)* oppure *ii)*, esisterà un intorno $I(\ell)$ di ℓ tale che

$$\forall y \in \operatorname{dom} g, \qquad y \in I(\ell) \quad \Rightarrow \quad g(y) \in I(m).$$

Osserviamo che possiamo scrivere $I(\ell)$ anziché $I(\ell)\setminus\{\ell\}$ in quanto nel caso *i)* g è continua in ℓ (si ricordi la (3.7)), mentre nel caso *ii)* ℓ non appartiene a $I(\ell)$.
Dato tale intorno $I(\ell)$ di ℓ, dall'ipotesi (4.9) deduciamo l'esistenza di un intorno $I(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I(\ell).$$

Combiniamo le due implicazioni precedenti. Ricordiamo che $x \in \operatorname{dom} g \circ f$ significa che $x \in \operatorname{dom} f$ e $y = f(x) \in \operatorname{dom} g$; pertanto otteniamo

$$\forall x \in \operatorname{dom} g \circ f, \qquad x \in I(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) \in I(m).$$

Data l'arbitrarietà di $I(m)$, ciò significa che

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = m. \qquad \square$$

Osservazione 4.16 Un'altra condizione che garantisce la tesi del teorema è la seguente:

i') se $\ell \in \mathbb{R}$, esiste un intorno $I(c)$ di c in cui $f(x) \neq \ell$ per ogni $x \neq c$ ed esiste (finito o infinito) $\lim_{y\to\ell} g(y)$.

La dimostrazione è analoga a quella precedente. □

Notiamo che nel caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$ e g sia continua in ℓ (caso *i)*), si ha $\lim_{y\to\ell} g(y) = g(\ell)$ e dunque la relazione (4.10) può essere scritta come

$$\boxed{\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x)).} \tag{4.11}$$

Si dice, in modo impreciso ma efficace, che una funzione continua *commuta* (cioè si scambia) con il simbolo di limite.

Il Teorema 4.15 implica che la composizione di funzioni continue è continua, come precisato dal seguente enunciato.

Corollario 4.17 *Sia f continua in x_0 e si ponga $y_0 = f(x_0)$. Sia poi g una funzione definita in un intorno di y_0 e continua in y_0. Allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Dalla (4.11) abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0),$$

il che precisamente equivale alla tesi. □

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione del Teorema di sostituzione e del suo corollario.

Esempi 4.18

i) La funzione $h(x) = \sin(x^2)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Infatti, è la composizione delle due funzioni continue $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sin y$.

ii) Si voglia calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Poniamo $f(x) = x^2$ e

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y}{y} & \text{se } y \neq 0, \\ 1 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, mentre è già stato osservato che la funzione g è continua nell'origine. Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

iii) Studiamo il comportamento limite della funzione $h(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$ per x tendente a 1. Posto, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, abbiamo $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$. Posto invece $g(y) = \arctan y$, abbiamo (si ricordi la tabella a pag. 106) $\lim_{y\to\pm\infty} g(y) = \pm\frac{\pi}{2}$. Dunque

$$\lim_{x\to 1^\pm} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{y\to\pm\infty} g(y) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

iv) Si voglia calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \log\sin\frac{1}{x}\,.$$

Posto $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, abbiamo $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; si osservi che $f(x) > 0$, per ogni $x > \frac{1}{\pi}$. Posto $g(y) = \log y$ si ha $\lim_{y\to 0^+} g(y) = -\infty$ e dunque, per l'Osservazione 4.16, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \log\sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^+} g(y) = -\infty\,.$$

□

Osservazione 4.19 Il Teorema di sostituzione 4.15 può essere facilmente esteso al caso in cui la funzione f sia sostituita da una qualunque successione $a : n \mapsto a_n$ che ammetta limite (finito o infinito)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

Sotto le stesse ipotesi sulla funzione g fatte nell'enunciato del Teorema, si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{y\to\ell} g(y).$$

Questo risultato è spesso utile 'in negativo', ossia fornisce un **Criterio di non esistenza del limite** di una funzione: *se esistono due successioni $a : n \mapsto a_n$ e $b : n \mapsto b_n$ aventi entrambe limite ℓ e tali che*

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(b_n),$$

allora necessariamente g non può avere limite quando l'argomento tende a ℓ.

Ad esempio, con questo criterio possiamo dimostrare che la funzione $y = \sin x$ non ha limite per $x \to +\infty$: se definiamo le successioni $a_n = 2n\pi$ e $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{n\to\infty} \sin b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

In modo analogo, si può vedere che la funzione $y = \sin\frac{1}{x}$ non ammette, per $x \to 0$, né limite destro né limite sinistro. □

4.2 Altri limiti notevoli; forme indeterminate di tipo esponenziale

Ricordiamo il limite fondamentale (3.3). In luogo della successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, consideriamo ora la funzione di variabile reale

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

che è definita quando $1 + \frac{1}{x} > 0$, cioè in $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. La proprietà seguente mostra che il comportamento di tale funzione per x tendente ad infinito è uguale a quello della successione. Per la dimostrazione si veda l'Appendice A.2.3, pag. 459.

Proprietà 4.20 *Vale il seguente risultato*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Partendo da tale formula e applicando varie proprietà dei limiti, otteniamo nuovi limiti notevoli. Così, la sostituzione $y = \frac{x}{a}$, con $a \neq 0$, fornisce

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ay} = \left[\lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a = \mathrm{e}^a.$$

Invece, con la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \mathrm{e}.$$

Usando la continuità della funzione logaritmo e la relazione (4.11), abbiamo, per ogni $a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{1/x} = \log_a \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \log_a \mathrm{e} = \frac{1}{\log a}.$$

In particolare, per $a = \mathrm{e}$ otteniamo

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1.}$$

Osserviamo poi che la relazione $a^x - 1 = y$ equivale a $x = \log_a(1 + y)$; inoltre, $y \to 0$ se $x \to 0$. Con tale sostituzione, abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a(1 + y)} = \left[\lim_{y \to 0} \frac{\log_a(1 + y)}{y}\right]^{-1} = \log a. \tag{4.12}$$

In particolare, per $a = \mathrm{e}$ si ha il limite fondamentale

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.}$$

Infine, ponendo $1 + x = \mathrm{e}^y$ ed osservando che ancora $y \to 0$ per $x \to 0$, otteniamo, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha y} - 1}{\mathrm{e}^y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha y} - 1}{y} \frac{y}{\mathrm{e}^y - 1} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{(\mathrm{e}^\alpha)^y - 1}{y} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\mathrm{e}^y - 1} = \log \mathrm{e}^\alpha = \alpha. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Per comodità dell'allievo, riportiamo tutti i limiti notevoli ottenuti finora nella sottostante lista.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \ (a > 0); \text{ in particolare, } \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad (a > 0); \qquad \text{in particolare, } \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Ritorniamo alla funzione $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Posto $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ e $g(x) = x$, essa è del tipo

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)}.$$

In generale, una tale espressione può dar luogo a nuove **forme indeterminate** per x tendente a un valore limite c. Supponiamo infatti che f e g siano funzioni definite in un intorno di c, tranne eventualmente in c stesso, e che ammettano

limite per x tendente a c. Supponiamo inoltre che $f(x) > 0$ in tutto un intorno di c (tranne al più in c), di modo che la funzione h sia definita in un intorno di c (tranne al più in c). Per studiare il comportamento limite di h, è conveniente fare ricorso all'identità

$$f(x) = \mathrm{e}^{\log f(x)},$$

dalla quale si ottiene l'espressione

$$h(x) = \mathrm{e}^{g(x)\log f(x)}.$$

Usando la continuità della funzione esponenziale e la (4.11), abbiamo allora che

$$\boxed{\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x\to c}[g(x)\log f(x)]\right).}$$

In altre parole, lo studio del comportamento limite della funzione $h(x)$ è riconducibile a quello della funzione $g(x)\log f(x)$ a esponente. Una forma indeterminata per tale esponente definisce quindi una **forma indeterminata** di tipo esponenziale per la funzione $h(x)$. Precisamente, ricordando il comportamento della funzione logaritmo, si possono avere le seguenti situazioni:

i) Se g tende a ∞ ed f tende a 1 (e dunque $\log f$ tende a 0), si ha ad esponente una forma indeterminata di tipo $\infty \cdot 0$; in tal caso diciamo che la funzione h presenta una forma indeterminata di tipo

$$1^\infty.$$

ii) Se g tende a 0 ed f tende a 0 (e dunque $\log f$ tende a $-\infty$), si ha di nuovo ad esponente una forma indeterminata di tipo $\infty \cdot 0$; in tal caso diciamo che la funzione h presenta una forma indeterminata di tipo

$$0^0.$$

iii) Se g tende a 0 ed f tende a $+\infty$ (e dunque $\log f$ tende a $+\infty$), si ha ancora ad esponente una forma indeterminata di tipo $\infty \cdot 0$; in tal caso diciamo che la funzione h presenta una forma indeterminata di tipo

$$\infty^0.$$

Esempi 4.21

i) La funzione $h(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ per $x \to \pm\infty$ è una forma indeterminata di tipo 1^∞, il cui limite è il numero e.

ii) La funzione $h(x) = x^x$ per $x \to 0^+$ è una forma indeterminata di tipo 0^0. Si dimostra nel Capitolo 6 che $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x = 0$ e dunque $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$.

iii) La funzione $h(x) = x^{1/x}$ per $x \to +\infty$ è una forma indeterminata di tipo ∞^0. Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ e l'identità $\log\frac{1}{y} = -\log y$, si ottiene $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = -\lim\limits_{y\to 0^+} y\log y = 0$ e dunque $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. □

Un errore non infrequente, e spesso dalle conseguenze catastrofiche, è quello di calcolare dapprima il limite di una delle due funzioni f oppure g, sostituire poi il valore del limite alla corrispondente funzione e calcolare infine il limite dell'espressione risultante. In altri termini, **può essere sbagliato** calcolare il limite per x tendente a c della forma indeterminata $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$ come

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^m, \qquad \text{avendo prima calcolato } \; m = \lim_{x\to c} g(x),$$

oppure come

$$\lim_{x\to c} \ell^{\,g(x)}, \qquad \text{avendo prima calcolato } \; \ell = \lim_{x\to c} f(x).$$

Ad esempio, se seguissimo questa seconda strada per calcolare il limite per $x \to \pm\infty$ di $h(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, troveremmo prima che $\ell = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ e poi che $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1^x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 = 1$. Saremmo quindi indotti a concludere che h ha come limite 1, mentre già sappiamo che il valore corretto del limite è il numero e.

4.3 Proprietà globali delle funzioni continue

Nei paragrafi precedenti, abbiamo stabilito varie proprietà locali di una funzione nell'intorno di un punto della retta reale oppure di un punto all'infinito, esaminando il suo comportamento limite. Consideriamo ora una funzione continua su un intervallo della retta reale e stabiliamo alcune rilevanti proprietà di natura globale, vale a dire relative al suo comportamento nell'intervallo.

Iniziamo con una semplice definizione.

Definizione 4.22 *Data una funzione reale f, chiamiamo* **zero** *di f ogni punto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ in cui la funzione si annulla.*

Ad esempio, gli zeri della funzione $y = \sin x$ sono tutti i multipli di π, ossia gli elementi dell'insieme $\{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Notiamo che il problema di trovare le soluzioni di una equazione del tipo

$$f(x) = 0$$

equivale alla ricerca degli zeri della funzione $y = f(x)$. È dunque importante avere a disposizione metodi, tanto analitici quanto numerici, per la determinazione degli zeri di una funzione, o, quanto meno, per la loro localizzazione approssimata.

Il seguente risultato fornisce una semplice condizione che garantisce l'esistenza di uno zero di una funzione in un intervallo.

Figura 4.5. Il Teorema di esistenza degli zeri

Teorema 4.23 (**di esistenza degli zeri**) *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, cioè se f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo, allora esiste uno zero di f nell'intervallo aperto (a, b).*
Se inoltre f è strettamente monotona in $[a, b]$, allora lo zero è unico nell'intervallo.

Dimostrazione. Nel corso della dimostrazione faremo uso di alcune proprietà delle successioni che sono raccolte nel successivo § 5.4. Non è restrittivo supporre che $f(a) < 0 < f(b)$. Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e sia $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio dell'intervallo $[a_0, b_0]$. Calcoliamo $f(c_0)$; abbiamo 3 possibilità. Se $f(c_0) = 0$ allora $x_0 = c_0$ è uno zero di f e la dimostrazione è terminata. Altrimenti, se $f(c_0) > 0$, poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$, ovvero consideriamo la metà sinistra dell'intervallo $[a_0, b_0]$; se invece $f(c_0) < 0$, poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$, ovvero consideriamo la metà destra dell'intervallo $[a_0, b_0]$. In entrambi i casi, abbiamo costruito un nuovo intervallo $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ tale che

$$f(a_1) < 0 < f(b_1) \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Iterando tale procedimento o si perviene, in un numero finito di passi, ad uno zero di f oppure si costruisce una successione di infiniti intervalli $[a_n, b_n]$ che soddisfano le seguenti proprietà:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots ,$$
$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \quad \text{e} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

(la giustificazione rigorosa dell'esistenza di tale successione richiede l'uso del Principio di induzione; si veda l'Appendice A.1, pag. 449). In questo secondo caso, mostriamo che esiste un unico punto x_0 contenuto in tutti gli intervalli e che tale punto è uno zero di f. A tale scopo, osserviamo che le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ soddisfano

$$a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0.$$

Pertanto la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente e limitata mentre la successione $\{b_n\}$ è monotona decrescente e limitata. Applicando il Teorema 3.9, esistono $x_0^-, x_0^+ \in [a, b]$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0^- \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = x_0^+.$$

D'altro canto, usando l'Esempio 5.18 i),

$$x_0^+ - x_0^- = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

e dunque $x_0^- = x_0^+$. Indichiamo con x_0 tale valore. Usando ora la continuità della funzione f e il Teorema di sostituzione (pag. 144), risulta

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0).$$

Infine, ricordando che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e applicando il primo Teorema del confronto (pag. 144) alle successioni $\{f(a_n)\}$ e $\{f(b_n)\}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0;$$

dunque, dovendo essere $0 \leq f(x_0) \leq 0$, si ottiene $f(x_0) = 0$.
Se f è strettamente monotona in $[a, b]$, allora è iniettiva per la Proposizione 2.8 e dunque lo zero è unico. □

Alcuni commenti sul teorema precedente sono utili. Osserviamo innanzitutto che senza l'ipotesi di continuità della funzione nell'intervallo chiuso $[a, b]$ non sarebbe possibile dedurre l'esistenza di uno zero dalla sola condizione $f(a)f(b) < 0$. Ad esempio, la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x = 0, \\ +1 & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo ma non si annulla mai; essa presenta una discontinuità di salto nel punto $a = 0$.

D'altro canto, l'ipotesi $f(a)f(b) < 0$ è soltanto sufficiente, e non necessaria, per l'esistenza di uno zero. Ad esempio, la funzione continua $f(x) = (2x - 1)^2$

si annulla all'interno dell'intervallo $[0,1]$ pur essendo strettamente positiva negli estremi dell'intervallo.

Notiamo infine che la procedura usata nella dimostrazione del teorema può essere tradotta in un algoritmo di calcolo approssimato dello zero, noto nel Calcolo Numerico come *Metodo di bisezione*.

Vediamo un primo esempio di applicazione del Teorema di esistenza degli zeri.

Esempio 4.24

Consideriamo la funzione $f(x) = x^4 + x^3 - 1$ nell'intervallo $[0,1]$. Essendo un polinomio, la funzione è continua. Inoltre si ha $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$. Pertanto, esiste almeno uno zero di f in $[0,1]$. Tale zero è unico in quanto f è strettamente crescente nell'intervallo (perché somma delle funzioni strettamente crescenti $y = x^4$ e $y = x^3$ e della funzione costante $y = -1$). □

Diamo ora alcune utili estensioni del teorema precedente.

Corollario 4.25 *Sia f continua in un intervallo I. Supponiamo che f ammetta, per x tendente a ciascuno degli estremi dell'intervallo, limiti (finiti o infiniti) diversi da 0 e di segno opposto. Allora f ha uno zero in I; tale zero è unico se f è strettamente monotona in I.*

Dimostrazione. Il risultato segue facilmente dal Teorema 4.2 (di permanenza del segno) e dal Teorema 4.23 (di esistenza degli zeri). Per maggiori dettagli si veda l'Appendice A.3.2, pag. 464. □

Esempio 4.26

Consideriamo la funzione $f(x) = x + \log x$, definita nell'intervallo $I = (0, +\infty)$. Essa è continua e strettamente crescente in I, in quanto somma delle due funzioni $y = x$ e $y = \log x$, che hanno le stesse proprietà. Poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la funzione f ha esattamente uno zero nel suo dominio. □

Corollario 4.27 *Siano f e g due funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$, allora esiste almeno un punto x_0 nell'intervallo aperto (a,b) tale che*

$$f(x_0) = g(x_0). \tag{4.14}$$

Dimostrazione. Introduciamo la funzione ausiliaria $h(x) = f(x) - g(x)$. Essa è continua in $[a,b]$ in quanto differenza di due funzioni continue. Inoltre, per ipotesi, si ha $h(a) = f(a) - g(a) < 0$ e $h(b) = f(b) -$

Figura 4.6. Illustrazione del Corollario 4.27

$g(b) > 0$. Pertanto h soddisfa le ipotesi del Teorema di esistenza degli zeri. Esiste dunque in (a, b) un punto x_0 tale che $h(x_0) = 0$, il che equivale precisamente alla (4.14).
Osserviamo che se h risulta strettamente crescente in $[a, b]$, allora la soluzione della (4.14) è unica nell'intervallo. □

Esempio 4.28

Vogliamo trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cos x = x. \tag{4.15}$$

Poiché $-1 \leq \cos x \leq 1$ per ogni x reale, non vi sono soluzioni per $x < -1$ o per $x > 1$. Inoltre, non vi sono soluzioni nell'intervallo $[-1, 0)$ in quanto ivi $\cos x$ è strettamente positivo mentre x è strettamente negativo. Dunque, le eventuali soluzioni vanno cercate nell'intervallo $[0, 1]$. Le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = \cos x$ sono continue in tale intervallo; inoltre, $f(0) = 0 < 1 = g(0)$ e $f(1) = 1 > \cos 1 = g(1)$ (la funzione coseno assume il valore 1 solo per i multipli di 2π). Pertanto, applicando il corollario precedente, deduciamo che l'equazione (4.15) ha una soluzione nell'intervallo $(0, 1)$. Essa è l'unica soluzione, in quanto f è strettamente crescente e g è strettamente decrescente in $[0, 1]$, e dunque la differenza $h(x) = f(x) - g(x)$ è strettamente crescente in tale intervallo. □

Se applichiamo il corollario precedente nel caso in cui una delle due funzioni sia costante, otteniamo il seguente risultato.

Teorema 4.29 (**dei valori intermedi**) *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Figura 4.7. Il Teorema dei valori intermedi

Dimostrazione. Se $f(a) = f(b)$ il risultato è banale; diversamente, supponiamo dapprima che $f(a) < f(b)$. Sia z un qualunque valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ e definiamo la funzione costante $g(x) = z$. Dalle disuguaglianze $f(a) < z < f(b)$, otteniamo immediatamente $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Pertanto, se applichiamo il Corollario 4.27 nell'intervallo $[a, b]$ alle due funzioni f e g, otteniamo l'esistenza di un punto x_0 in $[a, b]$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = z$.
Se $f(a) > f(b)$, si scambiano i ruoli delle funzioni f e g. □

Il Teorema dei valori intermedi ha, tra le sue conseguenze, l'importante fatto che una funzione continua trasforma intervalli in intervalli, come precisato nel seguente corollario.

Corollario 4.30 *Sia f una funzione continua su un intervallo I. Allora l'immagine $f(I)$ di I attraverso la funzione è ancora un intervallo di estremi* $\inf_I f$ *e* $\sup_I f$.

Dimostrazione. Osserviamo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se presi comunque due suoi punti $\alpha < \beta$ l'intervallo di estremi $[\alpha, \beta]$ è contenuto nel sottoinsieme stesso.
Siano dunque $y_1 < y_2$ due punti di $f(I)$; allora esistono in I due punti x_1 e x_2, necessariamente distinti, tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Detto $J \subseteq I$ l'intervallo chiuso di estremi x_1 e x_2, è sufficiente applicare il Teorema dei valori intermedi alla funzione f ristretta all'intervallo J, ottenendo $[y_1, y_2] \subseteq f(J) \subseteq f(I)$. L'immagine $f(I)$ è dunque un intervallo e, in base alla Definizione 2.3, i suoi estremi sono rispettivamente $\inf_I f$ e $\sup_I f$. □

Ognuno degli estremi dell'intervallo $f(I)$ può essere finito o infinito, e può appartenere o meno all'intervallo; se appartiene, la funzione ammette rispettivamente minimo o massimo su I.

Se I è un intervallo aperto o semiaperto, la sua immagine $f(I)$ può essere un intervallo di qualunque tipo. Vediamo alcuni esempi. Se consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$ nell'intervallo aperto e limitato $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, l'immagine $f(I)$ è l'intervallo aperto e limitato $(-1, 1)$. Ma se, per la stessa funzione, consideriamo l'intervallo aperto e limitato $(0, 2\pi)$, allora l'immagine è l'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$. Se invece consideriamo la funzione $f(x) = \tan x$ nell'intervallo aperto e limitato $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, l'immagine è l'intervallo illimitato $(-\infty, +\infty)$. Semplici esempi possono essere costruiti anche nel caso in cui I sia un intervallo illimitato.

Se però I è un intervallo chiuso e limitato, allora la sua immagine attraverso una funzione continua non può che essere un intervallo chiuso e limitato. Precisamente, abbiamo il seguente fondamentale risultato, che interverrà più volte nel seguito. Per la sua dimostrazione si veda l'Appendice A.3.2, pag. 463.

Teorema 4.31 (**di Weierstrass**) *Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f è limitata su $[a, b]$ e ivi assume valori minimo e massimo*

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad e \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Dunque,

$$f([a, b]) = [m, M]. \tag{4.16}$$

Figura 4.8. Il Teorema di Weierstrass

Figura 4.9. Grafico di una funzione continua e invertibile (a sinistra) e della sua inversa (a destra)

Chiudiamo questo paragrafo con due risultati relativi alla proprietà di invertibilità di una funzione (per le dimostrazioni si veda l'Appendice A.3.2, pag. 465). Ricordiamo che nel § 2.4 abbiamo visto che se una funzione è strettamente monotona, allora è iniettiva (cioè invertibile); abbiamo anche osservato che, in generale, non vale il viceversa. Tuttavia, per le funzioni continue, i concetti di monotonia stretta e di iniettività coincidono. Inoltre, quando è definita, la funzione inversa è continua.

Teorema 4.32 *Sia f una funzione continua su un intervallo I. Allora f è iniettiva su I se e solo se f è strettamente monotona su I.*

Teorema 4.33 *Sia f una funzione continua e invertibile su un intervallo I. Allora la funzione inversa f^{-1} è continua sull'intervallo $J = f(I)$.*

Il Teorema 4.33 garantisce ad esempio la continuità delle funzioni trigonometriche inverse $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ e $y = \arctan x$ in tutto il loro dominio di definizione, e della funzione $y = \log_a x$ su $\mathbb{R}_+$ in quanto funzione inversa dell'esponenziale $y = a^x$. Tali risultati sono già stati anticipati nella Proposizione 3.20.

4.4 Esercizi

1. *Utilizzando i teoremi del confronto, calcolare i seguenti limiti:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \sin x\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x^2}$

2. *Calcolare i seguenti limiti:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4-2x^3+5x}{x^5-x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^3-2x+5}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+x}{2x^2-x+3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x-7}{5x^2-2x+3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+x}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$

ℓ) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$

3. *Utilizzando i limiti notevoli, calcolare i seguenti limiti:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x}{1-\cos x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x-\sin 3x}{4x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{2x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\tan x)-1}{\tan x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos 3x+1}$

ℓ) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$

4. *Calcolare i seguenti limiti:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{3^x-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\log x-1}{x-e}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{2x}-1}{2x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{e^x-e}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$

5. *Calcolare i seguenti limiti:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2} - 2x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x^5} - 1}$

$\boxed{\text{b)}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$

$\boxed{\text{c)}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{\sin x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$

$\boxed{\text{e)}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\operatorname{cotan} x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$

$\boxed{\text{h)}}$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x\sin x}\right)$

$\boxed{\ell)}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)$

$\boxed{\text{m)}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(2+\sin x)$

n) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{\sin x}$

6. *Determinare il dominio e il comportamento limite agli estremi del dominio delle seguenti funzioni:*

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2}$

$\boxed{\text{b)}}$ $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x^4}$

$\boxed{\text{c)}}$ $f(x) = \log\left[1 + \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)\right]$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}\mathrm{e}^{-x^2}$

4.4.1 Soluzioni

1. *Limiti:*

a) 0;

b) $+\infty$.

c) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x - \sin x}{3x + \cos x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2 - \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(3 + \frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{2}{3}$$

in quanto $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ per il Corollario 4.7.

d) Dalle disuguaglianze $[x] \le x < [x] + 1$ (Esempio 2.1 vii)), si deduce immediatamente che $x - 1 < [x] \le x$, da cui per $x > 0$ si ha

$$\frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \le 1\,;$$

dunque, applicando il secondo Teorema del confronto 4.5, si conclude che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1.$$

e) 0.

f) Innanzitutto osserviamo che $f(x) = \dfrac{x - \tan x}{x^2}$ è una funzione dispari, pertanto $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Sia $0 < x < \frac{\pi}{2}$, dalla relazione

$$\sin x < x < \tan x$$

(per una dimostrazione si veda l'Esempio 4.6 i)) si ha

$$\sin x - \tan x < x - \tan x < 0 \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\sin x - \tan x}{x^2} < \frac{x - \tan x}{x^2} < 0.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \tan x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x\,(\cos x - 1)}{x^2 \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos x - 1}{x^2} = 0\,,$$

per il secondo Teorema del confronto 4.5, concludiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \tan x}{x^2} = 0$$

e dunque anche il limite cercato vale 0.

2. *Limiti:*

a) -5; b) 0.

c) Si ha

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 + x^2 + x}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty\,.$$

d) $\frac{2}{5}$.

e) Razionalizzando si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3} + 3x} &= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3} - 3x)}{6x^2 + 3 - 9x^2} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3} - 3x)}{3(1-x)(1+x)} = 1\,.\end{aligned}$$

f) Ricordando la formula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x - 2} &= \lim_{x\to 2} \frac{10 - x - 8}{(x-2)(\sqrt[3]{(10-x)^2} + 2\sqrt[3]{10-x} + 4)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{\sqrt[3]{(10-x)^2} + 2\sqrt[3]{10-x} + 4} = -\frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

g) 0; h) 1; i) 0.

ℓ) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}{x\left(4+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

3. *Limiti:*

a) 0; b) 2.

c) Si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{4x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{4x}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}\,.$$

d) Si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{2x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2x}=+\infty\,.$$

e) $\frac{1}{2}$.

f) Ponendo $y=\tan x$, si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\tan x)-1}{\tan x}=\lim_{y\to0}\frac{\cos y-1}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\cos y-1}{y^2}\cdot y=0\,.$$

g) Ponendo $y=1-x$, si ha

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}=\lim_{y\to0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-y)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}=\frac{\pi}{2}\,.$$

h) $-\frac{1}{2}$; i) $\frac{1}{9}$.

ℓ) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{1+\tan x-1+\tan x}{\sin x\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}\right)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\,.\end{aligned}$$

4. *Limiti:*

a) $\frac{1}{\log 3}$; b) $\frac{2}{3}$.

c) Ponendo $y=x-\mathrm{e}$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\mathrm{e}}\frac{\log x-1}{x-\mathrm{e}}&=\lim_{y\to0}\frac{\log(y+\mathrm{e})-1}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\log\mathrm{e}\,(1+y/\mathrm{e})-1}{y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{\log(1+y/\mathrm{e})}{y}=\frac{1}{\mathrm{e}}\,.\end{aligned}$$

In alternativa, ponendo $z = x/\mathrm{e}$, si ha

$$\lim_{x\to\mathrm{e}} \frac{\log x - 1}{x - \mathrm{e}} = \lim_{z\to 1} \frac{\log(\mathrm{e}z) - 1}{\mathrm{e}(z-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}} \lim_{z\to 1} \frac{\log z}{z-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,.$$

d) 1.

e) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{2\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\mathrm{e}^{2x} - 1) + 1}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} 2\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} = 2 + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty\,.\end{aligned}$$

f) Ponendo $y = x - 1$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}} &= \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{x-1} - 1)} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{\mathrm{e}(\mathrm{e}^y - 1)} = \frac{1}{\mathrm{e}} \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} \cdot \frac{y}{\mathrm{e}^y - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,.\end{aligned}$$

g) $\frac{3}{5}$.

h) Ponendo $y = x + 1$ e ricordando il limite (4.13), si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17} - 2} &= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sqrt[4]{y+16} - 2} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{2\left(\sqrt[4]{1 + \frac{y}{16}} - 1\right)} \\ &= \frac{16}{2} \lim_{y\to 0} \frac{y/16}{\sqrt[4]{1 + \frac{y}{16}} - 1} = 8 \cdot 4 = 32\,.\end{aligned}$$

5. *Limiti:*

a) $\frac{1}{2}$.

b) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{x}{\sin x} = 2\,.$$

c) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot x = 0\,.$$

d) 1.

e) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-2} &= \exp\left(\lim_{x\to +\infty} (x-2) \log \frac{x-1}{x+3}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x\to +\infty} (x-2) \log \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)\right) = \mathrm{e}^L\,.\end{aligned}$$

Ponendo $y = \dfrac{1}{x+3}$, risulta $x = \dfrac{1}{y} - 3$ e dunque

$$L = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{1}{y} - 5\right) \log(1-4y) = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\log(1-4y)}{y} - 5\log(1-4y)\right) = -4\,;$$

pertanto il limite cercato vale e^{-4}.

f) e; g) $2\sqrt{5}$.

h) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^{-x}\left(3^{2x}-1\right)}{3^{-x}\left(3^{2x}+1\right)} = -1\,.$$

i) $-\frac{1}{2}$.

ℓ) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{2}{x}\cdot\frac{\sin\left(\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)}{\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{2}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)}{\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{2}{x}}$$
$$= L_1\cdot L_2\,.$$

Ponendo $y = \frac{1}{x}$, il primo limite vale

$$L_1 = \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin 2y}{y} = 2\,;$$

ponendo $t = \mathrm{e}^{-x}\sin\frac{2}{x}$ e osservando che $t \to 0$ per $x \to +\infty$ grazie al Corollario 4.7, il secondo limite vale

$$L_2 = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1\,.$$

In definitiva il limite cercato vale 2.

m) Poiché $-1 \le \sin x \le 1$, si ha $1 \le 2 + \sin x \le 3$ da cui $x \le x(2+\sin x)$ per $x > 0$. Osservando che $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ e applicando il secondo Teorema del confronto 4.8, si ottiene che il limite cercato vale $+\infty$.

n) $-\infty$.

6. *Dominio e limiti di funzioni:*

a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$,
$\lim\limits_{x\to-2^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

b) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^4}\cdot\frac{x^4}{1+x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^4} = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^4} = 0\,.$$

c) La funzione è definita per $x \neq 0$ (si osservi che $1 + \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\right) > 0$ sempre). Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right) = \log 1 = 0\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \log \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right) = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \log \lim_{x\to0^-} \left(1 + \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right) = \log 1 = 0\,,$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \log \lim_{x\to0^+} \left(1 + \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right) = +\infty\,.$$

d) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

5

Confronto locale di funzioni. Successioni e serie numeriche

Nella prima parte del capitolo, impariamo a confrontare il comportamento relativo di due funzioni nell'intorno di un punto. A tale fine, introduciamo opportuni simboli stenografici, noti come simboli di Landau, che agevolano la descrizione delle possibili tipologie di comportamento. Di particolare rilievo è il confronto tra funzioni che tendono a 0 oppure a ∞.

Nella seconda parte, vengono ripresi alcuni risultati sui limiti, visti in generale per le funzioni, e adattati al caso particolare delle successioni. Si presentano tecniche specifiche per analizzare il comportamento limite delle successioni. Infine, si introducono le serie numeriche e si forniscono i principali strumenti per lo studio della loro convergenza.

5.1 Simboli di Landau

Come già fatto precedentemente, indichiamo con c uno dei simboli x_0 (numero reale), oppure x_0^+, x_0^-, oppure ancora $+\infty$, $-\infty$. Per 'intorno di c' si intenderà un intorno di uno di tali simboli, come definito precedentemente.

Siano dunque f e g due funzioni definite nell'intorno di c, tranne eventualmente nel punto c; inoltre, sia $g(x) \neq 0$ per $x \neq c$. Supponiamo che esista, finito o infinito,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{5.1}$$

Diamo le seguenti definizioni.

Definizione 5.1 *Se ℓ è finito, diciamo che f è* **controllata da** *g per x tendente a c; in tal caso, usiamo il simbolo*

$$f = O(g), \qquad x \to c,$$

che leggiamo "f è **o grande** *di g per x tendente a c".*

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_5, © Springer-Verlag Italia 2014

Tale proprietà può essere ulteriormente precisata, distinguendo i seguenti casi:

a) Se ℓ è finito e $\neq 0$, diciamo che f è **dello stesso ordine di grandezza di** *g per x tendente a c; in tal caso, usiamo il simbolo*

$$f \asymp g, \qquad x \to c,$$

che leggiamo "f è **equigrande** *con g per x tendente a c". Come caso particolare notevole, abbiamo:*

b) Se $\ell = 1$, diciamo che f è **equivalente a** *g per x tendente a c; in tal caso, usiamo il simbolo*

$$f \sim g, \qquad x \to c.$$

c) Infine, se $\ell = 0$, diciamo che f è **trascurabile rispetto a** *g per x tendente a c; in tal caso, usiamo il simbolo*

$$f = o(g), \qquad x \to c,$$

che leggiamo "f è **o piccolo** *di g per x tendente a c".*

Dalle definizioni precedenti resta escluso il caso in cui ℓ sia infinito. Ma, se ciò accade, allora

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\ell} = 0,$$

e dunque possiamo dire che $g = o(f)$ per $x \to c$.

I simboli O, $\asymp$, $\sim$, o sono detti **simboli di Landau**.

Osservazione 5.2 La definizione dei simboli di Landau può essere data sotto ipotesi più generali di quella da noi qui considerata, l'esistenza del limite (5.1). Ad esempio, l'espressione $f = O(g)$ per $x \to c$ può essere estesa a significare che esiste una costante $C > 0$ tale che, in un opportuno intorno I di c,

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \qquad \forall x \in I,\ x \neq c.$$

Tuttavia, la definizione da noi data è sufficiente per il prosieguo dell'analisi. □

Esempi 5.3

i) Ricordando gli Esempi 4.6, si ha

$$\sin x \sim x,\ x \to 0, \qquad \text{infatti} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\sin x = o(x),\ x \to +\infty, \qquad \text{infatti} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0;$$

ii) risulta $\sin x = o(\tan x)$, $x \to \frac{\pi}{2}$ in quanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0;$$

iii) si ha $\cos x \asymp 2x - \pi$, $x \to \frac{\pi}{2}$, perché

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{2t} = -\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2t} = -\frac{1}{2}.$$

□

Proprietà dei simboli di Landau

i) È chiaro dalle definizioni che i simboli $\asymp$, $\sim$, o sono casi particolari del simbolo O, nel senso che, per x tendente a c,

$$f \asymp g \Rightarrow f = O(g), \qquad f \sim g \Rightarrow f = O(g), \qquad f = o(g) \Rightarrow f = O(g).$$

Inoltre, il simbolo $\sim$ è un caso particolare del simbolo $\asymp$, vale a dire

$$f \sim g \quad \Rightarrow \quad f \asymp g.$$

Notiamo poi che, se $f \asymp g$, allora dalla (5.1) si ha

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\ell g(x)} = 1, \qquad \text{dunque} \quad f \sim \ell g.$$

ii) È utile la proprietà

$$\boxed{f \sim g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = g + o(g).} \tag{5.2}$$

Infatti, definiamo $h(x) = f(x) - g(x)$, per cui si ha $f(x) = g(x) + h(x)$. Ora

$$\begin{aligned} f \sim g \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c} \frac{h(x)}{g(x)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h = o(g). \end{aligned}$$

iii) Una semplificazione nei calcoli viene dall'osservare che, per ogni costante $\lambda \neq 0$,

$$\boxed{o(\lambda f) = o(f) \qquad \text{e} \qquad \lambda\, o(f) = o(f).} \tag{5.3}$$

Infatti, dire $g = o(\lambda f)$, significa che $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{\lambda f(x)} = 0$, il che equivale a $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, cioè $g = o(f)$. La seconda identità si dimostra in modo simile.

Proprietà analoghe alla (5.3) valgono per il simbolo O.

Osserviamo che i simboli $o(f)$ e $O(f)$ non indicano una particolare funzione, ma piuttosto una ben precisa proprietà di ogni funzione rappresentata da questi simboli.

iv) Notiamo che $f = o(1)$ equivale a dire che f tende a 0 per x tendente a c. Infatti,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{1} = 0.$$

Similmente, $f = O(1)$ significa che f tende a un limite finito, per x tendente a c. Più in generale (vedi l'Osservazione 5.2), $f = O(1)$ significa che f è *limitata* nell'intorno di c: cioè, esiste una costante $C > 0$ tale che, in un opportuno intorno I di c,

$$|f(x)| \le C, \qquad \forall x \in I,\ x \ne c.$$

v) La condizione di continuità di una funzione f in un punto x_0 può essere scritta mediante il simbolo o, nella forma equivalente

$$f(x) = f(x_0) + o(1), \quad x \to x_0. \tag{5.4}$$

Infatti, ricordando la (3.9), si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad f(x) - f(x_0) = o(1), \quad x \to x_0. \end{aligned}$$

Algebra degli 'o'

i) Confrontiamo il comportamento dei monomi x^n quando $x \to 0$. Si ha

$$\boxed{x^n = o(x^m), \quad x \to 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > m.}$$

Infatti,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} = 0 \ \text{ se e solo se } \ n - m > 0.$$

Dunque, *per x tendente a 0, tra due potenze di x è trascurabile quella di esponente maggiore.*

ii) Consideriamo ora il limite per $x \to \pm\infty$. Risulta, procedendo come sopra,

$$\boxed{x^n = o(x^m), \quad x \to \pm\infty, \qquad \Longleftrightarrow \qquad n < m.}$$

Dunque, *per x tendente a $\pm\infty$, tra due potenze di x è trascurabile quella di esponente minore.*

iii) I simboli di Landau permettono una notevole semplificazione di certe espressioni algebriche nello studio dei limiti. Consideriamo, ad esempio, il limite per $x \to 0$. Valgono allora le seguenti proprietà, che costituiscono una speciale *'algebra degli o'*, la cui verifica è lasciata allo studente come esercizio:

$$
\begin{array}{ll}
\text{a)} & o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)\,, \\
\text{b)} & o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)\,, \quad \text{con } p = \min(n,m)\,; \\
\text{c)} & o(\lambda x^n) = o(x^n), \qquad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,; \\
\text{d)} & \varphi(x) o(x^n) = o(x^n) \qquad \text{se } \varphi \text{ è limitata in un intorno di } x = 0\,; \\
\text{e)} & x^m o(x^n) = o(x^{m+n})\,; \\
\text{f)} & o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n})\,, \\
\text{g)} & [o(x^n)]^k = o(x^{kn})\,.
\end{array}
\tag{5.5}
$$

Limiti fondamentali

I limiti fondamentali riportati nella tabella di pag. 111 possono essere riformulati mediante i simboli di Landau. Abbiamo infatti:

$$
\begin{array}{llll}
\sin x \sim x, & x \to 0; & & \\
1 - \cos x \asymp x^2, & x \to 0; & \text{più precisamente, } 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, & x \to 0; \\
\log(1+x) \sim x, & x \to 0; & \text{equivalentemente, } \log x \sim x - 1, & x \to 1; \\
\mathrm{e}^x - 1 \sim x, & x \to 0; & & \\
(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, & x \to 0. & &
\end{array}
$$

Applicando la (5.2) e tendendo conto della proprietà (5.5) c), queste relazioni possono essere scritte in forma equivalente come:

$$
\begin{array}{llll}
\sin x = x + o(x), & x \to 0; & & \\
1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), & x \to 0, & \text{ovvero, } \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), & x \to 0; \\
\log(1+x) = x + o(x), & x \to 0, & \text{ovvero, } \log x = x - 1 + o(x-1), & x \to 1; \\
\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x), & x \to 0; & & \\
(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), & x \to 0. & &
\end{array}
$$

Inoltre, dimostreremo più avanti (§ 6.11) le seguenti relazioni:

$$
\begin{array}{llll}
\text{a)} & x^\alpha = o(\mathrm{e}^x), & x \to +\infty, & \forall \alpha \in \mathbb{R}; \\
\text{b)} & \mathrm{e}^x = o(|x|^\alpha), & x \to -\infty, & \forall \alpha \in \mathbb{R}; \\
\text{c)} & \log x = o(x^\alpha), & x \to +\infty, & \forall \alpha > 0; \\
\text{d)} & \log x = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right), & x \to 0^+, & \forall \alpha > 0.
\end{array}
\tag{5.6}
$$

Esempi 5.4

i) Dalla relazione $e^t = 1+t+o(t)$, $t \to 0$, ponendo $t = 5x$, si ha $e^{5x} = 1+5x+o(5x)$ ovvero $e^{5x} = 1 + 5x + o(x)$, $x \to 0$. Equivalentemente, $e^{5x} - 1 \sim 5x$, $x \to 0$.

ii) Dalla relazione $(1 + t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$, $t \to 0$, ponendo $t = -3x^2$, si ha $(1 - 3x^2)^{1/2} = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(-3x^2) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$. Dunque, $(1 - 3x^2)^{1/2} - 1 \sim -\frac{3}{2}x^2$, $x \to 0$.

iii) Dalla relazione $\sin t = t + o(t)$, $t \to 0$, ponendo $t = 2x$, si ha $x \sin 2x = x(2x + o(2x)) = 2x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$. Quindi, $x \sin 2x \sim 2x^2$, $x \to 0$. □

Vediamo ora come utilizzare i simboli di Landau nel calcolo di limiti. Supponiamo che tutte le funzioni che intervengono nei due enunciati successivi siano definite e non nulle nell'intorno di c, tranne eventualmente in c.

Proposizione 5.5 *Si vogliano studiare i limiti*

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono funzioni tali che $\tilde{f} \sim f$ e $\tilde{g} \sim g$ per $x \to c$, allora

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x), \tag{5.7}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}. \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Proviamo la (5.7). Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x)g(x) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}\tilde{f}(x)\frac{g(x)}{\tilde{g}(x)}\tilde{g}(x)\\ &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{\tilde{g}(x)} \lim_{x\to c} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x).\end{aligned}$$

Ricordando la definizione di $\tilde{f} \sim f$ e $\tilde{g} \sim g$, si ottiene il risultato. La dimostrazione della (5.8) è del tutto simile. □

Corollario 5.6 *Si vogliano studiare i limiti*

$$\lim_{x\to c} \big(f(x) + f_1(x)\big)\big(g(x) + g_1(x)\big) \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{x\to c} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)}.$$

Se $f_1 = o(f)$ e $g_1 = o(g)$ per $x \to c$, allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+f_1(x)\big)\big(g(x)+g_1(x)\big)=\lim_{x\to c}f(x)g(x), \tag{5.9}$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}. \tag{5.10}$$

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{f}=f+f_1$; per ipotesi $\tilde{f}=f+o(f)$ e dunque, per la (5.2), si ha $\tilde{f}\sim f$. Analogamente, posto $\tilde{g}=g+g_1$, si ha $\tilde{g}\sim g$. Il risultato segue allora dalla proposizione precedente. □

Il significato di queste proprietà è evidente: nel calcolo del limite di un prodotto, possiamo sostituire a ciascun fattore una funzione ad esso equivalente; oppure, in ciascun fattore, possiamo eliminare addendi trascurabili rispetto ad altri. In modo analogo possiamo agire nel calcolo del limite di un quoziente, relativamente a numeratore e denominatore.

Esempi 5.7

i) Si debba calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}.$$

Dall'equivalenza $1-\cos t\sim\frac{1}{2}t^2$, $t\to 0$, con la sostituzione $t=2x$ otteniamo

$$1-\cos 2x\sim 2x^2,\quad x\to 0.$$

Dall'equivalenza $\sin t\sim t$, $t\to 0$, con la sostituzione $t=3x$ otteniamo $\sin 3x\sim 3x$, $x\to 0$, da cui

$$\sin^2 3x\sim 9x^2,\quad x\to 0.$$

Pertanto, applicando la (5.8), otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{9x^2}=\frac{2}{9}.$$

ii) Si debba calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+x^3}{4x+5\log(1+x^2)}.$$

Facciamo vedere che, per $x\to 0$, x^3 è trascurabile rispetto a $\sin 2x$ e $5\log(1+x^2)$ è trascurabile rispetto a $4x$; ciò fatto, possiamo usare il corollario precedente e concludere che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+x^3}{4x+5\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}=\frac{1}{2}.$$

Ricordiamo che $\sin 2x\sim 2x$ per $x\to 0$; dunque,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x}=0,$$

vale a dire $x^3=o(\sin 2x)$ per $x\to 0$. D'altro canto, ricordando che $\log(1+t)\sim t$ per $t\to 0$, con la sostituzione $t=x^2$ otteniamo $\log(1+x^2)\sim x^2$ per $x\to 0$.

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\log(1+x^2)}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{4x} = 0,$$

vale a dire $5\log(1+x^2) = o(4x)$ per $x \to 0$. □

Le precedenti regole di 'semplificazione' nel calcolo dei limiti valgono soltanto nel caso di prodotti o quozienti. *Non è lecito applicare tali regole nel calcolo del limite di una somma o differenza di funzioni.* In altri termini, dal fatto che $\tilde{f} \sim f$ e $\tilde{g} \sim g$ per $x \to c$, non è lecito dedurre che

$$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c}[\tilde{f}(x) \pm \tilde{g}(x)].$$

Ad esempio, poniamo $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-1}$; consideriamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-1}\right).$$

Razionalizzando, tale limite è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = 1.$$

Se però sostituissimo alla funzione $f(x)$ la funzione $\tilde{f}(x) = x$, che è ad essa equivalente per $x \to +\infty$, otterremmo un limite diverso, *errato*. Infatti,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})} = 0.$$

Il motivo della diversità sta nella *cancellazione* del termine di grado massimo x^2, al numeratore della frazione che si ottiene dopo la razionalizzazione. A seguito di questa cancellazione, diventano determinanti, al fine del comportamento limite, i termini di grado inferiore, che pure sono trascurabili rispetto a x^2 per $x \to +\infty$.

5.2 Infinitesimi ed infiniti

Definizione 5.8 *Sia f una funzione definita nell'intorno di c, tranne eventualmente in c. Si dice che la funzione f è* **infinitesima** (*oppure è* **un infinitesimo**) **in** *c se*

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0,$$

cioè se $f = o(1)$ per $x \to c$. Invece, si dice che f è **infinita** (*oppure* **un infinito**) **in** *c se*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty.$$

Introduciamo la seguente terminologia relativa al confronto tra due infinitesimi oppure tra due infiniti in c.

Definizione 5.9 *Siano f e g due infinitesimi in c.*
Se $f \asymp g$ per $x \to c$, f e g si dicono **infinitesimi dello stesso ordine**.
Se $f = o(g)$ per $x \to c$, f dicesi **infinitesimo di ordine superiore a** g.
Se $g = o(f)$ per $x \to c$, f dicesi **infinitesimo di ordine inferiore a** g.
Se nessuna delle condizioni precedenti è soddisfatta, diciamo che f e g sono infinitesimi **non confrontabili** *tra di loro.*

Definizione 5.10 *Siano f e g due infiniti in c.*
Se $f \asymp g$ per $x \to c$, f e g si dicono **infiniti dello stesso ordine**.
Se $f = o(g)$ per $x \to c$, f dicesi **infinito di ordine inferiore a** g.
Se $g = o(f)$ per $x \to c$, f dicesi **infinito di ordine superiore a** g.
Se nessuna delle condizioni precedenti è soddisfatta, diciamo che f e g sono infiniti **non confrontabili** *tra di loro.*

Esempi 5.11

Ricordando i limiti fondamentali visti sopra, è immediato verificare i seguenti enunciati:
i) $\mathrm{e}^x - 1$ è un infinitesimo dello stesso ordine di x nell'origine.
ii) $\sin x^2$ è un infinitesimo di ordine superiore a x nell'origine.
iii) $\dfrac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ è un infinito di ordine superiore a $\dfrac{1}{x}$ nell'origine.
iv) Per ogni $\alpha > 0$, e^x è un infinito di ordine superiore a x^α per $x \to +\infty$.
v) Per ogni $\alpha > 0$, $\log x$ è un infinito di ordine inferiore a $\dfrac{1}{x^\alpha}$ per $x \to 0^+$.
vi) Le funzioni $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$ sono infinitesime per x tendente a 0 (per la funzione f, si ricordi il Corollario 4.7). Tuttavia, il quoziente $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sin \frac{1}{x}$ non ammette limite per $x \to 0$: esso assume, infinite volte in ogni intorno di 0, ogni valore compreso tra -1 e 1. Dunque, nessuna delle relazioni $f \asymp g$, $f = o(g)$, $g = o(f)$ è soddisfatta per $x \to 0$. I due infinitesimi f e g non sono confrontabili tra loro. □

Con un linguaggio non rigoroso ma espressivo, quando f è un infinitesimo (o un infinito) di ordine superiore a g, diremo che f tende a 0 (o a ∞) *più velocemente* di g. Ciò suggerisce l'idea di 'misurare la velocità' con cui l'infinitesimo (o l'infinito) converge verso il suo valore limite.

A tale scopo, fissiamo un infinitesimo (o un infinito) φ, definito nell'intorno di c e particolarmente semplice da calcolare; chiameremo φ **infinitesimo campione** (o **infinito campione**) in c. Le scelte più comuni (ma assolutamente *non* le uniche possibili) come infinitesimi e infiniti campione sono le seguenti. Se $c = x_0 \in \mathbb{R}$, sceglieremo come infinitesimo campione

$$\varphi(x) = x - x_0 \qquad \text{oppure} \qquad \varphi(x) = |x - x_0|$$

(la seconda scelta qualora sia necessario considerare potenze non intere di φ, vedi più avanti) e come infinito campione

$$\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0} \qquad \text{oppure} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{|x - x_0|}.$$

Se $c = x_0^+$ (rispettivamente, $c = x_0^-$), sceglieremo come infinitesimo campione

$$\varphi(x) = x - x_0 \qquad (\text{rispettivamente,} \quad \varphi(x) = x_0 - x\ )$$

e come infinito campione

$$\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0} \qquad \left(\text{rispettivamente,} \quad \varphi(x) = \frac{1}{x_0 - x}\ \right).$$

Se $c = +\infty$, l'infinitesimo e l'infinito campione saranno rispettivamente

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \varphi(x) = x,$$

mentre se $c = -\infty$, l'infinitesimo e l'infinito campione saranno rispettivamente

$$\varphi(x) = \frac{1}{|x|} \qquad \text{e} \qquad \varphi(x) = |x|.$$

La definizione della 'velocità di convergenza' di un infinitesimo o di un infinito f è legata al confronto di f con le potenze dell'infinitesimo o dell'infinito campione in c. Precisamente, abbiamo la seguente definizione.

Definizione 5.12 *Sia f un infinitesimo (o un infinito) in c. Se esiste un numero reale $\alpha > 0$ tale che*

$$f \asymp \varphi^\alpha, \quad x \to c, \tag{5.11}$$

allora α dicesi **l'ordine di infinitesimo** (*o* **di infinito**) **di** f **in** c **rispetto all'infinitesimo campione** (*o* **all'infinito campione**) φ.

Notiamo che la condizione (5.11), se verificata, determina l'ordine di infinitesimo (o di infinito) in modo univoco. Infatti, nel caso dell'infinitesimo è immediato

verificare che, per ogni $\beta < \alpha$ si ha $f = o(\varphi^\beta)$, mentre per ogni $\beta > \alpha$ si ha $\varphi^\beta = o(f)$. Un'analoga considerazione vale nel caso dell'infinito.

Se f ha ordine di infinitesimo (o di infinito) α in c rispetto al campione φ, ciò significa che esiste un numero reale $\ell \neq 0$ tale che

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi^\alpha(x)} = \ell.$$

Dunque,

$$f \sim \ell\varphi^\alpha, \quad x \to c,$$

vale a dire, ricordando la (5.2), $f = \ell\varphi^\alpha + o(\ell\varphi^\alpha)$, per $x \to c$. Per semplicità, possiamo omettere la costante ℓ nel simbolo o, in quanto se una funzione h soddisfa $h = o(\ell\varphi^\alpha)$, allora si avrà pure $h = o(\varphi^\alpha)$. Pertanto abbiamo

$$f = \ell\varphi^\alpha + o(\varphi^\alpha), \quad x \to c.$$

Definizione 5.13 *La funzione*

$$p(x) = \ell\varphi^\alpha(x) \tag{5.12}$$

dicesi la **parte principale dell'infinitesimo** (*o* **dell'infinito**) f **in** c **rispetto all'infinitesimo campione** (*o* **all'infinito campione**) φ.

Dal punto di vista qualitativo, il comportamento della funzione f in un intorno abbastanza piccolo di c coincide con quello della sua parte principale (in termini geometrici, il grafico di f si confonde con quello della sua parte principale). Con una opportuna scelta dell'infinitesimo o infinito campione φ, quale una di quelle indicate sopra, il comportamento della funzione $\ell\varphi^\alpha(x)$ è di immediata determinazione. Pertanto, se di una funzione – magari definita da una complicata espressione – noi siamo in grado di trovare la parte principale in un punto c, possiamo facilmente conoscere il comportamento locale della funzione nell'intorno di tale punto.

Ribadiamo che, per determinare ordine di infinitesimo (o di infinito) e parte principale di una funzione f in c, dobbiamo partire dal limite

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi^\alpha(x)}$$

e chiederci se esiste un valore di α per cui tale limite sia finito e diverso da 0. In tal caso, α è l'ordine cercato e, detto ℓ il valore del limite, la parte principale di f è data dall'espressione (5.12).

Esempi 5.14

i) La funzione $f(x) = \sin x - \tan x$ è infinitesima per $x \to 0$. Ricordando le equivalenze fondamentali di pagina 133 e la Proposizione 5.5, possiamo scrivere

$$\sin x - \tan x = \frac{\sin x\,(\cos x - 1)}{\cos x} \sim \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{1} = -\frac{1}{2}x^3 \qquad x \to 0.$$

Ne segue che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 3 nell'origine rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$ e la sua parte principale è $p(x) = -\frac{1}{2}x^3$.

ii) La funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-1}$$

è infinitesima per $x \to +\infty$. Infatti, razionalizzando, si ha

$$f(x) = \frac{(x^2+3)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{4}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}.$$

L'espressione di destra mostra che se scegliamo $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 2.$$

Dunque, f è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to +\infty$ rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$, e la sua parte principale è $p(x) = \frac{2}{x}$.

iii) La funzione

$$f(x) = \sqrt{9x^5 + 7x^3 - 1}$$

è infinita per $x \to +\infty$. Per determinarne l'ordine di infinito rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = x$, consideriamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}\sqrt{9+\frac{7}{x^2}-\frac{1}{x^5}}}{x^\alpha}.$$

Se scegliamo $\alpha = \frac{5}{2}$, il limite vale 3. Dunque, f ha ordine di infinito $\frac{5}{2}$ per $x \to +\infty$ rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = x$, e la sua parte principale è $p(x) = 3x^{5/2}$. □

Osservazione 5.15 Abbiamo appena visto vari esempi di calcolo dell'ordine di infinitesimo (o di infinito) di una funzione, rispetto ad un infinitesimo (un infinito) campione. Lo studente non deve però credere che ciò sia sempre possibile. In altri termini, dato un infinitesimo o un infinito f in c e scelto un infinitesimo o un infinito campione φ, può accadere che non esista nessun numero reale $\alpha > 0$ tale che $f \asymp \varphi^\alpha$, per $x \to c$. In tal caso, è conveniente operare una diversa scelta della funzione campione, più adatta a descrivere il comportamento della f nell'intorno di c. Illustriamo la situazione con due esempi.

Consideriamo dapprima la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ per $x \to +\infty$. Usando la (5.6) a) si ha immediatamente $x^\alpha = o(\mathrm{e}^{2x})$, qualunque sia $\alpha > 0$. Dunque, non è possibile determinare un ordine di infinito di f rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = x$: la funzione esponenziale tende a infinito troppo velocemente per essere misurata in termini di una funzione polinomiale. Se invece scegliamo come infinito campione

la funzione $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$, allora è immediato che f ha ordine di infinito 2 rispetto a tale campione.

Consideriamo ora la funzione $f(x) = x \log x$ per $x \to 0^+$. In (5.6) d) abbiamo anticipato che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^\beta}} = 0, \qquad \forall \beta > 0.$$

Pertanto, $f(x) = \dfrac{\log x}{1/x}$ è infinitesima per $x \to 0^+$. Se usiamo l'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x \log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1, \\ -\infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Dunque, applicando la Definizione 5.9, f è un infinitesimo di ordine *superiore* ad ogni potenza di x con esponente < 1, ma di ordine *inferiore* a x e ad ogni potenza di x con esponente > 1. Anche in questo caso, non è possibile determinare un ordine di infinitesimo di f rispetto al campione x. La funzione $|f(x)| = x|\log x|$ descrive un modo di tendere a zero più lento di x ma più veloce di x^α per ogni $\alpha < 1$; essa stessa può essere usata come un diverso infinitesimo campione per $x \to 0^+$. □

5.3 Asintoti

Consideriamo una funzione f definita in un intorno di $+\infty$. Nello studio del suo comportamento per $x \to +\infty$, una situazione notevole è quella in cui la funzione si comporta come un polinomio di primo grado; in termini geometrici, ciò significa che il grafico di f tende a confondersi con il grafico di una retta. Precisamente, supponiamo che esistano numeri reali m e q tali che

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0,} \tag{5.13}$$

o, usando i simboli di Landau,

$$f(x) = mx + q + o(1)\,, \qquad x \to +\infty.$$

Diciamo allora che la retta $g(x) = mx + q$ è **asintoto destro** della funzione f. L'asintoto dicesi **obliquo** se $m \neq 0$, **orizzontale** se $m = 0$. Geometricamente, la condizione (5.13) esprime la proprietà che la distanza $d(x) = |f(x) - g(x)|$ tra i punti sul grafico di f e sull'asintoto aventi la stessa ascissa x, tende a 0 per x tendente a $+\infty$ (si veda la Figura 5.1).

I coefficienti dell'asintoto possono essere espressi in termini di opportuni limiti, nel modo seguente:

Figura 5.1. Grafico di una funzione e del suo asintoto destro

$$\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)\,.} \tag{5.14}$$

La prima relazione si ottiene dalla (5.13) osservando che

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{mx}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{q}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m,$$

mentre la seconda relazione segue direttamente dalla (5.13). Le condizioni (5.14) forniscono il metodo per la determinazione dell'eventuale asintoto di una funzione f. Infatti, se entrambi i limiti esistono finiti, allora f ammette l'asintoto destro $y = mx + q$; se, invece, anche uno solo dei limiti (5.14) non è finito, la funzione non ammette asintoto.

Notiamo che, se f ammette asintoto obliquo, cioè se $m \neq 0$, allora la prima delle (5.14) ci dice che f è un infinito di ordine 1 rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = x$ per $x \to +\infty$. Tuttavia, non tutte le funzioni che soddisfano quest'ultima proprietà ammettono asintoto obliquo: ad esempio, la funzione $f(x) = x + \sqrt{x}$ è equivalente a x per $x \to +\infty$, ma non ammette asintoto, in quanto il secondo limite in (5.14) vale $+\infty$.

Osservazione 5.16 La definizione di asintoto (retto) data sopra rientra come caso particolare nella seguente: la funzione f dicesi **asintotica** a una funzione g per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Se vale la (5.13), possiamo quindi dire che f è asintotica alla retta $g(x) = mx + q$. Invece, la funzione $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ non ammette asintoto retto per $x \to +\infty$, ma risulta asintotica alla parabola $g(x) = x^2$. □

In modo simile a quanto fatto finora, è possibile definire un asintoto obliquo o orizzontale per $x \to -\infty$ (ossia un asintoto obliquo o orizzontale sinistro).

Se la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo o orizzontale sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$, diremo che è un **asintoto obliquo o orizzontale completo** per f.

Infine, se in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è **asintoto verticale** per f in x_0. In tale situazione, è la distanza tra i punti sul grafico di f e sull'asintoto aventi la stessa ordinata a tendere a 0 per x tendente a x_0. Se la condizione di limite è verificata solo per $x \to x_0^+$ oppure per $x \to x_0^-$ si parla, rispettivamente, di asintoto verticale **destro** o **sinistro**.

Esempi 5.17

i) Sia $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \mp\infty$$

la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ e un asintoto verticale di equazione $x = -1$.

ii) Sia $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Risulta

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + x^{-2}}}{x} = \pm 1$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 + x^2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1 + x^2} + x} = 0\,,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1 + x^2} + x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1 + x^2} - x} = 0\,.$$

Pertanto la funzione ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ di equazione $y = x$ e un asintoto obliquo per $x \to -\infty$ di equazione $y = -x$.

iii) Sia $f(x) = x + \log x$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} (x + \log x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} (x + \log x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \log x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} (x + \log x - x) = +\infty.$$

Dunque la funzione ha un asintoto verticale (destro) di equazione $x = 0$ e non ha asintoti orizzontali od obliqui. □

5.4 Ulteriori proprietà delle successioni

Riprendiamo qui lo studio del comportamento limite delle successioni iniziato nel § 3.2. I teoremi generali sui limiti delle funzioni valgono anche per le successioni (che sono particolari funzioni definite sugli interi). Per completezza, ne riportiamo gli enunciati adattati alla situazione specifica. Inoltre enunciamo e dimostriamo ulteriori proprietà specifiche delle successioni.

Diremo che una successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ verifica **definitivamente** una certa proprietà se esiste un intero $N \geq n_0$ tale che la successione $\{a_n\}_{n \geq N}$ verifica tale proprietà.

Teoremi sulle successioni

1. *Teorema di unicità del limite*: il limite di una successione, se esiste, è unico.
2. *Teorema di limitatezza*: una successione convergente è limitata.
3. *Teorema di esistenza del limite delle successioni monotone*: una successione definitivamente monotona, se è limitata allora è convergente; se non è limitata allora è divergente (a $+\infty$ se è crescente, a $-\infty$ se è decrescente).
4. *Primo Teorema del confronto*: siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che esistano, finiti o infiniti, i limiti $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$. Se definitivamente vale $a_n \le b_n$, allora $\ell \le m$.
5. *Secondo Teorema del confronto*: siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$. Se definitivamente vale $a_n \le b_n \le c_n$, allora $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.
6. *Teorema*: una successione $\{a_n\}$ è infinitesima, cioè $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, se e solo se la successione $\{|a_n|\}$ è infinitesima.
7. *Teorema*: sia $\{a_n\}$ una successione infinitesima e $\{b_n\}$ una successione limitata. Allora la successione $\{a_n b_n\}$ è infinitesima.
8. *Algebra dei limiti*: siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ (ℓ, m finiti o infiniti). Si ha
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \ell \pm m\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = \ell\, m\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}, \quad \text{se definitivamente } b_n \ne 0\,,$$
ogniqualvolta l'espressione a secondo membro è definita secondo la tabella di pag. 100.
9. *Teorema di sostituzione*: sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e sia g una funzione definita in un intorno di ℓ.
   a) se $\ell \in \mathbb{R}$ e g è continua in ℓ, allora $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\ell)$;
   b) se $\ell \notin \mathbb{R}$ ed esiste il $\lim_{x\to\ell} g(x) = m$, allora $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = m$.

Dimostrazione. Proviamo soltanto il Teorema 2. in quanto gli altri si ottengono adattando facilmente le analoghe dimostrazioni fornite per le funzioni.
Supponiamo sia data la successione $\{a_n\}_{n\ge n_0}$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Allora, fissato $\varepsilon = 1$, esiste un intero $n_1 \ge n_0$ tale che $|a_n - \ell| < 1$ per ogni $n > n_1$. Per tali n si ha quindi, usando la disuguaglianza triangolare (1.1),
$$|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \le |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$
Dunque ponendo $M = \max\{|a_{n_0}|, \dots, |a_{n_1}|, 1 + |\ell|\}$ si ha $|a_n| \le M$, $\forall n \ge n_0$. □

Esempi 5.18

i) Consideriamo la successione, detta *successione geometrica*, $a_n = q^n$, dove q è un numero fissato in $\mathbb{R}$. Facciamo vedere che

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ +\infty & \text{se } q > 1, \\ \text{non esiste} & \text{se } q \le -1. \end{cases}}$$

Se $q = 0$ oppure $q = 1$, la successione è costante e dunque banalmente convergente a 0 e a 1 rispettivamente. Se $q = -1$, la successione è indeterminata.
Sia ora $q > 1$; osserviamo che la successione è strettamente crescente e dunque ammette limite. Per mostrare che il limite è $+\infty$, scriviamo $q = 1 + r$ con $r > 0$ e applichiamo la formula (1.13) del binomio di Newton:

$$q^n = (1+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k = 1 + nr + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} r^k .$$

Osservando che tutti gli addendi dell'ultima somma sono positivi, otteniamo la disuguaglianza

$$(1+r)^n \ge 1 + nr\,, \qquad \forall n \ge 0\,, \tag{5.15}$$

detta **disuguaglianza di Bernoulli**[1]. Dunque $q^n \ge 1 + nr$; passando al limite per $n \to \infty$ e usando il Primo teorema del confronto, si ha il risultato desiderato.
Esaminiamo il caso $|q| < 1$ con $q \ne 0$; notiamo che $\dfrac{1}{|q|} > 1$ e quindi, per quanto visto prima, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$. Dunque la successione $\{|q|^n\}$ è infinitesima e pertanto pure la successione $\{q^n\}$ lo è.
Infine, sia $q < -1$. Poiché

$$\lim_{k\to\infty} q^{2k} = \lim_{k\to\infty} (q^2)^k = +\infty, \qquad \lim_{k\to\infty} q^{2k+1} = q \lim_{k\to\infty} q^{2k} = -\infty,$$

la successione q^n è indeterminata.

ii) Sia p un numero fissato > 0 e consideriamo la successione $\sqrt[n]{p}$. Si ha, applicando il Teorema di sostituzione con $g(x) = p^x$,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} p^{1/n} = p^0 = 1\,.}$$

[1] Usando il Principio di induzione, si può dimostrare che la (5.15) vale in realtà per ogni $r \ge -1$. Si veda l'Appendice A.1, pag. 448.

iii) Consideriamo la successione $\sqrt[n]{n}$; usando ancora il Teorema di sostituzione e ricordando la (5.6) c), si ha

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \exp \frac{\log n}{n} = \mathrm{e}^0 = 1.}$$

□

Esistono alcuni criteri di facile applicazione per decidere se una successione è infinitesima o infinita. Tra questi, il più usato è il seguente.

Teorema 5.19 (**Criterio del rapporto**) *Sia $\{a_n\}$ una successione per cui definitivamente valga $a_n > 0$. Supponiamo che esista finito o infinito il*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Se $q < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; se $q > 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dimostrazione. Supponiamo che $a_n > 0$, $\forall n \geq n_0$. Sia $q < 1$ e poniamo $\varepsilon = 1 - q$. Dalla definizione di limite segue che esiste un intero $n_\varepsilon \geq n_0$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = 1\,, \quad \text{ossia} \quad a_{n+1} < a_n.$$

Dunque la successione $\{a_n\}$ è definitivamente monotona decrescente e pertanto ammette limite ℓ finito e ≥ 0. Se fosse $\ell \neq 0$ si avrebbe

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

contro l'ipotesi che $q < 1$.
Se $q > 1$, è sufficiente considerare la successione $\{1/a_n\}$. □

Osservazione 5.20 È possibile dare una diversa dimostrazione del teorema precedente che evidenzia la velocità di convergenza a 0 o a $+\infty$ della successione. Consideriamo, ad esempio, il caso $q < 1$. Sempre dalla definizione di limite, per ogni r con $q < r < 1$, ponendo $\varepsilon = r - q$, esiste $n_\varepsilon \geq n_0$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \text{ossia} \quad a_{n+1} < r a_n$$

e, reiterando,

$$a_{n+1} < r a_n < r^2 a_{n-1} < \ldots < r^{n-n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon+1} \tag{5.16}$$

(la giustificazione rigorosa di tale formula richiede l'applicazione del Principio di induzione, si veda l'Appendice A.1, pag. 450). Concludiamo usando il Primo criterio del confronto e il comportamento limite della successione geometrica (Esempio

5.18 i)). La (5.16) mostra che la successione $\{a_n\}$ tende a 0 tanto più velocemente quanto q è piccolo.
Analoghe considerazioni valgono nel caso $q > 1$. □

Da ultimo consideriamo alcune successioni significative che tendono a $+\infty$. Confrontiamo il loro comportamento limite in base alla Definizione 5.10. Precisamente, prendiamo in esame le successioni

$$\boxed{\log n\,,\ n^\alpha\,,\ q^n\,,\ n!\,,\ n^n \quad (\alpha > 0,\ q > 1)}$$

e facciamo vedere che ciascuna è un infinito di ordine superiore rispetto alla precedente.
Il confronto tra le prime due successioni è immediato usando il Teorema di sostituzione e la (5.6) c); otteniamo $\log n = o(n^\alpha)$ per $n \to \infty$.
I successivi confronti possono essere effettuati considerando di volta in volta la successione quoziente delle due che si vogliono confrontare e applicando il Criterio del rapporto 5.19. Precisamente, poniamo dapprima $a_n = \dfrac{n^\alpha}{q^n}$. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{q^{n+1}}\,\frac{q^n}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q} \quad \to \quad \frac{1}{q} < 1\,, \qquad n \to \infty.$$

Dunque, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ovvero $n^\alpha = o(q^n)$ per $n \to \infty$.
Poniamo poi $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$, da cui

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{q^n} = \frac{q}{(n+1)n!}\,n! = \frac{q}{n+1} \quad \to \quad 0 < 1\,, \qquad n \to \infty\,,$$

e quindi $q^n = o(n!)$ per $n \to \infty$.
Infine, sia $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$; allora

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}\,\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \quad \to \quad \frac{1}{\mathrm{e}} < 1\,, \qquad n \to \infty\,,\end{aligned}$$

e dunque $n! = o(n^n)$ per $n \to \infty$. Più precisamente, si può dimostrare che

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Tale relazione, nota come **formula di Stirling**, fornisce un'utile approssimazione del fattoriale di un intero sufficientemente grande.

Figura 5.2. Suddivisioni successive dell'intervallo $[0, 2]$. Le ascisse dei punti di suddivisione sono indicate in basso e le lunghezze dei sottointervalli in alto

5.5 Serie numeriche

Consideriamo un segmento di lunghezza $\ell = 2$ (si veda la Figura 5.2). Attraverso il suo punto medio, possiamo dividerlo nell'unione di due segmenti contigui di lunghezza $a_0 = \ell/2 = 1$. Teniamo fisso il segmento di sinistra, mentre dividiamo il segmento di destra ancora in due parti uguali, di lunghezza $a_1 = \ell/4 = 1/2$. Iterando tale procedimento infinite volte, possiamo pensare il segmento iniziale come unione di infiniti segmenti, di lunghezza $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ Corrispondentemente, siamo indotti a pensare la lunghezza totale del segmento come somma delle infinite lunghezze dei segmenti in cui lo abbiamo suddiviso, vale a dire

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \tag{5.17}$$

Abbiamo, a destra, una somma di infiniti addendi. Il concetto di somma di infiniti termini può essere definito in modo rigoroso usando la nozione di successione, e conduce alla definizione di serie numerica.

Data la successione $\{a_k\}_{k\geq 0}$, costruiamo la cosiddetta **successione delle somme parziali** o **delle ridotte** $\{s_n\}_{n\geq 0}$ nel modo seguente:

$$s_0 = a_0\,, \qquad s_1 = a_0 + a_1\,, \qquad s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

e, in generale,

$$\boxed{s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,.}$$

Notiamo che $s_n = s_{n-1} + a_n$. È naturale studiare il comportamento limite di tale successione. Poniamo (formalmente)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n\,.}$$

Il simbolo $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ viene detto **serie** (numerica), mentre a_k è il **termine generale** della serie.

Definizione 5.21 *Data la successione* $\{a_k\}_{k\geq 0}$ *e posto* $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, *si consideri il limite* $\lim_{n\to\infty} s_n$.

i) Se il limite esiste ed è finito si dice che **la serie** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge** *e il valore* s *del limite è detto* **somma della serie***; scriveremo* $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

ii) Se il limite esiste ed è infinito, si dice che **la serie** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **diverge**.

iii) Se il limite non esiste, si dice che **la serie** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **è indeterminata**.

Esempi 5.22

i) Ritorniamo sull'esempio iniziale del segmento suddiviso in infinite parti. La lunghezza del segmento ottenuto con $k+1$ suddivisioni è $a_k = \frac{1}{2^k}$, per $k \geq 0$. Dunque, siamo indotti a considerare la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Allora

$$s_0 = 1\,, \qquad s_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,, \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}\,,$$
$$\vdots$$
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\,.$$

Usando il prodotto notevole $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n)$, e scegliendo $a = 1$ e $b = x$ arbitrario purché $\neq 1$, otteniamo l'identità

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\,. \tag{5.18}$$

Dunque

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) = 2 - \frac{1}{2^n}\,.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \Big(2 - \frac{1}{2^n}\Big) = 2\,.$$

Quindi la serie converge e la somma vale 2. Ciò giustifica rigorosamente l'espressione (5.17).

ii) Si consideri la serie $\sum_{k=0}^{\infty} k$. Ricordando la (3.2), risulta

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty\,,$$

dunque la serie diverge (positivamente).

iii) Si consideri la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$. Risulta

$$\begin{aligned} &s_0 = 1\,, && s_1 = 1-1=0 \\ &s_2 = s_1 + 1 = 1 && s_3 = s_2 - 1 = 0 \\ & \qquad\vdots \\ &s_{2n} = 1 && s_{2n+1} = 0\,. \end{aligned}$$

Dunque le ridotte con indice pari valgono sempre 1 e quelle con indice dispari 0. In definitiva il $\lim_{n\to\infty} s_n$ non esiste e quindi la serie è indeterminata. □

Talvolta la successione $\{a_k\}$ è definita solo per $k \geq k_0$; la Definizione 5.21 si modifica in modo ovvio. Vale inoltre la seguente proprietà la cui verifica, peraltro immediata, è lasciata allo studente.

Proprietà 5.23 *Il comportamento di una serie non cambia se si aggiungono oppure modificano oppure eliminano un numero finito di termini.*

Si noti che tale proprietà nulla dice, nel caso si abbia convergenza della serie, sul valore della somma, il quale generalmente cambia se si modifica la serie. Ad esempio,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = 2 - 1 = 1\,.$$

Esempi 5.24

i) Consideriamo la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ detta **serie di Mengoli**. Risulta

$$a_k = \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

e dunque

$$\begin{aligned} s_2 &= a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} \\ s_3 &= a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

e, in generale,

$$s_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}\,.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

e quindi la serie converge e la sua somma vale 1.

ii) Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Si ha

$$a_k = \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\frac{k+1}{k} = \log(k+1)-\log k$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} s_1 &= \log 2 \\ s_2 &= \log 2 + (\log 3 - \log 2) = \log 3 \\ &\vdots \\ s_n &= \log 2 + (\log 3 - \log 2) + \ldots + (\log(n+1) - \log n) = \log(n+1)\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\log(n+1) = +\infty$$

e quindi la serie diverge (positivamente). □

Le due serie considerate sono esempi di una classe più ampia di **serie** dette **telescopiche**, cioè tali che $a_k = b_{k+1} - b_k$ per una opportuna successione $\{b_k\}_{k\geq k_0}$. In tal caso si ha $s_n = b_{n+1} - b_{k_0}$ e dunque il comportamento della serie coincide con quello della successione $\{b_k\}$.

Diamo ora una semplice, ma utile, condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica.

Proprietà 5.25 *Sia* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *una serie convergente. Allora*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\,. \tag{5.19}$$

Dimostrazione. Sia $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Poiché $a_k = s_k - s_{k-1}$, si ha

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = s - s = 0\,.$$ □

Osserviamo che la condizione (5.19) non è sufficiente a garantire la convergenza della serie. In altre parole, il termine generale di una serie può tendere a 0 senza che si abbia convergenza. Ad esempio, si ricordi che la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ diverge, mentre si ha $\lim_{k\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = 0$ (Esempio 5.24 ii)).

Se la serie converge a s, si dice **resto n-simo** la quantità

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \,.$$

Proprietà 5.26 *Sia* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *una serie convergente. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \,.$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = s - s = 0 \,. \qquad \square$$

Esempio 5.27

Consideriamo la serie, detta **serie geometrica**,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \,,$$

dove q è un numero fissato in $\mathbb{R}$.
Se $q = 1$, risulta $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$ e $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.
Dunque la serie diverge a $+\infty$.
Se $q \neq 1$, si ha, grazie alla (5.18),

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \,.$$

Ricordando l'Esempio 5.18, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \,. \end{cases}$$

In definitiva

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{diverge a } \ +\infty & \text{se } q \geq 1 \,, \\ \text{è indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \,. \end{cases}}$$

$\square$

Data una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, non sempre è possibile stabilire il suo comportamento facendo uso della definizione. Infatti può accadere che la successione delle ridotte non sia calcolabile esplicitamente. È utile allora avere dei criteri che garantiscano la convergenza o la divergenza della serie. Nel caso in cui si abbia convergenza, l'eventuale problema di calcolare il valore numerico della serie potrà essere affrontato facendo ricorso a tecniche più sofisticate, che esulano dallo scopo di questo testo.

5.5.1 Serie a termini positivi

Si tratta di serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ per cui si ha $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Vale allora il seguente risultato.

Proposizione 5.28 *Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie a termini positivi. Allora la serie o converge o diverge positivamente.*

Dimostrazione. La successione s_n è monotona crescente, infatti

$$s_{n+1} = s_n + a_n \geq s_n\,, \qquad \forall n \geq 0\,.$$

È sufficiente allora applicare il Teorema 3.9 per concludere che $\lim_{n\to\infty} s_n$ esiste, finito o uguale a $+\infty$. □

Presentiamo ora alcuni criteri per lo studio della convergenza di serie a termini positivi.

Teorema 5.29 (**Criterio del confronto**) *Siano $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ due serie numeriche a termini positivi e si abbia $0 \leq a_k \leq b_k$, per ogni $k \geq 0$.*

i) Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, allora converge anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e vale $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$;

ii) se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge, allora diverge anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Dimostrazione. *i)* Indichiamo rispettivamente con $\{s_n\}$ e con $\{t_n\}$ le successioni delle ridotte delle serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Poiché $a_k \leq b_k$ per ogni k, si ha

$$s_n \leq t_n\,, \qquad \forall n \geq 0\,.$$

Per ipotesi, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge e quindi $\lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{R}$. Inoltre, grazie alla Proposizione 5.28, esiste (finito o infinito) il $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Applicando ora il primo teorema del confronto (Teorema 4 di pag. 144) alle successioni $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$, si ha

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{R}\,.$$

Dunque $s \in \mathbb{R}$ e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. Inoltre $s \leq t$.

ii) Osserviamo che se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergesse, per quanto visto al punto *i)*, anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergerebbe. □

Esempi 5.30

i) Si consideri la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Poiché

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} \qquad \forall k \geq 2\,,$$

e la serie di Mengoli $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ converge (Esempio 5.24 i)), possiamo concludere che anche la serie data converge e la sua somma è ≤ 2. Si può dimostrare che la sua somma vale $\frac{\pi^2}{6}$.

ii) Si consideri la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, detta **serie armonica**. Nel Capitolo 6 (Esercizio 12), verificheremo la disuguaglianza $\log(1+x) \leq x$ valida per ogni $x > -1$, da cui segue che

$$\log(1+\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}\,, \qquad \forall k \geq 1\,;$$

quindi, poiché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ diverge (Esempio 5.24 ii)), possiamo con-

cludere che anche la serie armonica diverge.

iii) Per un'estensione dei casi precedenti si veda l'Esempio 10.14 i). □

Diamo ora un utile criterio che generalizza quello del confronto.

Teorema 5.31 (**Criterio del confronto asintotico**) *Date due serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *a termini positivi, se le successioni* $\{a_k\}_{k\geq 0}$ *e* $\{b_k\}_{k\geq 0}$ *sono equigrandi per* $k \to \infty$*, allora il comportamento delle due serie coincide.*

Dimostrazione. Dire che le successioni $\{a_k\}_{k\geq 0}$ e $\{b_k\}_{k\geq 0}$ sono equigrandi per $k \to \infty$ equivale a dire che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Pertanto le successioni $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}_{k\geq 0}$ e $\left\{\frac{b_k}{a_k}\right\}_{k\geq 0}$ sono entrambe convergenti e dunque limitate (Teorema 2 di pag. 144). Quindi esistono due costanti $M_1, M_2 > 0$ tali che, per ogni $k > 0$, si ha

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq M_1 \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{b_k}{a_k}\right| \leq M_2\,,$$

ossia

$$|a_k| \leq M_1|b_k| \qquad \text{e} \qquad |b_k| \leq M_2|a_k|\,.$$

È sufficiente allora applicare il Teorema 5.29 per ottenere il risultato. □

Esempi 5.32

i) Si consideri la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{2k^2+5}$. Sia $b_k = \frac{1}{k}$, allora

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{2}\,.$$

Dunque la serie data ha lo stesso comportamento della serie armonica e pertanto diverge.

ii) Si consideri la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k^2}$. Poiché $\sin\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \to \infty$, la serie data si comporta come la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ e dunque converge. □

Enunciamo e dimostriamo infine due criteri, di natura algebrica e sovente di facile applicazione, che forniscono condizioni sufficienti per la convergenza o la divergenza di una serie.

Teorema 5.33 (**Criterio del rapporto**) *Sia data la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *con* $a_k > 0$, $\forall k \geq 0$. *Si supponga che esista, finito o infinito, il limite*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell\,.$$

Allora se $\ell < 1$, *la serie converge; se* $\ell > 1$, *la serie diverge.*

Dimostrazione. Sia ℓ finito. Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $k_\varepsilon \geq 0$ tale che, per ogni $k > k_\varepsilon$, si ha

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - \ell\right| < \varepsilon \quad \text{ossia} \quad \ell - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \ell + \varepsilon\,.$$

Supponiamo dapprima $\ell < 1$. Scelto $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$, poniamo $q = \frac{1+\ell}{2}$ e osserviamo che

$$0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \ell + \varepsilon = q\,, \qquad \forall k > k_\varepsilon\,.$$

Pertanto, reiterando,

$$a_{k+1} < q a_k < q^2 a_{k-1} < \ldots < q^{k-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon+1}$$

e quindi

$$a_{k+1} < \frac{a_{k_\varepsilon+1}}{q^{k_\varepsilon}} q^k\,, \quad \forall k > k_\varepsilon\,.$$

Concludiamo usando il Teorema 5.29 e il fatto che la serie geometrica di ragione $q < 1$ converge (Esempio 5.27).
Se invece $\ell > 1$, scelto $\varepsilon = \ell - 1$, osserviamo che

$$1 = \ell - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k}\,, \quad \forall k > k_\varepsilon\,.$$

Pertanto $a_{k+1} > a_k > \ldots > a_{k_\varepsilon+1} > 0$ e non è verificata la condizione necessaria di convergenza in quanto $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$.
Se infine $\ell = +\infty$, posto $A = 1$ nella condizione di limite, esiste $k_A \geq 0$ tale che $a_k > 1$ per ogni $k > k_A$. Dunque ancora non è verificata la condizione necessaria di convergenza. □

Teorema 5.34 (**Criterio della radice**) *Sia data la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *con* $a_k \geq 0$, $\forall k \geq 0$. *Si supponga che esista, finito o infinito, il limite*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell\,.$$

Allora se $\ell < 1$, *la serie converge; se* $\ell > 1$, *la serie diverge.*

Dimostrazione. La dimostrazione è sostanzialmente identica a quella del teorema precedente ed è lasciata al lettore. □

Esempi 5.35

i) Si consideri la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$. Allora $a_k = \frac{k}{3^k}$ e $a_{k+1} = \frac{k+1}{3^{k+1}}$; dunque

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{3} < 1\,.$$

Pertanto, applicando il Criterio del rapporto 5.33, la serie data converge.

ii) Si consideri la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$. Allora

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 < 1\,.$$

Pertanto, applicando il Criterio della radice 5.34, la serie data converge. □

Si noti che, sia per il Criterio del rapporto sia per il Criterio della radice, non si può concludere nulla nel caso in cui $\ell = 1$. Ad esempio, le serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ sono rispettivamente divergente e convergente, ma entrambe soddisfano la condizione in ciascuno dei due criteri con $\ell = 1$.

5.5.2 Serie a termini di segno alterno

Si tratta di serie della forma

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \qquad \text{con} \qquad b_k > 0\,, \quad \forall k \geq 0\,.}$$

Vale il seguente criterio dovuto a Leibniz.

Teorema 5.36 (**Criterio di Leibniz**) *Data una serie a termini di segno alterno* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$, *se valgono le due condizioni*

i) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$;

ii) la successione $\{b_k\}_{k\geq 0}$ *è monotona decrescente*,

allora la serie è convergente. Detta s *la sua somma, per ogni* $n \geq 0$ *si ha*

$$|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1} \qquad e \qquad s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}\,.$$

Dimostrazione. Notiiamo che, poiché la successione $\{b_k\}_{k\geq 0}$ è decrescente, si ha

$$s_{2n} = s_{2n-2} - b_{2n-1} + b_{2n} = s_{2n-2} - (b_{2n-1} - b_{2n}) \leq s_{2n-2}$$

e

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + b_{2n} - b_{2n+1} \geq s_{2n-1}\,.$$

Dunque la sottosuccessione delle ridotte di indice pari è decrescente mentre quella delle ridotte di indice dispari è crescente. Inoltre, per ogni $n \geq 0$,

$$s_{2n} = s_{2n-1} + b_{2n} \geq s_{2n-1} \geq \ldots \geq s_1$$

e

$$s_{2n+1} = s_{2n} - b_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_0$$

Così $\{s_{2n}\}_{n\geq 0}$ è limitata inferiormente e $\{s_{2n+1}\}_{n\geq 0}$ è limitata superiormente. Per il Teorema 3.9, entrambe le successioni convergono; poniamo

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \inf_{n\geq 0} s_{2n} = s^* \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \sup_{n\geq 0} s_{2n+1} = s_*\,.$$

Tuttavia, i due limiti coincidono, poiché

$$s^* - s_* = \lim_{n\to\infty}\big(s_{2n} - s_{2n+1}\big) = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0\,;$$

concludiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$ converge a $s = s^* = s_*$. Inoltre, per quanto detto, si ha

$$s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}\,, \qquad \forall n \geq 0\,,$$

ossia la successione $\{s_{2n}\}_{n\geq 0}$ approssima s per eccesso, mentre $\{s_{2n+1}\}_{n\geq 0}$ approssima s per difetto. Infine, per ogni $n \geq 0$, risulta

$$0 \leq s - s_{2n+1} \leq s_{2n+2} - s_{2n+1} = b_{2n+2}$$

e

$$0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = b_{2n+1}$$

ovvero $|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}$. □

Esempio 5.37

Consideriamo la serie armonica a segni alterni $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$. Poiché $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$ e la successione $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k\geq 1}$ è monotona strettamente decrescente, la serie converge. □

Per studiare le serie a termini di segno arbitrario, è utile introdurre il concetto di convergenza assoluta.

Definizione 5.38 *Si dice che la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge assolutamente** *se converge la serie a termini positivi* $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$.

Esempio 5.39

La serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}$ converge assolutamente in quanto converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. □

Il seguente criterio assicura che la convergenza assoluta implica la convergenza della serie.

Teorema 5.40 (**Criterio di convergenza assoluta**) *Se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente, allora essa converge e si ha*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\,.$$

Dimostrazione. Definiamo le successioni

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k & \text{se } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_k < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad a_k^- = \begin{cases} 0 & \text{se } a_k \geq 0 \\ -a_k & \text{se } a_k < 0\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $a_k^+, a_k^- \geq 0$ per ogni $k \geq 0$, e risulta

$$a_k = a_k^+ - a_k^- \qquad \text{e} \qquad |a_k| = a_k^+ + a_k^-\,.$$

Poiché $0 \le a_k^+, a_k^- \le |a_k|$, per ogni $k \ge 0$, possiamo applicare il Criterio del confronto (Teorema 5.29) e ottenere che le serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ convergono. Osservando che, per ogni $n \ge 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k^+ - a_k^-\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- ,$$

deduciamo che anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ converge. Infine, passando al limite per $n \to \infty$ nella relazione

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| ,$$

si ottiene la disuguaglianza richiesta. □

Osservazione 5.41 Esistono serie che convergono ma non assolutamente. Ad esempio, la serie armonica a segni alterni $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge, mentre la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Dunque la serie armonica a segni alterni non converge assolutamente. Diremo in tal caso che la **serie converge semplicemente** oppure **condizionatamente**. □

Il criterio precedente permette di studiare serie a segno variabile considerandone la convergenza assoluta. Essendo la serie dei valori assoluti a termini positivi, si possono applicare a tale serie i criteri visti nel § 5.5.1.

5.6 Esercizi

1. *Confrontare gli infinitesimi:*

   $\boxed{\text{a)}}$ $x - 1,\ \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1},\ (\sqrt{x} - 1)^2$ per $x \to 1$

   b) $\frac{1}{x^3},\ \mathrm{e}^{-x},\ x^2\mathrm{e}^{-x},\ x^2 3^{-x}$ per $x \to +\infty$

2. *Confrontare gli infiniti:*

   $\boxed{\text{a)}}$ $x^4,\ \sqrt[3]{x^{11} - 2x^2},\ \frac{x^4}{\log(1+x)}$ per $x \to +\infty$

   b) $\frac{x^2}{\log x},\ x \log x,\ x^2 3^x,\ 3^x \log x$ per $x \to +\infty$

3. *Verificare che* $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{3}$ *e* $g(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{5}$ *sono infinitesimi dello stesso ordine per* $x \to 0$ *e determinare* $\ell \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) \sim \ell g(x)$ *per* $x \to 0$.

4. *Verificare che* $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}$ *e* $g(x) = 2x + 1$ *sono infiniti dello stesso ordine per* $x \to -\infty$ *e determinare* $\ell \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) \sim \ell g(x)$ *per* $x \to -\infty$.

5. *Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale rispetto a* $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ *per* $x \to +\infty$ *delle funzioni:*

   a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + \sqrt[5]{x}}{x^4}$

   b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+3}} - 1$

   c) $f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

   d) $f(x) = \log\left(9 + \sin\dfrac{2}{x}\right) - 2\log 3$

6. *Determinare l'ordine di infinito e la parte principale rispetto a* $\varphi(x) = x$ *per* $x \to +\infty$ *delle funzioni:*

   a) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + x^4}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}$

7. *Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale rispetto a* $\varphi(x) = x$ *per* $x \to 0$ *delle funzioni:*

   a) $f(x) = \left(\sqrt{1+3x} - 1\right)\sin 2x^2$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{\cos x} - 1$

   c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+3x^3}}{1+2x^3} - 1$

   d) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2} - 1$

   e) $f(x) = \log\cos x$

   f) $f(x) = e^{\cos x} - e^{\sqrt{x^3+1}}$

8. *Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale rispetto a* $\varphi(x) = x - x_0$ *per* $x \to x_0$ *delle funzioni:*

   a) $f(x) = \log x - \log 3\,, \qquad x_0 = 3$

   b) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}\,, \qquad x_0 = 2$

   c) $f(x) = e^{x^2} - e\,, \qquad x_0 = 1$

   d) $f(x) = \sin x\,, \qquad x_0 = \pi$

   e) $f(x) = 1 + \cos x\,, \qquad x_0 = \pi$

   f) $f(x) = \sin(\pi\cos x)\,, \qquad x_0 = \pi$

9. *Calcolare i seguenti limiti:*

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sqrt{1+3x^2}}{\cos x} - 1\right)$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2}{x-2}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\log(3 - \sqrt{x+1})}{3-x}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{\sqrt{x+2}} - e^{\sqrt{3}}}{(x-1)^2}$

10. *Determinare dominio e asintoti delle seguenti funzioni:*

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

b) $f(x) = x + 2\arctan x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-(x+1)|x-2|}{2x+3}$

d) $f(x) = x\mathrm{e}^{1/|x^2-1|}$

e) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

f) $f(x) = \log(x+\mathrm{e}^x)$

11. *Studiare il comportamento delle seguenti successioni:*

a) $a_n = n - \sqrt{n}$

b) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^2+2}}$

c) $a_n = \dfrac{3^n-4^n}{1+4^n}$

d) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$

e) $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

f) $a_n = \dbinom{n}{3}\dfrac{6}{n^3}$

g) $a_n = \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+2}\right)^{\sqrt{n^2+2}}$

h) $a_n = 2^n \sin(2^{-n}\pi)$

i) $a_n = n\cos\dfrac{n+1}{n}\dfrac{\pi}{2}$

ℓ) $a_n = n!\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n!}} - 1\right)$

12. *Calcolare i seguenti limiti:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2^n+5^n}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1+(-1)^n)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3+2}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!-n!}{n^2(n+1)!}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$

h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sin n}{n^2+2n-3}$

13. *Studiare la convergenza delle seguenti serie a termini positivi:*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2k^2+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k^5-3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\arcsin\frac{7}{k^2}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{5}{k^2}\right)$

14. *Studiare la convergenza delle seguenti serie a termini di segno alterno:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \log\left(\frac{1}{k}+1\right)$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sqrt{\frac{k^3+3}{2k^3-5}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(k\pi+\frac{1}{k}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{\sqrt{2}}-1\right)$

15. *Studiare la convergenza delle seguenti serie:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k^3}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\binom{k}{2}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{2}-1\right)$

16. *Verificare la convergenza delle seguenti serie e calcolarne la somma:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{k-1}}{5^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{2\cdot 4^{2k}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

5.6.1 Soluzioni

1. *Confronto di infinitesimi:*

a) Poiché

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}(x-1)=-\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}(x-1)^{2/3}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)^2}=0\,,$$

si ha, per $x\to 1$,

$$x-1=o\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}\right)\,,\qquad (\sqrt{x}-1)^2=o(x-1)\,.$$

Dunque possiamo ordinare, dall'ordine minore al maggiore, i tre infinitesimi:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}\,,\quad x-1\,,\quad (\sqrt{x}-1)^2\,.$$

Si può arrivare allo stesso risultato osservando che, per $x \to 1$,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}} \sim -(x-1)^{1/3}$$

e che

$$\sqrt{x} - 1 = \sqrt{1 + (x-1)} - 1 \sim \frac{1}{2}(x-1)$$

e dunque $(\sqrt{x} - 1)^2 \sim \frac{1}{4}(x-1)^2$.

b) In ordine crescente si ha: $\dfrac{1}{x^3}$, $x^2 \mathrm{e}^{-x}$, e^{-x}, $x^2 3^{-x}$.

2. *Confronto di infiniti:*

a) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\sqrt[3]{x^{11} - 2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^{11/3}\sqrt[3]{1 - 2x^{-9}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/3}}{\sqrt[3]{1 - 2x^{-9}}} = +\infty\,.$$

Dunque $\sqrt[3]{x^{11} - 2x^2} = o(x^4)$ per $x \to +\infty$ e $\sqrt[3]{x^{11} - 2x^2}$ è un infinito di ordine inferiore a x^4.

Si ha immediatamente $\dfrac{x^4}{\log(1+x)} = o(x^4)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^{11} - 2x^2}\,\log(1+x)}{x^4} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)\sqrt[3]{1 - 2x^{-9}}}{x^{1/3}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{1/3}} = 0\,,\end{aligned}$$

ossia $\sqrt[3]{x^{11} - 2x^2} = o\left(\dfrac{x^4}{\log(1+x)}\right)$. In conclusione, l'ordinamento crescente degli infiniti è:

$$\sqrt[3]{x^{11} - 2x^2}\,, \qquad \frac{x^4}{\log(1+x)}\,, \qquad x^4\,.$$

b) In ordine di infinito crescente si ha: $x \log x$, $\dfrac{x^2}{\log x}$, $3^x \log x$, $x^2 3^x$.

3. Poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+3-3)(\sqrt{x+5} + \sqrt{5})}{(x+5-5)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{5}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

possiamo dire che $f(x) \sim \sqrt{\frac{5}{3}}\, g(x)$ per $x \to 0$.

4. Risulta $f(x) \sim \frac{1}{2}\, g(x)$ per $x \to -\infty$.

5. *Ordine di infinitesimo e parte principale:*

a) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{2x^2+\sqrt[5]{x}}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{2+x^{-9/5}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x^{\alpha-2}\,.$$

Tale limite è finito e uguale a 2 se $\alpha = 2$. Pertanto l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ è 2 e la sua parte principale è $p(x) = \frac{2}{x^2}$.
In alternativa, si può osservare che, per $x \to +\infty$, $\sqrt[5]{x} = o(x^2)$, dunque $2x^2 + \sqrt[5]{x} \sim 2x^2$ e quindi $f(x) \sim \frac{2x^2}{x^4} = \frac{2}{x^2}$.

b) L'ordine di infinitesimo è 1 e la parte principale $p(x) = -\frac{3}{2x}$.

c) Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

e dunque la funzione $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1\,;$$

dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \sin\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt{x^2-1}-x\right) \frac{\sin\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\,.\end{aligned}$$

In alternativa, si può utilizzare la seguente osservazione: $\sin g(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se la funzione $g(x)$ è infinitesima per $x \to x_0$. Allora, per $x \to +\infty$, si ha

$$\sin\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) \sim \sqrt{x^2-1}-x$$

e dunque, per la Proposizione 5.5, direttamente

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \sin\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\,.$$

Considerando quest'ultimo limite, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

se $\alpha = 1$. Concludiamo che l'ordine di infinitesimo è 1 e la parte principale è $p(x) = \frac{1}{2x}$.

d) Risulta

$$\log\left(9+\sin\frac{2}{x}\right)-2\log 3=\log 9\left(1+\frac{1}{9}\sin\frac{2}{x}\right)-\log 9=\log\left(1+\frac{1}{9}\sin\frac{2}{x}\right).$$

Poiché, per $x\to+\infty$, $\frac{1}{9}\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{9x}$ (si veda l'osservazione fatta nell'esercizio precedente) e $\log(1+y)\sim y$ per $y\to 0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^\alpha\frac{1}{9}\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^\alpha}{9x}=\frac{2}{9}$$

se $\alpha=1$. Dunque l'ordine di infinitesimo di f è 1 e la sua parte principale è $p(x)=\frac{2}{9x}$.

6. *Ordine di infinito e parte principale:*

a) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{x^\alpha}=-\lim_{x\to+\infty}x^{2-\alpha}=-1$$

se $\alpha=2$. Pertanto l'ordine di infinito di f è 2 e la sua parte principale è $p(x)=-x^2$.

b) L'ordine di infinito di f è 1 e la sua parte principale è $p(x)=2x$.

7. *Ordine di infinitesimo e parte principale:*

a) Si ha $\sqrt{1+3x}-1\sim\frac{3}{2}x$ per $x\to 0$; infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{\frac{3}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{1+3x-1}{x(\sqrt{1+3x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+3x}+1}=1\,.$$

Inoltre $\sin 2x^2\sim 2x^2$ per $x\to 0$ e quindi

$$f(x)\sim\frac{3}{2}x\cdot 2x^2\qquad\text{ossia}\qquad f(x)\sim 3x^3\,,\quad x\to 0\,.$$

Pertanto l'ordine di infinitesimo di f è 3 e la sua parte principale è $p(x)=3x^3$.

b) L'ordine di infinitesimo di f è 2 e la sua parte principale è $p(x)=-\frac{1}{6}x^2$.

c) L'ordine di infinitesimo di f è 3 e la sua parte principale è $p(x)=-\frac{1}{2}x^3$.

d) Usando la relazione $\mathrm{e}^x=1+x+o(x)$ per $x\to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x^2}{x^\alpha(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x^2}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x^\alpha}-x^{2-\alpha}\right)=1$$

se $\alpha=1$. Dunque l'ordine di infinitesimo di f è 1 e la sua parte principale è $p(x)=x$.

e) L'ordine di infinitesimo di f è 2 e la sua parte principale è $p(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

f) Ricordando che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0\,,$$
$$\sqrt{x^3+1} = (1+x^3)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0\,,$$
$$\mathrm{e}^t = 1 + t + o(t) \qquad t \to 0\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} - \mathrm{e}^{1+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)} = \mathrm{e}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}\Big) \\ &= \mathrm{e}\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\Big) \\ &= \mathrm{e}\Big(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\Big) = -\frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + o(x^2)\,, \quad x \to 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto f ha ordine di infinitesimo 2 e parte principale $p(x) = -\frac{\mathrm{e}}{2}x^2$.

8. *Ordine di infinitesimo e parte principale:*

a) Poniamo $t = x - 3$ e osserviamo che $t \to 0$ per $x \to 3$. Allora

$$\log x - \log 3 = \log(3+t) - \log 3 = \log 3\Big(1 + \frac{t}{3}\Big) - \log 3 = \log\Big(1 + \frac{t}{3}\Big)\,.$$

Poiché $\log\big(1 + \frac{t}{3}\big) \sim \frac{t}{3}$ per $t \to 0$, risulta

$$f(x) = \log x - \log 3 \sim \frac{1}{3}(x-3)\,, \quad x \to 3\,.$$

Dunque f ha ordine di infinitesimo 1 e parte principale $p(x) = \frac{1}{3}(x-3)$.

b) L'ordine di infinitesimo di f è 1 e la parte principale è $p(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2)$.

c) Ricordando che $\mathrm{e}^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}(\mathrm{e}^{x^2-1} - 1) \sim \mathrm{e}(x^2 - 1) \\ &= \mathrm{e}(x+1)(x-1) \sim 2\mathrm{e}(x-1) \quad \text{per} \quad x \to 1\,. \end{aligned}$$

Dunque f ha ordine di infinitesimo 1 e parte principale $p(x) = 2\mathrm{e}(x-1)$.

d) L'ordine di infinitesimo di f è 1 e la parte principale è $p(x) = -(x-\pi)$.

e) Poniamo $t = x - \pi$. Allora

$$1 + \cos x = 1 + \cos(t+\pi) = 1 - \cos t\,.$$

Poiché $t \to 0$ per $x \to \pi$, risulta $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$ e dunque

$$f(x) = 1 + \cos x \sim \frac{1}{2}(x-\pi)^2\,, \quad x \to \pi\,.$$

Pertanto f ha ordine di infinitesimo 2 e parte principale $p(x) = \frac{1}{2}(x-\pi)^2$.

f) L'ordine di infinitesimo di f è 2 e la parte principale è $p(x) = -\frac{\pi}{2}(x-\pi)^2$.

9. *Limiti:*

a) Ricordando che, per $x \to 0$,

$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \text{e} \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - \cos x}{x^2 \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{3}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2\,.\end{aligned}$$

b) 0.

c) Posto $y = 3 - x$, risulta

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 3^-} \frac{\log(3 - \sqrt{x+1})}{3-x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\log(3 - \sqrt{4-y})}{y} \\ &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\log(3 - 2\sqrt{1-y/4})}{y}\,.\end{aligned}$$

Poiché $\sqrt{1-y/4} = 1 - \frac{1}{8}y + o(y)$, $y \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}L &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\log(3 - 2 + \frac{y}{4} + o(y))}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\log(1 + \frac{y}{4} + o(y))}{y} \\ &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{y}{4} + o(y)}{y} = \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

d) Il limite non esiste, ma il limite destro vale $+\infty$ e quello sinistro $-\infty$.

10. *Dominio e asintoti:*

a) La funzione è definita per $x^2 - 1 > 0$, ossia per $x < -1$ e per $x > 1$; pertanto $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Si osservi che la funzione è pari, pertanto il suo comportamento per $x < 0$ si può dedurre da quello per $x > 0$. Si ha

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{|x|} = +\infty \\ &\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty\,.\end{aligned}$$

Quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale sinistro e la retta $x = 1$ è asintoto verticale destro; non vi sono asintoti orizzontali. Cerchiamo l'eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)^2-x^4+x^2}{\sqrt{x^2-1}(x^2+1+x\sqrt{x^2-1})}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^3}=0\end{aligned}$$

dunque la retta $y=x$ è asintoto obliquo destro.
Per $x\to-\infty$, si può procedere in maniera analoga, ottenendo che la retta $y=-x$ è asintoto obliquo sinistro.

b) $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$; $y=x+\pi$ asintoto obliquo destro, $y=x-\pi$ asintoto obliquo sinistro.

c) La funzione è definita per $x\neq-\frac{3}{2}$, dunque $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$. Inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}f(x)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x+1)(2-x)}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x-2}{2x+3}=-\infty\\\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x+1)(x-2)}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{1}{2}\\\lim_{x\to-\frac{3}{2}^\pm}f(x)&=\lim_{x\to-\frac{3}{2}^\pm}\frac{x^2-(x+1)(2-x)}{2x+3}=\frac{4}{0^\pm}=\pm\infty\,;\end{aligned}$$

quindi la retta $y=\frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale destro e la retta $x=-\frac{3}{2}$ è un asintoto verticale. Cerchiamo l'eventuale asintoto obliquo sinistro:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x-2}{x(2x+3)}=1\\\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x-2}{2x+3}=-2\,;\end{aligned}$$

pertanto la retta $y=x-2$ è asintoto obliquo sinistro.

d) $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; $x=\pm1$ asintoti verticali; la retta $y=x$ è asintoto obliquo completo.

e) $\operatorname{dom} f=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$; asintoto orizzontale $y=\mathrm{e}$, asintoto verticale sinistro $x=-1$.

f) La funzione f è definita per $x+\mathrm{e}^x>0$. Per risolvere tale disequazione, osserviamo che $g(x)=x+\mathrm{e}^x$ è una funzione strettamente crescente su $\mathbb{R}$ (somma di due funzioni aventi tale proprietà) con $g(-1)=-1+\frac{1}{\mathrm{e}}<0$ e $g(0)=1>0$. Applicando il Teorema di esistenza degli zeri 4.23, si deduce l'esistenza di un unico punto $x_0\in(-1,0)$ tale che $g(x_0)=0$. Dunque $g(x)>0$ per $x>x_0$ e $\operatorname{dom} f=(x_0,+\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \log \lim_{x\to x_0^+} (x + \mathrm{e}^x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,;$$

quindi $x = x_0$ è un asintoto verticale destro e non vi sono asintoti orizzontali per $x \to +\infty$. Cerchiamo l'eventuale asintoto obliquo destro:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log \mathrm{e}^x(1 + x\mathrm{e}^{-x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \log(1 + x\mathrm{e}^{-x})}{x} \\ &= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1 + x\mathrm{e}^{-x})}{x} = 1\,, \\ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to+\infty} \log(1 + x\mathrm{e}^{-x}) = 0\end{aligned}$$

in quanto $\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (si ricordi la (5.6) a)). Pertanto la retta $y = x$ è asintoto obliquo destro.

11. *Comportamento di successioni:*

a) Diverge a $+\infty$. b) Indeterminata.

c) Ricordando il comportamento della successione geometrica (Esempio 5.18 i)) si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left((\frac{3}{4})^n - 1\right)}{4^n(4^{-n} + 1)} = -1\,,$$

quindi la successione converge a -1.

d) Diverge a $+\infty$.

e) Scriviamo

$$a_n = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n-1}\cdots\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+1}{1} > n+1\,,$$

poiché $\lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, per il secondo Teorema del confronto (caso infinito), si deduce che la successione diverge a $+\infty$.

f) Converge a 1.

g) Poiché

$$a_n = \exp\left(\sqrt{n^2+2}\,\log\frac{n^2-n+1}{n^2+n+2}\right)\,,$$

studiamo la successione

$$b_n = \sqrt{n^2+2}\,\log\frac{n^2-n+1}{n^2+n+2} = \sqrt{n^2+2}\,\log\left(1 - \frac{2n+1}{n^2+n+2}\right)\,.$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+n+2} = 0$$

e quindi

$$\log\left(1-\frac{2n+1}{n^2+n+2}\right)\sim-\frac{2n+1}{n^2+n+2}\,,\qquad n\to\infty\,.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} b_n=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}\,(2n+1)}{n^2+n+2}=-\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2}=-2\,;$$

dunque la successione $\{a_n\}$ converge a e^{-2}.

h) Posto $x=2^{-n}\pi$, osserviamo che $x\to 0^+$ per $n\to\infty$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{x\to 0^+}\pi\,\frac{\sin x}{x}=\pi$$

e la successione $\{a_n\}$ converge a π.

i) Osserviamo che

$$\cos\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)=-\sin\frac{\pi}{2n}\,;$$

quindi, posto $x=\frac{\pi}{2n}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{2n}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi}{2}\frac{\sin x}{x}=-\frac{\pi}{2}$$

e la successione $\{a_n\}$ converge a $-\frac{\pi}{2}$.

ℓ) Converge a $-\frac{1}{2}$.

12. *Limiti:*

a) 0.

b) Poiché $\frac{1}{n}\to 0$ per $n\to\infty$, si ha

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\text{e}\qquad\sqrt{1-\frac{2}{n}}=1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{3}{2}\,.$$

c) 0.

d) Non esiste.

e) Scriviamo

$$\sqrt[n]{3n^3+2}=\exp\left(\frac{1}{n}\log(3n^3+2)\right)$$

e osserviamo che

$$\frac{1}{n}\log(3n^3+2)=\frac{\log\left(3n^3\left(1+\frac{2}{3n^3}\right)\right)}{n}=\frac{\log 3}{n}+\frac{3\log n}{n}+\frac{\log\left(1+\frac{2}{3n^3}\right)}{n}\,.$$

Inoltre

$$\log\left(1+\frac{2}{3n^3}\right) \sim \frac{2}{3n^3}\,, \qquad n\to\infty\,;$$

dunque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(3n^3+2)=0$$

e quindi il limite cercato vale $\mathrm{e}^0=1$.

f) Scriviamo

$$\frac{(n+3)!-n!}{n^2(n+1)!}=\frac{n!((n+3)(n+2)(n+1)-1)}{n^2(n+1)n!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)-1}{n^2(n+1)}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!-n!}{n^2(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+2)(n+1)-1}{n^2(n+1)}=1\,.$$

g) Poiché

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\,, \qquad n\to\infty\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{3}\,.$$

h) 1.

13. *Studio della convergenza di serie a termini positivi:*

a) Converge.

b) Osserviamo che il termine generale a_k tende a $+\infty$ per $k\to\infty$. Pertanto per la Proprietà 5.25 la serie diverge positivamente. In alternativa, è possibile utilizzare il Criterio della radice 5.34.

c) Applichiamo il Criterio del rapporto 5.33:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{3^k}\,;$$

scrivendo $(k+1)!=(k+1)k!$ e semplificando, si ottiene

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3}{k+1}=0\,.$$

Ne segue che la serie converge.

d) Applichiamo nuovamente il Criterio del rapporto 5.33:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1\,.$$

Dunque la serie converge.

e) Osserviamo che

$$a_k \sim k\frac{7}{k^2} = \frac{7}{k} \qquad \text{per} \qquad k \to \infty\,.$$

Pertanto, applicando il Criterio del confronto asintotico 5.31 e ricordando che la serie armonica diverge, possiamo concludere che la serie data diverge.

f) Converge.

14. *Studio della convergenza di serie a termini di segno alterno:*

a) Converge semplicemente; b) non converge.

c) Poiché

$$\sin\left(k\pi + \frac{1}{k}\right) = \cos(k\pi)\,\sin\frac{1}{k} = (-1)^k \sin\frac{1}{k}\,,$$

la serie assegnata è a termini di segno alterno con $b_k = \sin\frac{1}{k}$. Risulta

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \qquad \text{e} \qquad b_{k+1} < b_k\,.$$

Pertanto, per il Criterio di Leibniz 5.36, la serie converge. Osserviamo che la serie non converge assolutamente in quanto $\sin\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k}$ per $k \to \infty$, dunque la serie dei valori assoluti si comporta come la serie armonica che diverge.

d) La serie converge assolutamente in quanto, usando una delle equivalenze di pag. 133, si ha

$$\left|(-1)^k \left(\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{\sqrt{2}} - 1\right)\right| \sim \frac{\sqrt{2}}{k^2}\,, \qquad k \to \infty\,,$$

e quindi, ricordando l'Esempio 5.30 i), possiamo applicare il Criterio del confronto asintotico 5.31 alla serie dei valori assoluti.

15. *Studio della convergenza di serie:*

a) Converge.

b) Osserviamo che

$$\left|\frac{\sin k}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}\,, \qquad \text{per ogni } k > 0\,;$$

la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge e dunque, applicando il Criterio del confronto 5.29, anche la serie dei valori assoluti converge. Pertanto la serie data converge assolutamente.

c) Diverge.

d) Si tratta di una serie a termini di segno alterno con $b_k = \sqrt[k]{2} - 1$. Escludendo il primo termine $b_0 = 0$, la successione $\{b_k\}_{k\geq 1}$ è decrescente, essendo $\sqrt[k]{2} > \sqrt[k+1]{2}$ per ogni $k \geq 1$. Dunque possiamo applicare il Criterio di Leibniz 5.36 e concludere che la serie converge. Si osservi che la serie non converge assolutamente, in quanto

$$\sqrt[k]{2} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\log 2}{k}} - 1 \sim \frac{\log 2}{k}\,, \qquad k \to \infty$$

e quindi la serie dei valori assoluti si comporta come la serie armonica che diverge.

16. *Verifica della convergenza di serie e calcolo della loro somma:*

a) $-\frac{1}{7}$.

b) A meno di un fattore, si tratta di una serie geometrica; ricordando l'Esempio 5.27, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2 \cdot 4^{2k}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{3}{16}} - 1\right) = \frac{3}{26}$$

(si noti che il primo indice della sommatoria è 1).

c) Si tratta di una serie telescopica in quanto possiamo scrivere

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\,;$$

dunque

$$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\,,$$

da cui $s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

d) $\frac{1}{2}$.

6

Calcolo differenziale

Costituiscono oggetto del Calcolo differenziale la definizione rigorosa del concetto di derivata, lo studio della derivabilità di una funzione ed il calcolo esplicito delle sue derivate successive, l'uso delle derivate nell'analisi del comportamento locale e globale di una funzione.

6.1 La derivata

Iniziamo introducendo il concetto di derivata di una funzione.

Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale; sia $x_0 \in \operatorname{dom} f$ e supponiamo che f sia definita in tutto un intorno $I_r(x_0)$ di x_0. Fissato $x \in I_r(x_0)$, $x \neq x_0$, indichiamo con

$$\Delta x = x - x_0$$

l'**incremento** (positivo o negativo) **della variabile indipendente tra** x_0 **e** x, e con

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

il corrispondente **incremento della variabile dipendente**. Notiamo che, dalle definizioni, segue immediatamente che $x = x_0 + \Delta x$ e $f(x) = f(x_0) + \Delta f$.

Il quoziente

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

dicesi **rapporto incrementale della funzione** f **tra** x_0 **e** x.

Osserviamo che, mentre Δf rappresenta l'*incremento assoluto* della variabile dipendente f nel passaggio da x_0 a $x_0 + \Delta x$, il rapporto incrementale ne rappresenta il *tasso di incremento* (mentre la quantità $\Delta f / f$ ne rappresenta l'*incremento*

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_6, © Springer-Verlag Italia 2014

relativo). Se moltiplichiamo per 100 il rapporto incrementale, otteniamo il cosiddetto *tasso di incremento percentuale*. Ad esempio, se a fronte di un incremento $\Delta x = 0.2$ della variabile indipendente x si registra un incremento $\Delta f = 0.06$ della variabile dipendente f, il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ vale $0.3 = \frac{30}{100}$ e il tasso di incremento percentuale è del 30%.

Dal punto di vista geometrico, il rapporto incrementale tra x_0 e un punto x_1 nell'intorno di x_0 è il coefficiente angolare della retta s che passa per i punti $P_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$ e $P_1 = \big(x_1, f(x_1)\big)$ appartenenti al grafico della funzione; essa è detta **retta secante** il grafico di f in P_0 e P_1 (si veda la Figura 6.1). Infatti, posto $\Delta x = x_1 - x_0$ e $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$, l'equazione della retta secante è

$$y = s(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Dal punto di vista fisico, una classica interpretazione del rapporto incrementale è la seguente. Sia M una particella materiale che si muove lungo una linea retta al variare del tempo; indichiamo con $s = s(t)$ l'ascissa del punto sulla retta occupato da M al tempo t, rispetto ad una posizione di riferimento O. Nell'intervallo di tempo tra gli istanti t_0 e $t_1 = t_0 + \Delta t$, la particella subisce uno spostamento $\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$. Il rapporto incrementale $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ rappresenta allora la *velocità media* della particella nell'intervallo temporale considerato.

Studiamo ora il comportamento del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento Δx.

Figura 6.1. Retta secante e retta tangente al grafico della funzione f in P_0

Definizione 6.1 *Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$. Essa dicesi* **derivabile in** x_0 *se esiste finito il limite del rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ tra x_0 e x, per x tendente a x_0. Il numero reale*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

dicesi **derivata (prima) di** f **in** x_0.

Altri simboli spesso usati per indicare la derivata in x_0 sono

$$y'(x_0), \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0), \qquad \mathrm{D}f(x_0).$$

La prima notazione viene associata al nome di Newton, la seconda a quella di Leibniz.

Dal punto di vista geometrico, $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare di una retta t, detta **retta tangente** al grafico di f in $P_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$: essa si ottiene come posizione limite delle rette s secanti il grafico di f in P_0 e in punti $P = \big(x, f(x)\big)$ via via più vicini a P_0. Ricordando la (6.1) e la definizione di derivata, abbiamo infatti

$$\boxed{y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Dal punto di vista fisico, la derivata $v(t_0) = s'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ rappresenta la *velocità istantanea* della particella M all'istante t_0.

Poniamo poi

$$\operatorname{dom} f' = \{x \in \operatorname{dom} f \ : \ f \text{ è derivabile in } x\}$$

e definiamo la funzione $f' : \operatorname{dom} f' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f' : x \mapsto f'(x)$; essa associa ad ogni $x \in \operatorname{dom} f'$ il valore della derivata di f in x. Tale funzione dicesi **funzione derivata (prima) di** f.

Definizione 6.2 *Sia I un insieme contenuto in* $\operatorname{dom} f$. *La funzione f dicesi* **derivabile su** I *(o* **in** I*), se f è derivabile in ogni punto di I.*

Stabiliamo innanzitutto una semplice ma significativa proprietà delle funzioni derivabili.

Proposizione 6.3 *Se f è una funzione derivabile in un punto x_0, allora essa è continua in x_0.*

Dimostrazione. La continuità di f in x_0 può essere espressa come

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0.$$

Ora, se f è derivabile in x_0, abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

Non tutte le funzioni continue in un punto sono ivi derivabili. Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$. Essa *è continua* nell'origine; tuttavia, il suo rapporto incrementale tra l'origine e un punto $x \neq 0$ vale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0,\\ -1 & \text{se } x < 0,\end{cases} \tag{6.2}$$

e quindi non ammette limite per $x \to 0$. In altri termini, f *non è derivabile* nell'origine. Questo esempio mostra dunque che l'implicazione contenuta nella Proposizione 6.3 non può essere rovesciata: la proprietà di derivabilità è *più forte* della proprietà di continuità. Approfondiremo questo argomento nel § 6.3.

6.2 Derivate di funzioni elementari. Regole di derivazione

Studiamo dapprima la derivabilità di alcune funzioni elementari, usando direttamente la Definizione 6.1.

i) Consideriamo innanzitutto la funzione affine $f(x) = ax + b$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Abbiamo

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\big(a(x_0+\Delta x)+b\big) - (ax_0+b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a = a,$$

coerentemente con il fatto che il grafico di f è una retta di coefficiente angolare a. Dunque, la derivata della funzione $f(x) = ax + b$ è la funzione costante $f'(x) = a$.

Notiamo in particolare che, se f è una funzione costante ($a = 0$), la sua derivata è identicamente nulla.

ii) Sia ora $f(x) = x^2$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si ha

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Dunque, la derivata della funzione $f(x) = x^2$ è la funzione $f'(x) = 2x$.

iii) Più in generale, possiamo considerare la funzione $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Ricordando la formula del binomio di Newton (1.13), si ha, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^n + n x_0^{n-1} \Delta x + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} (\Delta x)^k - x_0^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(n x_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} (\Delta x)^{k-1} \right) = n x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Dunque, la derivata della funzione $f(x) = x^n$ è la funzione $f'(x) = nx^{n-1}$.

iv) Un'ulteriore generalizzazione si ha considerando la funzione $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia $x_0 \neq 0$ un punto del suo dominio. Allora

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1 \right]}{\Delta x} \\ &= x_0^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x_0}}. \end{aligned}$$

Mediante la sostituzione $y = \frac{\Delta x}{x_0}$ ci riconduciamo al limite fondamentale (4.13) e dunque otteniamo

$$f'(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

Se $\alpha > 1$, è facile verificare che f è derivabile anche in $x_0 = 0$ e si ha $f'(0) = 0$. Pertanto, concludiamo che la funzione $f(x) = x^\alpha$ è derivabile in tutti i punti in cui è definita l'espressione $x^{\alpha-1}$; la sua derivata è la funzione $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, definita in $[0, +\infty)$, è derivabile in $(0, +\infty)$ e la sua derivata è $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Invece, la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$, definita su $\mathbb{R}$, è ivi anche derivabile e si ha $f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$.

v) Passiamo ora alle funzioni trigonometriche. Sia $f(x) = \sin x$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$. Ricordando la formula di prostaferesi (2.14), abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right). \end{aligned}$$

Usando il limite fondamentale (4.5) e la continuità della funzione coseno, concludiamo che

$$f'(x_0) = \cos x_0.$$

Pertanto, la derivata della funzione $f(x) = \sin x$ è la funzione $f'(x) = \cos x$.

Procedendo in modo analogo, e facendo ora ricorso alla formula di prostaferesi (2.15), otteniamo che la derivata della funzione $f(x) = \cos x$ è la funzione $f'(x) = -\sin x$.

vi) Da ultimo consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = a^x$. Tenendo presente il limite fondamentale (4.12), abbiamo

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \log a.$$

Dunque, la derivata della funzione $f(x) = a^x$ è la funzione $f'(x) = (\log a)a^x$.

Notiamo che, essendo $\log \mathrm{e} = 1$, si ha in particolare che la derivata della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ è la funzione $f'(x) = \mathrm{e}^x = f(x)$, cioè la funzione derivata f' coincide in ogni punto con la funzione f. Questo importante risultato è una delle motivazioni per la scelta del numero e di Nepero come base privilegiata per la funzione esponenziale.

Vediamo ora come si comporta la derivazione rispetto alle operazioni (algebriche, di composizione, di inversione) che sappiamo eseguire sulle funzioni. Stabiliamo pertanto delle *regole di derivazione* che ci permetteranno di calcolare agevolmente le derivate di funzioni ottenute a partire da funzioni elementari, senza dover ogni volta risalire alla definizione di derivata. Per le relative dimostrazioni si veda l'Appendice A.4.1, pag. 471.

Teorema 6.4 (**Algebra delle derivate**) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora sono ivi derivabili le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ e, se $g(x_0) \neq 0$, la funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Inoltre si ha*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \tag{6.3}$$

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \tag{6.4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \tag{6.5}$$

Corollario 6.5 (**Proprietà di linearità della derivata**) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \tag{6.6}$$

Dimostrazione. Usando la (6.4) e ricordando che la derivata di una costante è uguale a 0, abbiamo innanzitutto $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ e $(\beta g)'(x_0) = \beta g'(x_0)$. Il risultato segue allora dalla (6.3). □

Esempi 6.6

i) Per derivare un polinomio, usiamo ripetutamente il corollario precedente e il fatto che $\mathrm{D}\, x^n = nx^{n-1}$. Ad esempio, se $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2$, si ha

$$f'(x) = 3 \cdot 5x^4 - 2 \cdot 4x^3 - 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5 = 15x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x - 5.$$

ii) Per derivare una funzione razionale, usiamo la (6.5), avendo calcolato le derivate del numeratore e del denominatore come appena visto. Ad esempio, la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$$

è la funzione

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(2x-1) - (x^2 - 3x + 1)2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1}.$$

iii) Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 \sin x$. Usando la (6.4) e il fatto che $(\sin x)' = \cos x$, abbiamo

$$f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

iv) Consideriamo infine la funzione

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Usando la (6.5) e le derivate del seno e del coseno, otteniamo

$$f'(x) = \frac{\cos x \, \cos x - \sin x \, (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

In alternativa, usando la relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, otteniamo l'espressione equivalente

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

□

Teorema 6.7 (**Derivata di una funzione composta**) *Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Sia poi $g(y)$ una funzione derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0). \tag{6.7}$$

Esempi 6.8

i) Si voglia derivare la funzione $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Essa è composta dalle funzioni $f(x) = 1 - x^2$, la cui derivata è $f'(x) = -2x$, e $g(y) = \sqrt{y}$, la cui derivata è $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$. Applicando la (6.7), otteniamo

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ii) Consideriamo ora la funzione $h(x) = \mathrm{e}^{\cos 3x}$. Essa è composta dalle funzioni $f(x) = \cos 3x$ e $g(y) = \mathrm{e}^y$. A sua volta, la funzione $f(x)$ è composta dalle funzioni $\varphi(x) = 3x$ e $\psi(y) = \cos y$; dunque, grazie alla (6.7), abbiamo $f'(x) = -3\sin 3x$. D'altro canto, sappiamo che $g'(y) = \mathrm{e}^y$. Usando ancora la (6.7), concludiamo che

$$h'(x) = -3\mathrm{e}^{\cos 3x}\sin 3x.$$

□

Teorema 6.9 (**Derivata della funzione inversa**) *Sia $f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$; inoltre, sia f derivabile in x_0, con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{6.8}$$

Esempi 6.10

i) Consideriamo la funzione $y = f(x) = \tan x$, la cui funzione derivata è $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ e la cui funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = \arctan y$. Applicando la (6.8), otteniamo

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Se, per semplicità di notazioni, poniamo $f^{-1} = g$ e se torniamo ad indicare la variabile indipendente con la lettera x, possiamo dire che la derivata della funzione $g(x) = \arctan x$ è la funzione $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

ii) Consideriamo ora la funzione $y = f(x) = \sin x$. Sappiamo che nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, essa è invertibile e precisamente si ha $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$. D'altro canto, la derivata della funzione f è la funzione $f'(x) = \cos x$; usando la relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ e, tenendo conto che nell'intervallo di invertibilità considerato si ha $\cos x \geq 0$, possiamo esprimere la derivata di f nella forma equivalente $f'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Applicando allora la (6.8), otteniamo

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Se nuovamente poniamo $f^{-1} = g$ e torniamo alla variabile indipendente x, possiamo dire che la derivata della funzione $g(x) = \arcsin x$ è la funzione $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

In modo analogo, si dimostra che la derivata della funzione $g(x) = \arccos x$ è la funzione $g'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

iii) Consideriamo infine la funzione $y = f(x) = a^x$, la cui funzione derivata è $f'(x) = (\log a)a^x$ e la cui funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = \log_a y$. Applicando la (6.8), otteniamo

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(\log a)a^x} = \frac{1}{(\log a)y}.$$

Se, per semplicità di notazioni, poniamo ancora $f^{-1} = g$ e se torniamo ad indicare la variabile indipendente con la lettera x, possiamo dire che la derivata della funzione $g(x) = \log_a x$ (con $x > 0$) è la funzione $g'(x) = \dfrac{1}{(\log a)x}$.
Se poi consideriamo la funzione $h(x) = \log_a(-x)$ (con $x < 0$), che è composta dalle funzioni $x \mapsto -x$ e $g(y)$, abbiamo ancora $h'(x) = \dfrac{1}{(\log a)(-x)}(-1) = \dfrac{1}{(\log a)x}$. Sintetizzando i due precedenti risultati, possiamo dire che la derivata della funzione $g(x) = \log_a |x|$ (con $x \neq 0$) è la funzione $g'(x) = \dfrac{1}{(\log a)x}$.
Notiamo che, con la scelta della base $a = \mathrm{e}$, si ha che la derivata della funzione $g(x) = \log |x|$ è la funzione $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. □

Osservazione 6.11 Sia $f(x)$ una funzione derivabile e strettamente positiva in un intervallo I. Grazie al risultato precedente e al Teorema 6.7, la derivata della funzione composta $g(x) = \log f(x)$ è data da

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

L'espressione $\dfrac{f'}{f}$ viene detta **derivata logaritmica** della funzione f. □

Concludiamo questo paragrafo con un'utile conseguenza del Teorema 6.7.

Proprietà 6.12 *Sia f una funzione pari (rispettivamente dispari) derivabile in tutto il suo dominio. Allora la derivata f' è una funzione dispari (rispettivamente pari).*

Dimostrazione. Se la funzione f è pari, si ha $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Deriviamo ambo i membri di questa uguaglianza, osservando che la funzione $f(-x)$ è composta dalla funzione $x \mapsto -x$ e dalla funzione $y \mapsto f(y)$ e, pertanto, la sua derivata è la funzione $-f'(-x)$. Ne segue che $f'(-x) = -f'(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, cioè la funzione f' è dispari.
In modo analogo si ragiona se f è dispari. □

Per comodità dell'allievo, le derivate delle principali funzioni elementari sono raccolte nella sottostante lista.

$$\mathrm{D}\, x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\mathrm{D} \sin x = \cos x$$

$$\mathrm{D} \cos x = -\sin x$$

$$\mathrm{D} \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{D} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{D} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{D} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{D}\, a^x = (\log a)\, a^x \qquad \text{in particolare,} \qquad \mathrm{D}\, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

$$\mathrm{D} \log_a |x| = \frac{1}{(\log a)\, x} \qquad \text{in particolare,} \qquad \mathrm{D} \log |x| = \frac{1}{x}$$

6.3 Punti di non derivabilità

Abbiamo già osservato che la funzione $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile nell'origine. D'altra parte, essa è derivabile in ogni altro punto della retta reale, in quanto coincide con la semiretta $y = x$ per $x > 0$ e con la semiretta $y = -x$ per $x < 0$. Abbiamo quindi $f'(x) = +1$ per $x > 0$ e $f'(x) = -1$ per $x < 0$. Ricordando la definizione della funzione Segno (Esempio 2.1 iv)), possiamo scrivere sinteticamente che

$$\mathrm{D}\, |x| = \mathrm{sign}(x), \qquad \text{per ogni } x \neq 0.$$

L'origine è dunque un *punto isolato di non derivabilità* per la funzione $y = |x|$.

Tornando all'espressione (6.2) del suo rapporto incrementale nell'origine, notiamo però che esistono finiti i limiti da destra e da sinistra:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -1.$$

Ciò suggerisce la seguente

Definizione 6.13 *Sia f una funzione definita in un intorno destro di $x_0 \in \mathbb{R}$. Essa dicesi* **derivabile da destra in** x_0 *se esiste finito il limite destro del rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ tra x_0 e x, per x tendente a x_0. Il numero reale*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

dicesi **derivata destra di** f **in** x_0. *La definizione di* **derivata sinistra** $f'_-(x_0)$ *è analoga.*

Se la funzione f è definita solo in un intorno destro (sinistro) di x_0 ed è derivabile da destra (sinistra) in x_0, diremo più semplicemente che la funzione è derivabile in x_0 e scriveremo $f'(x_0) = f'_+(x_0)$ ($f'(x_0) = f'_-(x_0)$).

Ricordando la Proposizione 3.24 sui limiti, abbiamo innanzitutto il seguente criterio di derivabilità.

Proprietà 6.14 *Una funzione f definita in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se e solo se è derivabile da destra e da sinistra in x_0 e le derivate destra e sinistra coincidono. In tal caso si ha*

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Se invece f è derivabile da destra e da sinistra in x_0 ma le derivate destra e sinistra sono diverse (come accade alla funzione $f(x) = |x|$ nell'origine), diciamo che x_0 è un **punto angoloso** per f (si veda la Figura 6.2). Il termine deriva dal fatto che, da un punto di vista geometrico, la derivata destra di f in x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta *tangente destra* al grafico di f in $P_0 = (x_0, f(x_0))$, ossia della posizione limite delle rette secanti il grafico di f in P_0 e in punti $P = (x, f(x))$ con $x > x_0$ via via più vicino a x_0. Se la tangente destra e la tangente sinistra (definita in modo analogo) non coincidono, esse formano un *angolo* in P_0.

Figura 6.2. Punti di non derivabilità: l'origine è un punto angoloso (a sinistra), un punto a tangente verticale (al centro), un punto di cuspide (a destra)

Altri casi rilevanti di non derivabilità si hanno quando in x_0 esistono (finiti oppure infiniti) i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale di f, che indichiamo ancora rispettivamente con i simboli $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, ma uno almeno di essi è infinito.

Precisamente, se uno solo tra $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ è infinito, diciamo ancora che x_0 è un **punto angoloso** per f.

Se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono entrambi infiniti e di segno concorde (e dunque il limite completo del rapporto incrementale esiste e vale $+\infty$ oppure $-\infty$), diciamo che x_0 è un **punto a tangente verticale** per f. Tale è il caso della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nell'origine; si ha infatti

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Se invece $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono entrambi infiniti ma di segno discorde, diciamo che x_0 è un **punto di cuspide** per f. Tale è il caso della funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ nell'origine; si ha infatti

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}}{\operatorname{sign}(x)\,|x|} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\operatorname{sign}(x)\,\sqrt{|x|}} = \pm\infty.$$

Diamo infine un utile criterio per stabilire la derivabilità di una funzione in un punto x_0. La dimostrazione, che utilizza il Teorema di de l'Hôpital, verrà presentata nel § 6.11.

Teorema 6.15 *Sia f una funzione continua in x_0 e derivabile in tutti i punti $x \neq x_0$ di un intorno di x_0. Se esiste finito il limite per $x \to x_0$ della funzione $f'(x)$, allora f è derivabile anche in x_0 e si ha*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

Esempio 6.16

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a\sin 2x - 4 & \text{se } x < 0, \\ b(x-1) + \mathrm{e}^x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

e chiediamoci se esistono valori dei parametri reali a e b per i quali f risulti derivabile nell'origine. Imponiamo innanzitutto la continuità di f nell'origine (ricordiamo che una funzione derivabile è necessariamente continua). Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -4, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -b + 1;$$

uguagliando i due valori, otteniamo $b = 5$. Con tale valore di b, possiamo allora imporre che i limiti destro e sinistro di $f'(x)$ per $x \to 0$ siano uguali, in modo che il limite completo di $f'(x)$ per $x \to 0$ esista finito, e poi applicare il Teorema 6.15. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2a\cos 2x = 2a, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (5+\mathrm{e}^x) = 6;$$

uguagliando i due valori, otteniamo $a = 3$. □

Osservazione 6.17 Nell'applicazione del Teorema 6.15 non si dimentichi di verificare l'ipotesi di continuità nel punto x_0. Infatti la sola esistenza del limite della f' non basta a garantire la derivabilità di f in x_0. Ad esempio, $f(x) = x + \operatorname{sign} x$ è derivabile per ogni $x \neq 0$ con $f'(x) = 1$. Pertanto $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$ ma la funzione, non essendo continua, non è derivabile in $x = 0$. □

6.4 Punti di estremo e punti critici di una funzione

Definizione 6.18 *Sia $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Si dice che x_0 è* **punto di massimo relativo** (*o* **locale**) **per** *f se esiste un intorno $I_r(x_0)$ di x_0 tale che*

$$\forall x \in I_r(x_0) \cap \operatorname{dom} f, \qquad f(x) \leq f(x_0).$$

Il valore $f(x_0)$ dicesi **massimo relativo di** *f.*
Si dice che x_0 è **punto di massimo assoluto** (*o* **globale**) **per** *f se*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad f(x) \leq f(x_0).$$

Il valore $f(x_0)$ dicesi **massimo assoluto di** *f. In tutti i casi, il massimo si definisce* **stretto** *se si ha $f(x) < f(x_0)$ per $x \neq x_0$.*

Le definizioni di **punto di minimo relativo** e **assoluto** si ottengono dalle precedenti sostituendo il simbolo $\leq$ con $\geq$ nelle disuguaglianze. Un punto di minimo o di massimo verrà indicato genericamente come **punto di estremo** per f.

Figura 6.3. Vari tipi di punti di massimo di una funzione

Esempi 6.19

i) Per la parabola $f(x) = 1 + 2x - x^2 = 2 - (x-1)^2$, il punto $x_0 = 1$ è punto di massimo assoluto stretto. Il valore 2 è il massimo assoluto della funzione. Si noti che la derivata $f'(x) = 2(1-x)$ si annulla nel punto di massimo. Non vi sono punti di minimo (né relativi, né assoluti).

ii) Per la funzione $g(x) = \arcsin x$ (si veda la Figura 2.24), il punto $x_0 = 1$ è punto di massimo assoluto stretto, ed il valore massimo è $\frac{\pi}{2}$. Invece, il punto $x_1 = -1$ è punto di minimo assoluto stretto, con valore minimo $-\frac{\pi}{2}$. In questo caso, i punti di estremo di g sono punti di non derivabilità della funzione. □

Siamo interessati ad individuare i punti di estremo di una funzione. A tale scopo, se la funzione è derivabile, può essere utile cercare i punti in cui la derivata si annulla.

Definizione 6.20 *Dicesi* **punto critico** (*o* **stazionario**) *di una funzione f ogni punto x_0 in cui f sia derivabile e si abbia $f'(x_0) = 0$.*

Un punto critico è dunque un punto in cui la tangente al grafico della funzione è orizzontale.

Figura 6.4. Vari tipi di punti critici di una funzione

Teorema 6.21 (**di Fermat**) *Sia f definita in tutto un intorno di un punto x_0 e derivabile in x_0. Se x_0 è punto di estremo per f, allora*

$$f'(x_0) = 0,$$

cioè x_0 è punto critico per f.

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che x_0 sia un punto di massimo relativo per f e sia $I_r(x_0)$ un suo intorno tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in I_r(x_0)$. In tale intorno si ha quindi $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0$. Se $x > x_0$, cioè $\Delta x = x - x_0 > 0$, il rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ è ≤ 0; pertanto, grazie al Corollario 4.3 del Teorema di permanenza del segno, si ha

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Viceversa, se $x < x_0$, cioè $\Delta x < 0$, il rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ è ≥ 0; pertanto,

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Ricordando la Proprietà 6.14, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dunque $f'(x_0)$ deve essere contemporaneamente ≤ 0 e ≥ 0 e pertanto deve essere nulla.
In modo analogo si ragiona quando x_0 è punto di minimo relativo per f. □

Il Teorema di Fermat garantisce che, per una funzione derivabile, i punti di estremo *interni* al dominio vanno ricercati tra i punti critici della funzione.

Tuttavia, una funzione può avere punti critici che non sono punti di estremo (si veda la Figura 6.4). Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ ha l'origine come punto critico (perché $f'(x) = 3x^2 = 0$ se e solo se $x = 0$), ma non ha punti di estremo essendo strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

D'altro canto, una funzione può avere punti di estremo che non sono punti critici (si veda la Figura 6.3); ciò accade quando un punto di estremo interno al dominio è punto di non derivabilità (come ad esempio la funzione $f(x) = |x|$, che ha il suo minimo assoluto nell'origine), oppure quando un punto di estremo non è interno al dominio (come visto nell'Esempio 6.19 ii)). Dunque, per trovare *tutti* i punti di estremo di una funzione, può non essere sufficiente cercare i punti critici della funzione.

Riassumendo, i punti di estremo di una funzione vanno ricercati tra i punti del dominio di f che sono

i) o punti critici;

ii) o punti di non derivabilità;

iii) o estremi (in $\mathbb{R}$) del dominio.

6.5 I Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

I Teoremi di Rolle e di Lagrange, che ora presentiamo, sono di fondamentale importanza nello studio delle funzioni derivabili su un intervallo.

Teorema 6.22 (**di Rolle**) *Sia f una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, continua su $[a, b]$ e derivabile (almeno) su (a, b). Se $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f'(x_0) = 0,$$

cioè esiste almeno un punto critico di f in (a,b).

Figura 6.5. Il Teorema di Rolle

Dimostrazione. Il Teorema di Weierstrass assicura che l'immagine $f([a, b])$ di f è un intervallo chiuso e limitato $[m, M]$, essendo m e M rispettivamente il minimo e il massimo della funzione sull'intervallo:

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_m), \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_M),$$

per opportuni $x_m, x_M \in [a, b]$.
Se $m = M$, allora f è costante su $[a, b]$, dunque in particolare $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e la tesi è dimostrata.
Sia invece $m < M$. Poiché $m \leq f(a) = f(b) \leq M$, una almeno tra le disequazioni strette $f(a) = f(b) < M$ oppure $m < f(a) = f(b)$ dovrà essere soddisfatta.
Se $f(a) = f(b) < M$, il punto di massimo assoluto x_M non può coincidere né con a né con b; pertanto, $x_M \in (a, b)$. Abbiamo dunque trovato un punto di estremo per la funzione f, interno al

dominio e in cui f è derivabile. Il Teorema di Fermat garantisce allora che x_M è il punto critico x_0 cercato.
Se $m < f(a) = f(b)$, si dimostra con un ragionamento analogo che x_m è il punto critico x_0 cercato. □

Il teorema assicura l'esistenza di almeno un punto critico di f in (a, b). Come mostra la Figura 6.5, i punti critici possono essere più di uno.

Teorema 6.23 (**di Lagrange** *o* **del valor medio**) *Sia f una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, continua su $[a, b]$ e derivabile (almeno) su (a, b). Allora, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \tag{6.9}$$

Ogni punto x_0 che soddisfi tale relazione dicesi **punto di Lagrange per** f **in** (a, b).

Figura 6.6. Punto di Lagrange per f in (a, b)

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria definita su $[a, b]$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Essa è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b), perché differenza della funzione f, che ha per ipotesi tali proprietà, e di una funzione affine, che è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Notiamo che si ha

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si verifica facilmente che

$$g(a) = f(a), \qquad g(b) = f(a).$$

Pertanto, tutte le ipotesi del Teorema di Rolle sono soddisfatte dalla funzione g. Ne segue che esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

che è precisamente la (6.9). □

Il significato geometrico del Teorema di Lagrange è illustrato dalla Figura 6.6. In ogni punto di Lagrange, la retta tangente al grafico di f è *parallela* alla retta secante il grafico nei punti di ascissa a e b.

Esempio 6.24

Sia $f(x) = 1+x+\sqrt{1-x^2}$, definita nell'intervallo $[-1, 1]$. Essa è continua su tale intervallo, in quanto ottenuta componendo funzioni elementari continue. Inoltre, essa è derivabile nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ (ma non nei punti estremi): si ha infatti

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dunque, le ipotesi del Teorema di Lagrange sono soddisfatte da f, che quindi ammette almeno un punto di Lagrange in $(-1, 1)$. La (6.9) diventa

$$1 = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(x_0) = 1 - \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}},$$

che è soddisfatta da $x_0 = 0$. □

Il seguente teorema generalizza il Teorema di Lagrange (nel senso che ponendo $g(x) = x$ nel suo enunciato, si ritrova tale teorema). Esso interviene nelle dimostrazioni del Teorema di de l'Hôpital 6.41 e della formula di Taylor con resto di Lagrange (Teorema 7.2).

Teorema 6.25 (**di Cauchy**) *Siano f e g due funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, continue su $[a, b]$ e derivabili (almeno) su (a, b); si supponga inoltre che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{6.10}$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che $g(a) \neq g(b)$; infatti se così non fosse, per il Teorema di Rolle, la funzione $g'(x)$ si annullerebbe in almeno un punto di (a, b) contro l'ipotesi.
Consideriamo ora la funzione ausiliaria definita su $[a, b]$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Essa è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b), perché differenza di due funzioni che per ipotesi soddisfano tali proprietà. Notiamo che si ha

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x).$$

Si verifica facilmente che

$$h(a) = f(a), \qquad h(b) = f(a).$$

Pertanto, tutte le ipotesi del Teorema di Rolle sono soddisfatte dalla funzione h. Ne segue che esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x_0) = 0,$$

che è precisamente la (6.10). □

6.6 Prima e seconda formula dell'incremento finito

Stabiliamo ora due utili formule per rappresentare l'incremento di una funzione tra due punti del suo dominio.

Iniziamo supponendo che f sia una funzione derivabile in un punto x_0. Per definizione, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

vale a dire

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

ossia, con la simbologia di Landau introdotta nel § 5.1,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Tale relazione può essere scritta in forma equivalente come

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,} \tag{6.11}$$

ovvero, ponendo $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta f = f(x) - f(x_0)$,

$$\boxed{\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.} \tag{6.12}$$

Figura 6.7. La prima formula dell'incremento finito

Le (6.11)-(6.12) sono espressioni equivalenti della **prima formula dell'incremento finito** il cui significato geometrico è illustrato nella Figura 6.7. Essa dice che, se $f'(x_0) \neq 0$, l'incremento Δf della variabile dipendente, corrispondente ad un incremento Δx della variabile indipendente, è proporzionale a Δx stesso, a meno di un infinitesimo trascurabile rispetto a Δx. In pratica, ciò significa che, per Δx abbastanza piccolo, siamo autorizzati a confondere Δf con $f'(x_0)\Delta x$.

Consideriamo ora una funzione f continua su un intervallo I di $\mathbb{R}$ e derivabile nei suoi punti interni. Fissiamo due punti $x_1 < x_2$ in I e osserviamo che f è continua su $[x_1, x_2]$ e derivabile su (x_1, x_2). Pertanto, le ipotesi del Teorema di Lagrange sono soddisfatte dalla funzione f ristretta all'intervallo $[x_1, x_2]$. Dunque esiste $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\bar{x}),$$

ovvero esiste $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1).} \tag{6.13}$$

Tale formula viene chiamata **seconda formula dell'incremento finito.** Si noti che il punto $\bar{x}$ dipende dai punti x_1 e x_2 ma, in generale, tale dipendenza non è esplicita. L'importanza della formula viene dal fatto che essa permette di ottenere delle informazioni sull'incremento $f(x_2) - f(x_1)$ dal comportamento della funzione f' nell'intervallo $[x_1, x_2]$.

La seconda formula dell'incremento finito può essere usata per descrivere il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto x_0 in modo più preciso

rispetto a quanto fatto dalla prima formula dell'incremento finito. Supponiamo che f sia una funzione continua in x_0 e derivabile in tutto un intorno di x_0 tranne eventualmente in x_0. Detto x un punto di tale intorno e applicando la (6.13) nell'intervallo di estremi x_0 e x otteniamo la relazione

$$\boxed{\Delta f = f'(\bar{x})\Delta x,} \tag{6.14}$$

con $\bar{x}$ compreso tra x_0 e x. Tale espressione della seconda formula dell'incremento finito rappresenta l'incremento della variabile dipendente Δf come se fosse proporzionale all'incremento della variabile indipendente Δx; in realtà, il coefficiente di proporzionalità, che è il valore della derivata prima in un punto vicino a x_0 e in generale non noto, dipende esso stesso da Δx (e da x_0).

Un'altra applicazione della seconda formula dell'incremento finito, che tornerà utile nel seguito, è la seguente.

Proprietà 6.26 *Una funzione definita e derivabile su un intervallo I della retta reale è costante su I se e solo se la sua derivata è ivi identicamente nulla.*

Dimostrazione. Indichiamo con f la funzione. Supponiamo dapprima che f sia costante; per ogni $x_0 \in I$, il rapporto incrementale $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ con $x \in I$, $x \neq x_0$, è nullo e dunque, per definizione di derivata, $f'(x_0) = 0$.
Viceversa, supponiamo che f abbia derivata nulla su I e facciamo vedere che f è costante su I. Osserviamo che ciò equivale al fatto che

$$f(x_1) = f(x_2), \qquad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Siano dunque $x_1, x_2 \in I$; applichiamo la seconda formula dell'incremento finito (6.13) alla funzione derivabile f. Allora, per un opportuno $\bar{x}$ compreso tra x_1 e x_2, si ha

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1) = 0.$$

Concludiamo che $f(x_1) = f(x_2)$. □

6.7 Intervalli di monotonia di una funzione

Come prima rilevante applicazione dei risultati appena stabiliti, affrontiamo lo studio della monotonia di una funzione.

Teorema 6.27 *Sia I un intervallo ed f una funzione derivabile su I. Valgono le seguenti implicazioni:*

a) Se f è crescente su I, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

b1) Se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, allora f è crescente su I;

b2) se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente crescente su I.

Dimostrazione. Dimostriamo a). Sia f crescente su I. Consideriamo dapprima un punto x_0 interno ad I. Per ogni $x \in I$ tale che $x < x_0$, si ha

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \qquad \text{e} \qquad x - x_0 < 0.$$

Pertanto, il rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ tra x_0 e x è ≥ 0. D'altro canto, per ogni $x \in I$ tale che $x > x_0$, si ha

$$f(x) - f(x_0) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad x - x_0 > 0.$$

Anche in questo caso il rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ tra x_0 e x è ≥ 0. Riassumendo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \qquad \forall x \neq x_0;$$

applicando il Corollario 4.3 del Teorema della permanenza del segno al limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

otteniamo $f'(x_0) \geq 0$. Negli eventuali punti di estremo di I, arriviamo allo stesso risultato limitandoci a considerare il limite destro oppure sinistro del rapporto incrementale, che risulta essere sempre ≥ 0.

Dimostriamo ora le implicazioni b). Sia f tale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Fissiamo due punti $x_1 < x_2$ in I e dimostriamo che $f(x_1) \leq f(x_2)$. A tale scopo applichiamo la seconda formula dell'incremento finito (6.13) e osserviamo che $f'(\bar{x}) \geq 0$ per ipotesi, mentre $x_2 - x_1 > 0$. Dunque concludiamo che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1) \geq 0;$$

abbiamo quindi stabilito la $b1$). Se invece f è tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora la (6.13) implica $f(x_2) - f(x_1) > 0$ e dunque anche la $b2$) è verificata. □

Figura 6.8. Dimostrazione delle implicazioni *b*) relative al Teorema 6.27

Il teorema appena dimostrato afferma dunque che se f è una funzione derivabile su I si ha l'equivalenza logica

$$\boxed{f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è crescente su } I}$$

e l'implicazione

$$\boxed{f'(x) > 0, \quad \forall x \in I \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente crescente su } I.}$$

Osserviamo che non è possibile rovesciare l'ultima implicazione, cioè dedurre dal fatto che f sia *strettamente* crescente su I il fatto che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$. Come già osservato, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma la sua derivata si annulla nell'origine.

Un enunciato analogo al teorema precedente vale sostituendo 'crescente' con 'decrescente' e i simboli $\geq$, $>$ rispettivamente con $\leq$, $<$.

Corollario 6.28 *Sia f derivabile sull'intervallo I. Sia x_0 un punto critico di f interno ad I. Se $f'(x)$ è ≥ 0 a sinistra di x_0 e ≤ 0 a destra di x_0, allora x_0 è punto di massimo per f; viceversa, se $f'(x)$ è ≤ 0 a sinistra di x_0 e ≥ 0 a destra di x_0, allora x_0 è punto di minimo per f.*

Il Teorema 6.27 e il Corollario 6.28 permettono di ricondurre la ricerca dei punti di estremo di f e dei suoi intervalli di monotonia alla ricerca degli zeri di f' e allo studio del suo segno.

Esempio 6.29

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$. Si ha $f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{2x}$, dunque $x_0 = -\frac{1}{2}$ è l'unico punto critico di f. Poiché $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -\frac{1}{2}$, deduciamo che x_0 è punto di minimo assoluto per f; la funzione è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ ed è strettamente crescente sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, +\infty)$. □

6.8 Derivate di ordine superiore

Sia f una funzione derivabile in un intorno di x_0. Sia f' la funzione derivata di f, dunque definita in un intorno di x_0.

Definizione 6.30 *Se f' è derivabile in x_0, si dice che f* **è derivabile due volte in** x_0 *e si pone*

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

che chiamiamo **derivata seconda di** f **in** x_0. *La* **funzione derivata seconda di** f, *indicata con f'', associa a x il valore $f''(x)$, ove questo sia definito.*

Altre notazioni sono comunemente usate per indicare la derivata seconda di f in x_0, quali ad esempio

$$y''(x_0), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0), \qquad \mathrm{D}^2 f(x_0)\,.$$

La derivata terza di f in x_0 è, se esiste, la derivata prima in x_0 della funzione derivata seconda; ossia,

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)\,.$$

In generale, per $k \geq 1$, la **derivata di ordine** k (o **derivata** k**-esima**) **di** f **in** x_0 è, se esiste, la derivata prima della funzione derivata $(k-1)$-esima di f in x_0:

$$\boxed{f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0)\,.}$$

Altri simboli usati sono

$$y^{(k)}(x_0), \qquad \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0), \qquad \mathrm{D}^k f(x_0)\,.$$

È conveniente porre per definizione $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Esempi 6.31

Calcoliamo le derivate successive di alcune funzioni elementari.

i) Fissato $n \in \mathbb{N}$, consideriamo la funzione $f(x) = x^n$. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!}x^{n-2} \\ &\vdots \quad \vdots \\ f^{(n)}(x) &= n(n-1)\cdots 2\cdot 1\, x^{n-n} = n!\,. \end{aligned}$$

In forma compatta, possiamo scrivere che, per $0 \leq k \leq n$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Si ha poi $f^{(n+1)}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (perché la derivata della funzione costante $f^{(n)}(x)$ è 0), e di conseguenza tutte le derivate $f^{(k)}$ di ordine $k > n$ esistono e sono identicamente nulle.

ii) Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$. Abbiamo $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ e $f^{(4)}(x) = \sin x$. Le derivate successive di f ripetono ciclicamente tale sequenza di funzioni trigonometriche. Un risultato analogo vale per la funzione $y = \cos x$.

iii) Sia infine $f(x) = \mathrm{e}^x$. Sappiamo che $f'(x) = \mathrm{e}^x$ e pertanto $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ per ogni $k \geq 0$. Si ha quindi la rimarchevole proprietà che le derivate di ogni ordine della funzione esponenziale e^x coincidono con la funzione stessa. □

Chiudiamo il paragrafo con alcune utili definizioni.

Definizione 6.32 *Una funzione f dicesi* **di classe** $\mathcal{C}^k$ *(con $k \geq 0$) su un intervallo I se essa è derivabile k volte in ogni punto di I e se la sua funzione derivata di ordine k, $f^{(k)}$, è continua su I. L'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ su I viene indicato con $\mathcal{C}^k(I)$.*
Una funzione f dicesi **di classe** $\mathcal{C}^\infty$ *su I se essa è derivabile un numero arbitrario di volte in ogni punto di I. L'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su I viene indicato con $\mathcal{C}^\infty(I)$.*

In virtù della Proposizione 6.3, se $f \in \mathcal{C}^k(I)$, tutte le sue derivate di ordine minore o uguale a k sono continue su I.

Osserviamo inoltre che tutte le funzioni elementari sono derivabili un numero arbitrario di volte (cioè sono di classe $\mathcal{C}^\infty$) in tutti i punti interni al loro dominio.

6.9 Convessità e flessi

Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 del suo dominio. Come già fatto precedentemente, indichiamo con $y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0.

Definizione 6.33 *Diciamo che f è* **convessa in** x_0 *(o che ha la* **concavità rivolta verso l'alto***) se esiste un intorno $I_r(x_0) \subseteq \operatorname{dom} f$ tale che*

$$\forall x \in I_r(x_0), \qquad f(x) \geq t(x).$$

Diciamo che f è **strettamente convessa** *se si ha $f(x) > t(x)$ per $x \neq x_0$.*

Figura 6.9. Funzione strettamente convessa in x_0 (a sinistra) e funzione strettamente concava in x_0 (a destra)

Le definizioni di funzione **concava** (o avente **concavità rivolta verso il basso**) e **strettamente concava** si ottengono dalle precedenti sostituendo i simboli $\geq$ e $>$ rispettivamente con $\leq$ e $<$.

Geometricamente, una funzione è convessa (rispettivamente, concava) in un punto se, nell'intorno del punto, il suo grafico si trova al di sopra (rispettivamente, al di sotto) della retta tangente (si veda la Figura 6.9).

Esempio 6.34

Verifichiamo che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente convessa in $x_0 = 1$. La retta tangente al suo grafico in tale punto ha equazione

$$t(x) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1\,.$$

La condizione $f(x) > t(x)$ equivale dunque a $x^2 > 2x-1$, vale a dire $x^2-2x+1 = (x-1)^2 > 0$; tale condizione è soddisfatta da ogni $x \neq 1$. □

Definizione 6.35 *Sia I un intervallo e f una funzione derivabile su I. La funzione f dicesi* **convessa su** *I se è convessa in ogni punto di I.*

Nello studio delle proprietà di convessità di una funzione, i punti di flesso, che ora introduciamo, rivestono un ruolo analogo a quello dei punti di estremo nello studio della monotonia.

Definizione 6.36 *Il punto x_0 dicesi* **punto di flesso di** *f se esiste un intorno $I_r(x_0) \subseteq \operatorname{dom} f$ in cui è soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

$$\forall x \in I_r(x_0), \qquad \begin{cases} \text{se } x < x_0, & f(x) \leq t(x), \\ \text{se } x > x_0, & f(x) \geq t(x), \end{cases}$$

Figura 6.10. Flesso ascendente in x_0 (a sinistra) e flesso discendente in x_0 (a destra)

(*nel qual caso il flesso si dirà* **ascendente**)*; oppure*

$$\forall x \in I_r(x_0), \qquad \begin{cases} \text{se } x < x_0, & f(x) \geq t(x), \\ \text{se } x > x_0, & f(x) \leq t(x), \end{cases}$$

(*nel qual caso il flesso si dirà* **discendente**).

Geometricamente, in un punto di flesso il grafico di f 'attraversa' la retta tangente (si veda la Figura 6.10).

Enunciamo ora alcuni risultati, che ci permettono di studiare la convessità di una funzione e di determinare i suoi punti di flesso.

Teorema 6.37 *Sia I un intervallo ed f una funzione derivabile su I. Valgono le seguenti implicazioni:*

a) Se f è convessa su I, allora f' è crescente su I.

b1) Se f' è crescente su I, allora f è convessa su I;

b2) se f' è strettamente crescente su I, allora f è strettamente convessa su I.

Dimostrazione. Si veda l'Appendice A.4.3, pag. 477. □

Corollario 6.38 *Sia f derivabile due volte su I. Valgono le seguenti implicazioni:*

a) Se f è convessa su I, allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

b1) Se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, allora f è convessa su I;

b2) se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente convessa su I.

Dimostrazione. L'enunciato segue dal teorema precedente, applicando alla funzione f' il Teorema 6.27. □

Tale risultato si può enunciare nella seguente forma. Se f è una funzione derivabile due volte su I si ha l'equivalenza logica

$$\boxed{f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è convessa su } I}$$

e l'implicazione

$$\boxed{f''(x) > 0, \quad \forall x \in I \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente convessa su } I.}$$

Anche in questo caso, come per la caratterizzazione della monotonia di una funzione, l'ultima implicazione non può essere rovesciata. Ad esempio, $f(x) = x^4$ è strettamente convessa su $\mathbb{R}$, ma la derivata seconda si annulla nell'origine.

Analoghi enunciati, con le ovvie modifiche, valgono per le funzioni concave.

Corollario 6.39 *Sia f derivabile due volte in un intorno di x_0. Valgono le seguenti implicazioni:*

a) Se x_0 è punto di flesso di f, allora $f''(x_0) = 0$.

b) Sia $f''(x_0) = 0$. Se f'' è di segno diverso a destra e a sinistra di x_0, allora x_0 è punto di flesso per f (precisamente, il flesso è ascendente se $f''(x) \leq 0$ a sinistra di x_0 e $f''(x) \geq 0$ a destra di x_0, discendente nella situazione opposta). Se invece f'' non cambia segno a destra e a sinistra di x_0, allora tale punto non è di flesso per f.

La dimostrazione, che si appoggia sull'uso della formula di Taylor, verrà data nel successivo § 7.4.

Si presti attenzione al fatto che la condizione $f''(x_0) = 0$ da sola non è sufficiente a garantire che x_0 sia un punto di flesso per f. Se ad esempio consideriamo la funzione $f(x) = x^4$, la sua derivata seconda $f''(x) = 12x^2$ si annulla in $x_0 = 0$. Tuttavia, l'origine non è punto di flesso per f: la tangente al grafico di f in x_0 è l'asse delle ascisse $y = 0$, ed il grafico di f si trova sempre al di sopra di tale retta. Si noti che f'' *non cambia segno* in x_0.

Esempio 6.29 (seguito)

Per la funzione $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ si ha $f''(x) = 4(x+1)\mathrm{e}^{2x}$, che si annulla in $x_1 = -1$. Poiché $f''(x) > 0$ se e solo se $x > -1$, la funzione f risulta strettamente concava nell'intervallo $(-\infty, -1)$ e strettamente convessa nell'intervallo $(-1, +\infty)$. Il punto $x_1 = -1$ è punto di flesso ascendente. Il grafico della funzione $f(x)$ è riprodotto in Figura 6.11. □

Figura 6.11. Grafico della funzione f dell'Esempio 6.29

6.9.1 Estensione del concetto di convessità

Una definizione di funzione convessa su un intervallo, più generale di quella da noi presentata nel § 6.9, può essere data sulla base di considerazioni di natura geometrica. Ricordiamo che un sottoinsieme C del piano è detto **convesso** se per ogni coppia di punti P_1 e P_2 appartenenti a C, il segmento $\overline{P_1P_2}$ di estremi P_1 e P_2 è contenuto in C.

Data una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chiamiamo **epigrafico di** f l'insieme

$$E_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I,\ y \geq f(x)\}$$

dei punti del piano che stanno al di sopra del grafico di f (si veda la Figura 6.12, a sinistra). Diamo allora la seguente definizione.

Definizione 6.40 *La funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dicesi* **convessa su** I *se il suo epigrafico E_f è un sottoinsieme convesso del piano.*

È facile convincersi che nella verifica della condizione di convessità di E_f, è sufficiente limitarsi ai punti P_1 e P_2 appartenenti al grafico di f. Ciò significa che presi comunque due punti x_1 e x_2 in I, il segmento S_{12} di estremi $\big(x_1, f(x_1)\big)$ e $\big(x_2, f(x_2)\big)$ deve stare al di sopra del grafico di f.

Osservando che ogni x compreso tra x_1 e x_2 può essere rappresentato nella forma

$$x = (1-t)x_1 + tx_2 \qquad \text{con} \quad t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in [0, 1]\,,$$

la convessità di f su I può essere espressa dalla condizione

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in I\,, \forall t \in [0, 1]\,.$$

Se tale disuguaglianza è stretta quando $x_1 \neq x_2$ e $t \in (0, 1)$, diremo che la funzione è **strettamente convessa su** I.

Figura 6.12. Epigrafico di una generica funzione f definita su I (a sinistra) e della funzione $y = |x|$ (a destra)

Si può dimostrare che, per le funzioni *derivabili* su I, la convessità secondo la Definizione 6.40 equivale a quella secondo la Definizione 6.33. D'altro canto, una funzione può essere convessa secondo la Definizione 6.40 senza essere derivabile su I, come mostra ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ su $I = \mathbb{R}$ (si veda la Figura 6.12, a destra). Notiamo tuttavia che la condizione di convessità implica la continuità della funzione in tutti i punti interni dell'intervallo I, mentre è compatibile con l'eventuale discontinuità negli estremi dell'intervallo.

6.10 Studio di funzioni

Abbiamo sin qui presentato un certo numero di strumenti analitici che, opportunamente combinati, permettono di studiare in modo più o meno approfondito il comportamento di una funzione f nel suo dominio e di tracciarne un grafico qualitativo. Descriviamo nel seguito alcuni passi in cui può essere articolato lo studio.

Dominio ed eventuali simmetrie

Il dominio di una funzione sarà in genere determinabile a partire dai domini delle funzioni elementari che concorrono a definirla tenendo conto delle operazioni algebriche e di prodotto di composizione che intervengono.
Per semplificare lo studio successivo è conveniente individuare immediatamente le eventuali simmetrie e periodicità della funzione (§ 2.6). Ad esempio, se una funzione è pari o dispari sarà sufficiente studiarla solo per valori positivi dell'argomento e da tali risultati dedurne l'andamento globale. Segnaliamo che una funzione può presentare altri tipi di simmetria, quali ad esempio la simmetria rispetto ad una retta verticale diversa dall'asse delle ordinate. Il grafico della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-|x-2|}$ è simmetrico rispetto alla retta $x = 2$ (si veda la Figura 6.13).

Analogamente, il comportamento globale di una funzione periodica sarà ottenuto a partire dallo studio su un intervallo di ampiezza pari al periodo.

Figura 6.13. Grafico della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-|x-2|}$

Comportamento limite agli estremi del dominio

Supponendo che il dominio sia un'unione di intervalli (come sovente avviene) si studieranno i limiti unilateri in ognuno degli estremi degli intervalli. Una volta determinati i limiti potrà essere studiata l'eventuale esistenza di asintoti come illustrato nel § 5.3.
Ad esempio, per determinare il dominio di

$$f(x) = \frac{\log(2-x)}{\sqrt{x^2-2x}}\,,$$

osserviamo che la funzione $\log(2-x)$ è definita per $2-x>0$, cioè $x<2$; che la funzione $\sqrt{x^2-2x}$ è definita per $x^2-2x \geq 0$, cioè $x \leq 0$ oppure $x \geq 2$; che essendo tale funzione a denominatore, dovrà essere $x \neq 0, 2$. Pertanto, si ha $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0)$. Inoltre, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, dunque la retta $x=0$ è asintoto verticale sinistro e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\log(2-x)}{|x|} = 0$, dunque la retta $y=0$ è asintoto orizzontale sinistro.

Intervalli di monotonia ed estremi

Il primo passo consiste nel determinare la derivata prima f' e individuarne il dominio $\operatorname{dom} f'$. Si osservi che dovrà essere sempre $\operatorname{dom} f' \subseteq \operatorname{dom} f$, anche se l'espressione analitica della derivata può essere definita su un insieme più ampio. Ad esempio, se $f(x) = \log x$, si ha $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f' = (0, +\infty)$ anche se la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ è definita per ogni $x \neq 0$. Successivamente si determinano gli eventuali zeri e il segno di f'. Ciò permette di trovare gli intervalli di monotonia di f e di discutere la natura dei punti critici (gli zeri di f'), alla luce di quanto visto nel § 6.7.

Segnaliamo una situazione che richiede una attenta analisi, senza la quale si può pervenire a conclusioni errate. Supponiamo che una funzione f sia derivabile nell'unione $(a,b) \cup (b,c)$ di due intervalli contigui, in cui si abbia $f' > 0$. Se f non è derivabile in b, allora **non è corretto** dedurre che f è crescente sull'unione $(a,b) \cup (b,c)$. Ad esempio la funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$ soddisfa $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ma la funzione non è crescente su tale insieme (ad esempio si ha che $f(-1) > f(1)$); possiamo solo affermare che f è crescente su $(-\infty, 0)$ *e su* $(0, +\infty)$.

Ricordiamo che i punti di estremo di una funzione non vanno ricercati soltanto tra i suoi punti critici. Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$, definita per $x \geq 0$, ha come punto critico $x = 1$ che è punto di massimo assoluto, e come ulteriore punto di estremo il punto di non derivabilità $x = 0$, che è di minimo assoluto.

Intervalli di convessità e flessi

La determinazione degli intervalli di convessità o concavità e degli eventuali punti di flesso segue le linee guida tracciate precedentemente, considerando ora la derivata seconda di f e applicando i risultati del § 6.9.

Segno della funzione o delle sue derivate

Nel tracciare il grafico qualitativo di f può essere utile (ma non indispensabile) determinare il segno della funzione nel suo dominio e i suoi eventuali zeri (che rappresentano le ascisse dei punti di intersezione del grafico con l'asse orizzontale). Non sempre però l'equazione $f(x) = 0$ può essere risolta analiticamente. In tali casi, si può eventualmente fare ricorso al Teorema 4.23 di esistenza degli zeri, al fine di dedurre che in un certo intervallo esiste necessariamente uno e un solo zero di f. Analoghe considerazioni si possono applicare allo studio del segno della derivata prima o della derivata seconda.

Si consideri, ad esempio, la funzione $f(x) = x \log x - 1$, definita per $x > 0$. Si ha $f(x) < 0$ per $x \leq 1$. Per $x \geq 1$, la funzione è strettamente crescente (infatti $f'(x) = \log x + 1 > 0$ per $x > 1/\mathrm{e}$); inoltre $f(1) = -1 < 0$ mentre $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 1 > 0$. Dunque la funzione ha esattamente una zero, appartenente all'intervallo $(1, \mathrm{e})$ ed è negativa a sinistra e positiva a destra di tale punto.

6.10.1 Le funzioni iperboliche

A titolo di esempio, studiamo una famiglia di **funzioni**, dette **iperboliche**, che intervengono in varie applicazioni.

Definiamo dapprima le funzioni $f(x) = \sinh x$ e $g(x) = \cosh x$, dove

$$\boxed{\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},}$$

dette rispettivamente funzione **seno iperbolico** e funzione **coseno iperbolico.** Il nome deriva dal fatto che vale la relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

e dunque il punto P di coordinate $(X, Y) = (\cosh x, \sinh x)$ percorre, al variare di x, il ramo destro dell'iperbole equilatera di equazione $X^2 - Y^2 = 1$.

Osserviamo innanzitutto che $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = \mathbb{R}$; inoltre $f(x) = -f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$, ossia il seno iperbolico è una funzione dispari mentre il coseno iperbolico è una funzione pari. Per quanto riguarda il comportamento limite, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty\,.$$

Pertanto le funzioni non hanno asintoti verticali o orizzontali. Non esistono neppure asintoti obliqui in quanto, per $x \to \infty$, le funzioni si comportano come degli esponenziali; precisamente si ha

$$\sinh x \sim \pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{|x|}\,, \qquad \cosh x \sim \frac{1}{2}\mathrm{e}^{|x|}\,, \qquad x \to \pm\infty\,.$$

È immediato verificare che $\sinh x = 0$ se e solo se $x = 0$ e $\sinh x > 0$ per $x > 0$; invece, $\cosh x > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Lo studio della monotonia delle funzioni segue facilmente dal fatto che

$$\mathrm{D}\sinh x = \cosh x \qquad \text{e} \qquad \mathrm{D}\cosh x = \sinh x\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Dunque il seno iperbolico è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Il coseno iperbolico è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$; il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto con $\cosh 0 = 1$ (e quindi $\cosh x \geq 1$ su $\mathbb{R}$).

Derivando ulteriormente si ha

$$\mathrm{D}^2 \sinh x = \sinh x \qquad \text{e} \qquad \mathrm{D}^2 \cosh x = \cosh x\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto la funzione seno iperbolico è strettamente convessa su $(0, +\infty)$ e strettamente concava su $(-\infty, 0)$ e l'origine è punto di flesso ascendente. Invece la funzione coseno iperbolico è strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$. I grafici delle funzioni iperboliche sono mostrati nella Figura 6.14.

Figura 6.14. Grafici delle funzioni seno iperbolico (a sinistra) e coseno iperbolico (a destra)

Figura 6.15. Grafico della funzione tangente iperbolica

Analogamente a quanto visto per le funzioni trigonometriche, si definisce la funzione **tangente iperbolica** come

$$\boxed{\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\,.}$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$, è una funzione dispari strettamente crescente a valori nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ (vedasi la Figura 6.15).

La funzione inversa del seno iperbolico, definita su tutto $\mathbb{R}$, viene detta funzione **settore seno iperbolico**, ed è facilmente esprimibile mediante la funzione logaritmo (inversa dell'esponenziale) come

$$\boxed{\operatorname{sett}\sinh x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.} \tag{6.15}$$

La funzione **settore coseno iperbolico** è ottenuta invertendo la funzione coseno iperbolico ristretta all'intervallo $[0, +\infty)$ e si esprime come

$$\boxed{\operatorname{sett}\cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\,, \qquad x \in [1, +\infty)\,.} \tag{6.16}$$

Infine, la funzione **settore tangente iperbolica** è l'inversa della funzione tangente iperbolica su $\mathbb{R}$ ed è espressa da

$$\boxed{\operatorname{sett}\tanh x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\,, \qquad x \in (-1, 1)\,.} \tag{6.17}$$

Le derivate delle funzioni iperboliche inverse sono

$$\begin{gathered} \mathrm{D}\operatorname{sett}\sinh x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \qquad \mathrm{D}\operatorname{sett}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,, \\ \mathrm{D}\operatorname{sett}\tanh x = \frac{1}{1-x^2}\,. \end{gathered} \tag{6.18}$$

6.11 Il Teorema di de l'Hôpital

Il seguente risultato fornisce un utile strumento per il calcolo di limiti di forme indeterminate. Come precedentemente, indichiamo con c uno dei simboli x_0, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$.

Teorema 6.41 (**di de l'Hôpital**) *Siano f e g due funzioni definite nell'intorno di c, tranne eventualmente in c, e tali che*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L,$$

con $L = 0$ oppure $+\infty$ oppure $-\infty$. Se f e g sono derivabili nell'intorno di c, tranne eventualmente in c, con $g' \neq 0$, e se esiste (finito o infinito)

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.19}$$

e tale limite è uguale al precedente.

Dimostrazione. Si veda l'Appendice A.4.2, pag. 474. □

Il teorema afferma dunque che, se sono verificate le ipotesi, vale la formula

$$\boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.} \tag{6.20}$$

Esempi 6.42

i) Si voglia calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 5x},$$

che è una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$. Le funzioni a numeratore e a denominatore sono derivabili, e si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{5\cos 5x} = \frac{4}{5}.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 5x} = \frac{4}{5}.$$

ii) Se il quoziente $f'(x)/g'(x)$ è ancora una forma indeterminata, e se f e g sono derivabili due volte nell'intorno di c, tranne eventualmente in c, possiamo reiterare l'applicazione della formula (6.20), studiando il limite del quoziente $f''(x)/g''(x)$, e così via.

Si voglia, ad esempio, studiare la forma indeterminata 0/0

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x\sin x}.$$

Derivando numeratore e denominatore, siamo condotti a studiare

$$\lim_{x\to 0} \frac{3-3\sqrt{1+2x}}{\sin x + x\cos x},$$

che è ancora una forma indeterminata 0/0. Derivando ancora numeratore e denominatore, arriviamo a

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{\sqrt{1+2x}}}{2\cos x - x\sin x} = -\frac{3}{2}.$$

Applicando quindi due volte la (6.20), concludiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{\sin^2 x} = -\frac{3}{2}.$$

□

Osservazione 6.43 Il Teorema di de l'Hôpital fornisce una condizione soltanto sufficiente all'esistenza del limite (6.19). In altri termini, si può presentare il caso in cui non esiste il limite del rapporto delle derivate ma esiste quello del rapporto delle funzioni. Ad esempio, poniamo $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = 2x + \cos x$. Il quoziente f'/g' non ha limite per $x \to +\infty$ come si vede facilmente applicando il Criterio di non esistenza del limite (Osservazione 4.19). Tuttavia, il limite del rapporto f/g esiste e vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{1}{2}.$$

□

6.11.1 Applicazioni del Teorema di de l'Hôpital

Vediamo ora come il teorema possa essere utilizzato in varie situazioni.

Limiti notevoli

Il Teorema di de l'Hôpital permette di ottenere gli importanti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \tag{6.21}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0, \qquad \forall \alpha > 0 \tag{6.22}$$

già anticipati in (5.6) nella forma equivalente mediante i simboli di Landau. Iniziamo dalla prima delle (6.21) per $\alpha = 1$. Applicando la (6.20), abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Per ogni altro $\alpha > 0$, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}} \right)^\alpha = \frac{1}{\alpha^\alpha} \left(\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} \right)^\alpha = +\infty.$$

Infine, per $\alpha \leq 0$, il risultato è banale in quanto non si è in presenza di una forma indeterminata. Per quanto riguarda la seconda delle (6.21), abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|^\alpha}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|^\alpha}{e^{|x|}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^\alpha}{e^y} = 0.$$

Passando alle (6.22), si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

e

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to0^+} x^\alpha = 0.$$

Dimostrazione del Teorema 6.15

Siamo ora in grado di fornire la giustificazione di tale teorema.

Dimostrazione. Partiamo dalla definizione di derivata

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e calcoliamo il limite mediante il Teorema di de l'Hôpital, avendo osservato che

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0.$$

Si ha dunque

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1},$$

il che dimostra la tesi. □

Calcolo di ordini di infinitesimo e infinito

Illustriamo con alcuni esempi come il Teorema di de l'Hôpital possa essere utilizzato per il calcolo di ordini di infinitesimo e infinito di funzioni e delle relative parti principali.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = e^x - 1 - \sin x$$

che è un infinitesimo per $x \to 0$. Scelto $\varphi(x) = x$, applichiamo due volte il Teorema di de l'Hôpital (supponendo per il momento che ciò sia lecito), ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}.$$

Per $\alpha = 2$ l'ultimo limite esiste (giustificando l'applicazione del Teorema di de l'Hôpital) e vale $\frac{1}{2}$. Concludiamo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 2 nell'origine rispetto all'infinitesimo campione x; inoltre, la sua parte principale è $p(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Consideriamo, poi, la funzione

$$f(x) = \tan x,$$

che è infinita per $x \to \frac{\pi}{2}^-$. Posto $\varphi(x) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$, abbiamo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^\alpha} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin x \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cos x}.$$

Il primo limite vale 1, mentre al secondo applichiamo il Teorema di de l'Hôpital. Otteniamo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-\alpha(\frac{\pi}{2} - x)^{\alpha-1}}{-\sin x}.$$

Per $\alpha = 1$ tale limite vale 1. Concludiamo che la funzione $\tan x$ è un infinito del primo ordine per $x \to \frac{\pi}{2}^-$, rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$. La sua parte principale è proprio $\varphi(x)$.

6.12 Esercizi

1. *Dire se le seguenti funzioni sono derivabili nel punto x_0 indicato:*

   a) $f(x) = x + |x-1|, \quad x_0 = 1$

   $\boxed{\text{b)}}$ $f(x) = \sin|x|, \quad x_0 = 0$

   $\boxed{\text{c)}}$ $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

   d) $f(x) = \sqrt{1 + x^3}, \quad x_0 = -1$

2. *Trovare dove sono derivabili le seguenti funzioni e calcolarne la derivata:*

   $\boxed{\text{a)}}$ $f(x) = x\sqrt{|x|}$

   b) $f(x) = \cos|x|$

   c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0, \\ e^x - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

   $\boxed{\text{d)}}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 5 & \text{se } x \geq 1, \\ x - 4 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

3. *Calcolare, dove definita, la derivata prima delle seguenti funzioni:*

   a) $f(x) = 3x\sqrt[3]{1+x^2}$ b) $f(x) = \log|\sin x|$

   c) $f(x) = \cos\left(e^{x^2+1}\right)$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x\log x}$

4. *Trovare il massimo e il minimo delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato:*

   a) $f(x) = \sin x + \cos x\,, \qquad [0, 2\pi]$

   $\boxed{\text{b)}}$ $f(x) = x^2 - |x+1| - 2\,, \qquad [-2, 1]$

5. *Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa x_0 al grafico delle seguenti funzioni:*

   $\boxed{\text{a)}}$ $f(x) = \log(3x-2)\,, \qquad x_0 = 2$ b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\,, \qquad x_0 = 1$

   $\boxed{\text{c)}}$ $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}\,, \qquad x_0 = 0$ d) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}\,, \qquad x_0 = \dfrac{1}{\pi}$

$\boxed{6.}$ *Sia $f(x) = 5x + x^3 + 2x^5$. Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$ e che f^{-1} è ivi derivabile. Calcolare $(f^{-1})'(0)$ e $(f^{-1})'(8)$.*

$\boxed{7.}$ *Sia $f(x) = (x-1)e^{x^2} + \arctan(\log x) + 2$. Dimostrare che f è invertibile sul suo dominio e determinarne l'immagine.*

$\boxed{8.}$ *Verificare che $f(x) = \log(2+x) + 2\dfrac{x+1}{x+2}$ non ha altri zeri oltre a $x_0 = -1$.*

$\boxed{9.}$ *Determinare il numero di zeri e di punti critici della funzione*

$$f(x) = \frac{x\log x - 1}{x^2}.$$

$\boxed{10.}$ *Studiare i massimi e i minimi relativi e assoluti della funzione*

$$f(x) = 2\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

sull'intervallo $[0,\, 2\pi]$.

$\boxed{11.}$ *Determinare il più grande intervallo contenente $x_0 = \frac{1}{2}$ dove la funzione*

$$f(x) = \log x - \frac{1}{\log x}$$

è invertibile e scrivere esplicitamente la funzione inversa. Calcolare la derivata di tale funzione nell'origine.

12. *Verificare che vale la relazione*

$$\log(1+x) \leq x\,, \qquad \forall x > -1\,.$$

13. *Disegnare il grafico del polinomio* $f(x) = 3x^5 - 50x^3 + 135x$. *Determinare inoltre al variare del parametro reale* k *il massimo ed il minimo numero di radici reali di* $f(x) + k$.

14. *Si consideri la funzione* $f(x) = x^4 - 2\sqrt{\log x}$. *Si chiede di*
   a) *determinarne il dominio;*
   b) *studiarne la monotonia;*
   c) *provare che il punto* $(\mathrm{e}^4 - 2, \mathrm{e})$ *appartiene al grafico di* f^{-1} *e calcolare la derivata di* f^{-1} *in* $\mathrm{e}^4 - 2$.

15. *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x+1},$$

   a) *determinarne dominio, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;*
   b) *studiarne gli intervalli di monotonia ed individuarne i punti di massimo e minimo, specificando se sono relativi o assoluti;*
   c) *tracciarne un grafico qualitativo;*
   d) *posto*

$$g(x) = \begin{cases} f(x+\sqrt{3}) & \text{se } x \geq 0\,, \\ f(x-\sqrt{3}) & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

   sfruttare i risultati già trovati per disegnare un grafico qualitativo di g *e per studiarne la continuità e derivabilità nell'origine.*

16. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \sqrt{|x^2-4|} - x,$$

   a) *determinarne dominio, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti;*
   b) *determinare il segno di* f;
   c) *determinare gli intervalli di monotonia ed elencare tutti i punti di estremo di* f;
   d) *determinare eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di* f;
   e) *tracciare un grafico qualitativo di* f.

17. *Si consideri la seguente funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x} - 1}.$$

   Si chiede di
   a) *studiare il comportamento di* $f(x)$ *agli estremi del campo di esistenza;*
   b) *dire quali sono gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di non derivabilità di* $f(x)$;

c) studiare la convessità di $f(x)$, indicando i punti di flesso;
d) disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

18. *Data la funzione*

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-|x|} + \frac{x}{\mathrm{e}},$$

a) determinarne il dominio e gli eventuali asintoti;
b) discuterne la derivabilità e la monotonia;
c) determinarne i punti di massimo e minimo, precisando se sono globali o locali;
d) tracciarne un grafico qualitativo.

19. *Sia data la funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - 8|x-3| - 8).$$

Si chiede di
a) determinarne gli intervalli di monotonia;
b) determinarne i punti di estremo relativo e l'immagine $\operatorname{im} f$*;*
c) indicare eventuali punti di discontinuità o di non derivabilità;
d) tracciarne un grafico qualitativo;
e) dire se esiste una costante reale α tale che la funzione

$$g(x) = f(x) - \alpha|x-3|$$

sia di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto l'asse reale.

20. *Sia data la funzione*

$$f(x) = \frac{\log|1+x|}{(1+x)^2},$$

a) determinarne il dominio, il comportamento agli estremi ed eventuali asintoti;
b) individuarne gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto;
c) individuarne gli intervalli di convessità e i punti di flesso;
d) disegnarne un grafico qualitativo.

21. *Sia data la funzione*

$$f(x) = \frac{x\log|x|}{1+\log^2|x|}.$$

a) Si dimostri che f può essere prolungata con continuità su tutto $\mathbb{R}$ e si discuta la derivabilità della funzione g così ottenuta;
b) si determini il numero dei punti stazionari di g;
c) si disegni un grafico qualitativo di g che tenga conto della monotonia e di eventuali asintoti.

22. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \arctan \frac{|x| + 3}{x - 3}\,.$$

a) *Determinare il dominio di* $f(x)$*, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;*
b) *determinare gli intervalli di monotonia di* $f(x)$*, gli eventuali punti di estremo relativi e assoluti. Indicare* $\inf f$ *e* $\sup f$*;*
c) *discutere la derivabilità di* f*;*
d) *determinare gli intervalli di concavità e di convessità di* f*;*
e) *tracciare il grafico della funzione che evidenzi i risultati precedenti.*

23. *Sia data la funzione*

$$f(x) = \arcsin \sqrt{2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}.$$

Si chiede di
a) *determinare il dominio di* $f(x)$*, i limiti agli estremi e gli eventuali asintoti;*
b) *stabilire in quali punti del suo dominio la funzione* f *è derivabile;*
c) *determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo;*
d) *tracciare il grafico qualitativo della funzione* $f(x)$*, in base alle informazioni raccolte nei punti precedenti;*
e) *definire una funzione* $\tilde{f}$ *che sia un'estensione continua di* f *a tutto* $\mathbb{R}$*.*

6.12.1 Soluzioni

1. *Derivabilità:*

a) No.

b) Calcoliamo il limite destro e sinistro del rapporto incrementale per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(-x) - 0}{x - 0} = -1\,.$$

Dunque la funzione non è derivabile in $x_0 = 0$.

c) Osserviamo che, per $x \neq 0$, la funzione è derivabile e si ha

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2}\,.$$

Inoltre $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. Pertanto la funzione è continua in $x_0 = 0$ e, per il Teorema 6.15, è anche derivabile in tale punto.

d) No.

2. *Derivabilità:*

a) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} & \text{se } x \geq 0\,, \\ x\sqrt{-x} & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

pertanto f' è certamente derivabile per $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{se } x > 0\,, \\ \frac{3}{2}\sqrt{-x} & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ (perché composizione e prodotto di funzioni continue), in particolare lo è in $x = 0$. Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ e quindi f è derivabile anche in $x = 0$ con $f'(0) = 0$.

b) Derivabile in $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$.

c) Derivabile in $\mathbb{R}$, $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0\,, \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

d) La funzione è continua per $x \neq 1$; inoltre

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2 + x - 5) = f(1) = -3 = \lim_{x\to 1^-}(x - 4)$$

e quindi è continua anche in $x = 1$. Risulta

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x > 1\,, \\ 1 & \text{se } x < 1\,, \end{cases}$$

pertanto f è derivabile almeno in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Inoltre, applicando il Teorema 6.15 alla derivata destra e sinistra separatamente, otteniamo

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 3\,, \quad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1\,.$$

Dunque $x = 1$ è un punto di non derivabilità, essendo un punto angoloso.

3. *Calcolo di derivate:*

a) $f'(x) = \dfrac{5x^2 + 3}{(1 + x^2)^{2/3}}$

b) $f'(x) = \operatorname{cotan} x$

c) $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{x^2+1} \sin \mathrm{e}^{x^2+1}$

d) $f'(x) = -\dfrac{\log x + 1}{x^2 \log^2 x}$

4. *Massimi e minimi:*

Notiamo che entrambe le funzioni sono continue e dunque i valori massimo e minimo esistono certamente per il Teorema di Weierstrass.

a) Valore massimo $\sqrt{2}$ nel punto $x = \frac{\pi}{4}$; valore minimo $-\sqrt{2}$ nel punto $x = \frac{5}{4}\pi$. (Gli estremi dell'intervallo sono rispettivamente punto di minimo e massimo relativo, ma non assoluto, della funzione.)

Figura 6.16. Grafico della funzione $f(x) = x^2 - |x+1| - 2$

b) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{se } x < -1\,, \\ x^2 - x - 3 & \text{se } x \geq -1\,. \end{cases}$$

Per $x < -1$, la funzione coincide con la parabola $y = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$. Essa ha vertice in $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ ed è convessa, quindi, nell'intervallo $[-2, -1]$ di nostro interesse, essa è sempre decrescente; assume valore massimo 1 in $x = -2$ e valore minimo -1 in $x = -1$.
Per $x \geq -1$, la funzione coincide con la parabola $y = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4}$ che è rivolta verso l'alto e ha vertice in $(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4})$. Pertanto, nell'intervallo $[-1, 1]$, essa ha un punto di minimo in $x = \frac{1}{2}$ con $f(\frac{1}{2}) = -\frac{13}{4}$. Inoltre $f(-1) = -1$ e $f(1) = -3$, quindi assume valore massimo -1 in $x = -1$.
In conclusione, la funzione f ha valore minimo $-\frac{13}{4}$ (raggiunto in $x = \frac{1}{2}$) e valore massimo 1 (raggiunto in $x = -2$) (si veda la Figura 6.16).

5. *Rette tangenti:*

a) Poiché

$$f'(x) = \frac{3}{3x-2}\,, \qquad f(2) = \log 4\,, \qquad f'(2) = \frac{3}{4}\,,$$

l'equazione della retta tangente richiesta è

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = \log 4 + \frac{3}{4}(x-2)\,.$$

b) $y = \frac{1}{2}$.

c) Poiché

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}\,, \qquad f(0) = f'(0) = \mathrm{e}\,,$$

l'equazione della retta tangente è

$$y = f(0) + f'(0)x = \mathrm{e} + \mathrm{e}x\,.$$

d) $y = \pi^2(x - \frac{1}{\pi})$.

6. La funzione è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ in quanto somma di funzioni elementari con tale proprietà, pertanto è invertibile su $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché f è continua e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dal Corollario 4.30 deduciamo che $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$. La funzione è derivabile su $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 5 + 3x^2 + 10x^4 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; dunque, per il Teorema 6.9, f^{-1} è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $f(0) = 0$ e $f(1) = 8$, pertanto

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad (f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{18}\,.$$

7. La funzione è definita sulla semiretta $(0, +\infty)$; è strettamente crescente sul suo dominio perché somma di funzioni con tale proprietà e pertanto è invertibile. (La stretta monotonia si può anche verificare osservando che la derivata

$$f'(x) = (2x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{x(1 + \log^2 x)}$$

è > 0 per ogni $x > 0$.) Inoltre f è continua nel suo dominio e, per il Corollario 4.30, la sua immagine è un intervallo di estremi $\inf f$ e $\sup f$. Poiché

$$\inf f = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 - \frac{\pi}{2} + 2 = 1 - \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

risulta $\operatorname{im} f = (1 - \frac{\pi}{2}, +\infty)$.

8. La funzione è definita per $x > -2$, è continua e strettamente crescente nel suo dominio in quanto

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} > 0\,, \qquad \forall x > -2\,.$$

Dunque $f(x) < f(1) = 0$ per $x < 1$, $f(x) > f(1) = 0$ per $x > 1$.

9. La funzione è definita per $x > 0$. Gli zeri della funzione f devono soddisfare la condizione

$$x \log x - 1 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \log x = \frac{1}{x}\,.$$

Posto $h(x) = \log x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, osserviamo che

$$h(1) = 0 < 1 = g(1) \qquad \text{e} \qquad h(\mathrm{e}) = 1 > \frac{1}{\mathrm{e}} = g(\mathrm{e})\,;$$

quindi, per il Corollario 4.27, esiste un punto $x_0 \in (1, \mathrm{e})$ tale che $h(x_0) = g(x_0)$. Inoltre tale punto è unico in quanto h è strettamente crescente e g è strettamente decrescente. Possiamo concludere che la funzione f ha un unico zero, appartenente all'intervallo $(1, \mathrm{e})$.
Per determinare il numero di punti critici, calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^2(\log x + 1) - 2x(x \log x - 1)}{x^4} = \frac{x + 2 - x \log x}{x^3}\,.$$

Gli zeri di f' sono determinati dalla condizione

$$x + 2 - x \log x = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \log x = \frac{2+x}{x}\,.$$

Posto $\bar{g}(x) = \frac{2+x}{x} = 1 + \frac{2}{x}$, osserviamo che

$$h(\mathrm{e}) = 1 < 1 + \frac{2}{\mathrm{e}} = \bar{g}(\mathrm{e}) \qquad \text{e} \qquad h(\mathrm{e}^2) = 2 > 1 + \frac{2}{\mathrm{e}^2} = \bar{g}(\mathrm{e}^2)\,;$$

quindi, ancora per il Corollario 4.27, esiste un unico punto $\bar{x}_0 \in (\mathrm{e}, \mathrm{e}^2)$ tale che $h(\bar{x}_0) = \bar{g}(\bar{x}_0)$ (l'unicità è conseguenza della stretta monotonia di h e $\bar{g}$). In definitiva, f ha un unico punto critico, appartenente all'intervallo $(\mathrm{e}, \mathrm{e}^2)$.

10. Si ha, ricordando le formule di duplicazione (2.13),

$$f'(x) = 2\cos x - \sin 2x = 2\cos x(1 - \sin x).$$

Quindi $f'(x) = 0$ per $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$, $f'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; così $x = \frac{\pi}{2}$ è un punto di massimo assoluto con $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ è un punto di minimo assoluto con $f(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{5}{2}$. Inoltre $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}$ e agli estremi dell'intervallo $[0, 2\pi]$ si hanno due punti estremi. Più precisamente, $x = 0$ è un punto di minimo e $x = 2\pi$ è un punto di massimo.

11. Osserviamo che la funzione f è definita per $x > 0$ e $x \neq 1$, per cui il più grande intervallo contenente $x_0 = \frac{1}{2}$ dove f è invertibile è al più $(0, 1)$. Studiamo allora, in tale intervallo, la monotonia stretta di f, che è equivalente alla sua invertibilità essendo la funzione continua nel suo dominio. Poiché

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log^2 x} = \frac{\log^2 x + 1}{x \log^2 x}$$

si verifica immediatamente che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, ossia f è monotona strettamente crescente su $(0, 1)$. Per quanto detto prima possiamo concludere che il più grande intervallo di invertibilità cercato è proprio $(0, 1)$.
Per scrivere esplicitamente la funzione inversa poniamo $t = \log x$, e otteniamo

$$y = t - \frac{1}{t}\,, \qquad t^2 - ty - 1 = 0\,, \qquad t = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}.$$

Tornando alla variabile x, si ha

$$x = \mathrm{e}^{\frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}}.$$

Poiché siamo interessati a $x \in (0, 1)$, si avrà

$$x = f^{-1}(y) = \mathrm{e}^{\frac{y - \sqrt{y^2+4}}{2}}.$$

Scambiando i simboli delle variabili, si ottiene

$$y = f^{-1}(x) = \mathrm{e}^{\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}}.$$

Infine si ha $f^{-1}(0) = \mathrm{e}^{-1}$ e pertanto

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(\mathrm{e}^{-1})} = \frac{1}{2\mathrm{e}}\,.$$

12. Consideriamo la funzione $f(x) = \log(1+x) - x$. È definita per $x > -1$ e

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\big(-x + o(x)\big) = -\infty\,.$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}\,,$$

dunque $x = 0$ è un punto critico di f, $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $f'(x) < 0$ per $x > 0$. Pertanto f è crescente in $(-1, 0]$ e decrescente in $[0, +\infty)$; $x = 0$ è il punto di massimo assoluto della funzione con $f(0) = 0$. In conclusione $f(x) \le f(0) = 0$, per ogni $x > -1$.

13. Si verifica che f è dispari e

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 150x^2 + 135 = 15(x^4 - 10x^2 + 9) \\ &= 15(x^2-1)(x^2-9) = 15(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\,. \end{aligned}$$

Lo studio del segno di f' è riportato nella seguente tabella:

Quindi la funzione è crescente in $(-\infty, -3]$, in $[-1, 1]$ e in $[3, +\infty)$ ed è decrescente in $[-3, -1]$ e in $[1, 3]$; i punti $x = -1$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo e i punti $x = 1$ e $x = -3$ sono punti di massimo relativo con

$$f(1) = -f(-1) = 88 \qquad \text{e} \qquad f(3) = -f(-3) = -216.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Pertanto il grafico di f è quello disegnato nella Figura 6.17.

Il secondo problema posto è equivalente a studiare, al variare del parametro k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -k$, ossia il numero di intersezioni tra il grafico di f e la retta $y = -k$.

Figura 6.17. Grafico della funzione $f(x) = 3x^5 - 50x^3 + 135x$

Risulta

per $k > 216$ oppure $k < -216$	una soluzione
per $k = \pm 216$	due soluzioni
per $k \in (-216, -88) \cup (88, 216)$	tre soluzioni
per $k = \pm 88$	quattro soluzioni
per $k \in (-88, 88)$	cinque soluzioni.

Quindi il massimo e il minimo numero di radici reale del polinomio $3x^5 - 50x^3 + 135x + k$ sono rispettivamente 5 e 1.

14. *Studio della funzione* $f(x) = x^4 - 2\sqrt{\log x}$*:*

a) Poiché deve essere $x > 0$ e $\log x \geq 0$, ossia $x \geq 1$, risulta $\operatorname{dom} f = [1, +\infty)$.

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{4x^4\sqrt{\log x} - 1}{x\sqrt{\log x}}$$

e quindi

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^4\sqrt{\log x} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad g_1(x) = \log x = \frac{1}{16x^8} = g_2(x).$$

Graficamente otteniamo, per $x \geq 1$, un punto di intersezione tra i grafici di g_1 e g_2, sia $x_0 > 1$ (si veda la Figura 6.18). Pertanto $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ e f è decrescente in $[1, x_0]$ e crescente in $[x_0, +\infty)$. Allora x_0 è un punto di minimo e, per la monotonia, la funzione sarà invertibile negli intervalli $[1, x_0]$ e $[x_0, +\infty)$. Inoltre, $0 = \log 1 < \frac{1}{16}$ e $\log 2 > \frac{1}{2^{12}}$. Così $1 < x_0 < 2$.

c) Poiché $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^4 - 2$, il punto $(\mathrm{e}^4 - 2, \mathrm{e})$ appartiene al grafico di f^{-1} e

$$(f^{-1})'(\mathrm{e}^4 - 2) = \frac{1}{f'(\mathrm{e})} = \frac{\mathrm{e}}{4\mathrm{e}^4 - 1}.$$

Figura 6.18. Grafico delle funzioni $g_1(x) = \log x$ e $g_2(x) = \dfrac{1}{16x^8}$

15. *Studio della funzione* $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x+1}$*:*

a) Il dominio è determinato dalle condizioni $x^2 - 3 \geq 0$ e $x \neq -1$, e dunque $\operatorname{dom} f = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$.
Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1\,,$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = 0,$$

quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale destro e $y = -1$ è asintoto orizzontale sinistro.

b) Risulta

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2\sqrt{x^2-3}},$$

quindi $f'(x) = 0$ per $x = -3$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Pertanto f è crescente in $[-3, -\sqrt{3}]$ e in $[\sqrt{3}, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, -3]$; in punto $x = -3$ è un punto di minimo assoluto con $f(-3) = -\frac{\sqrt{6}}{2} < -1$. Inoltre, i punti $x = \pm\sqrt{3}$ sono anch'essi punti di estremo, più precisamente $x = -\sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo e $x = \sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo con $f(\pm\sqrt{3}) = 0$.

c) Il grafico della funzione f è mostrato nella Figura 6.19 (a sinistra).

d) La funzione g è ottenuta traslando di $\sqrt{3}$ la funzione f verso destra per $x < 0$, verso sinistra per $x > 0$. Il grafico della funzione g risulterà quindi quello mostrato nella Figura 6.19 (a destra).
La funzione g risulta continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-} f(x-\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = 0 = f(\sqrt{3}) = \lim_{x\to0^+} g(x).$$

Figura 6.19. Grafici delle funzioni f (a sinistra) e g (a destra) relative all'Esercizio 15.

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^\pm} g'(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f'(x) = \lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f'(x) = +\infty$$

e quindi g non è derivabile in $x = 0$.

16. *Studio della funzione* $f(x) = \sqrt{|x^2-4|} - x$*:*

a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0^-, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Così $y = 0$ è asintoto orizzontale destro. Verifichiamo l'esistenza dell'eventuale asintoto obliquo sinistro. Risulta

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} - 1\right) = -2\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}-x} = 0,$$

ossia la retta $y = -2x$ è asintoto obliquo sinistro.

b) È sufficiente risolvere la disequazione $\sqrt{|x^2-4|} - x \geq 0$. Osserviamo che $\sqrt{|x^2-4|} \geq x$ è verificata per ogni $x < 0$. Per $x \geq 0$, distinguiamo due casi: $x^2-4 < 0$ (cioè $0 \leq x < 2$) e $x^2-4 \geq 0$ (cioè $x \geq 2$).
Sia $0 \leq x < 2$, elevando al quadrato si ha

$$4 - x^2 \geq x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 2 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq x \leq \sqrt{2}\,.$$

Sia $x \geq 2$, elevando al quadrato si ha $x^2 - 4 \geq x^2$ che non è mai verificata. In conclusione, la funzione si annulla solo per $x = \sqrt{2}$, è strettamente positiva per $x < \sqrt{2}$ e strettamente negativa per $x > \sqrt{2}$.

c) Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} - x & \text{se } -2 < x < 2\,, \\ \sqrt{x^2-4} - x & \text{se } x \le -2\,,\ x \ge 2\,, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - 1 & \text{se } -2 < x < 2\,, \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 & \text{se } x < -2\,,\ x > 2\,. \end{cases}$$

Per $-2 < x < 2$, $f'(x) \ge 0$ se $x + \sqrt{4-x^2} \le 0$ ovvero $\sqrt{4-x^2} \le -x$. La disequazione non è verificata per alcun valore di $x \ge 0$; per $-2 < x < 0$, elevando al quadrato si ha

$$4 - x^2 \le x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 2 \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2 \le x \le -\sqrt{2}\,.$$

Quindi $f'(x) = 0$ per $x = -\sqrt{2}$, $f'(x) > 0$ per $-2 < x < -\sqrt{2}$ e $f'(x) < 0$ per $-\sqrt{2} < x < 2$.
Se $x < -2$ oppure $x > 2$, $f'(x) \ge 0$ se $x - \sqrt{x^2-4} \ge 0$ ovvero $\sqrt{x^2-4} \le x$. La disequazione non è verificata per alcun valore di $x < -2$; per $x > 2$, elevando al quadrato si ha $x^2 \ge x^2 - 4$ che è sempre verificata. Quindi $f'(x) > 0$ per $x > 2$ e $f'(x) < 0$ per $x < -2$.
In conclusione f risulta decrescente negli intervalli $(-\infty, -2]$ e $[-\sqrt{2}, 2]$, crescente negli intervalli $[-2, -\sqrt{2}]$ e $[2, +\infty)$. I punti $x = \pm 2$ sono punti di minimo relativo, il punto $x = -\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo. Le ordinate valgono $f(-2) = 2$, $f(2) = -2$ e $f(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. Quindi $x = 2$ è più precisamente un punto di minimo assoluto.

d) La funzione f è continua su tutto il suo dominio in quanto composizione di funzioni elementari continue. Per lo studio della derivabilità, è sufficiente esaminare il comportamento di f' per $x \to \pm 2$. Poiché

$$\lim_{x \to \pm 2} f'(x) = \infty,$$

la funzione non è derivabile nei punti $x = \pm 2$.

e) Il grafico della funzione f è mostrato nella Figura 6.20.

17. *Studio della funzione* $f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x} - 1}$*:*

a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e risulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x} - 1)^{2/3}},$$

per cui $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f non è derivabile per $x = 0$ in quanto $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$. La funzione è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Figura 6.20. Grafico della funzione $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - x$

c) Calcoliamo la derivata seconda per $x \neq 0$, ottenendo

$$f''(x) = \frac{4}{9}\mathrm{e}^{2x}\frac{\mathrm{e}^{2x} - 3}{(\mathrm{e}^{2x} - 1)^{5/3}}.$$

Risulta $f''(x) = 0$ per $x = \frac{1}{2}\log 3$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}\log 3, +\infty)$. Quindi il punto $x = \frac{1}{2}\log 3$ è un flesso ascendente, f è convessa in $(-\infty, 0]$ e in $[\frac{1}{2}\log 3, +\infty)$, f è concava in $[0, \frac{1}{2}\log 3]$. Con un'estensione della definizione, anche il punto $x = 0$ può essere considerato un flesso (a tangente verticale).

d) Il grafico della funzione f è mostrato nella Figura 6.21.

Figura 6.21. Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x} - 1}$

18. *Studio della funzione* $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-|x|} + \frac{x}{\mathrm{e}}$*:*

a) Chiaramente $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Osservando che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{-|x|} = 0\,,$$

otteniamo immediatamente

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,,\\
&\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}\,,\\
&\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \frac{x}{\mathrm{e}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} (1 - \mathrm{e}^{-|x|}) = 1
\end{aligned}$$

e quindi la retta $y = \frac{1}{\mathrm{e}}x + 1$ è asintoto obliquo completo.

b) La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ e non vi sono problemi di derivabilità per $x \neq 0$. Risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} & \text{se } x > 0\,,\\[2ex] -\mathrm{e}^{x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} & \text{se } x < 0\,,\end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left(-\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1\\
&\neq \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} + 1
\end{aligned}$$

e quindi f non è derivabile in $x = 0$.
Inoltre, per $x > 0$, $f'(x) > 0$. Per $x < 0$, $f'(x) > 0$ se $\mathrm{e}^x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ ossia se $x < -1$.
In conclusione f è crescente su $(-\infty, -1]$ e su $[0, +\infty)$, decrescente su $[-1, 0]$.

c) Per quanto appena visto possiamo affermare che $x = -1$ è un punto di massimo locale con $f(-1) = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$, mentre $x = 0$ è un punto di minimo locale con $f(0) = 0$.

d) Il grafico della funzione f è mostrato nella Figura 6.22.

19. *Studio della funzione* $f(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - 8|x-3| - 8)$*:*

a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Scriviamo

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x(x^2 + 8x - 32) & \text{se } x < 3\,,\\ \mathrm{e}^x(x^2 - 8x + 16) & \text{se } x \geq 3\,,\end{cases}$$

e quindi

Figura 6.22. Grafico della funzione $f(x) = 1 - e^{-|x|} + \frac{x}{e}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + 10x - 24) & \text{se } x < 3\,, \\ e^x(x^2 - 6x + 8) & \text{se } x > 3\,. \end{cases}$$

Così se $x < 3$, si ha $f'(x) = 0$ se $x^2 + 10x - 24 = 0$ ossia per $x = -12$ e per $x = 2$, mentre $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -12) \cup (2, 3)$. Se $x > 3$, $f'(x) = 0$ se $x^2 - 6x + 8 = 0$ ossia per $x = 4$ (si noti che $x = 2$ è soluzione dell'equazione ma non è da considerarsi in quanto $2 < 3$), mentre $f'(x) > 0$ se $x \in (4, +\infty)$. In definitiva, f è crescente negli intervalli $(-\infty, -12]$, $[2, 3]$, $[4, +\infty)$ e decrescente negli intervalli $[-12, 2]$ e $[3, 4]$.

b) Dallo studio effettuato nel punto a) si ricava che $x = -12$ e $x = 3$ sono punti di massimo relativo, $x = 2$ e $x = 4$ sono punti di minimo relativo. Inoltre $f(-12) = 16e^{-12}$, $f(2) = -12e^2$, $f(3) = e^3$ e $f(4) = 0$. Per determinare l'immagine di f, calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2 + 8x - 32) = 0\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(x^2 - 8x + 16) = +\infty.$$

Poiché la funzione è continua, risulta

$$\operatorname{im} f = [\min f(x), \sup f(x)) = [f(2), +\infty) = [-12e^2, +\infty).$$

c) Non vi sono punti di discontinuità in quanto la funzione è una composizione di funzioni continue. Per la derivabilità, l'unico punto da studiare è $x = 3$. Risulta

$$\lim_{x\to3^-} f'(x) = \lim_{x\to3^-} e^x(x^2 + 10x - 24) = 15e^3\,,$$
$$\lim_{x\to3^+} f'(x) = \lim_{x\to3^+} e^x(x^2 - 6x + 8) = -e^3,$$

quindi f non è derivabile in $x = 3$.

Figura 6.23. Grafico della funzione $f(x) = e^x(x^2 - 8|x-3| - 8)$

d) Per il grafico della funzione si veda la Figura 6.23; nel riquadro compare, in scala differente, il grafico di f in un intorno del punto $x = -12$.

e) La funzione g è continua su tutto l'asse reale e si ha

$$g'(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + 10x - 24) + \alpha & \text{se } x < 3\,, \\ e^x(x^2 - 6x + 8) - \alpha & \text{se } x > 3\,. \end{cases}$$

Affinché g sia derivabile in $x = 3$ deve essere

$$\lim_{x \to 3^-} g'(x) = 15e^3 + \alpha = \lim_{x \to 3^+} g'(x) = -e^3 - \alpha\,;$$

concludiamo che, per $\alpha = -8e^3$, g è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto l'asse reale.

20. *Studio della funzione* $f(x) = \frac{\log|1+x|}{(1+x)^2}$*:*

a) Risulta $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Applicando la (5.6) c), si ottiene

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^+$$

mentre

$$\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \frac{\infty}{0^+} = -\infty\,.$$

Da ciò si deduce che $x = -1$ è un asintoto verticale, mentre $y = 0$ è un asintoto orizzontale completo.

Figura 6.24. Grafico della funzione $f(x) = \frac{\log|1+x|}{(1+x)^2}$

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{1 - 2\log|x+1|}{(x+1)^3}.$$

Osserviamo che $f(x)$ risulta derivabile in ogni punto del suo dominio e che $f'(x) = 0$ se $|x+1| = \sqrt{e}$ e quindi se $x = -1 \pm \sqrt{e}$. Inoltre $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -\sqrt{e}-1) \cup (-1, \sqrt{e}-1)$; pertanto la funzione è crescente negli intervalli $(-\infty, -\sqrt{e}-1]$ e $(-1, -1+\sqrt{e}]$, decrescente in $[-\sqrt{e}-1, -1)$ e $[-1+\sqrt{e}, +\infty)$; i punti $x = -1 \pm \sqrt{e}$ sono punti di massimo (assoluto) con $f(-1 \pm \sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$.

c) Si ha

$$f''(x) = \frac{-5 + 6\log|x+1|}{(x+1)^4}$$

da cui risulta che la derivata seconda è definita in ogni punto del dominio di f e $f''(x) = 0$ per $|x+1| = e^{5/6}$, ossia per $x = -1 \pm e^{5/6}$. Inoltre $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1-e^{5/6}) \cup (e^{5/6}-1, +\infty)$; pertanto f è convessa in $(-\infty, -1-e^{5/6}]$ e in $[e^{5/6}-1, +\infty)$ e concava in $[-1-e^{5/6}, -1)$ e $(-1, e^{5/6}-1]$; i punti $x = -1 \pm e^{5/6}$ sono punti di flesso.

d) Il grafico della funzione f è mostrato nella Figura 6.24.

21. *Studio della funzione* $f(x) = \frac{x\log|x|}{1+\log^2|x|}$:

a) È chiaro che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (x prevale sul logaritmo) la funzione può essere prolungata con continuità su tutto $\mathbb{R}$ ponendo $g(0) = 0$. Inoltre la funzione è dispari ed è quindi sufficiente studiarne il comportamento per $x > 0$.
Per quanto riguarda la derivabilità si ha, per $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\log^3 x - \log^2 x + \log x + 1}{(1+\log^2 x)^2}$$

e, posto $t = \log x$,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^3 - t^2 + t + 1}{(1+t^2)^2} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^3}{t^4} = 0.$$

Dunque la funzione g, prolungata come detto prima, è non solo continua ma, applicando il Teorema 6.15, anche derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ed, in particolare, $g'(0) = 0$.

b) Dal punto a) si vede che $x = 0$ è un punto stazionario di g. Per individuare gli eventuali altri punti in cui la derivata prima si annulla, studiamo gli zeri della funzione ausiliaria $h(t) = t^3 - t^2 + t + 1$ dove $t = \log x$ con $x > 0$. Poiché

$$\lim_{t\to-\infty} h(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} h(t) = +\infty,$$
$$h(0) = 1, \qquad h'(t) = 3t^2 - 2t + 1 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la funzione h è crescente per ogni t ed ha un solo zero, sia esso t_0, negativo. Il suo grafico qualitativo è mostrato nella Figura 6.25 (a sinistra).
Allora $t_0 = \log x_0 < 0$, implica $0 < x_0 = \mathrm{e}^{t_0} < 1$. Così, per la disparità della funzione, g ha altri due punti stazionari, rispettivamente in x_0 e $-x_0$.

c) Per quanto ottenuto nel punto b), risulta $g'(x) > 0$ in $(x_0, +\infty)$ e $g'(x) < 0$ in $(0, x_0)$. Riassumendo, e tenendo conto della disparità, risulta g crescente in $(-\infty, -x_0]$ e in $[x_0, +\infty)$, g decrescente in $[-x_0, x_0]$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{1+\log^2 x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{1+t^2} = 0,$$

cosicché la funzione g non ha asintoti.
Il grafico della funzione g è mostrato nella Figura 6.25 (a destra).

Figura 6.25. Grafici delle funzioni h (a sinistra) e g (a destra) relative all'Esercizio 21

22. *Studio della funzione* $f(x) = \arctan \frac{|x|+3}{x-3}$:

a) Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ e, esplicitando,

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{-x+3}{x-3} = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} & \text{se } x \le 0\,, \\ \arctan \dfrac{x+3}{x-3} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \arctan \frac{6}{0^-} = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \arctan \frac{6}{0^+} = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Allora le rette $y = -\frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{\pi}{4}$ sono asintoti orizzontali (rispettivamente sinistro e destro).

b) Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0\,, \\ -\dfrac{3}{x^2+9} & \text{se } x > 0, \quad x \ne 3, \end{cases}$$

così $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$, $x \ne 3$ e f risulta strettamente decrescente in $[0, 3)$ e in $(3, +\infty)$, decrescente (in senso non stretto) in $(-\infty, 3)$. Lo studente osservi che sarebbe sbagliato dire che f è strettamente decrescente nell'insieme $[0, 3) \cup (3, +\infty)$ (si ricordi quanto detto a pag. 205). Tutti i punti $x \in (-\infty, 0)$ sono punti di massimo e di minimo relativo non stretto, con $f(x) = -\frac{\pi}{4}$, mentre $x = 0$ è punto di massimo relativo.
Infine $\inf f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\sup f(x) = \frac{\pi}{2}$ (si noti che non esistono né il minimo né il massimo della funzione).

c) La funzione è senz'altro derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. In $x = 3$, f non è definita; in $x = 0$, dove f è continua, si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \ne \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{3}{x^2+9} = -\frac{1}{3}$$

e quindi f è effettivamente derivabile solo in $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

d) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0\,, \\ \dfrac{6x}{(x^2+9)^2} & \text{se } x > 0, \quad x \ne 3\,, \end{cases}$$

così $f''(x) > 0$ per ogni $x > 0$, $x \ne 3$ e quindi f risulta convessa in $[0, 3)$ e in $(3, +\infty)$.

Figura 6.26. Grafico della funzione $f(x) = \arctan \dfrac{|x|+3}{x-3}$

e) Il grafico della funzione f è mostrato nella Figura 6.26.

23. *Studio della funzione* $f(x) = \arcsin \sqrt{2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}$*:*

a) Imponiamo che sia $2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} \geq 0$ e $-1 \leq \sqrt{2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}} \leq 1$; la prima disequazione equivale a $2 - \mathrm{e}^x \geq 0$ ossia $x \leq \log 2$. Essendo una radice sempre ≥ 0, la seconda disuguaglianza si riduce a $2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} \leq 1$. Ponendo $y = \mathrm{e}^x$, la disuguaglianza diventa $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \geq 0$, che è sempre verificata.
Quindi $\operatorname{dom} f = (-\infty, \log 2]$. Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,, \qquad f(\log 2) = 0.$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro.

b) Dall'espressione

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{\sqrt{\mathrm{e}^x(2-\mathrm{e}^x)(1-2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x})}} = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{\sqrt{\mathrm{e}^x(2-\mathrm{e}^x)(1-\mathrm{e}^x)^2}}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x(2-\mathrm{e}^x)}} & \text{se } 0 < x < \log 2\,, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x(2-\mathrm{e}^x)}} & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

si vede che

$$\lim_{x \to (\log 2)^-} f'(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1\,.$$

Quindi i punti di non derivabilità di f sono $x = \log 2$, punto a tangente verticale e $x = 0$, punto angoloso.

Figura 6.27. Grafico della funzione $f(x) = \arcsin\sqrt{2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}$

c) Si ha $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $f'(x) < 0$ per $0 < x < \log 2$. Così $x = 0$ è un punto di massimo assoluto con $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $x = \log 2$ è un punto di minimo assoluto con $f(\log 2) = 0$; gli intervalli di monotonia sono $(-\infty, 0]$ (in cui f è crescente) e $[0, \log 2]$ (in cui f è decrescente).

d) Il grafico della funzione f è mostrato nella Figura 6.27.

e) Una possibile estensione continua di f è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \leq \log 2\,, \\ 0 & \text{se } x > \log 2\,. \end{cases}$$

7

Sviluppi di Taylor e applicazioni

Lo sviluppo di Taylor di una funzione, nell'intorno di un punto x_0 dell'asse reale, è la rappresentazione della funzione come somma di un polinomio e di un infinitesimo di ordine superiore al grado del polinomio. Esso costituisce uno strumento di analisi estremamente efficace, a livello sia qualitativo sia quantitativo. Infatti, in un intorno abbastanza piccolo di x_0, è possibile approssimare la funzione (che magari ha una forma complessa) con il polinomio, di cui invece è immediato stabilire le proprietà qualitative e che è facilmente calcolabile. Inoltre, gli sviluppi di Taylor delle principali funzioni elementari possono essere agevolmente combinati in modo da fornire gli sviluppi di funzioni più complesse, dando luogo a un'algebra degli sviluppi non dissimile dall'algebra dei polinomi.

7.1 Le formule di Taylor

In questo paragrafo, affrontiamo il problema dell'approssimazione di una funzione f, nell'intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, mediante polinomi algebrici di grado via via più elevato.

Iniziamo supponendo che la funzione sia almeno continua in x_0. Vale allora la formula (5.4); se introduciamo il polinomio costante (di grado 0)

$$Tf_{0,x_0}(x) = f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

possiamo scrivere tale formula come

$$\boxed{f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + o(1), \quad x \to x_0.} \tag{7.1}$$

In altri termini, possiamo approssimare la funzione f, in un intorno di x_0, mediante un polinomio di grado 0 in modo che la differenza $f(x) - Tf_{0,x_0}(x)$ (detta *errore di approssimazione*, o *resto*) sia un infinitesimo in x_0 (si veda la Figura 7.1). La relazione (7.1) è il primo esempio di formula di Taylor.

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_7, © Springer-Verlag Italia 2014

Figura 7.1. Approssimazione locale di f mediante il polinomio $Tf_0 = Tf_{0,x_0}$

Supponiamo ora che la funzione f sia non solo continua ma anche derivabile in x_0. Vale dunque la prima formula dell'incremento finito (6.11); introducendo il polinomio di primo grado in x

$$Tf_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

il cui grafico è, come sappiamo, la retta tangente al grafico di f in x_0 (si veda la Figura 7.2), la relazione (6.11) si scrive come

$$\boxed{f(x) = Tf_{1,x_0}(x) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,} \tag{7.2}$$

che è una nuova formula di Taylor: essa dice che una funzione derivabile in x_0 può essere approssimata nell'intorno di tale punto mediante un polinomio di primo grado, con un errore di approssimazione che non solo tende a 0 per $x \to x_0$, ma che è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

Se invece f è derivabile in tutto un intorno di x_0, tranne al più in x_0, possiamo usare in tale intorno la seconda formula dell'incremento finito (6.13), in cui poniamo $x_1 = x_0$ e $x_2 = x$ e che scriviamo come

$$\boxed{f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + f'(\bar{x})(x - x_0),} \tag{7.3}$$

dove $\bar{x}$ è un opportuno punto compreso tra x_0 e x. Si confronti tale relazione con la formula (7.1): abbiamo ora a disposizione una espressione quantitativamente più precisa dell'errore di approssimazione, o resto. Essa permette ad esempio di dare una stima numerica dell'errore, una volta noti l'incremento $x - x_0$ e una stima numerica della grandezza di f' in un intorno di x_0. Anche la (7.3) è una formula di Taylor, in cui il resto è espresso nella cosiddetta *forma di Lagrange*. Diciamo invece che nelle (7.1) e (7.2) il resto è nella *forma di Peano*.

Figura 7.2. Approssimazione locale di f mediante il polinomio $Tf_1 = Tf_{1,x_0}$

Dopo aver approssimato la funzione mediante polinomi di grado 0 oppure 1, commettendo un errore che è rispettivamente $o(1) = o\big((x-x_0)^0\big)$ e $o(x-x_0)$ per $x \to x_0$, è naturale chiedersi se sia possibile approssimare f mediante un polinomio di secondo grado, commettendo un errore che sia $o\big((x-x_0)^2\big)$ per $x \to x_0$. Cerchiamo dunque se esiste un numero reale a tale che si abbia

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big), \quad x \to x_0. \tag{7.4}$$

Ciò significa che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0.$$

Applicando il Teorema di de l'Hôpital, tale condizione è verificata se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a(x-x_0)}{2(x-x_0)} = 0,$$

ovvero se

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{2} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x-x_0} - a \right) = 0,$$

ossia ancora se

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x-x_0} = a.$$

Concludiamo che la (7.4) è soddisfatta se il limite a primo membro esiste finito, cioè se f è derivabile due volte in x_0; in tal caso, il coefficiente a vale $\frac{1}{2}f''(x_0)$. Siamo quindi giunti alla nuova formula di Taylor (con resto nella forma di Peano):

$$\boxed{f(x) = Tf_{2,x_0}(x) + o\big((x-x_0)^2\big), \quad x \to x_0,} \tag{7.5}$$

Figura 7.3. Approssimazione locale di f mediante il polinomio $Tf_2 = Tf_{2,x_0}$

dove

$$Tf_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

dicesi polinomio di Taylor di f in x_0 di grado (o ordine) 2 (si veda la Figura 7.3).

Il procedimento appena descritto per la costruzione dell'approssimazione di f di ordine 2 può essere reiterato, al fine di costruire approssimazioni polinomiali di f di ordine via via crescente. Il risultato preciso è contenuto nel seguente teorema.

Teorema 7.1 (**Formula di Taylor con resto di Peano**) *Sia $n \geq 0$ ed f derivabile n volte in x_0. Allora, vale la* **formula di Taylor**

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + o\big((x - x_0)^n\big), \quad x \to x_0, \tag{7.6}$$

dove

$$\begin{aligned} Tf_{n,x_0}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Il polinomio $Tf_{n,x_0}(x)$ dicesi **polinomio di Taylor di f in x_0 di grado** (o **ordine**) n, mentre il termine $o\big((x - x_0)^n\big)$ nella (7.6) dicesi **resto di ordine n nella forma di Peano**. La rappresentazione di f data dalla formula (7.6) dicesi **sviluppo di Taylor** di f in x_0 di ordine n, con resto nella forma di Peano.

Con un'ipotesi più forte su f, siamo in grado di dare un'espressione più precisa del resto nella formula di Taylor; essa estende la (7.3).

Teorema 7.2 (**Formula di Taylor con resto di Lagrange**) *Sia $n \geq 0$ ed f derivabile n volte, con derivata n-esima continua, in x_0; inoltre, sia f derivabile $n+1$ volte in un intorno di x_0, tranne eventualmente nel punto x_0. Allora, vale la formula di Taylor*

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x - x_0)^{n+1}, \tag{7.8}$$

per un opportuno $\bar{x}$ compreso tra x_0 e x.

L'espressione precedente del resto dicesi **resto di ordine n nella forma di Lagrange**, e la (7.8) rappresenta lo sviluppo di Taylor di f in x_0 di ordine n, con resto nella forma di Lagrange.

Per le dimostrazioni dei Teoremi 7.1 e 7.2 si rimanda all'Appendice A.4.4, pag. 478.

Un'ulteriore forma del resto di ordine n nella formula di Taylor, detto **resto integrale**, verrà presentata nel Teorema 9.44.

Notiamo infine che uno sviluppo di Taylor nell'origine ($x_0 = 0$) si chiama anche **sviluppo di Maclaurin**. Un'utile proprietà che permette di semplificare il calcolo degli sviluppi di Maclaurin è la seguente.

Proprietà 7.3 *Il polinomio di Maclaurin di una funzione pari (rispettivamente dispari) contiene soltanto potenze pari (rispettivamente dispari) della variabile indipendente.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia una funzione pari, derivabile n volte in un intorno dell'origine. La proprietà segue dalla (7.7) con $x_0 = 0$, se facciamo vedere che tutte le derivate di ordine dispari di f si annullano nell'origine.
Ricordando la Proprietà 6.12, dall'ipotesi che f sia pari deduciamo che f' è dispari, f'' è pari, f''' è dispari e così via. In generale, le derivate di ordine pari $f^{(2k)}$ sono funzioni pari, mentre le derivate di ordine dispari $f^{(2k+1)}$ sono funzioni dispari. Per concludere, è sufficiente osservare che una funzione dispari g definita nell'origine necessariamente si annulla in tale punto; infatti, ponendo $x = 0$ nella relazione $g(-x) = -g(x)$ si ottiene $g(0) = -g(0)$, da cui $g(0) = 0$.
Analogamente si ragiona nel caso in cui f sia dispari. □

7.2 Sviluppi di Taylor notevoli

Determiniamo ora gli sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Nel successivo § 7.3, useremo tali risultati per ottenere gli sviluppi di diverse altre funzioni.

Funzione esponenziale

Sia $f(x) = \mathrm{e}^x$. Ricordando che tutte le sue derivate coincidono con e^x, abbiamo $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni $k \geq 0$. Pertanto, lo sviluppo di Maclaurin di ordine n con resto di Peano della funzione $y = \mathrm{e}^x$ è

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)\,,} \tag{7.9}$$

mentre se esprimiamo il resto nella forma di Lagrange, abbiamo

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1}, \qquad \text{per un certo } \bar{x} \text{ compreso tra } 0 \text{ e } x.} \tag{7.10}$$

I polinomi di Maclaurin della funzione e^x di ordine $n = 1, 2, 3, 4$ sono rappresentati in Figura 7.4.

Figura 7.4. Approssimazione locale di $f(x) = \mathrm{e}^x$ mediante i polinomi $Tf_n = Tf_{n,0}$ per $n = 1, 2, 3, 4$

Osservazione 7.4 Poniamo $x = 1$ nella formula precedente:

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{(n+1)!} \qquad (\text{con } 0 < \bar{x} < 1).$$

Per ogni $n \geq 0$, otteniamo dunque un'approssimazione (per difetto) del numero e, data da

$$\mathrm{e}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}; \tag{7.11}$$

inoltre, osservando che $1 < \mathrm{e}^{\bar{x}} < \mathrm{e} < 3$, abbiamo pure una stima dell'errore commesso:

$$\frac{1}{(n+1)!} < \mathrm{e} - \mathrm{e}_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Poiché il fattoriale cresce molto velocemente al crescere di n, la successione $\{\mathrm{e}_n\}$ converge verso il limite e in modo molto veloce, a differenza di quanto faccia la successione $\{a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\}$ usata per definire il numero di Nepero (si veda la Tabella 7.1 e la si confronti con la Tabella 3.1). Pertanto, la (7.11) rappresenta un'ottima formula per il calcolo numerico approssimato del numero e. □

n	e_n
0	1.0000000000000
1	2.0000000000000
2	2.5000000000000
3	2.6666666666667
4	2.7083333333333
5	2.7166666666667
6	2.7180555555556
7	2.7182539682540
8	2.7182787698413
9	2.7182815255732
10	2.7182818011464

Tabella 7.1. Alcuni valori della successione e_n definita in (7.11)

Lo sviluppo della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ in un punto x_0 generico si ottiene osservando che $f^{(k)}(x_0) = \mathrm{e}^{x_0}$ e dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{x_0} + \mathrm{e}^{x_0}(x - x_0) + \mathrm{e}^{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots + \mathrm{e}^{x_0}\frac{(x-x_0)^n}{n!} + o\big((x-x_0)^n\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{x_0}\frac{(x-x_0)^k}{k!} + o\big((x-x_0)^n\big). \end{aligned}$$

Funzione logaritmo

Sia $f(x) = \log x$. Le sue derivate successive sono

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}\,, \qquad f''(x) = (-1)x^{-2}\,, \qquad f'''(x) = (-1)(-2)x^{-3}\,,$$

e, in generale, $\qquad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}.$

Ne segue che, per $k \geq 1$,

$$\frac{f^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

e dunque lo sviluppo di Taylor di ordine n di f in $x_0 = 1$ risulta essere

$$\boxed{\begin{aligned}\log x &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + o\big((x-1)^n\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k} + o\big((x-1)^n\big).\end{aligned}} \tag{7.12}$$

Effettuando il cambiamento di variabile indipendente $x - 1 \to x$, otteniamo immediatamente lo sviluppo di Maclaurin di ordine n della funzione $\log(1+x)$

$$\boxed{\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).\end{aligned}} \tag{7.13}$$

I polinomi di Maclaurin della funzione $y = \log(1+x)$ di ordine $n = 1, 2, 3, 4$ sono rappresentati in Figura 7.5.

Figura 7.5. Approssimazione locale di $f(x) = \log(1+x)$ mediante i polinomi $Tf_n = Tf_{n,0}$ per $n = 1, 2, 3, 4$

Funzioni trigonometriche

Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$. Ricordando che il seno è una funzione dispari, in base alla Proprietà 7.3, il suo sviluppo di Maclaurin contiene soltanto potenze dispari. Abbiamo $f'(x) = \cos x$, $f'''(x) = -\cos x$ e, in generale, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$; dunque, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Ne segue che il suo sviluppo di Maclaurin di ordine $n = 2m+2$ è

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+2}).\end{aligned}} \tag{7.14}$$

Si osservi la particolare struttura di tale sviluppo, tipica degli sviluppi di Maclaurin delle funzioni dispari. Il polinomio di Maclaurin $Tf_{2m+2,0}$ di ordine pari $2m+2$ coincide con il polinomio $Tf_{2m+1,0}$ di ordine dispari $2m+1$, essendo $f^{(2m+2)}(0) = 0$. Arrestando lo sviluppo all'ordine $2m+1$, si avrebbe

$$\sin x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+1}),$$

ma la (7.14) è preferibile, in quanto fornisce un'informazione più precisa sul comportamento del resto per $x \to 0$. I polinomi di Maclaurin della funzione $y = \sin x$ di ordine $2m+1$ per $0 \le m \le 6$ sono rappresentati in Figura 7.6.

Figura 7.6. Approssimazione locale di $f(x) = \sin x$ mediante i polinomi $Tf_{2m+1} = Tf_{2m+1,0}$ per $0 \le m \le 6$

Figura 7.7. Approssimazione locale di $f(x) = \cos x$ mediante i polinomi $Tf_{2m} = Tf_{2m,0}$ per $1 \leq m \leq 6$

Per quanto riguarda la funzione pari $f(x) = \cos x$, il suo sviluppo di Maclaurin contiene solo potenze pari. Abbiamo $f''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ e, in generale, $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$; dunque, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$. Ne segue che il suo sviluppo di Maclaurin di ordine $n = 2m + 1$ è

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1}). \end{aligned}} \tag{7.15}$$

Valgono per tale sviluppo considerazioni analoghe a quelle fatte per lo sviluppo della funzione $\sin x$. I polinomi di Maclaurin della funzione $y = \cos x$ di ordine $2m$ per $1 \leq m \leq 6$ sono rappresentati in Figura 7.7.

Funzioni elevamento a potenza

Consideriamo la famiglia di funzioni potenza $f(x) = (1+x)^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \end{aligned}$$

e, in generale, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Dunque

$$f(0) = 1\,, \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{per } k \geq 1\,.$$

È allora conveniente estendere la definizione di coefficiente binomiale data in (1.10) al caso in cui α sia un numero reale qualsiasi, ponendo, in analogia con la (1.11),

$$\boxed{\binom{\alpha}{0} = 1\,, \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{per } k \geq 1\,.} \tag{7.16}$$

Ne segue che lo sviluppo di Maclaurin di ordine n di $f(x)$ è

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n).\end{aligned}} \tag{7.17}$$

Dettagliamo alcuni casi particolari notevoli della precedente famiglia di sviluppi. Per $\alpha = -1$ si ha

$$\begin{aligned}&\binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1, \quad \binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1, \ \ldots,\\ &\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k,\end{aligned}$$

e dunque

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n).} \tag{7.18}$$

Invece, per $\alpha = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\frac{1}{8}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{16},$$

e dunque lo sviluppo arrestato all'ordine 3 della funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$ è

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).}$$

I polinomi di Maclaurin della funzione $y = \sqrt{1+x}$ di ordine $n = 1, 2, 3, 4$ sono rappresentati in Figura 7.8.

Figura 7.8. Approssimazione locale di $f(x) = \sqrt{1+x}$ mediante i polinomi $Tf_n = Tf_{n,0}$ per $n = 1, 2, 3, 4$

Per comodità dell'allievo, riportiamo nella sottostante lista gli sviluppi di Maclaurin con resto di Peano ottenuti finora. Una lista più completa si trova a pag. 500.

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

7.3 Operazioni sugli sviluppi di Taylor

Se la funzione f ha una espressione piuttosto complicata, che fa intervenire diverse funzioni elementari, può non essere agevole calcolare lo sviluppo di Taylor

di f usando la definizione, cioè calcolando il valore in x_0 delle derivate di f fino all'ordine n. Al contrario, partendo dagli sviluppi noti delle funzioni elementari, è spesso più conveniente combinarli - secondo procedimenti illustrati qui di seguito - in modo da pervenire a quello di f.

Questo approccio è giustificato dal seguente risultato.

Proposizione 7.5 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Se esiste un polinomio P_n di grado $\leq n$, tale che*

$$f(x) = P_n(x) + o\big((x - x_0)^n\big) \qquad \text{per } x \to x_0, \tag{7.19}$$

allora P_n coincide con il polinomio di Taylor $T_n = Tf_{n,x_0}$ di ordine n generato da f in x_0.

Dimostrazione. Dalla (7.19) si ricava che

$$P_n(x) = f(x) + \varphi(x), \qquad \text{con } \varphi(x) = o\big((x - x_0)^n\big) \text{ per } x \to x_0.$$

Analogamente, dalla formula di Taylor per f in x_0,

$$T_n(x) = f(x) + \psi(x), \qquad \text{con } \psi(x) = o\big((x - x_0)^n\big).$$

Dunque

$$P_n(x) - T_n(x) = \varphi(x) - \psi(x) = o\big((x - x_0)^n\big). \tag{7.20}$$

D'altro canto, la differenza $P_n(x) - T_n(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$, e dunque si potrà scrivere come

$$P_n(x) - T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k.$$

Dobbiamo dimostrare che tutti i coefficienti c_k sono nulli. Per assurdo, supponiamo che esistano dei c_k non nulli, e sia m il più piccolo indice compreso tra 0 ed n tale che $c_m \neq 0$. Allora

$$P_n(x) - T_n(x) = \sum_{k=m}^{n} c_k (x - x_0)^k$$

e, dividendo per $(x - x_0)^m$, si ha

$$\frac{P_n(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^m} = c_m + \sum_{k=m+1}^{n} c_k (x - x_0)^{k-m}.$$

Passando al limite per $x \to x_0$ e ricordando la (7.20), si ottiene

$$0 = c_m,$$

contro l'ipotesi. □

La proposizione appena dimostrata ci assicura che, qualunque sia la strada con cui arriviamo ad una espressione del tipo (7.19) (purché matematicamente lecita), essa fornisce precisamente lo sviluppo di Taylor di ordine n in x_0 di f.

Esempio 7.6

Supponiamo di sapere che una funzione $f(x)$ soddisfa

$$f(x) = 2 - 3(x-2) + (x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3 + o((x-2)^3) \qquad \text{per } x \to 2.$$

Allora, ricordando la (7.7), deduciamo che

$$f(2) = 2, \quad f'(2) = -3, \quad \frac{f''(2)}{2} = 1, \quad \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{4},$$

e quindi

$$f(2) = 2, \quad f'(2) = -3, \quad f''(2) = 2, \quad f'''(2) = -\frac{3}{2}.$$

□

Per semplicità, supporremo nel seguito che $x_0 = 0$. A questa situazione ci si può sempre ridurre con il cambiamento di variabile indipendente $x \to t = x - x_0$.

Siano ora

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n) = p_n(x) + o(x^n)$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + o(x^n) = q_n(x) + o(x^n)$$

gli sviluppi di Maclaurin di due funzioni f e g.

Somma algebrica di sviluppi

Abbiamo, usando la (5.5) a),

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &= [p_n(x) + o(x^n)] \pm [q_n(x) + o(x^n)] \\ &= [p_n(x) \pm q_n(x)] + [o(x^n) \pm o(x^n)] \\ &= p_n(x) \pm q_n(x) + o(x^n). \end{aligned}$$

Dunque lo sviluppo di una somma algebrica di funzioni è la somma algebrica degli sviluppi.

Esempio 7.7

Calcoliamo gli sviluppi di Taylor nell'origine delle funzioni seno e coseno iperbolico introdotte nel § 6.10.1. Abbiamo

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + o(x^{2n+2}),$$

e, cambiando x in $-x$,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \ldots + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + o(x^{2n+2}).$$

Dunque

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

Procedendo in modo analogo, si perviene allo sviluppo

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\,.$$

Si noti l'analogia con gli sviluppi di $\sin x$ e $\cos x$. □

Nello sviluppare la differenza $f - g$, si può verificare la *cancellazione* di tutte le potenze di x di esponente $\leq n$, se ciascuna di queste compare nei due sviluppi con lo stesso coefficiente. Per ottenere la prima potenza di x con coefficiente non nullo, è necessario allora partire da sviluppi di f e di g di ordine $n' > n$. In generale, non si può dire a priori quale sia il valore minimo di n' necessario, e si procede per tentativi. Si ricordi comunque che se si usano sviluppi più 'lunghi' dello stretto necessario, si fanno calcoli che a posteriori si riveleranno inutili, ma non si commette errore. Al contrario, se gli sviluppi sono più 'corti' del necessario, si perviene a risultati non significativi, o, peggio ancora, in certe situazioni si commette errore. A buon intenditor...

Esempio 7.8

Si voglia determinare l'ordine di infinitesimo in 0 di

$$h(x) = e^x - \sqrt{1+2x}$$

mediante lo sviluppo di Maclaurin della funzione h (si veda a tale proposito il successivo § 7.4).
Se si usano gli sviluppi al primo ordine di

$$f(x) = e^x = 1 + x + o(x)$$

e di

$$g(x) = \sqrt{1+2x} = 1 + x + o(x),$$

si ha una cancellazione, e si può solo dire che

$$h(x) = o(x),$$

il che non basta a determinare l'ordine di infinitesimo di h. Se invece usiamo gli sviluppi del secondo ordine

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$g(x) = \sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

allora

$$h(x) = x^2 + o(x^2),$$

dunque $h(x)$ è un infinitesimo del secondo ordine nell'origine. □

Prodotto di sviluppi

Abbiamo, usando ripetutamente la (5.5) d) e poi la (5.5) a),

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= [p_n(x) + o(x^n)][q_n(x) + o(x^n)] \\ &= p_n(x)q_n(x) + p_n(x)o(x^n) + q_n(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \\ &= p_n(x)q_n(x) + o(x^n) + o(x^n) + o(x^{2n}) \\ &= p_n(x)q_n(x) + o(x^n). \end{aligned}$$

Nell'eseguire il prodotto $p_n(x)q_n(x)$ otterremo potenze di x di esponente $> n$; ciascuna di esse è un $o(x^n)$, dunque potremo fare a meno di calcolarla. In altri termini, scriveremo

$$p_n(x)q_n(x) = r_n(x) + o(x^n),$$

dove $r_n(x)$ contiene tutte e sole le potenze di x di esponente $\leq n$. Se ne conclude che

$$f(x)g(x) = r_n(x) + o(x^n).$$

Esempio 7.9

Calcoliamo lo sviluppo al secondo ordine nell'origine di

$$h(x) = \sqrt{1+x}\,\mathrm{e}^x.$$

Abbiamo

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$

$$g(x) = \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

dunque

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \boxed{\frac{x^3}{4}}\right) - \left(\frac{x^2}{8} + \boxed{\frac{x^3}{8}} + \boxed{\frac{x^4}{16}}\right) + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Abbiamo riquadrato i termini di ordine superiore al secondo nel prodotto dei due polinomi, cioè quelli che vengono inglobati nel simbolo $o(x^2)$ (e dunque possono non essere calcolati esplicitamente). □

Quoziente di sviluppi

Supponiamo che $g(0) \neq 0$. Posto

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

cerchiamo uno sviluppo di

$$h(x) = r_n(x) + o(x^n), \qquad \text{con } r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Dovrà essere

$$h(x)g(x) = f(x)$$

e dunque

$$r_n(x)q_n(x) + o(x^n) = p_n(x) + o(x^n).$$

Ciò significa che la parte di grado $\leq n$ del polinomio (di grado $2n$) $r_n(x)q_n(x)$ deve coincidere con $p_n(x)$. Ciò permette di determinare i coefficienti c_k di $r_n(x)$, in ordine crescente di indice, a partire da c_0. Il calcolo può essere organizzato secondo le regole di divisione dei polinomi, purché questi siano *ordinati secondo le potenze crescenti di* x:

$$\begin{array}{r|l}
a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + o(x^n) & b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + o(x^n) \\ \cline{2-2}
a_0 + a_1'x + a_2'x^2 + \ldots + a_n'x^n + o(x^n) & c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + o(x^n) \\ \cline{1-1}
0 + \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \ldots + \tilde{a}_nx^n + o(x^n) & \\
\tilde{a}_1x + \tilde{a}_2'x^2 + \ldots + \tilde{a}_n'x^n + o(x^n) & \\ \cline{1-1}
\vdots & \\
0 + o(x^n) &
\end{array}$$

Esempi 7.10

i) Calcoliamo lo sviluppo al secondo ordine di $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{3 + 2\log(1+x)}$. Usando le (7.9) e (7.13), si ha $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, e $3 + 2\log(1+x) = 3 + 2x - x^2 + o(x^2)$; eseguiamo la divisione

$$\begin{array}{r|l}
1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) & 3 + 2x - x^2 + o(x^2) \\ \cline{2-2}
1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) & \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{11}{54}x^2 + o(x^2) \\ \cline{1-1}
\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}x^2 + o(x^2) & \\
\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + o(x^2) & \\ \cline{1-1}
\frac{11}{18}x^2 + o(x^2) & \\
\frac{11}{18}x^2 + o(x^2) & \\ \cline{1-1}
o(x^2) &
\end{array}$$

da cui $h(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9}x + \dfrac{11}{54}x^2 + o(x^2)$.

ii) Calcoliamo lo sviluppo al quarto ordine di $h(x) = \tan x$. Poiché la funzione è dispari, è sufficiente calcolare il polinomio di Maclaurin del terzo ordine che coincide con quello del quarto. Abbiamo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \text{e} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3);$$

dividendo

$$\begin{array}{r|l}
x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) & 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \cline{2-2}
x - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3) & x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^3}{3} + o(x^3) & \\
\dfrac{x^3}{3} + o(x^3) & \\ \cline{1-1}
o(x^3) &
\end{array}$$

otteniamo

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\,.}$$

□

Sviluppo di una funzione composta

Sia

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

lo sviluppo di Maclaurin di una funzione *infinitesima* per $x \to 0$ (dunque $a_0 = 0$). Sia poi

$$g(y) = b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y^n + o(y^n)$$

lo sviluppo di Maclaurin (rispetto a y) di un'altra funzione $g(y)$. Si noti che

$$o(y^n) \qquad \text{significa} \qquad \textit{infinitesimo di ordine superiore a } y^n \quad \text{per } y \to 0,$$

che possiamo anche scrivere

$$o(y^n) = y^n o(1) \qquad \text{con } o(1) \to 0 \text{ per } y \to 0.$$

Possiamo dunque formare la funzione composta $h(x) = g\big(f(x)\big)$. Sostituendo $y = f(x)$ nello sviluppo di $g(y)$ abbiamo

$$g(f(x)) = b_0 + b_1 f(x) + b_2 [f(x)]^2 + \ldots + b_n [f(x)]^n + [f(x)]^n o(1).$$

Si noti che, per la continuità di $f(x)$ in 0, si ha che $y = f(x) \to 0$ per $x \to 0$, dunque nell'espressione precedente $o(1) \to 0$ anche per $x \to 0$. Inoltre, dallo sviluppo di un prodotto si ha che

$$[f(x)]^n = a_1^n x^n + o(x^n).$$

Dunque

$$[f(x)]^n o(1) = o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Sviluppando le potenze $[f(x)]^k$ $(1 \le k \le n)$ rispetto ad x fino all'ordine n, si perviene allo sviluppo di $g\big(f(x)\big)$.

Esempi 7.11

i) Calcoliamo lo sviluppo di ordine 2 in 0 di $h(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}-1}$. Poniamo

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$
$$g(y) = \mathrm{e}^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Allora

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

ii) Calcoliamo lo sviluppo di ordine 3 in 0 di

$$h(x) = \frac{1}{1 + \log(1+x)}.$$

Questo sviluppo può essere calcolato come sviluppo di un quoziente. In alternativa, possiamo pensare $h(x)$ come una funzione composta, precisamente da

$$f(x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

e da

$$g(y) = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3).$$

Allora

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \big(x^2 - x^3 + o(x^3)\big) - \big(x^3 + o(x^3)\big) + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{7x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

□

Osservazione 7.12 Quando $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore al primo nell'origine, è possibile 'risparmiare' calcoli, nel senso che si può ottenere uno sviluppo di ordine n di $h(x) = g\big(f(x)\big)$ partendo da sviluppi di ordine $< n$ di $g(y)$. Ad esempio, se f è un infinitesimo di ordine 2 nell'origine (cioè $a_1 = 0,\ a_2 \neq 0$), allora $[f(x)]^k = a_2^k x^{2k} + o(x^{2k})$, dunque per ottenere uno sviluppo di ordine n di $h(x)$ è sufficiente partire da uno sviluppo di ordine $\frac{n}{2}$ (se n è pari) oppure $\frac{n+1}{2}$ (se n è dispari) per la funzione $g(y)$ (mentre, in generale, $f(x)$ deve essere sviluppata fino all'ordine n). □

Esempio 7.13

Calcoliamo lo sviluppo al secondo ordine di

$$h(x) = \sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)}.$$

Poniamo

$$f(x) = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad (2^{\text{o}} \text{ ordine})$$

$$g(y) = \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y) \qquad (1^{\text{o}} \text{ ordine}).$$

Allora

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \qquad (2^{\text{o}} \text{ ordine}). \end{aligned}$$

□

Sviluppi asintotici (non di Taylor)

Quando una funzione $f(x)$ è infinita per $x \to 0$ (oppure per $x \to x_0$), è in molti casi possibile dare uno sviluppo 'asintotico' di $f(x)$ secondo potenze crescenti di x (o di $x - x_0$), ammettendo anche potenze negative. In altri termini,

$$f(x) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Questo permette di meglio comprendere il modo con cui f tende a infinito. Infatti, se $a_{-m} \neq 0$, f risulterà un infinito di ordine m rispetto all'infinito campione x^{-1}.

Spesso è possibile arrivare a uno sviluppo del tipo precedente, partendo da sviluppi di Taylor di $\dfrac{1}{f(x)}$ (che è infinitesima per $x \to 0$).

Anche in questo caso, ci limitiamo ad illustrare il procedimento con un esempio.

Esempio 7.14

Si voglia dare uno sviluppo 'asintotico' per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Dallo sviluppo della funzione esponenziale, arrestato ad esempio al terzo ordine, abbiamo

$$\mathrm{e}^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right).$$

Dunque

$$f(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}.$$

La seconda frazione può essere sviluppata usando lo sviluppo di Maclaurin di

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2)\,;$$

ponendo

$$y = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\,,$$

si otterrà

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{12} + o(x)\,,$$

che rappresenta uno sviluppo asintotico della funzione f nell'origine. Da esso si può dedurre ad esempio che, per $x \to 0$, la funzione $f(x)$ è un infinito di ordine 1 rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = \frac{1}{x}$.
Inoltre, trascurando il termine in x e scrivendo $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1)$, otteniamo che la funzione è asintotica all'iperbole

$$g(x) = \frac{2-x}{2x}.$$

□

7.4 Uso degli sviluppi di Taylor nello studio locale di una funzione

Lo sviluppo di Taylor di una funzione $f(x)$ in un punto permette di studiare il comportamento locale di f in un intorno di tale punto. Esaminiamo nel seguito alcune significative applicazioni.

Ricerca di ordini di infinitesimo e di parti principali

Sia

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big)$$

lo sviluppo di Taylor di ordine n di f in un punto x_0, e supponiamo che per un certo intero m tale che $1 \le m \le n$ si abbia

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0, \qquad \text{ma} \quad a_m \neq 0.$$

Allora

$$f(x) = a_m(x - x_0)^m + o\big((x - x_0)^m\big)$$

e dunque $f(x)$, in un intorno di x_0 sufficientemente piccolo, si comporterà come la funzione polinomiale

$$p(x) = a_m(x - x_0)^m,$$

che ne costituisce la *parte principale* rispetto all'infinitesimo campione $y = x - x_0$. In particolare, $f(x)$ sarà un infinitesimo di ordine m rispetto a tale campione.

Esempio 7.15

Si voglia calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) = \sin x - x\cos x - \frac{1}{3}x^3$ rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$. Usando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni seno e coseno si ottiene facilmente

$$f(x) = -\frac{1}{30}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Dunque f è un infinitesimo di ordine 5 e la sua parte principale vale $p(x) = -\frac{1}{30}x^5$. Si osservi che ottenere lo stesso risultato con il Teorema di de l'Hôpital sarebbe risultato ben più gravoso dovendosi derivare 5 volte la funzione. □

Comportamento locale di una funzione

Se di una funzione f conosciamo lo sviluppo di Taylor del secondo ordine nell'intorno di una punto x_0,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)\,, \qquad x \to x_0\,,$$

allora dalla (7.7) deduciamo che

$$f(x_0) = a_0\,, \qquad f'(x_0) = a_1\,, \qquad f''(x_0) = 2a_2\,.$$

Supponiamo che f e la sua derivata prima e seconda siano continue in un intorno di x_0. Allora, grazie al Teorema della permanenza del segno, i segni di a_0, a_1 e a_2 (qualora tali quantità siano diverse da 0) coincideranno rispettivamente con i segni di $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in tutto un intorno di x_0. Ciò permette, in particolare, di conoscere la monotonia e la convessità di f in tale intorno, applicando il Teorema 6.27 *b2)* e il Corollario 6.38 *b2)*.

Esempio 7.6 (seguito)

Riprendendo l'Esempio 7.6, abbiamo $f(2) > 0$, $f'(2) < 0$ e $f''(2) > 0$. Dunque, in un intorno di $x_0 = 2$, f sarà strettamente positiva, strettamente decrescente e strettamente convessa. □

I casi in cui $a_1 = 0$ oppure $a_2 = 0$ sono considerati nel seguito.

Studio della natura di un punto critico

Sia x_0 un punto critico di una funzione f, derivabile in un suo intorno. Sappiamo (Corollario 6.28) che se f' è di segno diverso a destra e a sinistra di x_0, allora x_0 è un punto di estremo per f; invece, se f' è di segno costante a destra e a sinistra di x_0, allora x_0 è punto di flesso a tangente orizzontale per f.

In alternativa all'analisi del segno della derivata prima nell'intorno di x_0, quando f ammette derivate di ordine superiore in x_0 è possibile studiare la natura del punto critico analizzando la prima derivata di f che non si annulla in tale punto. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 7.16 *Sia f derivabile n volte ($n \geq 2$) in x_0 e si abbia*

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(m)}(x_0) \neq 0 \tag{7.21}$$

per un certo m tale che $2 \leq m \leq n$. Allora:

i) se m è pari, x_0 è punto di estremo per f, e precisamente è punto di massimo se $f^{(m)}(x_0) < 0$, punto di minimo se $f^{(m)}(x_0) > 0$;
ii) se m è dispari, x_0 è punto di flesso a tangente orizzontale per f, e precisamente è punto di flesso discendente se $f^{(m)}(x_0) < 0$, ascendente se $f^{(m)}(x_0) > 0$.

Dimostrazione. Confrontiamo $f(x)$ con $f(x_0)$ in un intorno di x_0. Partendo dalla formula di Taylor (7.6)-(7.7) e usando le ipotesi (7.21), otteniamo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + o\big((x - x_0)^m\big).$$

Scrivendo $o\big((x - x_0)^m\big) = (x - x_0)^m o(1)$ e raccogliendo il fattore $(x - x_0)^m$, abbiamo

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + h(x)\right],$$

dove $h(x)$ è una opportuna funzione infinitesima per $x \to x_0$. Pertanto, in un intorno di x_0 abbastanza piccolo, il termine racchiuso tra parentesi quadre avrà lo stesso segno di $f^{(m)}(x_0)$; dunque il segno di $f(x) - f(x_0)$ in tale intorno sarà determinato dai segni di $f^{(m)}(x_0)$ e $(x - x_0)^m$. Esaminando i vari casi possibili, si giunge alla tesi. □

Esempio 7.17

Supponiamo che in un intorno di $x_0 = 1$ si abbia

$$f(x) = 2 - 15(x-1)^4 + 20(x-1)^5 + o\big((x-1)^5\big). \tag{7.22}$$

Deduciamo che

$$f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0\,, \quad \text{mentre} \quad f^{(4)}(1) = -360 < 0\,.$$

Pertanto, x_0 è punto di massimo relativo per f (si veda la Figura 7.9 a sinistra).
Supponiamo invece che in un intorno di $x_1 = -2$ si abbia

$$f(x) = 3 + 10(x+2)^5 - 35(x+2)^7 + o\big((x+2)^7\big). \tag{7.23}$$

Deduciamo che

$$f'(-2) = f''(-2) = f'''(-2) = f^{(4)}(-2) = 0\,, \quad \text{mentre} \quad f^{(5)}(-2) = 10 \cdot 5! > 0\,.$$

Pertanto, x_1 è punto di flesso ascendente a tangente orizzontale per f (si veda la Figura 7.9 a destra). □

Figura 7.9. Comportamento della funzione $f(x)$ definita in (7.22) nell'intorno di $x_0 = 1$ (a destra) e della funzione $f(x)$ definita in (7.23) nell'intorno di $x_0 = -2$ (a sinistra)

Ricerca dei punti di flesso

Sia f una funzione derivabile due volte in un intorno di x_0. Mediante le formule di Taylor, è possibile decidere se x_0 sia o meno punto di flesso per f.

Ricordiamo innanzitutto che nel Capitolo 6 abbiamo enunciato il Corollario 6.39, rimandandone la giustificazione al presente paragrafo. Vediamo ora tale dimostrazione.

Dimostrazione. a) Sia x_0 punto di flesso per f. Indicata come al solito con $y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0, dalla formula di Taylor (7.6) con $n = 2$ ricaviamo

$$f(x) - t(x) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big).$$

Raccogliendo a secondo membro il fattore $(x - x_0)^2$ possiamo scrivere

$$f(x) - t(x) = (x - x_0)^2 \left[\frac{1}{2} f''(x_0) + h(x)\right],$$

per una opportuna funzione h infinitesima in x_0. Se per assurdo fosse $f''(x_0) \neq 0$, in un intorno abbastanza piccolo di x_0 il secondo membro avrebbe segno costante a destra e a sinistra di x_0, contraddicendo l'ipotesi che x_0 sia punto di flesso.
b) In questo caso, usiamo la formula di Taylor (7.8), sempre con $n = 2$. Per ogni $x \neq x_0$ in un intorno di x_0, esiste un punto $\bar{x}$ compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) - t(x) = \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x - x_0)^2.$$

La conclusione segue allora dall'analisi del segno dei termini a secondo membro. □

Supponiamo, d'ora in avanti, di sapere che $f''(x_0) = 0$. In alternativa all'analisi del segno della derivata seconda nell'intorno di x_0, quando f ammette derivate di ordine superiore al secondo in x_0 è possibile studiare la natura di x_0 analizzando la prima derivata di f di ordine > 2 che non si annulla in tale punto. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 7.18 *Sia f derivabile n volte $(n \geq 3)$ in x_0 e si abbia*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(m)}(x_0) \neq 0 \tag{7.24}$$

per un certo m tale che $3 \leq m \leq n$. Allora:

i) se m è dispari, x_0 è punto di flesso per f, e precisamente è punto di flesso discendente se $f^{(m)}(x_0) < 0$, ascendente se $f^{(m)}(x_0) > 0$;
ii) se m è pari, x_0 non è un punto di flesso per f.

Dimostrazione. Procedendo in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 7.16, otteniamo la relazione

$$f(x) - t(x) = (x - x_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + h(x) \right],$$

dove $h(x)$ indica una opportuna funzione infinitesima per $x \to x_0$. Il risultato segue allora dalla discussione dei segni dei termini a secondo membro. □

Esempio 7.19

Supponiamo che in un intorno di $x_0 = 3$ si abbia

$$f(x) = -2 + 4(x-3) - 90(x-3)^5 + o\big((x-3)^5\big). \tag{7.25}$$

Deduciamo che $f''(3) = f'''(3) = f^{(4)}(3) = 0$, mentre $f^{(5)}(3) = -90 \cdot 5! < 0$. Concludiamo che $x_0 = 3$ è punto di flesso discendente per f (si veda la Figura 7.10). □

Figura 7.10. Comportamento locale della funzione $f(x)$ definita in (7.25)

7.5 Esercizi

1. *Usando la definizione, scrivere il polinomio di Taylor delle seguenti funzioni, di ordine n e centrato nel punto x_0:*

   $\boxed{\text{a)}}$ $f(x) = \mathrm{e}^x\,, \qquad n = 4\,, \qquad x_0 = 2$

   b) $f(x) = \sin x\,, \qquad n = 6\,, \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$

   $\boxed{\text{c)}}$ $f(x) = \log x\,, \qquad n = 3\,, \qquad x_0 = 3$

   d) $f(x) = \sqrt{2x+1}\,, \qquad n = 3\,, \qquad x_0 = 4$

   $\boxed{\text{e)}}$ $f(x) = 7 + x - 3x^2 + 5x^3\,, \qquad n = 2\,, \qquad x_0 = 1$

   f) $f(x) = 2 - 8x^2 + 4x^3 + 9x^4\,, \qquad n = 3\,, \qquad x_0 = 0$

2. *Determinare lo sviluppo di Taylor delle seguenti funzioni, centrato nel punto x_0 e con il resto di Peano, sino al massimo ordine possibile:*

   $\boxed{\text{a)}}$ $f(x) = x^2|x| + \mathrm{e}^{2x}\,, \qquad x_0 = 0$

   b) $f(x) = 2 + x + (x-1)\sqrt[3]{x^2-1}\,, \qquad x_0 = 1$

3. *Usando gli sviluppi delle funzioni elementari, determinare lo sviluppo di Maclaurin delle seguenti funzioni, con il resto di Peano e sino all'ordine indicato:*

   $\boxed{\text{a)}}$ $f(x) = x\cos 3x - 3\sin x\,, \qquad n = 2$

   $\boxed{\text{b)}}$ $f(x) = \log\dfrac{1+x}{1+3x}\,, \qquad n = 4$

   $\boxed{\text{c)}}$ $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\sin 2x\,, \qquad n = 5$

   d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x\cos x} + \sin x - \cos x\,, \qquad n = 2$

   e) $f(x) = \sqrt[3]{\cos(3x - x^2)}\,, \qquad n = 4$

   $\boxed{\text{f)}}$ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[6]{1+x^2}} - \sin x\,, \qquad n = 5$

   $\boxed{\text{g)}}$ $f(x) = \cosh^2 x - \sqrt{1+2x^2}\,, \qquad n = 4$

   h) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sqrt{\cos 2x}}\,, \qquad n = 3$

   i) $f(x) = \dfrac{1}{-\sqrt{8}\sin x - 2\cos x}\,, \qquad n = 3$

   ℓ) $f(x) = \sqrt[3]{8 + \sin 24x^2} - 2(1 + x^2\cos x^2)\,, \qquad n = 4$

4. *Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$, rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$, delle seguenti funzioni:*

   a) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos 2x} - \mathrm{e}$

   $\boxed{\text{b)}}$ $f(x) = \dfrac{\cos 2x + \log(1+4x^2)}{\cosh 2x} - 1$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3} - \sin^3 \sqrt{x}}{e^{3\sqrt{x}} - 1}$

d) $f(x) = 2x + (x^2 - 1) \log \dfrac{1+x}{1-x}$

e) $f(x) = x - \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2} - \sqrt{1 - \dfrac{2}{3}x^2 + \sin \dfrac{x^4}{18}}$

5. *Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to +\infty$, rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, delle seguenti funzioni:*

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{2(x-2) - \log(x-1)}$

b) $f(x) = e^{-\frac{x}{4x^2+1}} - 1$

c) $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x^2 + x^3} - \sqrt[5]{2 + 5x^4 + x^5}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2 + \sinh \dfrac{2}{x^2}} - \sqrt[3]{2}$

6. *Calcolare i seguenti limiti:*

a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x^6)^{1/(x^4 \sin^2 3x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cos \frac{3}{4}\pi x - \frac{3}{2}\pi \log \frac{x}{2}}{(4 - x^2)^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{\sin(\tan x)} - \dfrac{1}{x} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(e^{x^7} + \sin^2 x - \sinh^2 x \right)^{1/x^4}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{18x^4}{\sqrt[3]{\cos 6x} - 1 + 6x^2}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4 [\log(1 + \sinh^2 x)] \cosh^2 x}{1 - \sqrt{1 + x^3} \cos \sqrt{x^3}}$

7. *Determinare, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione*

$$h(x) = \log \cos x + \log \cosh(ax).$$

8. *Calcolare il valore della derivata sesta nel punto $x = 0$ della funzione*

$$h(x) = \frac{\sinh(x^2 + 2 \sin^4 x)}{1 + x^{10}}.$$

9. *Posto*

$$\varphi(x) = \log(1 + 4x) - \sinh 4x + 8x^2,$$

determinare il segno della funzione $y = \sin \varphi(x)$ rispettivamente in un intorno destro e in un intorno sinistro di $x_0 = 0$.

10. *Provare che esiste un intorno di 0 nel quale vale la relazione*

$$2 \cos(x + x^2) \leq 2 - x^2 - 2x^3.$$

11. *Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, il limite*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x/2} - \cosh \sqrt{x}}{(x + \sqrt[5]{x})^\alpha}.$$

12. *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che*

$$f(x) = (\arctan 2x)^2 - \alpha x \sin x$$

sia infinitesima del quarto ordine per $x \to 0$.

7.5.1 Soluzioni

1. *Polinomi di Taylor:*

a) Poiché tutte le derivate di $f(x) = \mathrm{e}^x$ coincidono con la funzione stessa, risulta $f^{(k)}(2) = \mathrm{e}^2$, $\forall k \geq 0$. Pertanto

$$Tf_{4,2}(x) = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2(x-2) + \frac{\mathrm{e}^2}{2}(x-2)^2 + \frac{\mathrm{e}^2}{6}(x-2)^3 + \frac{\mathrm{e}^2}{24}(x-2)^4\,.$$

b) $Tf_{6,\frac{\pi}{2}}(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x-\frac{\pi}{2})^6$.

c) Risulta $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ e quindi $f(3) = \log 3$, $f'(3) = \frac{1}{3}$, $f''(3) = -\frac{1}{9}$, $f'''(3) = \frac{2}{27}$. Dunque

$$Tf_{3,3}(x) = \log 3 + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{18}(x-3)^2 + \frac{1}{81}(x-3)^3.$$

d) $Tf_{3,4}(x) = 3 + \frac{1}{3}(x-4) - \frac{1}{54}(x-4)^2 + \frac{1}{486}(x-4)^3$.

e) Poiché $f'(x) = 1 - 6x + 15x^2$ e $f''(x) = -6 + 30x$, si ottiene $f(1) = 10$, $f'(1) = 10$, $f''(1) = 24$ e pertanto

$$Tf_{2,1}(x) = 10 + 10(x-1) + 12(x-1)^2.$$

Osserviamo che, in alternativa, possiamo procedere effettuando la sostituzione $t = x - 1$, ovvero $x = 1 + t$. Il polinomio $f(x)$ nella variabile t diventa

$$g(t) = f(1+t) = 7 + (1+t) - 3(1+t)^2 + 5(1+t)^3 = 10 + 10t + 12t^2 + 5t^3.$$

Dunque il polinomio di Taylor di $f(x)$ centrato in $x_0 = 1$ corrisponde al polinomio di Maclaurin di $g(t)$ e perciò si ottiene immediatamente

$$Tg_{2,0}(t) = 10 + 10t + 12t^2;$$

tornando alla variabile x, si ritrova il risultato precedente.

f) $Tf_{3,0}(x) = 2 - 8x^2 + 4x^3$.

2. *Sviluppi di Taylor:*

a) Osserviamo che $f(x) = g(x) + h(x)$ con $g(x) = x^2|x|$ e $h(x) = \mathrm{e}^{2x}$. La funzione $h(x)$ è derivabile infinite volte su tutto $\mathbb{R}$, mentre la funzione $g(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile infinite volte in ogni $x \neq 0$. Inoltre

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x > 0\,, \\ -3x^2 & \text{se } x < 0\,, \end{cases} \qquad g''(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } x > 0\,, \\ -6x & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^-} g'(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} g''(x) = \lim_{x\to 0^-} g''(x) = 0.$$

Quindi, usando il Teorema 6.15, deduciamo che g è derivabile due volte nell'origine con derivata prima e seconda nulle. D'altro canto, $g''(x) = 6|x|$, che non è derivabile nell'origine; dunque g non è derivabile tre volte in tale punto. In conclusione, la funzione f è sviluppabile nell'origine solo fino all'ordine 2. Poiché $h'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ e $h''(x) = 4\mathrm{e}^{2x}$, risulta $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 4$ e lo sviluppo di Maclaurin di ordine 2 è:

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\,.$$

b) La funzione è derivabile solo una volta in $x_0 = 1$ e lo sviluppo cercato è $f(x) = 3 + (x-1) + o(x-1)$.

3. *Sviluppi di Maclaurin:*

a) $f(x) = -2x + o(x^2)$.

b) Possiamo scrivere $f(x) = \log(1+x) - \log(1+3x)$ e utilizzare lo sviluppo notevole di $\log(1+t)$ con $t = x$ e $t = 3x$. Si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - 3x + \frac{(3x)^2}{2} - \frac{(3x)^3}{3} + \frac{(3x)^4}{4} + o(x^4) \\ &= -2x + 4x^2 - \frac{26}{3}x^3 + 20x^4 + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

c) Utilizzando gli sviluppi di e^t con $t = x^2$ e di $\sin t$ con $t = 2x$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)\right) \\ &= 2x + 2x^3 + x^5 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5) \\ &= 2x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)\,. \end{aligned}$$

d) $f(x) = x^2 + o(x^2)$.

e) $f(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{31}{24}x^4 + o(x^4)$.

f) Utilizzando lo sviluppo notevole della funzione $(1+t)^\alpha$ con $\alpha = -\frac{1}{6}$ e $t = x^2$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt[6]{1+x^2}} &= x\left(1+x^2\right)^{-1/6} = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \binom{-\frac{1}{6}}{2}x^4 + o(x^4)\right)\\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{72}x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{72}x^5 - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5) = \frac{4}{45}x^5 + o(x^5).$$

g) Usando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $\cosh x$, $(1+t)^\alpha$ con $\alpha = \frac{1}{2}$ e $t = 2x^2$ si ha

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)^2 - \left(1+2x^2\right)^{1/2}\\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{4!}x^4 + o(x^4) - \left(1 + \frac{1}{2}2x^2 + \binom{1/2}{2}(2x^2)^2 + o(x^4)\right)\\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 - 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)\,.\end{aligned}$$

h) $f(x) = 2x + 2x^2 + \frac{10}{3}x^3 + o(x^3)$.

i) Sostituendo a $\sin x$ e $\cos x$ i loro sviluppi di Maclaurin si ha

$$f(x) = \frac{1}{-2 - \sqrt{8}x + x^2 + \frac{\sqrt{8}}{3!}x^3 + o(x^3)}.$$

Procedendo alla divisione per potenze crescenti di x risulta

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{5}{4}x^2 + \frac{17}{12}\sqrt{2}\,x^3 + o(x^3)\,.$$

ℓ) $f(x) = -2x^4 + o(x^4)$.

4. *Ordini di infinitesimo e parti principali per $x \to 0$:*

a) L'ordine di infinitesimo è 2 e la parte principale è $p(x) = -2\,\mathrm{e}\,x^2$.

b) Scriviamo

$$h(x) = \frac{\cos 2x + \log(1+4x^2) - \cosh 2x}{\cosh 2x},$$

e notiamo che per calcolare l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$ è sufficiente studiare il numeratore in quanto il denominatore tende a 1 per $x \to 0$. Utilizzando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $\cos t$, $\log(1+t)$ e $\cosh t$ si ha

$$\begin{aligned}
&\cos 2x + \log(1+4x^2) - \cosh 2x \\
&= 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + (2x)^2 - \frac{1}{2}(2x)^4 - 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 - \frac{1}{4!}(2x)^4 + o(x^4) \\
&= -8x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

e quindi l'ordine di infinitesimo richiesto è 4 e la parte principale è $p(x) = -8x^4$.

c) Usando gli sviluppi di Maclaurin di $\sin t$ e di e^t e ponendo $t = \sqrt{x}$, per $t \to 0$, si ha

$$g(t) = \frac{t^3 - \sin^3 t}{\mathrm{e}^{3t} - 1} = \frac{t^3 - \left(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right)^3}{1 + 3t + o(t) - 1} = \frac{\frac{1}{2}t^5 + o(t^5)}{3t + o(t)} = \frac{1}{6}t^4 + o(t^4),$$

cioè

$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 + o(x^2).$$

Dunque l'ordine di infinitesimo è 2 e la parte principale è $p(x) = \frac{1}{6}x^2$.

d) L'ordine di infinitesimo è 3 e la parte principale è $p(x) = \frac{4}{3}x^3$.

e) Usando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $(1+t)^\alpha$ (con $\alpha = -\frac{1}{2}$) e $\arctan t$, si ha

$$(1-4x^2)^{-1/2} = 1 + 2x^2 + o(x^3)\,, \qquad \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} = x + 2x^3 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
\arctan \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} &= x + 2x^3 + o(x^4) - \frac{1}{3}(x - 2x^3 + o(x^4))^3 + o(x^3) \\
&= x + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Dunque

$$f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + o(x^3)$$

e quindi l'ordine di infinitesimo è 3 e la parte principale è $p(x) = -\frac{5}{3}x^3$.

f) L'ordine di infinitesimo è 6 e la parte principale è $p(x) = (-\frac{5}{3^4} + \frac{1}{2\cdot 3^3})x^6$.

5. *Ordini di infinitesimo e parti principali per $x \to +\infty$:*

a) Per $x \to +\infty$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x - 2 - \log(x-1)}{2(x-2)^2 - (x-2)\log(x-1)} \\
&= \frac{x - 2 - \log(x-1)}{2x^2 - 8x + 8 - (x-2)\log(x-1)} \\
&= \frac{x + o(x)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

da cui si vede che l'ordine di infinitesimo di f per $x \to +\infty$ è 1 e la parte principale è $p(x) = \frac{1}{2x}$.

b) L'ordine di infinitesimo è 1 e la parte principale è $p(x) = -\frac{1}{4x}$.

c) Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)} - \sqrt[5]{x^5\left(1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^5}\right)} \\ &= x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} - x\left(1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^5}\right)^{1/5} \end{aligned}$$

e, utilizzando lo sviluppo di $(1+t)^\alpha$ con $\alpha = \frac{1}{3}$, $t = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ e $\alpha = \frac{1}{5}$, $t = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^5}$ rispettivamente, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) = x\Bigg[&1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right) - \binom{\frac{1}{3}}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \\ &-1 - \frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^5}\right) - \binom{\frac{1}{5}}{2}\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^5}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\Bigg] \\ = x&\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{2}{5x^5} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ = x&\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Pertanto l'ordine di infinitesimo è 1 e la parte principale è $p(x) = \frac{1}{x}$

d) L'ordine di infinitesimo è 2 e la parte principale è $p(x) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3x^2}$

6. *Limiti:*

a) Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}(1+x^6)^{1/(x^4\sin^2 3x)} &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^4\sin^2 3x}\ \log(1+x^6)\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^6)}{x^4\sin^2 3x}\right) = \mathrm{e}^L. \end{aligned}$$

Per calcolare L, utilizziamo gli sviluppi delle funzioni $\log(1+t)$ e $\sin t$:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x^6+o(x^6)}{x^4(3x+o(x^2))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^6+o(x^6)}{9x^6+o(x^6)} = \frac{1}{9}.$$

Pertanto il limite cercato vale $\mathrm{e}^{1/9}$.

b) Il limite vale $\frac{3}{256}\pi$.

c) Usando gli sviluppi del seno e della tangente, si ha

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(\tan x)}{x^2\sin(\tan x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x+\frac{1}{6}\tan^3 x+o(x^3)}{x^2(\tan x+o(x))} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x-x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

d) Il limite vale $\mathrm{e}^{-2/3}$.

e) Il limite vale -1.

f) Si osservi che, per $x \to 0$, si ha

$$3x^4[\log(1+\sinh^2 x)]\cosh^2 x \sim 3x^4 \sinh^2 x \sim 3x^6\,.$$

Inoltre, usando gli sviluppi di Maclaurin possiamo scrivere il denominatore come segue:

$$\begin{aligned}\text{Den}\ :\ & 1-(1+x^3)^{1/2}\cos x^{3/2}\\ &= 1-\left(1+\frac{1}{2}x^3+\binom{1/2}{2}x^6+o(x^6)\right)\left(1-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4!}x^6+o(x^6)\right)\\ &= 1-\left(1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^6+\frac{1}{24}x^6+o(x^6)\right)=\frac{1}{3}x^6+o(x^6).\end{aligned}$$

Pertanto il limite proposto diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^6+o(x^6)}{\frac{1}{3}x^6+o(x^6)}=9.$$

7. Utilizziamo gli sviluppi noti di Maclaurin delle funzioni $\log(1+t)$, $\cos t$, $\cosh t$. Si ha

$$\begin{aligned}h(x) &= \log\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}(ax)^2+\frac{1}{4!}(ax)^4+o(x^5)\right)\\ &= -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)^2+o(x^5)+\frac{a^2}{2}x^2+\frac{a^4}{4!}x^4-\\ &\qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}x^2+\frac{a^4}{4!}x^4\right)^2+o(x^5)\\ &= \frac{1}{2}(a^2-1)x^2+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)(a^4+1)x^4+o(x^5)\end{aligned}$$

da cui si ricava che, se $a \neq \pm 1$, $h(x)$ ha ordine di infinitesimo 2 per $x \to 0$, mentre se $a = \pm 1$ il primo coefficiente non nullo dello sviluppo di $h(x)$ è quello di x^4, quindi la funzione risulta infinitesima di ordine 4 per $x \to 0$.

8. Per calcolare $h^{(6)}(x)$ in $x = 0$ sfruttiamo le caratteristiche dello sviluppo di Maclaurin in cui il coefficiente di x^6 è $a_6 = \frac{h^{(6)}(0)}{6!}$. Occorre quindi calcolare lo sviluppo di Maclaurin del sesto ordine di $h(x)$. Utilizzando gli sviluppi delle funzioni $\sin t$ e $\sinh t$, il numeratore di h diventa

$$\begin{aligned}\text{Num}\ :\ & \sinh\left(x^2+2\Big(x^4-\frac{4}{3!}x^6+o(x^6)\Big)\right)\\ &= \sinh\left(x^2+2x^4-\frac{4}{3}x^6+o(x^6)\right)=x^2+2x^4-\frac{4}{3}x^6+\frac{1}{3!}x^6+o(x^6)\\ &= x^2+2x^4-\frac{7}{6}x^6+o(x^6).\end{aligned}$$

Operando la divisione per potenze crescenti tra $x^2 + 2x^4 - \frac{7}{6}x^6 + o(x^6)$ e $1 + x^{10}$ si ha

$$h(x) = x^2 + 2x^4 - \frac{7}{6}x^6 + o(x^6)$$

e pertanto $h^{(6)}(0) = -\frac{7}{6} \cdot 6! = -840$.

9. Utilizzando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $\log(1+t)$ e $\sinh t$, possiamo scrivere

$$\varphi(x) = 4x - \frac{1}{2}(4x)^2 + \frac{1}{3}(4x)^3 - 4x - \frac{1}{3!}(4x)^3 + 8x^2 + o(x^3) = \frac{32}{3}x^3 + o(x^3).$$

poiché la funzione seno nell'intorno dell'origine è concorde con il suo argomento la funzione $y = \sin\varphi(x)$ risulterà negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$.

10. Utilizzando lo sviluppo di Maclaurin della funzione $\cos t$, si ha

$$\begin{aligned} 2\cos(x+x^2) &= 2\left(1 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{4!}(x+x^2)^4 + o\left((x+x^2)^4\right)\right) \\ &= 2 - (x^2 + 2x^3 + x^4) + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + o(x^4) \\ &= 2 - x^2 - 2x^3 - \frac{11}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Allora, nell'intorno dell'origine in cui vale questo sviluppo, si ha la relazione richiesta in quanto la parte principale della differenza tra il primo e il secondo membro della disequazione è costituita dalla quantità, sicuramente negativa, $-\frac{11}{12}x^4$.

11. Consideriamo separatamente gli sviluppi di Maclaurin del numeratore e del denominatore

$$\begin{aligned} \text{Num} \ : \ & 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4!}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4!}\right)x^2 + o(x^2) = \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)\,, \\ \text{Den} \ : \ & \left[x^{1/5}\left(1 + x^{4/5}\right)\right]^\alpha \\ &= x^{\alpha/5}\left(1 + x^{4/5}\right)^\alpha = x^{\alpha/5}\left(1 + \alpha x^{4/5} + o(x^{4/5})\right). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{x/2} - \cosh\sqrt{x}}{(x + \sqrt[5]{x})^\alpha} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{12}x^2 + o(x^2)}{x^{\alpha/5}\left(1 + \alpha x^{4/5} + o(x^{4/5})\right)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{12} & \text{se } 2 = \dfrac{\alpha}{5}\,, \\ 0 & \text{se } 2 > \dfrac{\alpha}{5}\,, \\ +\infty & \text{se } 2 < \dfrac{\alpha}{5} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{12} & \text{se } \alpha = 10\,, \\ 0 & \text{se } \alpha < 10\,, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 10. \end{cases} \end{aligned}$$

12. Usando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $\arctan t$ e $\sin t$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2x - \frac{1}{3}(2x)^3 + o(x^3)\right)^2 - \alpha x \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 4x^2 - \frac{32}{3}x^4 + o(x^4) - \alpha x^2 + \frac{\alpha}{6}x^4 + o(x^4) \\ &= (4-\alpha)x^2 - \left(\frac{32}{3} - \frac{\alpha}{6}\right)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

e $f(x)$ risulterà infinitesima di ordine 4 nell'origine se $\alpha = 4$ perché per tale valore si ha

$$f(x) = 10x^4 + o(x^4).$$

8

Rappresentazioni del piano e dello spazio

Questo capitolo ha una duplice funzione. Da un lato, esso si ricollega al Capitolo 1 introducendo vari oggetti matematici nel piano e nello spazio. Più precisamente verranno trattati altri sistemi di coordinate oltre a quello cartesiano, i vettori con le loro proprietà elementari e l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. D'altro lato esso fornisce una prima trattazione di concetti che saranno approfonditi in corsi successivi quali le curve e le funzioni di più variabili.

8.1 Coordinate polari, cilindriche, sferiche

Un punto P del piano cartesiano, di coordinate (x, y), può anche essere individuato mediante le sue **coordinate polari** (r,θ). Esse sono definite nel modo seguente. Indichiamo con r la distanza di P dall'origine O. Se $r > 0$, sia θ la misura in radianti, a meno di multipli di 2π, dell'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse e dalla semiretta uscente dall'origine e passante per P (si veda la Figura 8.1). Usualmente θ è scelto nell'intervallo $(-\pi,\pi]$, oppure, in alternativa, nell'in-

Figura 8.1. Coordinate cartesiane e polari nel piano

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_8, © Springer-Verlag Italia 2014

tervallo $[0, 2\pi)$. Se $r = 0$, cioè se P coincide con l'origine, θ può assumere un qualunque valore.

Il passaggio dalle coordinate polari (r, θ) a quelle cartesiane (x, y) è espresso dalle formule

$$\boxed{x = r\cos\theta\,, \qquad\qquad y = r\sin\theta\,.} \tag{8.1}$$

La trasformazione inversa, qualora θ venga scelto nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, è data da

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0\,, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0,\ y \geq 0\,, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0,\ y < 0\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y < 0\ . \end{cases}} \tag{8.2}$$

Esempi 8.1

i) Consideriamo il punto P di coordinate cartesiane $(x, y) = (6\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$. La distanza dall'origine è data da

$$r = \sqrt{72 + 24} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}\,;$$

essendo $x > 0$, abbiamo

$$\theta = \arctan\frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Dunque le coordinate polari di P sono date da $(r, \theta) = \big(4\sqrt{6}, \frac{\pi}{6}\big)$.

ii) Sia ora P di coordinate cartesiane $(x, y) = (-5, -5)$. Si ha $r = 5\sqrt{2}$, inoltre siccome $x < 0$ e $y < 0$, si ha

$$\theta = \arctan\frac{-5}{-5} - \pi = \arctan 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$$

e dunque $(r, \theta) = \big(5\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi\big)$.

iii) Infine se P ha coordinate polari $(r, \theta) = \big(4, \frac{2}{3}\pi\big)$, le sue coordinate cartesiane sono

$$x = 4\cos\frac{2}{3}\pi = 4\cos\big(\pi - \frac{\pi}{3}\big) = -4\cos\frac{\pi}{3} = -2\,,$$
$$y = 4\sin\frac{2}{3}\pi = 4\sin\big(\pi - \frac{\pi}{3}\big) = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\,.$$

□

Passiamo ora alla rappresentazione di un punto $P \in \mathbb{R}^3$ di coordinate cartesiane (x, y, z). Introduciamo due diversi sistemi di riferimento: le coordinate cilindriche e quelle sferiche.

Le prime si ottengono semplicemente sostituendo alle coordinate cartesiane (x, y) le coordinate polari (r', θ) del punto P' proiezione ortogonale di P sul piano xy e mantenendo invariata la coordinata z. Indicando con (r', θ, t) le **coordinate cilindriche** di P, abbiamo dunque

$$\boxed{x = r' \cos\theta\,, \qquad y = r' \sin\theta\,, \qquad z = t\,.}$$

Anche in questo caso l'angolo θ è definito a meno di multipli di 2π; qualora esso venga limitato all'intervallo $(-\pi, \pi]$, le coordinate cilindriche si esprimono in funzione delle coordinate cartesiane definendo r' e θ mediante le (8.2) (si veda la Figura 8.2, a sinistra).

Le **coordinate sferiche** (r, φ, θ) sono definite nel modo seguente. Sia $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distanza di P dall'origine, φ l'angolo formato dal semiasse positivo delle z e dalla semiretta uscente dall'origine e passante per P, θ l'angolo formato dal semiasse positivo delle x e la semiretta nel piano xy uscente dall'origine e passante per la proiezione P' di P su tale piano (si veda la Figura 8.2, a destra). Con linguaggio geografico, chiamiamo θ la **longitudine** e φ la **colatitudine** del punto P (mentre la quantità $\frac{\pi}{2} - \varphi$ è la **latitudine**, misurata qui in radianti).

Abbiamo quindi $z = r\cos\varphi$, mentre $x = r'\cos\theta$ e $y = r'\sin\theta$, essendo r' la distanza di P' dall'origine; tale quantità può essere espressa come $r' = r\sin\varphi$. Sostituendo, otteniamo la seguente espressione delle coordinate cartesiane di P in termini delle sue coordinate sferiche (r, φ, θ):

$$\boxed{x = r\sin\varphi\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta\,, \qquad z = r\cos\varphi\,.}$$

Le trasformazioni inverse si ottengono facilmente riconducendosi al caso bidimensionale; osserviamo solo che è sufficiente far variare l'angolo φ in un intervallo di

Figura 8.2. Coordinate cartesiane e cilindriche (a sinistra) e cartesiane e sferiche (a destra)

ampiezza π, ad esempio l'intervallo $[0, \pi]$, mentre come nel caso bidimensionale θ varia in un intervallo di ampiezza 2π, ad esempio $(-\pi, \pi]$.

Esempio 8.2

Si consideri il punto P di coordinare cartesiane $(1, 1, \sqrt{6})$. Le coordinate polari del punto $P' = (1, 1, 0)$, proiezione ortogonale di P sul piano xy, sono $(r', \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Pertanto le coordinate cilindriche di P sono date da $(r', \theta, t) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{6}\right)$.

Determiniamo ora le coordinate sferiche. Si ha $r = \sqrt{1+1+6} = 2\sqrt{2}$; inoltre $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ e quindi $\varphi = \frac{\pi}{6}$, essendo φ variabile nell'intervallo $[0, \pi]$. Dunque le coordinare sferiche di P sono $(r, \theta, \varphi) = \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$. □

8.2 Vettori nel piano e nello spazio

Introduciamo ora il concetto di vettore e le principali operazioni tra vettori; consideriamo dapprima i vettori applicati nell'origine e successivamente quelli applicati in un punto arbitrario del piano e dello spazio.

8.2.1 Vettori applicati nell'origine

Consideriamo il piano munito di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Una coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x, y) \neq (0, 0)$ definisce un **vettore** $\boldsymbol{v}$ del piano **applicato nell'origine**, che si rappresenta come il segmento di estremi $O = (0, 0)$ e $P = (x, y)$ orientato da O a P (l'orientamento viene in genere indicato da una freccia avente la punta in P); si veda la Figura 8.3, a sinistra.

Figura 8.3. Vettore del piano (a sinistra) e dello spazio (a destra)

Le coordinate x e y del punto P si dicono le **componenti** del vettore $\boldsymbol{v}$ (rispetto al sistema di coordinate cartesiane scelto); si scriverà $\boldsymbol{v} = (x, y)$, identificando di fatto il vettore $\boldsymbol{v}$ con la sua estremità P.

In modo del tutto analogo, si introducono i vettori dello spazio applicati nell'origine. Un vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ si rappresenta come il segmento di estremi $O = (0, 0, 0)$ e $P = (x, y, z)$ orientato da O a P (vedasi la Figura 8.3, a destra); scriveremo $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$.

Sia nel piano sia nello spazio, è conveniente introdurre il vettore $\mathbf{0}$ di componenti tutte nulle, che chiamiamo **vettore nullo**; esso si rappresenta come il punto origine O, privo di freccia. In questo modo, i vettori del piano (rispettivamente dello spazio) applicati nell'origine sono in corrispondenza biunivoca con i punti di $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{R}^3$). Nel seguito, sarà conveniente considerare i vettori applicati nell'origine senza distinguere se siano del piano o dello spazio; il generico vettore $\boldsymbol{v}$, di componenti (v_1, v_2) se vettore del piano oppure (v_1, v_2, v_3) se vettore dello spazio, sarà indicato come $(v_1, \ldots, v_d)$. Il simbolo V indicherà l'insieme dei vettori del piano, oppure l'insieme dei vettori dello spazio.

Una volta fissato il punto origine O, un vettore è definito intrinsecamente (cioè indipendentemente dal sistema di coordinate cartesiane) dalla sua **direzione**, cioè dalla retta passante per O su cui il vettore giace, dal suo **verso**, cioè dal verso di percorrenza della retta rispetto all'origine, e dal suo **modulo**, cioè dalla lunghezza del segmento di estremi O e P.

Definiamo ora alcune operazioni sui vettori. Siano $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_d)$ due vettori. Chiamiamo **somma** di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ il vettore $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ le cui componenti sono la somma delle componenti di uguale indice dei due vettori; ossia

$$\boxed{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_d + w_d)\,.} \tag{8.3}$$

Quando si trattano i vettori, i numeri reali vengono anche detti **scalari**. Sia quindi $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo il **prodotto dello scalare λ per il vettore $\boldsymbol{v}$** come il vettore $\lambda\boldsymbol{v}$ le cui componenti sono il prodotto di λ per le componenti di $\boldsymbol{v}$, vale a dire

$$\boxed{\lambda\boldsymbol{v} = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_d)\,.} \tag{8.4}$$

Il vettore $(-1)\boldsymbol{v}$ viene indicato con $-\boldsymbol{v}$ e detto l'**opposto** di $\boldsymbol{v}$. La differenza $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ di due vettori è definita come

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w}) = (v_1 - w_1, \ldots, v_d - w_d)\,. \tag{8.5}$$

Le usuali proprietà della somma e del prodotto (associativa, commutativa, distributiva, ...) valgono anche per tali operazioni, come si può vedere ragionando componente per componente.

Le operazioni ora introdotte hanno una semplice interpretazione geometrica. Se $\lambda > 0$, il vettore $\lambda\boldsymbol{v}$ giace sulla stessa retta su cui giace $\boldsymbol{v}$, è orientato concordemente e ha modulo pari a λ volte il modulo di $\boldsymbol{v}$ (si veda la Figura 8.4); se $\lambda < 0$, allora

Figura 8.4. Vettori $\boldsymbol{v}$ e $\lambda\boldsymbol{v}$

$\lambda\boldsymbol{v} = -|\lambda|\boldsymbol{v} = |\lambda|(-\boldsymbol{v})$ e dunque si applicano le considerazioni precedenti con $\boldsymbol{v}$ sostituito da $-\boldsymbol{v}$. Diciamo che due **vettori** $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono **allineati** se $\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{v}$ per un qualche $\lambda \neq 0$.

Diamo ora l'interpretazione geometrica della somma di due vettori, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, non nulli. Se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono allineati, cioè $\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{v}$, allora $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (1 + \lambda)\boldsymbol{v}$ è ancora allineato con $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Altrimenti, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ giacciono su rette distinte, rispettivamente r_v e r_w, che si incontrano nell'origine. Sia Π il piano individuato da tali rette (ovviamente, se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono vettori del piano, Π coinciderà con il piano stesso); i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ individuano un parallelogramma in tale piano (si veda la Figura 8.5). Precisamente, se indichiamo con P l'estremo di $\boldsymbol{v}$ e con Q l'estremo di $\boldsymbol{w}$, il parallelogramma è definito dalle rette r_v, r_w, dalla retta parallela a r_w passante per P e dalla retta parallela a r_v passante per Q; esso ha vertici O, P, Q ed R, essendo R il vertice opposto all'origine. Allora il vettore $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ è precisamente la diagonale $\overline{OR}$ del parallelogramma, orientata da O a R. Modi equivalenti per individuare l'estremo R di $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ sono quelli di "muoversi" lungo due lati contigui del parallelogramma: ad esempio, da P possiamo tracciare il segmento parallelo a $\overline{OQ}$, di pari lunghezza e giacente nello stesso semipiano, rispetto alla retta r_v, in

Figura 8.5. Rappresentazione geometrica del vettore somma $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$

Figura 8.6. Rappresentazione geometrica del vettore differenza $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$

cui giace $\overline{OQ}$.

Anche la differenza $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ ammette una semplice rappresentazione geometrica. Essendo $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$, possiamo applicare le considerazioni precedenti e rappresentare $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ come la diagonale uscente dall'origine del parallelogramma individuato dai vettori $\boldsymbol{v}$ e $-\boldsymbol{w}$ (si veda la Figura 8.6). In alternativa, possiamo considerare la diagonale $\overline{QP}$ del parallelogramma individuato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$; "trasportando" tale segmento parallelamente a se stesso nell'origine, si ottiene $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$.

L'insieme V dei vettori del piano o dello spazio, su cui sono definite le operazioni di somma tra due vettori e di prodotto di uno scalare per un vettore sopra introdotte, viene detto **spazio vettoriale** su $\mathbb{R}$. Il vettore $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}_1 + \mu \boldsymbol{v}_2$, con $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ viene detto **combinazione lineare** dei vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$; tale concetto può essere esteso a un numero finito di addendi.

Esempi 8.3

i) Consideriamo i vettori $\boldsymbol{v}_1 = (2, 5, -4)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 3, 0)$. Il vettore $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}_1 - 5\boldsymbol{v}_2$ è dato da $\boldsymbol{v} = (11, 0, -12)$.

ii) I vettori $\boldsymbol{v} = (\sqrt{8}, -2, 2\sqrt{5})$ e $\boldsymbol{w} = (2, -\sqrt{2}, \sqrt{10})$ sono allineati, in quanto il rapporto tra le componenti è costante, essendo

$$\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{-2}{-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}\,;$$

dunque $\boldsymbol{v} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{w}$. □

8.2.2 Modulo e prodotto scalare

Abbiamo già introdotto il **modulo** di un vettore $\boldsymbol{v}$ di estremità P come la lunghezza del segmento $\overline{OP}$, vale a dire la distanza euclidea di P dall'origine; il modulo,

detto anche **norma euclidea** di $\boldsymbol{v}$, sarà indicato con $\|\boldsymbol{v}\|$. Esso si esprime mediante le componenti di $\boldsymbol{v}$ come

$$\boxed{\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} v_i^2} = \begin{cases} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} & \text{se } d = 2\,, \\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} & \text{se } d = 3\,; \end{cases}}$$

osserviamo che il modulo di un vettore è sempre ≥ 0, e che $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ se e solo se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Notiamo che valgono le seguenti proprietà, la cui dimostrazione sarà data a pag. 281: per ogni $v, w \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda \boldsymbol{v}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{v}\|\,, \qquad \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|\,. \tag{8.6}$$

Un vettore di modulo 1 viene detto **versore**; geometricamente, i versori hanno la loro estremità P giacente sulla circonferenza oppure sulla sfera di centro l'origine e raggio 1. Dato il vettore non nullo $\boldsymbol{v}$, possiamo associare ad esso il versore $\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ allineato con $\boldsymbol{v}$. Si ha dunque $\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|\, \hat{\boldsymbol{v}}$, il che mostra che ogni vettore può essere rappresentato come il prodotto della sua norma per un versore.

Definiamo infine l'operazione di **prodotto scalare** tra due vettori. Dati due vettori $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_d)$, il loro prodotto scalare è il numero reale

$$\boxed{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{d} v_i w_i = \begin{cases} v_1 w_1 + v_2 w_2 & \text{se } d = 2\,, \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 & \text{se } d = 3\,. \end{cases}}$$

Valgono le seguenti proprietà, di facile verifica: per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si ha

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}\,, \tag{8.7}$$

$$(\lambda \boldsymbol{v_1} + \mu \boldsymbol{v_2}) \cdot \boldsymbol{w} = \lambda(\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{w}) + \mu(\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{w})\,. \tag{8.8}$$

Notiamo poi che la norma di un vettore può essere espressa mediante il prodotto scalare, essendo per ogni $\boldsymbol{v} \in V$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}\,. \tag{8.9}$$

Viceversa, per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, si ha (per la dimostrazione di veda a pag. 282)

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\big(\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{w}\|^2\big)\,, \tag{8.10}$$

il che permette di esprimere il prodotto scalare mediante la norma.

Vale inoltre la seguente importante disuguaglianza, nota come **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**: per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$

$$|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{v}\|\, \|\boldsymbol{w}\|\,. \tag{8.11}$$

Figura 8.7. Rappresentazione geometrica del Teorema di Pitagora

Ancor più precisamente, si può scrivere

$$\boxed{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|\,\cos\theta} \tag{8.12}$$

dove θ misura l'angolo racchiuso tra i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ (si noti che il modo di esprimere l'angolo formato dai due vettori è ininfluente rispetto a tale formula, essendo $\cos\theta = \cos(-\theta) = \cos(2\pi-\theta)$). Anche le relazioni (8.11) e (8.12) saranno giustificate più sotto.

Mediante il prodotto scalare, possiamo definire il concetto di ortogonalità tra vettori. Precisamente, due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ si dicono **ortogonali** se

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0\,;$$

la rappresentazione (8.12) del prodotto scalare mostra che due vettori sono ortogonali quando uno di essi è nullo oppure quando l'angolo formato dai vettori è retto. Inoltre, ricordando la (8.10), l'ortogonalità di due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ equivale all'identità

$$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2\,,$$

ben nota allo studente come Teorema di Pitagora (vedasi la Figura 8.7).

Se $\boldsymbol{v}$ è un vettore e $\boldsymbol{u}$ è un versore, la **componente di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{u}$** è il vettore

$$\boxed{\boldsymbol{v}_u = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}\,,}$$

mentre la **componente di $\boldsymbol{v}$ ortogonale** a $\boldsymbol{u}$ è il vettore

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{u^\perp} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_u\,.}$$

Si ha dunque la rappresentazione di $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_u + \boldsymbol{v}_{u^\perp} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{v}_u\cdot\boldsymbol{v}_{u^\perp} = 0\,, \tag{8.13}$$

detta **decomposizione ortogonale** di $\boldsymbol{v}$ rispetto al versore $\boldsymbol{u}$ (vedasi la Figura 8.8).

Figura 8.8. Decomposizione ortogonale di un vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto a un versore $\boldsymbol{u}$

Esempi 8.4

i) I vettori $\boldsymbol{v} = (1, 0, \sqrt{3})$ e $\boldsymbol{w} = (1, 2, \sqrt{3})$ hanno modulo rispettivamente uguale a

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{1+0+3} = 2\,, \qquad \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{1+4+3} = 2\sqrt{2}\,;$$

il loro prodotto scalare vale $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 1 + 0 + 3 = 4$.

Volendo inoltre calcolare l'angolo formato dai due vettori, possiamo ricavare dalla (8.12)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e dunque $\theta = \frac{\pi}{4}$.

ii) I due vettori $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$ e $\boldsymbol{w} = (-1, 1, 1)$ sono tra loro ortogonali in quanto $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = -1 + 2 - 1 = 0$.

iii) Consideriamo il versore $\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Dato il vettore $\boldsymbol{v} = (3, 1, 1)$ risulta

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

e dunque la componente di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{u}$ è data da

$$\boldsymbol{v}_u = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (1, 1, -1)\,,$$

mentre la componente ortogonale vale

$$\boldsymbol{v}_{u^\perp} = (3, 1, 1) - (1, 1, -1) = (2, 0, 2)\,.$$

È facile verificare che valgono le (8.13). □

Introduciamo i versori dello spazio $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$ e $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$, che sono allineati rispettivamente con gli assi x, y e z del sistema di riferimento cartesiano (vedasi la Figura 8.9); tali versori vengono anche indicati con $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. È immediato verificare che essi sono a due a due ortogonali, cioè

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0\,; \tag{8.14}$$

Figura 8.9. Versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$

si dice che $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ formano un **sistema ortonormale** in V (cioè un insieme di vettori a due a due ortogonali e aventi modulo, o norma, uguale a 1).

Sia ora $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un qualunque vettore dello spazio. Dalla definizione delle operazioni tra vettori, si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) \\ &= v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) \end{aligned}$$

e pertanto

$$\boxed{\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{i} + v_2 \boldsymbol{j} + v_3 \boldsymbol{k}\,.}$$

Ciò mostra che ogni vettore dello spazio può essere rappresentato come combinazione lineare dei versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$; si dice che essi formano una **base ortonormale** di V. Il prodotto scalare di $\boldsymbol{v}$ con ciascuno dei vettori ortonormali $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ fornisce un'espressione delle componenti di $\boldsymbol{v}$, essendo

$$v_1 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i}\,, \qquad v_2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j}\,, \qquad v_3 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k}\,.$$

In definitiva, il generico vettore $\boldsymbol{v} \in V$ ammette la rappresentazione

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i})\, \boldsymbol{i} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j})\, \boldsymbol{j} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k}\,. \tag{8.15}$$

Analogamente, i vettori del piano ammettono la rappresentazione

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i})\, \boldsymbol{i} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j})\, \boldsymbol{j}\,,$$

rispetto alla base ortonormale costituita da $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ e $\boldsymbol{j} = (0, 1)$.

Dimostrazione di alcune proprietà precedenti

Dimostrazione. Per quanto riguarda la (8.6), la prima uguaglianza segue facilmente dalla definizione di norma; la seconda disuguaglianza segue da tale uguaglianza se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono allineati, mentre traduce la nota proprietà che in un triangolo la lunghezza di un lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due lati, se i vettori non sono

allineati. Infatti, con riferimento al triangolo OPR della Figura 8.5, si ha $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| = |\overline{OR}|$, $\|\boldsymbol{v}\| = |\overline{OP}|$ e $\|\boldsymbol{w}\| = |\overline{PR}|$.
La formula (8.10) si ottiene sviluppando la quantità $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2$ mediante la (8.9) e le (8.7), (8.8), come

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 &= (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \\ &= \|\boldsymbol{v}\|^2+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\|\boldsymbol{w}\|^2\,.\end{aligned} \tag{8.16}$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (8.11) può essere ottenuta partendo dalla seconda delle (8.6), scritta come $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 \le \big(\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|\big)^2$. Usando l'identità precedente a primo membro e svolgendo il quadrato a secondo membro, si ottiene $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \le \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$, che è la (8.11) nel caso in cui $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \ge 0$. Se invece $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} < 0$, è sufficiente cambiare $\boldsymbol{v}$ in $-\boldsymbol{v}$, ottenendo

$$|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}| = -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = (-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} \le \|-\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|\,.$$

Dimostriamo infine la (8.12). Siano $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ vettori non nulli (altrimenti la relazione è banalmente verificata per ogni valore di θ). Non è restrittivo supporre θ soddisfacente $0 \le \theta \le \pi$. Detto $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}$ il versore associato a $\boldsymbol{w}$, la componente di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{u}$ si scrive come

$$\boldsymbol{v}_u = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}\,\boldsymbol{u}\,. \tag{8.17}$$

Supponiamo dapprima θ acuto, cioè $0 < \theta < \pi/2$. Considerando il triangolo rettangolo $OP'P$ (vedasi la Figura 8.10, a sinistra) si ha $\|\boldsymbol{v}_u\| = |\overline{OP'}| = |\overline{OP}|\cos\theta = \|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$; essendo $\boldsymbol{v}_u$ concorde con $\boldsymbol{u}$, otteniamo

$$\boldsymbol{v}_u = \|\boldsymbol{v}\|\cos\theta\,\boldsymbol{u}\,. \tag{8.18}$$

Figura 8.10. Proiezione del vettore $\boldsymbol{v}$ lungo il vettore $\boldsymbol{w}$ (angolo tra i vettori acuto, a sinistra, e ottuso, a destra)

Se θ è ottuso, $\pi/2 < \theta < \pi$, considerando ancora il triangolo $OP'P$ (vedasi la Figura 8.10, a destra) si ha $\|\boldsymbol{v}_u\| = \|\boldsymbol{v}\| \cos(\pi - \theta) = -\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$; essendo ora $\boldsymbol{v}_u$ discorde con $\boldsymbol{u}$, si ottiene nuovamente la (8.18). Anche nei casi estremi $\theta = 0, \pi/2, \pi$ si giunge facilmente alla medesima relazione. Uguagliando i secondi membri delle (8.17) e (8.18), e osservando che $\lambda\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$ equivale a $\lambda = \mu$ se $\boldsymbol{v} \neq 0$, si perviene all'uguaglianza

$$\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} = \|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$$

da cui otteniamo la (8.12). □

8.2.3 Vettori applicati in un punto

In molte applicazioni, è utile il concetto di vettore applicato in un punto arbitrario del piano o dello spazio (si pensi ad esempio a una forza, rappresentabile come un vettore, che agisce su un punto materiale). Tale concetto può essere definito nel seguente modo.

Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore non nullo del piano di componenti (v_1, v_2) e sia P_0 un punto qualunque del piano, di coordinate (x_{01}, x_{02}). Definiamo il punto P_1 di coordinate $(x_{11}, x_{12}) = (x_{01} + v_1, x_{02} + v_2)$ (si veda la Figura 8.11). Il segmento $\overline{P_0P_1}$, orientato da P_0 e P_1, è parallelo al vettore $\boldsymbol{v}$ ed è orientato in modo concorde. Diciamo che esso rappresenta il **vettore $\boldsymbol{v}$ applicato in** P_0, e lo indichiamo con $(P_0, \boldsymbol{v})$. Viceversa, dato un qualunque segmento di estremi $P_0 = (x_{01}, x_{02})$ e $P_1 = (x_{11}, x_{12})$, orientato da P_0 a P_1, definiamo il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti $(v_1, v_2) = (x_{11} - x_{01}, x_{12} - x_{02})$. Allora il segmento considerato definisce il vettore $\boldsymbol{v}$ applicato in P_0.

In definitiva, da un punto di vista matematico, un **vettore applicato** del piano è una coppia $(P_0, \boldsymbol{v})$ la cui prima componente è un punto P_0 del piano, detto punto di applicazione, e la cui seconda componente è un vettore $\boldsymbol{v}$ applicato nell'origine. Nell'uso comune, però, il vettore applicato $(P_0, \boldsymbol{v})$ verrà indicato semplicemente con $\boldsymbol{v}$, precisando però il punto di applicazione P_0. Analoghe definizioni valgono nello spazio.

Figura 8.11. Vettore $\boldsymbol{v}$ applicato in P_0

Le operazioni sui vettori (applicati nell'origine) introdotte nei paragrafi precedenti possono essere estese in modo ovvio ai vettori applicati *in uno stesso punto*. Ad esempio, dati i vettori $(P_0, \boldsymbol{v})$ e $(P_0, \boldsymbol{w})$ applicati in P_0, il vettore somma $(P_0, \boldsymbol{v}) + (P_0, \boldsymbol{w})$ sarà definito come il vettore $(P_0, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ ancora applicato in P_0. Non sono invece definite operazioni tra vettori applicati in punti diversi.

8.3 Numeri complessi

È ben noto che non tutte le equazioni algebriche

$$p(x) = 0$$

(dove p è un polinomio di grado n nella variabile x) ammettono soluzioni in campo reale. Ad esempio la semplice equazione $x^2 + 1 = 0$, ossia

$$x^2 = -1\,, \tag{8.19}$$

corrispondente all'estrazione della radice quadrata del numero negativo -1, non è risolubile in $\mathbb{R}$; lo stesso accade per la generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.20}$$

qualora il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ sia negativo. Tanto nella matematica pura quanto in quella applicata, risulta utile poter garantire l'esistenza di soluzioni, opportunamente definite, di ogni equazione algebrica. A tale scopo, l'insieme dei numeri reali dotato delle operazioni di somma e prodotto può essere ampliato, introducendo il cosiddetto insieme dei numeri complessi, estendendo nel contempo tali operazioni e conservandone le proprietà formali. È rimarchevole il fatto che è sufficiente effettuare tale ampliamento in modo da garantire la risolubilità dell'equazione (8.19) per ottenere, attraverso un profondo risultato noto come Teorema Fondamentale dell'Algebra, la risolubilità di ogni equazione algebrica.

8.3.1 Operazioni algebriche

Un **numero complesso** z può essere definito come una coppia ordinata $z = (x, y)$ di numeri reali x e y. Indicheremo con $\mathbb{C}$ l'insieme di tali coppie, che quindi può essere identificato con l'insieme $\mathbb{R}^2$. I numeri reali x e y sono detti rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** di z e indicati con

$$x = \mathcal{R}e\, z \qquad \text{e} \qquad y = \mathcal{I}m\, z\,.$$

Il sottoinsieme dei numeri complessi della forma $(x, 0)$ può essere identificato con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$; in tal senso, scriviamo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Numeri complessi della forma $(0, y)$ sono invece detti **immaginari puri**.

Diremo che due numeri complessi $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono uguali se hanno le stesse parti reali e immaginarie, ossia

$$z_1 = z_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2\,.$$

In $\mathbb{C}$, definiamo le operazioni di somma e prodotto come

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{8.21}$$
$$z_1\, z_2 = (x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2, x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\,. \tag{8.22}$$

Osserviamo che

$$(x, 0) + (0, y) = (x, y)\,, \qquad (0, 1)\,(y, 0) = (0, y)$$

e quindi

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)\,(y, 0)\,. \tag{8.23}$$

Inoltre le (8.21) e (8.22) diventano le usuali operazioni di somma e prodotto quando sono ristrette ai numeri reali:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \qquad \text{e} \qquad (x_1, 0)\,(x_2, 0) = (x_1\, x_2, 0)\,.$$

In tal senso, l'insieme dei numeri complessi è un'estensione naturale dell'insieme dei numeri reali.

Denotiamo con i il numero immaginario puro $(0, 1)$. Identificando il numero complesso $(r, 0)$ con il numero reale r, possiamo riscrivere la (8.23) nella forma

$$\boxed{z = x + iy\,,}$$

detta **forma cartesiana** o **algebrica** del numero complesso $z = (x, y)$.

Osserviamo che

$$\boxed{i^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0) = -1\,,}$$

e quindi il numero complesso i è soluzione dell'equazione (8.19). Usando la forma cartesiana di un numero complesso, le operazioni di somma e prodotto (8.21) e (8.22) diventano

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)\,,} \tag{8.24}$$

$$\boxed{z_1\, z_2 = (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) = x_1\, x_2 - y_1\, y_2 + i(x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\,;} \tag{8.25}$$

come si vede è sufficiente operare con le usuali regole dell'algebra, tenendo conto della relazione $i^2 = -1$.

Elenchiamo di seguito alcune proprietà della somma e del prodotto, lasciando la facile verifica al lettore; per ogni $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ si ha

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 = z_2 + z_1\,, && z_1\, z_2 = z_2\, z_1\,, \\ &(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\,, && (z_1\, z_2)\, z_3 = z_1\,(z_2\, z_3)\,, \\ &z_1\,(z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3\,. \end{aligned}$$

I numeri $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$ sono rispettivamente l'identità additiva e moltiplicativa, in quanto soddisfano

$$z + 0 = 0 + z = z \qquad \text{e} \qquad z\,1 = 1\,z = z\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

L'**opposto** (additivo) di $z = (x, y)$ è il numero $-z = (-x, -y)$; ovvero si ha $z + (-z) = 0$. Utilizzando tale nozione possiamo definire, per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la **sottrazione**:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ovvero

$$x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)\,.$$

Il **reciproco** (moltiplicativo) di un numero $z \neq 0$, indicato con $\frac{1}{z}$ oppure z^{-1}, è definito dalla relazione $zz^{-1} = 1$; non è difficile verificare che

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}\,.$$

Definiamo dunque la **divisione**, per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_2 \neq 0$, come

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\, z_2^{-1} = \frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2\, y_1 - x_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Infine, sottolineiamo che l'usuale ordinamento dei numeri reali non è estendibile all'insieme dei numeri complessi, in modo da conservare tutte le proprietà elencate nel § 1.3.1.

8.3.2 Coordinate cartesiane

È naturale associare al numero $z = (x, y) = x + iy$ il punto del piano cartesiano di coordinate x e y (si veda la Figura 8.12). Il numero z può anche essere pensato come il vettore applicato nell'origine e avente tale punto come estremo. L'asse x è detto **asse reale** e l'asse y **asse immaginario**. Osserviamo che, dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la somma $z_1 + z_2$ corrisponde al vettore somma ottenuto mediante la regola del

Figura 8.12. Coordinate cartesiane del numero complesso $z = x + iy$

Figura 8.13. Rappresentazione grafica della somma (a sinistra) e della differenza (a destra) di due numeri complessi z_1 e z_2

parallelogramma (si veda la Figura 8.13, a sinistra), mentre la differenza $z_1 - z_2$ è rappresentata dal vettore differenza (si veda la Figura 8.13, a destra).

Il **modulo** (o **valore assoluto**) di $z = x + iy$, denotato con $|z|$, è il numero positivo

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

che rappresenta la distanza del punto (x, y) dall'origine; si osservi che tale definizione coincide con quella di modulo del vettore $\boldsymbol{v}$ associato a z, vale a dire $|z| = \|\boldsymbol{v}\|$. Si osservi inoltre che il modulo di un numero complesso coincide con il valore assoluto quando il numero è reale, il che giustifica la notazione usata. Notiamo che, mentre l'affermazione $z_1 < z_2$ non ha in generale significato, la diseguaglianza $|z_1| < |z_2|$ significa che il punto corrispondente a z_1 è più vicino all'origine del punto corrispondente a z_2. La distanza tra i punti corrispondenti a z_1 e z_2 è data da $|z_1 - z_2|$.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ottengono facilmente le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&|z| \geq 0\,; \quad |z| = 0 \text{ se e solo se } z = 0\,;\\
&|z|^2 = (\mathcal{R}e\, z)^2 + (\mathcal{I}m\, z)^2\,;\\
&\mathcal{R}e\, z \leq |\mathcal{R}e\, z| \leq |z|\,, \quad \mathcal{I}m\, z \leq |\mathcal{I}m\, z| \leq |z|\,;\\
&\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.
\end{aligned}$$

Il **complesso coniugato**, o semplicemente il coniugato, di un numero complesso $z = x + iy$, indicato con $\bar{z}$, è definito come

$$\boxed{\bar{z} = x - iy\,.} \tag{8.26}$$

Graficamente il coniugato $\bar{z}$ è rappresentato dal punto $(x, -y)$ che si ottiene mediante riflessione rispetto all'asse reale del punto (x, y). Per ogni $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&\overline{\bar{z}} = z\,, && |\bar{z}| = |z|\,, && z\,\bar{z} = |z|^2\,,\\
&\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\,, && \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2\,, && \\
&\overline{z_1\,z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2\,, && \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)\,. &&
\end{aligned} \tag{8.27}$$

È immediato verificare che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\mathcal{R}e\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}\,, \qquad \mathcal{I}m\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,.}$$

8.3.3 Forma trigonometrica e forma esponenziale

Dato il punto (x, y), siano r e θ le sue coordinate polari; poiché

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\sin\theta\,,$$

il numero complesso $z = (x, y)$ può essere rappresentato nella **forma polare** o **trigonometrica** come

$$\boxed{z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,.} \tag{8.28}$$

Si ha $r = |z|$; il numero θ è detto **argomento** di z e indicato con $\theta = \arg z$. Geometricamente, $\arg z$ è un qualsiasi angolo (misurato in radianti) formato dalla semiretta dei reali positivi e dal vettore individuato da z (si veda la Figura 8.14). Pertanto può assumere infiniti valori che differiscono per multipli interi di 2π. Chiameremo **valore principale** di $\arg z$, denotandolo con $\operatorname{Arg} z$, quell'unico valore θ di $\arg z$ tale che $-\pi < \theta \leq \pi$; esso è definito dalla formula (8.2).

Osserviamo che due numeri complessi $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ sono uguali se e solo se $r_1 = r_2$ e θ_1, θ_2 differiscono per un multiplo intero di 2π.

Figura 8.14. Coordinate polari del numero complesso $z = x + iy$

La rappresentazione polare risulta molto utile per esprimere in maniera semplice il prodotto di due numeri complessi; di conseguenza, fornisce un'espressione elementare per il calcolo delle potenze e delle radici di un numero complesso. Più precisamente, siano

$$z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad \text{e} \qquad z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,;$$

allora, ricordando le formule di addizione per le funzioni trigonometriche, si ha

$$\begin{aligned} z_1\,z_2 &= r_1\,r_2\,\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\big] \\ &= r_1\,r_2\,\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big]\,. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Vale dunque la relazione

$$\arg\,(z_1\,z_2) = \arg z_1 + \arg z_2\,. \tag{8.30}$$

Si osservi che tale identità non vale se sostituiamo arg con Arg; ad esempio, se $z_1 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$ e $z_2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ risulta

$$z_1\,z_2 = -i = \cos\big(-\frac{\pi}{2}\big) + i\sin\big(-\frac{\pi}{2}\big)$$

ovvero

$$\operatorname{Arg} z_1 = \pi\,, \qquad \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \frac{3}{2}\pi \neq \operatorname{Arg} z_1\,z_2 = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Talvolta è comodo esprimere un numero complesso attraverso la cosiddetta **forma esponenziale**. A tale scopo, estendiamo la definizione di funzione esponenziale al caso di un esponente immaginario puro, ponendo per ogni $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,.} \tag{8.31}$$

Tale relazione, nota come **formula di Eulero**, trova una giustificazione (anzi è oggetto di dimostrazione) nell'ambito della teoria delle serie in campo complesso. Accontentiamoci qui di prenderla come definizione. L'espressione (8.28) di un numero complesso z diventa allora

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta}\,, \tag{8.32}$$

che è, appunto, la forma esponenziale di z. Il complesso coniugato di z si esprime come

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = r\mathrm{e}^{-i\theta}\,.$$

La relazione (8.29) fornisce immediatamente l'espressione del prodotto di due numeri complessi $z_1 = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}$, come

$$\boxed{z_1\,z_2 = r_1\,r_2\,\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}\,;} \tag{8.33}$$

dunque, per moltiplicare due numeri complessi è sufficiente moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti. Per quanto riguarda il quoziente, notiamo che dalla (8.29) con $r_1 = r_2 = 1$, si ottiene

$$\mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2} = \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}\,. \tag{8.34}$$

In particolare,

$$\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta} = 1$$

e dunque $\mathrm{e}^{-i\theta}$ è il reciproco di $\mathrm{e}^{i\theta}$; pertanto il reciproco di un numero complesso $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$ è dato da

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}\,. \tag{8.35}$$

Combinando tale formula con quella del prodotto, otteniamo l'espressione del quoziente di due numeri complessi $z_1 = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2\mathrm{e}^{i\theta_2} \neq 0$, data da

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}\,.} \tag{8.36}$$

8.3.4 Potenze e radici

Iterando le relazioni (8.33) e (8.35), per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ottiene

$$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\theta}\,; \tag{8.37}$$

in particolare, quando $r = 1$, si ottiene la cosiddetta **formula di De Moivre**

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,.} \tag{8.38}$$

Mediante la (8.37) possiamo affrontare il problema del calcolo della radice n-esima di un numero complesso. Fissato un intero $n \geq 1$ e un numero complesso $w = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, vogliamo determinare i numeri complessi $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ soddisfacenti $z^n = w$. Dalla (8.37), si ha

$$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\theta} = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi} = w$$

e dunque, ricordando la condizione di uguaglianza tra due numeri complessi, dovranno essere verificate le condizioni

$$\begin{cases} r^n = \rho\,, \\ n\theta = \varphi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

ovvero

$$\boxed{\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}\,, \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}}$$

Si noti che l'espressione di θ non fornisce necessariamente i valori principali degli argomenti delle radici.

Figura 8.15. Rappresentazione grafica del punto $1+\sqrt{3}i$ e delle sue radici quinte, z_j, $j = 0, \ldots, 4$

Ricordando la periodicità del seno e del coseno, risultano quindi determinate n soluzioni distinte del nostro problema, date da

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\, \mathrm{e}^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.}$$

Geometricamente tali punti si trovano sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e sono i vertici di un poligono regolare di n lati (si veda la Figura 8.15).

Esempi 8.5

i) Si consideri, per $n \geq 1$, l'equazione

$$z^n = 1\,.$$

Scrivendo $1 = 1\mathrm{e}^{i0}$, si ottengono le n radici distinte

$$z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

dette **le radici n-esime dell'unità**. Si noti che per n dispari, si ha un'unica radice reale $z_0 = 1$, mentre per n pari si hanno due radici reali $z_0 = 1$ e $z_{n/2} = -1$ (si veda la Figura 8.16).

ii) Verifichiamo che l'equazione

$$z^2 = -1$$

ammette, come ci si aspetta, le due radici $z_\pm = \pm i$. Scriviamo $-1 = 1\mathrm{e}^{i\pi}$, da cui otteniamo

$$z_+ = z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \text{e} \quad z_- = z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi+2\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\,. \qquad \square$$

Figura 8.16. Radici dell'unità: terze (a sinistra) e seste (a destra)

Notiamo infine che la (8.31) permette di definire l'esponenziale di un qualunque numero complesso $z = x + iy$, ponendo

$$\boxed{\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)\,.} \tag{8.39}$$

Con tale definizione, usando la (8.34), è facile verificare, che la proprietà fondamentale $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ continua a valere in campo complesso. Si noti che si ha

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathcal{R}e\, z} > 0\,, \qquad \arg \mathrm{e}^z = \mathcal{I}m\, z\,;$$

la prima relazione mostra in particolare che $\mathrm{e}^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Inoltre, la periodicità delle funzioni trigonometriche implica che

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi i} = \mathrm{e}^z\,, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}\,.$$

8.3.5 Equazioni algebriche

Mostriamo ora che l'equazione di secondo grado a coefficienti reali

$$az^2 + bz + c = 0$$

ammette due soluzioni complesse coniugate nel caso in cui il discriminante Δ sia negativo. Non è restrittivo supporre $a > 0$. Ricordando lo sviluppo del quadrato di un binomio, possiamo scrivere

$$0 = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = \left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\,,$$

ossia

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} < 0\,;$$

dunque otteniamo

$$z + \frac{b}{2a} = \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

cioè

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,.$$

Tale espressione può essere scritta come $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, in analogia con il caso di discriminante ≥ 0.

Notiamo che il procedimento seguito può essere applicato anche nel caso in cui i coefficienti $a \neq 0$, b e c siano numeri complessi. Pertanto l'espressione

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

definisce le due soluzioni dell'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$, nella situazione più generale possibile.

Le equazioni algebriche di terzo e quarto grado ammettono rispettivamente tre e quattro soluzioni (contate con le opportune molteplicità) che sono esprimibili in forma esplicita mediante le operazioni algebriche e l'estrazione di radici quadrate e cubiche[1]. Non esiste invece una espressione analitica per le soluzioni di equazioni di ordine superiore al quarto. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra garantisce però che ogni equazione algebrica $p(z) = 0$, dove p è un polinomio di grado n a coefficienti reali o complessi, ammette esattamente n soluzioni in campo complesso, ciascuna con l'opportuna molteplicità. L'enunciato preciso è il seguente.

Teorema 8.6 *Sia $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, con $a_n \neq 0$, un polinomio di grado n avente coefficienti $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n$. Allora esistono $m \leq n$ numeri complessi $z_1, \ldots, z_m$, distinti tra loro, ed m numeri interi $\mu_1, \ldots, \mu_m$ maggiori o uguali a 1 e soddisfacenti $\mu_1 + \ldots + \mu_m = n$, tali che $p(z)$ si fattorizza come*

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{\mu_1} \ldots (z - z_m)^{\mu_m}\,.$$

[1] Ad esempio, l'equazione di terzo grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ si riduce con la sostituzione $x = y - \frac{a}{3}$ all'equazione $y^3 + py + q = 0$ per opportuni coefficienti p e q facilmente calcolabili. Le soluzioni di tale equazione sono espresse dalla formula

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,,$$

nota come formula di Cardano. Poiché ogni estrazione di radice fornisce un numero di soluzioni (eventualmente coincidenti) pari all'ordine (2 o 3) della radice, apparentemente tale formula fornisce fino a 12 soluzioni; tuttavia, è possibile verificare che le soluzioni distinte sono al più 3.

I numeri z_k sono le radici del polinomio p, ossia le uniche soluzioni dell'equazione $p(z) = 0$; l'esponente μ_k è la molteplicità della radice z_k. Una radice si dice semplice se la sua molteplicità è 1, doppia se la sua molteplicità è 2, e così via.

È opportuno osservare che se i coefficienti di p sono reali e se z_0 è una radice complessa del polinomio, allora anche $\bar{z}_0$ è una radice di p. Infatti se $p(z_0) = 0$, allora, prendendo il coniugato di ambo i membri e usando le proprietà del passaggio al coniugato in una somma o in un prodotto (vedasi le (8.27)), otteniamo

$$0 = \bar{0} = \overline{p(z_0)} = \bar{a}_n \bar{z}_0^n + \ldots + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0 = a_n \bar{z}_0^n + \ldots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = p(\bar{z}_0)\,.$$

Pertanto $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$, che risulta essere un trinomio di secondo grado a coefficienti reali.

Un enunciato del Teorema Fondamentale dell'Algebra, valido per i polinomi a coefficienti reali e che non fa intervenire la variabile complessa, è fornito nel Teorema 9.15.

8.4 Curve nel piano e nello spazio

Ritorniamo ora allo studio di funzioni ed in particolare introduciamo il concetto di curva nello spazio e nel piano. Una curva descrive, ad esempio, il modo di percorrere il bordo di una regione piana quale un poligono o un ellisse, oppure la traiettoria determinata dal movimento in funzione del tempo di un punto materiale sotto l'effetto di una forza ad esso applicata. Come vedremo nel Capitolo 10, è possibile definire un calcolo integrale sulle curve. Ciò permetterà, ad esempio, di esprimere matematicamente il concetto fisico di lavoro.

Sia I un qualunque intervallo della retta reale e sia $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una funzione. Indichiamo con $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ il punto immagine di $t \in I$ attraverso $\boldsymbol{\gamma}$. Diciamo che $\boldsymbol{\gamma}$ è una **funzione continua su** I se le componenti $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

Definizione 8.7 *Una funzione continua* $\boldsymbol{\gamma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dicesi* **curva** (*nello spazio*). *L'immagine* $C = \boldsymbol{\gamma}(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ *viene detta* **sostegno** *della curva.*

Se il sostegno della curva giace su un piano, diremo che la **curva** è **piana**. Un caso notevole è dato dalle curve $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t), 0\big)$ che giacciono nel piano xy e che indicheremo semplicemente come $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Notiamo che una curva è una funzione di variabile reale mentre il sostegno di una curva è un insieme nello spazio (o nel piano). Una curva definisce un modo di parametrizzare il suo sostegno associando ad ogni valore del parametro $t \in I$ uno e un solo punto del sostegno. Tuttavia l'insieme C può essere il sostegno di curve diverse, ovvero può essere parametrizzato in modi diversi. Ad esempio la curva piana $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1]$ ha come sostegno il segmento di estremi $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$. Tale segmento è anche il sostegno della curva $\boldsymbol{\delta}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in [0, 1]$;

Figura 8.17. Rappresentazione grafica del sostegno $C = \boldsymbol{\gamma}([a, b])$ di un arco semplice (in alto a sinistra), un arco non semplice (in alto a destra), un arco chiuso e semplice (in basso a sinistra) e un arco chiuso non semplice (in basso a destra)

le curve $\boldsymbol{\gamma}$ e $\boldsymbol{\delta}$ costituiscono due parametrizzazioni del segmento AB. Il punto medio di AB, ad esempio, è individuato dal parametro $t = \frac{1}{2}$ nel primo caso e $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nel secondo.

La **curva** $\boldsymbol{\gamma}$ si dice **semplice** se $\boldsymbol{\gamma}$ è un'applicazione iniettiva, ossia se valori diversi del parametro individuano punti diversi del sostegno.

Se l'intervallo $I = [a, b]$ è chiuso e limitato, come negli esempi precedenti, la curva $\boldsymbol{\gamma}$ si chiamerà **arco**. Un **arco** si dice **chiuso** se $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$; ovviamente un arco chiuso non è una curva semplice. Tuttavia, si parla di **arco chiuso e semplice** (o **arco di Jordan**) se il punto $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$ è l'unico punto del sostegno ad essere immagine di due valori diversi del parametro. La Figura 8.17 illustra diversi esempi di archi.

Come per le curve, vi è differenza concettuale tra un arco e il suo sostegno. Va tuttavia detto che frequentemente si indica con il termine 'arco' un sottoinsieme del piano o dello spazio (ad esempio si parla comunemente di 'arco di circonferenza'); in tal caso viene sottintesa una parametrizzazione dell'oggetto geometrico, solitamente definita nel modo più naturale.

Esempi 8.8

i) La curva piana e semplice

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (at + b, ct + d)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ a \neq 0\,,$$

ha come sostegno la retta di equazione $y = \dfrac{c}{a}x + \dfrac{ad - bc}{a}$.

Infatti, posto $x = x(t) = at + b$ e $y = y(t) = ct + d$, abbiamo $t = \dfrac{x-b}{a}$, da cui

$$y = \frac{c}{a}(x-b) + d = \frac{c}{a}x + \frac{ad-bc}{a}\,.$$

ii) La curva

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (1+\cos t, 3+\sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

ha come sostegno la circonferenza di centro $(1,3)$ e raggio 1; infatti vale la relazione $\big(x(t)-1\big)^2 + \big(y(t)-3\big)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Si tratta di un arco chiuso e semplice e costituisce il modo più naturale per parametrizzare tale circonferenza percorrendola in senso antiorario a partire dal punto $(2,3)$.

In generale l'arco chiuso e semplice

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

ha come sostegno la circonferenza centrata in (x_0, y_0) di raggio r.

Si osservi che se t varia in un intervallo di tipo $[0, 2k\pi]$, con k intero positivo ≥ 2, l'arco ha ancora come sostegno la circonferenza ma essa viene percorsa k volte; dunque l'arco non è semplice.

Se invece t varia nell'intervallo $[0, \pi]$, la corrispondente curva è un arco (di circonferenza) semplice ma non chiuso.

iii) Similmente, assegnati $a, b > 0$, l'arco chiuso e semplice

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (a\cos t, b\sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

parametrizza l'ellisse centrato nell'origine e con semiassi a e b.

iv) La curva

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t\cos t, t\sin t)\,, \qquad t \in [0, +\infty)\,,$$

ha come sostegno la spirale rappresentata in Figura 8.18, a sinistra, che viene percorsa in senso antiorario a partire dall'origine. Infatti il punto $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ha distanza dall'origine uguale a $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = t$, che cresce al crescere di t. La curva è semplice.

v) Siano $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ punti distinti dello spazio. La curva semplice

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = P + (Q-P)t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

ha come sostegno la retta passante per P e Q. Infatti $\boldsymbol{\gamma}(0) = P$, $\boldsymbol{\gamma}(1) = Q$ e il vettore $\boldsymbol{\gamma}(t) - P$ ha direzione costante essendo parallelo a $Q - P$.

Una più generale parametrizzazione della stessa retta è data da

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = P + (Q-P)\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{8.40}$$

con $t_0 \neq t_1$; in tal caso si ha $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = P$, $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = Q$.

vi) La curva semplice

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (\cos t, \sin t, t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

Figura 8.18. Rappresentazione della spirale e dell'elica circolare definite negli Esempi 8.8 iv) e vi)

ha come sostegno l'elica circolare rappresentata in Figura 8.18, a destra. Si noti che il sostegno giace sul cilindro infinito di asse coincidente con l'asse z e raggio 1, ovvero l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. □

Diremo che una **curva** $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ è **derivabile** se le sue componenti $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili su I (ricordiamo che una funzione è derivabile su un intervallo I se è derivabile in tutti i punti interni ad I ed è derivabile unilateralmente negli eventuali estremi appartenenti ad I). Indichiamo con $\boldsymbol{\gamma}' : I \to \mathbb{R}^3$ la funzione derivata $\boldsymbol{\gamma}'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$.

Definizione 8.9 *Una* **curva** $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ *dicesi* **regolare** *se è derivabile su I con derivata continua (ovvero le componenti sono funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ su I) e se $\boldsymbol{\gamma}'(t) \neq (0, 0, 0)$, per ogni $t \in I$.*

Una **curva** $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ *dicesi* **regolare a tratti** *se I è unione di un numero finito di intervalli su cui $\boldsymbol{\gamma}$ è regolare.*

Se $\boldsymbol{\gamma}$ è una curva regolare e se $t_0 \in I$, il vettore $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ dicesi **vettore tangente** al sostegno della curva nel punto $P_0 = \boldsymbol{\gamma}(t_0)$. Tale definizione può essere giustificata geometricamente nel modo seguente (si veda la Figura 8.19). Sia $t_0 + \Delta t \in I$ tale che il punto $P_{\Delta t} = \boldsymbol{\gamma}(t_0 + \Delta t)$ sia diverso da P_0. Consideriamo la retta passante per P_0 e $P_{\Delta t}$; ricordata la (8.40), tale retta può essere parametrizzata come

$$S(t) = P_0 + \big(P_{\Delta t} - P_0\big)\frac{t - t_0}{\Delta t} = \boldsymbol{\gamma}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\gamma}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t_0)}{\Delta t}(t - t_0)\,. \tag{8.41}$$

Facendo tendere Δt a 0, il punto $P_{\Delta t}$ tende a P_0 (nel senso che ogni componente di $P_{\Delta t}$ tende verso la corrispondente componente di P_0). Nel contempo, grazie all'ipotesi di regolarità di $\boldsymbol{\gamma}$, il vettore $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t_0, \Delta t) = \dfrac{\boldsymbol{\gamma}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t_0)}{\Delta t}$ tende

Figura 8.19. Vettori tangente e secante a una curva nel punto P_0

a $\gamma'(t_0)$. Dunque la posizione limite della retta (8.41) è la retta

$$T(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

tangente al sostegno della curva in P_0. A rigore, il vettore tangente al sostegno in P_0 è il vettore applicato $\big(P_0, \gamma'(t_0)\big)$ (si veda il § 8.2.3), ma comunemente lo si indica semplicemente con $\gamma'(t_0)$. Si può verificare che la retta tangente al sostegno di una curva in un punto è intrinseca al sostegno, cioè non dipende dalla parametrizzazione scelta; invece il vettore tangente dipende dalla parametrizzazione per quanto riguarda modulo e verso.

Da un punto di vista cinematico, una curva rappresenta la traiettoria di una particella che al tempo t occupa la posizione $\gamma(t)$ nello spazio. Se la curva è regolare, il vettore $\gamma'(t)$ rappresenta la velocità della particella al tempo t.

Esempi 8.10

i) È facile verificare che tutte le curve considerate negli Esempi 8.8 sono regolari.

ii) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con continuità sull'intervallo I; la curva

$$\gamma(t) = \big(t, f(t)\big)\,, \qquad t \in I\,,$$

è una curva regolare avente come sostegno il grafico della funzione f. Si osservi infatti che

$$\gamma'(t) = \big(1, f'(t)\big) \neq (0,0)\,, \qquad \text{per ogni } t \in I\,.$$

iii) L'arco $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,1)\,, & t \in [0,1)\,, \\ (t,t)\,, & t \in [1,2]\,, \end{cases}$$

è una parametrizzazione della poligonale ABC (si veda la Figura 8.20, a sinistra); invece l'arco

Figura 8.20. Poligonale ABC, a sinistra, e $ABCA$, a destra, definite nell'Esempio 8.10 iii)

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} (t,1)\,, & t \in [0,1)\,, \\ (t,t)\,, & t \in [1,2)\,, \\ \big(t, 2 - \frac{1}{2}(t-2)\big)\,, & t \in [2,4]\,, \end{cases}$$

è una parametrizzazione della poligonale $ABCA$ (si veda la Figura 8.20, a destra). Entrambe le curve sono regolari a tratti.

iv) Le curve

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(1 + \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t\big)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$
$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \big(1 + \sqrt{2}\cos 2t, -\sqrt{2}\sin 2t\big)\,, \qquad t \in [0, \pi]\,,$$

sono due parametrizzazioni (la prima antioraria, la seconda oraria) della stessa circonferenza C, avente centro in $(1,0)$ e raggio $\sqrt{2}$. Esse sono regolari e le loro derivate sono date da

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \sqrt{2}\big(-\sin t, \cos t\big)\,, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}'(t) = 2\sqrt{2}\big(-\sin 2t, -\cos 2t\big)\,.$$

Il punto $P_0 = (0,1) \in C$ è immagine mediante $\boldsymbol{\gamma}$ del valore $t_0 = \frac{3}{4}\pi$ del parametro e mediante $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ del valore $\widetilde{t}_0 = \frac{5}{8}\pi$ del parametro, ossia $P_0 = \boldsymbol{\gamma}(t_0) = \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(\widetilde{t}_0)$. Nel primo caso il vettore tangente è $\boldsymbol{\gamma}'(t_0) = (-1,-1)$ e la retta tangente a C in P_0 è data da

$$T(t) = (0,1) - (1,1)\big(t - \frac{3}{4}\pi\big) = \big(-t + \frac{3}{4}\pi, 1 - t + \frac{3}{4}\pi\big)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

mentre nel secondo caso si ha $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}'(\widetilde{t}_0) = (2,2)$ e

$$\widetilde{T}(t) = (0,1) + (2,2)\big(t - \frac{5}{8}\pi\big) = \big(2(t - \frac{5}{8}\pi), 1 + 2(t - \frac{5}{8}\pi)\big)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

I vettori tangenti in P_0 hanno verso e lunghezza diversi, ma la retta tangente è la stessa. In effetti, ricordando l'Esempio 8.8 i), in entrambi i casi si ottiene $y = 1 + x$. □

8.5 Cenni alle funzioni di più variabili

Nei capitoli precedenti, abbiamo studiato funzioni reali di una variabile reale, ossia funzioni definite su un sottoinsieme della retta reale $\mathbb{R}$ (ad esempio un intervallo) a valori in $\mathbb{R}$.

Vogliamo ora estendere alcuni dei concetti visti in precedenza, ed introdurne di nuovi, relativamente alle funzioni reali **di due o tre variabili reali**, vale a dire le funzioni definite su un sottoinsieme del piano $\mathbb{R}^2$ o dello spazio $\mathbb{R}^3$ a valori in $\mathbb{R}$. Le funzioni che considereremo si scriveranno dunque come

$$\begin{aligned} f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \qquad\qquad (d = 2 \text{ oppure } 3)\,, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto f(\boldsymbol{x})\,. \end{aligned}$$

Qui $\boldsymbol{x}$ indica il generico elemento di $\mathbb{R}^d$, vale a dire la coppia $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ se $d = 2$ oppure la terna $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ se $d = 3$; talvolta per semplicità scriveremo $(x_1, x_2) = (x, y)$ e $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$; indicheremo inoltre le coordinate di $\boldsymbol{x}$ con $(x_1, \ldots, x_d)$ quando non è necessario precisare se $d = 2$ oppure 3. Ricordiamo che ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ è univocamente associato a un punto P nel piano o nello spazio, le cui coordinate rispetto a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono le componenti di $\boldsymbol{x}$. A sua volta, P individua un vettore applicato nell'origine, di componenti $x_1, \ldots, x_d$; pertanto, l'elemento $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ può essere pensato come tale vettore. In $\mathbb{R}^d$ sono dunque definite le operazioni di somma $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)$, di prodotto $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_d)$ e di prodotto scalare $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ già introdotte e studiate per i vettori. Inoltre è definita la norma euclidea $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$, che rappresenta la distanza euclidea del punto P di coordinate $\boldsymbol{x}$ dall'origine O. Si noti che la quantità $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_d - y_d)^2}$ rappresenta la distanza tra i due punti P e Q di coordinate $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ rispettivamente.

8.5.1 Continuità

Mediante il concetto di distanza, possiamo definire gli intorni di un punto in $\mathbb{R}^d$ e quindi estendere i concetti di continuità e limite alle funzioni di più variabili.

Definizione 8.11 *Sia $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ e sia $r > 0$ un numero reale. Chiamiamo* **intorno** *di $\boldsymbol{x}_0$ di raggio r l'insieme*

$$I_r(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < r\}$$

costituito da tutti i punti di $\mathbb{R}^d$ che distano meno di r da $\boldsymbol{x}_0$.

Posto $\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0d})$, la condizione $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < r$ equivale a

$$\begin{aligned} &(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 < r^2 && \text{se } d = 2\,, \\ &(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2 < r^2 && \text{se } d = 3\,; \end{aligned}$$

dunque $I_r(\boldsymbol{x}_0)$ è rispettivamente il cerchio oppure la sfera di centro $\boldsymbol{x}_0$ e raggio r, privi di frontiera.

La definizione di continuità è formalmente identica a quella data per funzioni di una variabile reale.

Definizione 8.12 *Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e sia $\boldsymbol{x}_0 \in \operatorname{dom} f$. La funzione f dicesi* **continua in $\boldsymbol{x}_0$** *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon\,,$$

vale a dire

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I_\delta(\boldsymbol{x}_0) \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) \in I_\varepsilon\big(f(\boldsymbol{x}_0)\big).$$

Esempio 8.13

Verifichiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 5x_2$ è continua in $\boldsymbol{x}_0 = (3, 1)$. Si ha

$$\begin{aligned} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| &= |2(x_1 - 3) + 5(x_2 - 1)| \\ &\le 2|x_1 - 3| + 5|x_2 - 1| \le 7\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|\,. \end{aligned}$$

Abbiamo qui usato la proprietà $|y_i| \le \|\boldsymbol{y}\|$ per ogni $i = 1, \dots, d$ e per ogni $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, che discende immediatamente dalla definizione di norma. Fissato $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere $\delta = \varepsilon/7$ per ottenere il risultato. Si noti che il medesimo ragionamento mostra che f è continua in ogni $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. □

Una funzione $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dicesi continua in una regione $\Omega \subseteq \operatorname{dom} f$ se è continua in ogni punto $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Le definizioni di limite per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ sono del tutto simili a quelle date nel Capitolo 3.

8.5.2 Derivate parziali e gradiente

Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili, definita nell'intorno di un punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$. La funzione $x \mapsto f(x, y_0)$, ottenuta fissando il valore della seconda variabile indipendente, è una funzione reale di variabile reale, definita nell'intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Se essa è derivabile in x_0, diciamo che f ammette **derivata parziale rispetto a** x in $\boldsymbol{x}_0$ e poniamo

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\bigg|_{x=x_0}.}$$

Similmente, se la funzione $y \mapsto f(x_0, y)$ è derivabile in y_0, diciamo che f ammette derivata parziale rispetto a y in $\boldsymbol{x}_0$, e poniamo

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}.}$$

Nel caso in cui entrambe le condizioni di derivabilità siano soddisfatte, diciamo che f ammette derivate parziali (prime) in $\boldsymbol{x}_0$ e pertanto risulta definito il vettore **gradiente** di f in $\boldsymbol{x}_0$, indicato con $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$, ponendo

$$\boxed{\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\Big) \in \mathbb{R}^2.}$$

In modo analogo, data una funzione di tre variabili $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita nell'intorno di un punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, le sue derivate parziali (prime) in $\boldsymbol{x}_0$ rispetto alle variabili x, y, z sono le quantità

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0, z_0)\Big|_{x=x_0}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y, z_0)\Big|_{y=y_0}, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(x_0, y_0, z)\Big|_{z=z_0},
\end{aligned}}$$

supponendo che le derivate a secondo membro esistano. Il gradiente di f in $\boldsymbol{x}_0$ è il vettore

$$\boxed{\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\Big) \in \mathbb{R}^3.}$$

Esempi 8.14

i) Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ la funzione distanza dall'origine. Considerando il punto $\boldsymbol{x}_0 = (2, -1)$, abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -1) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+1}\Big)(2) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_{x=2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, -1) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{4+y^2}\Big)(-1) = \frac{y}{\sqrt{4+y^2}}\Big|_{y=-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Pertanto

$$\nabla f(2, -1) = \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1).$$

ii) Sia $f(x, y, z) = y \log(2x - 3z)$. Nel punto $\boldsymbol{x}_0 = (2, 3, 1)$, abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3, 1) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 3\log(2x-3)\Big)(2) = 3\frac{2}{2x-3}\Big|_{x=2} = 6,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3,1) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\, y \log 1\Big)(3) = 0\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(2,3,1) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, 3\log(4-3z)\Big)(1) = 3\frac{-3}{4-3z}\bigg|_{z=1} = -9\,,$$

e dunque

$$\nabla f(2,3,1) = (6,0,-9)\,.$$

□

Posto $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_d)$, la derivata parziale di f in $\boldsymbol{x}_0$ rispetto alla variabile x_i, $i = 1,\dots,d$, viene anche indicata con uno dei simboli

$$\mathrm{D}_{x_i} f(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{oppure} \quad f_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

La funzione

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\,,$$

definita in un sottoinsieme $\operatorname{dom}\frac{\partial f}{\partial x_i} \subseteq \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^d$ a valori in $\mathbb{R}$, dicesi **funzione derivata parziale** di f rispetto a x_i. La **funzione gradiente** di f,

$$\nabla f : \boldsymbol{x} \mapsto \nabla f(\boldsymbol{x}),$$

il cui dominio $\operatorname{dom}\nabla f$ è l'intersezione dei domini delle singole derivate parziali, è un esempio di *campo vettoriale*, ossia di funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ a valori in $\mathbb{R}^d$ (pensato come spazio vettoriale).

Esempi 8.15

Riprendiamo gli esempi precedenti.

i) Per la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, abbiamo

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

con $\operatorname{dom}\nabla f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

ii) Per la funzione $f(x,y,z) = y\log(2x-3z)$, abbiamo

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{2y}{2x-3z}, \log(2x-3z), \frac{-3y}{2x-3z}\right)\,,$$

con $\operatorname{dom}\nabla f = \operatorname{dom} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-3z > 0\}$. □

Le derivate parziali rispetto alle variabili x_i, $i = 1,\dots,d$, sono casi particolari di derivata direzionale lungo un vettore, che ora introduciamo. Sia f una funzione definita in un intorno di un punto $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ e sia $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$ un vettore non nullo fissato. Diciamo che f ammette **derivata parziale lungo $\boldsymbol{v}$** in $\boldsymbol{x}_0$ se esiste finita la quantità

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}\,.}$$

Un altro simbolo usato per tale espressione è $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0)$.

La condizione precedente esprime la derivabilità in $t_0 = 0$ della funzione $t \mapsto f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v})$ (definita in tutto un intorno di $t_0 = 0$ in quanto se t è abbastanza piccolo, $\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$ sta nell'intorno di $\boldsymbol{x}_0$ in cui f è definita). Si noti che la curva $t \mapsto \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ è una parametrizzazione della retta passante per $\boldsymbol{x}_0$ e avente la stessa direzione di $\boldsymbol{v}$ e si ha $(f \circ \boldsymbol{\gamma})(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v})$. Dunque, la derivata parziale di f lungo $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{x}_0$ può anche essere espressa come

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \boldsymbol{\gamma}\right)(0)\,.$$

La derivata parziale di f in $\boldsymbol{x}_0$ rispetto a x_i si ottiene ponendo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$, dove $\boldsymbol{e}_i$ indica il versore la cui i-esima componente vale 1, mentre tutte le altre componenti valgono 0 (dunque $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$). Si ha cioè

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0), \qquad i = 1, \dots, d\,.}$$

Infatti, ponendo ad esempio $d = 2$ e $i = 1$, abbiamo

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_1) = f\big((x_0, y_0) + t(1, 0)\big) = f(x_0 + t, y_0)$$

e pertanto, con la sostituzione $x = x_0 + t$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,.\end{aligned}$$

È possibile dimostrare che se f ammette derivate parziali rispetto a ogni x_i in tutto un intorno di $\boldsymbol{x}_0$ e se tali funzioni sono ivi continue, allora f ammette in $\boldsymbol{x}_0$ derivate direzionali lungo un qualunque vettore $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$; tali derivate si esprimono mediante il gradiente di f in $\boldsymbol{x}_0$ come

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + v_d \frac{\partial f}{\partial x_d}(\boldsymbol{x}_0)\,.}$$

Si noti che tale formula fornisce le espressioni, talvolta utili,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{e}_i \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \qquad i = 1, \dots, d\,.$$

Inoltre, sotto le ipotesi fatte su f, se $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^d$ è una qualunque curva derivabile in $t_0 \in I$ e tale che $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, allora la funzione composta $(f \circ \boldsymbol{\gamma})(t) = f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)$ è derivabile in t_0 e si ha

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f \circ \boldsymbol{\gamma}\right)(t) = \boldsymbol{\gamma}'(t_0) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\,; \tag{8.42}$$

tale espressione estende la regola di derivazione della catena vista per le funzioni reali di variabile reale.

Esempio 8.16

Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ la funzione distanza dall'origine, e sia $\boldsymbol{\gamma} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ la spirale $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t\cos t, t\sin t)$. Essendo

$$f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = t\,,$$

per calcolo diretto otteniamo immediatamente $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) = 1$ per ogni $t > 0$. Verifichiamo che il secondo membro della (8.42) fornisce lo stesso risultato. Poniamo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ ed introduciamo il versore $\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = (\cos t, \sin t)$. Si ha $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\cos t, \sin t) + t(-\sin t, \cos t) = \hat{\boldsymbol{x}} + t\hat{\boldsymbol{x}}^{\perp}$; la notazione per il versore $\hat{\boldsymbol{x}}^{\perp} = (-\sin t, \cos t)$ è motivata dal fatto che esso è ortogonale a $\hat{\boldsymbol{x}}$, cioè soddisfa $\hat{\boldsymbol{x}}^{\perp} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = 0$. D'altro canto, abbiamo verificato nell'Esempio 8.15 che $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{x}}$ per ogni $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Pertanto,

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}) = (\hat{\boldsymbol{x}} + t\hat{\boldsymbol{x}}^{\perp}) \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + t\,\hat{\boldsymbol{x}}^{\perp} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \|\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = 1\,,$$

come previsto. □

8.6 Esercizi

1. *Determinare le coordinate polari dei seguenti punti del piano:*

$A = (5\sqrt{6}, 5\sqrt{2})$, $\qquad B = (5\sqrt{6}, -5\sqrt{2})$,

$C = (-5\sqrt{6}, 5\sqrt{2})$, $\qquad D = (-5\sqrt{6}, -5\sqrt{2})$.

2. *Determinare le coordinate polari dei seguenti punti del piano:*

a) $A = (-5, 0)$ $\qquad$ b) $B = (0, 4)$ $\qquad$ c) $C = (0, -3)$

3. *Determinare le coordinate polari dei seguenti punti del piano (si lasci l'argomento espresso in funzione dell'arcotangente):*

a) $A = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}, 1)$ $\qquad$ b) $B = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

4. *Determinare le coordinate polari dei seguenti punti del piano (si lasci l'argomento espresso in funzione dell'arcotangente):*

$A = (\cos\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{9})$, $\qquad B = (-\cos\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{9})$, $\qquad C = (\sin\frac{\pi}{9}, \cos\frac{\pi}{9})$.

5. *Determinare le coordinate polari dei seguenti punti del piano:*

   a) $A = (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{9}, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{9})$

   b) $B = (2\cos\frac{28}{9}\pi, 2\sin\frac{28}{9}\pi)$

6. *Dati* $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, -2)$ *e* $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1)$, *determinare il numero reale* λ *in modo che* $\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2$ *sia ortogonale a* $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1)$.

7. *Determinare l'insieme dei vettori nel piano ortogonali al vettore* $\boldsymbol{v} = (2, -5)$.

8. *Determinare l'insieme dei vettori nello spazio ortogonali ai vettori* $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 2)$ *e* $\boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 3)$.

9. *Determinare il modulo dei vettori:*
   $\boldsymbol{v}_1 = (0, \sqrt{3}, 7)\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 5, -2)\,, \quad \boldsymbol{v}_3 = \left(\cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{7}, -\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{7}\right).$

10. *Determinare il coseno dell'angolo formato dalle seguenti coppie di vettori:*

    a) $\boldsymbol{v} = (0, 1, 0)\,, \quad \boldsymbol{w} = (0, \frac{2}{\sqrt{3}}, 2)$ b) $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)\,, \quad \boldsymbol{w} = (-1, 1, 1)$

11. *Dato il vettore* $\boldsymbol{w} = (5, -3, -\sqrt{2})$, *se ne determini il versore* $\boldsymbol{u}$. *Dato poi il vettore* $\boldsymbol{v} = (2, -1, 2\sqrt{2})$, *se ne determinino la componente lungo* $\boldsymbol{u}$ *e la componente ortogonale.*

12. *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:*

    a) $(2 - 3i)(-2 + i)$ b) $(3 + i)(3 - i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right)$

    c) $\dfrac{1 + 2i}{3 - 4i} + \dfrac{2 - i}{5i}$ d) $\dfrac{5}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)}$

13. *Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:*

    a) $z = i$ b) $z = -1$

    c) $z = 1 + i$ d) $z = i(1 + i)$

    e) $z = \dfrac{1 + i}{1 - i}$ f) $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$

14. *Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:*

    a) $z = \dfrac{1}{1 - i} + \dfrac{2i}{i - 1}$ b) $z = 1 + i - \dfrac{i}{1 - 2i}$

15. *Verificare che se* $|z| = 1$ *si ha* $\left|\dfrac{3z-i}{3+iz}\right| = 1$.

16. *Risolvere le seguenti equazioni:*

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$

b) $z^2 + 3iz + 1 = 0$

c) $z|z| - 2z + i = 0$

d) $|z|^2 z^2 = i$

e) $z^2 + i\bar{z} = 1$

f) $z^3 = |z|^4$

17. *Verificare che* $1 + i$ *è radice del polinomio* $z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$ *e trovare le altre radici.*

18. *Calcolare* z^2, z^9, z^{20} *per*

a) $z = \dfrac{1-i}{i}$

b) $z = \dfrac{2}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{1}{i}$

19. *Calcolare e rappresentare graficamente i seguenti numeri complessi:*

a) $z = \sqrt[3]{-i}$

b) $z = \sqrt[5]{1}$

c) $z = \sqrt{2-2i}$

20. *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

a) $f(x,y) = \dfrac{x-3y+7}{x-y^2}$

b) $f(x,y) = \sqrt{1-3xy}$

c) $f(x,y) = \sqrt{3x+y+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2y-x}}$

d) $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2-9)$

21. *Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni nei punti indicati:*

a) $f(x,y) = \sqrt{3x+y^2}$ *in* $(x_0, y_0) = (1, 2)$

b) $f(x,y,z) = y\mathrm{e}^{x+yz}$ *in* $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -1)$

22. *Determinare la funzione gradiente delle seguenti funzioni:*

a) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

b) $f(x,y) = (x+y)\log(2x-y)$

c) $f(x,y,z) = \sin(x+y)\cos(y-z)$

d) $f(x,y,z) = (x+y)^z$

23. *Calcolare le derivate direzionali delle seguenti funzioni lungo i vettori* $\boldsymbol{v}$ *e nei punti indicati:*

a) $f(x,y) = x\sqrt{y-3}$ $\qquad \boldsymbol{v} = (-1,6)$ $\qquad \boldsymbol{x}_0 = (2,12)$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x+2y-3z}$ $\qquad \boldsymbol{v} = (12,-9,-4)$ $\qquad \boldsymbol{x}_0 = (1,1,-1)$

8.6.1 Soluzioni

1. Per tutti i punti si ha $r = \sqrt{25\cdot 6 + 25\cdot 2} = 5\sqrt{8}$. Utilizzando la formula (8.2), per il punto A risulta

$$\theta_A = \arctan\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

in quanto $x > 0$. Analogamente per il punto B, si ha

$$\theta_B = \arctan\big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\big) = -\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}\,;$$

per il punto C, essendo $x < 0$ e $y > 0$, si ha

$$\theta_C = \arctan\big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\big) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi\,;$$

per il punto D, essendo $x < 0$ e $y < 0$, si ha

$$\theta_D = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi\,.$$

2. *Coordinate polari di punti del piano:*

a) $r = 5\,,\quad \theta = \pi\,;$ $\qquad$ b) $r = 4\,,\quad \theta = \frac{\pi}{2}\,;$ $\qquad$ c) $r = 3\,,\quad \theta = -\frac{\pi}{2}\,.$

3. *Coordinate polari di punti del piano:*

a) Risulta $r = \sqrt{31 - 12\sqrt{6}}$; inoltre notando che $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$, si ha

$$\theta = \arctan\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} + \pi = \arctan\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{-6} + \pi = -\arctan\big(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\big) + \pi\,.$$

b) $r = 5\sqrt{6}\,,\quad \theta = \arctan(5 + 2\sqrt{6})\,.$

4. Per tutti i punti risulta $r = 1$. Per il punto A, si ha

$$\theta_A = \arctan\tan\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9}\,.$$

Per il punto B, tenendo conto che $x < 0$ e $y > 0$, si ha

$$\theta_B = \arctan\left(-\tan\frac{\pi}{9}\right) + \pi = -\frac{\pi}{9} + \pi = \frac{8}{9}\pi\,.$$

Per il punto C, si ha

$$\theta_C = \arctan\frac{\cos\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\,;$$

ricordando le (2.17) e il fatto che la tangente è periodica con periodo π, abbiamo

$$\frac{\cos\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = -\frac{\sin(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{2})} = -\tan\frac{11}{18}\pi = -\tan\left(-\frac{7}{18}\pi\right) = \tan\frac{7}{18}\pi\,,$$

dunque $\theta_C = \frac{7}{18}\pi$.

5. *Coordinate polari di punti del piano:*

a) È sufficiente notare che $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ e applicare le formule di addizione per il seno e il coseno, per ottenere

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}\right)\right) = \left(\cos\frac{13}{36}\pi, \sin\frac{13}{36}\pi\right)\,.$$

Osservando che $\frac{13}{36}\pi < \frac{\pi}{2}$, si ha immediatamente $r = 1$ e $\theta = \frac{13}{36}\pi$.

b) $r = 2\,, \quad \theta = -\frac{8}{9}\pi\,.$

6. I vettori $\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono ortogonali se $(\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v}_3 = 0$. Ma

$$(\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_3 + \lambda\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_3 = -3 + 2\lambda\,,$$

da cui $\lambda = \frac{3}{2}$.

7. Il vettore (x, y) è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ se $(x, y)\cdot(2, -5) = 2x - 5y = 0$. Pertanto l'insieme cercato è costituito dai vettori che giacciono sulla retta di equazione $2x - 5y = 0$. Ad esempio, l'insieme si può descrivere come $\{\lambda(5, 2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

8. Imponendo l'ortogonalità del vettore $\boldsymbol{w} = (x, y, z)$ con $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ otteniamo $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_1 = x + 2z = 0$ e $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_2 = 2x - y + 3z = 0$, da cui $x = -2z$ e $y = -z$. Ponendo $z = \lambda$, l'insieme cercato è quindi $\{\lambda(-2, -1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

9. $\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{52}\,, \qquad \|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{30}\,, \qquad \|\boldsymbol{v}_3\| = 1\,.$

10. *Angolo fra vettori:*

a) $\cos\theta = \frac{1}{2}\,;$ b) $\cos\theta = 1\,.$

11. Risulta $\|\boldsymbol{w}\| = 6$ e dunque $\boldsymbol{u} = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$. Poiché $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \frac{3}{2}$, si ha

$$\boldsymbol{v}_u = \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$
$$\boldsymbol{v}_{u^\perp} = (2, -1, 2\sqrt{2}) - \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\sqrt{2}\right).$$

12. *Forma algebrica di numeri complessi:*

a) $-1 + 8i$; b) $2 + i$; c) $-\frac{2}{5}$; d) $\frac{1}{2}i$.

13. *Forma trigonometrica e esponenziale di numeri complessi:*

a) $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$; b) $z = \cos\pi + i\sin\pi = \mathrm{e}^{i\pi}$;

c) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$; d) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3}{4}\pi}$;

e) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$; f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

14. *Modulo di numeri complessi:*

a) $\sqrt{\frac{5}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{13}{5}}$.

15. Invece di compiere la verifica diretta, moltiplichiamo il denominatore per $|\bar{z}|$ $(= 1)$ e otteniamo

$$\left|\frac{3z - i}{3 + iz}\right| = \left|\frac{3z - i}{3\bar{z} + i}\right| = \left|\frac{3z - i}{\overline{3z - i}}\right| = \frac{|3z - i|}{|\overline{3z - i}|} = 1.$$

16. *Risoluzione di equazioni:*

a) $z = 1 \pm i$.

b) Applichiamo la formula risolutiva per equazioni di secondo grado e otteniamo

$$z = \frac{-3i \pm \sqrt{-9 - 4}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{13}i}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}i.$$

c) Scrivendo $z = x + iy$, l'equazione diventa

$$(x + iy)\sqrt{x^2 + y^2} - 2x - 2iy + i = 0,$$

ovvero

$$x\sqrt{x^2 + y^2} - 2x + i\left(y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + 1\right) = 0.$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria del primo e del secondo membro, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right) = 0 \\ y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, dovrà essere $x = 0$ oppure $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Quest'ultima relazione inserita nella seconda equazione del sistema dà un risultato impossibile. Pertanto le uniche soluzioni possibili saranno

$$\begin{cases} x = 0 \\ y|y| - 2y + 1 = 0\,. \end{cases}$$

Distinguendo i due casi $y \geq 0$ e $y < 0$, otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0\,, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0\,, \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1\,, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \pm \sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono $z = i$ e $z = i(-1 - \sqrt{2})$ (in quanto $y = -1 + \sqrt{2} > 0$ non è accettabile).

d) $z = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\,;$ e) $z = \dfrac{\sqrt{7}}{2} - i\dfrac{1}{2}\,;\ z = -\dfrac{\sqrt{7}}{2} - i\dfrac{1}{2}\,.$

f) Ricordando che $|z|^2 = z\bar{z}$, l'equazione diventa

$$z^3 = z^2\bar{z}^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^2(z - \bar{z}^2) = 0\,.$$

Allora una soluzione è $z = 0$ e le altre soddisfano $z - \bar{z}^2 = 0$. Ponendo $z = x + iy$, si perviene al sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2xy + y = 0\,. \end{cases}$$

Riscrivendo la seconda equazione come $y(2x+1) = 0$, si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(x-1) = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{3}{4}\,. \end{cases}$$

In definitiva, le soluzioni sono

$$z = 0\,; \qquad z = 1\,; \qquad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

17. Poiché il polinomio è a coefficienti reali, oltre alla radice $z = 1 + i$, vi è anche la radice coniugata $\bar{z} = 1 - i$. Pertanto il polinomio è divisibile per $(z-1-i)(z-1+i) = z^2 - 2z + 2$ e si ha

$$z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 3z + 2) = (z^2 - 2z + 2)(z - 1)(z - 2)\,.$$

Le radici sono quindi

$$z = 1 + i\,, \qquad z = 1 - i\,, \qquad z = 1\,, \qquad z = 2\,.$$

18. *Potenze di numeri complessi:*

a) $z^2 = 2i\,, \qquad z^9 = -16(1+i)\,, \qquad z^{20} = -2^{10}\,.$

b) Razionalizzando i denominatori si ha

$$z = 2\,\frac{\sqrt{3}+i}{4} - i = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)\,.$$

Scrivendo il numero in forma esponenziale, si ha

$$z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}i}$$

e quindi

$$\begin{aligned} z^2 &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\,; \\ z^9 &= \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\pi i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\,, \\ z^{20} &= \mathrm{e}^{-\frac{20}{6}\pi i} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i} = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)\,. \end{aligned}$$

19. *Calcolo e rappresentazione grafica di numeri complessi:*

a) $z_0 = i\,, \qquad z_1 = -\frac{1}{2}\big(\sqrt{3}+i\big)\,, \qquad z_2 = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3}-i\big)\,.$
I numeri sono rappresentati nella Figura 8.21, a sinistra.

b) Scriviamo il numero 1 in forma esponenziale $1 = \mathrm{e}^{0\pi i}$. Allora, ricordando che $\mathrm{e}^{a+2\pi} = \mathrm{e}^{a}$, si ottiene

$$z_0 = 1\,, \quad z_1 = \mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi i}\,, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\frac{4}{5}\pi i}\,, \quad z_3 = \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}\pi i}\,, \quad z_4 = \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\pi i}\,.$$

I numeri sono rappresentati nella Figura 8.21, al centro.

c) $z_0 = \sqrt[4]{8}\mathrm{e}^{\frac{7}{8}\pi i}\,, \qquad z_1 = \sqrt[4]{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\pi i}\,.$
I numeri sono rappresentati nella Figura 8.21, a destra.

Figura 8.21. Radici cubiche di $-i$ (a sinistra), radici quinte di 1 (al centro), e radici quadrate di $2-2i$ (a destra)

20. *Dominio di funzioni:*

a) Il dominio è l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y^2\}$, ossia l'insieme di tutti i punti del piano esclusi quelli appartenenti alla parabola di equazione $x = y^2$.

b) La funzione è definita dove l'argomento della radice è ≥ 0; dunque il dominio è l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{1}{3x} \text{ se } x > 0,\ y \geq \frac{1}{3x} \text{ se } x < 0,\ y \in \mathbb{R} \text{ se } x = 0\}$$

ossia l'insieme dei punti del piano compresi tra i due rami dell'iperbole $y = \frac{1}{3x}$.

c) La funzione è definita quando $3x + y + 1 \geq 0$ e $2y - x > 0$; ossia il dominio è l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -3x - 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{x}{2}\}\,.$$

Esso è rappresentato nella Figura 8.22.

d) La funzione è definita dove l'argomento del logaritmo è > 0; pertanto il dominio è l'insieme

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + x^2 > 9\}\,,$$

ossia l'insieme dei punti del piano esterni alla sfera di centro l'origine e di raggio 3.

21. *Derivate parziali di funzioni:*

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \dfrac{3}{2\sqrt{7}}\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \dfrac{2}{\sqrt{7}}\ .$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1,-1) = \mathrm{e}^{-1}\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,-1) = 0\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1) = \mathrm{e}^{-1}\,.$

Figura 8.22. Rappresentazione grafica del dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{3x + y + 1} - \frac{1}{\sqrt{2y - x}}$

22. *Funzioni gradiente:*

a) $\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$.

b) $\nabla f(x,y) = \left(\log(2x-y) + \dfrac{2(x+y)}{2x-y}\,,\ \log(2x-y) - \dfrac{x+y}{2x-y} \right)$.

c) $\nabla f(x,y,z) = \big(\cos(x+y)\cos(y-z)\,,\ \cos(x+2y-z)\,,\ \sin(x+y)\sin(y-z) \big)$.

d) $\nabla f(x,y,z) = \big(z(x+y)^{z-1}\,,\ z(x+y)^{z-1}\,,\ (x+y)^z \log(x+y) \big)$.

23. *Derivate direzionali di funzioni:*

a) $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = -1\,;$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{1}{2}$.

9

Calcolo integrale I

Il Calcolo integrale affronta due classi di problemi ben distinti:

i) Trovare tutte le funzioni che, su un certo intervallo della retta reale, hanno come derivata una funzione ivi assegnata. Si tratta cioè di compiere l'operazione inversa della derivazione; tale operazione viene indicata con il termine **integrazione indefinita**.

ii) Definire e calcolare l'area di una regione piana delimitata superiormente e inferiormente dai grafici di funzioni assegnate su un intervallo chiuso e limitato della retta reale; in tal caso, si dice che si esegue una **integrazione definita**.

A prima vista, queste due problematiche sembrano avere ben poco in comune. Il risultato di una integrazione indefinita è, come vedremo tra poco, un insieme di infinite funzioni; invece, il risultato di una integrazione definita è un numero, che rappresenta l'area della regione piana considerata. In realtà, esiste un risultato profondo e importante, noto appunto come *Teorema fondamentale del Calcolo integrale*, che afferma che le due problematiche sono tra loro perfettamente equivalenti: se sappiamo ricostruire una funzione dalla conoscenza della sua derivata, sappiamo anche calcolare le aree delle regioni piane delimitate dal grafico della derivata e da rette parallele agli assi coordinati, e viceversa.

Nel seguito, trattiamo dapprima il problema dell'integrazione indefinita; successivamente, introduciamo il problema dell'integrazione definita. Per garantire una maggiore flessibilità didattica, presentiamo in modo indipendente tanto la costruzione dell'integrale di Cauchy quanto quella di Riemann, trattando però in modo unitario le proprietà notevoli dell'integrale definito. Stabiliamo infine il Teorema fondamentale del Calcolo integrale e ne diamo alcune applicazioni al calcolo di aree.

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I,* 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_9, © Springer-Verlag Italia 2014

9.1 Primitive e integrali indefiniti

Sia f una funzione definita in un intervallo I.

Definizione 9.1 *Ogni funzione F derivabile in I e tale che*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I,$$

dicesi una **primitiva** *di f in I (o su I).*

Non tutte le funzioni definite su un intervallo della retta reale ammettono primitive, cioè sono la derivata di un'altra funzione. Il problema di individuare tutte le funzioni che ammettono primitive su un certo intervallo, funzioni che chiameremo **integrabili** (**in senso indefinito**) sull'intervallo, è al di fuori dello scopo di questo testo. Ci limitiamo a segnalare una classe importante di funzioni integrabili, le **funzioni continue su un intervallo reale**; tale risultato sarà una conseguenza del Teorema fondamentale del Calcolo integrale, che vedremo più avanti.

Esempi 9.2

i) Data la funzione $f(x) = x$ su $\mathbb{R}$, la funzione $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ è una primitiva di f. Questa non è l'unica primitiva di f: infatti, ogni funzione della forma $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$, con c costante arbitaria, è una primitiva di f, in quanto la derivata di una costante è nulla.

ii) Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ sull'intervallo $I = (-\infty, 0)$, le funzioni $F(x) = \log|x| + c$ (con $c \in \mathbb{R}$) sono primitive di f su I. □

Come si è visto negli esempi precedenti, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ sull'intervallo I, anche ogni funzione del tipo $F(x) + c$, con c costante, lo è. È naturale chiedersi se esistano altre primitive di $f(x)$. La risposta è negativa, come mostra il seguente importante risultato.

Proposizione 9.3 *Se F e G sono due primitive di f sull'intervallo I, allora esiste una costante c tale che*

$$G(x) = F(x) + c, \qquad \forall x \in I.$$

Dimostrazione. Introduciamo la funzione ausiliaria $H(x) = G(x) - F(x)$. Derivandola, si ha

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad \forall x \in I.$$

Dunque la funzione H ha derivata nulla in ogni punto di I e quindi è costante per la Proprietà 6.26. □

Riassumendo, vale il seguente Teorema di caratterizzazione dell'insieme delle primitive di una funzione f.

Teorema 9.4 *Sia f una funzione integrabile (in senso indefinito) su I e sia F una sua primitiva. Allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni $F(x) + c$ al variare della costante c in $\mathbb{R}$.*

Tale risultato motiva la seguente definizione.

Definizione 9.5 *L'insieme di tutte le primitive di f in un intervallo reale viene indicato con il simbolo*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

(che si legge **integrale indefinito** *di f, oppure "integrale di $f(x)$ in $\mathrm{d}x$").*

Se F è una primitiva di f, avremo dunque

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c \ : \ c \in \mathbb{R}\}.}$$

Si osservi che l'integrale indefinito di f *non* rappresenta un numero, bensì un insieme di infinite funzioni. Tuttavia, per comodità di scrittura, si usa omettere le parentesi graffe di insieme, scrivendo in modo improprio ma sufficientemente chiaro

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.}$$

Esempi 9.6

i) Sia $f(x) = x^4$. Ricordando che $\mathrm{D}\,x^5 = 5x^4$, si ha immediatamente che una primitiva di f è data dalla funzione $F(x) = \frac{1}{5}x^5$. Dunque

$$\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + c.$$

ii) Sia $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Ricordando che $\mathrm{D}\,\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x}$, si ha $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ e dunque

$$\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c.$$

iii) Sia $f(x) = \sin 5x$. Ricordando che $\mathrm{D}\cos 5x = -5\sin 5x$, si ha $F(x) = -\frac{1}{5}\cos 5x$ e dunque

$$\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + c.$$

iv) Sia

$$f(x) = \sin|x| = \begin{cases} -\sin x & \text{se } x < 0\,, \\ \sin x & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Per determinare tutte le primitive di $f(x)$ su $\mathbb{R}$, procediamo nel seguente modo. Ragioniamo dapprima su ciascuno degli intervalli $I_1 = (-\infty, 0)$ e $I_2 = (0, +\infty)$ separatamente. Nell'intervallo I_1, tutte le primitive di $f(x)$ sono della forma

$$F_1(x) = \cos x + c_1 \qquad \text{con } c_1 \in \mathbb{R} \text{ arbitrario;}$$

analogamente, nell'intervallo I_2, tutte le primitive di $f(x)$ sono della forma

$$F_2(x) = -\cos x + c_2 \qquad \text{con } c_2 \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.}$$

Dunque, la generica primitiva $F(x)$ di $f(x)$ su $\mathbb{R}$ si scriverà come

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{se } x < 0, \\ F_2(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Inoltre, F dovrà essere *continua* in $x = 0$. Infatti, per definizione di primitiva, F è derivabile, e dunque continua, in ogni punto di $\mathbb{R}$. Dobbiamo quindi *raccordare* le primitive trovate, imponendo la condizione

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x).$$

Poiché le espressioni F_1 e F_2 sono continue in $x = 0$, ciò equivale a $F_1(0) = F_2(0)$, vale a dire

$$1 + c_1 = -1 + c_2.$$

Ciò stabilisce un legame tra le constanti c_1 e c_2, e permette di esplicitare una costante in funzione dell'altra (coerentemente con il fatto che ogni primitiva di una funzione dipende da *una*, e una sola, costante arbitraria). Ad esempio, possiamo porre $c_1 = c$, ottenendo conseguentemente $c_2 = 2 + c$. Concludiamo che la generica primitiva di $f(x)$ su $\mathbb{R}$ è data da

$$F(x) = \begin{cases} \cos x + c & \text{se } x < 0, \\ -\cos x + 2 + c & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

□

Dal punto di vista geometrico, il Teorema 9.4 afferma che i grafici di tutte le primitive di una funzione integrabile f si ottengono l'uno dall'altro per traslazione verticale (si veda la Figura 9.1).

Un modo comunemente usato per selezionare una particolare primitiva di f consiste nell'assegnare il suo valore y_0 in un punto x_0 fissato di I. Se conosciamo una particolare primitiva $F(x)$ di $f(x)$ in I, e se vogliamo determinare la primitiva $G(x) = F(x) + c_0$ di $f(x)$ che vale y_0 in x_0, scriveremo che

$$G(x_0) = F(x_0) + c_0 = y_0,$$

da cui ricaviamo $c_0 = y_0 - F(x_0)$ e dunque avremo

$$G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0.$$

Figura 9.1. Le primitive di una stessa funzione differiscono per una costante additiva

La tavola delle derivate delle principali funzioni elementari, quando la si legga in senso contrario, fornisce una tavola di primitive. Abbiamo ad esempio:

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & \displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & (\alpha \neq -1) \\[2ex]
\text{b)} & \displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \log|x| + c & (\text{per } x > 0 \text{ oppure } x < 0) \\[2ex]
\text{c)} & \displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c & \\[2ex]
\text{d)} & \displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c & \\[2ex]
\text{e)} & \displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c & \\[2ex]
\text{f)} & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + c & \\[2ex]
\text{g)} & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + c &
\end{array}
\tag{9.1}
$$

Esempi 9.7

i) Si voglia trovare la primitiva di $f(x) = \cos x$ che vale 5 in $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Una primitiva di $f(x)$ è $F(x) = \sin x$. Pertanto, cerchiamo $G(x)$ nella forma $G(x) = \sin x + c_0$. Imponendo $G(\frac{\pi}{2}) = 5$ otteniamo $c_0 = 4$, dunque la primitiva cercata sarà

$$G(x) = \sin x + 4.$$

ii) Si voglia ora trovare il valore in $x_1 = 3$ della primitiva di $f(x) = 6x^2 + 5x$ che si annulla in $x_0 = 1$. Una particolare primitiva di $f(x)$ è data da

$$F(x) = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2.$$

Imponendo che $G(x) = F(x) + c_0$ soddisfi $G(1) = 0$, otteniamo $c_0 = -\frac{9}{2}$, da cui

$$G(x) = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}.$$

Il suo valore in $x_1 = 3$ è $G(3) = 72$.

iii) Si consideri la funzione continua definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1, \\ (x-2)^2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Procedendo come nell'Esempio 9.6 iv), otteniamo che

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + c_1 & \text{se } x < 1, \\ \frac{1}{3}(x-2)^3 + c_2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Imponendo la continuità in $x = 1$, si ha

$$\frac{1}{2} + c_1 = -\frac{1}{3} + c_2.$$

Da tale relazione, ponendo $c_1 = c$, risulta

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + c & \text{se } x < 1, \\ \frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{5}{6} + c & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Supponiamo ora di voler determinare la primitiva di $f(x)$ che si annulla in $x_0 = 3$. Poiché $x_0 > 1$, usiamo la seconda espressione di $F(x)$ e imponiamo la condizione

$$F(3) = \frac{1}{3}(3-2)^3 + \frac{5}{6} + c = 0,$$

da cui $c = -\frac{7}{6}$. Ne segue che la primitiva cercata è

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6} & \text{se } x < 1, \\ \frac{1}{3}(x-2)^3 - \frac{1}{3} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Si noti che sarebbe stato concettualmente errato imporre l'annullamento dell'espressione $\frac{1}{2}x^2 + c$ in $x_0 = 3$, in quanto tale espressione rappresenta una primitiva di $f(x)$ *solo per* $x < 1$.

Se invece vogliamo determinare la primitiva di $f(x)$ che si annulla in $x_0 = 1$, possiamo imporre l'annullamento dell'una o dell'altra espressione di $F(x)$, in quanto esse coincidono in tale punto. La primitiva cercata è

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & \text{se } x < 1, \\ \frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{1}{3} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

□

9.2 Regole di integrazione indefinita

A partire dagli integrali indefiniti delle funzioni elementari, è possibile ottenere gli integrali indefiniti di altre funzioni, usando le regole di integrazione qui sotto riportate.

Teorema 9.8 (**Proprietà di linearità dell'integrale**) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni integrabili su un intervallo I. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile su I e si ha*

$$\int \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.2}$$

Dimostrazione. Sia $F(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$ e $G(x)$ una qualunque primitiva di $g(x)$. Ricordando la proprietà di linearità della derivata, si ha

$$\Big(\alpha F(x) + \beta G(x)\Big)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \forall x \in I.$$

Ciò significa che la funzione $\alpha F(x) + \beta G(x)$ è una primitiva di $\alpha f(x) + \beta g(x)$ su I, il che, ricordando la definizione di integrale indefinito, equivale alla (9.2). □

La proprietà permette di integrare termine a termine una somma algebrica di funzioni, portando fuori dal segno di integrale le costanti moltiplicative.

Esempi 9.9

i) Si voglia integrare il polinomio $4x^2 + 3x - 5$. Ricordando la (9.1) a), si ha

$$\begin{aligned}\int (4x^2 + 3x - 5)\,\mathrm{d}x &= 4\int x^2\,\mathrm{d}x + 3\int x\,\mathrm{d}x - 5\int \mathrm{d}x \\ &= 4\left(\frac{1}{3}x^3 + c_1\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2 + c_2\right) - 5(x + c_3) \\ &= \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + c.\end{aligned}$$

Si noti che le varie costanti arbitrarie c_1, c_2, c_3 associate ai singoli integrali indefiniti sono state inglobate in un'unica costante arbitraria c.

ii) Si consideri ora la funzione $f(x) = \cos^2 x$. Si noti che

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

e che $\mathrm{D}\sin 2x = 2\cos 2x$; dunque,

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c\,.$$

Analogamente, si trova

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c\,.$$ □

Teorema 9.10 (**Regola di integrazione per parti**) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili su un intervallo I. Se la funzione $f'(x)g(x)$ è integrabile su I, allora lo è anche la funzione $f(x)g'(x)$ e si ha*

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.3}$$

Dimostrazione. Sia $H(x)$ una qualunque primitiva della funzione $f'(x)g(x)$ su I. Ricordando la formula (6.4) di derivazione di un prodotto, abbiamo

$$\begin{aligned}[f(x)g(x) - H(x)]' &= \big(f(x)g(x)\big)' - H'(x)\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\\ &= f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Pertanto, la funzione $f(x)g(x)-H(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)g'(x)$, il che è precisamente quanto espresso dalla formula (9.3). □

In pratica, se si deve integrare il prodotto di due funzioni, si indentificherà uno dei due fattori con la funzione $f(x)$ e l'altro con la funzione $g'(x)$; successivamente, si risalirà alla funzione $g(x)$, determinando una primitiva di $g'(x)$; infine, si troveranno le primitive di $f'(x)g(x)$ e si applicherà la (9.3).

Esempi 9.11

i) Si voglia calcolare

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Si ponga $f(x) = x$ e $g'(x) = \mathrm{e}^x$. Abbiamo $f'(x) = 1$, mentre come funzione $g(x)$ è conveniente scegliere la funzione e^x stessa. Usando la (9.3) si ha quindi

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x + c) = (x-1)\mathrm{e}^x + c.$$

Nell'ultimo passaggio si è sostituito alla costante arbitraria $-c$ la costante c, altrettanto arbitraria.
Si noti che se avessimo fatto la scelta $f(x) = \mathrm{e}^x$ e $g'(x) = x$ (cioè $f'(x) = \mathrm{e}^x$ e $g(x) = \frac{1}{2}x^2$), saremmo pervenuti alla formula

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

che non ci avrebbe permesso di calcolare l'integrale cercato.

ii) Si voglia ora calcolare

$$\int \log x\,\mathrm{d}x.$$

Conviene porre $f(x) = \log x$ e $g'(x) = 1$. In tal modo si ha $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$.

Pertanto, con la stessa avvertenza sulla arbitrarietà della costante di integrazione, si ottiene

$$\begin{aligned}\int \log x \,\mathrm{d}x &= x\log x - \int \frac{1}{x}\, x \,\mathrm{d}x = x\log x - \int \mathrm{d}x \\ &= x\log x - (x+c) = x(\log x - 1) + c.\end{aligned}$$

iii) Si voglia calcolare

$$S = \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Poniamo $f(x) = \mathrm{e}^x$ e $g'(x) = \sin x$. Abbiamo $f'(x) = \mathrm{e}^x$ e $g(x) = -\cos x$. Pertanto

$$S = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Integriamo nuovamente per parti ancora con $f(x) = \mathrm{e}^x$ mentre ora $g'(x) = \cos x$. Si ha quindi $f'(x) = \mathrm{e}^x$ e $g(x) = \sin x$, da cui

$$S = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) - S.$$

Ciò significa che ogni primitiva $F(x)$ di $\mathrm{e}^x \sin x$ si scrive come $F(x) = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) - G(x)$, dove $G(x)$ è ancora una primitiva di $\mathrm{e}^x \sin x$. Dunque, ricordando il Teorema 9.4 di caratterizzazione delle primitive, otteniamo

$$2S = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c$$

ovvero

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c.$$

□

Teorema 9.12 (**Regola di integrazione per sostituzione**) *Sia $f(y)$ una funzione integrabile su un intervallo J e sia $F(y)$ una sua primitiva. Sia poi $\varphi(x)$ una funzione derivabile, definita su un intervallo I a valori nell'intervallo J. Allora la funzione $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ è integrabile sull'intervallo I e si ha*

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(\varphi(x)\big) + c; \tag{9.4}$$

tale formula viene sovente scritta, in modo meno preciso ma più sintetico, come

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{9.5}$$

Dimostrazione. È sufficiente ricordare la formula (6.7) di derivazione di una funzione composta, che fornisce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\big(\varphi(x)\big) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\big(\varphi(x)\big)\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x).$$

Dunque, $F\big(\varphi(x)\big)$ è una primitiva della funzione $f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$, il che equivale alla (9.4). □

Insistiamo sul fatto che il significato preciso della (9.5) è dato dalla (9.4): per calcolare l'integrale a primo membro, bisogna integrare la funzione f rispetto alla variabile y e successivamente sostituire a y l'espressione $\varphi(x)$, in modo che anche il secondo membro sia funzione della variabile x. Si noti che, a livello mnemonico, la formula (9.5) può essere ottenuta formalmente nel seguente modo: posto $y = \varphi(x)$, derivando si ha $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$ da cui, trattando la derivata come un quoziente secondo la notazione di Leibniz, si ottiene $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\mathrm{d}x$; effettuando le sostituzioni in uno dei due integrali, si ottiene l'altro.

Esempi 9.13

i) Si voglia calcolare

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poniamo $y = \varphi(x) = x^2$, da cui $\varphi'(x) = 2x$. Allora

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y} + c.$$

Ritornando alla variabile x, si ottiene quindi

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + c.$$

ii) Si voglia ora calcolare

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x.$$

Ricordiamo che $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ e che $(\cos x)' = -\sin x$. Pertanto, poniamo $y = \varphi(x) = \cos x$ e deduciamo che

$$\begin{aligned}\int \tan x\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{\cos x}(\cos x)'\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\ &= -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c.\end{aligned}$$

iii) Si consideri

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ricordando l'espressione (6.18) della derivata della funzione settore seno iperbolico, si ha immediatamente

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{sett}\sinh x + c\,.$$

In alternativa, l'integrale può essere calcolato con la sostituzione $y = \varphi(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, da cui

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$$

cioè $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}y$. In questo modo si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\log|y| + c = -\log(\sqrt{1+x^2}-x) + c\,,$$

ove si è tolto il valore assoluto nell'argomento del logaritmo essendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2}-x > 0$.
Le due espressioni trovate coincidono, in quanto

$$-\log(\sqrt{1+x^2}-x) = \log(\sqrt{1+x^2}+x) = \operatorname{sett}\sinh x\,.$$

iv) L'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

può essere calcolato come nell'esempio precedente. Infatti, eseguendo la sostituzione $y = \varphi(x) = \sqrt{x^2-1}-x$, si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \log|\sqrt{x^2-1}+x| + c\,.$$

v) L'integrale

$$S = \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

si calcola utilizzando l'esempio iii) precedente e una relazione circolare. Precisamente, integriamo per parti ponendo $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ e $g'(x) = 1$. In tal modo abbiamo $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e $g(x) = x$ e dunque

$$\begin{aligned} S &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+x^2} - S + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$2S = x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} + \log(\sqrt{1+x^2}+x) + c$$

e, in definitiva,

$$S = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2}+x) + c\,.$$

Lo stesso procedimento permette di calcolare $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

vi) Si voglia ora calcolare

$$S = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

È possibile procedere come nell'esempio precedente integrando per parti e ricordando che $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$. In effetti, posto $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g'(x) = 1$, si ha $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ e $g(x) = x$ da cui

$$S = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - S + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dunque

$$2S = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

e

$$S = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c\,.$$

Un procedimento alternativo consiste nel porre $y = \arcsin x$ ovvero $x = \sin y$, da cui si ha $\mathrm{d}x = \cos y\,\mathrm{d}y$ e $\sqrt{1-x^2} = \cos y$, ottenendo

$$\begin{aligned} S &= \int \cos^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int (\cos 2y + 1)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4}\sin 2y + \frac{1}{2}y + c = \frac{1}{2}\sin y\cos y + \frac{1}{2}y + c \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c\,. \end{aligned}$$

vii) Infine, si consideri

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Poniamo $y = \mathrm{e}^x$ da cui $\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, cioè $\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\mathrm{d}y$. Dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{y + \frac{1}{y}}\,\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\ &= \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \arctan y + c = \arctan \mathrm{e}^x + c. \end{aligned}$$

□

L'esempio ii) precedente è un caso particolare della seguente utile formula, che si ottiene dalla (9.5) con la scelta $f(y) = \frac{1}{y}$:

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \log|\varphi(x)| + c.} \tag{9.6}$$

In tutti gli esempi visti finora, abbiamo considerato funzioni f ottenute combinando un numero finito di funzioni elementari attraverso le operazioni algebriche e il prodotto di composizione; delle loro primitive F, abbiamo dato espressioni analitiche della stessa natura, ossia combinazioni di un certo numero di funzioni elementari. Quando ciò è possibile, diciamo che la funzione f è **integrabile elementarmente**. Purtroppo, non tutte le funzioni che sono combinazioni finite di funzioni elementari sono integrabili elementarmente. Ad esempio, la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ ha notevole importanza nel Calcolo delle Probabilità; ebbene, si dimostra che le sue primitive (che certamente esistono, in quanto f è continua su

$\mathbb{R}$) non possono essere espresse come combinazione finita di funzioni elementari. Analogo risultato vale per la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Il problema della ricerca di un'espressione esplicita delle primitive di una funzione data è dunque tutt'altro che banale. Una classe notevole di funzioni integrabili elementarmente è costituita dalle *funzioni razionali*.

9.2.1 Integrazione di funzioni razionali

In questo paragrafo, consideriamo la generica funzione razionale

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi di grado rispettivamente n ed m ($m \geq 1$), e facciamo vedere che essa ammette primitive esprimibili in termini di funzioni razionali, logaritmi e arcotangenti.

Notiamo innanzitutto che se $n \geq m$, possiamo dividere il polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x)$, ottenendo

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x),$$

con $D(x)$ polinomio di grado $n-m$ e $R(x)$ polinomio di grado $\leq m-1$. Sostituendo a numeratore, abbiamo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int D(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

In questo modo, il problema è ridotto al calcolo dell'integrale di una funzione razionale $g(x) = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, in cui il grado del polinomio a numeratore è minore del grado del polinomio a denominatore.

Iniziamo considerando alcuni casi particolari che, pur essendo semplici, sono molto significativi, in quanto ad essi viene ricondotta l'integrazione della più generica funzione $g(x)$.

i) Sia $g(x) = \dfrac{1}{x-\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$; usando la (9.1) b) otteniamo

$$\boxed{\int \frac{1}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = \log|x-\alpha| + c.} \tag{9.7}$$

ii) Sia $g(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)^r}$, con $r > 1$; usando la (9.1) a) otteniamo

$$\boxed{\int \frac{1}{(x-\alpha)^r}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-r}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{r-1}} + c.} \tag{9.8}$$

iii) Sia $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2px + q}$, con $p^2 - q < 0$; notiamo che in tali ipotesi il polinomio a denominatore non ha radici reali ed è sempre > 0. Con semplici passaggi algebrici, ponendo

$$s = \sqrt{q - p^2} > 0,$$

abbiamo

$$x^2 + 2px + q = x^2 + 2px + p^2 + (q - p^2) = (x + p)^2 + s^2 = s^2 \left[1 + \left(\frac{x + p}{s} \right)^2 \right].$$

Eseguendo la sostituzione $y = \varphi(x) = \dfrac{x + p}{s}$, otteniamo

$$\int \frac{1}{x^2 + 2px + q} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s^2} \int \frac{1}{1 + y^2} \, s \, \mathrm{d}y$$

e dunque, ricordando la (9.1) f), concludiamo che

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2 + 2px + q} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s} \arctan \frac{x + p}{s} + c.} \tag{9.9}$$

iv) Sia $g(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + 2px + q}$, ancora con $p^2 - q < 0$. Grazie all'identità

$$ax + b = ax + ap + b - ap = \frac{a}{2}(2x + 2p) + (b - ap)$$

abbiamo

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + 2px + q} \, \mathrm{d}x = \frac{a}{2} \int \frac{2x + 2p}{x^2 + 2px + q} \, \mathrm{d}x + (b - ap) \int \frac{1}{x^2 + 2px + q} \, \mathrm{d}x.$$

Usando la (9.6) con $\varphi(x) = x^2 + 2px + q$ e la (9.9), otteniamo

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + 2px + q} \, \mathrm{d}x = \frac{a}{2} \log(x^2 + 2px + q) + \frac{b - ap}{s} \arctan \frac{x + p}{s} + c. \tag{9.10}$$

v) Sia $g(x) = \dfrac{ax + b}{(x^2 + 2px + q)^r}$, con $p^2 - q < 0$ ed $r > 1$. Usando la regola di integrazione per parti nel calcolo dell'integrale

$$\int \frac{1}{(x^2 + 2px + q)^{r-1}} \, \mathrm{d}x$$

e la regola di integrazione per sostituzione con $\varphi(x) = x^2 + 2px + q$, si giunge ad esprimere l'integrale di g come somma di funzioni note e dell'integrale di una funzione analoga alla g, in cui r è sostituito da $r - 1$. In questo modo, partendo dal caso $r = 1$ già trattato in iv), si calcola l'integrale di f nel caso $r = 2$, poi $r = 3$, e così via. I dettagli sono lasciati al lettore volenteroso.

Esempi 9.14

Si ha

$$\int \frac{1}{2x-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log|x-2| + c,$$

$$\int \frac{1}{(3x+5)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3(3x+5)} + c,$$

$$\int \frac{4x-5}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x-1)^2+9}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\log(x^2-2x+10) - \frac{1}{3}\arctan\frac{x-1}{3} + c.$$

□

Ritorniamo al problema dell'integrazione della generica funzione razionale $g(x) = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$. Per ricondurci ai casi particolari sopra considerati, è necessario decomporre il denominatore nel prodotto di fattori elementari del tipo

$$(x-\alpha)^r \qquad \text{oppure} \qquad (x^2+2px+q)^s$$

con $p^2 - q < 0$. L'esistenza di una tale decomposizione è garantita dal seguente teorema, che è una forma del cosiddetto *Teorema fondamentale dell'Algebra*.

Teorema 9.15 *Ogni polinomio $Q(x)$ di grado m a coefficienti reali si scrive in modo unico come*

$$Q(x) = d(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_h)^{r_h}(x^2+2p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+2p_kx+q_k)^{s_k}, \quad (9.11)$$

con d, α_i, p_j, q_j numeri reali, e con r_i, s_j interi tali che

$$r_1 + \cdots + r_h + 2s_1 + \cdots + 2s_k = m\,.$$

I numeri α_i, distinti tra loro, sono le radici reali del polinomio, ciascuna con molteplicità r_i. Ogni fattore $x^2+2p_jx+q_j$ è distinto dagli altri ed irriducibile in $\mathbb{R}$, cioè tale che $p_j^2 - q_j < 0$; ad esso corrispondono due radici complesse (coniugate) $\beta_{j,\pm}$, che hanno molteplicità s_j.

È possibile dimostrare che la decomposizione (9.11) del polinomio $Q(x)$ permette di scrivere il quoziente $g(x)$ nella forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{d}\left[F_1(x) + \cdots + F_h(x) + \bar{F}_1(x) + \cdots + \bar{F}_k(x)\right], \qquad (9.12)$$

in cui ogni $F_i(x)$ è del tipo

$$F_i(x) = \frac{A_{i1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ir_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}},$$

mentre ogni $\bar{F}_j(x)$ è del tipo

$$\bar{F}_j(x) = \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + 2p_jx + q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + 2p_jx + q_j)^2} + \cdots + \frac{B_{j\bar{r}_j}x + C_{j\bar{r}_j}}{(x^2 + 2p_jx + q_j)^{s_j}},$$

per opportune costanti $A_{i\ell}, B_{j\mu}, C_{j\mu}$. Notiamo che il numero di tali costanti è $r_1 + \cdots r_h + 2s_1 + \cdots + 2s_k = m$.

Per determinare il valore delle costanti, scriviamo l'espressione a secondo membro della (9.12) in forma di unica frazione, il cui denominatore comune è ovviamente $Q(x)$. Il numeratore $\mathcal{R}(x)$ è un polinomio di grado $\leq m-1$, che deve coincidere con $R(x)$; i suoi coefficienti sono combinazioni delle costanti incognite. Ricordiamo ora un altro risultato di Algebra, noto come Principio di identità dei polinomi.

Teorema 9.16 *Due polinomi di grado $m-1$ coincidono*

a) se e solo se hanno ordinatamente uguali i coefficienti di ciascuna potenza della variabile indipendente;

oppure

b) se e solo se assumono valori uguali in m punti distinti.

Osserviamo che la prima equivalenza può essere facilmente dedotta dalla Proposizione 7.5.

Per determinare le m incognite $A_{i\ell}, B_{j\mu}, C_{j\mu}$, possiamo quindi o uguagliare i coefficienti di ciascuna potenza di x nei polinomi $\mathcal{R}(x)$ e $R(x)$, oppure scegliere in modo oculato m valori di x in cui far coincidere i due polinomi. Nel secondo caso, conviene sempre considerare gli zeri reali di $Q(x)$ e, qualora questi fossero in numero $< m$, il punto $x = 0$.

Una volta determinati i valori di tali costanti, possiamo integrare termine a termine l'espressione che compare a secondo membro della (9.12). In tal modo, siamo ricondotti ai casi i)-v) discussi all'inizio del Paragrafo.

Illustriamo la procedura ora descritta attraverso alcuni esempi.

Esempi 9.17

i) Si voglia integrare la funzione

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 7}{x^2 + x - 2}.$$

Poiché il numeratore è di grado maggiore del denominatore, eseguiamo la divisione, ottenendo

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{x + 5}{x^2 + x - 2}.$$

Il polinomio a denominatore si fattorizza come $Q(x) = (x-1)(x+2)$. Dunque cerchiamo costanti $A_1 = A_{11}$ e $A_2 = A_{21}$ tali che

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2},$$

vale a dire

$$x+5 = A_1(x+2) + A_2(x-1) \tag{9.13}$$

ossia

$$x+5 = (A_1+A_2)x + (2A_1 - A_2)\,. \tag{9.14}$$

Uguagliando i coefficienti di x nella (9.14), otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ 2A_1 - A_2 = 5, \end{cases}$$

che ammette come soluzione $A_1 = 2$ e $A_2 = -1$. In alternativa, possiamo calcolare la (9.13) nei due zeri $x = 1$ e $x = -2$ di $Q(x)$, ottenendo le relazioni $6 = 3A_1$ e $3 = -3A_2$ dalle quali si ricava immediatamente $A_1 = 2$ e $A_2 = -1$. In conclusione, abbiamo

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int (2x-1)\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 - x + 2\log|x-1| - \log|x+2| + c. \end{aligned}$$

ii) Si voglia ora integrare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}.$$

Il denominatore si fattorizza come $Q(x) = x(x-1)^2$. Dunque cerchiamo costanti $A_1 = A_{11}$, A_{21} e A_{22} tali che

$$\frac{x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_{21}}{x-1} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2},$$

vale a dire

$$x^2 - 3x + 3 = A_1(x-1)^2 + A_{21}x(x-1) + A_{22}x\,.$$

Per $x = 0$ si ricava $A_1 = 3$, per $x = 1$ si ottiene $A_{22} = 1$. Per determinare A_{21} si può scegliere arbitrariamente un valore di $x \neq 0, 1$. Ad esempio, per $x = -1$ si ha $7 = 12 + 2A_{21} - 1$ da cui $A_{21} = -2$. In conclusione, abbiamo

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\log|x| - 2\log|x-1| - \frac{1}{x-1} + c. \end{aligned}$$

iii) Si voglia infine integrare la funzione

$$f(x) = \frac{3x^2+x-4}{x^3+5x^2+9x+5}.$$

Il denominatore si annulla in $x = -1$ (perché la somma dei coefficienti di grado dispari uguaglia quella di grado pari). Pertanto, usando la regola di Ruffini, il denominatore si fattorizza come $Q(x) = (x+1)(x^2+4x+5)$. Dunque cerchiamo costanti $A = A_{11}$, $B = B_{11}$ e $C = C_{11}$ tali che

$$\frac{3x^2+x-4}{x^3+5x^2+9x+5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5},$$

vale a dire

$$3x^2+x-4 = A(x^2+4x+5) + (Bx+C)(x+1)\,.$$

Ponendo $x=-1$ e $x=0$ si ottengono le costanti $A=-1$ e $C=1$. Infine, ponendo ad esempio $x=1$ si ricava $B=4$. In conclusione, abbiamo

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4x+1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x - 7\int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\log|x+1| + 2\log(x^2+4x+5) - 7\arctan(x+2) + c. \qquad \square\end{aligned}$$

Concludiamo il paragrafo osservando che molte funzioni $f(x)$, che non sono razionali nella variabile x, possono essere integrate mediante una opportuna sostituzione $t=\varphi(x)$, che conduce all'integrale di una funzione razionale nella nuova variabile t. Casi notevoli sono:

i) f è funzione razionale di $\sqrt[p]{x-a}$ per un certo p intero e a reale. In tal caso si pone

$$t=\sqrt[p]{x-a}, \qquad \text{da cui} \quad x=a+t^p \quad \text{e} \quad \mathrm{d}x = pt^{p-1}\mathrm{d}t.$$

ii) f è funzione razionale di e^{ax} per un certo $a\neq 0$ reale. In tal caso si pone

$$t=\mathrm{e}^{ax}, \qquad \text{da cui} \quad x=\frac{1}{a}\log t \quad \text{e} \quad \mathrm{d}x=\frac{1}{at}\,\mathrm{d}t.$$

iii) f è funzione razionale di $\sin x$ e/o di $\cos x$. In tal caso si può porre

$$t=\tan\frac{x}{2}$$

e fare ricorso alle identità trigonometriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \tag{9.15}$$

inoltre si ha $x=2\arctan t$, da cui

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{9.16}$$

iv) Se però f è funzione razionale degli argomenti $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan x$, è più conveniente porre $t=\tan x$ e usare le identità trigonometriche

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \tag{9.17}$$

inoltre $x=\arctan t$, da cui

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{9.18}$$

Presentiamo nel seguito alcuni esempi che illustrano queste sostituzioni. Ci limitiamo ad ottenere di volta in volta una funzione razionale della nuova variabile t, lasciando allo studente il compito di completare l'integrazione e di ritornare alla variabile originaria x.

Esempi 9.18

i) Si consideri dapprima l'integrale

$$S = \int \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Poniamo $t = \sqrt{x-1}$, da cui $x = 1+t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Sostituendo, otteniamo

$$S = 2\int \frac{(1+t^2)t}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

ii) Si consideri ora l'integrale

$$S = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+2}\,\mathrm{d}x.$$

Poniamo $t = \mathrm{e}^x$ da cui $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Sostituendo, otteniamo

$$S = \int \frac{1}{t^2(t^2-2t+2)}\,\mathrm{d}t.$$

iii) Si consideri poi l'integrale

$$S = \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Usando le formule (9.15) e (9.16), otteniamo

$$S = 4\int \frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

iv) Si consideri infine l'integrale

$$S = \int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Usando le formule (9.17) e (9.18), abbiamo

$$S = \int \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

□

9.3 Integrali definiti

Consideriamo una funzione f definita su un intervallo chiuso e limitato $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ e ivi limitata.

Definiamo il **trapezoide di f sull'intervallo** $[a,b]$, che indichiamo con $\mathcal{T}(f;a,b)$, come la regione piana delimitata dall'intervallo $[a,b]$, dalle parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi dell'intervallo, e dal grafico di f (si veda la Figura 9.2). In formule,

Figura 9.2. Trapezoide di f sull'intervallo $[a, b]$

$$\mathcal{T}(f; a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x) \text{ oppure } f(x) \leq y \leq 0\}$$

(nella definizione, la scelta del vincolo su y dipende ovviamente dal segno di $f(x)$).

Sotto opportune ipotesi su f, è possibile associare al trapezoide di f su $[a, b]$ un numero detto 'integrale definito di f su $[a, b]$'. Nel caso in cui f sia positiva tale numero rappresenta l'area del trapezoide. In particolare, qualora il trapezoide di f sia una figura elementare (ad esempio un rettangolo, un triangolo, un trapezio, etc.) esso fornisce la classica espressione dell'area di tale figura.

Esistono vari modi per costruire l'integrale definito di una funzione; essi richiedono ipotesi diverse sulla funzione da integrare. Illustriamo nel seguito due diverse costruzioni: la prima, comunemente associata al nome di Cauchy, opera su funzioni continue o continue a tratti su $[a, b]$; la seconda, associata al nome di Riemann, porta alla definizione di una classe più ampia di funzioni integrabili[1].

Esplicitiamo la definizione di funzione continua a tratti, che sarà usata nel seguito.

Definizione 9.19 *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dicesi* **continua a tratti** *se è continua in ogni punto dell'intervallo tranne che in un numero finito di punti, in cui si ha una discontinuità eliminabile o di salto.*

9.4 Integrale secondo Cauchy

Supponiamo dapprima che f sia continua su $[a, b]$; successivamente, prenderemo in considerazione una situazione appena più generale. Per arrivare alla definizione

[1] Un'ulteriore costruzione, riferita al nome di Lebesgue, conduce ad una differente classe di funzioni integrabili, classe che risulta essere quella più naturale in molte applicazioni della Matematica moderna. La definizione dell'integrale di Lebesgue esula tuttavia dagli scopi del presente testo.

del numero che ci interessa, costruiamo una successione di approssimazioni sempre più accurate del trapezoide di f e poi facciamo ricorso a un procedimento di limite. Vediamo i dettagli.

Sia n un qualunque intero > 0. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, mediante i punti di suddivisione $x_k = a + k\Delta x$ per $k = 0, 1, \ldots, n$. Si noti che tali punti sono ordinati in modo crescente, avendosi precisamente $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Per $k = 1, \ldots, n$, indichiamo con I_k l'intervallo chiuso e limitato $[x_{k-1}, x_k]$. Poiché la funzione f è per ipotesi continua su $[a, b]$, lo sarà in particolare su ogni I_k; dunque, per il Teorema di Weierstrass (Teorema 4.31), f assumerà valore minimo e valore massimo su I_k. Poniamo quindi

$$m_k = \min_{x \in I_k} f(x), \qquad M_k = \max_{x \in I_k} f(x).$$

Definiamo ora le quantità

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x \qquad \text{e} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x,}$$

che chiameremo rispettivamente *somma inferiore* e *somma superiore* di f su $[a, b]$, relative alla suddivisione dell'intervallo in n parti. Notiamo che, essendo per definizione $m_k \leq M_k$ e $\Delta x > 0$, si ha sempre $s_n \leq S_n$.

L'interpretazione geometrica di tali somme è immediata nel caso in cui f sia positiva su $[a, b]$ (si veda la Figura 9.3). La quantità $m_k \Delta x$ rappresenta l'area del rettangolo $r_k = I_k \times [0, m_k]$, che è contenuto nel trapezoide di f relativo all'intervallo I_k. Pertanto, s_n rappresenta l'area della regione piana unione dei rettangoli r_k; tale regione approssima per difetto il trapezoide di f su $[a, b]$. In modo del tutto simile, S_n rappresenta l'area della regione piana unione dei rettangoli $R_k = I_k \times [0, M_k]$, che costituisce un'approssimazione per eccesso del trapezoide di f su $[a, b]$.

Usando proprietà delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, è possibile dimostrare il seguente risultato (si veda l'Appendice A.5.1, pag. 483).

Figura 9.3. Somme inferiori (a destra) e somme superiori (a sinistra) di f sull'intervallo $[a, b]$

Teorema 9.20 *Le successioni* $\{s_n\}$ *e* $\{S_n\}$ *sono entrambe convergenti, e convergono allo stesso limite.*

Ciò giustifica la seguente

Definizione 9.21 *Chiamiamo* **integrale definito di** f **su** $[a,b]$ *il numero*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

(*che leggiamo* integrale tra a e b di $f(x)$ in $\mathrm{d}x$ *o più semplicemente* integrale tra a e b di f).

Esempi 9.22

i) Sia f costante su $[a,b]$. Detto c il suo valore, si ha $m_k = M_k = c$ per ogni k, dunque

$$s_n = S_n = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x = c(b-a)$$

qualunque sia n. Pertanto, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.

ii) Consideriamo la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $[0,1]$. Il suo trapezoide $\mathcal{T}(x;0,1)$ è il triangolo rettangolo isoscele di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (1,1)$, la cui area è $\frac{1}{2}$. Verifichiamo che l'integrale definito di f su $[0,1]$ fornisce lo stesso valore. Sia $n > 1$ fissato. Abbiamo $\Delta x = \frac{1}{n}$ e, per $k = 0,\dots,n$, $x_k = \frac{k}{n}$. Inoltre, essendo f crescente, abbiamo $m_k = x_{k-1}$ e $M_k = x_k$. Pertanto,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}\Delta x = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1), \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta x = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

La quantità $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ rappresenta la somma dei numeri interi da 1 a n; essa vale $\frac{n(n+1)}{2}$ (si ricordi la (3.2)). Analogamente, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)$ rappresenta la somma dei numeri interi da 0 (o, che è lo stesso, da 1) a $n-1$; pertanto, cambiando n in $n-1$ nell'espressione precedente, essa vale $\frac{(n-1)n}{2}$. Dunque,

$$s_n = \frac{n(n-1)}{2n^2}, \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, entrambe le successioni tendono al valore $\frac{1}{2}$. □

Come si vede, anche per una funzione molto semplice quale $f(x) = x$, il calcolo dell'integrale definito in base alla definizione è tutt'altro che agevole. Sorge quindi l'esigenza di dotarsi di efficienti strumenti di calcolo dell'integrale definito di una funzione continua. A tale problema si darà risposta nel § 9.8.

Introduciamo ora una semplice estensione del concetto di integrale definito. A tale scopo, osserviamo che se f è una funzione continua su $[a, b]$ e se x^* è un punto interno a tale intervallo, è possibile dimostrare che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x^*} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x^*}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questa formula, il cui significato geometrico è ovvio, suggerisce come estendere la definizione di integrale definito al caso in cui la funzione f sia continua a tratti sull'intervallo $[a, b]$. Indichiamo con $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ i punti di discontinuità interni e gli estremi dell'intervallo (che possono essere anch'essi punti di discontinuità di f). Su ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, introduciamo la funzione f_i che coincide con f nei punti interni e la prolunga per continuità agli estremi:

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_{i-1}^+} f(x), & \text{per } x = x_{i-1}, \\ f(x), & \text{per } x_{i-1} < x < x_i, \\ \lim\limits_{x \to x_i^-} f(x), & \text{per } x = x_i. \end{cases}$$

Poniamo allora, per definizione,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Si osservi che se f è continua su $[a, b]$, tale definizione coincide con la Definizione 9.21, in quanto in tal caso si ha $m = 1$ e la funzione f_1 coincide con f.

Inoltre, come conseguenza immediata della definizione precedente, è facile convincersi che se modifichiamo il valore di una funzione continua (o continua a tratti) in un numero finito di punti dell'intervallo, il suo integrale definito non cambia.

Lo studio delle proprietà dell'integrale qui definito prosegue nel § 9.6.

9.5 Integrale secondo Riemann

Nel seguito supponiamo che f sia una funzione limitata sull'intervallo $[a, b]$. Definiamo dapprima l'integrale per funzioni elementari (costanti a tratti). Successivamente, l'integrale di una funzione più generale sarà costruito a partire da quello delle funzioni elementari utilizzando i concetti di estremo inferiore e superiore.

Figura 9.4. Grafico di una funzione a scala sull'intervallo $[a, b]$

Consideriamo $n + 1$ punti di $[a, b]$ non necessariamente equispaziati e tali che

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Essi inducono una *partizione o suddivisione* dell'intervallo $[a, b]$ in sottointervalli $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Se almeno uno degli intervalli I_k viene ulteriormente suddiviso, la nuova partizione viene detta *suddivisione più fine* oppure *raffinamento* della partizione iniziale. Le funzione elementari, alla base della nostra costruzione, sono le funzioni costanti a tratti associate a una partizione dell'intervallo $[a, b]$ (vedi la Figura 9.4). Precisamente, diamo la seguente definizione.

Definizione 9.23 *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice* **funzione a scala** *se esistono una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ indotta da punti $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ e costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tali che*

$$f(x) = c_k\,, \qquad \forall x \in (x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Diremo che una suddivisione è **adattata** ad f se f è costante in ogni intervallo (x_{k-1}, x_k) della suddivisione. Osserviamo che se una suddivisione è adattata ad f ogni suo raffinamento lo è ancora. In particolare è utile notare che se f e g sono due funzioni a scala su $[a, b]$ è sempre possibile costruire una suddivisione adattata ad entrambe. Infatti, se $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sono i punti di una suddivisione adattata a f e $\{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$ sono quelli di una suddivisione adattata a g, la suddivisione associata all'insieme unione è adattata sia alla funzione f sia alla funzione g.

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{S}([a, b])$ l'insieme delle funzioni a scala su $[a, b]$.

Definizione 9.24 *Sia $f \in \mathcal{S}([a, b])$ e siano $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i punti di una suddivisione ad essa adattata. Sia c_k il valore costante di f sull'intervallo (x_{k-1}, x_k). Si dice* **integrale definito** *di f su $I = [a, b]$ il numero*

$$\int_I f = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Figura 9.5. Trapezoide di una funzione a scala positiva sull'intervallo $[a, b]$

Notiamo innanzitutto che

i) la definizione dell'integrale è indipendente dalla partizione adattata ad f. In particolare, se f assume il valore costante c su $[a, b]$, si ha $\displaystyle\int_I f = c(b - a)$;

ii) se modifichiamo il valore della funzione f in un numero finito di punti, l'integrale non cambia; in particolare l'integrale non dipende dai valori assunti dalla funzione nei suoi eventuali punti di discontinuità.

Osserviamo che nel caso in cui f sia positiva su $[a, b]$, il numero $\int_I f$ rappresenta precisamente l'area del trapezoide di f; infatti esso è la somma delle aree dei rettangoli di base $x_k - x_{k-1}$ e altezza c_k in cui si suddivide il trapezoide (si veda la Figura 9.5).

Per il prosieguo della costruzione sarà importante il seguente risultato.

Proprietà 9.25 *Siano $g, h \in \mathcal{S}([a, b])$ tali che $g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Allora*

$$\int_I g \leq \int_I h\,.$$

Dimostrazione. Siano $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i punti associati ad una suddivisione adattata a entrambe le funzioni; abbiamo già osservato che tale suddivisione esiste. Detti c_k e d_k i valori costanti assunti dalle funzioni nell'intervallo (x_{k-1}, x_k), si ha, per ipotesi, $c_k \leq d_k$, per $k = 1, \ldots, n$. Pertanto

$$\int_I g = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} d_k(x_k - x_{k-1}) = \int_I h\,. \qquad \square$$

Consideriamo ora una generica funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; poniamo

$$s_f = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad i_f = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Introduciamo due insiemi di funzioni a scala formati rispettivamente dalle funzioni che maggiorano e da quelle che minorano la funzione f. Precisamente, definiamo l'insieme

$$\boxed{\mathcal{S}_f^+ = \Big\{ h \in \mathcal{S}([a,b]) : f(x) \le h(x),\ \forall x \in [a,b] \Big\}}$$

delle funzioni a scala maggioranti e l'insieme

$$\boxed{\mathcal{S}_f^- = \Big\{ g \in \mathcal{S}([a,b]) : g(x) \le f(x),\ \forall x \in [a,b] \Big\}}$$

delle funzioni a scala minoranti. Notiamo che tali insiemi non sono vuoti, in quanto contengono rispettivamente le funzioni costanti

$$h(x) = s_f \qquad \text{e} \qquad g(x) = i_f\,.$$

Ha dunque senso considerare gli insiemi numerici formati da tutti i valori degli integrali definiti delle funzioni a scala maggioranti e minoranti.

Definizione 9.26 *Si dice* **integrale superiore** *di f su $I = [a,b]$ il numero*

$$\overline{\int_I} f = \inf \left\{ \int_I h : h \in \mathcal{S}_f^+ \right\}.$$

Si dice **integrale inferiore** *di f su $I = [a,b]$ il numero*

$$\underline{\int_I} f = \sup \left\{ \int_I g : g \in \mathcal{S}_f^- \right\}.$$

Poiché $\mathcal{S}_f^+$ non è vuoto, è ovvio che $\overline{\int_I} f < +\infty$; analogamente $\underline{\int_I} f > -\infty$. La giustificazione del fatto che tali quantità sono finite è conseguenza della seguente proprietà.

Proprietà 9.27 *Per ogni funzione f limitata su $[a,b]$, vale la disuguaglianza*

$$\underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f.$$

Dimostrazione. Siano $g \in \mathcal{S}_f^-$ e $h \in \mathcal{S}_f^+$ due funzioni a scala arbitrarie. Per definizione si ha

$$g(x) \le f(x) \le h(x)\,, \qquad \forall x \in [a,b]$$

e dunque, applicando la Proprietà 9.25, risulta

$$\int_I g \leq \int_I h.$$

Fissata la funzione g, facendo variare h e ricordando la definizione di integrale superiore si deduce che

$$\int_I g \leq \overline{\int_I} f.$$

A partire da questa disuguaglianza, facendo variare g e ricordando la definizione di integrale inferiore, si ottiene la tesi. □

È naturale a questo punto chiedersi se la disuguaglianza precedente sia in realtà un'uguaglianza per tutte le funzioni limitate. La risposta è negativa, come mostra il seguente esempio.

Esempio 9.28

Sia f la *funzione di Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Poiché ogni intervallo (x_{k-1}, x_k) di una suddivisione di $[0,1]$ contiene sia punti razionali sia punti irrazionali, le funzioni in $\mathcal{S}_f^+$ sono tutte ≥ 1 mentre le funzioni in $\mathcal{S}_f^-$ sono tutte ≤ 0 (tranne al più in un numero finito di punti). Dunque

$$\overline{\int_I} f = 1 \qquad \text{e} \qquad \underline{\int_I} f = 0\,.$$ □

L'osservazione precedente motiva la seguente definizione.

Definizione 9.29 *Una funzione f limitata su $I = [a,b]$ dicesi* **integrabile** *(nel senso di Riemann) su I se*

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

Tale valore comune viene detto **integrale definito** *di f su $[a,b]$ e indicato con $\int_I f$ oppure $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Il significato geometrico dell'integrale definito è chiaro nel caso in cui f sia una funzione positiva sull'intervallo $[a,b]$. In tale situazione, il trapezoide di f è contenuto nel trapezoide di ogni funzione $h \in \mathcal{S}_f^+$ e contiene il trapezoide di ogni funzione $g \in \mathcal{S}_f^-$. L'integrale superiore rappresenta quindi una misura 'esterna' (o per eccesso) del trapezoide di f; similmente l'integrale inferiore rappresenta una

misura 'interna' (o per difetto). Dunque f è integrabile se le due misure coincidono, cioè se al trapezoide di f è associabile un numero che ne rappresenta l'area.

Notiamo che le funzioni a scala sono ovviamente integrabili su I. Infatti, se f è a scala, si ha contemporaneamente $f \in \mathcal{S}_f^-$ ed $f \in \mathcal{S}_f^+$; indicata con $\int_I f$ la quantità introdotta nella Definizione 9.24, la prima condizione implica $\int_I f \leq \underline{\int_I} f$, la seconda $\overline{\int_I} f \leq \int_I f$. Pertanto

$$\int_I f \leq \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f \leq \int_I f$$

e dunque necessariamente tali quantità coincidono.

Diamo ora un esempio di funzione integrabile non a scala e di calcolo del corrispondente integrale definito.

Esempio 9.30

Consideriamo la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $[0,1]$. L'area del suo trapezoide è $1/2$; verifichiamo che l'integrale definito secondo Riemann di f su $[0,1]$ vale proprio $1/2$. Sia $n > 1$ fissato; suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n parti uguali, ottenendo una partizione associata ai punti $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} = \left\{\frac{k}{n} : k = 0, \dots, n\right\}$. Consideriamo le funzioni a scala

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{n} & \text{se } \dfrac{k-1}{n} < x \leq \dfrac{k}{n}, \quad k = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{n} & \text{se } \dfrac{k-1}{n} < x \leq \dfrac{k}{n}, \quad k = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora $g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$, $\forall x \in [0,1]$ e quindi $h_n \in \mathcal{S}_f^+$, $g_n \in \mathcal{S}_f^-$. Inoltre, ricordando la (3.2) si ha

$$\int_I h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

e, analogamente,

$$\int_I g_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Ne segue che

$$\overline{\int_I} f \leq \inf_n \int_I h_n = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \underline{\int_I} f \geq \sup_n \int_I g_n = \frac{1}{2},$$

ovvero

$$\overline{\int_I} f \leq \frac{1}{2} \leq \underline{\int_I} f.$$

Dunque, ricordando la Proprietà 9.27 e la definizione di integrale definito, possiamo concludere che $\int_I f = \frac{1}{2}$. □

Come si è visto, lo studio dell'integrabilità di una funzione attraverso la verifica della definizione è tutt'altro che agevole anche per funzioni aventi una semplice espressione analitica. Sorge quindi l'esigenza, da una parte di individuare classi significative di funzioni integrabili, dall'altra di dotarsi di strumenti di calcolo dell'integrale definito di tali funzioni. Quest'ultima problematica troverà risposta nel § 9.8. Il seguente risultato, per la cui dimostrazione si rimanda all'Appendice A.5.2, pag. 485, fornisce invece una risposta sufficientemente ampia alla prima questione.

Teorema 9.31 *Sono integrabili sull'intervallo* $[a, b]$

a) le funzioni continue su $[a, b]$*;*
b) le funzioni continue a tratti su $[a, b]$*;*
c) le funzioni continue su (a, b) *e limitate su* $[a, b]$*;*
d) le funzioni monotone su $[a, b]$*.*

Ad esempio, il teorema ci assicura l'integrabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

che è continua su $(0, 1]$ e sodddisfa $0 \leq f(x) \leq 2$ su $[0, 1]$, e della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } \dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

che è monotona crescente (non strettamente) sull'intervallo $[0, 1]$ (si veda la Figura 9.6).

Figura 9.6. Funzioni integrabili su $[0, 1]$

Raccogliamo infine alcune proprietà dell'integrale di Riemann, che useremo nel seguito (per la dimostrazione si veda l'Appendice A.5.2, pag. 488).

Proposizione 9.32 *Sia f una funzione integrabile su $[a, b]$. Allora*
i) f è integrabile su ogni sottointervallo $[c, d] \subset [a, b]$;
ii) la funzione $|f|$ è integrabile su $[a, b]$.

9.6 Proprietà dell'integrale definito

Nei paragrafi precedenti abbiamo presentato due diverse costruzioni dell'integrale definito. Notiamo che se una funzione è continua o continua a tratti sull'intervallo $[a, b]$, essa è integrabile sia secondo Cauchy (Teorema 9.20) sia secondo Riemann (Teorema 9.31). Inoltre, come verificato esplicitamente per la funzione $f(x) = x$ negli Esempi 9.22 ii) e 9.30, si può dimostrare che le due costruzioni portano allo stesso valore dell'integrale definito. Ha quindi senso indicare l'integrale secondo Cauchy e l'integrale secondo Riemann con lo stesso simbolo. D'ora in avanti, indicheremo con il simbolo $\mathcal{R}([a, b])$ l'insieme delle funzioni integrabili su $[a, b]$.

Osserviamo subito che il simbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ rappresenta un *numero*, che dipende solo dalla funzione f e dall'intervallo $[a, b]$; esso non dipende da alcuna variabile x. La lettera x, la cui presenza è dovuta essenzialmente a motivi storici, è una 'variabile muta', che può essere sostituita da una qualunque altra lettera nel simbolo di integrale definito. In altri termini, le espressioni $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$ oppure $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ rappresentano tutte lo *stesso* numero.

Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$; abbiamo visto che se f è positiva su $[a, b]$, allora il suo integrale definito rappresenta l'area del trapezoide di f su $[a, b]$. Se invece f è negativa, l'integrale definito rappresenta l'area del trapezoide cambiata di segno. Se f ha segno variabile sull'intervallo, l'integrale definito rappresenta la differenza tra l'area della parte di trapezoide che si trova sopra l'asse delle ascisse e l'area della parte che si trova sotto. Si osservi che, in ogni caso, l'area del trapezoide di f su $[a, b]$ è data dall'integrale definito della funzione $|f|$ su $[a, b]$, vale a dire

$$\boxed{\text{Area di } \mathcal{T}(f; a, b) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.}$$

Infatti, l'applicazione del valore assoluto ha l'effetto di ribaltare sopra l'asse delle ascisse le parti del trapezoide di f che si trovano al di sotto, conservandone l'area (si veda la Figura 9.7).

È utile considerare un'estensione del concetto di integrale definito. Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$; se $a \le c < d \le b$, poniamo

$$\boxed{\int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0.} \tag{9.19}$$

Figura 9.7. L'area del trapezoide di f su $[a, b]$ è $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

In tal modo, il simbolo $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ risulta essere definito qualunque siano i valori di c e d in un intervallo $[a, b]$ in cui f è integrabile.

Enunciamo ora alcune proprietà di base dell'integrale definito, che discendono facilmente dalla sua definizione.

Teorema 9.33 *Siano f e g funzioni integrabili su un intervallo limitato I della retta reale.*

i) (**Additività rispetto al dominio di integrazione**) *Per ogni $a, b, c \in I$, si ha*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

ii) (**Linearità dell'integrale definito**) *Per ogni $a, b \in I$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha*
$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

iii) (**Positività dell'integrale definito**) *Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Se $f \geq 0$ in $[a, b]$, allora*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$
Inoltre, se f è continua, vale l'uguaglianza se e solo se f è identicamente nulla.

iv) (**Confronto tra integrali definiti**) *Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Se $f \leq g$ in $[a, b]$, allora*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

v) (**Maggiorazione dell'integrale definito**) *Siano* $a, b \in I$, *con* $a < b$. *Allora*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Si veda l'Appendice A.5.2, pag. 489. □

9.7 Media integrale

Sia f una funzione integrabile su un intervallo $[a, b]$ della retta reale. Attraverso l'integrale definito di f su $[a, b]$, siamo in grado di approssimare l'andamento della funzione sull'intervallo mediante una costante.

Definizione 9.34 *Si definisce* **media integrale** (*o* **valor medio**) **di** f **sull'intervallo** $[a, b]$ *il numero*

$$\mathrm{m}(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il significato geometrico della media integrale è evidente nel caso in cui f sia positiva sull'intervallo $[a, b]$. Riscrivendo la definizione precedente nella forma equivalente

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\mathrm{m}(f; a, b),$$

si osserva che l'area del trapezoide di f su $[a, b]$ è uguale all'area del rettangolo avente come base l'intervallo $[a, b]$ e come altezza la media integrale di f su tale intervallo (si veda la Figura 9.8).

Figura 9.8. Media integrale di f sull'intervallo $[a, b]$

Il legame tra la media integrale ed i valori assunti dalla funzione sull'intervallo è espresso dal seguente teorema.

Teorema 9.35 (**della media integrale**) *Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a,b]$. La media integrale di f su $[a,b]$ soddisfa le seguenti disuguaglianze*

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \mathrm{m}(f;a,b) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x). \tag{9.20}$$

Inoltre, se f è continua su $[a,b]$, esiste almeno un punto $z \in [a,b]$ tale che

$$\mathrm{m}(f;a,b) = f(z). \tag{9.21}$$

Dimostrazione. Poniamo $i_f = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $s_f = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Per ogni $x \in [a,b]$ si ha

$$i_f \le f(x) \le s_f.$$

Ricordando la proprietà iv) del Teorema 9.33 e l'espressione dell'integrale di una costante, si ottiene

$$(b-a)\, i_f = \int_a^b i_f \,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b s_f \,\mathrm{d}x = (b-a)\, s_f.$$

Dividendo per $b-a$ si perviene alla (9.20).
Se ora supponiamo f continua, per il Teorema di Weierstrass 4.31 si ha

$$i_f = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad s_f = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

e dunque la (9.20) garantisce che $\mathrm{m}(f;a,b)$ è un valore compreso tra il minimo e il massimo di f su $[a,b]$. L'esistenza di un punto z per cui vale la (9.21) segue allora dalla (4.16). □

Esempio 9.36

Consideriamo la funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 2 & \text{se } 1 < x \le 2, \end{cases}$$

sull'intervallo $[0,2]$. La sua media integrale è

$$\mathrm{m}(f;0,2) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}.$$

Coerentemente con l'enunciato del teorema precedente, la media integrale è un valore assunto dalla funzione; infatti si ha $\mathrm{m}(f;0,2) = f(\frac{3}{4})$ (si veda la Figura 9.9, a sinistra).

Figura 9.9. Illustrazione del Teorema della media integrale

Consideriamo ora la funzione continua a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 5 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

La media integrale di f sull'intervallo $[0, 2]$ è data da $\mathrm{m}(f; 0, 2) = 3$, mentre quella sull'intervallo $[0, 5/4]$ vale $\mathrm{m}(f; 0, 5/4) = 9/5$. Nel primo caso, la media non è un valore assunto dalla funzione (si veda la Figura 9.9, a destra), nel secondo caso lo è avendosi $\mathrm{m}(f; 0, 5/4) = f(9/10)$. Questo esempio illustra il fatto che la continuità di f è una condizione sufficiente, ma non necessaria, perché valga la (9.21). □

Chiudiamo con un'osservazione che sarà utile nel paragrafo successivo. Tenendo conto della (9.19), la media integrale di una funzione su un intervallo di estremi a e b non dipende dall'ordine degli estremi dell'intervallo:

$$\mathrm{m}(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b} \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{m}(f; b, a). \tag{9.22}$$

9.8 Il Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione definita su un intervallo I, non necessariamente limitato, della retta reale; supponiamo che f sia integrabile su ogni sottointervallo chiuso e limitato di I. Ad esempio, tale condizione è soddisfatta se f è una funzione continua su I. Chiamiamo **funzione integrale di f su I** ogni funzione della forma

$$\boxed{F(x) = F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s,} \tag{9.23}$$

dove $x_0 \in I$ è un punto *fissato* mentre x è variabile nell'intervallo I. In altri termini, una funzione integrale è ottenuta integrando f su un intervallo di cui uno degli estremi è fisso mentre l'altro è variabile.

Ricordando la (9.19), ogni funzione integrale è definita su tutto l'intervallo I; inoltre, la funzione integrale F_{x_0} si annulla nel punto x_0.

Il seguente teorema, noto come Teorema fondamentale del calcolo integrale, afferma che ogni funzione integrale di una funzione continua f su I è una primitiva di f su tale intervallo.

Teorema 9.37 (**fondamentale del calcolo integrale**) *Sia f definita e continua su un intervallo I della retta reale. Sia $x_0 \in I$ fissato e sia*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s$$

una funzione integrale di f su I. Allora F è derivabile in ogni punto di I e si ha

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Dimostrazione. Fissiamo dapprima un punto x interno ad I e sia Δx un incremento (positivo o negativo) tale che $x + \Delta x$ appartenga ad I. Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F tra x e $x + \Delta x$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Ricordando la proprietà i) del Teorema 9.33, si ha

$$\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_{x}^{x+\Delta x} f(s)\,\mathrm{d}s$$

e dunque

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{m}(f; x, x+\Delta x).$$

Abbiamo quindi stabilito che il rapporto incrementale della funzione integrale F tra x e $x+\Delta x$ coincide con la media integrale di f sull'intervallo di estremi x e $x+\Delta x$. Possiamo dunque applicare il Teorema della media integrale 9.35 alla funzione continua f; esso garantisce l'esistenza di un punto $z = z(\Delta x)$ in tale intervallo, per il quale si ha $\mathrm{m}(f; x, x+\Delta x) = f\big(z(\Delta x)\big)$ e dunque

$$\frac{F\big(x+\Delta x\big) - F(x)}{\Delta x} = f(z(\Delta x)). \tag{9.24}$$

Figura 9.10. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale

Facciamo ora tendere Δx a 0. Per fissare le idee, supponiamo $\Delta x > 0$. Dalla relazione

$$x \leq z(\Delta x) \leq x + \Delta x,$$

e dal Teorema 4.5 del confronto sui limiti, deduciamo che

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} z(\Delta x) = x.$$

Similmente $\lim_{\Delta x \to 0^-} z(\Delta x) = x$ e quindi $\lim_{\Delta x \to 0} z(\Delta x) = x$. Usando la continuità di f in x e ricordando la (4.11), si ha allora

$$\lim_{\Delta x \to 0} f\big(z(\Delta x)\big) = f\big(\lim_{\Delta x \to 0} z(\Delta x)\big) = f(x).$$

Pertanto, passando al limite nella (9.24), si ottiene la tesi

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Nel caso in cui il punto x sia un estremo dell'intervallo I è sufficiente procedere come sopra considerando limiti unilaterali destro o sinistro. □

Corollario 9.38 *Sia F_{x_0} una funzione integrale di una funzione continua f su I. Se G è una qualunque primitiva di f su I, allora*

$$F_{x_0}(x) = G(x) - G(x_0), \qquad \forall x \in I.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 9.4, esiste una costante c tale che $F_{x_0}(x) = G(x) - c$, $\forall x \in I$. Il valore della costante è determinato dalla condizione $F_{x_0}(x_0) = 0$. □

Il corollario seguente, di fondamentale importanza, fornisce l'espressione di un integrale definito, nota una qualunque primitiva della funzione integranda.

Corollario 9.39 *Sia f una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$, e sia G una primitiva di f su tale intervallo. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a). \tag{9.25}$$

Dimostrazione. Se F_a indica la funzione integrale di f che si annulla in a, si ha

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_a(b).$$

Il risultato segue allora dal corollario precedente con $x_0 = a$ e $x = b$. □

È piuttosto comune indicare la differenza $G(b) - G(a)$ con una delle seguenti espressioni:

$$[G(x)]_a^b \qquad \text{oppure} \qquad G(x)|_a^b.$$

Esempi 9.40

I seguenti integrali definiti sono calcolati applicando la formula (9.25).

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^\pi = 2.$$

$$\int_2^6 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\log x\big]_2^6 = \log 6 - \log 2 = \log 3.$$ □

Osservazione 9.41 È possibile estendere il Teorema fondamentale del calcolo integrale al caso delle funzioni continue a tratti. L'enunciato si modifica come segue. Sia f una funzione continua a tratti su ogni sottointervallo chiuso e limitato di I. Ogni funzione integrale F di f su I è continua su I; essa è derivabile in tutti i punti di I in cui f è continua, e ivi si ha $F'(x) = f(x)$. In ogni punto di discontinuità (di salto) di f interno ad I, la F presenta un punto angoloso. Si dice che la funzione F è una *primitiva generalizzata* di f su I. □

Il seguente risultato fornisce una rappresentazione integrale di una funzione derivabile, ed è utile in diverse circostanze.

Corollario 9.42 *Sia f una funzione derivabile in un intervallo I, con derivata continua. Allora, per ogni $x_0 \in I$, vale la rappresentazione*

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \forall x \in I. \tag{9.26}$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che f è, in modo ovvio, una primitiva della sua derivata. Dunque, usando la (9.25), otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} f'(s)\,\mathrm{d}s = f(x) - f(x_0),$$

da cui segue il risultato. □

Diamo ora due applicazioni di tale corollario. Dapprima giustifichiamo gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $f(x) = \arcsin x$ e $f(x) = \arctan x$. A tale scopo, premettiamo il seguente lemma tecnico.

Lemma 9.43 *Sia φ una funzione continua in un intorno di 0, soddisfacente $\varphi(x) = o(x^\alpha)$ per $x \to 0$, con $\alpha \geq 0$. Allora, la sua primitiva $\psi(x) = \int_0^x \varphi(s)\,\mathrm{d}s$ soddisfa $\psi(x) = o(x^{\alpha+1})$ per $x \to 0$. In formule, possiamo scrivere che*

$$\int_0^x o(s^\alpha)\,\mathrm{d}s = o(x^{\alpha+1}) \qquad \textit{per } x \to 0. \tag{9.27}$$

Dimostrazione. Applicando il Teorema di de l'Hôpital 6.41, abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\psi'(x)}{(\alpha+1)x^\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} = 0.$$ □

Consideriamo dapprima la funzione $f(x) = \arctan x$. La sua derivata è $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e dunque, grazie alla (9.26), possiamo scrivere

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s.$$

Lo sviluppo di Maclaurin della funzione $f'(s)$, ottenuto dalla (7.18) con la sostituzione $x = s^2$, è dato da

$$\frac{1}{1+s^2} = 1 - s^2 + s^4 - \ldots + (-1)^m s^{2m} + o(s^{2m+1}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k s^{2k} + o(s^{2m+1}).$$

Integrando termine a termine e usando la (9.27), otteniamo lo sviluppo di Maclaurin della funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned}\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2m+2}).\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la funzione $f(x) = \arcsin x$, possiamo scrivere

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, \mathrm{d}s.$$

Usando la (7.17) con $\alpha = -\frac{1}{2}$ e con la sostituzione $x = -s^2$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} &= 1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{8}s^4 + \ldots + \left|\binom{-\frac{1}{2}}{m}\right| s^{2m} + o(s^{2m+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left|\binom{-\frac{1}{2}}{k}\right| s^{2k} + o(s^{2m+1}).\end{aligned}$$

Integrando termine a termine e usando la (9.27), otteniamo lo sviluppo di Maclaurin della funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \left|\binom{-\frac{1}{2}}{m}\right| \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left|\binom{-\frac{1}{2}}{k}\right| \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2m+2}).\end{aligned}$$

Come seconda applicazione del Corollario 9.42, è possibile ottenere una nuova forma del resto della formula di Taylor, che si aggiunge a quelle già note di Peano e Lagrange (si ricordino le (7.6) e (7.8)). Tale forma, detta integrale, può fornire informazioni più precise delle precedenti sul comportamento dell'errore, a costo di un'ipotesi più forte sulla funzione f. La dimostrazione, che fa uso del Principio di induzione, è riportata nell'Appendice A.4.4, pag. 480, dove si trova altresì un esempio di utilizzo di tale formula.

Teorema 9.44 (**Formula di Taylor con resto integrale**) *Sia $n \geq 0$ un intero arbitrario. Per ogni funzione f derivabile $n+1$ volte in un intorno di x_0 con derivata $f^{(n+1)}$ ivi continua, vale la relazione*

$$f(x) - Tf_{n,x_0}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt\,.$$

9.9 Regole di integrazione definita

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale e le regole di integrazione indefinita per parti e per sostituzione, viste nel § 9.2, permettono di ottenere regole analoghe di integrazione definita.

Teorema 9.45 (**Regola di integrazione per parti**) *Siano f e g funzioni derivabili su un intervallo $[a, b]$, con derivate continue. Allora*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.28}$$

Dimostrazione. Sia $H(x)$ una qualunque primitiva della funzione $f'(x)g(x)$ su $[a, b]$. La regola di integrazione indefinita per parti dice precisamente che la funzione $f(x)g(x) - H(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)g'(x)$. Pertanto, grazie alla (9.25), si ha

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \big[H(x)\big]_a^b.$$

Il risultato segue ancora dalla (9.25) applicata alla funzione $f'(x)g(x)$. □

Teorema 9.46 (**Regola di integrazione per sostituzione**) *Sia $f(y)$ una funzione continua su un intervallo $[a, b]$. Sia poi $\varphi(x)$ una funzione definita su un intervallo $[\alpha, \beta]$ a valori nell'intervallo $[a, b]$, derivabile con derivata continua. Allora*

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{9.29}$$

Se la funzione φ è una biiezione tra l'intervallo $[\alpha, \beta]$ e l'intervallo $[a, b]$, allora la formula precedente può essere scritta nella forma equivalente

$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.30}$$

Dimostrazione. Sia $F(y)$ una primitiva di $f(y)$ su $[a, b]$. Per ottenere la (9.29), è sufficiente ricordare la (9.4) ed applicare il Corollario 9.39. Nel caso in cui φ sia una biiezione, l'equivalenza delle due formule segue dall'osservazione che si ha $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ se φ è strettamente crescente, oppure $a = \varphi(\beta)$, $b = \varphi(\alpha)$ se φ è strettamente decrescente. □

Entrambe le formule sono utili nelle applicazioni.

Esempi 9.47

i) Si voglia calcolare

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Poniamo $y = \varphi(x) = \sin x$; si ha $\varphi'(x) = \cos x$ e $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pertanto, usando la (9.29), si ottiene

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^3 \, \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{4} y^4\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{16}.$$

Si noti che in tal caso φ non è iniettiva sull'intervallo $[0, \frac{3\pi}{4}]$.

ii) Si voglia calcolare

$$S = \int_0^1 \arcsin \sqrt{1 - y^2} \, \mathrm{d}y.$$

Poniamo $y = \varphi(x) = \cos x$, con x variabile nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Osserviamo che in tale intervallo φ è strettamente decrescente e dunque iniettiva; inoltre, si ha $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, vale a dire $\varphi^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi^{-1}(1) = 0$. Notiamo inoltre che si ha

$$\arcsin \sqrt{1 - \cos^2 x} = \arcsin \sqrt{\sin^2 x} = \arcsin(\sin x) = x.$$

Dunque, usando la (9.30),

$$S = \int_{\pi/2}^0 (\arcsin \sqrt{1 - \cos^2 x}) \, (-\sin x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, \mathrm{d}x,$$

e finalmente, usando la (9.28),

$$S = \big[-x \cos x\big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_0^{\pi/2} = 1. \qquad \square$$

Corollario 9.48 *Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[-a, a]$, $a > 0$. Se f è pari, allora*

$$\int_{-a}^a f(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x \, ;$$

se f è dispari, allora

$$\int_{-a}^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

Dimostrazione. Per il Teorema 9.33 *i)*,

$$\int_{-a}^a f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x) \, \mathrm{d}x + \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Eseguendo la sostituzione $y = \varphi(x) = -x$ nel primo integrale a secondo membro, otteniamo

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{a} f(-y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Quest'ultimo integrale coincide con $\displaystyle\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y$ se f è pari e con il suo opposto se f è dispari. La tesi segue ricordando che in un integrale definito la variabile di integrazione è muta. □

9.9.1 Applicazione al calcolo di aree

Diamo due esempi di applicazione del Teorema fondamentale del calcolo integrale al calcolo di aree di figure piane.

i) Si voglia innanzi tutto calcolare l'area A della regione finita di piano racchiusa tra le due curve di equazione $y = f(x) = x^2$ e $y = g(x) = \sqrt{x}$ (si veda la Figura 9.11). Notiamo che le due curve si intersecano nei due punti di ascisse $x = 0$ e $x = 1$. La regione a cui siamo interessati è la differenza tra il trapezoide della funzione g e quello della funzione f, relativi all'intervallo $[0, 1]$. Pertanto,

$$A = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

ii) Verifichiamo ora la ben nota formula $A(r) = \pi r^2$ che esprime l'area di un cerchio in funzione del suo raggio r. Consideriamo il cerchio di centro l'origine, luogo dei punti (x, y) soddisfacenti la relazione $x^2 + y^2 \leq r^2$. Il quarto di cerchio contenuto nel primo quadrante è dunque il trapezoide della funzione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ relativo all'intervallo $[0, r]$ (si veda la Figura 9.12); pertanto

$$A(r) = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Figura 9.11. Regione racchiusa tra i grafici delle funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

Figura 9.12. Trapezoide della funzione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ contenuto nel primo quadrante

Effettuiamo il cambiamento di variabile indipendente $x = \varphi(t) = rt$, per il quale si ha $\mathrm{d}x = r\mathrm{d}t$ e $0 = \varphi(0),\ r = \varphi(1)$. Grazie alla (9.30), si ha

$$A(r) = 4r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{9.31}$$

Ricordando l'Esempio 9.13 vi), una primitiva della funzione $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$ è

$$F(t) = \frac{1}{2}t\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t\,.$$

Pertanto

$$A(r) = 4r^2 \left[\frac{1}{2}t\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t\right]_0^1 = 4r^2\frac{\pi}{4} = \pi r^2\,.$$

iii) Determiniamo ora l'area A della regione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = f(x) = x(1-x)$ e dalla retta di equazione $y = g(x) = -\frac{x}{2}$ (si veda la Figura 9.13, a sinistra).

Figura 9.13. L'area racchiusa tra i grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ è invariante per traslazione

Le due curve si intersecano nell'origine e nel punto di coordinate $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$; nell'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$ si ha sempre $f(x) \geq g(x)$. Notiamo che la regione di interesse si trova in parte nel semipiano delle ordinate positive, in parte in quello delle ordinate negative. Tuttavia, la sua area può essere calcolata come

$$A = \int_0^{3/2} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,;$$

ciò si giustifica osservando che A è anche l'area della regione differenza tra il trapezoide della funzione traslata $f(x)+\frac{3}{4}$ e il trapezoide della funzione traslata $g(x)+\frac{3}{4}$; in altri termini, applicando una traslazione verticale che porta l'asse delle ascisse nel punto di ordinata $y = -\frac{3}{4}$, l'area non cambia (si veda la Figura 9.13 (a destra)). Pertanto,

$$A = \int_0^{3/2} \left(\frac{3}{2}x - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{3/2} = \frac{9}{16}\,.$$

9.10 Esercizi

1. *Determinare la generica primitiva delle seguenti funzioni:*

   a) $f(x) = (x+1)^{27}$

   b) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-5x}$

   $\boxed{\text{c)}}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

   d) $f(x) = \dfrac{2-\sin x}{2x+\cos x}$

2. *Determinare la primitiva che in x_0 vale y_0 delle seguenti funzioni:*

   $\boxed{\text{a)}}$ $f(x) = x\mathrm{e}^{2x^2}$ $\quad x_0 = \sqrt{2}$ $\quad y_0 = 1$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^6}$ $\quad x_0 = 0$ $\quad y_0 = 1$

   c) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $\quad x_0 = \mathrm{e}$ $\quad y_0 = 0$

   d) $f(x) = \cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}$ $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad y_0 = \mathrm{e}$

3. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+7}\,\mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int (6x+3)^8\,\mathrm{d}x$

   $\boxed{\text{c)}}$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{1/x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log^2 x}\,\mathrm{d}x$

   $\boxed{\text{e)}}$ $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

   f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}\,\mathrm{d}x$

4. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

a) $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$

b) $\displaystyle\int x^2 \log 2x \, dx$

c) $\displaystyle\int \log^2 x \, dx$

d) $\displaystyle\int x \arctan x \, dx$

e) $\displaystyle\int e^{2x} \cos x \, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$

5. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-4x+3} \, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+8x^2-9x+11}{x^2-5x+6} \, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1} \, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{17x^2-16x+60}{x^4-16} \, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2} \, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+7x+3}{(x^2+4)(x-1)^2} \, dx$

6. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} \, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(e^x-2)^2} \, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x} \, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} \, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1-2\sin^2 x} \, dx$

7. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2+x}} \, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x-3+\sqrt{3-x}} \, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh x} \, dx$

e) $\displaystyle\int \cosh^2 x \, dx$

f) $\displaystyle\int \log \sqrt[3]{1+x^2} \, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan x} \, dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{4x}+1} \, dx$

i) $\displaystyle\int \sin^5 x \, dx$

ℓ) $\displaystyle\int \cos^4 x \, dx$

8. *Determinare la primitiva di* $f(x) = |x| \log(2-x)$ *che si annulla in* $x = 1$.

9. *Determinare la primitiva* $F(x)$ *di* $f(x) = x e^{-|x|}$ *tale che* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = -5$.

10. *Determinare in* $(-3, +\infty)$ *la primitiva che si annulla in* $x = 0$ *della funzione*

$$f(x) = \frac{x+2}{(|x|+3)(x-3)}\,.$$

11. *Determinare la primitiva generalizzata della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 5x + 3 & \text{se } x \geq 1, \\ 4x - 7 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

che si annulla nell'origine.

12. *Verificare che vale l'uguaglianza*

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x\,, \qquad \forall x > 0\,.$$

13. *Scrivere lo sviluppo di Maclaurin di ordine* 9 *della generica primitiva di* $f(x) = \cos 2x^2$.

14. *Scrivere lo sviluppo di Maclaurin di ordine* 4 *della generica primitiva di* $f(x) = \dfrac{2 + \mathrm{e}^{-x}}{3 + x^3}$.

15. *Calcolare i seguenti integrali definiti:*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} x \log x \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{[x]^2} \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} M(x^2 - 1) \,\mathrm{d}x$

(Si ricordi che $[x]$ denota la Parte intera e $M(x)$ la Mantissa di x.)

16. *Calcolare l'area del trapezoide di base* $[\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}]$ *relativo alla funzione* $f(x) = |\log x|$.

17. *Calcolare l'area della regione limitata del piano racchiusa tra le curve di equazione* $y = f(x)$ *e* $y = g(x)$*:*

a) $f(x) = |x|\,, \qquad g(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) $f(x) = x^2 - 2x\,, \qquad g(x) = -x^2 + x$

18. *Calcolare*

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (|t-1| + 2)\,\mathrm{d}t\,.$$

9.10.1 Soluzioni

1. *Primitive:*

a) $F(x) = \frac{1}{28}(x+1)^{28} + c$;

b) $F(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + c$.

c) Si ha

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

e quindi

$$F(x) = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x + c\,.$$

d) $F(x) = \log|2x + \cos x| + c$.

2. *Primitive:*

a) La generica primitiva di $f(x)$ è $F(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x^2} + c$. Imponendo la condizione $F(\sqrt{2}) = 1$, si ottiene

$$1 = \frac{1}{4}\mathrm{e}^4 + c \qquad \text{da cui} \qquad c = 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^4$$

e quindi la primitiva cercata è

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x^2} + 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^4\,.$$

b) $F(x) = \frac{1}{3}\arctan x^3 + 1$;

c) $F(x) = \frac{1}{2}\log^2 x - \frac{1}{2}$;

d) $F(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$.

3. *Integrali indefiniti:*

a) $S = \frac{1}{2}\log(x^2+7) + c$;

b) $S = \frac{1}{54}(6x+3)^9 + c$.

c) Ponendo $y = \frac{1}{x^2}$, si ha $\mathrm{d}y = -\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$ da cui

$$S = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + c = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/x^2} + c\,.$$

d) $S = -\frac{1}{\log x} + c$.

e) Ponendo $y = 1 + \mathrm{e}^x$, si ha $\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ e quindi

$$S = \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\mathrm{e}^x)^3} + c\,.$$

f) $S = \sqrt{x^2+7} + c$.

4. *Integrali indefiniti:*

a) $S = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + c$;

b) $S = \frac{1}{3}x^3(\log 2x - \frac{1}{3}) + c$.

c) Integriamo per parti ponendo $f(x) = \log^2 x$ e $g'(x) = 1$. In tal modo si ha $f'(x) = \frac{2}{x}\log x$ e $g(x) = x$. Pertanto

$$S = x\log^2 x - 2\int \log x \,\mathrm{d}x\,.$$

Quest'ultimo integrale si calcola ancora per parti (si ricordi l'Esempio 9.11 ii)) e si ottiene

$$S = x\log^2 x - 2x(\log x - 1) + c = x(\log^2 x - 2\log x + 2) + c\,.$$

d) Integriamo per parti ponendo $f(x) = \arctan x$ e $g'(x) = x$. Allora $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; dunque

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c\,. \end{aligned}$$

e) $S = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(\sin x + 2\cos x) + c\,.$

f) Ricordando le considerazioni fatte a pag. 328 (punto v)), usiamo l'integrazione per parti nell'integrale $S_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ ponendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g'(x) = 1$. Allora $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ e $g(x) = x$; quindi

$$\begin{aligned} S_1 &= \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2S_1 - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$S = \frac{1}{2}\left(S_1 + \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c\,.$$

5. *Integrali indefiniti:*

a) $S = 3\log|x-3| - \log|x-1| + c\,.$

b) $S = \frac{1}{3}x^3 + 2x + 2\log|x-3| - \log|x-2| + c\,.$

c) Si ha

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,,$$

ovvero $A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) = x\,.$ Ponendo $x = 1$ e $x = 0$ si ottengono le costanti $A = C = \frac{1}{3}$; ponendo poi $x = -1$ si ricava $B = -\frac{1}{3}$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right).\end{aligned}$$

In conclusione,

$$S=\frac{1}{3}\Big(\log|x-1|-\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\Big)+c\,.$$

d) $S=\log(x^2+4)+3\log|x-2|-5\log|x+2|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+c\,.$

e) Si ha

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2}=x+1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=x+1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}\,.$$

Ponendo $x=1$ e $x=0$ nella relazione

$$Ax^2+(Bx+C)(x-1)=x^2+1$$

si ottiene $A=2$ e $C=-1$; inoltre, ponendo, ad esempio, $x=-1$, si ha $B=-1$. Pertanto

$$S=\int\left(x+1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x+2\log|x-1|-\log|x|+\frac{1}{x}+c\,.$$

f) Si ha

$$\frac{2x^3-2x^2+7x+3}{(x^2+4)(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\,.$$

Imponendo la condizione

$$A(x-1)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x-1)^2=2x^3-2x^2+7x+3\,,$$

si ricava $A=1,\ B=2,\ C=1$ e $D=-1$. Pertanto

$$\begin{aligned}S&=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)\,\mathrm{d}x\\ &=\log|x-1|-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2}\log(x^2+4)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+c\,.\end{aligned}$$

6. *Integrali indefiniti:*

a) Posto $y=\mathrm{e}^x$, si ha $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, da cui

$$\begin{aligned}S&=\int\frac{y}{y+1}\,\mathrm{d}y=\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)\,\mathrm{d}y=y-\log|y+1|+c\\ &=\mathrm{e}^x-\log(\mathrm{e}^x+1)+c\,.\end{aligned}$$

b) $S = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\log|\mathrm{e}^x - 2| - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{e}^x-2} + c\,.$

c) Posto $t = \tan\frac{x}{2}$, si ha $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Allora

$$\begin{aligned} S &= 2\int \frac{1}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{t} - 2\arctan t + c = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}} - x + c\,. \end{aligned}$$

d) $S = -\dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c\,;$ e) $S = \log\left|\dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c\,.$

f) Posto $t = \tan x$, si ha $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 t = \frac{1}{1+t^2}$ e $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, da cui

$$S = \int \frac{1}{(1+t^2)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{Ct+D}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Ponendo $t = -1,\ t = 1,\ t = 0$ e $t = 2$ nella condizione

$$A(1-t)(1+t^2) + B(1+t)(1+t^2) + (Ct+D)(1-t^2) = 1\,,$$

si ricava $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = 0$ e $D = \frac{1}{2}$. Pertanto

$$\begin{aligned} S &= \int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\log|1+t| - \frac{1}{4}\log|1-t| + \frac{1}{2}\arctan t + c \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{2}\arctan t + c = \frac{1}{4}\log\left|\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right| + \frac{1}{2}x + c\,. \end{aligned}$$

7. *Integrali indefiniti:*

a) $S = \frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3} - 4\sqrt{2+x} + c\,;$ b) $S = -\frac{1}{2(1+x^2)} + c\,.$

c) Ponendo $t^2 = 3 - x$ si ha $x = 3 - t^2$ e $2t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, da cui

$$S = \int \frac{2t}{t^2-t}\,\mathrm{d}t = 2\int\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = 2\log|t-1| + c = 2\log|\sqrt{3-x} - 1| + c\,.$$

d) Ricordando che $\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ e ponendo $y = \mathrm{e}^x$ si ha

$$\begin{aligned} S &= \int\frac{2}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y \\ &= \log|y-1| - \log|y+1| + c = \log\frac{|\mathrm{e}^x - 1|}{\mathrm{e}^x + 1} + c\,. \end{aligned}$$

e) $S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + 2x\right) + c = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{2}x + c\,.$

f) Osserviamo che $\log \sqrt[3]{1+x^2} = \frac{1}{3}\log(1+x^2)$. Integriamo per parti ponendo $f(x) = \log(1+x^2)$ e $g'(x) = 1$. Allora $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e $g(x) = x$; quindi

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3}\left(x\log(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(x\log(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(x\log(1+x^2) - 2x + 2\arctan x\right) + c\,. \end{aligned}$$

g) $S = \frac{1}{2}\left(\log|1+\tan x| - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x) + x\right) + c\,.$

h) Posto $y = \mathrm{e}^{4x}$, si ha $\mathrm{d}y = 4\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$ ossia $\mathrm{d}x = \frac{1}{4y}\,\mathrm{d}y$. Pertanto

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{y(y+1)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4}\left(\log|y| - \log|y+1|\right) + c = \frac{1}{4}(4x - \log(\mathrm{e}^{4x}+1)) + c \\ &= x - \frac{1}{4}\log(\mathrm{e}^{4x}+1) + c\,. \end{aligned}$$

i) Osserviamo che

$$\sin^5 x = \sin x\,\sin^4 x = \sin x(1-\cos^2 x)^2\,;$$

allora, posto $y = \cos x$, da cui $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$, si ha

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x\,\mathrm{d}x &= -\int (1-y^2)^2\,\mathrm{d}y = \int(-1+2y^2-y^4)\,\mathrm{d}y \\ &= -y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + c = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c\,. \end{aligned}$$

ℓ) Poiché $\cos^4 x = \cos x\cos^3 x$, integriamo per parti ponendo $f(x) = \cos^3 x$ e $g'(x) = \cos x$. In tal modo si ha $f'(x) = -3\sin x\cos^2 x$ e $g(x) = \sin x$; pertanto

$$\begin{aligned} S &= \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \sin x\cos^3 x + 3\int \cos^2 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \sin x\cos^3 x + 3\int \cos^2 x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sin x\cos^3 x + 3\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x - 3S\,. \end{aligned}$$

Dunque, ricordando l'Esempio 9.9 ii),

$$4S = \sin x\cos^3 x + 3\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) + c\,.$$

In definitiva

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + c\,.$$

8. Innanzitutto osserviamo che $f(x)$ è definita in $(-\infty, 2)$ e

$$f(x) = \begin{cases} x\log(2-x) & \text{se } 0 \le x < 2, \\ -x\log(2-x) & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Per determinarne la primitiva, calcoliamo l'integrale $\int x\log(2-x)\,\mathrm{d}x$ per parti. Ponendo $g(x) = \log(2-x)$ e $h'(x) = x$, si ha $g'(x) = \frac{1}{x-2}$ e $h(x) = \frac{1}{2}x^2$; perciò

$$\begin{aligned} \int x\log(2-x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\log(2-x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\log(2-x) - \frac{1}{2}\int \left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\log(2-x) - \frac{1}{4}x^2 - x - 2\log(2-x) + c\,. \end{aligned}$$

Allora

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2\log(2-x) - \frac{1}{4}x^2 - x - 2\log(2-x) + c_1 & \text{se } 0 \le x < 2\,, \\ -\frac{1}{2}x^2\log(2-x) + \frac{1}{4}x^2 + x + 2\log(2-x) + c_2 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Imponendo la condizione $F(1) = 0$ si ha $c_1 = \frac{5}{4}$; inoltre F deve essere continua in $x = 0$ per cui

$$F(0^+) = -2\log 2 + \frac{5}{4} = F(0^-) = 2\log 2 + c_2\,.$$

Dunque $c_2 = -4\log 2 + \frac{5}{4}$ e la primitiva cercata è

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2\log(2-x) - \frac{1}{4}x^2 - x - 2\log(2-x) + \frac{5}{4} & \text{se } 0 \le x < 2\,, \\ -\frac{1}{2}x^2\log(2-x) + \frac{1}{4}x^2 + x + 2\log(2-x) - 4\log 2 + \frac{5}{4} & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

9. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{se } x \ge 0\,, \\ x\mathrm{e}^{x} & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Ricordando l'Esempio 9.11 i), si ha

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1)\mathrm{e}^{-x} + c_1 & \text{se } x \ge 0\,, \\ (x-1)\mathrm{e}^{x} + c_2 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Imponendo la continuità della primitiva in $x = 0$, si ricava $F(0) = F(0^+) = c_1 = F(0^-) = c_2$; dunque la generica primitiva di f è

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1)\mathrm{e}^{-x} + c & \text{se } x \ge 0\,, \\ (x-1)\mathrm{e}^{x} + c & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ossia $F(x) = -(|x|+1)\mathrm{e}^{-|x|} + c$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(-(x+1)\mathrm{e}^{-x} + c) = c$, pertanto la condizione $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -5$ è soddisfatta per $c = -5$ e la primitiva cercata è

$$F(x) = -(|x|+1)\mathrm{e}^{-|x|} - 5\,.$$

10. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{(x+3)(x-3)} & \text{se } x \geq 0\,, \\ -\dfrac{x+2}{(x-3)^2} & \text{se } -3 < x < 0\,, \end{cases}$$

calcoliamo dapprima i due integrali indefiniti

$$S_1 = \int \frac{x+2}{(x+3)(x-3)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad S_2 = \int \frac{x+2}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Si tratta di integrare funzioni razionali e quindi possiamo utilizzare la tecnica dei fratti semplici. Non è difficile verificare che

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{(x+3)(x-3)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x+3} + \frac{5}{x-3}\right) \\ \frac{x+2}{(x-3)^2} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$S_1 = \frac{1}{6}\left(\log|x+3| + 5\log|x-3|\right) + c_1\,, \qquad S_2 = \log|x-3| - \frac{5}{x-3} + c_2$$

e la generica primitiva di f ha la forma

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} S_1 & \text{se } x \geq 0\,, \\ -S_2 & \text{se } -3 < x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{6}\left(\log|x+3| + 5\log|x-3|\right) + c_1 & \text{se } x \geq 0\,, \\ -\log|x-3| + \dfrac{5}{x-3} + c_2 & \text{se } -3 < x < 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Imponendo la continuità e l'annullamento in $x = 0$, si ottiene

$$0 = F(0) = F(0^+) = \log 3 + c_1 = F(0^-) = -\log 3 - \frac{5}{3} + c_2\,.$$

Pertanto dovrà essere $c_1 = -\log 3$ e $c_2 = \log 3 + \frac{5}{3}$ e la primitiva cercata è

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}\left(\log(x+3) + 5\log|x-3|\right) - \log 3 & \text{se } x \geq 0\,, \\ -\log(3-x) + \dfrac{5}{x-3} + \log 3 + \dfrac{5}{3} & \text{se } -3 < x < 0\,. \end{cases}$$

11. La generica primitiva generalizzata $F(x)$ di $f(x)$ deve essere una funzione continua soddisfacente la condizione $F'(x) = f(x)$ in tutti i punti di continuità di $f(x)$, ovvero, nel nostro caso, per ogni $x \neq 1$. Quindi dovrà essere

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int (2x^3 - 5x + 3)\,\mathrm{d}x & \text{se } x \geq 1, \\ \displaystyle\int (4x - 7)\,\mathrm{d}x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 3x + c_1 & \text{se } x \geq 1, \\ 2x^2 - 7x + c_2 & \text{se } x < 1\,; \end{cases}$$

il legame tra le costanti c_1 e c_2 si ottiene imponendo la continuità in $x = 1$:

$$F(1) = F(1^+) = 1 + c_1 = F(1^-) = -5 + c_2\,.$$

Dunque $c_2 = 6 + c_1$ e la generica primitiva generalizzata è

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 3x + c & \text{se } x \geq 1, \\ 2x^2 - 7x + 6 + c & \text{se } x < 1\,. \end{cases}$$

Imponiamo ora la condizione $F(0) = 6 + c = 0$, ottenendo $c = -6$. Quindi la funzione cercata è

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 3x - 6 & \text{se } x \geq 1, \\ 2x^2 - 7x & \text{se } x < 1\,. \end{cases}$$

In alternativa, si può notare che la funzione cercata (si ricordi l'Osservazione 9.41) risulta uguale a

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

si procede poi calcolando l'integrale definito della funzione $f(t)$.

12. Consideriamo le funzioni $F(x) = \arctan \frac{1}{x}$ e $G(x) = -\arctan x$. Poiché

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = G'(x)\,,$$

ne segue che $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive della stessa funzione $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$; pertanto, per la Proposizione 9.3, differiscono per una opportuna costante $c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = G(x) + c\,.$$

Per determinarla, notiamo che $F(1) = \frac{\pi}{4}$, $G(1) = -\frac{\pi}{4}$ e dunque $c = \frac{\pi}{2}$.

13. La generica primitiva di f ha la forma

$$F(x) = c + \int_0^x \cos 2t^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Ricordando il Lemma 9.43 e scrivendo

$$\cos 2t^2 = 1 - 2t^4 + \frac{2}{3}t^8 + o(t^9)\,, \qquad t \to 0\,,$$

lo sviluppo di F, per $x \to 0$, è

$$F(x) = c + \int_0^x \left(1 - 2t^4 + \frac{2}{3}t^8 + o(t^9)\right) \mathrm{d}t = c + x - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{27}x^9 + o(x^{10})\,.$$

14. Come nell'esercizio precedente, iniziamo con il calcolare lo sviluppo di Maclaurin di ordine 3 di f. Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\left(2 + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(1 + \frac{x^3}{3}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\left(3 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(3 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{18}x^3 + o(x^3)\,, \quad x \to 0\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} F(x) &= c + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = c + \int_0^x \left(1 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{6}t^2 - \frac{7}{18}t^3 + o(t^3)\right) \mathrm{d}t \\ &= c + x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{7}{72}x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,. \end{aligned}$$

15. *Integrali definiti:*

a) -2; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{1}{4}\mathrm{e}^2(3\mathrm{e}^2 - 1)$; d) $\frac{1}{5}\log 6$.

e) Poiché

$$[x] = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \le x < 2\,, \\ 2 & \text{se } 2 \le x < 3\,, \\ 3 & \text{se } x = 3\,, \end{cases}$$

risulta

$$S = \int_1^2 \mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\,.$$

f) Consideriamo la parabola $y = x^2 - 1$ per $0 \le x \le \sqrt{3}$ e studiamone l'immagine. Risulta

$$\begin{aligned} &-1 \le x^2 - 1 < 0 && \text{per} && x \in [0, 1) \\ &0 \le x^2 - 1 < 1 && \text{per} && x \in [1, \sqrt{2}) \\ &1 \le x^2 - 1 < 2 && \text{per} && x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Figura 9.14. Trapezoide relativo alla funzione $f(x) = |\log x|$

e quindi

$$M(x^2-1) = \begin{cases} x^2-1+1 & \text{se } x \in [0,1)\,, \\ x^2-1 & \text{se } x \in [1,\sqrt{2})\,, \\ x^2-1-1 & \text{se } x \in [\sqrt{2},\sqrt{3})\,, \\ 0 & \text{se } x = \sqrt{3}\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$S = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^2-2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}-\sqrt{3}+1\,.$$

16. Osserviamo che (si veda la Figura 9.14)

$$|\log x| = \begin{cases} -\log x & \text{se } \mathrm{e}^{-1} \le x < 1\,, \\ \log x & \text{se } 1 \le x < \mathrm{e}\,. \end{cases}$$

Quindi, ricordando l'Esempio 9.11 ii), si ha

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} |\log x|\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} \log x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \log x\,\mathrm{d}x \\ &= -\Big[x(\log x - 1)\Big]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} + \Big[x(\log x - 1)\Big]_1^{\mathrm{e}} = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}\,. \end{aligned}$$

17. *Calcolo di aree:*

a) Osserviamo che la regione di interesse è simmetrica rispetto all'asse y (si veda la Figura 9.15). Pertanto, ricordando l'Esempio 9.13 vi), l'area cercata sarà

$$\begin{aligned} A &= 2\left(\int_0^{\sqrt{2}/2} (\sqrt{1-x^2} - x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \Big[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\Big]_0^{\sqrt{2}/2} - \Big[x^2\Big]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{4}\,, \end{aligned}$$

coerentemente con il fatto che la regione considerata è un quarto di cerchio.

Figura 9.15. Regione relativa all'Esercizio 17 a)

b) $\frac{9}{8}$.

18. Poiché

$$|t-1| = \begin{cases} 1-t & \text{se } t < 1\,, \\ t-1 & \text{se } t \geq 1\,, \end{cases}$$

si ha

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{x} (1-t+2)\,\mathrm{d}t & \text{se } x < 1\,, \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t+2)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} (t-1+2)\,\mathrm{d}t & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x + \dfrac{7}{2} & \text{se } x < 1\,, \\ \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{9}{2} & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

10

Calcolo integrale II

In questo capitolo proseguiamo la trattazione del Calcolo integrale.

Nella prima parte, introduciamo il concetto di integrale improprio, che permette ad esempio di estendere il calcolo delle aree al caso di regioni non limitate del piano. Lo studio del comportamento di un integrale improprio si avvale degli strumenti sviluppati nei capitoli precedenti relativi al calcolo dei limiti.

La seconda parte del capitolo è dedicata alla definizione di un calcolo integrale sulle curve per funzioni di più variabili, il quale estende quello sugli intervalli della retta reale presentato nel capitolo precedente.

10.1 Integrali impropri

Abbiamo sinora introdotto e studiato l'integrale definito di una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato della retta reale. Varie applicazioni inducono a estendere il concetto di integrale definito al caso in cui l'intervallo non sia limitato oppure al caso in cui la funzione considerata non sia limitata. Tale estensione viene realizzata attraverso un processo di limite a partire da integrali definiti secondo una delle costruzioni viste precedentemente (Riemann o Cauchy). Si perviene in tal modo al concetto di integrale improprio.

Presentiamo dapprima gli integrali impropri definiti su intervalli illimitati e successivamente prendiamo in esame l'integrazione di funzioni non limitate su un intervallo limitato.

10.1.1 Integrali su intervalli illimitati

Consideriamo la semiretta $[a, +\infty)$. Introduciamo l'insieme $\mathcal{R}_{\text{loc}}([a, +\infty))$ delle funzioni definite su $[a, +\infty)$ e integrabili su ogni sottointervallo chiuso e limitato $[a, c]$ della semiretta.

Se $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a, +\infty))$ risulta quindi definita su $[a, +\infty)$ la funzione integrale

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_10, © Springer-Verlag Italia 2014

È naturale studiare il comportamento limite di tale funzione per $c \to +\infty$.

Definizione 10.1 *Sia $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a, +\infty))$. Poniamo (formalmente)*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x;$$

il simbolo a primo membro viene detto **integrale improprio** *di f su $[a, +\infty)$.*

i) Se il limite esiste ed è finito, si dice che la funzione f è integrabile (in senso improprio) su $[a, +\infty)$ o, equivalentemente, che il suo **integrale** *improprio è* **convergente**.

*ii) Se il limite esiste ed è infinito, si dice che l'*__integrale__ *improprio di f è* **divergente**.

*iii) Se il limite non esiste, si dice che l'*__integrale__ *improprio di f è* **oscillante**.

L'insieme delle funzioni integrabili su $[a, +\infty)$ verrà indicato con il simbolo $\mathcal{R}([a, +\infty))$.

È facile cogliere il significato geometrico dell'integrale improprio nel caso in cui la funzione sia positiva su $[a, +\infty)$. Osserviamo innanzitutto che per una tale funzione vale la seguente proprietà.

Proposizione 10.2 *Sia $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a, +\infty))$ tale che $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$. Allora la funzione integrale $F(c)$ è monotona crescente su $[a, +\infty)$.*

Dimostrazione. Siano $c_1, c_2 \in [a, +\infty)$ due punti tali che $c_1 < c_2$. Grazie all'additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione (Teorema 9.33, i)), si ha

$$\begin{aligned} F(c_2) &= \int_a^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(c_1) + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è ≥ 0 per la proprietà di positività dell'integrale (Teorema 9.33, iii)). Si conclude che $F(c_2) \geq F(c_1)$. □

Corollario 10.3 *L'integrale improprio di una funzione positiva appartenente a $\mathcal{R}_{\text{loc}}([a, +\infty))$ è o convergente oppure divergente a $+\infty$.*

Dimostrazione. Segue dalla proposizione precedente, applicando il Teorema 3.27 alla funzione integrale F. □

Figura 10.1. Trapezoide di una funzione f definita sull'intervallo illimitato $[a, +\infty)$

Tornando all'interpretazione geometrica, possiamo dire che l'integrale improprio di una funzione positiva rappresenta l'area del trapezoide di f su $[a, +\infty)$ (vedasi la Figura 10.1). Tale regione illimitata può essere considerata come il limite, al crescere di c, delle regioni limitate rappresentate dai trapezoidi di f sui sottointervalli $[a, c]$. Il trapezoide di f su $[a, +\infty)$ ha dunque area finita se l'integrale improprio di f è convergente; si dice, invece, che ha area infinita quando l'integrale improprio diverge.

Esempi 10.4

i) Consideriamo le funzioni $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$. Studiamo l'integrale improprio di f su $[1, +\infty)$. Si ha

$$\int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^c & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \log x\big|_1^c & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \log c & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Pertanto, se $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \frac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \log c = +\infty.$$

Il comportamento dell'integrale improprio non cambia se l'estremo inferiore di integrazione è un qualunque punto $a > 0$. In conclusione, abbiamo

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1, \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}}$$

ii) Sia $f(x) = \cos x$. La funzione integrale

$$F(c) = \int_0^c \cos x \, \mathrm{d}x = \sin c$$

non ha limite per $c \to +\infty$. Ne segue che $\int_0^{+\infty} \cos x \, \mathrm{d}x$ è oscillante. □

L'integrale improprio eredita alcune delle proprietà dell'integrale definito. Precisamente, siano f, g due funzioni appartenenti a $\mathcal{R}([a, +\infty))$; allora,

i) per ogni $c > a$, si ha

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x;$$

ii) per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\int_a^{+\infty} \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x + \beta \int_a^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x;$$

iii) se $f \geq 0$ in $[a, +\infty)$, si ha

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

Tali relazioni si ottengono dalle proprietà *i)-iii)* del Teorema 9.33 e dalle proprietà dei limiti.

Criteri di convergenza

Data una funzione $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a, +\infty))$, non sempre è possibile stabilire la sua integrabilità su $[a, +\infty)$ facendo uso della definizione. Infatti, può accadere che la sua funzione integrale $F(c)$ non sia calcolabile esplicitamente. È utile allora avere dei criteri che garantiscano la convergenza o divergenza dell'integrale improprio. Nel caso di convergenza, l'eventuale problema di calcolare il valore numerico dell'integrale potrà essere affrontato facendo ricorso a tecniche più sofisticate, che esulano dallo scopo di questo testo.

Un primo criterio, che riguarda le funzioni positive, è il seguente.

Teorema 10.5 (**Criterio del confronto**) *Siano $f, g \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a, +\infty))$ due funzioni tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Allora*

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x. \tag{10.1}$$

In particolare,

i) *se l'integrale improprio di g converge, allora converge anche l'integrale improprio di f;*
ii) *se l'integrale improprio di f diverge, allora diverge anche l'integrale improprio di g.*

Dimostrazione. Per la proprietà di monotonia dell'integrale definito, usando l'ipotesi $0 \le f(x) \le g(x)$ su $[a, +\infty)$, si ha che

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x = G(c).$$

Ricordiamo che i limiti per $c \to +\infty$ delle funzioni integrali $F(c)$ e $G(c)$, esistono in base al Corollario 10.3; applicando a tali funzioni il primo Teorema del confronto per i limiti (Corollario 4.4) otteniamo

$$0 \le \lim_{c\to+\infty} F(c) \le \lim_{c\to+\infty} G(c),$$

che è esattamente la (10.1). Le implicazioni *i)* e *ii)* seguono ora direttamente dalla (10.1). □

Esempio 10.6

Studiamo la convergenza degli integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Poiché, per ogni $x \in [1, +\infty)$, si ha

$$\frac{\pi}{4} \le \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

ne segue che

$$\frac{\arctan x}{x^2} < \frac{\pi}{2x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{4x} \le \frac{\arctan x}{x}$$

e dunque

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4x}\,\mathrm{d}x \le \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Dall'Esempio 10.4, sappiamo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\,\mathrm{d}x$ converge, mentre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4x}\,\mathrm{d}x$ diverge. Applicando il Teorema 10.5, l'implicazione *i)* ci assicura che l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge mentre l'implicazione *ii)* ci dice che l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge. □

La convergenza dell'integrale di una funzione di segno variabile può essere studiata con il seguente criterio.

Teorema 10.7 (**Criterio di convergenza assoluta**) *Si consideri una funzione* $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a,+\infty))$ *tale che* $|f| \in \mathcal{R}([a,+\infty))$. *Allora* $f \in \mathcal{R}([a,+\infty))$ *e*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Definiamo le funzioni f_+ e f_-, dette rispettivamente **parte positiva** e **parte negativa** di f, nel modo seguente:

$$f_+(x) = \max(f(x),0) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \ge 0\,, \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

e

$$f_-(x) = \max(-f(x),0) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \ge 0\,, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che entrambe le funzioni sono sempre ≥ 0 e permettono di decomporre f e $|f|$ come

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \qquad \text{e} \qquad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \tag{10.2}$$

(vedasi la Figura 10.2). Da queste relazioni, per somma e differenza, segue che

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \qquad \text{e} \qquad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

da cui, per la proprietà *ii)* del Teorema 9.33, si deduce che $f_+, f_- \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a,+\infty))$. Poiché $0 \le f_+(x), f_-(x) \le |f(x)|$, per ogni $x \ge a$, possiamo applicare il Criterio del confronto 10.5 e ottenere che f_+ e f_- sono integrabili in senso improprio su $[a,+\infty)$. La prima delle (10.2) implica che anche f soddisfa tale proprietà.

Figura 10.2. Grafici di una funzione f (a sinistra), della sua parte positiva (al centro) e della sua parte negativa (a destra)

Infine, dalla proprietà *v)* del Teorema 9.33, segue che, per ogni $c > a$,

$$\left| \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x;$$

passando al limite per $c \to +\infty$ si ottiene la tesi. □

Esempio 10.8

Consideriamo l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poiché $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, la funzione $|f(x)| = \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ è integrabile su $[1, +\infty)$ per il Teorema 10.5, usando l'Esempio 10.4. Dunque l'integrale considerato è convergente per il criterio precedente e si ha

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$ □

Osservazione 10.9 Il Criterio di convergenza assoluta fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza di un integrale improprio.
Ad esempio,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{converge, ma} \quad \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x \quad \text{diverge} \tag{10.3}$$

(per la giustificazione si rimanda all'Appendice A.5.3, pag. 493). □

Le funzioni f tali che $|f| \in \mathcal{R}([a, +\infty))$ sono dette **assolutamente integrabili** su $[a, +\infty)$.

Un ultimo criterio di semplice applicazione si basa sullo studio dell'ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$ della funzione integranda.

Teorema 10.10 (**Criterio del confronto asintotico**) *Si consideri una funzione $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a, +\infty))$. Supponiamo che f abbia ordine di infinitesimo α per $x \to +\infty$ rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = \frac{1}{x}$.*

i) Se $\alpha > 1$, allora $f \in \mathcal{R}([a, +\infty))$;

ii) se $\alpha \leq 1$, allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Dimostrazione. Si veda l'Appendice A.5.3, pag. 494. □

Esempi 10.11

i) Consideriamo l'integrale

$$\int_1^{+\infty} (\pi - 2\arctan x)\,\mathrm{d}x.$$

Osserviamo che la funzione $f(x) = \pi - 2\arctan x$ è infinitesima di ordine 1 per $x \to +\infty$; infatti, applicando il Teorema di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2.$$

Pertanto l'integrale considerato è divergente.

ii) Studiamo la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+\cos x}{x^3+\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Poiché $\cos x = o(x)$ e $\sin x = o(x^3)$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\frac{x+\cos x}{x^3+\sin x} \sim \frac{1}{x^2} \qquad x \to +\infty.$$

Dunque l'integrale converge. □

Nel successivo esempio studiamo una famiglia di integrali impropri che estende quella considerata nell'Esempio 10.4 i).

Esempio 10.12

Prendiamo ora in esame la famiglia di integrali

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\,\mathrm{d}x$$

con α, $\beta > 0$.

i) Il caso $\alpha = 1$ può essere studiato attraverso un'integrazione esplicita; infatti, introducendo il cambiamento di variabile $t = \log x$, si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$$

e quindi l'integrale converge se $\beta > 1$ e diverge se $\beta \le 1$.

ii) Se $\alpha > 1$, è sufficiente osservare che $\log x \ge \log 2$ se $x \ge 2$ e dunque

$$\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \le \frac{1}{x^\alpha (\log 2)^\beta}, \qquad \forall x \ge 2.$$

Applicando il Criterio del confronto, concludiamo che l'integrale converge per ogni valore di β.

iii) Se $\alpha < 1$, scriviamo

$$\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} = \frac{1}{x}\,\frac{x^{1-\alpha}}{(\log x)^\beta}$$

e osserviamo che la funzione $\dfrac{x^{1-\alpha}}{(\log x)^\beta}$ tende a $+\infty$ per ogni β.

Dunque esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \geq \frac{M}{x}\,, \qquad \forall x \geq 2;$$

pertanto, applicando ancora il Criterio del confronto, l'integrale diverge. □

In alcuni casi è conveniente pensare il valore assunto per $x = k$ da una funzione f definita su una semiretta reale $[k_0, +\infty)$ come il termine generale a_k di una serie. In questo modo, sotto opportune ipotesi è possibile mettere in relazione il comportamento della serie con quello dell'integrale improprio della funzione su $[k_0, +\infty)$. Vale infatti il seguente risultato, la cui dimostrazione si trova nell'Appendice A.5.3, pag. 494.

Teorema 10.13 (**Criterio integrale**) *Sia f una funzione positiva, decrescente e continua in $[k_0, +\infty)$, con $k_0 \in \mathbb{N}$. Allora valgono le seguenti disuguaglianze*

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)\,; \tag{10.4}$$

pertanto, la serie e l'integrale improprio hanno lo stesso comportamento. Precisamente

a) $\displaystyle\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge* $\iff$ $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ *converge;*

b) $\displaystyle\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverge* $\iff$ $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ *diverge.*

Esempi 10.14

i) Il Criterio integrale permette di studiare la convergenza della **serie armonica generalizzata** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ per tutti i valori ammissibili del parametro α. Osserviamo infatti che la funzione $\dfrac{1}{x^\alpha}\,, \alpha > 0$, soddisfa le ipotesi del teorema e ha integrale improprio su $[1, +\infty)$ convergente se e solo se $\alpha > 1$. In conclusione

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1\,, \\ \text{diverge se } 0 < \alpha \leq 1\,. \end{cases}$$

ii) Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}\,.$$

Consideriamo $f(x) = \dfrac{1}{x \log x}$ e ricordiamo che il suo integrale su $[2, +\infty)$ diverge in quanto

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} \, \mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = +\infty.$$

Pertanto la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ diverge. □

Osserviamo infine che il concetto di integrale improprio può essere definito sulla semiretta $(-\infty, b]$, ponendo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Le proprietà e i criteri di convergenza presentati sopra si adattano facilmente a questa situazione.

10.1.2 Integrali di funzioni non limitate

Consideriamo ora un intervallo limitato $[a, b)$. Introduciamo l'insieme $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a, b))$ delle funzioni definite su $[a, b)$ e integrabili su ogni sottointervallo chiuso e limitato $[a, c]$ con $a < c < b$.

Se $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a, b))$ risulta quindi definita su $[a, b)$ la funzione integrale

$$F(c) = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Studiamo il comportamento limite di tale funzione per $c \to b^-$.

Definizione 10.15 *Sia $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a, b))$. Poniamo (formalmente)*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x; \tag{10.5}$$

il simbolo a primo membro viene detto **integrale improprio** *di f su $[a, b)$.*

i) Se il limite esiste ed è finito, si dice che la funzione f è integrabile (in senso improprio) su $[a, b)$ o, equivalentemente, che il suo **integrale** *improprio è* **convergente**.

*ii) Se il limite esiste ed è infinito, si dice che l'*__integrale__ *improprio di f è* **divergente**.

*iii) Se il limite non esiste, si dice che l'*__integrale__ *improprio di f è* **oscillante**.

L'insieme delle funzioni integrabili su $[a, b)$ verrà indicato con il simbolo $\mathcal{R}([a, b))$.

Osserviamo innanzitutto che se una funzione definita in $[a, b]$ è limitata e integrabile su $[a, b]$ (nel senso di Cauchy o di Riemann), allora essa è pure integrabile in senso improprio su $[a, b)$ ed il suo integrale improprio coincide con quello definito. Infatti, posto $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, si ha

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le M(b-c)\,;$$

passando al limite per $c \to b^-$, si ottiene proprio la (10.5). Ciò giustifica l'uso della stessa notazione per indicare tanto l'integrale definito quanto l'integrale improprio. Il concetto di integrale improprio su un intervallo limitato assume quindi rilevanza quando la funzione integranda è illimitata in un intorno del punto b.

Esempio 10.16

Consideriamo le funzioni $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ con $\alpha > 0$ (si veda la Figura 10.3 per un esempio). Studiamo l'integrale improprio di f su $[a, b)$. Si ha

$$\int_a^c \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\Big|_a^c & \text{se } \alpha \ne 1, \\ -\log(b-x)\big|_a^c & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-c)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha \ne 1, \\ \log\dfrac{b-a}{b-c} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Pertanto, se $\alpha \ne 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} \frac{(b-c)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Figura 10.3. Trapezoide della funzione illimitata $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ sull'intervallo $[\frac{1}{2}, 2)$

Se $\alpha = 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{b-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} \log\frac{b-a}{b-c} = +\infty.$$

In conclusione abbiamo

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < 1, \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}}$$

□

Analogamente a quanto fatto per gli integrali impropri su intervalli non limitati, è possibile dimostrare che se la funzione f è positiva su $[a, b)$, l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è o convergente oppure divergente a $+\infty$.

Valgono criteri di convergenza analoghi a quelli visti per gli integrali impropri su intervalli illimitati. Ci limitiamo a enunciare esplicitamente i Criteri del confronto e del confronto asintotico; le dimostrazioni verranno omesse, in quanto simili a quelle del caso precedente.

Teorema 10.17 (**Criterio del confronto**) *Siano $f, g \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a, b))$ due funzioni tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b)$. Allora*

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.6}$$

In particolare,

i) se l'integrale improprio di g converge, allora converge anche l'integrale improprio di f;

ii) se l'integrale improprio di f diverge, allora diverge anche l'integrale improprio di g.

Teorema 10.18 (**Criterio del confronto asintotico**) *Sia $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}([a, b))$. Supponiamo che f abbia ordine di infinito α per $x \to b^-$ rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = \dfrac{1}{b-x}$.*

i) Se $\alpha < 1$, allora $f \in \mathcal{R}([a, b))$;

ii) Se $\alpha \geq 1$, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

In modo analogo a quanto fatto per introdurre l'integrale improprio di funzioni definite su $[a, b)$, possiamo considerare l'integrale improprio su $(a, b]$, ponendo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Tutte le proprietà viste precedentemente valgono con le ovvie modifiche di notazioni.

Esempi 10.19

i) Studiamo l'integrale

$$\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

La funzione $f(x) = \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}$ è definita e continua in $[1, 3)$ ed è infinita per $x \to 3^-$. Poiché, $7 - x \le 6$ per ogni $x \in [1, 3)$, applicando il Criterio del confronto, si ha

$$\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}\,\mathrm{d}x \le \int_1^3 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x < +\infty$$

in base all'Esempio 10.16. Dunque l'integrale considerato converge.

ii) Prendiamo ora in esame

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x + 1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Poiché, per $x \in (1, 2]$,

$$\frac{\mathrm{e}+1}{(x-1)^2} < \frac{\mathrm{e}^x+1}{(x-1)^2}$$

per il Criterio del confronto si deduce che l'integrale assegnato diverge a $+\infty$.

iii) Studiamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Per $x \to 0^+$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; dunque, per il Criterio del confronto asintotico, l'integrale converge.

iv) Sia

$$\int_\pi^4 \frac{\log(x-3)}{x^3 - 8x^2 + 16x}\,\mathrm{d}x\,.$$

La funzione $f(x) = \dfrac{\log(x-3)}{x^3 - 8x^2 + 16x}$ è definita in $[\pi, 4)$ e tende a $+\infty$ per $x \to 4^-$. Inoltre,

$$f(x) = \frac{\log(1 + (x-4))}{x(x-4)^2} \sim \frac{1}{4(x-4)}, \quad x \to 4^-,$$

quindi, ancora per il Criterio del confronto asintotico, l'integrale diverge a $-\infty$ (si osservi che la funzione $f(x) = 1/(x-4)$ è negativa in un intorno sinistro di $x = 4$). □

10.2 Altri integrali impropri

Supponiamo, infine, di voler studiare l'integrabilità di una funzione definita su un intervallo I, limitato o non limitato, la quale eventualmente presenti un numero finito di punti in cui non sia limitata. È allora possibile suddividere l'intervallo I nell'unione di un numero finito di sottointervalli I_j, $j = 1, \dots, n$, su ognuno dei quali si verifichi soltanto una delle situazioni esaminate nei due paragrafi precedenti (si veda la Figura 10.4). Scelta la suddivisione, poniamo formalmente

$$\boxed{\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}x\,.}$$

Si dice che l'**integrale improprio** di f su I **converge** se convergono tutti gli integrali a secondo membro. Inoltre, non è difficile verificare che il comportamento dell'integrale e il suo valore in caso di convergenza sono indipendenti dalla suddivisione prescelta dell'intervallo I.

Esempi 10.20

i) Studiamo l'integrale

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Scegliendo ad esempio l'origine come punto di suddivisione della retta reale, scriviamo

Figura 10.4. Trapezoide di una funzione illimitata su un intervallo illimitato

$$S = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,;$$

entrambi gli integrali convergono e valgono $\pi/2$, dunque $S = \pi$.

ii) Consideriamo l'integrale

$$S_1 = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

La funzione integranda è infinita nell'origine, pertanto suddividiamo la semiretta $(0, +\infty)$ ad esempio nei due sottointervalli $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$ e scriviamo

$$S_1 = \int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,;$$

poiché

$$\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to 0^+ \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}\,,$$

il primo integrale diverge per il Criterio del confronto asintotico 10.18, mentre il secondo converge per il Criterio del confronto 10.5. In definitiva S_1 diverge a $+\infty$.

Se invece consideriamo l'integrale

$$S_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

con un ragionamento analogo, possiamo concludere che l'integrale converge.

iii) Sia

$$S = \int_{1}^{6} \frac{x-5}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-6x+8}}\,\mathrm{d}x\,.$$

La funzione integranda è infinita in -1 (che però è fuori dell'intervallo di integrazione), in 2 e in 4. Dunque possiamo scrivere

$$S = \left(\int_{1}^{2} + \int_{2}^{3} + \int_{3}^{4} + \int_{4}^{6}\right) \frac{x-5}{(x+1)\sqrt[3]{(x-2)(x-4)}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Poiché la funzione ha ordine di infinito $1/3$ sia per $x \to 2^{\pm}$ sia per $x \to 4^{\pm}$, l'integrale converge. □

10.3 Integrali curvilinei

Passiamo ora al calcolo integrale sulle curve, che verrà trattato in questo e nel successivo paragrafo. In molte applicazioni, è utile integrare una funzione reale definita sul sostegno di una curva (si veda il § 8.4). Introduciamo quindi il concetto di integrale curvilineo; esso rappresenta il primo esempio di integrazione di una funzione di più variabili reali.

Sia $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ (con $d = 2, 3$) un arco di curva regolare, e sia $C = \boldsymbol{\gamma}([a, b])$ il suo sostegno. Sia poi $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione definita almeno su C,

cioè tale che $C \subseteq \operatorname{dom} f$. Supponiamo che la funzione composta $f \circ \boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita come $(f \circ \boldsymbol{\gamma})(t) = f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)$, sia continua su $[a,b]$.

Definizione 10.21 *L'***integrale curvilineo** *di f su $\boldsymbol{\gamma}$ è il numero*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\, \mathrm{d}t\,, \tag{10.7}$$

dove $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2}$ *è il modulo (cioè la norma euclidea) del vettore* $\boldsymbol{\gamma}'(t)$.

Notiamo che l'integrale a secondo membro della (10.7) è ben definito in quanto la funzione integranda $f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ è continua su $[a,b]$. Infatti $\boldsymbol{\gamma}$ è per ipotesi regolare, dunque le derivate prime delle sue componenti sono funzioni continue e quindi anche la norma $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ ha tale proprietà, essendo ottenuta componendo funzioni continue; inoltre $f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)$ è continua per ipotesi.

L'integrale curvilineo ha il seguente significato geometrico. Sia $\boldsymbol{\gamma}$ un arco semplice di curva piana e sia f non negativa su C; sia

$$\Gamma(f) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \operatorname{dom} f,\ z = f(x,y)\big\}$$

il grafico di f. Indichiamo con

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in C,\ 0 \le z \le f(x,y)\big\}$$

la superficie verticale delimitata inferiormente dal sostegno C della curva $\boldsymbol{\gamma}$ e superiormente dal grafico di f (si veda la Figura 10.5). Allora si può dimostrare che l'area di Σ è uguale all'integrale curvilineo di f su $\boldsymbol{\gamma}$. Ad esempio, se f è costante e uguale a h su C, l'area di Σ è data dal prodotto dell'altezza h per la

Figura 10.5. Significato geometrico dell'integrale curvilineo

lunghezza della base C; nel § 10.3.1 daremo evidenza al fatto che tale lunghezza si esprime come $\ell(C) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\,\mathrm{d}t$ e dunque in tal caso

$$\operatorname{area}(\Sigma) = h\,\ell(C) = \int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f\,.$$

Esempi 10.22

i) Sia $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ l'arco di curva regolare $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2)$ che parametrizza la parte della parabola $y = x^2$ compresa tra i punti $O = (0,0)$ e $A = (1,1)$. Si ha $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (1, 2t)$ e dunque $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$. Sia poi $f : \mathbb{R} \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = 3x + \sqrt{y}$. La funzione composta $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ vale $f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) = 3t + \sqrt{t^2} = 4t$. Pertanto

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_0^1 4t\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

che si calcola con la sostituzione $s = 1 + 4t^2$ ottenendo

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = 2\int_1^5 \sqrt{s}\,\mathrm{d}s = 2\Big[\frac{2}{3}s^{3/2}\Big]_1^5 = \frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 1)\,.$$

ii) Sia $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la parametrizzazione della circonferenza di centro $(2,1)$ e raggio 2 data da $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2 + \cos t, 1 + \sin t)$, per la quale si ha $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$ per ogni t. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = (x-2)(y-1) + 1$, si ha $f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) = 4\sin t\cos t + 1$ e dunque

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = 2\int_0^{2\pi} (4\sin t\cos t + 1)\,\mathrm{d}t = 2\big[2\sin 2t + t\big]_0^{2\pi} = 4\pi\,.$$

Se invece si parametrizza la stessa circonferenza mediante la curva $\overline{\boldsymbol{\gamma}}$ avente le stesse componenti di $\boldsymbol{\gamma}$ ma con t variabile in $[0, 2k\pi]$ (cioè si percorre la circonferenza k volte), si ha

$$\int_{\overline{\boldsymbol{\gamma}}} f = 2\int_0^{2k\pi} (4\sin t\cos t + 1)\,\mathrm{d}t = 4k\pi\,. \qquad \square$$

L'ultimo esempio considerato mostra che l'integrale curvilineo di una funzione non dipende solo dal sostegno della curva, ma anche dal modo con cui tale sostegno viene parametrizzato. Tuttavia, parametrizzazioni equivalenti od opposte, nel senso di seguito precisato, danno luogo allo stesso integrale curvilineo.

Definizione 10.23 *Siano $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^d$ e $\boldsymbol{\delta} : J \to \mathbb{R}^d$ due curve regolari. Esse si dicono* **equivalenti** *se esiste una biiezione $\varphi : J \to I$, derivabile con derivata continua e strettamente positiva, tale che*

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\gamma} \circ \varphi\,,$$

cioè $\delta(\tau) = \boldsymbol{\gamma}\big(\varphi(\tau)\big)$ per ogni $\tau \in J$.

Definizione 10.24 *Sia $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^d$ una curva regolare. Detto $-I$ l'intervallo $\{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$, la curva $-\boldsymbol{\gamma} : -I \to \mathbb{R}^d$ definita da $(-\boldsymbol{\gamma})(t) = \boldsymbol{\gamma}(-t)$ si chiama l'* **opposta** *di $\boldsymbol{\gamma}$.*

L'opposta di una curva $\boldsymbol{\gamma}$ si può ancora scrivere come $(-\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\gamma} \circ \varphi$, dove $\varphi : -I \to I$ è la biiezione $\varphi(t) = -t$. Notiamo poi che se $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ è un arco di curva regolare, allora $-\boldsymbol{\gamma}$ è un arco regolare definito sull'intervallo $[-b, -a]$.

È conveniente dire che due curve regolari $\boldsymbol{\gamma}$ e $\boldsymbol{\delta}$ sono **congruenti** se esse sono equivalenti oppure se l'una è equivalente all'opposta dell'altra. Ciò significa che $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\gamma} \circ \varphi$ con φ biiezione derivabile, avente derivata continua e di segno costante.

È importante per il seguito osservare che due curve congruenti hanno lo stesso sostegno. Inoltre, tutte le curve congruenti a una curva semplice sono ancora semplici.

Sia f una funzione definita sul sostegno di un arco regolare $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ e tale che $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ sia continua, di modo che esista l'integrale curvilineo di f su $\boldsymbol{\gamma}$. Allora le funzioni $f \circ \boldsymbol{\delta}$ (con $\boldsymbol{\delta}$ arco equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$) e $f \circ (-\boldsymbol{\gamma})$ sono continue, in quanto ottenute componendo una funzione continua tra due intervalli della retta reale con la funzione continua $f \circ \boldsymbol{\gamma}$.

Proposizione 10.25 *Sia $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ un arco di curva regolare, di sostegno C, e sia f una funzione definita su C e tale che $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ sia continua. Allora si ha*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_{-\boldsymbol{\gamma}} f \qquad e \qquad \int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_{\boldsymbol{\delta}} f\,,$$

per ogni curva $\boldsymbol{\delta}$ equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$.

Dimostrazione. Osserviamo che $(-\boldsymbol{\gamma})'(t) = -\boldsymbol{\gamma}'(-t)$ e dunque $\|(-\boldsymbol{\gamma})'(t)\| = \|\boldsymbol{\gamma}'(-t)\|$. Pertanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\boldsymbol{\gamma}} f &= \int_{-b}^{-a} f\big((-\boldsymbol{\gamma})(t)\big)\,\|(-\boldsymbol{\gamma})'(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-b}^{-a} f\big(\boldsymbol{\gamma}(-t)\big)\,\|\boldsymbol{\gamma}'(-t)\|\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Con la sostituzione $s = -t$, da cui $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}t$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\boldsymbol{\gamma}} f &= -\int_{b}^{a} f\big(\boldsymbol{\gamma}(s)\big)\,\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{a}^{b} f\big(\boldsymbol{\gamma}(s)\big)\,\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f\,.\end{aligned}$$

Analogamente, se $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\gamma} \circ \varphi$, con $\varphi : [c,d] \to [a,b]$, è un arco equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$, si ha $\boldsymbol{\delta}'(\tau) = \boldsymbol{\gamma}'\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau)$ con $\varphi'(\tau) > 0$. Dunque

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\delta}} f &= \int_c^d f\big(\boldsymbol{\delta}(\tau)\big)\, \|\boldsymbol{\delta}'(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_c^d f\big(\boldsymbol{\gamma}(\varphi(\tau))\big)\, \|\boldsymbol{\gamma}'\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_c^d f\big(\boldsymbol{\gamma}(\varphi(\tau))\big)\, \|\boldsymbol{\gamma}'\big(\varphi(\tau)\big)\|\, \varphi'(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

Ora eseguiamo la sostituzione $t = \varphi(\tau)$, da cui $\mathrm{d}t = \varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau$, ottenendo

$$\int_{\boldsymbol{\delta}} f = \int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f\,. \qquad \square$$

In base alla proposizione precedente, si ha immediatamente il seguente risultato.

Corollario 10.26 *L'integrale curvilineo di una funzione non cambia se alla curva sostituiamo una curva ad essa congruente.*

Notiamo che, detto c un qualunque punto in (a,b) e posto $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\gamma}_{|[a,c]}$ e $\boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\gamma}_{|[c,b]}$, si ha, per la proprietà di additività dell'integrale definito rispetto all'intervallo di integrazione,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_{\boldsymbol{\gamma}_1} f + \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} f\,. \tag{10.8}$$

Tale proprietà suggerisce come estendere in modo naturale il concetto di integrale curvilineo agli archi regolari a tratti. Più precisamente sia $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ un arco regolare a tratti e siano $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ punti di $[a,b]$ tali che gli archi di curva $\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{\gamma}_{|[a_{i-1},a_i]}$, $i = 1,\ldots,n$, siano archi regolari. Sia ora f, come prima, una funzione definita almeno su C e tale che la funzione composta $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ sia continua a tratti su $[a,b]$. Si pone allora per definizione

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\boldsymbol{\gamma}_i} f\,.$$

Tale definizione è coerente con la proprietà additiva (10.8) delle curve regolari.

Osservazione 10.27 Il calcolo di un integrale curvilineo relativo a un arco regolare a tratti, può essere reso più agevole usando il Corollario 10.26. Infatti si ha

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\boldsymbol{\delta}_i} f} \tag{10.9}$$

dove ogni $\boldsymbol{\delta}_i$ è un arco di curva congruente a $\boldsymbol{\gamma}_i$, $i = 1, \dots, n$, scelto in modo da semplificare il calcolo del corrispondente integrale a secondo membro. □

Esempio 10.28

Si voglia calcolare $\int_{\boldsymbol{\gamma}} x^2$, dove $\boldsymbol{\gamma} : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ è la seguente parametrizzazione del bordo del quadrato unitario $[0,1] \times [0,1]$:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1(t) = (t, 0) & 0 \le t < 1\,, \\ \boldsymbol{\gamma}_2(t) = (1, t-1) & 1 \le t < 2\,, \\ \boldsymbol{\gamma}_3(t) = (3-t, 1) & 2 \le t < 3\,, \\ \boldsymbol{\gamma}_4(t) = (0, 4-t) & 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

(si veda la Figura 10.6, a sinistra). Introduciamo le parametrizzazioni dei lati del quadrato

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\delta}_1(t) = \boldsymbol{\gamma}_1(t) && 0 \le t \le 1\,, && \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\gamma}_1\,, \\ &\boldsymbol{\delta}_2(t) = (1, t) && 0 \le t \le 1\,, && \boldsymbol{\delta}_2 \sim \boldsymbol{\gamma}_2\,, \\ &\boldsymbol{\delta}_3(t) = (t, 1) && 0 \le t \le 1\,, && \boldsymbol{\delta}_3 \sim -\boldsymbol{\gamma}_3\,, \\ &\boldsymbol{\delta}_4(t) = (0, t) && 0 \le t \le 1\,, && \boldsymbol{\delta}_4 \sim -\boldsymbol{\gamma}_4 \end{aligned}$$

(si veda la Figura 10.6, a destra). Allora si ha

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} x^2 = \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 0 \,\mathrm{d}t = \frac{5}{3}\,.$$ □

Figura 10.6. Parametrizzazione del quadrato unitario relativo all'Esempio 10.28

10.3.1 Lunghezza di un arco e ascissa curvilinea

Sia $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un arco regolare a tratti; definiamo **lunghezza** di $\boldsymbol{\gamma}$ il numero

$$\boxed{\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} 1\,.} \tag{10.10}$$

Nel caso di arco regolare, $\ell(\boldsymbol{\gamma})$ si esprime come

$$\boxed{\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\,.} \tag{10.11}$$

Tale definizione trova la seguente giustificazione geometrica. Introduciamo una suddivisione di $[a, b]$ mediante i punti $a = t_0 < t_1 < \ldots, t_{n-1} < t_n = b$ e consideriamo i punti $P_i = \boldsymbol{\gamma}(t_i) \in C$, $i = 0, \ldots, n$. Tali punti individuano una poligonale in $\mathbb{R}^3$ (eventualmente degenere) la cui lunghezza è data da

$$\ell(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dist}\,(P_{i-1}, P_i)$$

dove $\mathrm{dist}\,(P_{i-1}, P_i) = \|P_i - P_{i-1}\|$ è la distanza euclidea di due punti. Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned}\|P_i - P_{i-1}\| &= \sqrt{\big(x(t_i) - x(t_{i-1})\big)^2 + \big(y(t_i) - y(t_{i-1})\big)^2 + \big(z(t_i) - z(t_{i-1})\big)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)_i^2}\,\Delta t_i\end{aligned}$$

avendo posto $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_i = \left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)\,,$$

e similmente per le altre coordinate. Si ha dunque

$$\ell(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)_i^2}\,\Delta t_i\,;$$

si noti l'analogia con l'ultimo integrale della (10.11), di cui tale espressione può considerarsi un'approssimazione. Si dimostra che, se la curva è regolare a tratti, l'estremo superiore della quantità $\ell(t_0, t_1, \ldots, t_n)$, al variare di tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$, è finito e coincide con $\ell(\boldsymbol{\gamma})$.

Osserviamo che la lunghezza di un arco, così come definita dalla (10.10), dipende non solo dal sostegno C dell'arco, ma anche dalla particolare parametrizzazione

scelta. Ad esempio, se parametrizziamo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ mediante $\boldsymbol{\gamma}_1(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, abbiamo

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}_1) = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r\,,$$

come ben noto dalla geometria elementare. Se invece usiamo la parametrizzazione $\boldsymbol{\gamma}_2(t) = (r\cos 2t, r\sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$ otteniamo

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}_2) = \int_0^{2\pi} 2r\,\mathrm{d}t = 4\pi r\,.$$

In questo secondo caso, la circonferenza è stata percorsa due volte. In base alla Proposizione 10.25, due archi congruenti hanno la stessa lunghezza. Si può dimostrare che la lunghezza di un arco *semplice* dipende solo dal suo sostegno C; essa viene detta **lunghezza** di C e indicata con $\ell(C)$. Nell'esempio precedente, $\boldsymbol{\gamma}_1$ è semplice mentre $\boldsymbol{\gamma}_2$ non lo è; come si è visto, la lunghezza $\ell(C)$ della circonferenza è data da $\ell(\boldsymbol{\gamma}_1)$.

Sia $\boldsymbol{\gamma}$ una curva regolare definita sull'intervallo I. Fissiamo un punto arbitrario $t_0 \in I$ e introduciamo la funzione $s : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{\gamma}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\,.} \tag{10.12}$$

Ricordando l'espressione della lunghezza di un arco regolare data dalla (10.11), si ha

$$s(t) = \begin{cases} \ell(\boldsymbol{\gamma}_{|[t_0,t]}) & \text{se } t > t_0\,, \\ 0 & \text{se } t = t_0\,, \\ -\ell(\boldsymbol{\gamma}_{|[t,t_0]}) & \text{se } t < t_0\,. \end{cases}$$

La funzione s permette di definire una curva equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$ che fornisce una nuova parametrizzazione del sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$. Infatti, ricordando il Teorema fondamentale del calcolo integrale e la definizione di curva regolare, si ha

$$s'(t) = \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| > 0\,, \qquad \forall t \in I\,;$$

pertanto la funzione s è strettamente crescente e dunque invertibile su I. Detto $J = s(I)$, l'intervallo immagine di I attraverso s, indichiamo con $t : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ la funzione inversa di s. In altri termini, esprimiamo il parametro t in funzione di un nuovo parametro s, come $t = t(s)$. La curva $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}} : J \to \mathbb{R}^d$ definita come $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\gamma}\big(t(s)\big)$ è equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$ (in particolare ha lo stesso sostegno C). Se $P_1 = \boldsymbol{\gamma}(t_1)$ è un punto arbitrario su C, avremo anche $P_1 = \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s_1)$ con t_1 e s_1 legati dalla relazione $t_1 = t(s_1)$. Il numero s_1 è detto **ascissa curvilinea** di P_1.

Ricordando l'espressione della derivata di una funzione inversa, si osservi che

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}'(s) = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}t}\big(t(s)\big)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|}\,,$$

da cui segue

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}'(s)\| = 1\,, \qquad \forall s \in J\,.$$

Questo significa che usando l'ascissa curvilinea il sostegno della curva viene percorso con "velocità" costante uguale a 1.

Osservazione 10.29 Sia $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}$ un arco regolare e sia s l'ascissa curvilinea definita dalla (10.12) con $t_0 = a$; allora $s(a) = 0$ e $s(b) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = \ell(\boldsymbol{\gamma})$. Usando tale parametro per esprimere l'integrale curvilineo di una funzione f, si ha

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}} f = \int_0^{\ell(\boldsymbol{\gamma})} f\big(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)\big)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\ell(\boldsymbol{\gamma})} f\big(\boldsymbol{\gamma}(t(s))\big)\,\mathrm{d}s\,. \qquad \square$$

La definizione precedente di ascissa curvilinea può essere estesa in modo ovvio alle curve regolari a tratti.

Esempio 10.30

Sia $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ il cui sostegno è l'elica circolare (vedasi l'Esempio 8.8 vi)). Si ha $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t, 1)\| = (\sin^2 t + \cos^2 t + 1)^{1/2} = \sqrt{2}$. Pertanto, scegliendo $t_0 = 0$, abbiamo

$$s(t) = \int_0^t \|\boldsymbol{\gamma}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{2}\int_0^t \mathrm{d}\tau = \sqrt{2}t\,.$$

Ne segue che $t = t(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s$, con $s \in \mathbb{R}$ e l'elica circolare può essere riparametrizzata mediante l'ascissa curvilinea come

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}s, \sin\frac{\sqrt{2}}{2}s, \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\,. \qquad \square$$

10.4 Integrali di linea

In questo paragrafo, introduciamo le nozioni di campo vettoriale e di integrale di linea, che permettono di tradurre in termini matematici concetti fisici fondamentali, quali ad esempio quelli di campo di forze e di lavoro di una forza.

Definizione 10.31 *Sia Ω un sottoinsieme non vuoto in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Una funzione $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ dicesi* **campo vettoriale** *in Ω.*

Indichiamo con $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$, le **componenti** di $\boldsymbol{F}$, ossia scriviamo $\boldsymbol{F} = (f_1, \ldots, f_d)$. Usando i versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ introdotti nel § 8.2.2, possiamo anche scrivere $\boldsymbol{F} = f_1\boldsymbol{i} + f_2\boldsymbol{j}$ se $d = 2$ e $\boldsymbol{F} = f_1\boldsymbol{i} + f_2\boldsymbol{j} + f_3\boldsymbol{k}$ se $d = 3$.

Il concetto di integrale curvilineo può essere esteso ai campi vettoriali dando origine al concetto di integrale di linea. Precisamente sia $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ un arco

regolare tale che il sostegno $C = \boldsymbol{\gamma}([a,b])$ sia contenuto in Ω; in tal modo è definita su $[a,b]$ la funzione composta $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\gamma} : t \mapsto \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)$ a valori in $\mathbb{R}^d$. Supporremo che tale funzione sia continua, vale a dire che tutte le componenti $f_i\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)$, definite su $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$ siano funzioni continue. Per ogni $t \in [a,b]$, indichiamo con

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|}$$

il **versore tangente** al sostegno dell'arco nel punto $P(t) = \boldsymbol{\gamma}(t)$. La funzione scalare $F_\tau = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau}$ definita come

$$F_\tau(t) = \big(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\big)(t) = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \cdot \boldsymbol{\tau}(t)$$

rappresenta la componente del campo $\boldsymbol{F}$ lungo il versore tangente al sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ in $P = \boldsymbol{\gamma}(t)$.

Definizione 10.32 *L'***integrale di linea** *di $\boldsymbol{F}$ su $\boldsymbol{\gamma}$ è l'integrale curvilineo su $\boldsymbol{\gamma}$ della funzione F_τ. Poniamo dunque*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}P = \int_{\boldsymbol{\gamma}} F_\tau \,.$$

Si osservi che l'integrale a secondo membro vale

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} F_\tau = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \cdot \boldsymbol{\tau}(t)\, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\, \mathrm{d}t \,.$$

Pertanto l'integrale di linea di $\boldsymbol{F}$ su $\boldsymbol{\gamma}$ può essere espresso come

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}P = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\, \mathrm{d}t \,.} \tag{10.13}$$

Il significato fisico è di particolare importanza. Se $\boldsymbol{F}$ descrive un campo di forze applicato al sostegno della curva, l'integrale di linea rappresenta il lavoro compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}$ nello spostamento lungo il sostegno dell'arco $\boldsymbol{\gamma}$. La seguente proposizione è la controparte della Proposizione 10.25 per gli integrali di linea.

Proposizione 10.33 *Sia $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ un arco di curva regolare, di sostegno C, e sia $\boldsymbol{F}$ un campo vettoriale definito su C e tale che $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\gamma}$ sia continua. Allora si ha*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}P = -\int_{-\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}P \qquad e \qquad \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}P = \int_{\boldsymbol{\delta}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}P \,,$$

per ogni curva $\boldsymbol{\delta}$ equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$.

Da un punto di vista fisico la proposizione assicura che il lavoro di una forza cambia segno cambiando il verso di percorrenza del sostegno dell'arco; una volta scelto il verso, il lavoro dipende soltanto dal sostegno e non dal modo con cui esso viene percorso.

Esempi 10.34

i) Consideriamo il campo vettoriale piano $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $\boldsymbol{F}(x, y) = (y, x)$. Consideriamo poi l'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ che parametrizziamo mediante l'arco $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (3\cos t, 2\sin t)$. Si ha $\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) = (2\sin t, 3\cos t)$ e $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (-3\sin t, 2\cos t)$. Allora

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}P &= \int_0^{2\pi} (2\sin t, 3\cos t) \cdot (-3\sin t, 2\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= 6\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = 6\int_0^{2\pi} (2\cos^2 t - 1)\,\mathrm{d}t \\ &= 12\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t - 12\pi = 0\,,\end{aligned}$$

poiché, ricordando l'Esempio 9.9 ii), si ha

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi\,.$$

ii) Sia ora $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (\mathrm{e}^x, x+y, y+z)$ e sia $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ l'arco $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, t^3)$. Abbiamo

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) = (\mathrm{e}^t, t + t^2, t^2 + t^3) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\gamma}'(t) = (1, 2t, 3t^2)\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}P &= \int_0^1 (\mathrm{e}^t, t + t^2, t^2 + t^3) \cdot (1, 2t, 3t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big[\mathrm{e}^t + 2(t^2 + t^3) + 3(t^4 + t^5)\big]\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} + \frac{19}{15}\,.\end{aligned}$$

□

10.5 Esercizi

1. *Verificare la convergenza dei seguenti integrali impropri e calcolarne il valore:*

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}\,\mathrm{d}x$

2. *Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:*

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\log^2(2+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x-x^2}}{\sin \pi x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\log x}{\sqrt{|\log(1-\sin x)|}}\,\mathrm{d}x$

3. *Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^n}}\,\mathrm{d}x$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$. Calcolarlo per il più piccolo valore per cui converge.

4. *Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono i seguenti integrali impropri:*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x^3+5x^2+8x+4|^\alpha}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(4+9x)^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}\,\mathrm{d}x$

5. *Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale*

$$\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^\alpha}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$$

e calcolarlo per $\alpha = 0$.

6. *Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\log(x+1)-\log x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x-1-\sin x}{\mathrm{e}^{\pi x}-1-\sin \pi x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\log\frac{x-2}{x+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sin x-(x+x^2)\log(\mathrm{e}+x)}\,\mathrm{d}x$

7. *Calcolare l'integrale curvilineo della funzione*

$$f(x,y,z) = \frac{x^2(1+8y)}{\sqrt{1+y+4x^2y}}$$

sull'arco $\boldsymbol{\gamma}$ definito da $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, \log t)\,,\ t \in [1,2]$.

8. *Calcolare l'integrale curvilineo della funzione* $f(x,y) = x$ *sull'arco chiuso e semplice* $\boldsymbol{\gamma}$ *il cui sostegno è l'unione dell'arco di parabola di equazione* $y = 4 - x^2$ *percorso da* $A = (-2,0)$ *a* $C = (2,0)$ *e dell'arco di circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 = 4$ *di estremi* C *e* A.

9. *Calcolare l'integrale curvilineo della funzione* $f(x,y) = x + y$ *sull'arco chiuso e semplice* $\boldsymbol{\gamma}$ *il cui sostegno, contenuto nel primo quadrante, è l'unione del segmento di estremi* $O = (0,0)$ *e* $A = (1,0)$, *dell'arco di ellisse di equazione* $4x^2 + y^2 = 4$ *di estremi* A *e* $B = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ *e del segmento che unisce* B *all'origine.*

10. *Calcolare l'integrale curvilineo della funzione* $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ *sull'arco chiuso e semplice* $\boldsymbol{\gamma}$ *il cui sostegno è l'unione del segmento di estremi l'origine e il punto* $A = (\sqrt{2}, 0)$, *dell'arco di cerchio di equazione* $x^2 + y^2 = 2$ *di estremi* A *e* $B = (1,1)$ *e del segmento che unisce* B *all'origine.*

11. *Calcolare l'integrale di linea del campo* $\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2, xy)$ *sull'arco* $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^2, t)$, $t \in [0,1]$.

12. *Calcolare l'integrale di linea del campo* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z, y, 2x)$ *sull'arco* $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$.

13. *Calcolare l'integrale di linea del campo* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2\sqrt{z}, x, y)$ *sull'arco* $\boldsymbol{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, t^2)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

14. *Calcolare l'integrale di linea del campo* $\boldsymbol{F}(x,y) = (xy^2, x^2y)$ *sull'arco semplice* $\boldsymbol{\gamma}$ *il cui sostegno è formato dai tre segmenti consecutivi di estremi* $A = (0,1)$, $B = (1,1)$, $C = (0,2)$ *e* $D = (1,2)$.

15. *Calcolare l'integrale di linea del campo* $\boldsymbol{F}(x,y) = (0, y)$ *sull'arco chiuso e semplice il cui sostegno è l'unione del segmento di estremi l'origine e* $A = (1,0)$, *dell'arco di circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 = 1$ *di estremi* A *e* $B = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *e del segmento che unisce* B *all'origine.*

10.5.1 Soluzioni

1. Verifica di convergenza e calcolo di integrali impropri:

a) $\log 2$; b) $\frac{1}{2}$.

c) La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-2}}$ non è limitata in $x = 0$ e in $x = 2$. Il punto $x = 0$ è esterno all'intervallo di integrazione e quindi non lo prendiamo in considerazione. Possiamo pertanto suddividere l'integrale come

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = S_1 + S_2\,.$$

Osserviamo che per $x \to 2^+$, $f(x) \sim \frac{1}{2(x-2)^{1/2}}$ e dunque l'ordine di infinito della funzione è $\frac{1}{2} < 1$. Pertanto, per il Criterio del confronto asintotico 10.18, l'integrale S_1 converge. Per verificare la convergenza di S_2, studiamo il comportamento di f per $x \to +\infty$. Si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{x \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}}\,, \qquad x \to +\infty\,.$$

Dunque per Criterio del confronto asintotico 10.10 anche S_2 converge.
Per calcolare l'integrale, poniamo $t^2 = x - 2$, da cui $2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ e $x = t^2 + 2$. Quindi

$$S = \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,.$$

d) La funzione integranda è infinita per $x = 0$ e $x = 4$. Quest'ultimo punto non appartiene all'intervallo di integrazione. In $x = 0$, si ha

$$f(x) \sim -\frac{1}{4\sqrt{|x|}} \quad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

quindi l'integrale converge per Criterio del confronto asintotico 10.18 applicato ai due integrali

$$S_1 = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad S_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Per calcolare S_1, poniamo $t^2 = -x$ da cui $2t\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ e $x - 4 = -t^2 - 4$. Allora

$$S_1 = -\int_0^1 \frac{2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = -\arctan\frac{t}{2}\Big|_0^1 = -\arctan\frac{1}{2}\,.$$

Analogamente, ponendo $t^2 = x$ si ha

$$S_2 = \int_0^1 \frac{2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log\frac{1}{3}\,.$$

Dunque $S = S_1 + S_2 = -\left(\arctan\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 3\right)$.

2. *Studio della convergenza di integrali impropri:*

a) Converge.

b) La funzione $f(x) = \frac{1}{\log^2(2+\mathrm{e}^x)}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ in quanto $2 + \mathrm{e}^x > 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Si ha

$$\log(2+\mathrm{e}^x) = \log \mathrm{e}^x(1+2\mathrm{e}^{-x}) = x + \log(1+2\mathrm{e}^{-x})\,,$$

quindi

$$f(x) = \frac{1}{(x+\log(1+2\mathrm{e}^{-x}))^2} \sim \frac{1}{x^2}\,, \qquad x \to +\infty\,.$$

Dunque l'integrale converge per il Criterio del confronto asintotico 10.10.

c) Converge.

d) Nell'intervallo di integrazione la funzione integranda è limitata. Inoltre

$$\frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,, \qquad \forall x \geq \mathrm{e}\,.$$

Dunque, per il Criterio del confronto 10.5, l'integrale diverge.

e) Converge; f) Converge.

g) La funzione integranda non è definita per $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\pi$. Osserviamo che per $x=\frac{\pi}{2}$, la funzione è prolungabile per continuità a -1 in quanto, ponendo $t = x - \frac{\pi}{2}$, risulta

$$\cos x = \cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\sin t = -\sin(x-\frac{\pi}{2})$$

e dunque

$$f(x) = \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x\sqrt{\sin x}} \sim -1\,, \quad x \to \frac{\pi}{2}\,.$$

Quindi l'integrale in $x=\frac{\pi}{2}$ non è improprio. Inoltre

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\,, \quad x \to 0^+\,; \qquad f(x) \sim -\frac{\pi}{2\sqrt{\pi-x}}\,, \quad x \to \pi^-\,.$$

Quindi l'integrale converge per il Criterio del confronto asintotico 10.18.

h) La funzione integranda non è definita per $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\pi$. Per $x \to 0^+$, risulta

$$f(x) \sim \frac{\pi \log x}{|\log(1-x)|^{1/2}} \sim \frac{\pi \log x}{\sqrt{x}}\,.$$

La funzione non ha ordine di infinito rispetto all'infinito campione $\frac{1}{x}$; tuttavia essa è sicuramente un infinito di ordine inferiore ad ogni potenza $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, in quanto il logaritmo è un infinito di ordine inferiore a una qualunque potenza $\frac{1}{x^q}$ con $q > 0$, per $x \to 0^+$. Pertanto, per il Criterio del confronto asintotico 10.18, l'integrale in 0 converge.
Per $x \to \frac{\pi}{2}$, la funzione tende a 0; dunque in $x=\frac{\pi}{2}$ l'integrale non è improprio.
Per $x \to \pi^-$, si ha

$$f(x) \sim \frac{(\log \pi)(\pi-x)}{|\log(1+\sin(x-\pi))|^{1/2}} \sim \frac{(\log \pi)(\pi-x)}{|\sin(x-\pi)|^{1/2}} \sim (\log \pi)(\pi-x)^{1/2}$$

e quindi, ancora, l'integrale in $x=\pi$ non è improprio in quanto la funzione tende a 0. In definitiva, l'integrale assegnato converge.

3. Osserviamo che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e

$$f(x) \sim \frac{x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}}\,, \qquad x \to +\infty\,.$$

Pertanto l'integrale converge se $n-1>1$ ossia per $n>2$. Dunque il più piccolo valore di n per cui si ha convergenza è $n=3$. Calcoliamo quindi l'integrale

$$S = \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ponendo $t = x^2+3$, si ha $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, da cui si ottiene

$$S = \frac{1}{2}\int_7^{+\infty} t^{-3/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{7}}\,.$$

4. *Intervallo di convergenza di integrali impropri:*

a) $\alpha \in (1,2)$.

b) Osserviamo che $x^3+5x^2+8x+4 = (x+2)^2(x+1)$; pertanto dobbiamo studiare il comportamento della funzione per $x \pm \infty$, $x \to -2$ e $x \to -1$. Risulta

$$f(x) \sim \frac{1}{|x|^{3\alpha}}\,, \qquad x \to \pm\infty\,;$$
$$f(x) \sim \frac{1}{|x+2|^{2\alpha}}\,, \qquad x \to -2\,;$$
$$f(x) \sim \frac{1}{|x+1|^{\alpha}}\,, \qquad x \to -1\,.$$

Per avere convergenza, si devono quindi imporre le condizioni $3\alpha > 1$, $2\alpha < 1$ e $\alpha < 1$. Pertanto deve essere $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

c) $\alpha \in (-1,1)$.

d) La funzione integranda non è limitata per $x=2$ e $x=3$. Osserviamo che

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}\,, \qquad x \to +\infty\,,$$
$$f(x) \sim \frac{1}{x-2}\,, \qquad x \to 2\,,$$
$$f(x) \sim \frac{1}{|x-3|^{1/2}}\,, \qquad x \to 3\,.$$

Dunque non vi sono problemi di convergenza per $x \to +\infty$ oppure $x \to 3$; mentre se $x=2$ è incluso nell'intervallo di integrazione, l'integrale diverge. Pertanto dovrà essere $\alpha > 2$.

5. $\alpha > -\frac{1}{2}$ e $S = \sqrt{5}$.

6. *Studio della convergenza di integrali impropri:*

a) Diverge; b) Converge.

c) Nell'intervallo $(2, +\infty)$, la funzione non è limitata in $x = 2$. La funzione

$$\log \frac{x-2}{x+1} \sim \log \frac{1}{3}(x-2)\,,$$

è un infinito di ordine inferiore a qualsiasi potenza positiva di $\frac{1}{x-2}$ per $x \to 2^+$. Pertanto f è un infinito di ordine inferiore a $\dfrac{1}{(x-2)^{1/3+\alpha}}$ (per ogni $\alpha > 0$). Tale ordine, per un'opportuna scelta di α (ad esempio $\alpha = \frac{1}{2}$) è minore di 1 e quindi l'integrale converge in $x = 2$.
Per $x \to +\infty$, si ha

$$\log \frac{x-2}{x+1} \sim \log\left(1 - \frac{3}{x+1}\right) \sim -\frac{3}{x+1} \sim -\frac{3}{x}\,,$$

e, dunque,

$$f(x) \sim -\frac{3}{x^{1/3} \cdot x} = -\frac{3}{x^{4/3}}\,, \qquad x \to +\infty\,.$$

In definitiva, l'integrale converge.

d) Esaminiamo il comportamento della funzione integranda in $x = 0$. Si ha

$$\begin{aligned}\sin x - (x + x^2)\log(\mathrm{e} + x) &= x + o(x^2) - (x + x^2)\left(1 + \log\left(1 + \frac{x}{\mathrm{e}}\right)\right)\\ &= -x^2 + o(x^2) - (x + x^2)\left(\frac{x}{\mathrm{e}} + o(x)\right) = -\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)x^2 + o(x^2)\,, \quad x \to 0\end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) \sim -\frac{1}{(1 + \frac{1}{\mathrm{e}})x}\,, \qquad x \to 0\,.$$

Dunque l'integrale diverge per $x = 0$.
Non è necessario studiare il comportamento per $x \to +\infty$ (anche se non è difficile verificare che pure in questo caso si ha divergenza) per concludere che l'integrale assegnato diverge.

7. Poiché per $t \in [1, 2]$, si ha

$$f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) = \frac{t^2(1 + 8t^2)}{\sqrt{1 + t^2 + 4t^4}}\,, \qquad \boldsymbol{\gamma}'(t) = \big(1, 2t, \frac{1}{t}\big)\,,$$

risulta

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_1^2 \frac{t^2(1 + 8t^2)}{\sqrt{1 + t^2 + 4t^4}}\,\frac{1}{t}\,\sqrt{1 + t^2 + 4t^4}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t(1 + 8t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{63}{2}\,.$$

8. 0.

9. Calcoliamo dapprima le coordinate del punto B appartenente al primo quadrante e punto di intersezione tra la retta $y = 2x$ e l'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$. Si ottiene facilmente $B = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$. Osserviamo che l'arco regolare a tratti $\boldsymbol{\gamma}$ può essere suddiviso nei tre archi regolari $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ e $\boldsymbol{\gamma}_3$ i cui sostegni sono rispettivamente il segmento OA, l'arco di ellisse AB e il segmento BO. È possibile definire archi $\boldsymbol{\delta}_1$, $\boldsymbol{\delta}_2$ e $\boldsymbol{\delta}_3$ congruenti rispettivamente a $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ e $\boldsymbol{\gamma}_3$, nel modo seguente

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta}_1(t) = (t, 0) && 0 \le t \le 1\,, && \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\gamma}_1\,,\\
&\boldsymbol{\delta}_2(t) = (\cos t, 2\sin t) && 0 \le t \le \frac{\pi}{4}\,, && \boldsymbol{\delta}_2 \sim \boldsymbol{\gamma}_2\,,\\
&\boldsymbol{\delta}_3(t) = (t, 2t) && 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\,, && \boldsymbol{\delta}_3 \sim -\boldsymbol{\gamma}_3\,,
\end{aligned}$$

per cui

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_{\boldsymbol{\delta}_1} f + \int_{\boldsymbol{\delta}_2} f + \int_{\boldsymbol{\delta}_3} f\,.$$

Poiché

$$\begin{aligned}
&f\big(\boldsymbol{\delta}_1(t)\big) = t\,, && f\big(\boldsymbol{\delta}_2(t)\big) = \cos t + 2\sin t\,, && f\big(\boldsymbol{\delta}_3(t)\big) = 3t\,,\\
&\boldsymbol{\delta}_1'(t) = (1, 0)\,, && \boldsymbol{\delta}_2'(t) = (-\sin t, 2\cos t)\,, && \boldsymbol{\delta}_3'(t) = (1, 2)\,,\\
&\|\boldsymbol{\delta}_1'(t)\| = 1\,, && \|\boldsymbol{\delta}_2'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,, && \|\boldsymbol{\delta}_3'(t)\| = \sqrt{5}\,,
\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\gamma}} f &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \big(\cos t + 2\sin t\big)\sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{2}/2} 3\sqrt{5}t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{5} + \int_0^{\pi/4} \cos t\sqrt{4 - 3\sin^2 t}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi/4} \sin t\sqrt{1 + 3\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{5} + I_1 + I_2\,.
\end{aligned}$$

Per calcolare I_1, poniamo $u = \sqrt{3}\sin t$, da cui $\mathrm{d}u = \sqrt{3}\cos t\,\mathrm{d}t$, e otteniamo

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{6}/2} \sqrt{4 - u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Eseguendo la sostituzione $v = \frac{u}{2}$ e ricordando l'Esempio 9.13 vi), si ha

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2}u\sqrt{4 - u^2} + 2\arcsin\frac{u}{2}\right]_0^{\sqrt{6}/2} = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}\,.$$

Analogamente, per calcolare I_2 si pone $u = \sqrt{3}\cos t$, da cui $\mathrm{d}u = -\sqrt{3}\sin t\,\mathrm{d}t$ e

$$I_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}/2} \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Utilizzando l'Esempio 9.13 v), risulta

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{1+u^2}+u\right)\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}/2} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{2}+2+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\log(2+\sqrt{3})-\log\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}\right). \end{aligned}$$

In definitiva

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\log(2+\sqrt{3})-\log\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}\right).$$

10. $2\arctan\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$.

11. Poiché $\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)=(t^4,t^3)$ e $\boldsymbol{\gamma}'(t)=(2t,1)$, si ha

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}P = \int_0^1 (t^4,t^3)\cdot(2t,1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2t^5+t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{7}{12}.$$

12. $\dfrac{9}{4}$; 13. $\dfrac{\pi}{4}$.

14. L'arco regolare a tratti $\boldsymbol{\gamma}$ può essere ristretto ai tre archi regolari $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ e $\boldsymbol{\gamma}_3$ i cui sostegni sono rispettivamente i tre segmenti AB, BC e CD. È possibile definire archi $\boldsymbol{\delta}_1$, $\boldsymbol{\delta}_2$ e $\boldsymbol{\delta}_3$ congruenti rispettivamente a $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ e $\boldsymbol{\gamma}_3$, nel modo seguente

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\delta}_1(t)=(t,1) && 0\le t\le 1, && \boldsymbol{\delta}_1\sim\boldsymbol{\gamma}_1, \\ &\boldsymbol{\delta}_2(t)=(t,2-t) && 0\le t\le 1, && \boldsymbol{\delta}_2\sim-\boldsymbol{\gamma}_2, \\ &\boldsymbol{\delta}_3(t)=(t,2) && 0\le t\le 1, && \boldsymbol{\delta}_3\sim\boldsymbol{\gamma}_3, \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\delta}_1(t)\big)=(t,t^2), && \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\delta}_2(t)\big)=\big(t(2-t)^2,t^2(2-t)\big), && \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\delta}_3(t)\big)=(4t,2t^2) \\ &\boldsymbol{\delta}_1'(t)=(1,0), && \boldsymbol{\delta}_2'(t)=(1,-1), && \boldsymbol{\delta}_3'(t)=(1,0), \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}P &= \int_{\boldsymbol{\delta}_1} \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}P - \int_{\boldsymbol{\delta}_2} \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}P + \int_{\boldsymbol{\delta}_3} \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}P \\ &= \int_0^1 (t,t^2)\cdot(1,0)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \big(t(2-t)^2,t^2(2-t)\big)\cdot(1,-1)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_0^1 (4t,2t^2)\cdot(1,0)\,\mathrm{d}t = 2. \end{aligned}$$

15. 0.

11

Equazioni differenziali ordinarie

Molti fenomeni della Fisica, dell'Ingegneria o delle altre Scienze applicate possono essere descritti attraverso un *modello matematico*, costituito da una o più relazioni che legano tra loro una funzione incognita e certe sue derivate. Ad esempio, un moto rettilineo uniformemente accelerato è caratterizzato dalla condizione di accelerazione costante, e dunque può essere rappresentato da una relazione del tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = g, \tag{11.1}$$

dove $s = s(t)$ indica lo spostamento in funzione del tempo t e g è l'accelerazione. Il decadimento di una sostanza radioattiva è tale per cui il tasso con cui essa si decompone è proporzionale in ogni istante alla quantità di sostanza stessa; pertanto, possiamo scrivere che

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky, \tag{11.2}$$

dove $y = y(t)$ indica la quantità della sostanza radioattiva e $k > 0$ è una costante di proporzionalità. Le relazioni precedenti sono esempi di equazioni differenziali.

Questo capitolo costituisce una prima introduzione allo studio di alcune classi di equazioni differenziali. Non è nostra intenzione fornire una trattazione esaustiva della materia; ci limiteremo ad illustrare alcuni concetti di base e a dettagliare qualche metodo di risoluzione per famiglie di equazioni differenziali (del primo e del secondo ordine) particolarmente significative.

11.1 Definizioni generali

Per **equazione differenziale ordinaria** intendiamo una relazione tra una variabile indipendente reale (che indicheremo con x), una funzione incognita $y = y(x)$ e le sue derivate $y^{(k)}$ fino ad un certo ordine n. Tale relazione verrà scritta come

$$\boxed{\mathcal{F}(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,} \tag{11.3}$$

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_11, © Springer-Verlag Italia 2014

dove $\mathcal{F}$ è una funzione reale di $n+2$ variabili reali. Diremo che l'equazione differenziale è di **ordine** n, se n è l'ordine più alto delle derivate di y che intervengono nella (11.3). Per **soluzione** (in senso classico) dell'equazione differenziale in un intervallo I della retta reale, intendiamo una funzione $y : I \to \mathbb{R}$, derivabile n volte in I, tale che valga la relazione

$$\boxed{\mathcal{F}\big(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\big) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in I.}$$

Spesso è possibile esplicitare nella (11.3) la derivata di ordine massimo $y^{(n)}$ in funzione di x e delle derivate di ordine inferiore (in diverse applicazioni, questo è anzi il modo con cui si scrive originariamente l'equazione differenziale). In tal caso, possiamo scrivere la (11.3) nella forma

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)}),} \tag{11.4}$$

dove f è una funzione reale di $n+1$ variabili reali. Diremo allora che l'equazione differenziale è **in forma normale**. La definizione di soluzione si modifica in modo ovvio nel caso in cui l'equazione sia in forma normale.

Infine, diremo che una equazione differenziale è **autonoma** se la $\mathcal{F}$ (o la f) non dipendono dalla variabile indipendente x. Le equazioni (11.1) e (11.2) sono esempi di equazioni differenziali in forma normale, autonome, rispettivamente del secondo e del primo ordine.

Nel seguito, limiteremo il nostro studio al caso delle equazioni differenziali del primo ordine, in forma normale, e a una classe particolarmente importante di equazioni del secondo ordine.

11.2 Equazioni del primo ordine

Sia f una funzione reale definita in una regione del piano $\mathbb{R}^2$. Una soluzione dell'equazione differenziale

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{11.5}$$

in un intervallo I della retta reale è dunque una funzione $y = y(x)$ derivabile in I e tale che $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ in ogni $x \in I$. Il grafico di ogni soluzione della (11.5) dicesi **curva integrale** dell'equazione differenziale.

La relazione (11.5) ammette una importante interpretazione geometrica: essa dice infatti che in ogni punto (x, y) del piano in cui la f sia definita, il valore $f(x, y)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva integrale passante per (x, y) (ammesso che tale curva esista). L'equazione differenziale definisce quindi un *campo di direzioni* nel piano (vedasi la Figura 11.1).

Osservazione 11.1 Se, partendo da un punto $(x, y) = (x_0, y_0)$, ci muoviamo per un piccolo tratto lungo la retta passante per (x_0, y_0) di coefficiente angolare

Figura 11.1. Campo di direzioni dell'equazione differenziale $y' = (1+x)y + x^2$

$f(x_0, y_0)$, perveniamo in un nuovo punto (x_1, y_1) che sarà prossimo alla curva integrale passante per (x_0, y_0), in quanto ci siamo spostati lungo la tangente alla curva stessa. Ripartendo da (x_1, y_1) e ripetendo più volte il procedimento, possiamo costruire una spezzata che approssimerà la curva integrale che esce dal punto iniziale (x_0, y_0). Questo metodo (detto *metodo di Eulero esplicito)* è l'esempio più semplice di come si possa approssimare numericamente una soluzione di una equazione differenziale, allorquando essa non possa essere determinata con metodi analitici. Rimandiamo lo sviluppo di tali metodi al corso di Calcolo Numerico. □

La risoluzione dell'equazione (11.5) generalizza il problema della ricerca delle primitive di una funzione assegnata. Infatti, se la funzione f non dipende da y ma soltanto da x, allora la (11.5) diventa

$$y' = f(x); \tag{11.6}$$

supponendo f continua in I, le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le primitive di f in I. Esse si scriveranno dunque come $y(x) = F(x) + C$, dove F denota una particolare primitiva di f e C è una costante arbitraria. Ciò mostra che, almeno nel caso particolare in cui f non dipenda da y, l'equazione (11.5) ammette infinite soluzioni distinte, le quali dipendono da una costante arbitraria di integrazione. Le curve integrali sono ottenute l'una dall'altra per traslazione verticale.

In realtà, il caso particolare (11.6) riveste fondamentale importanza, in quanto in molti casi di interesse la risoluzione dell'equazione (11.5) viene ricondotta, mediante opportune trasformazioni, alla ricerca delle primitive di una o più funzioni note. Inoltre, sotto ipotesi piuttosto generali, è possibile dimostrare che l'equa-

zione (11.5) ammette sempre un'infinità di soluzioni distinte, dipendenti da una costante arbitraria C. Scriveremo dunque le soluzioni nella forma

$$y = y(x; C) \tag{11.7}$$

con C variabile in $\mathbb{R}$ (o in un intervallo di $\mathbb{R}$). L'espressione (11.7) si dirà l'**integrale generale** dell'equazione differenziale (11.5), mentre una qualunque delle soluzioni, corrispondente alla scelta di un valore per la costante C, si dirà un **integrale particolare**.

Esempio 11.2

Risolvere l'equazione

$$y' = y \tag{11.8}$$

equivale a cercare tutte le funzioni che coincidono con la loro derivata prima. Già abbiamo osservato che la funzione esponenziale $y(x) = \mathrm{e}^x$ gode di questa importante proprietà. Per la proprietà di linearità della derivata, anche ogni funzione $y(x) = C\mathrm{e}^x$, con $C \in \mathbb{R}$, coincide con la sua derivata. Più avanti dimostreremo che non vi sono altre funzioni aventi tale proprietà, e quindi possiamo concludere che tutte le soluzioni della (11.8) sono espresse dalla relazione

$$y(x; C) = C\mathrm{e}^x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Le curve integrali di tale equazione sono rappresentate nella Figura 11.2. □

Per selezionare un integrale particolare dell'equazione differenziale (11.5), bisogna dunque prescrivere una condizione che si traduca nella determinazione della costante arbitraria di integrazione C. Un modo assai frequente per fare ciò è quello

Figura 11.2. Curve integrali dell'equazione differenziale $y' = y$

di prescrivere il valore della soluzione dell'equazione differenziale in corrispondenza di un valore fissato della variabile indipendente x. In altri termini, si richiederà che $y(x_0; C) = y_0$, dove x_0 e y_0 sono assegnati. Geometricamente, ciò equivale a richiedere il passaggio della curva integrale cercata per il punto del piano di coordinate (x_0, y_0). Quando si determina in questo modo l'integrale particolare di una equazione differenziale, si dice che si risolve un problema di Cauchy. Precisamente, un **problema di Cauchy**, o **problema ai valori iniziali**, per l'equazione (11.5) in un intervallo I consiste nel fissare un punto $x_0 \in I$ e un valore $y_0 \in \mathbb{R}$ e nel determinare una funzione derivabile $y = y(x)$ tale che

$$\boxed{\begin{cases} y' = f(x, y) & \text{in } I, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}} \tag{11.9}$$

Il riferimento ai "valori iniziali" è dovuto al fatto che spesso il problema (11.9) modellizza l'evoluzione temporale di un sistema fisico, il quale all'istante x_0 in cui inizia la simulazione matematica si trova nella configurazione y_0.

Esempio 11.3

La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y & \text{in } I = [0, +\infty), \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

è data dalla funzione $y(x) = 2\mathrm{e}^x$. □

Osservazione 11.4 L'assegnazione di un problema di Cauchy, ancorché molto comune, non è l'unico modo per determinare una soluzione particolare di una equazione differenziale. Ad esempio, possiamo porre il seguente problema: *Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = y$ che ha media integrale uguale a 1 nell'intervallo $I = [0, 2]$*. Sappiamo che l'integrale generale dell'equazione data è $y = C\mathrm{e}^x$; imponendo la condizione

$$\frac{1}{2}\int_0^2 y(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

si ottiene facilmente $C = \frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}$. □

Osservazione 11.5 Ritorniamo per un istante alle equazioni differenziali di ordine n qualunque. Sotto opportune ipotesi, è possibile dimostrare che l'integrale generale di una tale equazione dipende da n costanti di integrazione, ossia ha la forma

$$y = y(x; C_1, C_2, ..., C_n)$$

con C_k $(k = 1, 2, ..., n)$ costanti arbitrarie reali. Il problema di Cauchy consiste nell'assegnare i valori di y e delle sue prime $n-1$ derivate in un punto $x_0 \in I$, vale a dire

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)}) \quad \text{in } I, \\ y(x_0) = y_{00}, \\ y'(x_0) = y_{01}, \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \end{cases}$$

dove $y_{00}, y_{01}, ..., y_{0,n-1}$ sono n numeri reali assegnati. Ad esempio, il moto uniformemente accelerato descritto dall'equazione (11.1) è univocamente determinato dall'assegnazione della posizione iniziale $s(0)$ e della velocità iniziale $s'(0)$ del punto materiale in movimento.

In alternativa al problema di Cauchy, è possibile determinare univocamente la soluzione di una equazione differenziale di ordine superiore al primo imponendo il valore della soluzione (e/o di certe sue derivate) agli estremi dell'intervallo di integrazione. Si parla in questo caso di **problema ai valori al contorno**. Ad esempio, il problema ai valori al contorno del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' = k \sin y & \text{nell'intervallo } (a, b), \\ y(a) = 0, \ y(b) = 0 \end{cases}$$

modellizza la deviazione dalla posizione di riposo di una sbarra elastica sottile sottoposta ad un carico di punta. □

Nel seguito, studieremo tre casi notevoli di equazioni differenziali del primo ordine che si riducono facilmente alla determinazione di una o più primitive.

11.2.1 Equazioni a variabili separabili

Tali equazioni sono del tipo

$$\boxed{y' = g(x)h(y),} \tag{11.10}$$

dove g è una funzione continua della variabile x e h è una funzione continua della variabile y. In altri termini, la funzione $f(x, y)$ è il prodotto di una funzione della sola x e di una funzione della sola y.

Se $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è uno zero di h, ossia se $h(\bar{y}) = 0$, allora la funzione costante $y(x) = \bar{y}$ è un integrale particolare della (11.10), perché l'equazione diventa $0 = 0$. Dunque, un'equazione a variabili separabili ha innanzitutto tanti integrali particolari del tipo $y(x) = \textit{costante}$ quanti sono gli zeri distinti di h. Tali integrali si dicono *integrali singolari* dell'equazione.

In ogni intervallo J in cui la funzione $h(y)$ non si annulla, possiamo scrivere la (11.10) come

$$\frac{1}{h(y)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x).$$

Sia $H(y)$ una primitiva di $\dfrac{1}{h(y)}$ (rispetto alla variabile y). Ricordando la formula di derivazione di una funzione composta (Teorema 6.7), abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H\big(y(x)\big) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)$$

e dunque $H\big(y(x)\big)$ è una primitiva di $g(x)$. Pertanto, se $G(x)$ è una qualunque primitiva di $g(x)$, si avrà

$$\boxed{H\big(y(x)\big) = G(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.} \tag{11.11}$$

Siccome per ipotesi nell'intervallo J la funzione $\dfrac{1}{h(y)} = \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}$ non si annulla, e quindi essendo continua non cambia di segno, la funzione $H(y)$ sarà strettamente monotona e dunque invertibile in J (Teorema 2.8). Pertanto, si potrà esplicitare la $y(x)$ nella (11.11), ottenendo

$$\boxed{y(x) = H^{-1}\big(G(x) + C\big),} \tag{11.12}$$

dove H^{-1} indica la funzione inversa di H. Tale espressione rappresenta l'integrale generale dell'equazione (11.10) in ogni intervallo in cui la funzione $h\big(y(x)\big)$ non si annulla. Si noti tuttavia che nei casi in cui non sia possibile determinare esplicitamente l'espressione analitica della funzione inversa di $H(y)$, la formula (11.12) ha solo valore teorico. In tali casi, ci si limiterà a fornire l'espressione implicita (11.11) dell'integrale generale.

Se l'equazione a variabili separabili (11.10) ammette integrali singolari, essi possono o meno rientrare nell'espressione (11.12) per opportuni valori della costante C. Talvolta, alcuni integrali singolari possono essere ottenuti formalmente dalla (11.12) facendo tendere C a $\pm\infty$.

Osserviamo che è possibile arrivare alla formula (11.11) in maniera formale e mnemonica, interpretando la derivata $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ come un 'quoziente', secondo la notazione di Leibniz. Infatti, dividendo la (11.10) per $h(y)$ e 'moltiplicando' per $\mathrm{d}x$, otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x$$

da cui, integrando, si ha

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x,}$$

che corrisponde precisamente alla (11.11). Non si dimentichi tuttavia che la dimostrazione rigorosa di tale formula è quella che abbiamo dato sopra!

Esempi 11.6

i) Si voglia risolvere l'equazione $y' = y(1-y)$. Abbiamo $g(x) = 1$ e $h(y) = y(1-y)$. Gli zeri di h danno luogo ai due integrali singolari $y_1(x) = 0$ e $y_2(x) = 1$.

Supponendo poi $h(y)$ diverso da 0, possiamo scrivere l'equazione differenziale come

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int \mathrm{d}x,$$

da cui, integrando a sinistra rispetto a y e a destra rispetto a x, otteniamo

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C$$

Passando agli esponenziali, abbiamo

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = \mathrm{e}^{x+C} = k\mathrm{e}^x,$$

dove $k = \mathrm{e}^C$ è una qualunque costante > 0. Pertanto

$$\frac{y}{1-y} = \pm k\mathrm{e}^x = K\mathrm{e}^x,$$

dove K è una qualunque costante diversa da 0. Ricavando y in funzione di x, abbiamo

$$y(x) = \frac{K\mathrm{e}^x}{1+K\mathrm{e}^x}.$$

Si noti che l'integrale singolare $y_1(x) = 0$ rientra in questa formula dando a K il valore zero, che era escluso dalla deduzione precedente. Invece, l'altro integrale singolare $y_2(x) = 1$ si ottiene formalmente facendo tendere K all'infinito.

ii) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \sqrt{y}.$$

Essa ammette l'integrale singolare $y_1(x) = 0$. Separando le variabili, abbiamo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \int \mathrm{d}x\,,$$

da cui si ottiene

$$2\sqrt{y} = x + C,$$

ossia

$$y(x) = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2, \qquad C \in \mathbb{R}$$

avendo sostituito $C/2$ con C.

iii) Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^y + 1}.$$

Si ha $g(x) = \mathrm{e}^x + 1$, $h(y) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^y + 1} > 0$ per ogni valore di y, dunque non vi sono integrali singolari. Separando le variabili, otteniamo

$$\int (\mathrm{e}^y + 1)\,\mathrm{d}y = \int (\mathrm{e}^x + 1)\,\mathrm{d}x\,,$$

da cui

$$\mathrm{e}^y + y = \mathrm{e}^x + x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

In tal caso, non è possibile esplicitare y in funzione di x. □

11.2.2 Equazioni lineari

Tali equazioni sono del tipo

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)} \tag{11.13}$$

con a e b funzioni continue su I. In tal caso, la funzione $f(x, y) = -a(x)y + b(x)$ è un polinomio di primo grado in y, a coefficienti dipendenti da x. L'equazione si dice **omogenea** se $b(x) = 0$, **non omogenea** diversamente.

Risolviamo innanzitutto l'equazione omogenea, che scriviamo come

$$y' = -a(x)y. \tag{11.14}$$

Essa è una particolare equazione a variabili separabili, in cui, facendo riferimento alla (11.10), si ha $g(x) = -a(x)$ e $h(y) = y$. Una soluzione è la funzione costante $y(x) = 0$. Altrimenti, separando le variabili, otteniamo

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se $A(x)$ indica una primitiva di $a(x)$, cioè se

$$\int a(x)\,\mathrm{d}x = A(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{11.15}$$

abbiamo allora

$$\log|y| = -A(x) - C$$

vale a dire

$$|y(x)| = \mathrm{e}^{-C}\mathrm{e}^{-A(x)}$$

e dunque

$$y(x) = \pm K\mathrm{e}^{-A(x)},$$

avendo posto $K = \mathrm{e}^{-C} > 0$. Notiamo poi che la soluzione particolare $y(x) = 0$ è contenuta nella formula precedente se ammettiamo che K possa assumere anche il valore 0. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea (11.14) sono rappresentate dalla formula

$$y(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)}, \qquad K \in \mathbb{R},$$

ove $A(x)$ è definita dalla (11.15).

Passiamo ora all'equazione non omogenea. Applichiamo il cosiddetto *metodo di variazione delle costanti*, che consiste nel cercare la soluzione nella forma

$$y(x) = K(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)},$$

dove ora $K(x)$ è una funzione della variabile x, da determinarsi. Tale rappresentazione di $y(x)$ è sempre possibile, essendo $\mathrm{e}^{-A(x)} > 0$. Sostituendo nell'equazione (11.13), otteniamo

$$K'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\big(-a(x)\big) + a(x)K(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x),$$

ossia

$$K'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}b(x).$$

Detta $B(x)$ una primitiva della funzione $\mathrm{e}^{A(x)}b(x)$, cioè

$$\int \mathrm{e}^{A(x)}b(x)\,\mathrm{d}x = B(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{11.16}$$

abbiamo quindi

$$K(x) = B(x) + C,$$

e dunque la soluzione generale della (11.13) risulta essere

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\big(B(x) + C\big),} \tag{11.17}$$

con $A(x)$ e $B(x)$ definite rispettivamente nelle (11.15) e (11.16). Essa viene talvolta scritta nella forma più espressiva

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\, b(x)\,\mathrm{d}x,} \tag{11.18}$$

che mette in luce i passi da compiere per risolvere un'equazione lineare non omogenea: si devono determinare in successione due primitive.

Se si deve risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & \text{nell'intervallo } I, \\ y(x_0) = y_0, & \text{con } x_0 \in I \text{ e } y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{11.19}$$

può essere conveniente scegliere come primitiva di $a(x)$ quella che si annulla in x_0, che in base al Teorema fondamentale del calcolo integrale rappresentiamo come $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s$; possiamo operare analogamente per $B(x)$, definendo

$$B(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\, b(t)\,\mathrm{d}t$$

(si ricordi che le variabili di integrazione sotto segno di integrale definito sono mute). Usando queste espressioni per $A(x)$ e $B(x)$ nella (11.17), ricaviamo $y(x_0) = C$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy (11.19) sarà quella per cui $C = y_0$, cioè precisamente

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\, b(t)\,\mathrm{d}t \right).} \tag{11.20}$$

Esempi 11.7

i) Si voglia determinare l'integrale generale dell'equazione lineare

$$y' + ay = b,$$

dove $a \neq 0$ e b sono costanti reali. Scegliendo $A(x) = ax$ e $B(x) = \dfrac{b}{a}\mathrm{e}^{ax}$, si ottiene l'integrale generale

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

Notiamo che se $a = -1$ e $b = 0$, la formula precedente mostra che tutte le soluzioni dell'equazione $y' = y$ sono della forma $y(x) = C\mathrm{e}^{x}$.

Se invece si vuole risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = b & \text{in } [1, +\infty), \\ y(1) = y_0, \end{cases}$$

conviene scegliere $A(x) = a(x-1)$ e $B(x) = \dfrac{b}{a}\left(\mathrm{e}^{a(x-1)} - 1\right)$, ottenendo

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(x-1)} + \frac{b}{a}.$$

Si noti che se $a > 0$, la soluzione tende al valore $\dfrac{b}{a}$ (indipendente dal dato iniziale y_0) per $x \to +\infty$.

ii) Si vogliano determinare le curve integrali dell'equazione differenziale

$$xy' + y = x^2$$

che giacciono nel primo quadrante del piano (x, y). L'equazione si scrive nella forma (11.13) come

$$y' + \frac{1}{x}y = x,$$

dunque $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = x$. Scegliendo $A(x) = \log x$, si ha $\mathrm{e}^{A(x)} = x$ ed $\mathrm{e}^{-A(x)} = \frac{1}{x}$; conseguentemente,

$$\int \mathrm{e}^{A(x)} b(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Ne segue che, per $x > 0$, l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}.$$

Se $C \geq 0$, si ha $y(x) > 0$ per ogni $x > 0$, mentre se $C < 0$ si ha $y(x) > 0$ per $x > \sqrt[3]{3|C|}$. □

11.2.3 Equazioni omogenee

Tali equazioni sono del tipo

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{11.21}$$

dove $\varphi = \varphi(z)$ è una funzione continua della variabile z. Dunque, la funzione $f(x, y)$ dipende da x e y soltanto attraverso il loro rapporto $\dfrac{y}{x}$; in forma equivalente, si può dire che $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ per ogni $\lambda > 0$.

Un'equazione omogenea si riconduce ad un'equazione a variabili separabili mediante la ovvia sostituzione $z = \dfrac{y}{x}$, da intendersi come $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Si ha dunque $y(x) = xz(x)$ e $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Sostituendo nella (11.21), si ottiene

$$z' = \frac{\varphi(z) - z}{x},$$

che è appunto un'equazione a variabili separabili nell'incognita z. Possiamo pertanto applicare la tecnica risolutiva discussa nel § 11.2.1. Ogni soluzione $\bar{z}$ dell'equazione $\varphi(z) = z$ dà luogo a un integrale singolare $z(x) = \bar{z}$, cioè $y(x) = \bar{z}x$. Supponendo invece $\varphi(z)$ diverso da z, otteniamo

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}z}{\varphi(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},}$$

da cui

$$H(z) = \log|x| + C,$$

dove $H(z)$ indica una primitiva di $\dfrac{1}{\varphi(z) - z}$. Indicando con H^{-1} l'inversa di H, avremo

$$z(x) = H^{-1}(\log|x| + C),$$

e dunque, tornando alla incognita y, l'integrale generale della (11.21) sarà

$$\boxed{y(x) = x\, H^{-1}(\log|x| + C).}$$

Esempio 11.8

Si voglia risolvere l'equazione

$$x^2 y' = y^2 + xy + x^2. \tag{11.22}$$

Riscrivendola in forma normale, si ha

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1,$$

che è un'equazione omogenea, con $\varphi(z) = z^2 + z + 1$. Eseguendo la sostituzione $y = xz$, si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$z' = \frac{z^2 + 1}{x}.$$

Non vi sono integrali singolari, perché $z^2 + 1$ è sempre positivo. Integrando per separazione di variabili, si ha

$$\arctan z = \log|x| + C$$

e pertanto l'integrale generale della (11.22) risulta

$$y(x) = x\tan(\log|x| + C).$$

Si noti che la costante C può essere scelta indipendentemente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, a causa della singolarità in $x = 0$. Si noti altresì che il dominio di ogni soluzione dipende dal valore della costante C. □

11.2.4 Equazioni del secondo ordine riconducibili al primo

Se in un'equazione differenziale del secondo ordine non compare esplicitamente la variabile dipendente non derivata, cioè se l'equazione è del tipo

$$\boxed{y'' = f(y', x),} \tag{11.23}$$

allora la sostituzione $z = y'$ conduce all'equazione del primo ordine

$$z' = f(z, x)$$

nell'incognita $z = z(x)$. Se tale equazione è risolubile e se $z(x; C_1)$ ne indica l'integrale generale, otterremo tutte le soluzioni della (11.23) risolvendo l'equazione

$$y' = z,$$

ossia calcolando tutte le primitive di $z(x; C_1)$; ciò introdurrà una nuova costante di integrazione C_2. L'integrale generale dell'equazione (11.23) ha dunque la forma

$$\boxed{y(x; C_1, C_2) = \int z(x; C_1)\,\mathrm{d}x = Z(x; C_1) + C_2,}$$

dove $Z(x; C_1)$ indica una particolare primitiva di $z(x; C_1)$.

Esempio 11.9

Si voglia risolvere l'equazione del secondo ordine

$$y'' - (y')^2 = 1.$$

Ponendo $z = y'$ otteniamo l'equazione del primo ordine a variabili separabili

$$z' = z^2 + 1,$$

il cui integrale generale è dato da $\arctan z = x + C_1$, vale a dire

$$z(x, C_1) = \tan(x + C_1).$$

Integrando ulteriormente, abbiamo

$$\begin{aligned} y(x; C_1, C_2) &= \int \tan(x + C_1)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x + C_1)}{\cos(x + C_1)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\log\big(\cos(x + C_1)\big) + C_2\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

□

11.3 Il problema di Cauchy per le equazioni del primo ordine

Nei paragrafi precedenti, abbiamo considerato alcune famiglie di equazioni differenziali del primo ordine, per le quali abbiamo fornito procedimenti che permettono di esprimere gli integrali generali delle equazioni mediante integrali indefiniti di funzioni note. Le famiglie prese in esame non esauriscono affatto l'insieme delle equazioni differenziali delle quali è possibile determinare per via analitica le soluzioni; varie altre tecniche sono state sviluppate, per risolvere in modo esatto equazioni differenziali di interesse applicativo. Tuttavia, non per tutte le equazioni sono disponibili metodi analitici di risoluzione, oppure ove disponibili tali metodi possono rivelarsi di limitata efficacia pratica. In questi casi, è necessario ricorrere a tecniche di approssimazione, sovente di tipo numerico; nelle situazioni più comuni, ci si limita ad approssimare un integrale particolare dell'equazione, ad esempio quello definito da un problema ai valori iniziali di Cauchy. L'uso di metodi di approssimazione deve però sempre seguire uno studio qualitativo del problema differenziale di interesse, che garantisca almeno l'esistenza di una soluzione esatta da approssimare. Le proprietà qualitative delle soluzioni di un'equazione differenziale hanno comunque interesse in sé, ad esempio per capire come la soluzione di un problema di Cauchy sia sensibile alla scelta del valore iniziale.

Consideriamo quindi il problema di Cauchy (11.9) e diamo una semplice condizione su f la quale garantisce che il problema ammette una soluzione, definita in un intorno di x_0, che tale soluzione è unica e che essa dipende in modo continuo dal dato iniziale y_0. Quando ciò accade, diciamo che il problema (11.9) è **ben posto** (secondo Hadamard).

11.3.1 Funzioni lipschitziane

Premettiamo alcuni concetti relativi al modo con cui una funzione di una o più variabili dipende dai suoi argomenti.

Definizione 11.10 *Una funzione reale di variabile reale $f : J \to \mathbb{R}$, dove J è un intervallo, dicesi* **lipschitziana** *in J se esiste una costante $L \geq 0$ tale che*

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|\,, \qquad \forall y_1, y_2 \in J\,. \tag{11.24}$$

La condizione può essere anche scritta come

$$\frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L\,, \qquad \forall y_1, y_2 \in J\,,\ y_1 \neq y_2\,, \tag{11.25}$$

e quindi equivale al fatto che il rapporto incrementale di f è limitato, al variare degli argomenti $y_1 \neq y_2$ in J.

Si noti che se la (11.24) è soddisfatta per un certo valore di L, lo è anche per valori maggiori. La più piccola costante per cui la (11.24) è verificata prende il nome di **costante di Lipschitz** di f in J. Essa non è altro che l'estremo superiore della quantità a primo membro della (11.25), al variare degli argomenti in J. Non sempre è facile determinare esattamente tale valore, ma in genere è sufficiente conoscere una sua approssimazione per eccesso.

Una funzione lipschitziana in J è necessariamente continua in ogni punto di J (anzi, è uniformemente continua in J, secondo la definizione data nell'Appendice A.3.3, pag. 467); la condizione (3.6) è infatti soddisfatta con la scelta $\delta = \varepsilon/L$. Tuttavia, non tutte le funzioni continue sono lipschitziane. Ad esempio, la funzione $f(y) = \sqrt{y}$ non lo è sull'intervallo $J = [0, +\infty)$; scegliendo infatti $y_2 = 0$ si ha

$$\frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \frac{\sqrt{y_1}}{y_1} = \frac{1}{\sqrt{y_1}}\,, \qquad \forall y_1 > 0\,,$$

e facendo tendere y_1 a 0 si vede che il quoziente a primo membro non è superiormente limitato. Si noti che tale funzione ha derivata (destra) infinita in $y = 0$.

La condizione espressa nell'enunciato seguente è sovente la più immediata da verificare tra quelle che assicurano la lipschitzianità di una funzione.

Proposizione 11.11 *Sia $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo J con derivata ivi limitata; poniamo $L = \sup_{y \in J} |f'(y)| < +\infty$. Allora f è lipschitziana su J con costante di Lipschitz L.*

Dimostrazione. Per verificare la condizione (11.24), è sufficiente applicare la seconda formula dell'incremento finito (6.13) a f sull'intervallo di estremi y_1, y_2, ottenendo

$$f(y_1) - f(y_2) = f'(\bar{y})(y_1 - y_2)$$

per un certo $\bar{y}$ compreso tra y_1 e y_2; ne segue che

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f'(\bar{y})|\,|y_1 - y_2| \le L|y_1 - y_2|\,.$$

Ciò dimostra che la costante di Lipschitz L^* di f è $\le L$.
Viceversa, sia $y_0 \in J$ arbitrario. Osservando che per la (11.25),

$$\left|\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}\right| \le L^*\,, \qquad \forall y \in J\,,$$

si ha

$$|f'(y_0)| = \left|\lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}\right| = \lim_{y \to y_0} \left|\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}\right| \le L^*\,,$$

e dunque $L \le L^*$. □

Vediamo ora alcuni semplici esempi di funzioni lipschitziane.

Esempi 11.12

i) La funzione $f(y) = \sqrt{y}$ è lipschitziana su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$, essendo

$$0 < f'(y) = \frac{1}{\sqrt{2y}} \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

in tale intervallo; la costante di Lipschitz vale $L = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

ii) Le funzioni trigonometriche $f(y) = \sin y$ oppure $f(y) = \cos y$ sono lipschitziane su tutto $\mathbb{R}$ con $L = 1$, in quanto $|f'(y)| \leq 1, \ \forall y \in \mathbb{R}$.

ii) La funzione esponenziale $f(y) = \mathrm{e}^y$ è lipschitziana su ogni intervallo $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, con costante di Lipschitz $L = \mathrm{e}^b$; non è lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$, in quanto $\sup_{y \in \mathbb{R}} f'(y) = +\infty$. □

La condizione espressa dalla Proposizione 11.11 è soltanto sufficiente ma non necessaria per la lipschitzianità di una funzione. Si noti infatti che una funzione può essere lipschitziana in un intervallo senza essere ivi derivabile; ad esempio, la funzione $f(y) = |y|$, non derivabile nell'origine, è lipschitziana con costante di Lipschitz uguale a 1 su tutto $\mathbb{R}$, essendo

$$\big||y_1| - |y_2|\big| \leq |y_1 - y_2|\,, \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Passiamo alle funzioni di più variabili. Una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dicesi **lipschitziana** nella regione Ω se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(\boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{y}_2)| \leq L\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|\,, \qquad \forall \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \Omega\,.$$

Una funzione $f : I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con I e J intervalli reali, dicesi **lipschitziana in $\Omega = I \times J$ nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima**, se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$\boxed{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|\,, \qquad \forall y_1, y_2 \in J, \forall x \in I\,.} \tag{11.26}$$

Tale condizione è verificata se f ammette derivata parziale rispetto a y limitata in Ω, ossia se $L = \sup_{(x,y)\in\Omega} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < +\infty$; ciò segue facilmente applicando la Proposizione 11.11 per ogni $x \in I$.

Esempio 11.13

Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x}\sin(x + y)$$

in $\Omega = [-8, 8] \times \mathbb{R}$. Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt[3]{x}\cos(x + y)$$

e dunque, per ogni $(x, y) \in \Omega$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = |\sqrt[3]{x}\,|\,|\cos(x+y)| \le \sqrt[3]{8} \cdot 1 = 2\,.$$

Pertanto la (11.26) è verificata con $L = 2$. □

11.3.2 Una condizione di risolubilità del problema di Cauchy

Siamo pronti ad enunciare il risultato generale sul problema di Cauchy (11.9).

Teorema 11.14 *Siano I e J intervalli non vuoti della retta reale, con J aperto. Sia $f : \Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in Ω e lipschitziana in Ω nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima.*
Per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$, il problema di Cauchy (11.9) *ammette una e una sola soluzione $y = y(x)$, definita e derivabile con continuità in un intervallo $I' \subseteq I$ contenente x_0 e non ridotto a un punto, e tale che $\big(x, y(x)\big) \in \Omega$ per ogni $x \in I'$.*
Se $(x_0, \tilde{y}_0) \in \Omega$ e se $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ è la soluzione del corrispondente problema di Cauchy, definita in un intervallo $I'' \subseteq I$, allora si ha

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \le \mathrm{e}^{L|x-x_0|}|y_0 - \tilde{y}_0|\,, \qquad \forall x \in I' \cap I''\,, \tag{11.27}$$

dove L è la costante che compare nella (11.26).

Il teorema assicura l'esistenza e l'unicità di una soluzione "locale", ossia definita in un intorno di x_0, del problema di Cauchy. La soluzione potrebbe non essere definita su tutto I, in quanto la curva integrale $\big(x, y(x)\big)$, detta anche traiettoria, potrebbe uscire da Ω prima che x abbia percorso tutto I. Ad esempio, la funzione $f(y) = y^2$ è lipschitziana su ogni intervallo limitato $J_a = (-a, a)$ con $a > 0$, essendo

$$\sup_{y \in J_a} |f'(y)| = \sup_{|y|<a} |2y| = 2a\,,$$

ma non è lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2\,, \\ y(0) = \dfrac{1}{2}\,, \end{cases} \tag{11.28}$$

non esiste su tutto l'intervallo $I = [0, +\infty)$: risolvendo l'equazione per separazione di variabili otteniamo

$$y(x) = \frac{1}{2-x}\,,$$

il che mostra che la traiettoria $\big(x, y(x)\big)$ esce da ogni regione $\Omega_a = I \times J_a$, $a > 1$, prima che x raggiunga il valore 2 (si veda la Figura 11.3).

Se invece le ipotesi del teorema valgono con $J = \mathbb{R}$, allora è possibile dimostrare che la soluzione è definita in tutto I.

Figura 11.3. La soluzione del problema di Cauchy (11.28) non è definita su $I = [0, +\infty)$

L'unicità della soluzione del problema (11.9) segue facilmente dalla disuguaglianza (11.27): se $y(x)$ e $\tilde{y}(x)$ sono due soluzioni corrispondenti allo stesso dato iniziale $y_0 = \tilde{y}_0$ in x_0, necessariamente si ha $y(x) = \tilde{y}(x)$ per ogni x.

È utile osservare che se f non è lipschitziana nella seconda variabile in un intorno di (x_0, y_0), allora il problema di Cauchy può ammettere più di una soluzione. Ad esempio, il problema

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}\,, \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

risolubile per separazioni di variabili, ammette tanto la soluzione costante $y(x) = 0$ (l'integrale singolare), quanto la soluzione $y(x) = \frac{1}{4}x^2$; (addirittura ammette infinite soluzioni, date da

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le c\,, \\ \frac{1}{4}(x-c)^2 & \text{se } x > c\,, \end{cases} \qquad c \ge 0\,,$$

ottenuta "incollando" in modo opportuno le soluzioni indicate prima).

Infine, la (11.27) esprime la dipendenza continua della soluzione del problema (11.9) dal dato iniziale y_0: una perturbazione di ampiezza ε nel dato iniziale si traduce in una perturbazione di ampiezza al più $\mathrm{e}^{L|x-x_0|}\varepsilon$ nella soluzione in $x \neq x_0$. In altri termini, la distanza tra due traiettorie può crescere al più di un fattore $\mathrm{e}^{L|x-x_0|}$ nel passaggio da x_0 a x. Si noti tuttavia il carattere esponenziale di tale fattore, la cui grandezza dipende non solo dalla distanza $|x - x_0|$ ma anche dalla grandezza della costante di Lipschitz della funzione f.

11.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti ha la forma

$$\boxed{y'' + ay' + by = g,} \tag{11.29}$$

dove a e b sono costanti reali e $g = g(x)$ è una funzione continua. Mostreremo che l'integrale generale di una tale equazione può essere facilmente calcolato nel caso in cui $g = 0$, ossia nel caso in cui l'equazione sia **omogenea**. Inoltre, faremo vedere che è possibile calcolare esplicitamente le soluzioni dell'equazione quando il secondo membro g è un prodotto di esponenziali, polinomi algebrici, funzioni trigonometriche di tipo seno e coseno e, più in generale, una somma di espressioni di questo genere.

Al fine di studiare l'equazione (11.29), è conveniente ammettere che la funzione $y = y(x)$ possa assumere valori complessi. Diciamo che la funzione $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è derivabile (n volte) se lo sono le due funzioni $y_r = \mathcal{R}e\, y : I \to \mathbb{R}$ e $y_i = \mathcal{I}m\, y : I \to \mathbb{R}$; in tal caso si ha $y^{(n)}(x) = y_r^{(n)}(x) + iy_i^{(n)}(x)$.

Un caso particolare notevole è il seguente. Sia $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C}$ un qualunque numero complesso; ricordando la (8.39), consideriamo la funzione di variabile reale a valori complessi $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda_r x}(\cos \lambda_i x + i \sin \lambda_i x)$. Allora si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \tag{11.30}$$

esattamente come nel caso in cui λ è un numero reale. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{e}^{\lambda x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{\lambda_r x} \cos \lambda_i x) + i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{\lambda_r x} \sin \lambda_i x) \\
&= \lambda_r \mathrm{e}^{\lambda_r x} \cos \lambda_i x - \lambda_i \mathrm{e}^{\lambda_r x} \sin \lambda_i x + i(\lambda_r \mathrm{e}^{\lambda_r x} \sin \lambda_i x + \lambda_i \mathrm{e}^{\lambda_r x} \cos \lambda_i x) \\
&= \lambda_r \mathrm{e}^{\lambda_r x}(\cos \lambda_i x + i \sin \lambda_i x) + i\lambda_i \mathrm{e}^{\lambda_r x}(\cos \lambda_i x + i\lambda_i \sin \lambda_i x) \\
&= (\lambda_r + i\lambda_i)\mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}\,.
\end{aligned}$$

È infine opportuno indicare con $\mathcal{L}y = y'' + ay' + by$ il primo membro della (11.29) e osservare che, per la proprietà di linearità della derivazione, si ha

$$\mathcal{L}(\alpha y + \beta z) = \alpha \mathcal{L}y + \beta \mathcal{L}z \tag{11.31}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni funzione reale di variabile reale $y = y(x)$ e $z = z(x)$ derivabile due volte. Inoltre non è difficile verificare che il risultato continua a valere quando $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $y = y(x)$ e $z = z(x)$ assumono valori complessi. Tale proprietà di linearità dell'equazione differenziale sarà fondamentale nello studio successivo.

Siamo pronti a studiare l'equazione (11.29). Consideriamo dapprima l'equazione omogenea

$$\mathcal{L}y = y'' + ay' + by = 0 \tag{11.32}$$

e indichiamo con

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

il **polinomio caratteristico** dell'equazione differenziale, ottenuto sostituendo ad ogni derivata la potenza di ordine corrispondente di una variabile complessa λ. La (11.30) suggerisce di cercare una soluzione nella forma $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ per un opportuno valore di λ. Con tale scelta,

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + a\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + b\mathrm{e}^{\lambda x} = \chi(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

e dunque l'equazione è soddisfatta se e solo se λ è una radice dell'**equazione caratteristica**

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,.$$

Se il discriminante $\Delta = a^2 - 4b$ di tale equazione è diverso da 0, abbiamo due radici λ_1, λ_2 distinte a cui corrispondono due soluzioni distinte $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$; le due radici e le corrispondenti soluzioni sono reali quando $\Delta > 0$, sono complesse coniugate quando $\Delta < 0$. Se $\Delta = 0$, si ha una radice doppia λ, a cui corrisponde la soluzione $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. La condizione di radice doppia implica che $\chi'(\lambda) = 0$; posto $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$, si ha

$$y_2'(x) = (1 + \lambda x)\,\mathrm{e}^{\lambda x} \qquad \text{e} \qquad y_2''(x) = (2\lambda + \lambda^2 x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

e dunque sostituendo nell'equazione otteniamo con semplici passaggi algebrici

$$\mathcal{L}(y_2) = \chi(\lambda)\,x\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \chi'(\lambda)\,\mathrm{e}^{\lambda x} = 0\,;$$

pertanto la funzione y_2 è una soluzione dell'equazione, distinta dalla soluzione y_1. In tutti i casi, dunque, abbiamo determinato due soluzioni distinte y_1 e y_2 dell'equazione omogenea (11.32).

Osserviamo ora che, per la proprietà di linearità (11.31), se y_1 e y_2 sono due soluzioni della (11.32) e C_1, C_2 due costanti, allora

$$\mathcal{L}(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1\mathcal{L}(y_1) + C_2\mathcal{L}(y_2) = C_1 0 + C_2 0 = 0\,,$$

cioè anche $C_1 y_1 + C_2 y_2$ è una soluzione dell'equazione omogenea. Inoltre, è possibile dimostrare che se y è una soluzione di tale equazione, allora esistono due costanti C_1 e C_2 tali che $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, essendo y_1 e y_2 le soluzioni distinte trovate sopra.

In conclusione, l'integrale generale dell'equazione omogenea (11.32) si scrive nella forma

$$\boxed{y(x; C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x),}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti e $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono definite nel modo seguente:

se $\Delta \neq 0$, si pone $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ dove λ_1 e λ_2 sono le radici distinte dell'equazione caratteristica $\chi(\lambda) = 0$;

se $\Delta = 0$, si pone $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ e $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$ dove λ è la radice doppia dell'equazione caratteristica $\chi(\lambda) = 0$.

Nel caso $\Delta < 0$, è possibile esprimere le soluzioni mediante funzioni reali, anziché complesse coniugate come sopra. È sufficiente sostituire a $y_1(x)$ e a $y_2(x)$ rispettivamente la parte reale $\mathrm{e}^{\lambda_r x}\cos\lambda_i x$ e la parte immaginaria $\mathrm{e}^{\lambda_r x}\sin\lambda_i x$ di $y_1(x)$, avendo posto $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_i$. Infatti, se y è una soluzione dell'equazione omogenea, si ha

$$\mathcal{L}(\mathcal{R}e\, y) = \mathcal{R}e\,(\mathcal{L}y) = \mathcal{R}e\, 0 = 0\,, \qquad \mathcal{L}(\mathcal{I}m\, y) = \mathcal{I}m\,(\mathcal{L}y) = \mathcal{I}m\, 0 = 0\,,$$

in quanto i coefficienti dell'equazione sono reali; dunque anche $\mathcal{R}e\, y$ e $\mathcal{I}m\, y$ sono soluzioni dell'equazione.

Riassumendo, l'integrale generale dell'equazione omogenea (11.32) si esprime mediante funzioni reali nel modo seguente.

Caso $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica ha due radici reali distinte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

e l'integrale generale è dato da

$$\boxed{y(x; C_1, C_2) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x},}$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

Caso $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica ha due radici reali coincidenti, il cui valore comune è

$$\lambda = -\frac{a}{2}\,,$$

e l'integrale generale ha la forma

$$\boxed{y(x; C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \qquad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

Caso $\Delta < 0$. L'equazione caratteristica non ha radici reali. Ponendo

$$\sigma = \lambda_r = -\frac{a}{2}, \qquad \omega = \lambda_i = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2},$$

l'integrale generale ha la forma

$$\boxed{y(x; C_1, C_2) = \mathrm{e}^{\sigma x}(C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x)\,, \qquad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.}$$

Ritorniamo ora all'equazione non omogenea (11.29). L'integrale generale si scrive come

$$\boxed{y(x; C_1, C_2) = y_0(x; C_1, C_2) + y_p(x),} \tag{11.33}$$

dove $y_0(x; C_1, C_2)$ indica l'integrale generale dell'equazione omogenea associata (11.32), mentre $y_p(x)$ indica un qualunque soluzione particolare dell'equazione (11.29). Infatti, grazie alla linearità dell'equazione, si ha

$$\mathcal{L}(y_0 + y_p) = \mathcal{L}(y_0) + \mathcal{L}(y_p) = 0 + g = g$$

e dunque il secondo membro della (11.33) è soluzione della (11.29); viceversa, se $y(x)$ indica una generica soluzione della (11.29), allora la funzione $y(x) - y_p(x)$ soddisfa

$$\mathcal{L}(y - y_p) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y_p) = g - g = 0$$

e dunque sarà della forma $y_0(x; C_1, C_2)$ per opportuni valori di C_1 e C_2.

Qualora il termine noto g sia una combinazione di prodotti di polinomi algebrici, funzioni trigonometriche ed esponenziali, è possibile trovare un integrale particolare avente la stessa struttura. Per comprendere ciò, partiamo da un termine noto del tipo $g(x) = p_n(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ e $p_n(x)$ polinomio algebrico di grado $n \geq 0$. Cerchiamo una soluzione particolare nella forma $y_p(x) = q_N(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ con q_N polinomio di grado $N \geq n$ da determinarsi. Sostituendo tale espressione e quelle delle sue derivate prima e seconda nell'equazione, otteniamo

$$\mathcal{L}(q_N(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}) = \big(\chi(\alpha) q_N(x) + \chi'(\alpha) q_N'(x) + q_N''(x)\big)\,\mathrm{e}^{\alpha x} = p_n(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

da cui

$$\chi(\alpha) q_N(x) + \chi'(\alpha) q_N'(x) + q_N''(x) = p_n(x)\,.$$

Se α non è una radice del polinomio caratteristico, allora è sufficiente porre $N = n$ e determinare i coefficienti incogniti di q_n uguagliando tra loro i coefficienti delle potenze di pari grado dei due polinomi a primo e secondo membro; è conveniente partire dal coefficiente di grado massimo n e procedere all'indietro.

Se α è una radice semplice del polinomio caratteristico, allora $\chi(\alpha) = 0$ ma $\chi'(\alpha) \neq 0$, nel qual caso si pone $N = n + 1$ e si cercherà una soluzione polinomiale dell'equazione $\chi'(\alpha) q_N'(x) + q_N''(x) = p_n(x)$; poiché il coefficiente di grado 0 di q_{n+1} non interviene in tale espressione, è sufficiente cercare q_{n+1} nella forma $q_{n+1}(x) = x q_n(x)$ con q_n arbitrario polinomio di grado n.

Se infine α è una radice doppia del polinomo caratteristico, allora si pone $N = n + 2$ e si risolve l'equazione $q_{n+2}''(x) = p_n(x)$, cercando q_{n+2} nella forma $q_{n+2}(x) = x^2 q_n(x)$ con q_n arbitrario polinomio di grado n. Le ultime due situazioni si dicono di **risonanza**.

Si noti che quando α è complesso, le espressioni $\chi(\alpha)$ e $\chi'(\alpha)$ sono in genere complesse, dunque è necessario cercare $q_N(x)$ come polinomio a coefficienti complessi. Come nel caso dell'equazione omogenea, è possibile evitare l'uso della variabile complessa considerando separatamente la parte reale e la parte immaginaria di

$p_n(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$; ponendo $\alpha = \mu + i\vartheta$, esse sono date rispettivamente da $p_n(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}\cos\vartheta x$ e $p_n(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}\sin\vartheta x$.

Possiamo quindi sintetizzare i risultati della nostra analisi quando si considerino termini noti g reali della forma

$$\boxed{g(x) = p_n(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}\cos\vartheta x \qquad \text{oppure} \qquad g(x) = p_n(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}\sin\vartheta x\,.} \tag{11.34}$$

Cerchiamo una soluzione particolare y_p nella forma

$$\boxed{y_p(x) = x^m \mathrm{e}^{\mu x}(q_{1,n}(x)\cos\vartheta x + q_{2,n}(x)\sin\vartheta x),} \tag{11.35}$$

dove $q_{i,n}(x)$ sono polinomi algebrici di grado n, mentre m vale 0 tranne che nelle seguenti situazioni di *risonanza*:

i) nel caso $\Delta > 0$, si pone $m = 1$ se $\vartheta = 0$ e μ coincide con una delle radici λ_1 o λ_2 del polinomio caratteristico;

ii) nel caso $\Delta = 0$, si pone $m = 2$ se $\vartheta = 0$ e μ coincide con la radice (doppia) λ del polinomio caratteristico;

iii) nel caso $\Delta < 0$, si pone $m = 1$ se $\mu = \sigma$ e $\vartheta = \omega$.

Sostituendo l'espressione (11.35) di y_p nell'equazione differenziale (11.29), dopo aver derivato e raccolto addendi comuni si uguaglieranno i coefficienti dei termini $x^k\mathrm{e}^{\mu x}\sin\vartheta x$ e $x^k\mathrm{e}^{\mu x}\cos\vartheta x$, per $k = 0, \ldots, n$, a primo e a secondo membro. In tal modo si giunge a determinare y_p.

Se infine g è una somma di termini del tipo (11.34), la soluzione particolare y_p sarà la somma delle soluzioni particolari relative ai singoli termini. In altri parole, se $g = g_1 + g_2 + \ldots + g_K$ e se y_{pk} è soluzione di $\mathcal{L}(y) = g_k$ per $k = 1, \ldots, K$, allora $y_p = y_{p1} + \ldots + y_{pK}$ soddisfa

$$\mathcal{L}(y_p) = \mathcal{L}(y_{p1}) + \ldots + \mathcal{L}(y_{pK}) = g_1 + \ldots + g_K = g$$

e dunque è soluzione di $\mathcal{L}(y) = g$. Tale proprietà prende il nome di *principio di sovrapposizione*.

Illustriamo il procedimento ora descritto con alcuni esempi.

Esempi 11.15

i) Consideriamo l'equazione

$$y'' + y' - 6y = g. \tag{11.36}$$

Troviamo dapprima l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + y' - 6y = 0. \tag{11.37}$$

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

ammette le radici distinte $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$, dunque l'integrale generale della (11.37) sarà

$$y_0(x; C_1, C_2) = C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Cerchiamo ora un integrale particolare della (11.36), supponendo dapprima che $g(x) = 3x^2 - x + 2$. Ricordando la (11.34), abbiamo $p_2(x) = 3x^2 - x + 2$ e $\mu = \vartheta = 0$. Poiché μ non coincide con λ_1 oppure λ_2, cerchiamo y_p nella forma $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nella (11.36), otteniamo

$$-6\alpha x^2 + (2\alpha - 6\beta)x + (2\alpha + \beta - 6\gamma) = 3x^2 - x + 2.$$

Uguagliando i coefficienti, troviamo

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

Pertanto, l'integrale generale della (11.36) sarà

$$y(x; C_1, C_2) = C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

Se invece scegliamo $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$, allora nella (11.34) abbiamo $p_0(x) = 1$, $\mu = \lambda_2 = 2$ e $\vartheta = 0$. Dunque cerchiamo y_p nella forma $y_p(x) = \alpha x \mathrm{e}^{2x}$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nella (11.36), otteniamo

$$5\alpha \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$$

da cui $\alpha = \frac{1}{5}$. Pertanto, l'integrale generale della (11.36) sarà

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + \left(C_2 + \frac{1}{5}x\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

ii) Consideriamo l'equazione

$$y'' - 2y' + y = g. \tag{11.38}$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ammette la radice doppia $\lambda = 1$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà

$$y_0(x; C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{x}.$$

Supponiamo poi che $g(x) = x\mathrm{e}^{3x}$. Poiché $\mu = 3$ è diverso da $\lambda = 1$, cerchiamo l'integrale particolare della (11.38) nella forma $y_p(x) = (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{3x}$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$4(\alpha x + \alpha + \beta)\,\mathrm{e}^{3x} = x\,\mathrm{e}^{3x},$$

da cui, uguagliando i coefficienti, otteniamo

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(x - 1)\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Se ne conclude che l'integrale generale della (11.38) risulta

$$y(x; C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}(x - 1)\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Se invece si ha $g(x) = -4\mathrm{e}^{x}$, allora cerchiamo y_p nella forma $y_p(x) = \alpha x^2 \mathrm{e}^{x}$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nell'equazione (11.38), troviamo

$$2\alpha \mathrm{e}^{x} = -4\mathrm{e}^{x}$$

da cui $\alpha = -2$. Pertanto, l'integrale generale della (11.38) risulta

$$y(x; C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

iii) Consideriamo infine l'equazione

$$y'' + 2y' + 5y = g. \tag{11.39}$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ ammette discriminante negativo $\Delta = -16$. Abbiamo $\sigma = -1$ e $\omega = 2$, e dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà

$$y_0(x; C_1, C_2) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Supponiamo poi che $g(x) = \sin x$. Facendo riferimento alla prima delle (11.34), abbiamo $p_0(x) = 1$, $\mu = 0$ e $\vartheta = 1$. Cerchiamo dunque l'integrale particolare della (11.39) nella forma $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nella (11.39), si ha

$$(4\alpha + 2\beta) \cos x + (4\beta - 2\alpha) \sin x = \sin x,$$

da cui, uguagliando i coefficienti di $\sin x$ e $\cos x$, si ottiene $\alpha = -\frac{1}{10}$ e $\beta = \frac{1}{5}$, vale a dire

$$y_p(x) = -\frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Se ne conclude che l'integrale generale della (11.39) risulta

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x\,.$$

Supponiamo infine che $g(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin 2x$. Abbiamo nella prima delle (11.34) $\mu = \sigma = -1$ e $\vartheta = \omega = 2$, dunque cerchiamo l'integrale particolare della (11.39) nella forma $y_p(x) = x\mathrm{e}^{-x}(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x)$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nella (11.39), si ha

$$\mathrm{e}^{-x}(4\beta \cos 2x - 4\alpha \sin 2x) = \mathrm{e}^{-x} \sin 2x,$$

da cui $\alpha = -\frac{1}{4}$ e $\beta = 0$. Concludiamo che l'integrale generale della (11.39) risulta

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right) \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

□

11.5 Esercizi

1. *Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:*

   a) $y' = x \log(1 + x^2)$

   b) $y' = \dfrac{(x+2)y}{x(x+1)}$

   c) $y' = \dfrac{y^2}{x \log x} - \dfrac{1}{x \log x}$

   d) $y' = \sqrt[3]{2y+3} \tan^2 x$

2. *Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali omogenee:*

   a) $4x^2 y' = y^2 + 6xy - 3x^2$

   b) $x^2 y' = x^2 + 4y^2 + yx$

c) $xyy' = x^2 + y^2$

$\boxed{\text{d)}}$ $x^2y' - y^2\mathrm{e}^{x/y} = xy$

3. *Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari:*

a) $y' + 3xy = x^3$

$\boxed{\text{b)}}$ $y' = \dfrac{1}{x}y - \dfrac{3x+2}{x^3}$

$\boxed{\text{c)}}$ $y' = \dfrac{2x-y}{x-1}$

d) $xy' = y + \dfrac{2x^2}{1+x^2}$

$\boxed{4.}$ *Determinare l'integrale particolare dell'equazione differenziale*

$$y' = \frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{2x+1}$$

soddisfacente la condizione $y(0) = 1$.

$\boxed{5.}$ *Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione differenziale*

$$y' = -2y + \mathrm{e}^{-2x}$$

che hanno derivata nulla nell'origine.

6. *Risolvere, sulla semiretta* $[\sqrt[4]{\mathrm{e}}, +\infty)$, *il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathrm{e}^y y' = 4x^3 \log x (1+\mathrm{e}^y) \\ y(\sqrt[4]{\mathrm{e}}) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{7.}$ *Si risolva, nell'intervallo* $(-2, 2)$, *il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3x}{x^2-4}|y| \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$\boxed{8.}$ *Data l'equazione differenziale*

$$y' \sin 2x - 2(y + \cos x) = 0, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

determinarne l'integrale generale e indicare la soluzione che si mantiene limitata per $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

$\boxed{9.}$ *Trovare, al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$, *la soluzione dell'equazione differenziale*

$$y' = (2+\alpha)y - 2\mathrm{e}^{\alpha x}$$

per cui $y(0) = 3$. *Stabilire, successivamente, per quali valori di* α *il seguente integrale improprio converge* $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$.

10. *Siano a, b numeri reali arbitrari. Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a\dfrac{y}{x} + 3x^b \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

sulla semiretta $[2, +\infty)$.

11. *Data l'equazione differenziale, dipendente dal parametro reale k,*

$$y'(x) = -3xy(x) + kx,$$

a) se ne trovi la soluzione che si annulla nell'origine;
b) per tale soluzione, si determini k in modo che $y(x) \sim x^2$ per $x \to 0$.

12. *Data l'equazione differenziale*

$$y' = \frac{y^2 - 2y - 3}{2(1 + 4x)},$$

a) determinarne l'integrale generale;
b) determinarne l'integrale particolare $y_0(x)$ che soddisfa $y_0(0) = 1$;
c) scrivere lo sviluppo di Maclaurin di $y_0(x)$ arrestato al secondo ordine.

13. *Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali del secondo ordine riconducibili al primo:*

a) $y'' = 2e^x$ b) $y'' + y' - x^2 = 0$

14. *Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine:*

a) $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1$ b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

c) $y'' + y = 3\cos x$ d) $y'' - 3y' + 2y = e^x$

e) $y'' - 9y = e^{-3x}$ f) $y'' - 2y' - 3y = \sin x$

15. *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:*

a) $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 2x + 1 \\ y(0) = \frac{7}{8} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

11.5.1 Soluzioni

1. *Equazioni differenziali a variabili separabili:*

a) $y = \frac{1}{2}(1 + x^2)\log(1 + x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$.

b) La funzione $h(y) = y$ ha uno zero per $y = 0$ che quindi è un integrale singolare dell'equazione. Supponiamo ora $y \neq 0$ e separiamo le variabili, ottenendo

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x+2}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Risolviamo il secondo integrale usando la tecnica dei fratti semplici:

$$\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 2\log|x| - \log|x+1| + \log C \\ &= \log\frac{Cx^2}{|x+1|}\,, \qquad C > 0\,.\end{aligned}$$

Allora

$$\log|y| = \log\frac{Cx^2}{|x+1|}\,, \qquad C > 0\,,$$

e, passando agli esponenziali,

$$|y| = C\,\frac{x^2}{|x+1|}\,, \qquad C > 0\,,$$

ovvero

$$y = C\,\frac{x^2}{x+1}\,, \qquad C \neq 0\,.$$

Osserviamo che l'integrale singolare $y = 0$ rientra in questa formula per $C = 0$.

c) Notiamo che il problema richiede $x > 0$ (argomento del logaritmo). Scriviamo l'equazione assegnata nella forma

$$y' = \frac{y^2-1}{x\log x}\,,$$

da cui si ricava $h(y) = y^2 - 1$. Dunque le funzioni costanti $y = 1$ e $y = -1$ sono integrali singolari. Sia ora $y \neq \pm 1$; separiamo le variabili, ottenendo

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Usando la tecnica dei fratti semplici nel primo integrale e la sostituzione $t = \log x$ nel secondo, ricaviamo

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log|\log x| + \log C = \log C|\log x|\,, \qquad C > 0\,,$$

ovvero,

$$\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log C \log^2 x\,, \qquad C > 0\,,$$

e, passando agli esponenziali,

$$\frac{y-1}{y+1} = C\log^2 x\,, \qquad C \neq 0\,;$$

in definitiva, esplicitando rispetto a y, l'integrale generale è

$$y = \frac{1 + C\log^2 x}{1 - C\log^2 x}\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

avendo recuperato l'integrale singolare $y = 1$ per $C = 0$.

d) $y = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\left(\tan x - x + C\right)\right]^{3/2}$ e la soluzione costante $y = -\frac{3}{2}$.

2. *Equazioni differenziali omogenee:*

a) Supponendo $x \neq 0$ e dividendo per $4x^2$, si ottiene

$$y' = \frac{1}{4}\frac{y^2}{x^2} + \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{3}{4}\,.$$

Con la sostituzione $z = \frac{y}{x}$, si ha $y' = z + xz'$ da cui

$$z + xz' = \frac{1}{4}z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{3}{4}\,,$$

ovvero

$$4xz' = (z-1)(z+3)\,.$$

Osserviamo che $\varphi(z) = (z-1)(z+3)$ si annulla per $z = 1$ e $z = -3$, ossia le funzioni $y = x$ e $y = -3x$ sono integrali singolari dell'equazione data. Per ricavare l'integrale generale, separiamo le variabili, ottenendo

$$\int \frac{4}{(z-1)(z+3)}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Usando la tecnica dei fratti semplici, si ha

$$\frac{4}{(z-1)(z+3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}\,,$$

quindi il primo integrale vale

$$\int \frac{4}{(z-1)(z+3)}\,\mathrm{d}z = \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}\right)\mathrm{d}z = \log\left|\frac{z-1}{z+3}\right| + c\,.$$

Allora risulta

$$\log\left|\frac{z-1}{z+3}\right| = \log C|x|\,, \qquad C>0\,,$$

e, passando agli esponenziali,

$$\frac{z-1}{z+3} = Cx\,, \qquad C\neq 0\,.$$

Esplicitando rispetto a z, si ha

$$z = \frac{1+3Cx}{1-Cx}\,, \qquad C\in\mathbb{R}\,,$$

avendo inglobato nella formula anche l'integrale singolare $z=1$. In definitiva, tornando alla funzione y, l'integrale generale dell'equazione è

$$y = \frac{x+3Cx^2}{1-Cx}\,, \qquad C\in\mathbb{R}\,.$$

b) $y = \frac{1}{2}x\tan\left(2\log C|x|\right)\,,\ C>0\,;$ c) $y = \pm x\sqrt{2\log C|x|}\,,\ C>0\,.$

d) Supponendo $x\neq 0$ e dividendo per x^2, si ottiene

$$y' = \frac{y^2}{x^2}\mathrm{e}^{x/y} + \frac{y}{x}\,.$$

Con la sostituzione $z=\frac{y}{x}$, si ha $y'=z+xz'$ da cui

$$z+xz' = z^2\mathrm{e}^{1/z}+z\,,$$

ovvero

$$xz' = z^2\mathrm{e}^{1/z}\,.$$

La funzione $z=0$, a cui corrisponde la funzione $y=0$, è un integrale singolare dell'equazione. Separando le variabili, otteniamo

$$\int\frac{\mathrm{e}^{-1/z}}{z^2}\,\mathrm{d}z = \int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,;$$

integrando si ha

$$\mathrm{e}^{-1/z} = \log C|x|\,, \qquad C>0\,,$$

ossia, passando ai logaritmi,

$$-\frac{1}{z} = \log\log C|x|\,, \qquad C>0\,.$$

Infine, esplicitando rispetto a z, otteniamo

$$z = -\frac{1}{\log\log C|x|}\,, \qquad C>0\,,$$

e, tornando alla funzione y,

$$y = -\frac{x}{\log\log C|x|}\,, \qquad C>0\,.$$

3. *Equazioni differenziali lineari:*

a) $y = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) + C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}$.

b) Applichiamo la formula (11.18) con $a(x) = -\frac{1}{x}$ e $b(x) = -\frac{3x+2}{x^3}$, ottenendo

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} \left(-\frac{3x+2}{x^3}\right) \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\log|x|} \int \mathrm{e}^{\log\frac{1}{|x|}} \left(-\frac{3x+2}{x^3}\right) \mathrm{d}x \\ &= |x| \int \frac{-(3x+2)}{|x|x^3}\,\mathrm{d}x = x \int \frac{-(3x+2)}{xx^3}\,\mathrm{d}x \\ &= x \int \left(-\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4}\right) \mathrm{d}x = x\left(\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + C\right) \\ &= \frac{3}{2x} + \frac{2}{3x^2} + Cx\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

c) Possiamo scrivere

$$y' + \frac{1}{x-1}y = \frac{2x}{x-1}$$

e, applicando la formula (11.18) con $a(x) = \frac{1}{x-1}$ e $b(x) = \frac{2x}{x-1}$, ottenere

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x} \frac{2x}{x-1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\log|x-1|} \int \mathrm{e}^{\log|x-1|} \frac{2x}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{|x-1|} \int |x-1| \frac{2x}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x-1} \int 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x-1}(x^2 + C)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

d) $y = 2x \arctan x + Cx\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$

4. Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. La soluzione costante $y = 0$ non è accettabile in quanto non soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$. Separando le variabili, otteniamo

$$\int \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-y}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Il primo integrale mediante la sostituzione $t = \mathrm{e}^{-y}$ (da cui $\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$, ossia $-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$) diventa

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-y}}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c = \log\left|1 - \frac{1}{t}\right| + c = \log|1-\mathrm{e}^{y}| + c. \end{aligned}$$

Allora

$$\log|1-\mathrm{e}^{y}| = \frac{1}{2}\log|2x+1| + \log C\,, \qquad C > 0,$$

ovvero

$$\log|1-\mathrm{e}^y| = \log C\sqrt{|2x+1|}\,, \qquad C>0;$$

passando agli esponenziali, si ha

$$|1-\mathrm{e}^y| = C\sqrt{|2x+1|}\,, \quad C>0\,, \quad \text{cioè} \quad 1-\mathrm{e}^y = C\sqrt{|2x+1|}\,, \quad C\neq 0.$$

Infine, esplicitando rispetto a y e inglobando la soluzione costante $y=0$ corrispondente a $C=0$, si ottiene l'integrale generale dell'equazione:

$$y = \log\left(1 - C\sqrt{|2x+1|}\right)\,, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Imponiamo ora la condizione iniziale $y(0)=1$: si ha $C=1-\mathrm{e}$, quindi la soluzione cercata sarà

$$y = \log\left(1+(\mathrm{e}-1)\sqrt{|2x+1|}\right).$$

5. L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare risulta

$$y = \mathrm{e}^{-\int 2\,\mathrm{d}x}\int \mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x}(x+C)\,, \qquad C\in\mathbb{R}\,.$$

La condizione richiesta si esprime come $y'(0)=0$. Ponendo $x=0$ nell'equazione differenziale $y'(x) = -2y(x)+\mathrm{e}^{-2x}$, tale condizione equivale a $y(0)=\frac{1}{2}$ da cui si ottiene $C=\frac{1}{2}$. Pertanto la soluzione cercata è

$$y = \mathrm{e}^{-2x}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

6. $y = \log\left(2\mathrm{e}^{x^4(\log x - \frac{1}{4})} - 1\right)$.

7. Notiamo che, per $x\in(-2,\,2)$, risulta $x^2-4<0$; inoltre, dalla condizione iniziale $y(0)=-1$, possiamo supporre $y(x)<0$ in un intorno di $x=0$. Allora, separando le variabili, si ha

$$-\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{3x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$$

Integrando, si ottiene

$$-\log|y| = -\log(-y) = \frac{3}{2}\log|x^2-4| + C, \qquad C\in\mathbb{R},$$

ossia

$$-\frac{1}{y} = C(4-x^2)^{3/2}, \qquad C>0$$

o anche

$$y = C(4-x^2)^{-3/2}, \qquad C<0.$$

Imponendo la condizione $y(0) = -1$, si ha $C = -8$ e quindi la soluzione cercata è

$$y = -\frac{8}{(4 - x^2)^{3/2}}.$$

Osserviamo che non si è considerata la soluzione costante $y = 0$, in quanto non soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -1$.

8. Utilizzando la formula trigonometrica $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, si ha

$$y' \sin x \cos x = y + \cos x.$$

Poiché $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x \cos x \neq 0$ e possiamo scrivere

$$y' = \frac{1}{\sin x \cos x}\, y + \frac{1}{\sin x}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare e l'integrale generale è dato da

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Calcoliamo dapprima

$$S = \int \frac{1}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x,$$

usando la sostituzione $t = \sin x$ (da cui $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ e $\cos^2 x = 1 - t^2$) e la tecnica dei fratti semplici:

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{1}{t(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)} \right) \mathrm{d}t \\ &= \log|t| - \frac{1}{2}|1-t| - \frac{1}{2}\log|1+t| + c \\ &= \log \frac{|t|}{\sqrt{|1-t^2|}} + c = \log \frac{\sin x}{\cos x} + c\,, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Allora si ha

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{\cos x} \left(-\frac{1}{\sin x} + C \right), \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

e l'integrale generale dell'equazione è

$$y = \frac{C \sin x - 1}{\cos x}\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo ora la soluzione che si mantiene limitata per $x \to \frac{\pi}{2}^-$ imponendo la condizione

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{C \sin x - 1}{\cos x} \in \mathbb{R}.$$

Ma

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{C\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{t\to 0^-} \frac{1 - C\cos t}{\sin t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{1 - C(1+o(t^2))}{t + o(t^2)} = 0$$

se e solo se $C = 1$. La soluzione cercata quindi è

$$y = \frac{\sin x - 1}{\cos x}.$$

9. L'equazione da risolvere è un'equazione differenziale lineare e si ottiene immediatamente l'integrale generale

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\int (2+\alpha)\,\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int (2+\alpha)\,\mathrm{d}x}(-2\mathrm{e}^{\alpha x})\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{(2+\alpha)x}(\mathrm{e}^{-2x} + C) = \mathrm{e}^{\alpha x}(1 + C\,\mathrm{e}^{2x})\,, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 3$, si ha $3 = 1 + C$, ossia $C = 2$. La soluzione cercata è quindi

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(1 + 2\mathrm{e}^{2x}).$$

L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{\alpha x} + 2\mathrm{e}^{(\alpha+2)x})\,\mathrm{d}x$$

converge se e solo se l'esponente dell'esponenziale che prevale è negativo, ossia deve risultare $\alpha + 2 < 0$. Pertanto l'integrale converge se $\alpha < -2$.

10. Direttamente dalla formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari, si ha

$$\begin{aligned} y &= e^{a\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(3\int e^{-a\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} x^b\,\mathrm{d}x\right) = x^a\left(3\int x^{b-a}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \begin{cases} x^a\left(\dfrac{3}{b-a+1}\,x^{b-a+1} + C\right) & \text{se } b-a \neq -1, \\ x^a\,(3\log x + C) & \text{se } b-a = -1\,, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{3}{b-a+1}\,x^{b+1} + C\,x^a & \text{se } b-a \neq -1, \\ 3x^a\log x + Cx^a & \text{se } b-a = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(2) = 1$, nei due casi, risulta

$$\begin{cases} \dfrac{3}{b-a+1}\,2^{b+1} + C\,2^a = 1 & \text{se } b-a \neq -1, \\ 3\cdot 2^a\log 2 + C\,2^a = 1 & \text{se } b-a = -1\,, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} C = 2^{-a}\left(1 - \dfrac{3}{b-a+1}\,2^{b+1}\right) & \text{se } b-a \neq -1, \\ C = 2^{-a} - 3\log 2 & \text{se } b-a = -1. \end{cases}$$

Pertanto la soluzione cercata sarà

$$y = \begin{cases} \dfrac{3}{b-a+1}\,x^{b+1} + 2^{-a}\left(1 - \dfrac{3}{b-a+1}\,2^{b+1}\right)x^a & \text{se } b-a \neq -1, \\ 3x^a \log x + \left(2^{-a} - 3\log 2\right)x^a & \text{se } b-a = -1. \end{cases}$$

11. *Risoluzione dell'equazione differenziale* $y'(x) = -3xy(x) + kx$*:*

a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare e si ottiene facilmente l'integrale generale

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-3\int x\,\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{3\int x\,\mathrm{d}x}\, kx\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\left(\frac{k}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x^2} + C\right) = \frac{k}{3} + C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$, si ha $0 = \frac{k}{3} + C$ da cui $C = -\frac{k}{3}$. La soluzione cercata è quindi

$$y = \frac{k}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\right).$$

b) La soluzione deve soddisfare la condizione

$$\frac{k}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\right) \sim x^2 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Ma

$$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2} = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0,$$

quindi

$$y(x) = \frac{k}{3}\left(1 - 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{k}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Dunque la soluzione y è determinata dalla condizione $\frac{k}{2} = 1$, ossia $k = 2$.

12. *Risoluzione dell'equazione differenziale* $y' = \frac{y^2-2y-3}{2(1+4x)}$*:*

a) $y(x) = \dfrac{3 + C\sqrt{|1+4x|}}{1 - C\sqrt{|1+4x|}}$ con $C \in \mathbb{R}$ e la soluzione costante $y(x) = -1$.

b) $y_0(x) = \dfrac{3 - \sqrt{|1+4x|}}{1 + \sqrt{|1+4x|}}$; c) $T_2(x) = 1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)$.

13. *Equazioni differenziali lineari del secondo ordine riconducibili al primo:*

a) $y = 2\mathrm{e}^x + C_1 x + C_2\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

b) Ponendo $z = y'$ otteniamo l'equazione lineare del primo ordine

$$z' + z = x^2\,,$$

il cui integrale generale è

$$z = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x} x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x} \int x^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrando due volte per parti, otteniamo

$$z = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C_1\right) = x^2 - 2x + 2 + C_1\mathrm{e}^{-x}\,, \quad C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Integrando ulteriormente, abbiamo

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

14. *Equazioni differenziali lineari del secondo ordine:*

a) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

b) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda = 0$ ha un'unica soluzione $\lambda = 2$ di molteplicità doppia; dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà

$$y_0(x; C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché $\mu = \lambda = 2$, cerchiamo l'integrale particolare nella forma $y_p(x) = \alpha x^2 \mathrm{e}^{2x}$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$2\alpha\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}\,,$$

da cui $\alpha = \frac{1}{2}$. Pertanto $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$ e l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x; C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

c) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$ ha discriminante $\Delta = -4$; abbiamo $\sigma = 0$ e $\omega = 1$. Dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà

$$y_0(x; C_1, C_2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché $\mu = \sigma = 0$, cerchiamo l'integrale particolare nella forma $y_p(x) = x(\alpha \cos x + \beta \sin x)$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$-2\alpha \sin x + 2\beta \cos x = 3 \cos x \,,$$

da cui $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{3}{2}$. Pertanto $y_p(x) = \frac{3}{2} x \sin x$ e l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{3}{2} x \sin x \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

d) $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x \,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$

e) L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 9 = 0$ ammette le soluzioni $\lambda = \pm 3$. Dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà

$$y_0(x; C_1, C_2) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{3x} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Cerchiamo l'integrale particolare nella forma $y_p(x) = \alpha x \mathrm{e}^{-3x}$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$-6\alpha \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-3x} \,,$$

da cui $\alpha = -\frac{1}{6}$. Pertanto $y_p(x) = -\frac{1}{6} x \mathrm{e}^{-3x}$ e l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{6} x \mathrm{e}^{-3x} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

f) $y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x \,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$

15. *Problemi di Cauchy:*

a) $y = \mathrm{e}^{-x} \sin 2x \,.$

b) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ ammette le soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$. Dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà

$$y_0(x; C_1, C_2) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Cerchiamo l'integrale particolare nella forma $y_p(x) = \alpha x + \beta$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$-5\alpha + 4\alpha x + 4\beta = 2x + 1 \,,$$

da cui $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{7}{8}$. Pertanto $y_p(x) = \frac{1}{2} x + \frac{7}{8}$ e l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} + \frac{1}{2} x + \frac{7}{8} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si perviene al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui $C_1 = \frac{1}{6}$ e $C_2 = -\frac{1}{6}$. Dunque la soluzione cercata è

$$y = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}\,.$$

Appendici

A.1

Principio di induzione

Il Principio di induzione costituisce una *regola di dimostrazione* utile per stabilire proprietà valide per ogni intero n, o eventualmente a partire da un certo $n_0 \in \mathbb{N}$.

Teorema A.1.1 (**Principio di induzione**) *Sia $n_0 \geq 0$ un intero e sia $P(n)$ un predicato definito per ogni intero $n \geq n_0$. Supponiamo che siano verificate le seguenti due condizioni:*

i) $P(n_0)$ *è vero;*
ii) per ogni $n \geq n_0$, se $P(n)$ è vero allora $P(n+1)$ è vero.

Allora $P(n)$ è vero per ogni $n \geq n_0$.

Dimostrazione. La dimostrazione utilizza la proprietà che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette elemento minimo; tale proprietà, intuitivamente evidente, può essere dedotta dagli assiomi che definiscono l'insieme $\mathbb{N}$.

Procediamo per assurdo, supponendo che esista almeno un intero $n \geq n_0$ per cui $P(n)$ sia falso. Ciò equivale a dire che il sottoinsieme

$$F = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ e } P(n) \text{ è falso}\}$$

non è vuoto. Sia $\bar{n} = \min F$. Poiché $P(\bar{n})$ è falso, non può essere $\bar{n} = n_0$ per la condizione *i)*; dunque $\bar{n} > n_0$. Pertanto $\bar{n} - 1 \geq n_0$ e per definizione di minimo elemento, $P(\bar{n} - 1)$ è vero. Ma la condizione *ii)* applicata con $n = \bar{n} - 1$ implica che $P(\bar{n})$ è vero, cioè $\bar{n} \notin F$. Ciò contraddice il fatto che $\bar{n}$ è il minimo elemento di F. □

A livello operativo, il Principio di induzione si usa nel modo seguente: dapprima si controlla che $P(n_0)$ sia vero; successivamente, si assume che $P(n)$ sia vero per un generico n e, usando tale informazione, si dimostra che anche $P(n+1)$ è vero.

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_A1, © Springer-Verlag Italia 2014

Come prima applicazione del Principio di induzione, dimostriamo la **disuguaglianza di Bernoulli**: per ogni $r \geq -1$, si ha

$$\boxed{(1+r)^n \geq 1 + nr\,, \qquad \forall n \geq 0\,.}$$

In tal caso, il predicato $P(n)$ è dato da "$(1+r)^n \geq 1 + nr$". Per $n = 0$, si ha $(1+r)^0 = 1 = 1 + 0r$ e dunque $P(0)$ è vero.

Supponiamo vera la disuguaglianza per un certo n (cioè $P(n)$ vero) e verifichiamo che vale per $n+1$ (cioè $P(n+1)$ vero). Si ha, osservando che $1 + r \geq 0$,

$$\begin{aligned}(1+r)^{n+1} &= (1+r)(1+r)^n \geq (1+r)(1+nr)\\ &= 1 + r + nr + nr^2 = 1 + (n+1)r + nr^2\\ &\geq 1 + (n+1)r\,,\end{aligned}$$

il che prova il risultato.

Ricordiamo che la disuguaglianza è già stata dimostrata in altro modo nell'Esempio 5.18, ma limitatamente al caso $r > 0$.

Il Principio di induzione permette di dimostrare alcuni risultati presentati nei capitoli precedenti. Di seguito riportiamo gli enunciati con le relative dimostrazioni.

▶ Dimostrazione della formula del binomio di Newton di pag. 21

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\,, \qquad n \geq 0\,.}$$

Dimostrazione. Per $n = 0$ si ha

$$(a+b)^0 = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = a^0 b^0 = 1\,,$$

dunque la formula è vera.

Supponiamo la formula vera per un generico n e verifichiamo che vale per l'intero successivo, cioè che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\,;\end{aligned}$$

ponendo $k+1=h$ nella seconda sommatoria, otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}=\sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^{n+1-h}b^{h}$$

e, osservando che h è una variabile muta, possiamo tornare alla variabile k, scrivendo

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}\\&=\binom{n}{0}a^{n+1}b^{0}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^{k}+\binom{n}{n}a^{0}b^{n+1}\,.\end{aligned}$$

Usando la (1.12), con n sostituito da $n+1$, e ricordando le relazioni

$$\binom{n}{0}=1=\binom{n+1}{0}\quad\text{e}\quad\binom{n}{n}=1=\binom{n+1}{n+1}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=\binom{n+1}{0}a^{n+1}b^{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}+\binom{n+1}{n+1}a^{0}b^{n+1}\\&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}\,,\end{aligned}$$

cioè la tesi. □

▶ Dimostrazione del Teorema di esistenza degli zeri di pag. 114

Teorema 4.23 (di esistenza degli zeri) *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Se $f(a)f(b)<0$, cioè se f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo, allora esiste uno zero di f nell'intervallo aperto (a,b). Se inoltre f è strettamente monotona in $[a,b]$, allora lo zero è unico nell'intervallo.*

Dimostrazione. Facendo riferimento alla dimostrazione fornita a pag. 114, è sufficiente giustificare l'esistenza di due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, finite o infinite, soddisfacenti il predicato $P(n)$:

$$\begin{aligned}&[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\\&f(a_n)<0<f(b_n)\quad\text{e}\quad b_n-a_n=\frac{b_0-a_0}{2^n}\,.\end{aligned}$$

Per $n = 0$ si ha, per ipotesi, $f(a_0) = f(a) < 0 < f(b) = f(b_0)$ e, banalmente, $b_0 - a_0 = \dfrac{b_0 - a_0}{2^0}$; pertanto $P(0)$ è vero.

Supponiamo ora vero $P(n)$. Sia $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ il punto medio dell'intervallo $[a_n, b_n]$. Se $f(c_n) = 0$, la costruzione delle successioni si interrompe in quanto abbiamo trovato uno zero della funzione. Se $f(c_n) \neq 0$, verifichiamo $P(n+1)$. Se $f(c_n) > 0$, poniamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c_n$; se invece $f(c_n) < 0$, poniamo $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$. L'intervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ è contenuto nell'intervallo $[a_n, b_n]$ e si ha

$$f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1}) \quad \text{e} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} . \qquad \square$$

▶ Dimostrazione della disuguaglianza (5.16) di pag. 146

Stabiliamo innanzitutto la seguente proprietà generale.

Proprietà A.1.2 *Sia $\{b_m\}_{m\geq 0}$ una successione a termini non negativi. Supponiamo che esista un numero $r > 0$ tale che valgano le disuguaglianze*

$$b_{m+1} \leq r\, b_m , \qquad \forall m \geq 0 .$$

Allora si ha

$$b_m \leq r^m b_0 , \qquad \forall m \geq 0 .$$

Dimostrazione. Applichiamo il Principio di induzione. Per $m = 0$, la disuguaglianza è banalmente vera, essendo $b_0 \leq r^0 b_0 = b_0$.

Supponiamo vera la disuguaglianza per m e verifichiamola per $m+1$. Si ha, usando l'ipotesi,

$$b_{m+1} \leq r\, b_m \leq r\, r^m b_0 = r^{m+1} b_0 . \qquad \square$$

Se la successione $\{b_m\}_{m\geq 0}$ è a termini strettamente positivi, vale un analogo enunciato con le disuguaglianze strette, ovvero $\leq$ sostituito da $<$.

Venendo alla disuguaglianza (5.16), per ottenere l'implicazione

$$\boxed{a_{n+1} < r\, a_n \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} < r^{n-n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon+1} ,}$$

poniamo $b_m = a_{m+n_\varepsilon+1}$ e osserviamo che l'ipotesi

$$a_{n+1} < r\, a_n , \qquad \forall n > n_\varepsilon$$

equivale a

$$b_{m+1} < r\, b_m , \qquad \forall m \geq 0 .$$

Dunque dalla proprietà precedente si ha $b_m < r^m b_0$, e scegliendo $m = n - n_\varepsilon$ si ottiene la (5.16).

A.2

Complementi su limiti e continuità

In questa appendice, enunciamo e dimostriamo alcuni risultati sui limiti, che poi utilizziamo nella successiva dimostrazione del Teorema 4.10 relativo all'algebra dei limiti. In seguito, giustifichiamo il comportamento limite delle principali funzioni elementari agli estremi del loro dominio, e verifichiamo la continuità di tali funzioni nell'insieme di definizione. Infine, dimostriamo alcune proprietà relative al numero di Nepero enunciate nel testo, e proviamo che tale importante numero è irrazionale.

A.2.1 Limiti

Premettiamo i seguenti risultati utili nel seguito.

Teorema A.2.1 (**di limitatezza locale**) *Se f ammette limite finito per $x \to c$, allora esiste un intorno $I(c)$ di c e una costante $M_f > 0$ tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\} \ , \ |f(x)| \leq M_f \, .$$

Dimostrazione. Sia $\ell = \lim_{x \to c} f(x) \in \mathbb{R}$; dalla definizione di limite con, ad esempio, $\varepsilon = 1$ si deduce che esiste un intorno $I(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < 1 \, .$$

Ricordando la disuguaglianza triangolare (1.1), ne segue che, in tale insieme,

$$|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell| \, .$$

Dunque è sufficiente porre $M_f = 1 + |\ell|$. □

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_A2, © Springer-Verlag Italia 2014

Teorema A.2.2 (**forma forte del Teorema di permanenza del segno**) *Se f ammette limite non nullo (finito o infinito) per $x \to c$, allora esiste un intorno $I(c)$ di c e una costante $K_f > 0$ tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\}\,, \qquad |f(x)| > K_f\,. \tag{A.2.1}$$

Dimostrazione. Sia $\ell = \lim_{x\to c} f(x)$. Se $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, fissato ad esempio $\varepsilon = |\ell|/2$ nella definizione di limite per f, esiste un intorno $I(c)$ tale che $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\}$, $|f(x) - \ell| < |\ell|/2$. Dunque si ha

$$|\ell| = |f(x) + \ell - f(x)| \le |f(x)| + |f(x) - \ell| < |f(x)| + \frac{|\ell|}{2}$$

da cui

$$|f(x)| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}\,,$$

e il teorema è dimostrato con $K_f = \frac{|\ell|}{2}$.

Se $\ell \pm \infty$, si ha $\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty$ e dunque è sufficiente scegliere ad esempio $A = 1$ nella definizione di limite ed ottenere $|f(x)| > 1$ in un intorno $I(c)$ di c; pertanto in tal caso $K_f = 1$. □

Osservazione A.2.3 Notiamo che se $\ell > 0$, allora il Teorema di permanenza del segno 4.2 ci assicura che in un opportuno intorno di c, tranne al più nel punto c stesso, la funzione è strettamente positiva. Dunque la disuguaglianza in (A.2.1) può essere espressa in modo più preciso come $f(x) > K_f$. Analogamente se $\ell < 0$, la disuguaglianza (A.2.1) diventa $f(x) < -K_f$. In tale senso il Teorema A.2.2 è un rafforzamento del Teorema di permanenza del segno 4.2. □

La seguente proprietà rende talvolta più agevole la verifica della condizione di limite.

Proprietà A.2.4 *Per dimostrare che $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ è sufficiente trovare una opportuna costante $C > 0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(c)$ tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < C\varepsilon\,. \tag{A.2.2}$$

Dimostrazione. Infatti la condizione (3.8) si deduce dalla (A.2.2) scegliendo ε/C in luogo di ε. □

▶ Dimostrazione del Teorema 4.10 di pag. 101

Teorema 4.10 (**Algebra dei limiti**) *Supponiamo che, per x tendente a c, la funzione f ammetta limite ℓ (finito o infinito) e la funzione g ammetta limite m (anch'esso finito o infinito). Allora, ogniqualvolta l'espressione a secondo membro è definita, si ha*

$$\lim_{x\to c}[f(x)\pm g(x)] = \ell \pm m,$$
$$\lim_{x\to c}[f(x)\,g(x)] = \ell\, m,$$
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$$

(in quest'ultimo caso supponiamo inoltre che $g(x)\neq 0$ in un intorno di c escluso al più il punto c).

Dimostrazione. Dimostriamo i seguenti casi:

a) se $\ell\in\mathbb{R}$ e $m=-\infty$, allora $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x)-g(x)\big)=+\infty$;
b) se $\ell, m\in\mathbb{R}$, allora $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \ell\, m\in\mathbb{R}$;
c) se $\ell, m\in\mathbb{R}$ e $m\neq 0$, allora $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\ell}{m}\in\mathbb{R}$;
d) se $\ell\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ oppure $\ell\pm\infty$ e $m=0$, allora $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Lasciamo la dimostrazione dei casi rimanenti per esercizio.

a) Sia $A>0$ arbitrariamente fissato.
Dal Teorema di limitatezza locale A.2.1, applicato alla funzione f, esiste un intorno $I'(c)$ di c e una costante $M_f>0$ tale che per ogni $x\in\operatorname{dom} f\cap I'(c)\setminus\{c\}$, $|f(x)|\le M_f$.
Inoltre, $\lim\limits_{x\to c} g(x)=-\infty$ equivale al fatto che per ogni $B>0$ esiste un intorno $I''(c)$ di c tale che per ogni $x\in\operatorname{dom} g\cap I''(c)\setminus\{c\}$ si ha $g(x)<-B$, ossia $-g(x)>B$.
Se scegliamo $B=A+M_f$ e poniamo $I(c)=I'(c)\cap I''(c)$, abbiamo, per ogni $x\in\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g\cap I(c)\setminus\{c\}$,

$$f(x)-g(x)>-M_f+B\ge A\,.$$

Dunque si è dimostrato che $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x)-g(x)\big)=+\infty$.

b) Sia $\varepsilon>0$ fissato.
Dall'ipotesi $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, si ha

$$\exists I'(c):\forall x\in\operatorname{dom} f,\ x\in I'(c)\setminus\{c\}\quad\Rightarrow\quad |f(x)-\ell|<\varepsilon\,,$$

mentre dal Teorema di limitatezza locale A.2.1 si ottiene

$$\exists I''(c),\ \exists M_f > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f,\ x \in I''(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < M_f\,.$$

Similmente, dall'ipotesi $\lim_{x\to c} g(x) = m \in \mathbb{R}$, si ha

$$\exists I'''(c) : \forall x \in \operatorname{dom} g,\ x \in I'''(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \varepsilon\,.$$

Poniamo allora $I(c) = I'(c) \cap I''(c) \cap I'''(c)$; per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap I(c) \setminus \{c\}$, si ha

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell m| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - \ell m| \\ &= |f(x)\big(g(x) - m\big) + \big(f(x) - \ell\big)m| \\ &\le |f(x)||g(x) - m| + |f(x) - \ell|\,|m| < (M_f + |m|)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

È dunque verificata la (A.2.2) con $C = M_f + |m|$.

c) Sia $\varepsilon > 0$ fissato.
Dall'ipotesi $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to c} g(x) = m \in \mathbb{R}$, si ha

$$\exists I'(c) : \forall x \in \operatorname{dom} f,\ x \in I'(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

e

$$\exists I''(c) : \forall x \in \operatorname{dom} g,\ x \in I''(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \varepsilon\,.$$

Inoltre, poiché $m \neq 0$, il Teorema A.2.2 assicura l'esistenza di un intorno $I'''(c)$ di c e di una costante $K_g > 0$ tale che $\forall x \in \operatorname{dom} g,\ x \in I'''(c) \setminus \{c\}$ si ha $|g(x)| > K_g$.
Poniamo $I(c) = I'(c) \cap I''(c) \cap I'''(c)$; per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g,\ x \in I(c) \setminus \{c\}$, si ha

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{m}\right| &= \left|\frac{f(x)m - \ell g(x)}{mg(x)}\right| = \frac{|f(x)m - \ell m + \ell m - \ell g(x)|}{|m||g(x)|} \\ &= \frac{\big|\big(f(x) - \ell\big)m + \ell\big(m - g(x)\big)\big|}{|m||g(x)|} \le \frac{|f(x) - \ell|\,|m| + |\ell|\,|g(x) - m|}{|m||g(x)|} \\ &< \frac{|m| + |\ell|}{|m|K_g}\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

È dunque verificata la (A.2.2) con $C = \dfrac{|m| + |\ell|}{|m|K_g}$.

d) Sia $A > 0$ fissato.
Applicando il Teorema A.2.2 alla funzione f, esiste un intorno $I'(c)$ di c e una costante $K_f > 0$ tale che $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap \in I'(c) \setminus \{c\},\ |f(x)| > K_f$.
Dall'ipotesi $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, scegliendo $\varepsilon = K_f/A$, deduciamo l'esistenza di un intorno $I''(c)$ di c tale che $|g(x)| < K_f/A$, per ogni $x \in \operatorname{dom} g \cap I''(c) \setminus \{c\}$. Poniamo $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$; per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap I(c) \setminus \{c\}$, si ha

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > K_f \frac{A}{K_f} = A\,.$$

Ciò mostra che $\lim_{x\to c} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, che è precisamente la tesi. □

A.2.2 Funzioni elementari

▶ Verifica dei limiti della tabella di pag. 106

a)	$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty\,,$	$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$	$\alpha > 0$
b)	$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0\,,$	$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$	$\alpha < 0$
c)	$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \dfrac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$		
d)	$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,,$	$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$	$a > 1$
e)	$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,,$	$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$	$a < 1$
f)	$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty\,,$	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$	$a > 1$
g)	$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty\,,$	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$	$a < 1$
h)	$\lim_{x\to\pm\infty} \sin x\,,$ $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x\,,$	$\lim_{x\to\pm\infty} \tan x$ non esistono	
i)	$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^\pm} \tan x = \mp\infty\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$		
l)	$\lim_{x\to\pm 1} \arcsin x = \pm\dfrac{\pi}{2} = \arcsin(\pm 1)$		
m)	$\lim_{x\to+1} \arccos x = 0 = \arccos 1\,,$	$\lim_{x\to-1} \arccos x = \pi = \arccos(-1)$	
n)	$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\dfrac{\pi}{2}$		

Dimostrazione.

a) Consideriamo il primo limite. Fissato $A > 0$, poniamo $B = A^{1/\alpha} > 0$. Dalla monotonia della funzione elevamento a potenza, otteniamo

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x > B \quad \Rightarrow \quad x^\alpha > B^\alpha = A$$

e dunque la condizione di limite (Definizione 3.12) è verificata.
Per quanto riguarda il secondo limite, fissato $\varepsilon > 0$, poniamo $\delta = \varepsilon^{1/\alpha}$, da cui, ancora per la monotonia,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x < \delta \quad \Rightarrow \quad x^\alpha > \delta^\alpha = \varepsilon\,.$$

Pertanto la la condizione di limite (Definizione 3.15) è verificata.

b) I risultati si deducono da a) mediante la sostituzione $z = \frac{1}{x}$, che fornisce $x^\alpha = \frac{1}{z^{|\alpha|}}$. Si applica allora l'algebra dei limiti e il Teorema di sostituzione 4.15.

c) La formula è stata già dimostrata nell'Esempio 4.14 iii).

d) Consideriamo il primo limite. Poniamo $a = 1 + b$, con $b > 0$, e usiamo la disuguaglianza di Bernoulli $a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$. Fissato ora $A > 0$ arbitrario, sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 + nb > A$. Ricordando la monotonia della funzione esponenziale, otteniamo

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > n \quad \Rightarrow \quad a^x > a^n \geq 1 + nb > A\,,$$

dunque la condizione di limite (Definizione 3.12) è verificata con $B = n$.
Il secondo limite segue dal primo, osservando che

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to+\infty} a^z} = 0\,.$$

e) I limiti seguono da d) usando l'identità $a^x = \dfrac{1}{(1/a)^x}$.

f) Notiamo innanzitutto che, dai limiti d) e ricordando il Corollario 4.30, si deduce che l'immagine della funzione $y = a^x$ è l'intervallo $(0, +\infty)$. Dunque la funzione inversa $y = \log_a x$ è definita su $(0, +\infty)$; inoltre, essa è strettamente crescente in quanto funzione inversa di una funzione strettamente crescente, e ha come immagine $(-\infty, +\infty)$. Il risultato segue allora dal Teorema 3.27.

g) Segue da e), ragionando come sopra.

h) La non esistenza del primo limite è già stata mostrata nell'Osservazione 4.19. Con un ragionamento analogo si possono trattare gli altri due limiti.
Più in generale, si noti che una funzione periodica non costante non ammette limite per $x \to \pm\infty$.

i) Segue dall'algebra dei limiti.

l)-m) Essendo le funzioni continue nei punti interessati (per il Teorema 4.33), i risultati sono immediati.

n) Si applica un ragionamento analogo a quello svolto nel punto f), relativamente alla funzione $y = \tan x$ ristretta all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e alla sua inversa $y = \arctan x$. □

▶ Dimostrazione della Proposizione 3.20 di pag. 83

Proposizione 3.20 *Tutte le funzioni elementari (polinomi e funzioni razionali, funzioni elevamento a potenza, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali e le loro funzioni inverse) sono continue in tutto il loro dominio.*

Dimostrazione. La continuità delle funzioni razionali è già stata stabilita nel Corollario 4.12. Da ciò, e dai Teoremi 4.17 e 4.33 di continuità della funzione

composta e della funzione inversa, segue in particolare la continuità delle funzioni elevamento a potenza con esponente razionale positivo $y = x^{m/n} = \sqrt[m]{x^n}$; la continuità di quelle con esponente razionale negativo $x^q = \frac{1}{x^{-q}}$ segue dall'algebra dei limiti, mentre la continuità di quelle con esponente irrazionale sarà conseguenza della definizione $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \log x}$ e del Teorema 4.17, una volta stabilita la continuità dell'esponenziale e del logaritmo.

La continuità delle funzioni seno e coseno è stata dimostrata nell'Esempio 3.17 iii), dunque l'agebra dei limiti garantisce la continuità delle funzioni tangente e cotangente e quindi il Teorema 4.33 assicura la continuità delle funzioni inverse arcoseno, arcocoseno, arcotangente e arcocotangente.

Non resta dunque che dimostrare la continuità della funzione esponenziale, in quanto quella del logaritmo seguirà ancora dal Teorema 4.33. Consideriamo il caso $a > 1$; se $0 < a < 1$, scriviamo $a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$ e deduciamo il risultato dal caso precedente. Notiamo che le identità

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}\,, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

e la stretta monotonia

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}$$

seguono facilmente dalle proprietà delle potenze ad esponente intero e delle loro inverse nel caso in cui gli esponenti siano razionali; se gli esponenti sono reali, esse si possono dedurre da queste, grazie alla definizione di esponenziale e alla definizione di estremo superiore.

Dimostriamo dapprima che la funzione $y = a^x$ è continua da destra nell'origine, ossia che

$$\lim_{x\to 0^+} a^x = 1\,. \tag{A.2.3}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, determiniamo $\delta > 0$ in modo che

$$0 \le x < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 \le a^x - 1 < \varepsilon\,.$$

Usando la monotonia dell'esponenziale, è sufficiente trovare δ tale che $a^\delta - 1 < \varepsilon$, cioè $a^\delta < 1+\varepsilon$. Se cerchiamo δ nella forma $\delta = \frac{1}{n}$, con n intero positivo, ciò equivale alla condizione $a < (1+\varepsilon)^n$. Usando la disuguaglianza di Bernoulli (5.15), si ha che $(1+\varepsilon)^n \ge 1 + n\varepsilon$. È dunque sufficiente scegliere n in modo che $1 + n\varepsilon > a$, ossia $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. La verifica di (A.2.3) è quindi conclusa. La continuità da sinistra nell'origine segue dalle relazioni

$$\lim_{x\to 0^-} a^x = \lim_{x\to 0^-} a^{-(-x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0^+} a^z} = 1\,,$$

dunque la funzione esponenziale è continua nell'origine. Infine, abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0+(x-x_0)} = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{z\to 0} a^z = a^{x_0}\,,$$

il che dimostra la continuità in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. □

A.2.3 Numero di Nepero

Dimostriamo alcune proprietà della successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n > 0$, che definisce il numero e di Nepero (pag. 74).

Proprietà A.2.5 *La successione $\{a_n\}$ è strettamente crescente.*

Dimostrazione. Usando la formula del binomio di Newton (1.13) e la (1.11), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) ; \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

analogamente si ha

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) . \tag{A.2.5}$$

Osserviamo che

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right) , \quad \cdots \quad , \left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

e dunque ogni addendo della sommatoria (A.2.4) è minore del corrispondente addendo in (A.2.5). Inoltre quest'ultima sommatoria contiene un ulteriore termine positivo corrispondente a $k = n+1$. Pertanto $a_n < a_{n+1}$, per ogni n. □

Proprietà A.2.6 *La successione $\{a_n\}$ è limitata, più precisamente*

$$2 < a_n < 3 , \qquad \forall n > 1 .$$

Dimostrazione. Poiché $a_1 = 2$ e la successione è strettamente monotona per la proprietà precedente, si ha $a_n > 2$, $\forall n > 1$.

Verifichiamo ora che $a_n < 3$, $\forall n > 1$. Ricordando la (A.2.4) e osservando che $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$, si ha

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\,.$$

Grazie all'Esempio 5.27, otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2\,.$$

Pertanto $a_n < 3$. □

▶ Dimostrazione della Proprietà 4.20 di pag. 110

Proprietà 4.20 *Vale il seguente risultato*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il limite per $x \to +\infty$. Indicata con $n = [x]$ la parte intera di x (si veda Esempi 2.1), per definizione si ha $n \leq x < n+1$; da ciò segue che $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{n}$, ossia $1 + \dfrac{1}{n+1} < 1 + \dfrac{1}{x} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$. Usando note proprietà delle potenze, si ottiene

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e dunque

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad \text{(A.2.6)}$$

Osserviamo ora che quando x tende a $+\infty$ anche n tende a $+\infty$. Usando la (3.3), abbiamo

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{e};$$

con la sostituzione $m = n + 1$ otteniamo parimenti

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \mathrm{e}.$$

Applicando il secondo Teorema del confronto 4.5 alle tre funzioni che compaiono nella (A.2.6), otteniamo la tesi per $x \to +\infty$. Consideriamo ora il limite per x tendente a $-\infty$. Se $x < 0$, possiamo scrivere $x = -|x|$ e dunque

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(\frac{|x|-1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(\frac{|x|}{|x|-1}\right)^{|x|} = \left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|}.$$

Poniamo $y = |x| - 1$ e osserviamo che y tende a $+\infty$ quando x tende a $-\infty$. Pertanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right) = \mathrm{e}.$$

Ciò termina la dimostrazione della proprietà. □

▶ Dimostrazione dell'irrazionalità del numero di Nepero, pag. 74

Proprietà A.2.7 *Il numero* e *di Nepero è un numero irrazionale, strettamente compreso tra* 2 *e* 3.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che, usando il primo teorema del confronto per le successioni (pag. 144, Teorema 4), dalla proprietà precedente segue immediatamente che

$$2 < \mathrm{e} \le 3\,. \tag{A.2.7}$$

Supponiamo ora per assurdo che e sia un numero razionale, ovvero che esistano due interi m_0 e $n_0 \neq 0$ tali che $\mathrm{e} = \dfrac{m_0}{n_0}$. Ricordando la formula, valida per ogni $n \ge 0$,

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}_n}}{(n+1)!}\,, \qquad 0 < \bar{x}_n < 1$$

(si veda l'Osservazione 7.4), si ha

$$n!\mathrm{e} = n!\frac{m_0}{n_0} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}_n}}{n+1}\,. \tag{A.2.8}$$

Dalla monotonia della funzione esponenziale e dalla (A.2.7), deduciamo che

$$1 = \mathrm{e}^0 < \mathrm{e}^{\bar{x}_n} < \mathrm{e} < 3\,.$$

Scegliendo ora $n \ge \max(3, n_0)$, i numeri $n!\dfrac{m_0}{n_0}$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ risultano interi, mentre la quantità $\dfrac{\mathrm{e}^{\bar{x}_n}}{n+1}$ risulta strettamente compresa tra 0 e 1. Dunque l'identità (A.2.8) è assurda. Pertanto il numero e è irrazionale e nella (A.2.7) non può valere il segno di uguaglianza. □

A.3

Complementi sulle proprietà globali delle funzioni continue

Introduciamo dapprima il concetto di sottosuccessione di una successione data e ne vediamo alcune proprietà, tra cui il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Esso interviene nella dimostrazione del Teorema di Weierstrass, che fa parte di un gruppo di dimostrazioni di risultati relativi alle funzioni continue su un intervallo della retta reale. L'appendice si chiude con la definizione di uniforme continuità e lo studio di alcune sue proprietà; essa troverà applicazione nel calcolo integrale e nello studio delle equazioni differenziali.

A.3.1 Sottosuccessioni

Il Teorema 2 di pag. 144 afferma che ogni successione convergente è limitata. Osserviamo che in generale non vale l'implicazione inversa. Ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ è limitata ($|a_n| = 1,\ \forall n$) ma non è convergente. Notiamo però che, considerando soltanto i termini di indice pari, otteniamo la successione costante $\{b_k\}_{k\geq 0}$ con $b_k = a_{2k} = 1$, $k \geq 0$, e dunque banalmente convergente. Analogamente, considerando i termini di indice dispari, otteniamo la successione costante $\{c_k\}_{k\geq 0}$ con $c_k = a_{2k+1} = -1$, $k \geq 0$, ancora convergente. Tali successioni sono *estratte* dalla successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ di partenza, nel senso precisato dalla seguente definizione.

Definizione A.3.1 *Sia $\{a_n\}_{n\geq n^*}$ una successione e sia $\{n_k\}_{k\geq 0}$ una successione strettamente crescente i cui valori sono tutti interi $\geq n^*$. La successione $\{a_{n_k}\}_{k\geq 0}$ si dice* **sottosuccessione** *o* **successione estratta** *di $\{a_n\}_{n\geq n^*}$.*

Si noti che la successione $\{a_{n_k}\}_{k\geq 0}$ è ottenuta attraverso l'operazione di composizione di funzioni, precisamente componendo la funzione $k \mapsto n_k$ con la funzione $n \mapsto a_n$.

Ogni sottosuccessione estratta da una successione convergente o divergente ha il suo stesso comportamento limite. Vale infatti il seguente risultato.

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_A3, © Springer-Verlag Italia 2014

Proposizione A.3.2 *Sia $\{a_n\}_{n\geq n^*}$ una successione tale che esista, finito o infinito, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$. Allora, per ogni sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k\geq 0}$, si ha*

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \ell\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che vale la proprietà

$$n_k \geq k\,, \qquad \forall k \geq 0\,, \tag{A.3.1}$$

come si vede facilmente per induzione. Infatti, banalmente $n_0 \geq 0$; supponiamo ora che $n_k \geq k$ e osserviamo che, poiché la successione è strettamente crescente, si ha $n_{k+1} > n_k$ il che implica $n_{k+1} \geq k+1$, da cui l'asserto.

La (A.3.1) implica, grazie al primo teorema del confronto (pag. 144, Teorema 4.) che la successione $\{n_k\}$ è divergente a $+\infty$. Il risultato segue allora dalla versione del Teorema 4.15 relativa alle successioni (la cui dimostrazione è analoga a quella data a pag. 107). □

La possibilità di estrarre da una successione limitata una sottosuccessione convergente, verificata nell'esempio iniziale ($a_n = (-1)^n$), è un risultato generale e profondo espresso dal seguente teorema.

Teorema A.3.3 (**di Bolzano-Weierstrass**) *Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n\geq n^*}$ una successione limitata e precisamente si abbia

$$a \leq x_n \leq b\,, \qquad \forall n \geq n^*\,,$$

per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. Utilizziamo un procedimento di bisezione dell'intervallo $[a, b]$, simile a quello usato nella dimostrazione del Teorema 4.23 di esistenza degli zeri. Poniamo

$$a_0 = a\,, \qquad b_0 = b\,, \qquad \mathcal{N}_0 = \{n \geq n^*\}\,, \qquad n_0 = n^*.$$

Sia c_0 il punto medio dell'intervallo $[a_0, b_0]$ e definiamo gli insiemi di indici

$$\mathcal{N}_0^- = \{n \in \mathcal{N}_0 : x_n \in [a_0, c_0]\}\,, \qquad \mathcal{N}_0^+ = \{n \in \mathcal{N}_0 : x_n \in [c_0, b_0]\}\,.$$

Notiamo che $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0^- \cup \mathcal{N}_0^+$ e che, essendo $\mathcal{N}_0$ infinito, almeno uno tra $\mathcal{N}_0^-$ e $\mathcal{N}_0^+$ è ancora infinito. Se $\mathcal{N}_0^-$ è infinito, poniamo

$$a_1 = a_0\,, \qquad b_1 = c_0\,, \qquad \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_0^-\,;$$

altrimenti, poniamo

$$a_1 = c_0\,, \qquad b_1 = b_0\,, \qquad \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_0^+\,.$$

Sia infine n_1 il primo indice $> n_0$ contenuto in $\mathcal{N}_1$; si osservi che tale scelta è possibile proprio perché $\mathcal{N}_1$ è infinito. Reiterando l'argomento (come sempre in questi casi, il Principio di induzione A.1.1 rende rigoroso il procedimento), è possibile costruire una successione di intervalli soddisfacenti

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots, \qquad \text{con} \quad b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k},$$

una successione di insiemi infiniti

$$\mathcal{N}_0 \supseteq \mathcal{N}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{N}_k \supseteq \ldots$$

e una successione strettamente crescente di indici $\{n_k\}_{k\geq 0}$, con $n_k \in \mathcal{N}_k$, tali che

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \qquad \forall k \geq 0.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 4.23, esiste un unico $\ell \in [a, b]$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \ell.$$

Usando il secondo teorema del confronto (Teorema 5 di pag. 144), deduciamo che la successione $\{x_{n_k}\}_{k\geq 0}$ estratta da $\{x_n\}_{n\geq n^*}$ converge a ℓ. □

A.3.2 Funzioni continue su un intervallo

▶ Dimostrazione del Teorema di Weierstrass di pag. 119

Teorema 4.31 (di Weierstrass) *Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f è limitata su $[a, b]$ e ivi assume valori minimo e massimo*

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad e \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Dunque,

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che f ammette massimo in $[a, b]$, ossia che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $f(x) \leq f(\xi)$, $\forall x \in [a, b]$. Poniamo

$$M = \sup f([a, b]).$$

Notiamo che M può essere un numero reale oppure $+\infty$. Nel primo caso, dalla caratterizzazione dell'estremo superiore (condizione *ii)* in (1.7)) si ha che, per ogni $n \geq 1$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq d.$$

Facendo tendere n a $+\infty$, dal secondo teorema del confronto (Teorema 5 di pag. 144) si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M.$$

Nel secondo caso, dalla definizione di insieme superiormente illimitato deduciamo, per ogni $n \geq 1$, l'esistenza di un $x_n \in [a, b]$ tale che

$$f(x_n) \geq n$$

e dunque ancora, per il teorema del confronto,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty = M.$$

In ogni caso, la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ così ottenuta è limitata (perché contenuta in $[a, b]$). Dunque, possiamo applicare il Teorema di Bolzano-Weierstrass ed estrarre da essa una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\}_{k\geq 0}$. Sia ξ il suo limite; siccome tutti gli x_{n_k} sono in $[a, b]$ sarà necessariamente anche $\xi \in [a, b]$. Si noti che $\{f(x_{n_k})\}_{k\geq 0}$ è una sottosuccessione di $\{f(x_n)\}_{n\geq 0}$, e dunque per la Proposizione A.3.2

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Ora, usando la continuità di f in ξ si ha che

$$f(\xi) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Dunque scopriamo innanzitutto che non può essere $M = +\infty$. Inoltre, M sta nell'immagine di f e pertanto

$$M = \max f([a, b]).$$

Ragionando in modo del tutto analogo si prova che esiste finito

$$m = \min f([a, b]).$$

L'ultimo risultato segue allora dal Corollario 4.30. □

▶ Dimostrazione del Corollario 4.25 di pag. 116

Corollario 4.25 *Sia f continua in un intervallo I. Supponiamo che f ammetta, per x tendente a ciascuno degli estremi dell'intervallo, limiti (finiti o infiniti) diversi da 0 e di segno opposto. Allora f ha uno zero in I; tale zero è unico se f è strettamente monotona in I.*

Dimostrazione. Indichiamo con α e β (finiti o infiniti) gli estremi dell'intervallo I. Poniamo

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \ell_\alpha \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = \ell_\beta\,.$$

Notiamo che tali notazioni, qualora uno o entrambi gli estremi dell'intervallo siano infiniti, indicano gli usuali limiti all'infinito.

Per fissare le idee, supponiamo che sia $\ell_\alpha < 0 < \ell_\beta$; in caso contrario, si scambiano i ruoli di ℓ_α e ℓ_β. Per il Teorema 4.2 (di permanenza del segno) esiste un intorno destro $I^+(\alpha)$ di α e un intorno sinistro $I^-(\beta)$ di β tali che

$$\forall x \in I^+(\alpha)\,,\ f(x) < 0 \qquad \text{e} \qquad \forall x \in I^-(\beta)\,,\ f(x) > 0\,.$$

Fissiamo un punto $a \in I^+(\alpha)$ e un punto $b \in I^-(\beta)$ con $\alpha < a$ e $b < \beta$. L'intervallo $[a, b]$ è contenuto in I, dunque f è ivi continua; inoltre, per costruzione $f(a) < 0 < f(b)$. Pertanto, l'esistenza di uno zero di f è garantita dal Teorema 4.23 (di esistenza degli zeri) applicato nell'intervallo $[a, b]$.

Se f è strettamente monotona, l'unicità dello zero segue dalla Proposizione 2.8 applicata nell'intervallo I. □

▶ Dimostrazione dei Teoremi 4.32 e 4.33 di pag. 120

Stabiliamo dapprima il seguente risultato.

Lemma A.3.4 *Sia f continua e invertibile su un intervallo I. Presi comunque tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ appartenenti ad I, si verifica una e una sola delle seguenti alternative:*

(i) $$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

oppure

(ii) $$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3).$$

Dimostrazione. Poiché f è invertibile e dunque iniettiva su I, i valori $f(x_1)$ e $f(x_3)$ saranno diversi tra loro. Potrà essere $f(x_1) < f(x_3)$ oppure $f(x_1) > f(x_3)$. Facciamo vedere che nel primo caso vale l'alternativa (i), mentre nel secondo caso vale la (ii).

Per fissare le idee, supponiamo che sia $f(x_1) < f(x_3)$. Ragioniamo per assurdo, negando la (i): il valore $f(x_2)$ non sia strettamente compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Ad esempio, sia

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

(un analogo ragionamento si farà nel caso in cui $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$). Poiché f è continua sull'intervallo chiuso $[x_1, x_2] \subseteq I$, per il Teorema 4.29 dei valori intermedi

assumerà in tale intervallo tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$. In particolare, esisterà un punto $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(\bar{x}) = f(x_3)$$

Ciò contraddice l'ipotesi di iniettività di f, in quanto $\bar{x}$ e x_3 sono punti distinti (separati da x_2) di I. □

Teorema 4.32 *Sia f una funzione continua su un intervallo I. Allora f è iniettiva su I se e solo se f è strettamente monotona su I.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 2.8, dobbiamo dimostrare soltanto l'implicazione

$$f \text{ invertibile su} I \quad \Rightarrow \quad f \text{ strettamente monotona su } I\,.$$

Fissiamo arbitrariamente due punti $x_1 < x_2$ in I e facciamo vedere che se $f(x_1) < f(x_2)$ allora f risulterà monotona strettamente crescente su I (con analogo ragionamento si potrà vedere che se invece $f(x_1) > f(x_2)$, allora f risulterà monotona strettamente decrescente su I).

Siano $z_1 < z_2$ due punti qualunque in I. Consideriamo la situazione in cui entrambi i punti siano contenuti nell'intervallo (x_1, x_2); gli altri casi, in cui uno o entrambi i punti siano fuori dell'intervallo (x_1, x_2) si possono trattare in modo del tutto simile. Sia dunque

$$x_1 < z_1 < z_2 < x_2.$$

Applicando una prima volta il Lemma A.3.4 alla terna $x_1,\ z_1$ e x_2, e ricordando che abbiamo supposto $f(x_1) < f(x_2)$, deduciamo che

$$f(x_1) < f(z_1) < f(x_2).$$

Applicando una seconda volta il Lemma A.3.4 alla terna $z_1,\ z_2$ e x_2, deduciamo infine che

$$f(z_1) < f(z_2) < f(x_2).$$

La prima di tali disuguaglianze ci dice appunto che f è strettamente crescente. Il Teorema 4.32 è dunque dimostrato. □

Teorema 4.33 *Sia f una funzione continua e invertibile su un intervallo I. Allora la funzione inversa f^{-1} è continua sull'intervallo $J = f(I)$.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che J è effettivamente un intervallo per il Corollario 4.30. Applicando invece il Teorema 4.32, deduciamo che f è strettamente monotona su I, ad esempio - per fissare le idee - strettamente crescente (si procederebbe in modo analogo se f fosse strettamente decrescente). Da ciò segue facilmente, in base alla definizione di monotonia, che anche f^{-1} è strettamente

crescente su J. Ora, sappiamo che una funzione monotona può avere al più discontinuità di prima specie (Corollario 3.28). Facciamo vedere che f^{-1} non può avere neppure discontinuità di questo tipo. Per assurdo, supponiamo che esista $y_0 = f(x_0) \in J = f(I)$ punto di salto per f^{-1}, cioè, posto

$$z_0^- = \sup_{y<y_0} f^{-1}(y) = \lim_{y\to y_0^-} f^{-1}(y)$$

e

$$z_0^+ = \inf_{y>y_0} f^{-1}(y) = \lim_{y\to y_0^+} f^{-1}(y)\,,$$

supponiamo che si abbia $z_0^- < z_0^+$. Allora, nell'intervallo (z_0^-, z_0^+) cade al più l'elemento $x_0 = f^{-1}(y_0)$ dell'immagine $f^{-1}(J)$. Dunque, $f^{-1}(J)$ non è un intervallo. Ma, d'altra parte, per definizione di J, si ha che $f^{-1}(J) = I$, che è per ipotesi un intervallo. Siamo arrivati a una contraddizione, e dunque f^{-1} deve essere continua in ogni punto di J. □

A.3.3 Continuità uniforme

Sia f una funzione definita su un insieme I della retta reale. Ricordiamo che f dicesi continua su I se f è continua in ogni punto $x_0 \in I$, ossia se per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale

$$\forall x \in I, \qquad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

In generale $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, cioè δ dipende da anche x_0. Quando, fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare un $\delta = \delta(\varepsilon)$ indipendente da $x_0 \in I$, diciamo che f è uniformemente continua su I. Precisamente, diamo la seguente definizione.

Definizione A.3.5 *Una funzione f dicesi* **uniformemente continua su** I *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x',\, x'' \in I, \qquad |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\,. \tag{A.3.2}$$

Esempi A.3.6

i) Sia $f(x) = x^2$ su $I = [0, 1]$. Si ha

$$|f(x') - f(x'')| = |(x')^2 - (x'')^2| = |x' + x''|\,|x' - x''| \le 2|x' - x''|\,.$$

Dunque se $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{2}$ si ha $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. In altre parole, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ soddisfa la (A.3.2) su I, ossia f è uniformemente continua su I.

ii) Sia $f(x) = x^2$ su $I = [0, +\infty)$. Mostriamo con un ragionamento per assurdo che f non è uniformemente continua su I. Se lo fosse, fissato ad esempio $\varepsilon = 1$, esisterebbe $\delta > 0$ soddisfacente la (A.3.2). Scelto $x' \in I$ e posto $x'' = x' + \frac{\delta}{2}$, si ha $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e dunque

$$|f(x') - f(x'')| = |x' + x''|\,|x' - x''| < 1\,,$$

cioè

$$\left(2x' + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} < 1\,.$$

Facendo tendere x' a $+\infty$ si ha un assurdo.

iii) Sia $f(x) = \sin x$ su $I = \mathbb{R}$. Dall'identità

$$\sin x' - \sin x'' = 2\sin\frac{x' - x''}{2}\cos\frac{x' + x''}{2}$$

segue

$$|\sin x' - \sin x''| \le |x' - x''|\,, \qquad \forall x', x'' \in \mathbb{R}$$

dunque, fissato $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ soddisfa la condizione di uniforme continuità.

iv) Sia $f(x) = \frac{1}{x}$ su $I = (0, +\infty)$. Notiamo che

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{x'x''}\,.$$

Facendo tendere x' e x'' a 0, non è difficile verificare che f non può essere uniformemente continua su I.
Se invece consideriamo $I_a = [a, +\infty)$ con $a > 0$ fissato, allora

$$|f(x') - f(x'')| \le \frac{|x' - x''|}{a^2}$$

e dunque, fissato $\varepsilon > 0$, $\delta = a^2\varepsilon$ soddisfa la condizione di uniforme continuità su I_a. □

Vediamo ora una condizione che ci assicura l'uniforme continuità di una funzione f su un intervallo $I = [a, b]$.

Teorema A.3.7 (**di Heine-Cantor**) *Sia f continua sull'intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$. Allora f è uniformemente continua su I.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua su I. Negando la definizione, si trova un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $x', x'' \in I$ con $|x' - x''| < \delta$ e $|f(x') - f(x'')| \ge \varepsilon$. Scegliendo $\delta = \frac{1}{n}$, $n \ge 1$, si trovano due successioni di punti $\{x'_n\}_{n\ge1}$, $\{x''_n\}_{n\ge1}$ in I tali che

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad |f(x'_n) - f(x''_n)| \ge \varepsilon\,.$$

Notiamo che la prima condizione implica che

$$\lim_{n\to\infty}(x'_n - x''_n) = 0\,,$$

mentre la seconda che $f(x'_n) - f(x''_n)$ non tende a 0 per $n \to \infty$. D'altro canto, la successione $\{x'_n\}_{n\geq 1}$ è limitata, $a \leq x'_n \leq b$ per ogni n, dunque per il Teorema A.3.3 di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\{x'_{n_k}\}_{k\geq 0}$ convergente a un valore $\bar{x} \in I$, ossia

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \bar{x}\,.$$

Anche la sottosuccessione $\{x''_{n_k}\}_{k\geq 0}$ converge a $\bar{x}$, infatti

$$\lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = \lim_{k\to\infty}[x'_{n_k} + (x''_{n_k} - x'_{n_k})] = \lim_{k\to\infty} x'_{n_k} + \lim_{k\to\infty}(x''_{n_k} - x'_{n_k}) = \bar{x} + 0 = \bar{x}\,.$$

Ora, essendo f continua in $\bar{x}$, si ha

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f\big(\lim_{k\to\infty} x'_{n_k}\big) = f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f\big(\lim_{k\to\infty} x''_{n_k}\big) = f(\bar{x})\,.$$

Dunque

$$\lim_{k\to\infty}\big(f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\big) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0$$

che contraddice la condizione

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon > 0\,, \qquad \forall k \geq 0\,.$$

□

A.4

Complementi sul calcolo differenziale

L'appendice è dedicata alla giustificazione di importanti risultati del calcolo differenziale. Dapprima si forniscono le dimostrazioni delle principali formule di derivazione. Successivamente si considera il Teorema di de l'Hôpital. Si passa poi allo studio delle funzioni derivabili e convesse, stabilendo legami tra la convessità e certe proprietà della derivata prima. Infine, si dimostrano le formule di Taylor con i resti di Peano, di Lagrange e in forma integrale.

A.4.1 Formule di derivazione

▶ Dimostrazione del Teorema 6.4 di pag. 180

Teorema 6.4 (**Algebra delle derivate**) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora sono ivi derivabili le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ e, se $g'(x_0) \neq 0$, la funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Inoltre si ha*

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0), \\
(f\,g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Verifichiamo dapprima la prima formula. Usando il Teorema 4.10, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) \pm g(x)\big) - \big(f(x_0) \pm g(x_0)\big)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) \pm g'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_A4, © Springer-Verlag Italia 2014

Per dimostrare la seconda formula, ricordiamo che ogni funzione derivabile è continua (Proposizione 6.3) e pertanto $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Dunque si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} \\
&\quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x) + f(x_0)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} \\
&\quad = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&\quad = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\quad = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

Consideriamo infine l'ultima formula. Osserviamo innanzitutto che essendo $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$, il Teorema di permanenza del segno 4.2 assicura l'esistenza di un intorno di x_0 in cui si ha $g(x) \neq 0$. Dunque la funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è definita in tale intorno e ne possiamo considerare il rapporto incrementale. Risulta

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)\,(x - x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)\,(x - x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \frac{1}{\big(g(x_0)\big)^2} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}\,.
\end{aligned}$$

□

► Dimostrazione del Teorema 6.7 di pag. 181

Teorema 6.7 (Derivata di una funzione composta) *Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Sia poi $g(y)$ una funzione derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione compostag $\circ\, f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Dimostrazione. Usando la prima formula dell'incremento finito (6.11) applicata alla funzione g nel punto $y_0 = f(x_0)$, si ha

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0), \quad y \to y_0 .$$

Ricordando la definizione di o-piccolo, ciò significa che esiste una funzione φ soddisfacente $\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = 0 = \varphi(y_0)$ tale che

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \varphi(y)(y - y_0) , \qquad \text{in un intorno } I(y_0) \text{ di } y_0 .$$

Essendo f continua in x_0 (per la Proposizione 6.3), esiste un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che $f(x) \in I(y_0)$ per ogni $x \in I(x_0)$. Ponendo $y = f(x)$ nella relazione precedente, otteniamo

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Passando al limite e osservando che, per il Teorema di sostituzione 4.15, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = 0 ,$$

concludiamo che

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &\quad = g'(f(x_0)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\quad = g'(f(x_0)) f'(x_0) . \end{aligned}$$

□

▶ Dimostrazione del Teorema 6.9 di pag. 182

Teorema 6.9 (Derivata della funzione inversa) *Sia $f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$; inoltre, sia f derivabile in x_0, con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa$f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} .$$

Dimostrazione. Usando il Teorema 4.33, la funzione inversa è continua in un intorno di y_0. Posto $x = f^{-1}(y)$, si ha in tale intorno

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} .$$

Applicando il Teorema di sostituzione 4.15 con $x = f^{-1}(y)$, risulta

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

□

A.4.2 Teorema di de l'Hôpital

▶ **Dimostrazione del Teorema di de l'Hôpital di pag. 209**

Teorema 6.41 (**di de l'Hôpital**) *Siano f e g due funzioni definite nell'intorno di c, tranne eventualmente in c, e tali che*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L,$$

con $L = 0$ oppure $+\infty$ oppure $-\infty$. Se f e g sono derivabili nell'intorno di c, tranne eventualmente in c, con $g' \neq 0$, e se esiste (finito o infinito)

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e tale limite è uguale al precedente.

Dimostrazione. L'enunciato del teorema comprende vari casi a seconda dei valori che possono assumere L e c. Gli argomenti che intervengono nella dimostrazione possono differire al variare della situazione. Pertanto nel seguito raggruppiamo i vari casi per omogeneità di dimostrazione.

a) Casi $L = 0$, $c = x_0^+$, x_0^-, x_0.

Supponiamo dapprima $c = x_0^+$. Per l'ipotesi $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$, possiamo prolungare (eventualmente ridefinendone il valore) entrambe le funzioni f e g in x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$; in tal modo f e g risultano continue (da destra) anche in x_0. Detto $I^+(x_0)$ l'intorno destro di x_0 in cui le funzioni f e g verificano le ipotesi del teorema, sia $x \in I^+(x_0)$. Nell'intervallo $[x_0, x]$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Cauchy 6.25 e dunque esiste $t = t(x) \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,.$$

Poiché $x_0 < t(x) < x$, il secondo Teorema del confronto 4.5 garantisce che al tendere di x a x_0 anche $t = t(x)$ tende a x_0. Pertanto, applicando il Teorema di sostituzione 4.15, si ottiene

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} = \lim_{t\to x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}\,,$$

e la tesi è verificata.

Analogamente si procede nel caso $c = x_0^-$; il caso $c = x_0$ si ottiene combinando i due limiti unilateri.

b) Casi $L = 0$, $c = \pm\infty$.

Supponiamo $c = +\infty$. Mediante la sostituzione $z = \frac{1}{x}$ siamo condotti a studiare il limite per $z \to 0^+$ del quoziente $\dfrac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}$. Osservando che $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{1}{z^2} f'\left(\dfrac{1}{z}\right)$, e analogamente per la funzione g, si ha

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dunque siamo ricondotti al caso precedente con $c = 0^+$ e il risultato segue. Similmente si procede nel caso $c = -\infty$.

c) Casi $L = \pm\infty$, $c = x_0^+$, x_0^-, x_0.

Supponiamo dapprima $c = x_0^+$ e poniamo $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Nel caso $\ell \in \mathbb{R}$, sia $I^+(x_0)$ l'intorno destro di x_0 in cui le funzioni f e g verificano le ipotesi del teorema. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_1 > 0$ tale che $x_0 + \delta_1 \in I^+(x_0)$ e per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ si ha $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon$. Nell'intervallo $[x, x_0 + \delta_1]$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Cauchy 6.25 e dunque esiste $t = t(x) \in (x, x_0 + \delta_1)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0 + \delta_1)}{g(x) - g(x_0 + \delta_1)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,. \tag{A.4.1}$$

Scriviamo il quoziente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nella forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x)\frac{f'(t)}{g'(t)}\,,$$

dove, ricordando la (A.4.1), si ha

$$\psi(x) = \frac{1 - \frac{g(x_0+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta_1)}{f(x)}}\,, \qquad \text{con} \qquad \lim_{x\to x_0^+} \psi(x) = 1\,,$$

grazie all'ipotesi $L = \pm\infty$. Dall'ultimo limite ricaviamo che esiste $\delta_2 > 0$, con $\delta_2 < \delta_1$, tale che, per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, si ha

$$|\psi(x)| \le 2 \qquad \text{e} \qquad |\psi(x) - 1| < \varepsilon\,.$$

Allora, per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, si ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| &= \left|\psi(x)\frac{f'(t)}{g'(t)} - \psi(x)\ell + \psi(x)\ell - \ell\right| \\ &= |\psi(x)|\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - \ell\right| + |\psi(x) - 1||\ell| < \big(2 + |\ell|\big)\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\,.$$

Sia ora $\ell = +\infty$; per ogni $A > 0$, esiste $\delta_1 > 0$ tale che $x_0 + \delta_1 \in I^+(x_0)$ e per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta_1)$ si ha $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > A$. Si procede come fatto sopra e, grazie al Teorema A.2.2, si osserva che $\lim\limits_{x\to x_0^+} \psi(x) = 1$ implica l'esistenza di $\delta_2 > 0$, con $\delta_2 < \delta_1$, tale che, per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta_2)$, si ha $\psi(x) \geq \frac{1}{2}$. Dunque, per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta_2)$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x)\frac{f'(t)}{g'(t)} \geq \frac{1}{2}A\,.$$

Ne segue che la tesi è verificata. Si procede alla stessa maniera per $\ell = -\infty$.

Il teorema si dimostra in modo analogo nel caso $c = x_0^-$; il caso $c = x_0$ si ottiene combinando i due limiti unilateri.

d) Casi $L = \pm\infty$, $c = \pm\infty$.

Come nel punto b), la sostituzione $z = \frac{1}{x}$ ci riconduce al caso precedente. □

A.4.3 Funzioni convesse

Premettiamo il seguente lemma, il quale mostra che la condizione di convessità locale (cioè valida in un intorno di ogni punto di I) è in realtà globale (cioè valida su tutto I).

Lemma A.4.1 *Sia f derivabile sull'intervallo I. Allora f è convessa su I se e solo se per ogni $x_0 \in I$ si ha*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x \in I\,. \tag{A.4.2}$$

Dimostrazione. Ovviamente, è sufficiente mostrare che se f è convessa su I secondo la Definizione 6.33, allora vale la (A.4.2). A tale scopo, è utile osservare che f è convessa su I se e solo se lo è la funzione $g(x) = f(x) + ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$; infatti la disuguaglianza $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ equivale alla disuguaglianza $g(x) \geq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$.

Sia dunque $x_0 \in I$ fissato arbitrariamente e si consideri la funzione convessa ausiliaria $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, la quale soddisfa $g(x_0) = g'(x_0) = 0$. Dobbiamo mostrare che $g(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Supponiamo che x_0 non sia l'estremo destro dell'intervallo I e mostriamo che $g(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$; un ragionamento simmetrico completerà la dimostrazione.

Essendo g convessa in x_0, si ha $g(x) \geq 0$ in un intorno (destro) di x_0. Ha dunque senso porre

$$P = \{x > x_0 : g(s) \geq 0,\ \forall s \in [x_0, x]\}$$

e $x_1 = \sup P$.

Se x_1 coincide con l'estremo destro di I, abbiamo dimostrato la tesi. Per assurdo, supponiamo che x_1 sia interno a I; per definizione, si ha $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [x_0, x_1)$, mentre in ogni intorno (destro) di x_1 esistono punti $x \in I$ in cui $g(x) < 0$. Da ciò e dalla continuità di g in x_1 deduciamo che necessariamente $g(x_1) = 0$ (dunque in particolare $x_1 = \max P$). Facciamo vedere che $g(x) = 0$, $\forall x \in [x_0, x_1]$. Se così è, allora $g'(x_1) = 0$ (in quanto g è derivabile in x_1 ed è costante in un intorno sinistro di tale punto). Dunque l'ipotesi di convessità di g in x_1 garantisce l'esistenza di un intorno di x_1 in cui si ha $g(x) \geq 0$, contro la definizione di x_1. Siamo dunque arrivati ad un assurdo.

Non resta che dimostrare che $g(x) = 0$ in $[x_0, x_1]$. Essendo per definizione $g(x) \geq 0$ in $[x_0, x_1]$, supponiamo per assurdo che $M = \max\{g(x) : x \in [x_0, x_1]\} > 0$, e sia $\bar{x} \in (x_0, x_1)$ tale che $g(\bar{x}) = M$. Grazie al Teorema di Fermat 6.21, si ha $g'(\bar{x}) = 0$ e dunque applicando l'ipotesi che g sia convessa in $\bar{x}$, esiste un intorno di $\bar{x}$ in cui $g(x) \geq g(\bar{x}) = M$; ma essendo M il massimo di g in $[x_0, x_1]$, necessariamente si ha $g(x) = M$ in tale intorno. Poniamo dunque

$$Q = \{x > \bar{x} : g(s) = M,\ \forall s \in [\bar{x}, x]\}$$

e $x_2 = \sup Q$. Per la continuità di g, si ha $x_2 = \max Q$ ed inoltre $x_2 < x_1$ in quanto $g(x_1) = 0$. Come sopra, applicando l'ipotesi di convessità di g in x_2, si giunge ad un assurdo. □

▶ Dimostrazione del Teorema 6.37 di pag. 201

Teorema 6.37 *Sia I un intervallo ed f una funzione derivabile su I. Valgono le seguenti implicazioni:*

a) Se f è convessa su I, allora f' è crescente su I.

b1) Se f' è crescente su I, allora f è convessa su I;

b2) se f' è strettamente crescente su I, allora f è strettamente convessa su I.

Dimostrazione.
a) Siano $x_1 < x_2$ due punti di I. Dalla (A.4.2) con $x_0 = x_1$ e $x = x_2$ otteniamo

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

mentre ponendo $x_0 = x_2$ e $x = x_1$ abbiamo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Il risultato segue allora combinando le due disuguaglianze.

b1) Sia $x > x_0$ un punto di I. Applicando la seconda formula dell'incremento finito alla f nell'intervallo $[x_0, x]$, otteniamo l'esistenza di un punto $\bar{x} \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x - x_0)\,.$$

Per la monotonia di f', si ha $f'(\bar{x}) \geq f'(x_0)$ e dunque vale la (A.4.2). Se $x < x_0$, si ragiona in modo analogo.

b2) Nella dimostrazione del punto precedente si ha ora $f'(\bar{x}) > f'(x_0)$, dunque la disuguaglianza (A.4.2) è stretta (per $x \neq x_0$). □

A.4.4 Formule di Taylor

Premettiamo il seguente risultato, che fornisce una proprietà interessante degli sviluppi di Taylor. A tale scopo, osserviamo che se una funzione g è definita soltanto in un punto x_0, possiamo comunque definire il suo polinomio di Taylor di ordine 0 ponendo, in modo ovvio, $Tg_{0,x_0}(x) = g(x_0)$.

Lemma A.4.2 *Sia f derivabile n volte in x_0. La derivata di ordine h, $0 \leq h \leq n$, del polinomio di Taylor di f di ordine n in x_0 coincide con il polinomio di Taylor di $f^{(h)}$ di ordine $n-h$ in x_0, ovvero*

$$D^h T f_{n,x_0}(x) = T f^{(h)}_{n-h,x_0}(x)\,. \tag{A.4.3}$$

In particolare, si ha

$$D^h T f_{n,x_0}(x_0) = f^{(h)}(x_0)\,, \qquad \forall h = 0, \ldots, n\,. \tag{A.4.4}$$

Dimostrazione. Ricordando l'Esempio 6.31 i), si ha

$$D^h (x - x_0)^k = \begin{cases} 0 & \text{se } h > k \\ \dfrac{k!}{(k-h)!}(x - x_0)^{k-h} & \text{se } h \leq k\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$D^h T f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} D^h (x - x_0)^k = \sum_{k=h}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-h)!}(x - x_0)^{k-h}\,.$$

Osserviamo ora che $f^{(k)}(x_0) = f^{(h+k-h)}(x_0) = \left(f^{(h)}\right)^{(k-h)}(x_0)$, ossia la derivata di ordine k di f può essere ottenuta derivando $k-h$ volte la derivata di ordine h di f. Dunque, ponendo $\ell = k - h$, si ha

$$\begin{aligned} D^h T f_{n,x_0}(x) &= \sum_{k=h}^{n} \frac{\left(f^{(h)}\right)^{(k-h)}(x_0)}{(k-h)!}(x - x_0)^{k-h} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-h} \frac{\left(f^{(h)}\right)^{(\ell)}(x_0)}{\ell!}(x - x_0)^{\ell} = T f^{(h)}_{n-h,x_0}(x)\,, \end{aligned}$$

che è la (A.4.3). La (A.4.4) segue ricordando che lo sviluppo di Taylor in un punto x_0 di una funzione coincide con la funzione stessa in quel punto. □

▶ Dimostrazione del Teorema 7.1 di pag. 238

Teorema 7.1 (**Formula di Taylor con resto di Peano**) *Sia f derivabile n volte in x_0, con $n \geq 0$. Allora, vale la* **formula di Taylor**

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

dove

$$\begin{aligned} Tf_{n,x_0}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Tf_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0\,.$$

Osserviamo che siamo in presenza di una forma di indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$; al fine di applicare il Teorema di de l'Hôpital 6.41 siamo indotti a considerare il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - (Tf_{n,x_0})'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - Tf'_{n-1,x_0}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\,,$$

(dove si è utilizzato la (A.4.3) con $h = 1$), le altre ipotesi essendo soddisfatte.

Per $n > 1$, si ha ancora una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, quindi reiterando $n-1$ volte quanto fatto sopra ci riduciamo a considerare il limite

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - Tf^{(n-1)}_{1,x_0}(x)}{n!(x-x_0)} \\ &\qquad = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)} \\ &\qquad = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0\,, \end{aligned}$$

per definizione di derivata n-sima in x_0. Dunque l'applicazione reiterata del Teorema di de l'Hôpital è giustificata e $L = 0$. □

▶ Dimostrazione del Teorema 7.2 di pag. 239

Teorema 7.2 (**Formula di Taylor con resto di Lagrange**) *Sia f derivabile n volte in x_0, con $n \geq 0$; inoltre, sia f derivabile $n+1$ volte in un intorno di x_0, tranne eventualmente nel punto x_0. Allora, vale la formula di Taylor*

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x - x_0)^{n+1},$$

per un opportuno $\bar{x}$ compreso tra x_0 e x.

Dimostrazione. Poniamo $\varphi(x) = f(x) - Tf_{n,x_0}(x)$ e $\psi(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Osserviamo che, grazie alla (A.4.4), per $h = 0, \ldots, n$ si ha

$$\varphi^{(h)}(x_0) = 0\,;$$

inoltre si ha $\psi^{(h)}(x_0) = 0$ e $\psi^{(h)}(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$. Applicando il Teorema di Cauchy 6.25 alle funzioni φ e ψ nell'intervallo I_0 di estremi x_0 e x, deduciamo che esiste un punto $x_1 \in I_0$ tale che

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}\,.$$

Applicando nuovamente tale procedimento alle funzioni $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ nell'intervallo I_1 di estremi x_0 e x_1 si trova un punto $x_2 \in I_1 \subset I_0$ tale che

$$\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = \frac{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(x_1) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)}\,.$$

Reiterando, si determina un punto $x_{n+1} \in I_0$ tale che

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \cdots = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})}\,.$$

Notando che $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ e $\psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, si ottiene la tesi ponendo $\bar{x} = x_{n+1}$. □

▶ Dimostrazione del Teorema 9.44 di pag. 353

Teorema 9.44 (**Formula di Taylor con resto integrale**) *Sia $n \geq 0$ un intero arbitrario. Per ogni funzione f derivabile $n+1$ volte in un intorno di x_0 con derivata $f^{(n+1)}$ ivi continua, vale la relazione*

$$f(x) - Tf_{n,x_0}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, \mathrm{d}t\,.$$

Dimostrazione. Applichiamo il Principio di induzione (si veda l'Appendice A.1). Se $n = 0$, la formula si riduce all'identità

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\ \mathrm{d}t\,,$$

stabilita nel Corollario 9.42.

Supponiamo vero l'enunciato per n e verifichiamolo per $n+1$. Si ha, integrando per parti e usando l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\ \mathrm{d}t \\
&\quad = \frac{1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x} + (n+1)\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}\ \mathrm{d}t\right] \\
&\quad = -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}\ \mathrm{d}t \\
&\quad = -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + f(x) - Tf_{n,x_0}(x) \\
&\quad = f(x) - Tf_{n+1,x_0}(x)\,.
\end{aligned}$$

□

Diamo infine un esempio che illustra la maggiore accuratezza dell'informazione che si può trarre dal resto integrale rispetto al resto di Lagrange.

Esempio A.4.3 Consideriamo lo sviluppo di Maclaurin della funzione esponenziale $f(x) = \mathrm{e}^x$ arrestato al primo ordine, tanto con resto di Lagrange quanto con resto in forma integrale. Supponendo $x > 0$, se usiamo il resto di Lagrange abbiamo per un certo $\bar{x} \in (0, x)$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\bar{x}}x^2\,; \tag{A.4.5}$$

invece se usiamo il resto integrale otteniamo

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \int_0^x \mathrm{e}^t(x-t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{A.4.6}$$

Poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente, si ha $\mathrm{e}^{\bar{x}} < \mathrm{e}^x$ e dunque dalla (A.4.5) deduciamo che l'errore di approssimazione di e^x mediante il polinomio $1 + x$ soddisfa

$$0 < \mathrm{e}^x - (1+x) < \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x\,. \tag{A.4.7}$$

Analizzando invece il resto integrale, si verifica facilmente che la funzione integranda $g(t) = \mathrm{e}^t(x-t)$ ha per $x \geq 1$ un massimo stretto in $t = x-1$, dove vale e^{x-1}. Pertanto,

$$0 < \int_0^x \mathrm{e}^t (x-t)\,\mathrm{d}t < \mathrm{e}^{x-1} \int_0^x \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x-1} x \ .$$

Dunque dalla (A.4.6) deduciamo che

$$0 < \mathrm{e}^x - (1+x) < \frac{1}{\mathrm{e}} x \mathrm{e}^x \ , \qquad x \geq 1 \ . \tag{A.4.8}$$

Poiché si verifica immediatamente che $\frac{1}{\mathrm{e}} x \mathrm{e}^x < \frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^x$ per $x \geq 1$, concludiamo che la (A.4.8) fornisce una stima dell'errore di approssimazione più accurata della (A.4.7). Ad esempio, per $x = 1$ l'errore vale

$$\mathrm{e}^1 - (1+1) = \mathrm{e} - 2 = 0.71828... \, ;$$

la (A.4.7) fornisce la maggiorazione $0.71828... < \frac{1}{2}\mathrm{e} = 1.35914...$, mentre la (A.4.8) fornisce la maggiorazione $0.71828... < \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e} = 1$, più precisa. □

A.5

Complementi sul calcolo integrale

Iniziamo questa appendice con la dimostrazione della convergenza delle due successioni che definiscono l'integrale di Cauchy. Passiamo poi all'integrale di Riemann, giustificando l'integrabilità di classi notevoli di funzioni e stabilendo varie proprietà delle funzioni integrabili e dell'integrale definito. Infine, dimostriamo alcuni risultati sugli integrali impropri.

A.5.1 Integrale di Cauchy

▶ Dimostrazione del Teorema 9.20 di pag. 336

Teorema 9.20 *Le successioni $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ sono entrambe convergenti, e convergono allo stesso limite.*

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni $p \geq 1$, si ha

$$s_n \leq s_{pn}\,, \qquad S_{pn} \leq S_n\,.$$

Infatti, se si suddivide l'intervallo I_k in p sottointervalli I_{ki} uguali $(1 \leq i \leq p)$ di ampiezza $\Delta x/p$, e si pone

$$m_{ki} = \min_{x \in I_{ki}} f(x)\,,$$

per ogni i si avrà $m_k \leq m_{ki}$ e dunque

$$m_k \Delta x \leq \sum_{i=1}^{p} m_{ki} \frac{\Delta x}{p}\,.$$

Sommando su k si ottiene $s_n \leq s_{pn}$. Analogamente si dimostra la seconda disuguaglianza.

Siano ora s_n e S_m due somme arbitrarie. Si ha

$$s_n \leq s_{nm} \leq S_{nm} \leq S_m$$

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4_A5, © Springer-Verlag Italia 2014

e pertanto ogni somma inferiore è minore o uguale ad ogni somma superiore. Poniamo

$$s = \sup_n s_n \qquad \text{e} \qquad S = \inf_n S_n \,.$$

Per quanto visto, si ha $s \le S_m$, per ogni m e dunque $s \le S$. Dimostriamo che $s = S$ e che tale valore è il limite cercato. Per il Teorema di Heine-Cantor A.3.7, la funzione f è uniformemente continua, quindi fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $x', x'' \in [a, b]$ e

$$|x' - x''| < \delta \qquad \text{allora} \qquad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \,;$$

definiamo l'intero n_ε tale che $\frac{b-a}{n_\varepsilon} < \delta$. Sia $n \ge n_\varepsilon$ arbitrario; in ogni intervallo I_k di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ in cui suddividiamo l'intervallo $[a, b]$, esistono punti ξ_k e η_k tali che

$$f(\xi_k) = m_k = \min_{x \in I_k} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(\eta_k) = M_k = \max_{x \in I_k} f(x) \,.$$

Poiché $|\eta_k - \xi_k| \le \frac{b-a}{n} \le \frac{b-a}{n_\varepsilon} < \delta$, si ha

$$M_k - m_k = f(\eta_k) - f(\xi_k) < \varepsilon \,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(M_k - m_k\big) \Delta x < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x = \varepsilon (b - a) \,. \end{aligned}$$

Ciò significa che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \ge n_\varepsilon$ si ha $0 \le S_n - s_n < \varepsilon(b - a)$. Ne segue che

$$S - s \le S_n - s_n < \varepsilon (b - a) \,.$$

Facendo tendere ε a 0, si ha $S = s$. Inoltre

$$S - s_n \le S_n - s_n < \varepsilon \qquad \text{se} \quad n \ge n_\varepsilon$$

cioè

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S \,.$$

Analogamente, si ha $\lim_{n \to \infty} S_n = S$. □

A.5.2 Integrale di Riemann

Premettiamo il seguente risultato.

Lemma A.5.1 *Sia f una funzione limitata su $I = [a, b]$. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una funzione $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e una funzione $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ tali che*

$$\int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Per definizione f è integrabile se e solo se

$$\int_I f = \inf\left\{\int_I h : h \in \mathcal{S}_f^+\right\} = \sup\left\{\int_I g : g \in \mathcal{S}_f^-\right\}.$$

Sia f integrabile. Fissato $\varepsilon > 0$, per definizione di estremo inferiore, è possibile individuare una funzione $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ tale che $\displaystyle\int_I h_\varepsilon - \int_I f < \varepsilon/2$; analogamente, per definizione di estremo superiore, si può trovare $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ tale che $\displaystyle\int_I f - \int_I g_\varepsilon < \varepsilon/2$. Pertanto

$$\int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon = \int_I h_\varepsilon - \int_I f + \int_I f - \int_I g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Viceversa, usando la Definizione 9.26 e la Proprietà 9.27, si ha

$$\int_I g_\varepsilon \le \underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f \le \int_I h_\varepsilon$$

e quindi

$$\overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \le \int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, si ottiene $\displaystyle\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$ ovvero la funzione f è integrabile su $[a, b]$. □

▶ Dimostrazione del Teorema 9.31 di pag. 343

Teorema 9.31 *Sono integrabili sull'intervallo $[a, b]$*

a) le funzioni continue su $[a, b]$;
b) le funzioni continue a tratti su $[a, b]$;
c) le funzioni continue su (a, b) e limitate su $[a, b]$;
d) le funzioni monotone su $[a, b]$.

Dimostrazione.
a) Per il Teorema di Weierstrass 4.31, f è limitata su $[a, b]$ e, per il Teorema di Heine-Cantor A.3.7, f è uniformemente continua in $[a, b]$. Questo significa che per

ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\delta > 0$ tale che se $x', x'' \in [a,b]$ e $|x' - x''| < \delta$ allora $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Consideriamo una suddivisione $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a,b]$ tale che ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ abbia ampiezza $< \delta$ $(k = 1, \dots, n)$. Applichiamo il Teorema di Weierstrass su ognuno di essi: per ogni $k = 1, \dots, n$, esistono punti $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tali che

$$f(\xi_k) = m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(\eta_k) = M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)\,.$$

Poiché $|\eta_k - \xi_k| < \delta$, si ha

$$M_k - m_k = f(\eta_k) - f(\xi_k) < \varepsilon\,.$$

Siano ora $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ definite come

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} M_k & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a, \end{cases}$$

e

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} m_k & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Per ogni $x \in [a,b]$, risulta $h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x) < \varepsilon$ e quindi

$$\int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon = \int_I (h_\varepsilon - g_\varepsilon) < \int_I \varepsilon = (b-a)\varepsilon\,.$$

Poiché ε è arbitrario, applicando il Lemma A.5.1, si ottiene il risultato.

b) Siano $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ i punti di discontinuità di f interni all'intervallo $[a,b]$, con $x_{k-1} < x_k$; poniamo poi $x_0 = a$ e $x_n = b$. Per $k = 1, \dots, n$, consideriamo le funzioni continue sull'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ così definite

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k), \\ \lim\limits_{x \to x_{k-1}^+} f(x) & \text{se } x = x_{k-1}, \\ \lim\limits_{x \to x_k^-} f(x) & \text{se } x = x_k\,. \end{cases}$$

Procedendo come nella dimostrazione del punto *a)*, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $h_{\varepsilon,k} \in \mathcal{S}_{f_k}^+$ e $g_{\varepsilon,k} \in \mathcal{S}_{f_k}^-$ tali che

$$h_{\varepsilon,k}(x) - g_{\varepsilon,k}(x) < \varepsilon\,, \qquad \forall x \in [x_{k-1}, x_k]\,.$$

Siano ora $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ definite come

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} h_{\varepsilon,k}(x) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a, \end{cases}$$

e

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} g_{\varepsilon,k}(x) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Allora, per ogni $x \in [a, b]$, risulta $h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x) < \varepsilon$ e, come in precedenza, concludiamo applicando il Lemma A.5.1.

c) Sia $\varepsilon > 0$ fissato tale che $I_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset [a, b]$. La funzione f è continua su I_ε e, procedendo come nel punto *a)*, è possibile trovare due funzioni a scala definite su I_ε, siano φ_ε e ψ_ε, tali che

$$\varphi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x) \qquad \text{e} \qquad \psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) < \varepsilon\,, \quad \forall x \in I_\varepsilon\,.$$

Siano inoltre $M = \sup\limits_{x \in I} f(x)$ e $m = \inf\limits_{x \in I} f(x)$. Consideriamo ora le funzioni a scala $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ definite come

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi_\varepsilon(x) & \text{se } x \in I_\varepsilon, \\ M & \text{se } x \notin I_\varepsilon, \end{cases}$$

e

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon(x) & \text{se } x \in I_\varepsilon, \\ m & \text{se } x \notin I_\varepsilon. \end{cases}$$

Usando il Teorema 9.33 *i)*, si ha

$$\begin{aligned} \int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon &= \int_{[a,a+\varepsilon]} (h_\varepsilon - g_\varepsilon) + \int_{I\varepsilon} (h_\varepsilon - g_\varepsilon) + \int_{[b-\varepsilon,b]} (h_\varepsilon - g_\varepsilon) \\ &= 2(M - m)\varepsilon + \int_{I\varepsilon} (h_\varepsilon - g_\varepsilon) \\ &< 2(M - m)\varepsilon + (b - a - 2\varepsilon)\varepsilon < \big(2(M - m) + b - a\big)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Applicando ancora il Lemma A.5.1, si ottiene il risultato.

d) Per fissare le idee, supponiamo che la funzione f sia crescente. Osserviamo preliminarmente che f è limitata su $[a, b]$ in quanto $f(a) \le f(x) \le f(b)$, $\forall x \in [a, b]$.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia n un intero tale che $n > \dfrac{b-a}{n}$; suddividiamo l'intervallo in n parti uguali di ampiezza $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$ e siano $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ i punti di suddivisione. Definiamo le funzioni a scala $h_n \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_n \in \mathcal{S}_f^-$ definite come

$$h_n(x) = \begin{cases} f(x_k) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a, \end{cases}$$

e

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x_{k-1}) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_I h_n - \int_I g_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big) \\ &= \varepsilon\big(f(b) - f(a)\big)\,.\end{aligned}$$

Il risultato segue ancora dal Lemma A.5.1.

Se la funzione f è decrescente, la dimostrazione è analoga. □

▶ Dimostrazione della Proposizione 9.32 di pag. 344

Proposizione 9.32 *Sia f una funzione integrabile su $[a,b]$. Allora*

i) f è integrabile su ogni sottointervallo $[c,d] \subset [a,b]$;
ii) la funzione $|f|$ è integrabile su $[a,b]$.

Dimostrazione.
i) Se f è una funzione a scala il risultato è immediato. In generale, sia f integrabile su $[a,b]$; fissato $\varepsilon > 0$, per il Lemma A.5.1, esistono $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ tali che

$$\int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon = \int_a^b \big(h_\varepsilon - g_\varepsilon\big) < \varepsilon\,.$$

Poiché

$$\int_c^d \big(h_\varepsilon - g_\varepsilon\big) \le \int_a^b \big(h_\varepsilon - g_\varepsilon\big) < \varepsilon\,,$$

il risultato segue applicando il Lemma A.5.1 alla funzione f ristretta all'intervallo $[c,d]$.

ii) Ricordando che $|f| = f_+ + f_-$, dove f_+ e f_- sono rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di f, è sufficiente mostrare che sono integrabili f_+ e f_- e applicare il Teorema 9.33 *ii)*, per ottenere il risultato.

Dimostriamo che f_+ è integrabile. Fissato $\varepsilon > 0$, per il Lemma A.5.1 esistono $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ tali che $\int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon < \varepsilon$. Sia $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $I = [a,b]$ adattata a entrambe le funzioni a scala h_ε e g_ε. Consideriamo le funzioni $h_{\varepsilon,+}$ e $g_{\varepsilon,+}$, parte positiva rispettivamente di h_ε e g_ε. Fissato un intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, esaminando le tre possibili situazioni $0 \le g_\varepsilon \le h_\varepsilon$, $g_\varepsilon \le 0 \le h_\varepsilon$ e $g_\varepsilon \le h_\varepsilon \le 0$, si verifica facilmente che

$$g_{\varepsilon,+} \le f_+ \le h_{\varepsilon,+} \qquad \text{e} \qquad \int_{I_k} h_{\varepsilon,+} - \int_{I_k} g_{\varepsilon,+} \le \int_{I_k} h_\varepsilon - \int_{I_k} g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Di conseguenza, si ha $h_{\varepsilon,+} \in \mathcal{S}^+_{f_+}$ e $g_{\varepsilon,+} \in \mathcal{S}^-_{f_+}$ e

$$\int_I h_{\varepsilon,+} - \int_I g_{\varepsilon,+} = \sum_{k=1}^n \Big(\int_{I_k} h_{\varepsilon,+} - \int_{I_k} g_{\varepsilon,+} \Big) \le \sum_{k=1}^n \Big(\int_{I_k} h_\varepsilon - \int_{I_k} g_\varepsilon \Big) < \varepsilon\,.$$

Pertanto, applicando il Lemma A.5.1, si ottiene l'integrabilità di f_+.
In modo analogo si verifica che anche f_- è integrabile. □

▶ Dimostrazione del Teorema 9.33 di pag. 345

Teorema 9.33 *Siano f e g funzioni integrabili su un intervallo limitato I della retta reale.*

i) (**Additività rispetto al dominio di integrazione**) *Per ogni $a, b, c \in I$, si ha*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

ii) (**Linearità dell'integrale definito**) *Per ogni $a, b \in I$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha*

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

iii) (**Positività dell'integrale definito**) *Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Se $f \ge 0$ in $[a, b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ge 0.$$

Inoltre, se f è continua, vale l'uguaglianza se e solo se f è identicamente nulla.

iv) (**Confronto tra integrali definiti**) *Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Se $f \le g$ in $[a, b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

v) (**Maggiorazione dell'integrale definito**) *Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Allora*

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Non è difficile verificare che le proprietà *i) -v)* valgono nel caso in cui le funzioni f e g sono funzioni a scala. Dimostriamolo pertanto per generiche funzioni integrabili.

i) Verifichiamo la proprietà nel caso $a < c < b$. Le altre possibili situazioni si studiano utilizzando tale risultato e le relazioni (9.19). Per la Proposizione 9.32 *i)*,

f è integrabile sugli intervalli $[a,b]$, $[a,c]$ e $[c,b]$. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, siano $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ e $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ tali che

$$\int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \int_a^b g_\varepsilon \le \int_a^b f \le \int_a^b h_\varepsilon \,.$$

Poiché la proprietà vale per le funzioni a scala, si ha

$$\int_a^b g_\varepsilon = \int_a^c g_\varepsilon + \int_c^b g_\varepsilon \le \int_a^c f + \int_c^b f \le \int_a^c h_\varepsilon + \int_c^b h_\varepsilon = \int_a^b h_\varepsilon$$

e pertanto

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \le \int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon < \varepsilon \,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, il risultato segue.

ii) Dividiamo la dimostrazione in due parti, verificando che

a) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \,.$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $a < b$. Nel primo caso, se $\alpha = 0$ la verifica è banale. Sia $\alpha > 0$. Osserviamo che se $g \in \mathcal{S}_f^-$ e $h \in \mathcal{S}_f^+$ allora $\alpha g \in \mathcal{S}_{\alpha f}^-$ e $\alpha h \in \mathcal{S}_{\alpha f}^+$; dunque

$$\begin{aligned} \alpha \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x &= \int_a^b \alpha g(x)\ \mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} \alpha f(x)\ \mathrm{d}x \\ &\le \overline{\int_a^b} \alpha f(x)\ \mathrm{d}x \le \int_a^b \alpha h(x)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x \,. \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza $\alpha \displaystyle\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} \alpha f(x)\ \mathrm{d}x$, prendendo l'estremo superiore degli integrali $\int_a^b g$ facendo variare $g \in \mathcal{S}_f^-$ e usando l'integrabilità di f su $[a,b]$, si ottiene

$$\alpha \underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} \alpha f(x)\ \mathrm{d}x \,;$$

analogamente dalla disuguaglianza $\displaystyle\overline{\int_a^b} \alpha f(x)\ \mathrm{d}x \le \alpha \int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x$ si ha

$$\overline{\int_a^b} \alpha f(x)\ \mathrm{d}x \le \alpha \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \,.$$

In conclusione,

$$\alpha\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} \alpha f(x)\ \mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} \alpha f(x)\ \mathrm{d}x \le \alpha\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

e quindi $\alpha\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \alpha f(x)\ \mathrm{d}x$.
Se $\alpha < 0$, la dimostrazione è analoga osservando che se $g \in \mathcal{S}_f^-$ e $h \in \mathcal{S}_f^+$ allora $\alpha g \in \mathcal{S}_{\alpha f}^+$ e $\alpha h \in \mathcal{S}_{\alpha f}^-$.

Verifichiamo ora il punto b). Siano $f_1 \in \mathcal{S}_f^-$, $f_2 \in \mathcal{S}_f^+$, $g_1 \in \mathcal{S}_g^-$ e $g_2 \in \mathcal{S}_g^+$; allora $f_1 + g_1 \in \mathcal{S}_{f+g}^-$ e $f_2 + g_2 \in \mathcal{S}_{f+g}^+$. Dunque

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g_1(x)\ \mathrm{d}x &= \int_a^b \big(f_1(x) + g_1(x)\big)\ \mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x \\ &\le \overline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x \le \int_a^b \big(f_2(x) + g_2(x)\big)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f_2(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g_2(x)\ \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Fissate g_1, f_2 e g_2 e prendendo l'estremo superiore degli integrali $\displaystyle\int_a^b f_1(x)\ \mathrm{d}x$ al variare di f_1 in $\mathcal{S}_f^-$ si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g_1(x)\ \mathrm{d}x &\le \underline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x \\ &\le \overline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x \le \int_a^b f_2(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g_2(x)\ \mathrm{d}x\,;\end{aligned}$$

facendo ora variare g_1 in $\mathcal{S}_g^-$ e prendendo ancora l'estremo superiore degli integrali $\displaystyle\int_a^b g_1(x)\ \mathrm{d}x$ si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x &\le \underline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x \\ &\le \overline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x \le \int_a^b f_2(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g_2(x)\ \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento prima fissando g_2 e facendo variare $f_2 \in \mathcal{S}_f^+$ e poi facendo variare $g_2 \in \mathcal{S}_g^+$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x &\le \underline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x \\ &\le \overline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

da cui il risultato.

iii) La funzione g costante uguale a zero appartiene a $\mathcal{S}_f^-$, pertanto

$$0 = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Supponiamo ora che f sia continua; ovviamente se $f(x) = 0$ allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Verifichiamo l'implicazione inversa, ossia che se $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ allora $f(x) = 0$. Se per assurdo fosse $f(\bar{x}) \neq 0$ per un certo $\bar{x} \in (a, b)$, applicando il Teorema A.2.2 esiste un intorno $I_\delta(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \subset [a, b]$ e una costante $K_f > 0$, per ogni $x \in I_\delta(\bar{x})$. Pertanto la funzione a scala

$$g(x) = \begin{cases} K_f & \text{se } x \in I_\delta(\bar{x}) \\ 0 & \text{se } x \notin I_\delta(\bar{x}) \end{cases}$$

appartiene a $\mathcal{S}_f^-$ e

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \delta K_f > 0\,,$$

da cui l'assurdo. Quindi $f(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e, per continuità, f è nulla anche negli estremi a e b.

iv) Segue direttamente dal punto *iii)*, osservando che la funzione $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$.

v) Per la Proposizione 9.32 *ii)*, la funzione $|f|$ è integrabile su $[a, b]$. Ricordando che $f = f_+ - f_-$ (dove f_+ è la funzione parte positiva e f_- la funzione parte negativa di f) e usando la linearità dell'integrale dimostrata nel punto *ii)*, si ha

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f_+(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f_-(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare, la positività dell'integrale dimostrata nel punto *iii)* (si ricordi che $f_+, f_- \geq 0$) e la relazione $|f| = f_+ + f_-$ si ottiene

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| &\leq \left|\int_a^b f_+(x)\ \mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f_-(x)\ \mathrm{d}x\right| \\ &= \int_a^b f_+(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b f_-(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \big(f_+(x) + f_-(x)\big)\ \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

□

A.5.3 Integrali impropri

▶ Verifica della proprietà (10.3) di pag. 379

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{converge, ma} \quad \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x \quad \text{diverge.}$$

Dimostrazione. Verifichiamo dapprima che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge. Integriamo per parti su ogni intervallo $[1, a]$ con $a > 1$, ponendo

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \sin x\,;$$

in tal modo si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = -\cos x\,.$$

Pertanto

$$\int_1^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,;$$

l'ultimo integrale converge per quanto visto nell'Esempio 10.8. Dunque la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ risulta integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$.

Dimostriamo ora che $\dfrac{\sin x}{x}$ non è assolutamente integrabile su $[1, +\infty)$. Infatti, poiché, per ogni x, $|\sin x| \le 1$, si ha

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2}\frac{1-\cos 2x}{x}\,.$$

Mostreremo che l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge e quindi per il Criterio del confronto (Teorema 10.5) anche l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x$ diverge. Infatti si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Il primo integrale diverge, mentre con un procedimento analogo a quello usato sopra si verifica che il secondo integrale converge. Dunque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge e la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ non è assolutamente integrabile. □

▶ Dimostrazione del Teorema 10.10 di pag. 379

Teorema 10.10 (Criterio del confronto asintotico) *Sia $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a,+\infty))$. Supponiamo che f abbia ordine di infinitesimo α per $x \to +\infty$ rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$.*

i) Se $\alpha > 1$, allora $f \in \mathcal{R}([a,+\infty))$;

ii) se $\alpha \le 1$, allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Dimostrazione. Poiché $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to +\infty$, possiamo supporre che la funzione f sia di segno costante per x sufficientemente grande, ad esempio per $x > A > 0$. Non è restrittivo supporre f strettamente positiva, altrimenti operiamo un cambiamento di segno. Inoltre, per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = O\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big) \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^\alpha} = O\big(f(x)\big)\,,$$

ovvero esistono due costanti c_1, c_2 positive tali che

$$\frac{c_1}{x^\alpha} \le f(x) \le \frac{c_2}{x^\alpha}\,, \qquad \forall x > A\,.$$

È allora sufficiente applicare il Criterio del confronto (Teorema 10.5), usando i risultati dell'Esempio 10.4, per ottenere la tesi. □

▶ Dimostrazione del Teorema 10.13 di pag. 381

Teorema 10.13 (Criterio integrale) *Sia f una funzione positiva, decrescente e continua in $[k_0,+\infty)$, con $k_0 \in \mathbb{N}$. Allora valgono le seguenti disuguaglianze*

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(k) \le \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)\,;$$

pertanto, la serie e l'integrale improprio hanno lo stesso comportamento. Precisamente

a) $\displaystyle\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge* $\iff$ $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ *converge;*

b) $\displaystyle\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverge* $\iff$ $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ *diverge.*

Dimostrazione. Poiché f è decrescente, per ogni $k \geq k_0$, si ha

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)\,, \qquad \forall x \in [k, k+1]\,.$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale, si ottiene

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k)\,;$$

dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > k_0$, risulta

$$\sum_{k=k_0+1}^{n+1} f(k) \leq \int_{k_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=k_0}^{n} f(k)$$

(avendo riscalato di un'unità l'indice della prima serie). Passando al limite per $n \to +\infty$ e osservando che f è positiva e continua, si ottiene la tesi. $\square$

Tavole e Formulari

Formule notevoli

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = 0 \quad \text{se } x = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \cos x = 0 \quad \text{se } x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin x = 1 \quad \text{se } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \cos x = 1 \quad \text{se } x = 2k\pi$$

$$\sin x = -1 \quad \text{se } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \cos x = -1 \quad \text{se } x = \pi + 2k\pi$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin x, \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x, \qquad \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin x$$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \forall x, y > 0$$

$$\log_a(x^y) = y\log_a x, \quad \forall x > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}$$

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4, © Springer-Verlag Italia 2014

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to0^+} x^\alpha = 0\,, \qquad \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0\,, \qquad \lim_{x\to0^+} x^\alpha = +\infty\,, \qquad \alpha < 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0\,, \qquad a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty\,, \qquad a < 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty\,, \qquad a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty\,, \qquad a < 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin x\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \cos x\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \tan x \qquad \text{non esistono}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^\pm} \tan x = \mp\infty\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm1} \arcsin x = \pm\frac{\pi}{2} = \arcsin(\pm1)$$

$$\lim_{x\to+1} \arccos x = 0 = \arccos 1\,, \qquad \lim_{x\to-1} \arccos x = \pi = \arccos(-1)$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a\,, \quad a \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}\,,\ a > 0; \quad \text{in particolare,} \quad \lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a\,, \quad a > 0; \qquad \text{in particolare,} \quad \lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Tavola delle derivate di funzioni elementari

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}\,, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
a^x	$(\log a)\, a^x$
$\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{(\log a)\, x}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Regole di derivazione

$$\Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$\Big(f(x)g(x)\Big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

$$\Big(g(f(x))\Big)' = g'(f(x))f'(x)$$

Sviluppi di Maclaurin notevoli

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \left|\binom{-\frac{1}{2}}{m}\right| \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Tavola degli integrali di funzioni elementari

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\,, \qquad \alpha \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\log(x+\sqrt{x^2+1}) + c = \operatorname{sett}\sinh x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\log(x+\sqrt{x^2-1}) + c = \operatorname{sett}\cosh x + c$

Regole di integrazione

$$\int \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \log\lvert\varphi(x)\rvert + c$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{con} \quad y = \varphi(x)$$

Indice analitico

Arco, 295
  chiuso, 295
  di Jordan, 295
  lunghezza, 393, 394
  semplice, 295
Arcocoseno, 58, 120
Arcoseno, 58, 120, 182, 352
Arcotangente, 58, 120, 182, 352
Argomento, 288
Ascissa curvilinea, 394
Asintoto, 141
  obliquo, 141
  orizzontale, 141
  verticale, 143

Binomio di Newton, 21, 448

Campo vettoriale, 395
Cardinalità, 3
Circonferenza trigonometrica, 54
Coefficiente binomiale, 20, 245
Colatitudine, 273
Combinazioni, 22
Congiunzione logica, 5
Connettivo logico, 5
Controimmagine, 38
Coordinate
  cilindriche, 273
  polari, 271
  sferiche, 273
Coppia ordinata, 22
Coseno, 55, 105, 180, 182, 244
  iperbolico, 206, 248
Cotangente, 57
Criterio
  del confronto, 153, 376, 384
  del confronto asintotico, 155, 379, 384, 494
  del rapporto, 146, 156
  della radice, 157
  di convergenza assoluta, 159, 378
  di Leibniz, 158
  integrale, 381, 494
Curva, 294
  congruente, 390
  equivalente, 389
  integrale, 408
  opposta, 390
  piana, 294
  regolare, 297
  regolare a tratti, 297
  semplice, 295

Derivata, 177
  k-esima, 198
  destra, 185
  logaritmica, 183
  parziale, 301, 303
  seconda, 198
  sinistra, 185
Diagrammi di Venn, 2
Differenza, 4
  simmetrica, 4
Dimostrazione per assurdo, 6

C. Canuto, A. Tabacco: *Analisi Matematica I*, 4a edizione,
UNITEXT – La Matematica per il 3+2 82,
DOI 10.1007/978-88-470-5723-4, © Springer-Verlag Italia 2014

Discontinuità
di prima specie, 87
di seconda specie, 87
eliminabile, 80
Disgiunzione logica, 5
Disposizioni, 20
Disuguaglianza
di Bernoulli, 145, 448
di Cauchy-Schwarz, 278
triangolare, 14
Dominio, 33

Equazione
caratteristica, 426
Equazione differenziale
a variabili separabili, 412
autonoma, 408
lineare, 415, 425
omogenea, 415, 417, 425
ordinaria, 407
soluzione, 408
Equivalenza logica, 6
Esponenziale, 53, 180, 240
Estremo
inferiore, 18, 39, 118
superiore, 18, 39, 118

Fattoriale, 19
Flesso, 200, 258
ascendente, 201
discendente, 201
Forma
algebrica, 285
cartesiana, 285
esponenziale, 289
indeterminata, 103, 111
normale, 408
polare, 288
trigonometrica, 288
Formula
dell'incremento finito, 193
di addizione, 57
di De Moivre, 290
di duplicazione, 57
di Eulero, 289
di prostaferesi, 57
di sottrazione, 57
di Stirling, 147
di Taylor, 238, 478

Funzione, 33
a scala, 338
arcocoseno, 58, 120
arcoseno, 58, 120, 182, 352
arcotangente, 58, 120, 182, 352
asintotica, 142
assolutamente integrabile, 379
biiettiva, 42
composta, 46, 108, 181
concava, 200
continua, 78, 83, 301
continua a tratti, 334
continua da destra, 86
convessa, 199
coseno, 55, 105, 180, 182, 244
coseno iperbolico, 206, 248
cotangente, 57
crescente, 43
decrescente, 44
definita a tratti, 34
derivabile, 177, 198
derivata, 177
di classe $\mathcal{C}^\infty$, 199
di classe $\mathcal{C}^k$, 199
di più variabili, 300
di variabile reale, 34
dispari, 49, 183, 239
equigrande, 130
equivalente, 130
esponenziale, 53, 180, 240
identità, 48
infinita, 136
infinitesima, 136
iniettiva, 40, 120
integrabile, 341
integrale, 348
inversa, 40, 120, 182
invertibile, 41
iperbolica, 206
limitata, 39, 99
logaritmo, 54, 120, 183, 242
Mantissa, 36
monotona, 43, 88, 120, 195
o grande, 129
o piccolo, 130
pari, 49, 183, 239
Parte intera, 35, 36
parte negativa, 378
parte positiva, 378

periodica, 50
polinomiale, 53, 102, 105, 181, 330
potenza, 51, 244
razionale, 53, 102, 105, 106, 327
reale, 34
Segno, 35, 36
seno, 55, 82, 97, 111, 179, 243
seno iperbolico, 206, 248
settore coseno iperbolico, 208
settore seno iperbolico, 208
settore tangente iperbolica, 208
superiormente limitata, 39
suriettiva, 40
tangente, 57, 181, 252
tangente iperbolica, 208
trascurabile, 130
trigonometrica, 54
uniformemente continua, 467
Valore assoluto, 35, 36

Gradiente, 302
Grado, 53, 55
Grafico, 33

Immagine, 33, 38
Implicazione logica, 5
Infinitesimo, 136, 211
campione, 138
dello stesso ordine, 137
di ordine inferiore, 137
di ordine superiore, 137
Infinito, 136, 211, 255
campione, 138
dello stesso ordine, 137
di ordine inferiore, 137
di ordine superiore, 137
Insieme, 1
ambiente, 1
complementare, 3, 7
delle parti, 2
inferiormente limitato, 16
limitato, 16
superiormente limitato, 16
vuoto, 2
Integrale
curvilineo, 388
definito, 333, 336, 338, 341
di linea, 396
generale, 410
improprio, 374, 382, 386
indefinito, 316, 317
inferiore, 340
particolare, 410
secondo Cauchy, 334
secondo Riemann, 337
singolare, 412
superiore, 340
Integrazione
per parti, 322, 354
per sostituzione, 323, 332, 354
Intersezione, 3, 7
Intervallo, 15
di monotonia, 44, 196
Intorno, 67, 300
destro, 85
sinistro, 85

Latitudine, 273
Leggi di De Morgan, 4
Limite, 70, 72, 75, 79, 84
destro, 85
sinistro, 85
Logaritmo, 54, 111, 120, 183, 242
naturale, 74
neperiano, 74
Longitudine, 273

Maggiorante, 16
Massimo, 17, 39
assoluto, 187
relativo, 187
Media integrale, 346
Metodo di bisezione, 116
Minimo, 17, 39
Minorante, 16
Modulo, 275, 287

Negazione logica, 5
Numero
complesso, 284
di Nepero, 74, 110, 111, 180, 458
naturale, 9
razionale, 9
reale, 10
relativo, 9

Ordine, 408
di infinitesimo, 138, 211, 255
di infinito, 138, 211

Parte
  immaginaria, 284
  negativa, 378
  positiva, 378
  principale, 139, 255
  reale, 284
Partizione, 338
Periodo, 10, 50
  minimo, 50
Permutazioni, 20
Polinomio, 53, 102, 105, 181, 330
  caratteristico, 426
  di Taylor, 238
Predicato logico, 2, 7
Primitiva, 316
Principio di induzione, 447
Problema
  ai valori al contorno, 412
  ai valori iniziali, 411
  di Cauchy, 411
Prodotto
  cartesiano, 22
  scalare, 278
Prolungamento, 81
Proposizione
  contronominale, 6
  logica, 5
Proprietà di Archimede, 16
Punto
  a tangente verticale, 186
  angoloso, 185
  critico, 188, 256
  di cuspide, 186
  di discontinuità, 87
  di estremo, 187
  di flesso, 200, 258
  di Lagrange, 191
  di massimo, 187
  di minimo, 187
  di salto, 87
  interno, 16

Quantificatore
  esistenziale, 8
  universale, 8

Radiante, 55
Raffinamento, 338
Raggio, 67
Rapporto incrementale, 175
Relazione, 24
Resto
  di Lagrange, 236, 239, 480
  di Peano, 236, 238, 479
  di una serie, 152
  integrale, 353, 480
Restrizione, 42
Retta tangente, 177

Salto, 87
Seno, 55, 82, 97, 111, 179, 243
  iperbolico, 206, 248
Serie, 148
  a segno alterno, 157
  a termini positivi, 153
  armonica, 154, 159, 381
  assolutamente convergente, 159
  condizionatamente convergente, 160
  convergente, 149
  di Mengoli, 150
  divergente, 149
  geometrica, 152
  indeterminata, 149
  semplicemente convergente, 160
  telescopica, 151
Simboli di Landau, 129
Somma di una serie, 149
Sostegno di una curva, 294
Sottoinsieme, 1, 7
Sottosuccessione, 461
Spazio vettoriale, 277
Successione, 34, 68, 109, 143
  convergente, 70
  delle ridotte, 148
  delle somme parziali, 148
  divergente, 72
  geometrica, 145
  indeterminata, 73
  monotona, 73
  sottosuccessione, 461
Suddivisione, 338
  adattata, 338
Sviluppo
  asintotico, 254
  di Maclaurin, 239, 246
  di Taylor, 238

Tangente, 57, 181, 252

Teorema
dei valori intermedi, 117
del confronto, 96, 99, 144
della media integrale, 347
di Bolzano-Weierstrass, 462
di Cauchy, 192
di de l'Hôpital, 209, 474
di esistenza degli zeri, 114, 449
di Fermat, 188
di Heine-Cantor, 468
di Lagrange, 191
di limitatezza locale, 451
di permanenza del segno, 94, 452
di Rolle, 190
di sostituzione, 107, 144
di unicità del limite, 93
di Weierstrass, 119, 463
fondamentale del calcolo integrale, 349
Termine generale, 148
Trapezoide, 333
Traslazione, 48

Unione, 3, 7

Valore
assoluto, 13
massimo, 39
principale, 288
Variabile
dipendente, 38, 175
indipendente, 38, 175
Versore, 278
Vettore, 274
applicato, 274, 283
direzione, 275
modulo, 275
ortogonale, 279
tangente, 297
verso, 275

Zero, 113

Collana Unitext – La Matematica per il 3+2

A cura di:
A. Quarteroni (Editor-in-Chief)
L. Ambrosio
P. Biscari
C. Ciliberto
M. Ledoux
W.J. Runggaldier

Editor in Springer:
F. Bonadei
francesca.bonadei@springer.com

Volumi pubblicati. A partire dal 2004, i volumi della serie sono contrassegnati da un numero di identificazione. I volumi indicati in grigio si riferiscono a edizioni precedenti.

A. Bernasconi, B. Codenotti
Introduzione alla complessità computazionale
1998, X+260 pp, ISBN 88-470-0020-3

A. Bernasconi, B. Codenotti, G. Resta
Metodi matematici in complessità computazionale
1999, X+364 pp, ISBN 88-470-0060-2

E. Salinelli, F. Tomarelli
Modelli dinamici discreti
2002, XII+354 pp, ISBN 88-470-0187-0

S. Bosch
Algebra
2003, VIII+380 pp, ISBN 88-470-0221-4

S. Graffi, M. Degli Esposti
Fisica matematica discreta
2003, X+248 pp, ISBN 88-470-0212-5

S. Margarita, E. Salinelli
MultiMath – Matematica Multimediale per l'Università
2004, XX+270 pp, ISBN 88-470-0228-1

A. Quarteroni, R. Sacco, F.Saleri
Matematica numerica (2a Ed.)
2000, XIV+448 pp, ISBN 88-470-0077-7
2002, 2004 ristampa riveduta e corretta
(1a edizione 1998, ISBN 88-470-0010-6)

13. A. Quarteroni, F. Saleri
    Introduzione al Calcolo Scientifico (2a Ed.)
    2004, X+262 pp, ISBN 88-470-0256-7
    (1a edizione 2002, ISBN 88-470-0149-8)

14. S. Salsa
    Equazioni a derivate parziali - Metodi, modelli e applicazioni
    2004, XII+426 pp, ISBN 88-470-0259-1

15. G. Riccardi
    Calcolo differenziale ed integrale
    2004, XII+314 pp, ISBN 88-470-0285-0

16. M. Impedovo
    Matematica generale con il calcolatore
    2005, X+526 pp, ISBN 88-470-0258-3

17. L. Formaggia, F. Saleri, A. Veneziani
    Applicazioni ed esercizi di modellistica numerica
    per problemi differenziali
    2005, VIII+396 pp, ISBN 88-470-0257-5

18. S. Salsa, G. Verzini
    Equazioni a derivate parziali – Complementi ed esercizi
    2005, VIII+406 pp, ISBN 88-470-0260-5
    2007, ristampa con modifiche

19. C. Canuto, A. Tabacco
    Analisi Matematica I (2a Ed.)
    2005, XII+448 pp, ISBN 88-470-0337-7
    (1a edizione, 2003, XII+376 pp, ISBN 88-470-0220-6)

20. F. Biagini, M. Campanino
    Elementi di Probabilità e Statistica
    2006, XII+236 pp, ISBN 88-470-0330-X

21. S. Leonesi, C. Toffalori
Numeri e Crittografia
2006, VIII+178 pp, ISBN 88-470-0331-8

22. A. Quarteroni, F. Saleri
Introduzione al Calcolo Scientifico (3a Ed.)
2006, X+306 pp, ISBN 88-470-0480-2

23. S. Leonesi, C. Toffalori
Un invito all'Algebra
2006, XVII+432 pp, ISBN 88-470-0313-X

24. W.M. Baldoni, C. Ciliberto, G.M. Piacentini Cattaneo
Aritmetica, Crittografia e Codici
2006, XVI+518 pp, ISBN 88-470-0455-1

25. A. Quarteroni
Modellistica numerica per problemi differenziali (3a Ed.)
2006, XIV+452 pp, ISBN 88-470-0493-4
(1a edizione 2000, ISBN 88-470-0108-0)
(2a edizione 2003, ISBN 88-470-0203-6)

26. M. Abate, F. Tovena
Curve e superfici
2006, XIV+394 pp, ISBN 88-470-0535-3

27. L. Giuzzi
Codici correttori
2006, XVI+402 pp, ISBN 88-470-0539-6

28. L. Robbiano
Algebra lineare
2007, XVI+210 pp, ISBN 88-470-0446-2

29. E. Rosazza Gianin, C. Sgarra
Esercizi di finanza matematica
2007, X+184 pp, ISBN 978-88-470-0610-2

30. A. Machì
Gruppi – Una introduzione a idee e metodi della Teoria dei Gruppi
2007, XII+350 pp, ISBN 978-88-470-0622-5
2010, ristampa con modifiche

31 Y. Biollay, A. Chaabouni, J. Stubbe
Matematica si parte!
A cura di A. Quarteroni
2007, XII+196 pp, ISBN 978-88-470-0675-1

32. M. Manetti
Topologia
2008, XII+298 pp, ISBN 978-88-470-0756-7

33. A. Pascucci
Calcolo stocastico per la finanza
2008, XVI+518 pp, ISBN 978-88-470-0600-3

34. A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri
Matematica numerica (3a Ed.)
2008, XVI+510 pp, ISBN 978-88-470-0782-6

35. P. Cannarsa, T. D'Aprile
Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale
2008, XII+268 pp, ISBN 978-88-470-0701-7

36. A. Quarteroni, F. Saleri
Calcolo scientifico (4a Ed.)
2008, XIV+358 pp, ISBN 978-88-470-0837-3

37. C. Canuto, A. Tabacco
Analisi Matematica I (3a Ed.)
2008, XIV+452 pp, ISBN 978-88-470-0871-3

38. S. Gabelli
Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
2008, XVI+410 pp, ISBN 978-88-470-0618-8

39. A. Quarteroni
Modellistica numerica per problemi differenziali (4a Ed.)
2008, XVI+560 pp, ISBN 978-88-470-0841-0

40. C. Canuto, A. Tabacco
Analisi Matematica II
2008, XVI+536 pp, ISBN 978-88-470-0873-1
2010, ristampa con modifiche

41. E. Salinelli, F. Tomarelli
Modelli Dinamici Discreti (2a Ed.)
2009, XIV+382 pp, ISBN 978-88-470-1075-8

42. S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino
Invito alle equazioni a derivate parziali
2009, XIV+440 pp, ISBN 978-88-470-1179-3

43. S. Dulli, S. Furini, E. Peron
Data mining
2009, XIV+178 pp, ISBN 978-88-470-1162-5

44. A. Pascucci, W.J. Runggaldier
Finanza Matematica
2009, X+264 pp, ISBN 978-88-470-1441-1

45. S. Salsa
Equazioni a derivate parziali – Metodi, modelli e applicazioni (2a Ed.)
2010, XVI+614 pp, ISBN 978-88-470-1645-3

46. C. D'Angelo, A. Quarteroni
Matematica Numerica – Esercizi, Laboratori e Progetti
2010, VIII+374 pp, ISBN 978-88-470-1639-2

47. V. Moretti
Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica – Operatori in spazi di Hilbert
2010, XVI+704 pp, ISBN 978-88-470-1610-1

48. C. Parenti, A. Parmeggiani
Algebra lineare ed equazioni differenziali ordinarie
2010, VIII+208 pp, ISBN 978-88-470-1787-0

49. B. Korte, J. Vygen
Ottimizzazione Combinatoria. Teoria e Algoritmi
2010, XVI+662 pp, ISBN 978-88-470-1522-7

50. D. Mundici
Logica: Metodo Breve
2011, XII+126 pp, ISBN 978-88-470-1883-9

51. E. Fortuna, R. Frigerio, R. Pardini
Geometria proiettiva. Problemi risolti e richiami di teoria
2011, VIII+274 pp, ISBN 978-88-470-1746-7

52. C. Presilla
Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile
2011, XII+324 pp, ISBN 978-88-470-1829-7

53. L. Grippo, M. Sciandrone
Metodi di ottimizzazione non vincolata
2011, XIV+614 pp, ISBN 978-88-470-1793-1

54. M. Abate, F. Tovena
Geometria Differenziale
2011, XIV+466 pp, ISBN 978-88-470-1919-5

55. M. Abate, F. Tovena
Curves and Surfaces
2011, XIV+390 pp, ISBN 978-88-470-1940-9

56. A. Ambrosetti
Appunti sulle equazioni differenziali ordinarie
2011, X+114 pp, ISBN 978-88-470-2393-2

57. L. Formaggia, F. Saleri, A. Veneziani
Solving Numerical PDEs: Problems, Applications, Exercises
2011, X+434 pp, ISBN 978-88-470-2411-3

58. A. Machì
Groups. An Introduction to Ideas and Methods of the Theory of Groups
2011, XIV+372 pp, ISBN 978-88-470-2420-5

59. A. Pascucci, W.J. Runggaldier
Financial Mathematics. Theory and Problems for Multi-period Models
2011, X+288 pp, ISBN 978-88-470-2537-0

60. D. Mundici
Logic: a Brief Course
2012, XII+124 pp, ISBN 978-88-470-2360-4

61. A. Machì
Algebra for Symbolic Computation
2012, VIII+174 pp, ISBN 978-88-470-2396-3

62. A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio
Calcolo Scientifico (5a ed.)
2012, XVIII+450 pp, ISBN 978-88-470-2744-2

63. A. Quarteroni
Modellistica Numerica per Problemi Differenziali (5a ed.)
2012, XVIII+628 pp, ISBN 978-88-470-2747-3

64. V. Moretti
Spectral Theory and Quantum Mechanics
With an Introduction to the Algebraic Formulation
2013, XVI+728 pp, ISBN 978-88-470-2834-0

65. S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino
A Primer on PDEs. Models, Methods, Simulations
2013, XIV+482 pp, ISBN 978-88-470-2861-6

66. V.I. Arnold
Real Algebraic Geometry
2013, X+110 pp, ISBN 978-3-642–36242-2

67. F. Caravenna, P. Dai Pra
Probabilità. Un'introduzione attraverso modelli e applicazioni
2013, X+396 pp, ISBN 978-88-470-2594-3

68. A. de Luca, F. D'Alessandro
Teoria degli Automi Finiti
2013, XII+316 pp, ISBN 978-88-470-5473-8

69. P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, M. Vianello
Meccanica Razionale
2013, XII+352 pp, ISBN 978-88-470-5696-3

70. E. Rosazza Gianin, C. Sgarra
Mathematical Finance: Theory Review and Exercises. From Binomial Model to Risk Measures
2013, X+278pp, ISBN 978-3-319-01356-5

71. E. Salinelli, F. Tomarelli
Modelli Dinamici Discreti (3a Ed.)
2014, XVI+394pp, ISBN 978-88-470-5503-2

72. C. Presilla
Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile (2a Ed.)
2014, XII+360pp, ISBN 978-88-470-5500-1

73. S. Ahmad, A. Ambrosetti
A Textbook on Ordinary Differential Equations
2014, XIV+324pp, ISBN 978-3-319-02128-7

74. A. Bermúdez, D. Gómez, P. Salgado
Mathematical Models and Numerical Simulation in Electromagnetism
2014, XVIII+430pp, ISBN 978-3-319-02948-1

75. A. Quarteroni
Matematica Numerica. Esercizi, Laboratori e Progetti (2a Ed.)
2013, XVIII+406pp, ISBN 978-88-470-5540-7

76. E. Salinelli, F. Tomarelli
Discrete Dynamical Models
2014, XVI+386pp, ISBN 978-3-319-02290-1

77. A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, P. Gervasio
Matematica Numerica (4a Ed.)
2014, XVIII+532pp, ISBN 978-88-470-5643-5

78. M. Manetti
Topologia (2a Ed.)
2014, XII+334pp, ISBN 978-88-470-5661-9

79. M. Iannelli, A. Pugliese
An Introduction to Mathematical Population Dynamics. Along the trail of Volterra and Lotka
2014, XIV+338pp, ISBN 978-3-319-03025-8

80. V. M. Abrusci, L. Tortora de Falco
Logica. Volume 1
2014, X+180pp, ISBN 978-88-470-5537-7

81. P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, M. Vianello
Meccanica Razionale (2a Ed.)
2014, XII+390pp, ISBN 978-88-470-5725-8

82. C. Canuto, A. Tabacco
Analisi Matematica I (4a Ed.)
2014, XIV+508pp, ISBN 978-88-470-5722-7

83. C. Canuto, A. Tabacco
Analisi Matematica II (2a Ed.)
2014, XII+576pp, ISBN 978-88-470-5728-9

La versione online dei libri pubblicati nella serie è disponibile su SpringerLink. Per ulteriori informazioni, visitare il sito: http://www.springer.com/series/5418