Grundkurs Mathematik

LEHRBUCH

Hannes Stoppel
Birgit Griese

Übungsbuch zur Linearen Algebra

Aufgaben und Lösungen

9. Auflage

Springer Spektrum

Grundkurs Mathematik

Berater
Martin Aigner,
Peter Gritzmann,
Volker Mehrmann,
Gisbert Wüstholz

Die Reihe „Grundkurs Mathematik“ ist die bekannte Lehrbuchreihe im handlichen kleinen Taschenbuch-Format passend zu den mathematischen Grundvorlesungen, vorwiegend im ersten Studienjahr. Die Bücher sind didaktisch gut aufbereitet, kompakt geschrieben und enthalten viele Beispiele und Übungsaufgaben.

In der Reihe werden Lehr- und Übungsbücher veröffentlicht, die bei der Klausurvorbereitung unterstützen. Zielgruppe sind Studierende der Mathematik aller Studiengänge, Studierende der Informatik, Naturwissenschaften und Technik, sowie interessierte Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II.

Die Reihe existiert seit 1975 und enthält die klassischen Bestseller von Otto Forster und Gerd Fischer zur Analysis und Linearen Algebra in aktualisierter Neuauflage.

Hannes Stoppel · Birgit Griese

Übungsbuch zur Linearen Algebra

Aufgaben und Lösungen

9., erweiterte Auflage

Springer Spektrum

Hannes Stoppel
Westfälische Wilhelms-Universität
Münster, Deutschland

Birgit Griese
Universität Paderborn
Deutschland

Grundkurs Mathematik
ISBN 978-3-658-14521-7 ISBN 978-3-658-14522-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-14522-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Seit die zehnte Auflage der *Linearen Algebra* von Gerd Fischer erschienen ist, die als Neuerung gegenber den älteren Auflagen viele Übungsaufgaben enthält, sind beim Verlag viele Anfragen nach den Lösungen dieser Aufgaben eingegangen. Auf Anregung von Frau Schmickler-Hirzebruch begann im Winter 96/97 die Arbeit an diesem Lösungsbuch.

Dennoch stehen wir der Veröffentlichung eines Buches, das nur aus Lösungen zu Übungsaufgaben besteht, skeptisch gegenüber, da die eigene Beschäftigung mit Problemen und viel eigenes Nachdenken für das Verständnis von Mathematik unverzichtbar sind. Das Nachschlagen von Lösungen in einem Buch macht nach dieser Überzeugung nur Sinn, wenn man sich vorher selbstständig und ausgiebig mit der Aufgabe auseinandergesetzt hat. Wir hoffen, daß unsere LeserInnen diese Disziplin besitzen. Unter diesen Voraussetzungen kann ein Lösungsbuch davor schützen, viel Zeit ohne viel Nutzen mit einer einzelnen Aufgabe zu vertun und so hoffentlich Frustrationen verhindern.

Dieses Buch ist jedoch auch für geübte MathematikerInnen von Interesse, denn wir haben auf folgendes besonderen Wert gelegt: Viele der Übungsaufgaben in der zehnten und elften Auflage der *Linearen Algebra* gewinnen im Zusammenhang mit Anwendungen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik an Bedeutung, von denen einE AnfängerIn freilich noch nichts wissen kann. Wir haben uns bemüht, so oft wie möglich auf solche Bezüge zu verweisen. Das soll zur Motivation beitragen, denn es platziert die lineare Algebra als Teilgebiet der Mathematik in dem Geflecht der vielen anderen Teildisziplinen an einer zentralen Stelle. In diesem Zusammenhang sind wir stets für weitere Anstöße offen und freuen uns über Anregungen unserer LeserInnen, die wir in einer späteren Auflage berücksichtigen können.

Das vorliegende Arbeitsbuch enthält die Aufgaben aus der elften Auflage der *Linearen Algebra* von Gerd Fischer, einige Ergänzungsaufgaben sowie deren Lösungen. Es kann auch mit der zehnten Auflage der *Linearen Algebra* benutzt werden. Kapitel, die mit einem Stern versehen sind, können beim ersten Durcharbeiten des Stoffes übergangen werden. Dasselbe gilt für Aufgaben mit Stern.

Danken wollen wir all denen, die uns bei der Herstellung dieses Buches unterstützt haben. An erster Stelle stehen der Verlag Vieweg und insbesondere Frau Schmickler-Hirzebruch, die dieses Projekt ermöglicht und unterstützt haben. Professor Gerd Fischer gilt besonderer Dank für die zahlreichen Gespräche und die Hilfe bei Details. Stefan Lache hat uns nicht nur durch das Mathematikstudium als Kommilitone und danach als Freund begleitet, sondern auch frühere Versionen dieses Buches sehr sorgfältig Korrektur gelesen und uns mit zahlrei-

chen Verbesserungshinweisen unterstützt. Jens Piontkowski hat Teile des Manuskriptes gewissenhaft durchgesehen und wertvolle Tipps gegeben. Volker Solinus hat nach schier endlosen Nörgeleien von unserer Seite die Bilder perfekt erstellt. Ohne diese Personen wäre das ganze Projekt sicher nicht zu einem guten Ende gelangt.

Düsseldorf, im November 1997 Hannes Stoppel und Birgit Griese

Vorwort zur 9. Auflage

Wenige Zeit nach der achten Auflage gibt es wieder eine neue Auflage. Die Zwischenzeit wurde umfangreich genutzt. Es gibt nun beinahe 25 neue Aufgaben. Manche sind zu Themenblöcken zusammengefasst, wie beispielsweise *algebraische Kurven*, *Möbius Transformation* oder *Codierung und Kryptographie*.

Im Laufe der Zeit haben sich zudem viele Ergänzungsaufgaben gesammelt, zwischen denen in einigen Fällen thematische Verbindungen existieren. Um den Überblick zu behalten, wurde am Ende des Buches ein Verzeichnis der Ergänzungsaufgaben mit den behandelten Themen eingefügt.

In dieser Auflage sind erstmalig sämtliche Aufgaben inklusive all ihrer Lösungen komplett enthalten. Bisherige Aufgaben und Lösungen wurden überarbeitet und ggf. ergänzt, das Literaturverzeichnis eingeschlossen. Hierfür bedanken wir uns auch bei unseren Leserinnen und Lesern für Hinweise.

Bedanken möchten wir uns insbesondere bei Dennis Jaschek, der Ideen für neue Aufgaben hatte und in vielen Gesprächen neue Blickweisen auf alte Aufgaben ermöglicht hat.

Wir wünschen viel Erfolg und Freude mit Übungen der Linearen Algebra und hoffen, dass sie die Schönheit der Mathematik sichtbar machen.

Gladbeck, im August 2016 Hannes Stoppel und Birgit Griese

Inhaltsverzeichnis

II Lösungen 83

Teil I

Aufgaben

Kapitel 0

Lineare Gleichungssysteme

Die erste Begegnung mit Aufgaben zur Linearen Algebra kann verwirren. Es ist oft nicht unmittelbar einzusehen, dass Zusammenhänge, die anschaulich klar und ersichtlich scheinen, überhaupt bewiesen werden müssen. Hier sollten wir uns ein für alle mal klar machen, dass eine Skizze oder ein Schaubild kein Beweis im streng mathematischen Sinne ist. Bisweilen kann eine Skizze eine Beweisidee viel besser deutlich machen als ein korrekt aufgeschriebener Beweis mit vielen Indizes und Fallunterscheidungen. Diese „Schlampigkeit“ dürfen wir uns aber höchstens leisten, wenn wir die Formalitäten beherrschen. Deshalb muss ein echter Beweis, um allgemein akzeptiert zu sein, manchmal sehr formell aussehen. Diese Formalität kann auch helfen, die Gedanken zu ordnen und den Beweis strukturiert aufzuschreiben.

Wenn wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen wollen, müssen wir uns zuvor klargemacht haben, wie er aufgebaut werden soll. Wie sollen wir vorgehen? Ist ein Widerspruchsbeweis (auch Kontraposition genannt) notwendig, oder kann die Behauptung direkt aus den Voraussetzungen gefolgert werden? Wie negiert man im Falle der Kontraposition eine Aussage? Wie können die Voraussetzungen und die Behauptung sinnvoll in eine mathematische Aussage umgesetzt werden? Was genau muss eigentlich gezeigt werden? Gibt es Vereinfachungen oder müssen Fallunterscheidungen gemacht werden? All diese Fragen werden wir im Lösungsteil behandeln, wenn sie konkret auftauchen.

0.3 Ebenen und Geraden im Standardraum $\mathbb{R}^3$

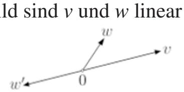
1. Zeigen Sie, dass für zwei Punkte $v, w \in \mathbb{R}^n$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

i) $v \neq 0$, und es gibt kein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $w = \rho \cdot v$.

ii) $w \neq 0$, und es gibt kein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $v = \rho \cdot w$.

iii) Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v + \mu w = 0$, so folgt notwendigerweise $\lambda = \mu = 0$.

Man nennt v und w *linear unabhängig*, falls eine der obigen Bedingungen erfüllt ist. v und w heißen *linear abhängig*, falls sie nicht linear unabhängig sind. Im untenstehenden Bild sind v und w linear unabhängig, v und w' linear abhängig.



2. a) Beweisen Sie, dass eine Teilmenge E des $\mathbb{R}^3$ genau dann eine Ebene ist, wenn es Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass v und w linear unabhängig sind und

$$E = u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w\,.$$

b) Finden Sie für die Ebene $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1\right\}$ eine Parametrisierung.

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_1

c) Geben Sie für die in Parameterdarstellung gegebene Ebene

$$E = (1,2,3) + \mathbb{R} \cdot (4,5,6) + \mathbb{R} \cdot (7,8,9)$$

eine beschreibende lineare Gleichung an.

3. Zeige Sie: Sind $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so gibt es genau eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die x, y und z enthält, nämlich

$$E = x + \mathbb{R} \cdot (x-y) + \mathbb{R} \cdot (x-z)\,.$$

0.4 Das Eliminationsverfahren von GAUSS

Lineare Gleichungssysteme sind in der linearen Algebra sehr wichtig. Man muss sie einfach lösen können. Zur weiteren Übung empfehlen wir daher die Ergänzungsaufgaben am Ende dieses Abschnittes.

1. Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{array}{rrrrcr} & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +6x_4 & = & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrcr} -6x_1 & +6x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & 2 \\ -9x_1 & +8x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ -3x_1 & +2x_2 & +\ x_3 & & = & 1 \\ -15x_1 & +14x_2 & +5x_3 & -4x_4 & = & 5 \end{array}$$

2. Geben Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems an, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

3. Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixdarstellung lösbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösung an.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$

4. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem auf einem Taschenrechner mit einer Rechengenauigkeit von n Stellen hinter dem Komma (Abschneiden weiterer Stellen ohne Rundung!) für $\varepsilon = 10^{-k}$ für größer werdendes $k \leqslant n$, und zwar einmal mit dem Pivot ε und einmal mit dem „maximalen Zeilenpivot“ 1 der ersten Spalte.

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & 2\,, \\ \varepsilon x+y & = & 1\,. \end{array}$$

Beschreiben Sie den geometrischen Hintergrund dieser Umformungen.

Ergänzungsaufgaben

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme.

E1.

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & -1 \\ 3x & -4y & +5z & = & 9 \\ -5x & +y & -7z & = & -21 \end{array}$$

E2.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 15 & -137 \\ 1 & 8 & -10 & 203 \\ -2 & -16 & 20 & -406 \end{array}\right)$$

E3.

$$\begin{array}{rrrrcr} 3a & -2b & +6c & -7d & = & -177 \\ a & +2b & -3c & +8d & = & 162 \\ -4a & +3b & -7c & +2d & = & 111 \\ -6a & -b & +2c & -d & = & -32 \end{array}$$

E4.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -6 & 8 & 2 \\ -3 & 2 & -7 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

E5.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 17 & -8 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & 8 & -1 & -1 & 14 \\ -2 & 7 & -1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

E6.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & 3 & -1 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 2 & -8 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

E7.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & -3 \\ -2 & t & -1 & 13 \\ -3 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

E8.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 6 & -5 & 21 \\ -3 & 2 & 1 & 3t \end{array}\right)$$

E9.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & -8 & 9 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & a & b & 0 \end{array}\right)$$

E10.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 8 & 2a \\ 3 & -4 & b & 11 \\ 17 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Die Matrizen in den folgenden Aufgaben enthalten *komplexe Zahlen* als Einträge, vgl. Beispiel 1.3.4 b). Hierbei steht $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ für die *imaginäre Einheit*.

E11.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 8+3\mathrm{i} & -24-10\mathrm{i} \\ 9 & 2\mathrm{i} & 7-\mathrm{i} & -1+14\mathrm{i} \\ 2 & 4+\mathrm{i} & 6+10\mathrm{i} & -9-31\mathrm{i} \end{array}\right)$$

E12.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 3 & 5+2\mathrm{i} \\ -1 & 2-\mathrm{i} & 3 & \mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} \\ 7 & 8+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 9 & 16+20\mathrm{i} \\ 3\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 10+\mathrm{i} & 2 & 11-2\mathrm{i} \end{array}\right)$$

E13.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathrm{i} & 3 & 2+\mathrm{i} & -7-\mathrm{i} & 0 \\ 9 & 4-\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 8 & 0 \end{array}\right)$$

E14.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1+\mathrm{i} & -4 & 5\mathrm{i} & -21\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & -5 & 21 \\ 8 & -2\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} & 7+9\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 & 3 & -\mathrm{i} & -2+11\mathrm{i} \end{array}\right)$$

E15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & \mathrm{i} & -1 & 10+4\mathrm{i} \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 5-\mathrm{i} \\ -4 & 12\mathrm{i} & -7 & 1+\mathrm{i} & -33-10\mathrm{i} \end{array}\right)$$

0.5 Geraden und Quadratische Kurven im $\mathbb{R}^2$

Ergänzungsaufgaben

Die Visualisierung von Objekten und Zusammenhängen ist der Schlüssel zum Verständnis. Dies kann man gerade auch für Geraden und quadratische Kurven üben. Aus diesem Grund haben wir einen entsprechenden Abschnitt ergänzt, der eine Einführung in diese Kurven enthält sowie einen weiteren Blick auf Geraden im Raum wirft. Ferner handelt es sich bei Kreisen, Ellipsen und Hyperbeln um *Quadriken*, die in den Ergänzungsaufgaben E12 bis E14 in Abschnitt 5.4 betrachtet werden.

Geraden

E1.

a) Erklären Sie, warum durch $2x-3y+24=0$ eine Gerade gegeben ist.
b) Notieren Sie eine vektorielle Schreibweise auf dieser Geraden.
c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden aus Teil a) mit den Achsen des Koordinatensystems.

Kreise

E2. Der Kreis vom Radius r um den Punkt ${}^t(x_0,y_0)$ sind gegeben durch

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\,. \qquad \circledast$$

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises zur Gleichung

$$x^2-4x+y^2+6y=12\,. \qquad \circledast\circledast$$

b) Notieren Sie eine mögliche Parametrisierung des Kreises aus Teil a).

Ellipsen

E3. Eine Ellipse ist gegeben durch $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mit $a,b\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ellipse mit den Achsen des Koordinatensystems für die Fälle $a=1$ und $b=2$.
b) Geben Sie eine Parametrisierung der Ellipse an.

E4. Gegeben sei eine Ellipse. Zwei Punkte $F_1(-e,0)$ und $F_2(e,0)$ heißen *Brennpunkte* der Ellipse, wenn $e^2=a^2-b^2$ gilt. Den Abstand e der Brennpunkte vom Ursprung nennt man *lineare Exzentrizität* der Ellipse. Ferner bezeichnet man die *numerische Exzentrizität* (in Zukunft einfach Exzentrizität) durch $\varepsilon=\frac{e}{a}$.

Jeder Punkt $M(x,y)$ der Ellipse besitzt einen Abstand r_1 vom Punkt F_1 und einen Abstand r_2 von F_2, vgl. Abbildung 0.1.

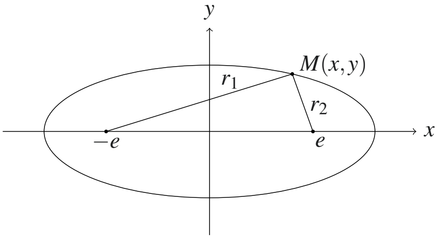


Bild 0.1: Abstände eines Punktes der Ellipse von den Brennpunkten

Es stellt sich die Frage, wie sich r_1 und r_2 bestimmen lassen. Dies wird jetzt in Angriff genommen. (Eine Bedeutung der Längen r_1 und r_2 liegt unter Anderem darin, dass sich mit einem Faden der Länge $r_1 + r_2$ eine Ellipse zeichnen lässt.)

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$r_1 = a + \varepsilon \cdot x, \tag{0.1}$$

$$r_2 = a - \varepsilon \cdot x. \tag{0.2}$$

b) Für jeden Punkt einer Ellipse gilt $r_1 + r_2 = 2a$.

c) In Abbildung 0.2 ist an den Stellen $-\frac{a}{\varepsilon}$ und $\frac{a}{\varepsilon}$ jeweils die *Direktrix* (auch *Leitlinie* genannt). Ein Punkt $M(x,y)$ einer Ellipse besitzt jeweils einen Abstand d_1 und d_2 von den Direktricen.
Zeigen Sie, dass $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass es sich bei der Lösungsmenge der Gleichung
$$2x^2 + 4x + 3y^2 - 12y = 1$$
um eine Ellipse handelt. Untersuchen Sie diese Ellipse.

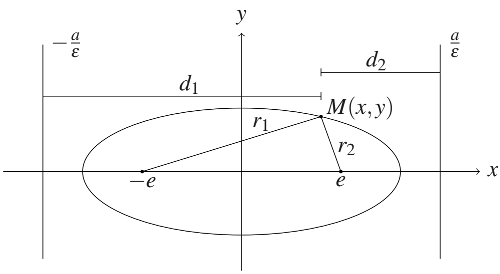


Bild 0.2: Abstände eines Punktes von den Direktricen einer Ellipse

Hyperbeln

E5. Gegeben seien die Gleichungen

i) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ und
ii) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = -1$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen mit den Achsen.
b) Stellen Sie die so beschriebenen Punktmengen graphisch dar.

Hinweis. Wir empfehlen für derartige Aufgaben `wolframalpha.com`.

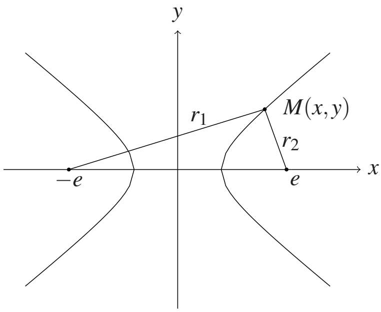


Bild 0.3: Abstände eines Punktes der Hyperbel von den Brennpunkten

E6. Ähnlich zur Ellipse betrachten wir für allgemeine Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die *lineare Exzentrizität e* mit $e^2 = a^2 + b^2$ und die *numerische Exzentrizität* (im Zukunft einfach Exzentrizität) $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Außerdem haben wir die Brennpunkte $F_1(-e,0)$ und $F_2(e,0)$.

Wie in Abbildung 0.3 werden zu einem Punkt $M(x,y)$ der Hyperbel die Abstände des Punktes zu den Brennpunkten durch r_1 und r_2 bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass

$$r_1 = x \cdot \varepsilon + a\,, \tag{0.3}$$
$$r_2 = x \cdot \varepsilon - a \tag{0.4}$$

für Punkte M auf der rechten Linse bzw. $r_1 = -(x \cdot \varepsilon + a)$ und $r_2 = -(x \cdot \varepsilon - a)$ für Punkte auf der linken Linse der Hyperbel gilt.

b) Für jeden Punkt auf einer Hyperbel gilt

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a & \text{für Punkte auf der linken Seite} \\ -2a & \text{für Punkte auf der rechten Seite} \end{cases}$$

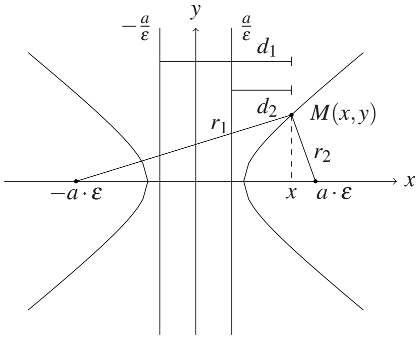


Bild 0.4: Abstände eines Punktes der Hyperbel von den Brennpunkten

c) In Abbildung 0.4 sind *Direktrizen* (oder *Leitlinien*) d_1 und d_2 der Hyperbel eingezeichnet. Zeigen Sie, dass für die Abstände des Punktes $M(x,y)$ der Hyperbel zu den Direktrizen gilt:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon\,.$$

d) Zeigen Sie, dass $y = \frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$ Asymptoten der Hyperbeln sind (vgl. Abbildung 0.5).

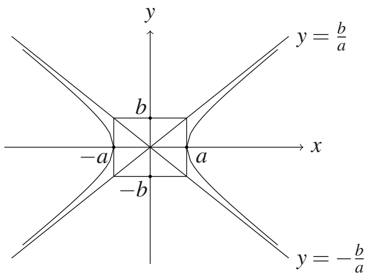


Bild 0.5: Annäherung der Hyperbel an die Asymptoten

Kapitel 1

Grundbegriffe

Wie schon der Titel dieses Kapitels verrät, werden hier grundlegende Begriffe erklärt und eingeübt. Dabei handelt es sich nur in den Teilen 1.4 bis 1.6 um spezielle Grundlagen der linearen Algebra. 1.1 bis 1.3 gehören mit ihren zum Teil klassischen Aufgaben (und Lösungen) zur Grundbildung und könnten daher einigen unserer LeserInnen, die bereits gewisse Vorkenntnisse haben, bekannt oder sogar geläufig sein. Sollte das nicht der Fall sein, ist hier eine gute Gelegenheit, bisher Versäumtes nachzuholen bzw. zu vertiefen. Unsere Lösungen sind in der Regel ausführlich gehalten, so dass sie auch AnfängerInnen ausreichend Hilfestellung bieten können.

1.1 Mengen und Abbildungen

1. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Operationen mit Mengen:

a) $X \cap Y = Y \cap X$, $X \cup Y = Y \cup X$,
b) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$, $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$,
c) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,
d) $X \smallsetminus (M_1 \cap M_2) = (X \smallsetminus M_1) \cup (X \smallsetminus M_2)$, $X \smallsetminus (M_1 \cup M_2) = (X \smallsetminus M_1) \cap (X \smallsetminus M_2)$.

2. Sei $f\colon\ X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Ist $M_1 \subset M_2 \subset X$, so folgt $f(M_1) \subset f(M_2)$.
Ist $N_1 \subset N_2 \subset Y$, so folgt $f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2)$.
b) $M \subset f^{-1}(f(M))$ für $M \subset X$, $\quad f(f^{-1}(N)) \subset N$ für $N \subset Y$.
c) $f^{-1}(Y \smallsetminus N) = X \smallsetminus f^{-1}(N)$ für $N \subset Y$.
d) Für $M_1, M_2 \subset X$ und $N_1, N_2 \subset Y$ gilt:
$f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$, $\quad f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$,
$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$, $\quad f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$.
Finden Sie ein Beispiel, in dem $f(M_1 \cap M_2) \neq f(M_1) \cap f(M_2)$ gilt!

3. Seien $f\colon\ X \to Y$, $g\colon\ Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f\colon\ X \to Z$ die Komposition von f und g. Dann gilt:

a) Sind f und g injektiv (surjektiv), so ist auch $g \circ f$ injektiv (surjektiv).
b) Ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv), so ist auch f injektiv (g surjektiv).

4. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f_1\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$, $\quad$ b) $f_2\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2-1$,
c) $f_3\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+2y, 2x-y)$,

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_2

5. Zwei Mengen X und Y heißen *gleichmächtig* genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon\ X \to Y$ gibt. Eine Menge X heißt *abzählbar unendlich*, falls X und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich sind.
b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar unendlich ist.
c) Für eine nichtleere Menge M sei $\mathrm{Abb}\,(M,\{0,1\})$ die Menge aller Abbildungen von M nach $\{0,1\}$. Zeigen Sie, dass M und $\mathrm{Abb}\,(M,\{0,1\})$ nicht gleichmächtig sind.

6. Ein Konferenzhotel für Mathematiker hat genau $\mathbb{N}$ Betten. Das Hotel ist bereits voll belegt, aber die Mathematiker lassen sich nach Belieben innerhalb des Hotels umquartieren. Das Hotel soll aus wirtschaftlichen Gründen stets voll belegt sein, und wenn möglich, sollen alle neu ankommenden Gäste untergebracht werden. Was macht man in folgenden Fällen?

a) Ein weiterer Mathematiker trifft ein.
b) Die Insassen eines Kleinbusses mit n Plätzen suchen Unterkunft.
c) Ein Großraumbus mit $\mathbb{N}$ Personen kommt an.
d) n Großraumbusse treffen ein.
e) $\mathbb{N}$ Großraumbusse fahren vor.

Ergänzungsaufgabe

E1. Es seien M und N endliche Mengen. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Abb}\,(M,N)$ endlich ist, und bestimmen Sie die Anzahl ihrer Elemente.

1.2 Gruppen

Bevor wir uns mit den Aufgaben zu Gruppen beschäftigen, sollten wir uns nochmals vor Augen führen, dass man Gruppen multiplikativ oder additiv schreiben kann. (Letzteres tut man üblicherweise, wenn eine Gruppe kommutativ ist.) Das ist deshalb so wichtig, weil die Gruppenaxiome unterschiedlich aussehen, je nachdem, wie die Verknüpfung geschrieben ist. Das neutrale Element einer multiplikativen Gruppe heißt Eins, das einer additiven Gruppe null. Entsprechend werden die inversen Elemente mit a^{-1} bzw. mit $-a$ bezeichnet.

1. Sei G eine Gruppe mit $aa = e$ für alle $a \in G$, wobei e das neutrale Element von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

2. Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit höchstens vier Elementen. Welche davon sind abelsch?

3. Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

a) $f_1\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto 2z\,,$ b) $f_2\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto z+1\,,$
c) $f_3\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^*,\ z \mapsto z^2+1\,,$ d) $f_4\colon\ \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*,\ z \mapsto |z|\,,$
e) $f_5\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z|\,,$ f) $f_6\colon\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ z \mapsto z^p\,.$

Dabei ist die Verknüpfung in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jeweils die Addition, in $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ und $\mathbb{C}^*$ jeweils die Multiplikation und p eine Primzahl.

4. Sei G eine Gruppe und $A \subset G$. Die von A erzeugte Untergruppe $\operatorname{erz}(A)$ ist definiert durch

$$\operatorname{erz}(A) = \{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n\colon\ n \in \mathbb{N}, a_i \in A \text{ oder } a_i^{-1} \in A\}.$$

$\operatorname{erz}(A)$ ist somit die Menge aller endlichen Produkte von Elementen aus A bzw. deren Inversen. Zeigen Sie, dass $\operatorname{erz}(A)$ die „kleinste“ Untergruppe von G ist, die A enthält, d.h.

i) $\operatorname{erz}(A) \subset G$ ist eine Untergruppe.
ii) Ist $U \subset G$ eine Untergruppe mit $A \subset U$, so folgt $\operatorname{erz}(A) \subset U$.

Wie sieht $\operatorname{erz}(A)$ aus für den Fall, dass A einelementig ist?

5. Für eine natürliche Zahl $n \geqslant 3$ sei $d \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^2)$ die Drehung um den Winkel $2\pi/n$ und $s \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^2)$ die Spiegelung an der x-Achse. Die *Diedergruppe* D_n ist definiert durch

$$\mathrm{D}_n := \operatorname{erz}(\{s,d\}).$$

a) Wie viele Elemente hat D_n?
b) Geben Sie eine Gruppentafel von D_3 an.

6. Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, falls es ein $g \in G$ gibt mit $G = \operatorname{erz}(\{g\})$.

a) Wie sieht die Gruppentafel einer endlichen zyklischen Gruppe aus?
b)* Zeigen Sie, dass jede zyklische Gruppe entweder isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$ geeignet) ist.

7. Zeigen Sie: Ist G eine abelsche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist durch

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G erklärt. Sei $G/H := G/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen, und die zu $x \in G$ gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\overline{x}$ bezeichnet. Sind $x, x', y, y' \in G$ mit $x \sim x'$ und $y \sim y'$, so ist $xy \sim x'y'$. Somit kann man auf G/H durch

$$\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{xy}$$

eine Verknüpfung erklären.

Zeigen Sie, dass G/H auf diese Weise zu einer abelschen Gruppe wird und für $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$ genau die in 1.2.7 definierten zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entstehen.

8. Man gebe ein Beispiel einer nicht assoziativen Verknüpfung aus der Menge $G = \{1,2,3\}$, so dass für alle $a \in G$ die Translationen τ_a und ${}_a\tau$ aus 1.2.4 surjektiv sind.

Ergänzungsaufgaben

E1. Es sei $n\mathbb{Z} = \{n \cdot a\colon\ a \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ mit $\bar{a} = a + m\mathbb{Z}$ wie in [Fi1], Abschnitt 1.2.7. Außerdem seien $m, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ mit $n|m$, d.h. n ist ein Teiler von m. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe bzgl. der Addition,
b) Die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad a + n\mathbb{Z} \mapsto \tfrac{m}{n} \cdot a + m\mathbb{Z},$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.
Mit Hilfe dieser Abbildung kann $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auch als *Untergruppe* von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ betrachtet werden.

E2. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z},+)$.

E3. U_1, U_2 seien Untergruppen einer Gruppe $(G,\cdot)$. Zeigen Sie:

a) $U_1 \cup U_2$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

b) Wenn $U_1 \neq G$ und $U_2 \neq G$, dann ist auch $U_1 \cup U_2 \neq G$.

c) Es sei $U_1U_2 := \{u_1u_2\colon\ u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. Dann gilt: $U_1U_2 \subseteq G$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $U_1U_2 = U_2U_1$.

E4. Zeigen Sie, dass $(G,\cdot)$ für $G = \{e,a,b,c\}$ mit der Verknüpfung

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

eine Gruppe bildet. Sie heißt *Klein'sche Vierergruppe*.

E5. Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit höchstens vier Elementen abelsch ist.

Drehungen und Spiegelungen

E6. Das in Abbildung 1.1 dargestellte Quadrat kann auf unterschiedliche Weisen auf sich selbst abgebildet werden. Dann liegen die Ecken an anderen Stellen. (Beispielsweise Drehung um 90°. Dann liegt die Ecke 1 dort, wo vorher 2 lag.) Solche Abbildungen nennt man *Deckabbildungen*. Einige dieser Abbildungen sind:

- Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn – Abbildung d_{90},
- Drehung um 180° gegen den Uhrzeigersinn – Abbildung d_{180},
- Drehung um 270° gegen den Uhrzeigersinn – Abbildung d_{270},
- Drehung um 0° – Abbildung id.

Unter einer Drehung wird jede Ecke auf eine andere abgebildet. Das lässt sich mithilfe einer Tabelle darstellen, in deren erster Zeile sich die Zahlen vor der Drehung befinden, wohingegen in der zweiten Zeile die Verteilung nach der Drehung notiert wird. So lässt sich beispielsweise die Drehung d_{90} durch $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ beschreiben. Es handelt sich um Spezialfälle von *Permutationen*, bei denen die Elemente eines Tupels untereinander vertauscht werden. Für Genaueres zu Permutationen vgl. [Fi1], Abschnitt 3.2.

a) Notieren Sie die vier Drehungen in der Schreibweise für Permutationen. (Eigentlich nur noch drei, da eine bereits oben notiert ist.)

b) Zeigen Sie, dass diese Abbildungen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe bilden. Untersuchen Sie, ob es sich bei der Menge D_4 der Drehungen mit der Hintereinanderausführung um eine abelsche Gruppe handelt. Nutzen Sie dafür eine Tabelle

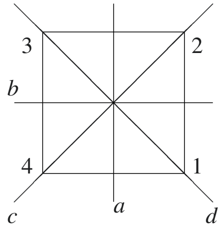


Bild 1.1: Ein Quadrat kann durch Drehungen und Spiegelungen auf sich selbst abgebildet werden

wie diese:

$\circ$	id	d_{90}	d_{180}	d_{270}
id				
d_{90}				
d_{180}				
d_{270}				

Erklären Sie, dass es sich bei der Menge D_4 der Drehungen mit der Hintereinanderausführung um Gruppe handelt.

c) Zusätzlich seien die Spiegelungen S_4 gegeben:

- Spiegelung an der senkrechten Achse a – Abkürzung s_a,
- Spiegelung an der waagerechten Achse b – Abkürzung s_b,
- Spiegelung an der Diagonale c – Abkürzung s_c,
- Spiegelung an der Diagonale d – Abkürzung s_d,
- id von der Drehungen.

Zeigen Sie an Beispielen, dass die Spiegelungen S_4 in Verbindung mit der Hintereinanderausführung keine Gruppe bilden können.

d) Welche Struktur trägt die Vereinigungsmenge $D_4 \cup S_4$? Beweisen Sie Ihre Annahme.

Weierstraß-Kurven
spielten und spielen in unterschiedlichen Bereichen der Mathematik und der Anwendungen eine Rolle. So waren sie für den Beweis der *Fermatschen Vermutung* von Bedeutung. Ferner – und darauf werden wir hier eingehen – finden sie Anwendung in der Codierung und Kryptographie. Durch die dortige Anwendung zeigt sich etwa seit den 1980er Jahren eine Verbindung zwischen geometrischen Objekten der Mathematik und der Praxis.

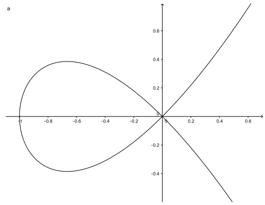


Bild 1.2: Kurve mit Singularität im Ursprung

In der Codierung und der Kryptographie spielen Weierstraß-Kurven eine Rolle. Dahinter verbergen sich die Wertepaare $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, welche die Gleichung

$$E: \; y^2 = x^3 + a \cdot x + b \quad \text{mit } a, b \in K$$

eines endlichen Körpers K erfüllen. Durch den hier betrachteten Algorithmus zur Codierung und Decodierung lässt sich eine Gruppenstruktur auf den elliptischen Kurven definieren.

Für die Codierung brauchbare elliptische Kurven müssen eine weitere Bedingung erfüllen, die *Quadratfreiheit*. Dies bedeutet, dass es keine $c, d \in K$ geben darf mit

$$x^3 + ax + b = (x + c)^2 (x + d)\,.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die elliptische Kurve keine *Singularität* besitzen darf, d.h. keinen Schnittpunkt der Äste. Ein Beispiel für eine Singularität ist in Abbildung 1.2 zu sehen. In diesem Fall kann ein Problem durch mangelnde Eindeutigkeit auftreten.

Ab jetzt setzen wir voraus, dass $\operatorname{char}(K) \neq 2, 3$ für die betrachteten Körper $K \subset \mathbb{Z}$ gilt.

E7. Zeigen Sie, dass für eine Weierstraß-Kurve die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) $4a^3 + 27b^2 \neq 0$,

b) die Quadratfreiheit.

Aus der Schulzeit kennt man den *Satz von Vieta* für Polynome vom Grad 2:
Es seien $p, q \in \mathbb{R}$ und $x^2 + p \cdot x + q$ ein Polynom. Für Lösungen x_1, x_2 der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ gilt dann

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \textit{und} \quad q = x_1 \cdot x_2\,.$$

Die Formel lässt sich auf Polynome beliebigen Grades in $\mathbb{C}[x]$ wie folgt übertragen:
Für ein Polynom

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

existieren Nullstellen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)\,.$$

Dabei gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$a_i = (-1)^{n-i} \cdot p_{n-i} \quad mit \quad p_k := \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} \,.$$

E8. Beweisen Sie diese Gleichungen.

Eine graphisch darstellbare Addition von Punkten im $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe einer Kurve ist wie folgt definierbar:

Man hält eine Weierstraß-Kurve E fest, wählt zwei Punkte P und Q auf der Kurve und legt dann durch P und Q eine Gerade. Für den Fall, dass die Gerade einen dritten Schnittpunkt S mit der Kurve besitzt, spiegelt man diesen Punkt an der x-Achse und erreicht damit einen Punkt R. Diesen Punkt R definiert man als *Summe* von P und Q, und schreibt $R := P \oplus Q$.

Wir werden zeigen, dass die Punkte einer Weierstraß-Kurve mit dieser Addition eine Gruppe bilden. Hierfür müssen wir die Eigenschaften dieser Addition genau untersuchen, wobei Fallunterscheidungen notwendig sind, und Spezialfälle auftreten.

Im Fall $P = Q$ legt man an P eine Tangente an den Graphen der elliptischen Kurve und nimmt den weiteren Schnittpunkt der Gerade mit der Kurve als $P \oplus P =: 2 \odot P$.

Weitere spezielle Fälle ergeben, wenn die Tangente an die Kurve parallel zur y-Achse verläuft und damit keinen weiteren Schnittpunkt mit der Kurve im Endlichen besitzt oder die Schnittpunkte P und Q übereinander in Koordinatensystem liegen, womit die Gerade durch sie keinen weiteren Schnittpunkt mit der Kurve im Endlichen besitzt. Aus diesem Grund nimmt man den Punkt $\mathscr{O}$ im Unendlichen hinzu, den man ferner zum neutralen Element der Addition macht.

Es ergeben sich damit die folgenden Regeln der Addition:

1. Hat man zwei Punkte P und Q auf einer Kurve, die beide nicht im Unendlichen liegen und ungleich sind, so dass die Gerade $\overline{PQ}$ die Kurve in einem weiteren Punkt S schneidet, wird $P \oplus Q := R := -S$ definiert.

2. Ist $P \neq \mathscr{O}$, also ein Punkt im endlichen Bereich, so hat P Koordinaten (x_P, y_P). Man definiert $-P$ durch $-(x_P, y_P) := (x_P, -y_P)$, was anschaulich der Spiegelung des Punktes an der x-Achse entspricht.

   Aus Symmetriegründen einer Weierstraß-Kurve liegt $-P$ genau dann in der Kurve, wenn P in der Kurve liegt.

3. Ist $P = \mathscr{O}$ (also der Punkt im Unendlichen), so definiert man $-P := \mathscr{O}$ und $P \oplus Q := Q$ für alle $Q \in E$. Damit ist $\mathscr{O}$ ein *neutrales Element der Addition*.

4. Gilt $Q = -P$, wird $P \oplus Q := \mathscr{O}$ gesetzt.

5. Falls $P = Q$ gilt, wähle als Gerade die Tangente an P. S ist dann die zweite Schnittpunkt mit der Kurve. Dann definiert man $P \oplus Q := R = -S$.

6. Für den Fall, dass die Gerade in einem der Fälle 1 bis 5 parallel zur y-Achse verläuft, wählt man $R = \mathscr{O}$.

E9. Weisen Sie nach, dass durch diese Verknüpfung $\oplus$ eine Gruppe auf den Weierstraß-Kurven

$$E:\ y^2 = x^3 + a \cdot x + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

definiert wird, die keine Singularität besitzen. Genauer gesagt: Gegeben seien $R(x_R, y_R)$, $P(x_P, y_P)$ und $Q(x_Q, y_Q)$ mit $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ und $R = P \oplus Q$. Zeigen Sie:

a) Für den Fall $P \neq Q$ und $x_P \neq x_Q$ gilt für $\lambda = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

$$\begin{aligned} x_R &= \lambda^2 - x_P - x_Q \\ y_R &= -y_P + \lambda(x_P - x_R)\,, \end{aligned}$$

Im Fall $P = Q$ gilt für $\lambda = \frac{3x_P^2 + a}{2y_P}$

$$\begin{aligned} x_R &= \lambda^2 - 2x_P\,, \\ y_R &= -y_P + \lambda(x_P - x_R)\,. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Menge der Weierstraß-Kurven mit $\oplus$ eine abelsche Gruppe bildet.

Hinweis: Verwenden Sie dabei den Satz von Vieta.

E10. Es sei p prim, $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, und

$$E:\ y^2 = x^3 + a \cdot x + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z}_p\,.$$

eine Weierstraß-Kurve ohne Singularität. Gegeben seien $R(x_R, y_R)$, $P(x_P, y_P)$ und $Q(x_Q, y_Q)$ mit $x_i, y_j \in \mathbb{Z}_p$. Zeigen Sie für $R = P \oplus Q$:

a) Für den Fall $P \neq Q$ gilt gilt für $\lambda = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \bmod p$

$$\begin{aligned} x_R &= \lambda^2 - x_P - x_Q \bmod p \\ y_R &= -y_P + \lambda(x_P - x_R) \bmod p\,. \end{aligned}$$

Im Fall $P = Q$ gilt für $\lambda = \frac{3x_P^2 + a}{2y_P} \bmod p$

$$\begin{aligned} x_R &= \lambda^2 - 2x_P \bmod p\,, \\ y_R &= -y_P + \lambda(x_P - x_R) \bmod p\,. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Menge der Weierstraß-Kurven mit $\oplus$ eine abelsche Gruppe ist.

1.3 Ringe, Körper und Polynome

1. Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Körper mit drei bzw. vier Elementen.

2. K und K' seien zwei Körper und $\varphi\colon\ K \to K'$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ entweder injektiv oder der Nullhomomorphismus ist.

3. Ist R ein Ring, M eine beliebige nichtleere Menge und $S = \operatorname{Abb}(M; R)$ die Menge aller Abbildungen von M nach R, so ist auf S durch

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m)\,, \quad (f \cdot g)(m) := f(m) \cdot g(m)\,,$$

eine Addition und eine Multiplikation erklärt.

a) Zeigen Sie, dass S auf diese Weise zu einem Ring wird.
b) Ist S ein Körper, falls R ein Körper ist?

4.* Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es einen Körper mit p^n Elementen gibt.

5. Sei K' ein Körper und K ein Unterkörper von K'.
Zeigen Sie: Sind $f, g \in K[t]^*$, $q \in K'[t]$ mit $f = qg$, so folgt bereits $q \in K[t]$.

6. Sei K ein Körper und $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n \in K$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $f \in K[t]$ vom Grad $\leqslant n$ gibt, so dass $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$.
Hinweis: Konstruieren Sie zuerst Polynome $g_k \in K[t]$ vom Grad $\leqslant n$ mit

$$g_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k\,, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k\,. \end{cases}$$

7. Seien $f, g \in \mathbb{C}[t]$ Polynome mit $\mu(f, \lambda) \leqslant \mu(g, \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann f ein Teiler von g ist. Gilt diese Aussage auch in $\mathbb{R}[t]$?

8. Sei K ein Körper und $\widetilde{\ }\colon\ K[t] \to \mathrm{Abb}\,(K, K)$, $\quad f \mapsto \widetilde{f}$, die Abbildung aus 1.3.5, die jedem Polynom f die zugehörige Abbildung $\widetilde{f}$ zuordnet. Zeigen Sie, dass $\widetilde{\ }$ surjektiv, aber nicht injektiv ist, falls der Körper K endlich ist.

9. Analog zu 1.3.5 definiert man ein *Polynom* mit Koeffizienten über einem Körper K in *n Unbestimmten* $t_1, \ldots, t_n$ als einen formalen Ausdruck der Gestalt

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k} a_{i_1 \ldots i_n} \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n}\,,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und $a_{i_1 \ldots i_n} \in K$. $K[t_1, \ldots, t_n]$ bezeichne die Menge all solcher Polynome. Wie für Polynome in einer Unbestimmten kann auch in $K[t_1, \ldots, t_n]$ eine Addition und eine Multiplikation erklärt werden. Sind $f, g \in K[t_1, \ldots, t_n]$, so erfolgt die Addition von f und g koeffizientenweise und die Multiplikation wieder durch formales Ausmultiplizieren.

a) Finden Sie Formeln für die Addition und Multiplikation von Polynomen in $K[t_1, \ldots, t_n]$, und zeigen Sie, dass $K[t_1, \ldots, t_n]$ auf diese Weise zu einem nullteilerfreien, kommutativen Ring wird.

Ein Polynom $h \in K[t_1, \ldots, t_n] \smallsetminus \{0\}$ heißt *homogen* (vom *Grad d*), falls

$$h = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = d} a_{i_1 \ldots i_n} \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n}\,.$$

b) Für ein homogenes Polynom $h \in K[t_1, \ldots, t_n]$ vom Grad d gilt:

$$h(\lambda t_1, \ldots, \lambda t_n) = \lambda^d \cdot h(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{für alle } \lambda \in K\,.$$

c) Ist K unendlich und $f \in K[t_1, \ldots, t_n] \smallsetminus \{0\}$, so folgt aus

$$f(\lambda t_1, \ldots, \lambda t_n) = \lambda^d \cdot f(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{für alle } \lambda \in K\,,$$

dass f homogen vom Grad d ist.

d) Ist h_1 homogen von Grad d_1 und h_2 homogen vom Grad d_2, so ist $h_1 \cdot h_2$ homogen vom Grad $d_1 + d_2$.

10. Sei K ein Körper und $K[t]$ der Polynomring in einer Unbestimmten.

a) Zeigen Sie, dass in der Menge $K[t] \times (K[t] \smallsetminus \{0\})$ durch
$$(g,h) \sim (g',h') \Leftrightarrow gh' = g'h$$
eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

$K(t)$ sei die Menge der Äquivalenzklassen. Die zu (g,h) gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\frac{g}{h}$ bezeichnet. Somit ist $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \Leftrightarrow gh' = g'h$.

b) Zeigen Sie, dass in $K(t)$ die Verknüpfungen
$$\frac{g}{h} + \frac{g'}{h'} := \frac{gh' + hg'}{hh'}, \quad \frac{g}{h} \cdot \frac{g'}{h'} := \frac{gg'}{hh'},$$
wohldefiniert sind (vgl. 1.2.7).

c) Zeigen Sie schließlich, dass $K(t)$ mit diesen Verknüpfungen zu einem Körper wird.

Man nennt $K(t)$ den *Körper der rationalen Funktionen*.

11. Was folgt aus der Vorzeichenregel von DESCARTES für das Polynom $t^n + 1$?

12. Man folgere die spezielle Vorzeichenregel aus der Vorzeichenregel von DESCARTES.

Ergänzungsaufgaben

E1. R sei ein kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie:

a) Die Menge $R[t]$ der Polynome mit Koeffizienten aus R ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

b) Ist R nullteilerfrei, so folgt: Für beliebige $f,g \in R[t]$ mit $\deg f = n$ und $\deg g = m$ gilt $\deg f \cdot g = n + m$.

c) Zeigen Sie, dass die Aussage von Teil b) nicht gilt, falls R nicht nullteilerfrei ist, d.h. finden Sie einen nicht nullteilerfreien Ring und Polynome $f,g \in R[t]$ mit $\deg f = n$, $\deg g = m$ und $\deg f \cdot g < n + m$.

E2. $R \neq \{0\}$ sei ein Ring, in dem für alle $r \in R$ die Gleichung $r^2 = r$ gilt. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\operatorname{char}(R) = 2$.

b) R ist kommutativ.

Definition. Ein Ring R heißt *Integritätsring*, wenn er außer der Null keine Nullteiler besitzt, d.h. für alle $r,s \in R$ mit $r \cdot s = 0$ gilt $r = 0$ oder $s = 0$.

c) Wenn R ein Integritätsring ist, dann ist R der Körper mit zwei Elementen.

Einheitengruppe

E3. $(R,+,\cdot)$ sei ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *Einheit*, wenn ein $b \in R$ existiert mit $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

a) Zeigen Sie, dass
$$R^\times := \{a \in R\colon\ a \text{ ist Einheit}\}$$
eine Gruppenstruktur bzgl. der Multiplikation in R bildet. Man bezeichnet $(R^\times, \cdot)$ als *Einheitengruppe*.

b) Zeigen Sie, dass für einen kommutativen Ring R genau dann $R^\times = R \smallsetminus \{0\}$ gilt, wenn R ein Körper ist.
Überlegen Sie sich, welche algebraische Strukturen R besitzt, wenn die Multiplikation nicht kommutativ ist.

E4. Seien i die imaginäre Einheit und $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] := \{a + \mathrm{i} \cdot b \colon\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ bzgl. der aus $\mathbb{C}$ übertragenen Multiplikation ein Ring ist. Er heißt der *Ring der Gaußschen Zahlen*.
b) Weisen Sie nach, dass die Abbildung
$$\delta \colon\ \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}, \quad a + \mathrm{i}b \mapsto a^2 + b^2,$$
der *Norm* multiplikativ ist, d.h. für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \smallsetminus \{0\}$ gilt $\delta(z_1 \cdot z_2) = \delta(z_1) \cdot \delta(z_2)$.
c) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

E5. Zeigen Sie, dass es keinen Ring mit fünf Elementen geben kann.

1.4 Vektorräume

1. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

a) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x_1 = x_2 = 2x_3\right\} \subset \mathbb{R}^3$.
b) $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x_1^2 + x_2^4 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$.
c) $\left\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \colon\ \mu, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.
d) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \colon\ f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
e) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x_1 \geqslant x_2\right\} \subset \mathbb{R}^3$.
f) $\{A \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R}) \colon A$ ist in Zeilenstufenform $\} \subset \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$.

2. Seien V und W zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $V \times W$ durch die Verknüpfungen
$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w),$$
ebenfalls zu einem K-Vektorraum wird.

3. Ist X eine nichtleere Menge, V ein K-Vektorraum und $\mathrm{Abb}(X, V)$ die Menge aller Abbildungen von X nach V, so ist auf $\mathrm{Abb}(X, V)$ durch
$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x),$$
eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(X, V)$ mit diesen Verknüpfungen zu einem K-Vektorraum wird.

4. Eine Abbildung $f \colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt 2π-*periodisch*, falls $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $V = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \colon\ f$ ist 2π-periodisch$\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist.
b) Zeigen Sie, dass $W = \mathrm{span}(\cos nx, \sin mx)_{n,m \in \mathbb{N}}$ ein Untervektorraum von V ist. (Man nennt W den Vektorraum der *trigonometrischen Polynome*.)

5. Seien

$$\begin{aligned}
\ell^1 &:= \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| < \infty \right\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}), \\
\ell^2 &:= \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}), \\
\ell &:= \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}), \\
\ell_\infty &:= \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell \subset \ell_\infty \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen ist.

6. Kann eine abzählbar unendliche Menge M eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur besitzen?

7. Gibt es eine $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{R}$, so dass die skalare Multiplikation $\mathbb{C}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eingeschränkt auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ die übliche Multiplikation reeller Zahlen ist?

8. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.
b) $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ im $\mathbb{R}^3$.
c) $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.
d) $(\cos nx, \sin mx)_{n,m\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}}$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

9. Für welche $t\in\mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$(1,3,4), \quad (3,t,11), \quad (-1,-4,0).$$

10. Stellen Sie den Vektor w jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

a) $w=(6,2,1), v_1=(1,0,1), v_2=(7,3,1), v_3=(2,5,8)$.
b) $w=(2,1,1), v_1=(1,5,1), v_2=(0,9,1), v_3=(3,-3,1)$.

Ergänzungsaufgabe

E1. V sei ein Vektorraum über den Körper K und V_1, V_2, V_3 seien Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

a) $(V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3) \subset (V_1+V_2)\cap V_3$.
b) Falls $V_1 \subset V_3$ gilt, so folgt

$$(V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3) = (V_1+V_2)\cap V_3.$$

c) Suchen Sie ein Beispiel mit $V_1 \not\subseteq V_3$, $V_2 \not\subseteq V_3$ und

$$(V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3) \subsetneqq (V_1+V_2)\cap V_3.$$

1.5 Basis und Dimension

1. Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $v_1 = (4,1,1,0,-2)$, $v_2 = (0,1,4,-1,2)$, $v_3 = (4,3,9,-2,2)$, $v_4 = (1,1,1,1,1)$, $v_5 = (0,-2,-8,2,-4)$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = \operatorname{span}(v_1,\ldots,v_5)$.

b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren $v_1,\ldots,v_5$ aus, und kombinieren Sie jeweils $v_1,\ldots,v_5$ daraus linear.

2. Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an:

a) $\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x_1 = x_3\right\}$,

b) $\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$,

c) $\operatorname{span}\left(t^2,\ t^2+t,\ t^2+1,\ t^2+t+1,\ t^7+t^5\right) \subset \mathbb{R}[t]$,

d) $\{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon\ f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

3. Für $d \in \mathbb{N}$ sei

$$K[t_1,\ldots,t_n]_{(d)} := \{F \in K[t_1,\ldots,t_n]\colon\ F \text{ ist homogen vom Grad } d \text{ oder } F = 0\}$$

(vgl. Aufgabe 9 zu 1.3). Beweisen Sie, dass $K[t_1,\ldots,t_n]_{(d)} \subset K[t_1,\ldots,t_n]$ ein Untervektorraum ist und bestimmen Sie $\dim K[t_1,\ldots,t_n]_{(d)}$.

4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ endlich erzeugt über $\mathbb{R}$ ist, aber $\mathbb{R}$ nicht endlich erzeugt über $\mathbb{Q}$.

5. Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis des Vektorraumes V und $(w_j)_{j\in J}$ eine Basis des Vektorraumes W, so ist $((v_i,0))_{i\in I} \cup ((0,w_j))_{j\in J}$ eine Basis von $V \times W$ (vgl. Aufgabe 2 zu 1.4). Insbesondere gilt

$$\dim V \times W = \dim V + \dim W\,,$$

falls $\dim V$, $\dim W < \infty$.

6. Sei V ein reeller Vektorraum und $a,b,c,d,e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$v_1 = a+b+c\,,\quad v_2 = 2a+2b+2c-d\,,\quad v_3 = a-b-e\,,$$
$$v_4 = 5a+6b-c+d+e\,,\quad v_5 = a-c+3e\,,\quad v_6 = a+b+d+e\,.$$

7. Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V definieren wir

$$h(V) := \sup\{n \in \mathbb{N}\colon\ \text{es gibt eine Kette } V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n \text{ von Untervektorräumen } V_i \subset V\}\,.$$

Zeigen Sie $h(V) = \dim V$.

8. Sei $R = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen und

$$W := \{f \in R\colon\ \text{es gibt ein } \rho \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 0 \text{ für } x \geqslant \rho\} \subset R\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion

$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{für alle } x \geqslant k\,, \\ k-x & \text{für } x \leqslant k\,. \end{cases}$$

a) $W = \operatorname{span}_R(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

b) W ist über R nicht endlich erzeugt (aber R ist über R endlich erzeugt).

c) Ist die Familie $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear abhängig über R?

9. Zeigen Sie $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ und folgern daraus, dass es in $\mathbb{Z}$ unverkürzbare Erzeugendensysteme verschiedener Längen gibt.

10. Wie viele Elemente hat ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper?

11.* a) Ist K ein Körper mit $\operatorname{char} K = p > 0$, so enthält K einen zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphen Körper und kann somit als $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Vektorraum aufgefasst werden.

b) Zeigen Sie: Ist K ein endlicher Körper mit $\operatorname{char} K = p$, so hat K genau p^n Elemente, wobei $n = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} K$.

12. Zeigen Sie: Zeilenrang = Spaltenrang für Matrizen mit sehr kleiner Zeilenzahl (etwa $m = 1, 2$) und beliebig großer Spaltenzahl n.

13. Folgern Sie aus Lemma 1.5.8, dass für eine Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n; K)$

a) Zeilenrang $A \leqslant$ Spaltenrang A,
b) Zeilenrang $A \geqslant$ Spaltenrang A,

und somit insgesamt Zeilenrang $A =$ Spaltenrang A gilt.

1.6 Summen von Vektorräumen*

1. Beweisen Sie, dass für einen Vektorraum V folgende Bedingungen äquivalent sind:

i) $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.
ii) Jedes $v \in V$ ist eindeutig darstellbar als $v = w_1 + \ldots + w_k$ mit $w_i \in W_i$.
iii) $V = W_1 + \ldots + W_k$, $W_i \neq \{0\}$ für alle i und von Null verschiedene Vektoren $w_1 \in W_1, \ldots, w_k \in W_k$ sind linear unabhängig.

   Vorsicht! Die Voraussetzung $W_i \neq \{0\}$ ist wesentlich. Ist etwa $W_1 = \{0\}$, so ist die angegebene zweite Bedingung stets erfüllt!

iv) $V = W_1 + \ldots + W_k$ und $W_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} W_j = \{0\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.
v) $V = W_1 + \ldots + W_k$ und $W_i \cap (W_{i+1} + \ldots + W_k) = \{0\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Zeigen Sie anhand von Gegenbeispielen, dass die obigen Bedingungen für $k > 2$ im Allgemeinen nicht äquivalent sind zu $W_1 \cap \ldots \cap W_k = \{0\}$ bzw. $W_i \cap W_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$.

2. Sind V und W Vektorräume, so gilt

$$V \times W = (V \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times W)\,.$$

3. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ heißt *symmetrisch*, falls $A = {}^tA$.

a) Zeigen Sie, dass die symmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Sym}(n;K)$ von $\mathrm{M}(n \times n; K)$ bilden. Geben Sie die Dimension und eine Basis von $\mathrm{Sym}(n;K)$ an.

Ist $\mathrm{char}\, K \neq 2$, so heißt $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ *schiefsymmetrisch* (oder *alternierend*), falls ${}^tA = -A$. Im Folgenden sei stets $\mathrm{char}\, K \neq 2$.

b) Zeigen Sie, dass die alternierenden Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Alt}(n;K)$ von $\mathrm{M}(n \times n; K)$ bilden. Bestimmen Sie auch für $\mathrm{Alt}(n;K)$ die Dimension und eine Basis.

c) Für $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ sei $A_s := \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ und $A_a := \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. Zeigen Sie: A_s ist symmetrisch, A_a ist alternierend, und es gilt $A = A_s + A_a$.

d) Es gilt: $\mathrm{M}(n \times n; K) = \mathrm{Sym}(n;K) \oplus \mathrm{Alt}(n;K)$.

Ergänzungsaufgabe

E1. a) Zeigen Sie, dass die Teilmengen

$$U_1 := \left\{ {}^t(r, \ldots, r) \in \mathbb{R}^n : \ r \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$U_2 := \left\{ {}^t(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^{n} r_i = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n,$$

Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ sind.

b) Bestimmen Sie $\dim U_1$, $\dim U_2$, $\dim(U_1 \cap U_2)$ und $\dim(U_1 + U_2)$.

Kapitel 2

Lineare Abbildungen

In diesem Kapitel wird das Fundament für einen wesentlichen Teil der linearen Algebra gelegt. Der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen wird unter verschiedenen Gesichtspunkten beleuchtet. Um sich diesen Stoff sicher einzuprägen, sind viele Übungsaufgaben nötig, in denen oft argumentiert, manchmal jedoch auch nur gerechnet wird. Damit die Rechenpraxis auf keinen Fall zu kurz kommt, haben wir noch Aufgaben ergänzt.

2.1 Beispiele und Definitionen

1. Sei X eine Menge und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Ist $\varphi\colon X \to X$ eine beliebige Abbildung, so ist die Abbildung

$$F_\varphi\colon V \to V\,,\ f \mapsto f \circ \varphi \quad \mathbb{R}\text{-linear.}$$

2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:
a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x,y) \mapsto (3x+2y, x)\,,$ b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto ax+b\,,$
c) $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto x+\sqrt{2}y$ (über $\mathbb{Q}$), d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \bar{z}\,,$
e) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto f(1)\,,$ f) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \bar{z}$ (über $\mathbb{R}$).

3. Für einen Endomorphismus $F\colon V \to V$ ist die Menge $\mathrm{Fix}\, F$ der *Fixpunkte* von F definiert durch $\mathrm{Fix}\, F := \{v \in V\colon F(v) = v\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}\, F \subset V$ ein Untervektorraum ist.

b) Sei der Endomorphismus F gegeben durch

i) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x,$

ii) $F\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t],\ P \mapsto P',$

iii) $F\colon \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto f'.$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{Fix}\, F$.

4. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Aut}(V)$ der Automorphismen eines Vektorraums V mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe ist.

5. Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus des Vektorraums V und $v \in V$, so dass für eine natürliche Zahl n gilt: $$F^n(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad F^{n+1}(v) = 0\,.$$

Beweisen Sie, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

6. Ist $F\colon V \to W$ ein Isomorphismus und $V = U_1 \oplus U_2$, so ist $W = F(U_1) \oplus F(U_2)$.

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_3

2.2 Bild, Fasern und Kern, Quotientenvektorräume*

1. Sei $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils Basen von Ker F und Im F.

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$d\colon\ \mathscr{D}(I;\mathbb{R}) \to \mathscr{D}(I;\mathbb{R}), \quad f \mapsto f'.$$

Zeigen Sie, dass d eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, und geben Sie eine Basis von Ker d an. Wie sieht Ker d aus im Fall, dass I disjunkte Vereinigung von Intervallen ist?

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F\colon\ V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei definiert: $W_0 := V$ und $W_{i+1} := F(W_i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $W_{m+i} = W_m$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

4. Sei $F\colon\ V \to V$ linear mit $F^2 = F$. Zeigen Sie, dass es Untervektorräume U, W von V gibt mit $V = U \oplus W$ und $F(W) = 0, F(u) = u$ für alle $u \in U$.

5. Sei $F\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Basen $\mathscr{A} = (u, v_1, v_2)$ des $\mathbb{R}^3$ und $\mathscr{B} = (w, w')$ des $\mathbb{R}^2$, so dass

$$\text{Ker } F = \text{span}\,(v_1, v_2), \text{Im } F = \text{span}\,(w) \text{ und } F(u) = w.$$

b) Geben Sie für $x \in \text{Im } F$ eine Parametrisierung der Faser $F^{-1}(x)$ an und zeigen Sie, dass jede nichtleere Faser $F^{-1}(x)$ genau einen Schnittpunkt mit $U = \text{span}\,(u)$ hat (vgl. 2.2.5).

6. Beweisen Sie das Lemma aus 1.5.8 noch einmal, aber benutzen Sie nun, dass die Projektion $\pi\colon\ W \to K^{m-1}$ linear und injektiv ist.

7. Sei $F\colon\ V \to W$ linear und $U \subset W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass dann

$$\dim F^{-1}(U) = \dim(U \cap \text{Im } F) + \dim \text{Ker } F.$$

8. Geben Sie einen neuen Beweis von Teil a) der Bemerkung aus 2.2.3 unter Benutzung der Äquivalenzrelation $\sim_W$ in V.

9. Zeigen Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes, dass für Vektorräume V, W sowie einen Untervektorraum $U \subset V$ die lineare Abbildung

$$\{F \in \text{Hom}\,(V,W)\colon\ F|U = 0\} \to \text{Hom}\,(V/U, W) \quad \text{mit} \quad F \mapsto \bar{F}$$

(vgl. Satz 2.2.7) ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Ergänzungsaufgabe

E1. Berechnen Sie mithilfe eines CAS A_n^k mit $k \in \mathbb{N}$ für

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}).$$

Formulieren Sie eine Vermutung für $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, und beweisen Sie sie.

2.3 Lineare Gleichungssysteme

1. Ein Nahrungsmittel enthält Schadstoffe $S_1, \dots, S_5$, die bei der Produktion und Lagerung als Bestandteile von Pflanzenschutzmitteln auftreten. Auf den einzelnen Stationen werden die folgenden Pflanzenschutzmittel benutzt:

	Station	Mittel
1.	Landwirt	A
2.	Rohproduktlagerung	B
3.	Veredelungsbetrieb	C
4.	Grossist und Transport	D
5.	Einzelhändler	E

Die folgende Tabelle gibt die prozentuale Zusammensetzung der Mittel A,..., E wieder:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A	0.2	0.5	0	0.3	0
B	0.1	0.6	0.3	0	0
C	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2
D	0	0	0.1	0.4	0.5
E	0	0.1	0.3	0.3	0.3

Für das fertige Produkt ergibt die Nahrungmittelanalyse die folgenden Werte (in Gewichtseinheiten):

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
0.75	2.25	0.65	1.60	0.75

Ermitteln Sie, wieviel (in Gewichtseinheiten) die einzelnen Stationen zur Schadstoffbelastung beitragen.

2. Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2 und M_3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält?

3. Zeigen Sie: Ist die Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n; K)$ in Zeilenstufenform und r der Rang von A, so ist $(e_1, \ldots, e_r)$ eine Basis von $\mathrm{Im}\, A \subset K^m$.

4. Bestimmen Sie für das folgende Gleichungssystem in Zeilenstufenform mit beliebiger rechter Seite Matrizen C und D wie in 2.3.4, so dass die Spalten von C ein Fundamentalsystem bilden und $D \cdot b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^5$ eine spezielle Lösung ist.

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

5. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme darauf, ob sie eindeutig lösbar sind:

$$Ax = {}^t(2,4,9), \quad Bx = {}^t(4,1,7).$$

b) Untersuchen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = b$ für beliebige $b \in \mathbb{R}^3$ darauf, ob sie universell lösbar sind.

6. Sei der Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch m lineare Gleichungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, d.h.

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varphi_1(x) = \ldots = \varphi_m(x) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass dann W bereits durch eine einzige (nicht notwendig lineare) Gleichung beschrieben werden kann. Genauer gilt: Es existiert ein Polynom $f \in \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_n]$ mit

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage auch gilt, falls man $\mathbb{R}$ durch einen endlichen Körper K ersetzt.

7. Finden Sie neue (kürzere) Beweise für Satz 0.2.4 und Aufgabe 2a) zu 0.3.

8. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge L des $\mathbb{R}^3$ eine Gerade ist (d. h. es existieren $v, w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$, mit $L = v + \mathbb{R}w$) genau dann, wenn es eine Matrix $A \in \mathrm{M}(2 \times 3; \mathbb{R})$

mit rang $A = 2$ und ein $b \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon Ax = b\}$. Was bedeutet das geometrisch?

2.4 Lineare Abbildungen und Matrizen

1. Gibt es eine lineare Abbildung $F\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$F(2,0) = (0,1),\ F(1,1) = (5,2),\ F(1,2) = (2,3)\,?$$

2. Sei $\mathscr{B} = (\sin, \cos, \sin\cdot\cos, \sin^2, \cos^2)$ und $V = \operatorname{span}\mathscr{B} \subset \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Betrachten Sie den Endomorphismus $F\colon\ V \to V,\ f \mapsto f'$, wobei f' die erste Ableitung von f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B}$ eine Basis von V ist.
b) Bestimmen Sie die Matrix $M_{\mathscr{B}}(F)$.
c) Bestimmen Sie Basen von Ker F und Im F.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n = \operatorname{span}(1,\ldots,t^n) \subset \mathbb{R}[t]$ mit der Basis $\mathscr{B}_n = (1,\ldots,t^n)$ und
$$\mathscr{D}_n\colon\ V_n \to V_{n-1}\,, \quad f \mapsto f'$$
der Ableitungshomomorphismus.

a) Bestimmen Sie die Matrix $M^{\mathscr{B}_n}_{\mathscr{B}_{n-1}}(\mathscr{D}_n)$.
b) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\mathscr{I}_n\colon\ V_{n-1} \to V_n$ gibt mit $\mathscr{D}_n \circ \mathscr{I}_n = \mathrm{id}$, und bestimmen Sie $M^{\mathscr{B}_{n-1}}_{\mathscr{B}_n}(\mathscr{I}_n)$.

4. Sei $V = \{f \in \mathbb{R}[t]\colon\ \deg f \leqslant 3\}$ mit der Basis $\mathscr{B} = (1,t,t^2,t^3)$. Wir betrachten die linearen Abbildungen
$$F\colon\ V \to \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad G\colon\ V \to \mathbb{R}^3\,, \quad f \mapsto (f(-1), f(0), f(1))\,.$$

a) Es seien $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ die kanonischen Basen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrizen
$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}}(F) \text{ und } M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}'}(G)\,.$$
b) Zeigen Sie: Ker $G \subset$ Ker F.
c) Es gibt eine lineare Abbildung $H\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $H \circ G = F$.

5. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume mit $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$ sowie $F\colon\ V \to W$ linear mit $F(V_i) \subset W_i$ für $i = 1,2$. Zeigen Sie, dass es Basen $\mathscr{A}$ von V und $\mathscr{B}$ von W gibt mit
$$M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
wobei $A \in \mathrm{M}(\dim W_1 \times \dim V_1; K)$, $B \in \mathrm{M}(\dim W_2 \times \dim V_2; K)$.

6. Zeigen Sie ohne Verwendung von Matrizen, dass die in 2.4.2 definierten Abbildungen $F_i^j\colon\ V \to W$ eine Basis von $\operatorname{Hom}(V,W)$ bilden.

7. Sei
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
und $F\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die durch $F(x) = Ax$ definierte lineare Abbildung. Bestimmen Sie Basen $\mathscr{A}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^3$ mit
$$M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F\colon\ V \to V$ linear mit $F^2 = F$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathscr{B}$ von V gibt mit
$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Hinweis: Aufgabe 5 und Aufgabe 4 zu 2.2.

9. Zeigen Sie: Ist $F\colon\ V \to V$ ein Endomorphismus des endlichdimensionalen Vektorraums V mit $\dim \operatorname{Fix} F = r$ (vgl. Aufgabe 3 zu 2.1), so existiert eine Basis $\mathscr{B}$ von V mit
$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Ergänzungsaufgabe

E1. Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}[t]_3$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 über $\mathbb{R}$. Ferner sei $\frac{d}{dt}\colon\ \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_3$ die formelle Ableitung.

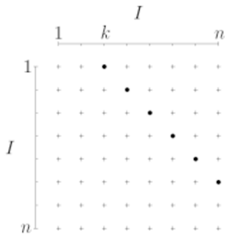
a) Notieren Sie eine „Standard"-Basis $\mathscr{B}$ des Vektorraums. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathscr{B}}\left(\frac{d}{dt}\right)$.
b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\tilde{\mathscr{B}}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ in Bezug auf die (geordnete) Basis $\tilde{\mathscr{B}} = (t^3, 3t^2, 6t, 6)$.
c) Ermitteln Sie die Transformationsmatrix T mit $TM_{\tilde{\mathscr{B}}}T^{-1} = M_{\mathscr{B}}$.

2.5 Multiplikation von Matrizen

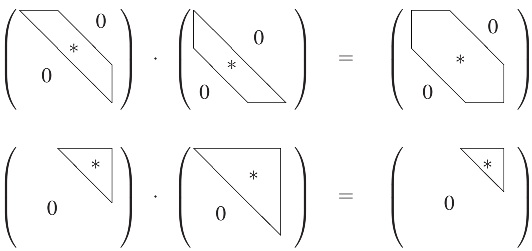
1. Gegeben seien die Matrizen
$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$$
$$D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie alle möglichen Produkte.

2. In dieser Aufgabe betrachten wir Eigenschaften „dünn besetzter“ Matrizen, in denen viele Einträge null sind.

a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $I = \{1, \ldots, n\}$. Wir betrachten die Menge $I \times I \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Finden Sie für $k \in \mathbb{N}$ Gleichungen für die „Gerade“ L in $I \times I$ durch $(1,k)$ und $(2,k+1)$ sowie für die Gerade L' durch $(k,1)$ und $(k+1,2)$. Finden Sie weiter Ungleichungen für den Halbraum H in $I \times I$, der oberhalb von L liegt und den Halbraum H', der unterhalb von L' liegt.



b) Formulieren und beweisen Sie folgende Aussagen:



c) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ heißt echte obere Dreiecksmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für $i \geqslant j$. Zeigen Sie, dass eine echte obere Dreiecksmatrix A nilpotent ist, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$.

3. Sind die folgenden Teilmengen Unterringe?

a) $\{(a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n; K) \colon a_{ij} = 0 \text{ für } i \geqslant j\} \subset \mathrm{M}(n \times n; K)$

b) $\{(a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n; K) \colon a_{ij} = 0 \text{ für } i \geqslant j+k \text{ oder } j \geqslant i+k\} \subset \mathrm{M}(n \times n; K)$, wobei $k \in \mathbb{N}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R}) \colon a \in \mathbb{Q}, b, c \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$

d) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2; K) \colon a, b \in K\right\} \subset \mathrm{M}(2 \times 2; K)$

e) $\{(a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n; K) \colon a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \text{ oder } i \geqslant k\} \subset \mathrm{M}(n \times n; K)$, wobei $k \in \mathbb{N}$.

4. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$.

a) Für $\lambda \in K$ gilt: $(\lambda E_n)B = B(\lambda E_n)$ für alle $B \in \mathrm{M}(n \times n; K)$.

b) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ mit $AB = BA$ für alle $B \in \mathrm{M}(n \times n; K)$, so existiert ein $\lambda \in K$ mit $A = \lambda E_n$.

5. Sei $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass C ein Körper ist.

b) In C ist die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ lösbar.

c) C ist als Körper isomorph zu $\mathbb{C}$.

6. Zeigen Sie, dass für eine Matrix $B \in \mathrm{M}(n \times k; \mathbb{R})$ die Abbildung

$$\Phi\colon\ \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(m \times k; \mathbb{R}), \quad A \mapsto A \cdot B,$$

stetig ist.

7. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - n \leqslant \operatorname{rang}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$$

aus 2.5.5 für den Rang der Produktmatrix in beide Richtungen scharf ist, d. h. finden Sie Beispiele für

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - n = \operatorname{rang}(AB) \ \text{ und } \ \operatorname{rang}(AB) = \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}.$$

8. Wir wollen eine Methode angeben, um die Inverse einer Matrix auszurechnen: Sei dazu $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ invertierbar, d. h. rang $A = n$. Zeigen Sie: Ist

$$x^i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$

die Lösung des Gleichungssystems $Ax = e_i$, so ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie auf diese Weise die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Für eine differenzierbare Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

ist die Jacobi-Matrix von f im Punkt x definiert durch

$$\mathrm{Jac}_x f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right).$$

Ist $m = 1$ und f zweimal stetig partiell differenzierbar, so versteht man unter der Hesse-Matrix von f im Punkt x die Matrix

$$\mathrm{Hess}_x f := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right).$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix einer linearen Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, wobei $A \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$.

b) Sei

$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

wobei $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Hesse-Matrix von P.

Ergänzungsaufgaben

E1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n \times n; K)$$

mit $\mathrm{char}\, K = 0$ eine Formel zur rekursiven Berechnung der Potenzen M^k, und geben mit dieser Formel die Potenzen M^2 und M^3 an.

E2. $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ seien symmetrische Matrizen (vgl. Aufgabe 3 zu 1.6). Zeigen Sie, dass $A \cdot B$ genau dann symmetrisch ist, wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.

E3. Zur Übung der Multiplikation von Matrizen empfehlen wir, die Matrizen aus den Ergänzungsaufgaben zu 2.7 miteinander zu multiplizieren, sofern dies möglich ist.

E4. Es seien $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ mit $A \cdot (A \cdot B - B \cdot A) = (A \cdot B - B \cdot A) \cdot A$. Zeigen Sie, dass

$$k \cdot A^{k-1}(A \cdot B - B \cdot A) = A^k \cdot B - B \cdot A^k \text{ gilt.}$$

2.6 Koordinatentransformationen

1. Gegeben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V mit Basen $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$. Beweisen Sie die „Kürzungsregel"

$$T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{A}} = T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \cdot T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}.$$

2. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen

$$\mathscr{A} = ((1,-1,2),(2,3,7),(2,3,6)) \text{ und } \mathscr{B} = ((1,2,2),(-1,3,3),(-2,7,6))$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \cdot (1,-1,2) + 9 \cdot (2,3,7) - 8 \cdot (2,3,6)$$

bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

3. V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathscr{A} = (v_1, \ldots, v_4)$, W sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathscr{B} = (w_1, \ldots, w_5)$. $F\colon\ V \to W$ sei die lineare Abbildung, die gegeben ist durch

$$M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 7 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -17 & 5 \end{pmatrix}.$$

Schließlich seien $\mathscr{A}' = (v_1', \ldots, v_4')$ mit $v_1' = v_1 + v_2, v_2' = v_2 + v_3, v_3' = v_3 + v_4,$ $v_4' = v_4$ und $\mathscr{B}' = (w_1', \ldots, w_5')$ mit $w_1' = w_1, w_2' = w_1 + w_2, w_3' = -w_1 + w_3,$ $w_4' = w_1 + w_4, w_5' = w_1 + w_5$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}'$ eine Basis von V und $\mathscr{B}'$ eine Basis von W ist.

b) Berechnen Sie $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}'}(F)$, $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{A}}(F)$ und $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{A}'}(F)$.

c) Bestimmen Sie $F^{-1}(\text{span}\,(w_1, w_2, w_3))$.

4. Zeigen Sie, dass durch

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind äquivalent}$$

(vgl. 2.6.7) tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{M}(m \times n; K)$ gegeben ist und durch

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind ähnlich}$$

(vgl. 2.6.7) eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}(m \times m; K)$ erklärt ist.

5. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ gilt: $\text{rang}\, A = \text{rang}\, (A \cdot {}^tA)$. Gilt dies auch, falls $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$?

2.7 Elementarmatrizen und Matrizenumformungen

1. Stellen Sie die folgende Matrix A als Produkt von Elementarmatrizen dar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Wenn ja, dann geben die inverse Matrix an.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4 \times 4; \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4 \times 4; \mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

3. Zeigen Sie:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2; K) \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow ad - bc \neq 0\,.$$

Berechnen Sie in diesem Fall die Inverse von A.

4. Modifizieren Sie das Rechenverfahren aus 2.7.6 so, dass man statt S die inverse Matrix S^{-1} erhält (benutzen Sie dabei die Inversen der Elementarmatrizen aus 2.7.2).

5. Finden Sie für die Gleichungssysteme $Ax = b$ aus 0.3.5 sowie aus Aufgabe 2 in 0.4 jeweils eine Matrix S, so dass $\widetilde{A} = SA$ in Zeilenstufenform ist, und berechnen Sie $\widetilde{b} = Sb$.

6. Beweisen Sie:

a) Für $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$E_n - A^m = (E_n - A)(\sum_{i=0}^{m-1} A^i) = (\sum_{i=0}^{m-1} A^i)(E_n - A)\,.$$

(Dabei sei $A^0 := E_n$.)

b) Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ eine Matrix, für die ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^m = 0$, so ist $E_n - A$ invertierbar. Wie sieht die inverse Matrix aus?

Ergänzungsaufgaben

E1. Die folgenden Matrizen sind über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ invertierbar und bieten daher die Möglichkeit, mehr Routine im Errechnen der inversen Matrix zu erlangen. Viel Erfolg dabei!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 & 8 \\ -9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & -14 & 15 & 16 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 1 \\ -4 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 7 \\ 9 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix};$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} & -3\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} & 5 & 1-\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 5 \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & -3+\mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} \\ -9 & 8-3\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \\ 1 & 2+\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i} \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 4-7\mathrm{i} \\ 10+3\mathrm{i} & 12-\mathrm{i} \end{pmatrix};$$

$$N = \begin{pmatrix} 7+2\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & -3-3\mathrm{i} \\ 0 & -2 & 4-\mathrm{i} & 10-2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 4\mathrm{i} & 1+7\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

E2.

a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation

$$(x_1,\ldots,x_n)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \left(\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i,\ldots,\sum_{i=1}^m a_{in}x_i\right)$$

wohldefiniert ist.

b) Führen Sie die oben definierte Multiplikation für die Matrizen aus E1 mit den jeweils geeigneten Vektoren aus der folgenden Liste durch:

$$(1,3,2),\quad (1,\mathrm{i},-\mathrm{i}),\quad (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{6}),\quad (1,2,3,4),\quad (\mathrm{i},\mathrm{i}^2,\mathrm{i}^3,\mathrm{i}^4),$$
$$\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{5}\right),\quad \left(\tfrac{1}{2},(\tfrac{1}{2})^2,(\tfrac{1}{2})^3,(\tfrac{1}{2})^4,(\tfrac{1}{2})^5\right),\quad (1,2,3,5,7),\quad (1,0),\quad (0,1).$$

c) Leiten Sie aus der Vektormultiplikation von Teil a) für den Fall $m = n$ eine Matrizenmultiplikation und damit eine Verknüpfung von linearen Abbildungen her.
Diese Art der Multiplikation von Vektoren und Matrizen spielt auch in der Stochastik eine Rolle, vgl. [Be]. Es ist zu beachten, dass in diesen Matrizen die Wahrscheinlichkeiten stehen und $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1\ \forall i$ sowie $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ gilt.

Polynome
$p(t) = a_k t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ lassen sich auch als Abbildungen von $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ eines Vektorraums V auffassen. Damit lassen sie sich auch als Abbildungen $M(n,K) \to M(n,K)$ betrachten. Die Skalarmultiplikation und die Addition von Matrizen finden hierbei wie üblich statt, als würde man die Matrizen als Vektoren des $\mathbb{R}^{n^2}$ auffassen und jedes Element der Matrix mit dem Skalar multiplizieren. Nach Korollar 2.5.4 in [Fi1] handelt es sich bei $M(n\times n,K)$ um einen Ring. Damit definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} p\colon M(n\times n,K) &\to M(n\times n,K), \\ A &\mapsto p(A) = a_k\cdot A^k + a_{k-1}\cdot A^{k-1} + \ldots + a_1\cdot A + a_0\cdot E_n\,. \end{aligned}$$

E3. Berechnen Sie $p(A)$ für

a) $p(t) = x^2 - 2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $p(t) = 3t^2 - 5t - 1$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$,

c) $p(t) = 3t^2 + 5t$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

E4. V sei der Untervektorraum der differenzierbaren Funktionen $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\mathscr{B} = (\sin, \cos)$ als Basis. $d\colon V \to V$ mit $f \mapsto f'$ sei die lineare Abbildung der formellen Ableitung. Zeigen Sie, dass d eine Nullstelle der Funktion p mit $p(t) = t^2 + 1$ ist, d.h. $(p \circ d)(g) = 0$ für alle $g \in V$, wenn d^2 die zweite Ableitung und 1 die identische Abbildung bezeichnen.

E5. $F \in \operatorname{End}(V)$ sei ein Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraums V mit Basis $\mathscr{B}$ und $A = M_{\mathscr{B}}(F)$ die zugehörige Matrix. Ferner sei $p \in \mathbb{R}[t]$ beliebig. Dann gilt $M_{\mathscr{B}}(p(F)) = p(A)$.

E6. V sei ein Vektorraum der Dimension n und $F \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie ohne den Satz von Cayley-Hamilton, dass ein Polynom p existiert mit $p(F) = 0$.

E7. Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

und ein beliebiges Polynom $p \in K[t]$ eines Körpers K. Zeigen Sie:

$$p(A_1) = \begin{pmatrix} p(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(a_n) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(A_2) = \begin{pmatrix} p(a_1) & & \circledast \\ & \ddots & \\ 0 & & p(a_n) \end{pmatrix},$$

wobei nicht unbedingt $* = \circledast$ gilt.

E8. Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen $A_m = \left(a_{ij}^{[m]}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k} \in M(k \times k, K)$ über einen Körper K. Ferner sei $p \in K[t]$. Zeigen Sie:

a) $$p(A) = \begin{pmatrix} \left(p(a_{ij}^{[1]})\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(p(a_{ij}^{[n]})\right) \end{pmatrix},$$

b) $$p(B) = \begin{pmatrix} \left(p(a_{ij}^{[1]})\right) & & \circledast \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(p(a_{ij}^{[n]})\right) \end{pmatrix},$$ wobei nicht unbedingt $* = \circledast$ gilt.

Kapitel 3

Determinanten

Es gibt heute Taschenrechner und Algebraprogramme für den Computer, die viele der Rechnungen in diesem und den folgenden Kapiteln leisten können. Wir möchten trotzdem für die altmodische Methode mit Hilfe von Bleistift, Papier und Hirn werben; nur sie kann das Verständnis fördern. Auch wir haben die Lösungen der Aufgaben aus der *Linearen Algebra* ohne technische Hilfsmittel ermittelt – unsere LeserInnen schaffen es sicher genauso. Am Ende von Abschnitt 3.4 befinden sich ergänzende Aufgaben zur Steigerung der Rechenfertigkeit.

3.1 Beispiele und Definitionen

1. Berechnen Sie die Determinanten von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Zeigen Sie:

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^2(x+2),$$

$$\det\begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} = a^2+b^2+c^2+1.$$

3. Berechnen Sie:

$$\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\sin\alpha & b\cos\alpha & ab \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -a^2\sin\alpha & b^2\cos\alpha & a^2b^2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

4. Zeigen Sie, dass für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ gilt:

$$\det(a_{ij}) = \det((-1)^{i+j} \cdot a_{ij}).$$

5. Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$ und $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ alternierend (vgl. Aufgabe 3 zu 1.6). Zeigen Sie:

a) Ist n ungerade, so ist $\det A = 0$.
(Hinweis: Benutzen Sie Satz 3.2.6)

b) Ist n gerade, so ist $\det A$ Quadrat eines Polynoms in den Einträgen von A (vgl. Aufgabe 8 zu 3.2).

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_4

6. Sind $f = a_m t^m + \ldots + a_0$, $g = b_n t^n + \ldots + b_0 \in K[t]$ Polynome mit $\deg f = m, \deg g = n$, so ist die *Resultante von f und g* definiert durch

$$\mathrm{Res}_{f,g} := \det \left(\begin{array}{ccccccccc} a_0 & & \cdots & \cdots & & a_m & & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & & \\ & & a_0 & & \cdots & \cdots & & a_m \\ b_0 & \cdots & \cdots & b_n & & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & & b_0 & \cdots & \cdots & b_n \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ Zeilen} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ Zeilen} \end{array} .$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) $\mathrm{Res}_{f,g} = 0$.

ii) $f, tf, \ldots, t^{n-1}f, g, tg, \ldots, t^{m-1}g$ sind linear abhängig.

iii) Es existieren $p, q \in K[t]$, $p, q \neq 0$, mit $\deg p \leqslant n-1, \deg q \leqslant m-1$ und $pf = qg$.

Mit etwas Teilbarkeitstheorie von Polynomen kann man zeigen, dass i) bis iii) äquivalent sind zu

iv) f und g haben einen gemeinsamen nichtkonstanten Teiler $h \in K[t]$.

Insbesondere ist also $\mathrm{Res}_{f,g} = 0$, falls f und g eine gemeinsame Nullstelle haben, und im Fall $K = \mathbb{C}$ gilt: $\mathrm{Res}_{f,g} = 0 \Leftrightarrow f$ und g haben eine gemeinsame Nullstelle.

Ergänzungsaufgaben

E1. Eine Nullstelle $\lambda \in K$ eines Polynoms $f \in K[t] \smallsetminus 0$ heißt *mehrfache Nullstelle*, wenn die Vielfachheit der Nullstelle (vgl. [Fi1], 1.3.8) größer als 1 ist.

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) $f \in K[t]$ hat eine mehrfache Nullstelle.

ii) f und f' haben eine gemeinsame Nullstelle, wobei f' die formale Ableitung von f ist.

Zeigen Sie ferner für den Fall $K = \mathbb{C}$ die Äquivalenz von i) und ii) zu:

iii) Die Diskriminante von f verschwindet (s. die Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 6).

Vergleichen Sie auch Ergänzungsaufgabe E1 zu Abschnitt 3.2.

E2. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n; K)$. Zeigen Sie, dass $\det A$ ein Polynom in den Einträgen a_{ij} ist.

3.2 Existenz und Eindeutigkeit

1. Stellen Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

als Produkt von Transpositionen dar.

2. Beweisen Sie mit Induktion nach n, dass für die Vandermonde-Determinante gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) .$$

3. Geben Sie eine unendliche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ an, in der jeweils n verschiedene Punkte linear unabhängig sind.

4. Zeigen Sie noch einmal

$$\det(a_{ij}) = \det((-1)^{i+j} \cdot a_{ij}) ,$$

(vgl. Aufgabe 4 zu 3.1), aber benutzen Sie nun zum Beweis die Formel von LEIBNIZ.

5. In dieser Aufgabe soll der Aufwand zum Berechnen der Determinante mit Hilfe der Leibniz-Formel bzw. des Gauß-Algorithmus verglichen werden.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Additionen und Multiplikationen, die nötig sind, wenn man die Determinante von $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$
   i) mit der Leibniz-Formel,
   ii) durch Umformung der Matrix in Zeilenstufenform mit dem Gauß-Algorithmus und Aufmultiplizieren der Diagonalelemente berechnet.

b) Es stehe ein Computer zur Verfügung, der Addition und Multiplikation in 0.2 Mikrosekunden durchführen kann. Schätzen Sie ab, für welche Größe von Matrizen man mit den Verfahren i) bzw. ii) in einer vorgegebenen Rechenzeit von höchstens 48 Stunden auf diesem Computer Determinanten berechnen kann.

6. Beweisen Sie die Regeln D4 bis D11 aus 3.1.3 mit Hilfe der Leibniz-Formel.

7. Welche der Eigenschaften D4 bis D11 gelten, falls man Determinanten von Matrizen aus $\mathrm{M}(n \times n; R)$ für einen Ring R betrachtet (vgl. 3.2.8)?

8. (Fortsetzung von Aufgabe 5 zu 3.1.)
Sei K ein Körper mit char $K \neq 2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gerade, also $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ schiefsymmetrisch. Definiert man

$$P(x_{11}, \ldots, x_{nn}) = \sum \mathrm{sign}(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)} ,$$

wobei über alle $\sigma \in \mathbf{S}_n$ mit $\sigma(2i) > \sigma(2i-1)$ für $i = 1, \ldots, m$ summiert wird, so gilt $\det A = (\frac{1}{m!} P(a_{11}, \ldots, a_{nn}))^2$. Man nennt P ein *Pfaffsches Polynom*.

9. Seien v, w zwei verschiedene Punkte des K^2 und $L \subset K^2$ die Gerade durch v und w. Dann gilt:

$$L = \{(x_1, x_2) \in K^2 \colon \ \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\}\,.$$

10.* Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) := \{A \in \mathrm{M}(2 \times 2;\mathbb{Z}) \colon \ \det A = 1\}$$

eine Gruppe bzgl. der Multiplikation ist und erzeugt wird von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) = \mathrm{erz}\,(A, B)$ (vgl. Aufgabe 4 zu 1.2).

11. Gegeben sei ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und die $\mathbb{R}$-Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathscr{C} &:= \mathscr{C}(I;\mathbb{R}) = \{\alpha \colon I \to \mathbb{R} \colon \ \alpha \text{ stetig}\}, \\ \mathscr{D} &:= \mathscr{D}(I;\mathbb{R}^n) = \{\varphi = {}^t(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \colon I \to \mathbb{R}^n \colon \\ &\qquad\qquad \varphi_i \text{ beliebig oft differenzierbar}\}\,. \end{aligned}$$

Matrizen $A \in \mathrm{M}(n \times n;\mathscr{C})$ und $b \in \mathrm{M}(n \times 1;\mathscr{C})$ bestimmen das lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = A \cdot y + b\,. \tag{$*$}$$

Für $b = 0$ heißt das System homogen. Die Lösungsräume sind erklärt durch

$$\mathscr{L} := \{\varphi \in \mathscr{D} \colon \ \varphi' = A \cdot \varphi + b\} \quad \text{und} \quad \mathscr{L}_0 := \{\varphi \in \mathscr{D} \colon \ \varphi' = A \cdot \varphi\} \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{D}$ ein Untervektorraum und $\mathscr{L} \subset \mathscr{D}$ ein affiner Unterraum ist.

b) Zeigen Sie, dass für $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in \mathscr{L}_0$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

   i) $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}$ sind über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

   ii) Für ein $x_0 \in I$ sind $\varphi^{(1)}(x_0), \ldots, \varphi^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

   iii) $\det\left(\varphi_i^{(j)}\right) \neq 0$. Diese Determinante heißt WRONSKI-*Determinante*.

c) Zeigen Sie, dass $\dim \mathscr{L} = n$ (unabhängig von A).

Hinweis: Man benutze die in der Analysis bewiesene Existenz- und Eindeutigkeitsaussage ([Fo 2], §12), wonach es bei gegebenem x_0 zu beliebigem Anfangswert $c \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung φ von $(*)$ mit $\varphi(x_0) = c$ gibt.

12. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' = -y$. überführen Sie dazu die Differentialgleichung mit dem Ansatz $y_0 = y$, $y_1 = y'$ in ein lineares Differentialgleichungssystem wie in Aufgabe 11, und benutzen Sie, dass φ genau dann eine Lösung von $y'' = -y$ ist, wenn (φ, φ') eine Lösung des linearen Systems ist.

Ergänzungsaufgaben

E1. Bestimmen Sie die Diskriminante D_f von $f = at^2 + bt + c \in \mathbb{R}[t]$ mit $a \neq 0$ (vgl. die Lösung von Aufgabe 6 zu Abschnitt 3.1). Wann ist sie gleich 0? Deuten Sie dies geometrisch.

Möbius-Transformation

E2. Es seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ und $\Omega := \{m \cdot \omega_1 + n \cdot \omega_2 \colon\ m, n \in \mathbb{Z}\}$. Das zugehörige Gitter ist in Abbildung 3.1 zu sehen.

a) Auf Ω wird eine Addition $\oplus$ definiert durch

$$(m_1\omega_1 + n_1\omega_2) \oplus (m_2\omega_1 + n_2\omega_2) := (m_1 + m_2)\omega_1 + (n_1 + n_2)\omega_2$$

für $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.
Zeigen Sie, dass $(\Omega, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \in \mathbb{C}$ erzeugen dieselbe Gruppe Ω wie ω_1 und ω_2 genau dann, wenn $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ existieren mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1\,.$$

E3. Eine Abbildung $M\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $M(x) := \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ heißt *Möbius-Transformation*.

a) Weisen Sie nach, dass eine Möbius-Transformation M surjektiv, im Fall $ad - bc \neq 0$ bijektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der Möbius-Transformationen mit $ad - bc \neq 0$ bzgl. der Hintereinanderausführung von Funktionen eine nicht kommutative Gruppe bildet.

c) Zeigen Sie, dass durch

$$\frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus von der Menge der Möbius-Transformationen nach $M(2;\mathbb{R})$ definiert wird.
Verändern Sie die Abbildung so, dass sie bijektiv wird.

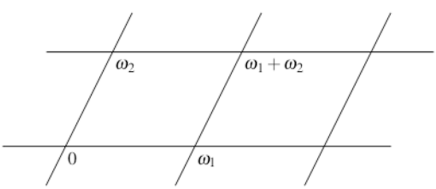


Bild 3.1: Gitter in der Ebene

im (z) bezeichne den Imaginärteil einer komplexen Zahl, und sei

$$H := \{z \in \mathbb{C} : \text{ im }(z) > 0\}$$

der Bereich der komplexen Ebene oberhalb der reellen Achse. Ferner sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2;\mathbb{R}) .$$

d) Zeigen Sie, dass im Fall $\det A > 0$ durch

$$A \cdot z := \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

eine Operation auf H definiert wird, d.h. $A \cdot z \in H$ für alle $z \in H$.

Hinweis. Die Möbius-Transformation findet in unterschiedlichen Bereichen der Mathematik und der Physik Anwendung. Einerseits ist hier die Relativitätstheorie in der Physik zu nennen. Die Inhalte der Aufgaben E2 und E3 bieten auch die Möglichkeit der fachlichen Vertiefung in Richtung der komplexen Analysis (vgl. [Ne], ab Kapitel 3).

3.3 Minoren*

1. In dieser Aufgabe geht es um weitere Eigenschaften der komplementären Matrix.

a) Ist die Abbildung $\mathrm{M}(n \times n;K) \to \mathrm{M}(n \times n;K)$, $A \mapsto A^\sharp$ linear?

b) Zeigen Sie: ${}^t(A^\sharp) = ({}^tA)^\sharp$, $(AB)^\sharp = B^\sharp A^\sharp$.

c) $\det A^\sharp = (\det A)^{n-1}$.

d) $(A^\sharp)^\sharp = (\det A)^{n-2} \cdot A$.

2. Sind $A, B \in \mathrm{M}(m \times n;K)$ und ist $m > n$, so folgt $\det A \cdot {}^tB = 0$.

3. Beweisen Sie die Formel für $\det A \cdot {}^tB$ aus 3.3.7 durch direktes Ausrechnen, wenn $A, B \in \mathrm{M}(2 \times 3;K)$ sind.

4. Beweisen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 .$$

5. Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ aus K^n sind äquivalent:

i) x und y sind linear abhängig.

ii) $\det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0$ für alle i, j.

6. Ist $E = \mathrm{span}\,(x, y) \subset K^n$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum, so definieren wir

$$p_{ij} = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \text{ für } 1 \leqslant i < j \leqslant n .$$

Man nennt $p(x, y) = (p_{ij})_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \in K^{\binom{n}{2}}$ die (homogenen) *Plückerkoordinaten* von $E = \mathrm{span}\,(x, y)$; nach Aufgabe 5 ist $p(x, y) \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Plückerkoordinaten bis auf einen Faktor aus $K \setminus \{0\}$ nur von E abhängen: Ist $E = \operatorname{span}(x,y) = \operatorname{span}(x',y')$, so existiert ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $p(x,y) = \lambda \cdot p(x',y')$. In diesem Sinne wollen wir auch einfach von den Plückerkoordinaten $p(E)$ von E reden, diese sind dann bis auf einen Faktor $\neq 0$ eindeutig bestimmt.
b) Zeigen Sie: Sind $E_1, E_2 \subset K^n$ Untervektorräume der Dimension 2, so dass $p(E_1)$ und $p(E_2)$ linear abhängig sind, so folgt $E_1 = E_2$.
c) Ist $E = \operatorname{span}(x,y) \subset K^4$, so erfüllen die Plückerkoordinaten (p_{ij}) von E die Gleichung $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$. Ist umgekehrt $p = (p_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \in K^6 \setminus 0$ gegeben mit $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$, so existiert ein 2-dimensionaler Untervektorraum $E = \operatorname{span}(x,y) \subset K^4$ mit $p(E) = p$.
d) Sind $E_1 = \operatorname{span}(x,y), E_2 = \operatorname{span}(x',y') \subset K^4$ zweidimensionale Untervektorräume mit Plückerkoordinaten $p(E_1) = (p_{ij}),\ p(E_2) = (q_{ij})$, so gilt:

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2 \neq \{0\} &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1' & y_1' \\ x_2 & y_2 & x_2' & y_2' \\ x_3 & y_3 & x_3' & y_3' \\ x_4 & y_4 & x_4' & y_4' \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + p_{23}q_{14} - p_{24}q_{13} + p_{34}q_{12} = 0\,. \end{aligned}$$

7. Zeigen Sie, dass $\det(x) = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} \in K[x_{11},\ldots,x_{nn}]$ ein irreduzibles Polynom ist, das heißt, dass aus $\det(x) = P \cdot Q$ mit Polynomen P und Q stets $P \in K$ oder $Q \in K$ folgt.

Ergänzungsaufgaben

E1. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass für $A \in \mathrm{M}(2\times 2;K)$

$$\left(A^\sharp\right)^\sharp = A$$

gilt.

E2. Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n\times n;K)\,.$$

3.4 Determinante eines Endomorphismus und Orientierung*

1. Sei V ein K-Vektorraum, X die Menge aller Basen von V und $\mathscr{B} \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon\ X \to \mathrm{GL}(n;K)\,, \quad \mathscr{A} \mapsto T_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} = \mathrm{M}_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$$

bijektiv ist. Wie hängt Φ im Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit der in 3.4.3 definierten kanonischen Bijektion

$$\mathrm{M}\colon\ X \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$$

zusammen?

2. Beweisen Sie, dass die Verbindbarkeit von Matrizen in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine Äquivalenzrelation in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ definiert.

3. Zeigen Sie, dass man eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}(n;K)$ durch Spaltenumformungen vom Typ III auf Diagonalgestalt bringen kann.

4. Zeigen Sie, dass in $\mathrm{M}(m \times n;\mathbb{R})$ je zwei Matrizen durch einen Weg verbindbar sind.

5. Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ zusammenhängend ist, das heißt, dass je zwei Matrizen aus $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ durch einen Weg in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ verbunden sind.

Ergänzungsaufgabe

E1. Zur Übung können die Determinanten der Matrizen berechnet werden, die im Aufgabenteil im Anschluss an Abschnit 2.7 angegeben wurden. Dort sollte man die inversen Matrizen berechnen, deshalb ist klar, dass keine dieser Matrizen die Determinante null haben kann (vgl. D10 und D11 aus 3.1.3).

Kapitel 4

Eigenwerte

Die Untersuchung von Eigenwerten und Eigenräumen bzw. Haupträumen einer linearen Abbildung ist zentral für die lineare Algebra, weil sie zur Klassifizierung linearer Abbildungen führt. Dies geschieht durch „Zerlegung" einer linearen Abbildung in die direkte Summe möglichst einfacher linearer Abbildungen, die auf niedrigerdimensionalen Räumen operieren. Im Fall eines in Linearfaktoren zerfallenden charakteristischen Polynoms führt dies auf die *Jordansche Normalform* eines Endomorphismus, ein wahrhaft faszinierendes Konzept, dessen Details sich oft nur erschließen, wenn man eine gewisse Anzahl Aufgaben löst. Wir haben einige ergänzende Aufgaben im Anschluss an 4.6 aufgelistet.

4.1 Beispiele und Definitionen

1. Zeigen Sie: Ein nilpotenter Endomorphismus hat Null als einzigen Eigenwert.

2. Gegeben sei die lineare Abbildung $F\colon\ \mathscr{D}(I;\mathbb{R}) \to \mathscr{D}(I;\mathbb{R}),\ \varphi \mapsto \varphi''$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte von F.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Eig}(F,-1)$.

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Durch eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n;\mathbb{R})$ ist das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = A \cdot y$$

bestimmt; nach Aufgabe 11 zu 3.2 hat der zugehörige Lösungsraum

$$\mathscr{L}_0 = \{\varphi \in \mathscr{D}(I;\mathbb{R}^n)\colon\ \varphi' = A\cdot\varphi\} \subset \mathscr{D}(I;\mathbb{R}^n)$$

die Dimension n. Um Lösungen zu erhalten, kann man den Ansatz

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot v$$

benutzen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $\varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ ist eine Lsung $\neq 0$ von $y' = A \cdot y$ genau dann, wenn v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

b) Lösungen $\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot v_1, \ldots, \varphi^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} \cdot v_k$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind.

Insbesondere erhält man mit diesem Ansatz eine Basis des Lösungsraums, falls A diagonalisierbar ist.

4. Sei V ein K-Vektorraum und $F\colon\ V \to V$ linear. Zeigen Sie: Hat $F^2 + F$ den Eigenwert -1, so hat F^3 den Eigenwert 1.

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_5

5. Gegeben sei ein K-Vektorraum V und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen Sie:

a) Ist $v \in V$ Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, und ist $G(v) \neq 0$, so ist $G(v)$ Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ dieselben Eigenwerte.

Ergänzungsaufgabe

E1. Gegeben seien $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ und $\pi_0 = (1,0,0,0)$.

a) Berechnen Sie mithilfe eines CAS $\pi_0 \cdot P^n$ für verschiedene $n \in \mathbb{N}$ und stellen hiermit eine Vermutung über $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_0 \cdot P^n$ auf. (Zur Definition und Wohldefiniertheit der Multiplikation vgl. Abschnitt 2.7, Aufgabe E2 a).)

b) Bestätigen Sie, dass der Grenzwert $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_0 \cdot P^n$ existiert.

c) Zeigen Sie, dass π aus Teil b) ein Eigenvektor von P zum Eigenwert 1 ist.

Bemerkung: Die Matrix P ist ein Beispiel für eine Übergangsmatrix in Verbindung zu *Markov-Ketten*. Bei π handelt es sich um eine *stationäre* Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bei jeder irreduziblen und nicht periodischen Markov-Kette existiert mindestens eine stationäre Verteilung. Für Details vgl. [Hä], Kapitel 5 oder [S3], S. 94ff.

4.2 Das charakteristische Polynom

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Beweisen Sie: Ist $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ symmetrisch, so hat A reelle Eigenwerte.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass $P_F(0) \neq 0$ genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist.

4. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & & 0 & \vdots \\ & 0 & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $P_A(t) = (-1)^n(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0)$ besitzt.

5. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ und $\Phi\colon \mathrm{M}(n \times n; K) \to \mathrm{M}(n \times n; K)$ der Endomorphismus, der durch die Linksmultiplikation mit A gegeben ist, das heißt $\Phi(B) = AB$. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome von A und Φ gilt: $P_\Phi = (P_A)^n$.

Ergänzungsaufgabe

E1. Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome der Matrizen

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

E2. Bestimmen Sie Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrizen A und B über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$ für $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.3 Diagonalisierung

1. Beweisen Sie Teil 2) von Satz 4.3.1 mit Hilfe von Theorem 4.3.3.

2. Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

4. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem mit Anfangswertbedingung

$$\dot{y} = A \cdot y, \quad y_0(0) = \alpha, \quad y_1(0) = \beta \qquad (*)$$

für die gedämpfte Schwingung (siehe 4.3.5), wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}.$$

a) Im Fall $\mu > \omega$ ist A (reell) diagonalisierbar. Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A und geben Sie eine Basis des Lösungsraums von $\dot{y} = A \cdot y$ an (vgl. Aufgabe 3 zu 4.1). Wie sieht die Lösung von $(*)$ aus?

b) Im Fall $\mu < \omega$ ist $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{C})$ komplex diagonalisierbar. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie eine Basis des $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von A an. Ist

$\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A zum Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$, so ist re $e^{\lambda t} \cdot v$, im $e^{\lambda t} \cdot v$ eine Basis des Lösungsraums von $\dot{y} = A \cdot y$ ([Fo2], §13). Bestimmen Sie auch in diesem Fall die Lösung von $(*)$.

5. Diagonalisieren Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{M}(4 \times 4; \mathbb{R})$ simultan, d. h. bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{R})$, so dass SAS^{-1} und SBS^{-1} Diagonalmatrizen sind.

6. Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ mit $AB = BA$ und alle Eigenwerte von A und B seien einfach. Dann gilt: A und B haben die gleichen Eigenvektoren.

7. Zeigen Sie, dass es für $\lambda \in K$ und natürliche Zahlen μ, n mit $1 \leqslant \mu \leqslant n$ stets eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ gibt mit $\mu(P_A; \lambda) = \mu$ und $\dim \mathrm{Eig}(A; \lambda) = 1$.

8. Es sei K ein Körper mit char $K \neq 2$. Zeigen Sie, dass die Lösungen der Gleichung $A^2 = \mathrm{E}_2$ in $\mathrm{M}(2 \times 2; K)$ genau von der folgenden Gestalt sind:

$$A = \mathrm{E}_2\,,\; A = -\mathrm{E}_2 \text{ oder } A = SDS^{-1} \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } S \in \mathrm{GL}(2;K)\,.$$

9. Sei F ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums, für den gilt: Sind v und w Eigenvektoren von F, so ist $v + w$ ein Eigenvektor von F oder $v + w = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $F = \lambda \cdot \mathrm{id}$.

10. Seien $A, B \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{R})$ zwei Matrizen mit den charakteristischen Polynomen $P_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ und $P_B(t) = -t^3 + 7t^2 - 9t + 3$. Zeigen Sie, dass der Kern von AB die Dimension 1 hat.

Ergänzungsaufgabe

E1. Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellte lineare Abbildung. Mit Hilfe von F wird wie folgt eine rekursive Folge von Vektoren definiert:

$$v_0 = {}^t(0,1) \quad \text{und} \quad v_{n+1} = A \cdot v_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Berechnen Sie die ersten zehn Glieder dieser Folge.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung F, und zeigen Sie hiermit, dass A diagonalisierbar ist.

c) Berechnen Sie $D := T^{-1}AT$ für eine Matrix T, deren Spalten die Einheitsvektoren von F sind.
(Es gilt $T = S^{-1}$ in der sonst üblichen Notation aus [Fi1].)

d) Benutzen Sie Teil c), um die Matrizen A^n und die Vektoren v_n in Abhängigkeit von n direkt (d.h. nicht rekursiv) zu bestimmen.

4.4 Trigonalisierung*

1. Zeigen Sie, dass das Polynom $t^n - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ fr $n \geqslant 2$ keinen Teiler $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $1 \leqslant \deg P \leqslant n-1$ besitzt.

2. Trigonalisieren Sie mit dem Verfahren aus 4.4.5 die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Zeigen Sie mit Induktion nach $n = \dim V$: Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $F\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus, so existiert eine Basis $\mathscr{B}$ von V mit

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

und es gilt $P_F(t) = \pm t^n$.

4. (Fortsetzung von Aufgabe 4 in 4.3.) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}$$

im Fall $\mu = \omega$ trigonalisierbar ist, und bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$, so dass $B = SAS^{-1}$ obere Dreiecksmatrix ist. Das System $\dot{y} = A \cdot y$ geht somit durch die Substitution $z = Sy$ über in $\dot{z} = B \cdot z$, und es reicht, das (einfachere) System $\dot{z} = B \cdot z$ zu lösen. Bestimmen Sie auf diese Weise eine Basis des Lösungsraums von $\dot{y} = A \cdot y$ und lösen $(*)$ in 4.3.5 auch im aperiodischen Grenzfall.

4.5 Potenzen eines Endomorphismus*

1. Sei $F\colon V \to V$ linear und $P \in K[t]$. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von F, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(F)$.

2. Ist $F\colon V \to V$ linear und $P, Q \in K[t]$, so ist

$$P(F) \circ Q(F) = Q(F) \circ P(F) = (P \cdot Q)(F).$$

3. Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus des K-Vektorraums V. Dann gilt:

a) Die Abbildung $\Phi_F\colon K[t] \to \mathrm{End}(V)$, $P(t) \mapsto P(F)$ ist ein Homomorphismus von Ringen und von K-Vektorräumen.

b) $K[F] = \{P(F)\colon P \in K[t]\}$ ist ein kommutativer Unterring von $\mathrm{End}(V)$.

c) Ist $\dim V = n < \infty$, so existiert ein normiertes Polynom $P \in K[t]$ vom Grad $\leqslant n^2$ mit $P(F) = 0$. (Hinweis: Betrachten Sie id, F, $F^2, \ldots, F^{n^2}$.)

4. Beweisen Sie den Satz von CAYLEY-HAMILTON durch direkte Rechnung für Matrizen $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; K)$.

5. Beweisen Sie den Satz von CAYLEY-HAMILTON für einen diagonalisierbaren Endomorphismus.

6. Geben Sie noch einen anderen Beweis des Satzes von CAYLEY-HAMILTON durch Induktion von $n = \dim V$ mit der folgenden Methode:

Für ein $0 \neq v \in V$ sei k mit $1 \leqslant k \leqslant n$ maximal, so dass

$$v, F(v), \ldots, F^{k-1}(v)$$

linear unabhängig sind, und $W \subset V$ der von diesen Vektoren aufgespannte Raum.

a) Zeigen Sie, dass $F(W) \subset W$ und berechnen Sie $P_G(t)$ für $G := F|W$ (siehe Aufgabe 4 in 4.2).
b) Zeigen Sie $P_G(G) = 0 \in \mathrm{End}(W)$.
c) Folgern Sie daraus im Fall $k < n$ mit der Bemerkung aus 4.4.1 und der Induktionsannahme, dass $P_F(F) = 0$.

7. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte eines diagonalisierbaren Endomorphismus F über einem endlichdimensionalen Vektorraum. Zeigen Sie, dass $(t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r) \in K[t]$ das Minimalpolynom von F ist.

4.6 Die Jordansche Normalform*

1. Bestimmen Sie die Haupträume der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie Basen, bezüglich derer die folgenden nilpotenten Matrizen Jordansche Normalform haben, und geben Sie jeweils das Minimalpolynom an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie Basen, bezüglich derer die folgenden Matrizen Jordansche Normalform haben, und geben Sie jeweils das charakteristische und das Minimalpolynom an:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Mit Hilfe des Satzes über die Jordansche Normalform kann man recht einfach hohe Potenzen von Matrizen berechnen. Zeigen Sie:

a) Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$, $S \in \mathrm{GL}(n; K)$ und $m \in \mathbb{N}$, so gilt $(SAS^{-1})^m = SA^mS^{-1}$.

b) Sind $A, B \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ mit $AB = BA$ und $m \in \mathbb{N}$, so gilt
$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}\,.$$

c) Bestimmen Sie für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$, so dass $A = S(D+N)S^{-1}$, wobei D Diagonalmatrix, N nilpotent und $DN = ND$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe von a) und b) (und ohne Computer) A^{50}.

5. Betrachten Sie die Verallgemeinerung der Exponentialfunktion für Matrizen; für jede Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ existiert
$$\exp(A) := \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k\,.$$

a) Bestimmen Sie $\exp(D)$ für eine Diagonalmatrix D.

b) Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, so folgt $\exp(SAS^{-1}) = S \cdot \exp(A) \cdot S^{-1}$.

c) Sind $A, B \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ mit $AB = BA$, so gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

d) Bestimmen Sie für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$, so dass $A = S(D+N)S^{-1}$, wobei D Diagonalmatrix, N nilpotent und $DN = ND$ ist, und berechnen Sie $\exp(A)$.

6. Zeigen Sie, dass für die Zahlen $s_1, \dots, s_d$ in 4.6.5 gilt:
$$s_l = \dim(U_l/U_{l-1}) - \dim(U_{l+1}/U_l)\,.$$

7. Gegeben sei ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Zwei Endomorphismen F und G von V heißen *ähnlich*, wenn es einen Isomorphismus H von V gibt mit $G = H \circ F \circ H^{-1}$.

a) Zeigen Sie, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Endomorphismen von V gegeben ist.

b) Für $F, G \in \mathrm{End}(V)$ sind folgende Bedingungen gleichwertig:

i) F und G sind ähnlich.

ii) Für jede Basis $\mathscr{B}$ von V sind $M_{\mathscr{B}}(F)$ und $M_{\mathscr{B}}(G)$ ähnlich.

iii) Die Jordanschen Normalformen von F und G haben (bis auf die Reihenfolge) die gleichen Invarianten.

8. Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Beweisen Sie, dass man das Minimalpolynom M_F aus den Invarianten von F berechnen kann: Mit den Bezeichnungen von 4.6.7 gilt

$$M_F(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{d_k}.$$

9. Sei V ein 6-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und F ein Endomorphismus von V mit $P_F(t) = (t-1)(t+2)^5$, $M_F(t) = (t-1)(t+2)^3$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von F.

10. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und F ein Endomorphismus von V mit $F^3 = F$. Zeigen Sie, dass F diagonalisierbar ist.

Ergänzungsaufgabe

E1. Wir haben auch zum Thema Jordansche Normalform einige Ergänzungsaufgaben zusammengestellt. Man kann an ihnen auch das Ermitteln des charakteristischen und des Minimalpolynoms, der Eigenvektoren und natürlich der Transformationsmatrizen üben. Wir wünschen dabei viel Erfolg!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 & -2 \\ -3 & 6 & -20 & -7 \\ 0 & 2 & -10 & -4 \\ -3 & -3 & 22 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 10 & 14 & -5 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 31 & -144 & 20 \\ -12 & 31 & -2 \\ -138 & 456 & -46 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -3962 & -14136 & 17784 & -6780 \\ 588 & 2104 & -2634 & 1014 \\ -454 & -1616 & 2042 & -774 \\ -98 & -352 & 440 & -176 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -2 \\ 10 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -22 & -18 & -33 \\ 18.5 & 16 & 25.5 \\ 7.5 & 6 & 11.5 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\frac{4}{3}\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ -1+\mathrm{i} & \frac{1}{3}-\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 0.8-0.6\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2.5 & -1+0.5\mathrm{i} \\ -1+0.5\mathrm{i} & 1.5-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Kapitel 5

Euklidische und unitäre Vektorräume

Vektorräume V über den reellen oder komplexen Zahlen sind – zumindest für den Fall $\dim V \leqslant 3$ – konkret vorstellbar. Daher scheinen viele Aufgaben, gerade zu Beginn des Kapitels, recht leicht und wenig reizvoll.

Auf der anderen Seite gibt es viele Eigenschaften, die bei euklidischen oder unitären Vektorräumen nicht ohne weiteres zu erwarten sind. Aus diesem Grund lohnt es sich, auch an auf den ersten Blick trivial erscheinende Aufgaben oder Probleme einen Gedanken zu verlieren.

5.1 Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

1. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

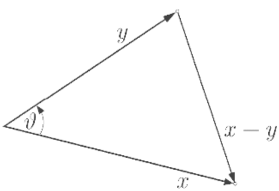
a) $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

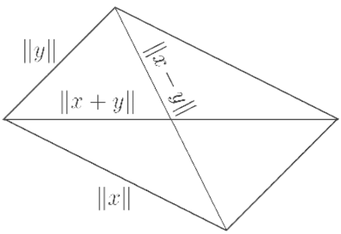
b) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cos\vartheta$.

(verallgemeinerter *Satz von* PYTHAGORAS oder *Cosinussatz*)

c) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle$.

d) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. (*Parallelogramm-Gleichung*)





2. Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung durch direkte Rechnung im Fall $n = 1, 2, 3$.

3. Mit Hilfe des Winkels zwischen Vektoren kann man auch den *Winkel zwischen Geraden* erklären. Sind $L = v + \mathbb{R}w$ und $L' = v' + \mathbb{R}w'$ Geraden im $\mathbb{R}^n$, so sei der Winkel zwischen L und L' erklärt durch

$$\sphericalangle(L,L') := \begin{cases} \sphericalangle(w,w') & \text{falls } \langle w,w'\rangle \geqslant 0\,, \\ \sphericalangle(-w,w') & \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig von der Auswahl von w und w' ist, und dass $0 \leqslant \sphericalangle(L,L') \leqslant \frac{\pi}{2}$ gilt.

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_6

4. Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal* (in Zeichen $x \perp y$), wenn $\langle x, y\rangle = 0$. Sind $x, y \neq 0$, so gilt offenbar

$$x \perp y \;\Leftrightarrow\; \sphericalangle(x,y) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Ist $L = v + \mathbb{R}w \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade, so heißt $s \in \mathbb{R}^n$ orthogonal zu L, wenn $\langle s, x - y\rangle = 0$ für alle $x, y \in L$. Zeigen Sie:

a) Ist $L = v + \mathbb{R}w \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade und $s \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$s \text{ ist orthogonal zu } L \Leftrightarrow s \perp w\,.$$

b) Ist $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, so ist (a_1, a_2) orthogonal zu L.

Zu einer Geraden orthogonale Vektoren kann man benutzen, um den *kürzesten Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden* zu bestimmen. Ist $L = v + \mathbb{R}w \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade und $u \in \mathbb{R}^n$, so ist der *Abstand zwischen u und L* definiert als

$$d(u, L) := \min\{\|x - u\| \colon x \in L\}\,.$$

Zeigen Sie, dass für den Abstand zwischen u und L gilt:

c) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x \in L$, so dass $(x - u)$ orthogonal zu L ist. Für x gilt $d(u, L) = \|x - u\|$ (d. h. *der senkrechte Abstand ist der kürzeste*).

Für Geraden im $\mathbb{R}^2$ kann man den Abstand von einem Punkt noch einfacher beschreiben. Es gilt:

d) Ist $L \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $s \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ orthogonal zu L und $v \in L$ beliebig, so ist

$$L = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle s, x - v\rangle = 0\}\,.$$

Ist $u \in \mathbb{R}^2$, so folgt aus c), dass

$$d(u, L) = \frac{|\langle s, u - v\rangle|}{\|s\|}\,.$$

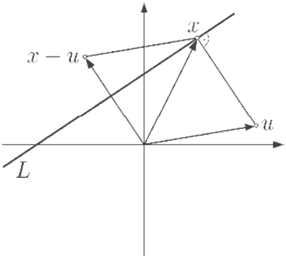
Ist speziell $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$ und $u = (u_1, u_2)$, so ergibt sich

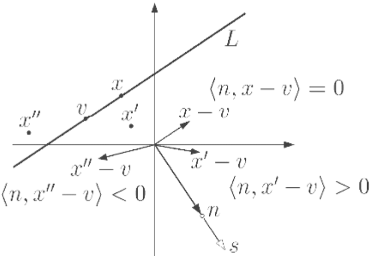
$$d(u, L) = \frac{|a_1u_1 + a_2u_2 - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\,.$$

Mit Hilfe von d) können wir nun für Gleichungen von Geraden im $\mathbb{R}^2$ die sogenannte *Hessesche Normalform* herleiten: Ist $s \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ orthogonal zur Geraden $L \subset \mathbb{R}^2$, so sei $n := \frac{1}{\|s\|} \cdot s$. Dann ist $\|n\| = 1$. Man nennt n einen *Normalenvektor* zu L; nach d) gilt für beliebiges $v \in L$, dass

$$L = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle n, x - v\rangle = 0\}\,.$$

Für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ gilt dann $d(u, L) = |\langle n, u - v\rangle|$, die Funktion $\langle n, u - v\rangle$ misst also mit Vorzeichen den Abstand von u zu L.





5. Aufgabe 4 lässt sich leicht verallgemeinern, um den *Abstand zwischen einem Punkt und einer Hyperebene im* $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen; eine Teilmenge H des $\mathbb{R}^n$ heißt dabei *Hyperebene*, falls H ein affiner Unterraum der Dimension $(n-1)$ ist, d. h. es existiert ein $v \in \mathbb{R}^n$ und ein Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $(n-1)$, so dass $H = v + W$. Ist $H = v + \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, so heißt $s \in \mathbb{R}^n$ orthogonal zu H, wenn $\langle s, x-y\rangle = 0$ für alle $x, y \in H$. Zeigen Sie:

a) s ist orthogonal zu $H \Leftrightarrow s \perp w_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$.

b) Ist die Hyperebene gegeben durch $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$, so ist $(a_1, \ldots, a_n)$ orthogonal zu H.

Ist die Hyperebene H also durch eine Gleichung gegeben, so findet man leicht einen zu H orthogonalen Vektor. Was man tun kann, falls die Ebene in Parameterdarstellung gegeben ist, wird in Aufgabe 6 zu 5.2 gezeigt.

Ist $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene und $u \in \mathbb{R}^n$, so ist der Abstand zwischen u und H erklärt durch

$$d(u,H) := \min\{\|x-u\| \colon x \in H\}.$$

Beweisen Sie:

c) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x \in H$, so dass $(x-u)$ orthogonal zu H ist. Es gilt $d(u,H) = \|x-u\|$ (d. h. *der senkrechte Abstand ist der kürzeste*).

d) Ist $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$ und $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$d(u,H) = \frac{|a_1u_1 + \ldots + a_nu_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Ist N orthogonal zu H mit $\|N\| = 1$ und $v \in H$ beliebig, so leitet man wie in Aufgabe 4 die *Hessesche Normalform* der Gleichung der Hyperebene ab:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle N, x-v\rangle = 0\}.$$

6. Seien $\mathscr{N} \subset \mathscr{L}(\mathbb{R})$ wie in Beispiel 2b) aus 2.2.6. Betrachten Sie die Abbildungen

$$\| \,\|: \ \mathscr{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt, \quad \text{und}$$

$$\| \,\|': \ \mathscr{L}(\mathbb{R})/\mathscr{N} \to \mathbb{R}, \quad f + \mathscr{N} \mapsto \|f\|.$$

Welche davon ist eine Norm?

5.2 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

1. Zeigen Sie für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ die Grassmann-Identität

$$x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$$

und folgern daraus die Jacobi-Identität

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$

2. Für $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $(x \times y) \times (x' \times y') = x' \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & y_2 & y'_2 \\ x_3 & y_3 & y'_3 \end{pmatrix} - y' \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x'_1 \\ x_2 & y_2 & x'_2 \\ x_3 & y_3 & x'_3 \end{pmatrix}.$

b) $\langle x \times y, x' \times y'\rangle = \langle x, x'\rangle\langle y, y'\rangle - \langle y, x'\rangle\langle x, y'\rangle.$

3. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$x, y, z \text{ sind linear unabhängig } \Leftrightarrow x \times y, y \times z, z \times x \text{ sind linear unabhängig}.$$

4. Gegeben sei eine Ebene $E = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2 \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Setzt man $a := w_1 \times w_2$ und $b := \langle v, a\rangle$, so gilt

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \langle x, a\rangle = b\}.$$

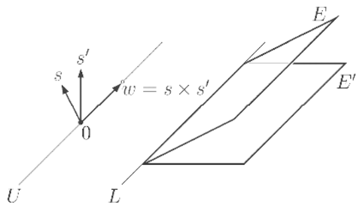
5. Wir wollen mit Hilfe des Vektorproduktes eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden zweier nichtparalleler Ebenen im $\mathbb{R}^3$ bestimmen. Sind zwei Ebenen $E = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$, $E' = v' + \mathbb{R}w'_1 + \mathbb{R}w'_2 \subset \mathbb{R}^3$ gegeben, so sei $W = \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$, $W' = \mathbb{R}w'_1 + \mathbb{R}w'_2$. Da die beiden Ebenen nicht parallel sind, ist $W \neq W'$, und damit hat $U = W \cap W'$ die Dimension 1. Zeigen Sie:

a) Ist $L = E \cap E'$ und $u \in L$, so ist $L = u + U$.

b) Seien $s = w_1 \times w_2$, $s' = w'_1 \times w'_2$ und $w = s \times s'$. Dann gilt $U = \mathbb{R}w$.

Bestimmen Sie nach diesem Verfahren eine Parameterdarstellung von $E \cap E'$, wobei

$$E = (0, 2, 3) + \mathbb{R}(3, 6, 5) + \mathbb{R}(1, 7, -1),$$
$$E' = (-1, 3, 2) + \mathbb{R}(8, 2, 3) + \mathbb{R}(2, -1, -2).$$



6. Das Vektorprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ lässt sich für $n \geqslant 3$ folgendermaßen zu einem Produkt von $n-1$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern: Sind $x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^n$, so sei

$$x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (\det A_i) \cdot e_i \,,$$

wobei $A \in \mathrm{M}((n-1) \times n; \mathbb{R})$ die Matrix ist, die aus den Zeilen $x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}$ besteht und A_i aus A durch Streichen der i-ten Spalte entsteht. Wie im Fall $n=3$ entsteht $x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)}$ also durch formales Entwickeln von

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

nach der ersten Zeile. Zeigen Sie, dass für das verallgemeinerte Vektorprodukt gilt:

a) $x^{(1)} \times \ldots \times x^{(i-1)} \times (x+y) \times x^{(i+1)} \times \ldots \times x^{(n-1)} =$
$x^{(1)} \times \ldots \times x^{(i-1)} \times x \times x^{(i+1)} \times \ldots \times x^{(n-1)} +$
$x^{(1)} \times \ldots \times x^{(i-1)} \times y \times x^{(i+1)} \times \ldots \times x^{(n-1)}$,
$x^{(1)} \times \ldots \times x^{(i-1)} \times (\lambda x) \times x^{(i+1)} \times \ldots \times x^{(n-1)} =$
$\lambda (x^{(1)} \times \ldots \times x^{(i-1)} \times x \times x^{(i+1)} \times \ldots \times x^{(n-1)})$.

b) $x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)} = 0 \Leftrightarrow x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}$ linear abhängig.

c) $\langle x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)}, y \rangle = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & & x_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$,

d) $\langle x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)}, x^{(i)} \rangle = 0$, für $i = 1, \ldots, n-1$.

5.3 Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

1. Zeigen Sie, dass die schiefsymmetrische Bilinearform (vgl. 5.4.1) $\omega\colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ aus 5.3.2 nicht-entartet ist, d. h. : Ist $\omega(v,w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{R}^{2n}$, so ist $v = 0$.

2. Sei $J\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ der Endomorphismus, der gegeben ist durch

$$J(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (-y_1, x_1, \ldots, -y_n, x_n)\,.$$

(Identifiziert man $\mathbb{R}^{2n}$ mit $\mathbb{C}^n$ wie in 5.3.2, so ist J einfach die Multiplikation mit i.) Zeigen Sie, dass für das kanonische Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ im $\mathbb{R}^{2n}$, die Abbildung ω aus 5.3.2 und J der folgende Zusammenhang besteht:

$$\text{Für alle } v, w \in \mathbb{R}^{2n} \text{ ist } \langle v, w\rangle = \omega(v, J(w))\,.$$

3. Eine komplexe Struktur auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist ein Endomorphismus J von V mit $J^2 = -\mathrm{id}$. Zeigen Sie:

a) Mit der skalaren Multiplikation $(x + \mathrm{i}y) \cdot v := xv + yJ(v)$ wird V zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum.

b) Ist V endlichdimensional, so ist $\dim_{\mathbb{R}} V$ gerade.

5.4 Bilinearformen und Sesquilinearformen

1. Sei K ein Körper mit char $K \neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform auf V in eindeutiger Weise als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform darstellen lässt.

2. Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathscr{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V und s eine Bilinearform auf V mit

$$M_{\mathscr{A}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2)$ eine Basis von V ist, und berechnen Sie $M_{\mathscr{B}}(s)$.

3. Gegeben seien $F, G \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, $G(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$. Zeigen Sie, dass $s\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x) \cdot G(y)$ eine Bilinearform ist, und bestimmen Sie die Matrix von s bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

4. Zeigen Sie, dass für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V der folgende Zusammenhang zwischen Normen und Skalarprodukten gilt:

a) Ist $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V mit zugehöriger Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, so gilt die *Parallelogramm-Gleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2\,.$$

b)* Ist umgekehrt $\|\ \|$ eine Norm auf V, die die Parallelogramm-Gleichung erfüllt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

5. Wir wollen zeigen, dass auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum nicht jede Metrik aus einer Norm und nicht jede Norm aus einem Skalarprodukt entsteht. (Zur Erinnerung: Eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $V \to \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften N1, N2, N3 aus 5.1.2, eine Metrik auf V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften D1, D2, D3 aus 5.1.2.)

a) Zeigen Sie, dass für $n \geqslant 2$ auf dem $\mathbb{R}^n$ durch $\|x\| := \max\{|x_i| \colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$ eine Norm definiert ist, für die kein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert mit $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

b) Sei $V = \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen, und für $k \in \mathbb{N}$, $f \in V$ sei $\|f\|_k := \max\{|f(x)| \colon x \in [-k,k]\}$. Zeigen Sie, dass durch
$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f-g\|_k}{1+\|f-g\|_k}$$
eine Metrik auf V definiert ist, für die keine Norm $\|\ \| \colon V \to \mathbb{R}_+$ existiert, so dass $\|f-g\| = d(f,g)$.

6. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $(v_1,\ldots,v_r)$ eine orthonormale Familie in V. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

i) $(v_1,\ldots,v_r)$ ist eine Basis von V.

ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v,v_i\rangle = 0$ für alle i, dass $v = 0$ ist.

iii) Ist $v \in V$, so gilt: $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \langle v,v_i\rangle \cdot v_i$.

iv) Für alle $v,w \in V$ gilt: $\langle v,w\rangle = \sum\limits_{i=1}^{r} \langle v,v_i\rangle \cdot \langle v_i,w\rangle$.

v) Für alle $v \in V$ gilt: $\|v\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} |\langle v,v_i\rangle|^2$.

7. Sei $\mathscr{B} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots)$ und
$$W = \operatorname{span}\mathscr{B} \subset \mathscr{C}([0,2\pi];\mathbb{R}) = V$$
(vgl. mit dem Vektorraum der trigonometrischen Polynome in Aufgabe 4 zu 1.4). Zeigen Sie:

a) Durch $\langle f,g\rangle := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ ist ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) $\mathscr{B}$ ist eine Orthonormalbasis (bzgl. $\langle\ ,\ \rangle$) von W.

c) Ist $f(x) = \frac{a_0}{2}\sqrt{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \in W$, so gilt $a_k = \langle f, \cos kx\rangle$, $b_k = \langle f, \sin kx\rangle$. Für $f \in V$ heißen die Zahlen
$$a_k = \langle f, \cos kx\rangle\,,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad b_l = \langle f, \sin lx\rangle\,,\ l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,$$
die *Fourierkoeffizienten* von f.

d)* Ist $f \in V$ und sind a_k, b_k die Fourierkoeffizienten von f, so gilt die Ungleichung von Bessel:
$$\|f\|^2 \geqslant a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\,.$$

e)* Sind $f, g \in V$ stückweise stetig differenzierbar, und sind a_k, b_k die Fourierkoeffizienten von f und a'_k, b'_k die Fourierkoeffizienten von g, so gilt die Formel von Parseval:
$$\langle f, g\rangle = a_0 a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a'_k + b_k b'_k)\,.$$

8. Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraums des $\mathbb{R}^5$:
$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\2\\3 \end{pmatrix} \right).$$

9. Gegeben sei auf $V = \operatorname{span}(1, t, t^2, t^3) \subset \mathbb{R}[t]$ das Skalarprodukt
$$s(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt\,.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix von s bezüglich der Basis $(1, t, t^2, t^3)$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

10.* Ein *symplektischer Vektorraum* ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer schiefsymmetrischen Bilinearform ω, die nicht-entartet ist (d.h. dass aus $\omega(v,w) = 0$ für alle $w \in V$ stets $v = 0$ folgt). Eine Basis $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$ von V heißt *Darboux-Basis*, wenn gilt: $\omega(v_i, v_j) = \omega(w_i, w_j) = 0$ und $\omega(v_i, w_j) = \delta_{ij}$ für alle i, j. Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale symplektische Vektorraum eine Darboux-Basis besitzt (und damit insbesondere gerade Dimension hat).

Ergänzungsaufgaben

E1. Bestimmen Sie nach dem Schmidtschen Verfahren Orthonormalbasen der folgenden Untervektorräume.

a) $\operatorname{span}\left({}^t(1,2,3), {}^t(4,5,6), {}^t(7,8,9)\right) \subset \mathbb{R}^3$,

b) $\operatorname{span}\left({}^t(2,1,0,0), {}^t(0,-1,4,2), {}^t(1,0,2,-2)\right) \subset \mathbb{R}^4$,

c) $\operatorname{span}\left({}^t(1,\mathrm{i},-\mathrm{i},0,1), {}^t(\mathrm{i},1,0,\mathrm{i},0), {}^t(0,1,\mathrm{i},-\mathrm{i},-1), {}^t(0,0,\mathrm{i},0,3\mathrm{i})\right) \subset \mathbb{C}^5$.

E2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis zu $\operatorname{span}(t, t^2+1, t^2+t) \subset \mathbb{R}[t]$ mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 9.

E3. Zeigen Sie, dass auf
$$V = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \colon\ f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$$
(vgl. Aufgabe 2 d) zu 1.5) durch
$$\langle f,g\rangle := \sum f(x)\cdot g(x)\,,$$
wobei über alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$ und $g(x) \neq 0$ addiert wird, ein Skalarprodukt auf V definiert wird. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bzgl. $\langle\ ,\ \rangle$.

E4. Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei die *Spur* von A definiert durch $\mathrm{Sp}(A) := \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ (vgl. [Fi1], 4.2.2). Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\mathrm{Sp}\,(A\cdot B) = \mathrm{Sp}\,(B\cdot A)$.

b) Ist B invertierbar, so gilt $\mathrm{Sp}\,\big(B^{-1}\cdot(A\cdot B)\big) = \mathrm{Sp}\,A$.

E5. a) Zeigen Sie, dass durch
$$s(A,B) := \mathrm{Sp}\left({}^t\overline{B}\cdot A\right)$$
ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}(m\times n;\mathbb{K})$ definiert wird.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $V = \mathrm{M}(2;\mathbb{R})$ bzgl. des Skalarproduktes aus a).

E6. Die Zuordnung
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sp}\colon\ \mathrm{M}(n;\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}\,, \\ A & \mapsto & \mathrm{Sp}\,A\,, \end{array}$$
ist eine lineare Abbildung.

Lie-Algebra

E7. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei $[\ ,\ ]\colon\ \mathrm{M}(n;\mathbb{K})\times\mathrm{M}(n;\mathbb{K}) \to \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ der Operator mit
$$[A,B] = A\cdot B - B\cdot A\,.$$

Bemerkung. Eine unter der Operation $[\ ,\ ]$ abgeschlossene Untergruppe I von $\mathrm{M}(n;K)$ – d.h. für $A,B \in I$ gilt $[A,B] \in I$ – heißt *Lie-Algebra* (benannt nach dem Mathematiker MARIUS SOPHUS LIE, 1842–1899).

Eine exakte Definition einer Lie-Algebra findet sich unten vor Aufgabe E11.

a) Zeigen Sie, dass für alle $A,B \in \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ gilt: $\mathrm{Sp}[A,B] = 0$.

Es sei $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{K})$ die Lie-Algebra der Matrizen $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$.

Wir definieren mit
$$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{K})\colon\ \mathrm{Sp}\,(A) = 0\}$$
die „spurlosen“ Matrizen (*spezielle lineare Lie-Algebra*) und mit
$$\mathfrak{o}(n;\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{K})\colon\ A + {}^tA = 0\}$$
die Lie-Algebra der *schiefsymmetrischen Matrizen*.

b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{K})$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ ist.

c) Es seien $A, B \in \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ schiefsymmetrisch, d.h. $[A,B] = -{}^t[B,A]$. Zeigen Sie, dass es sich um einen $\mathbb{K}$-Vektorraum handelt.
d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Sp}\, A = 0$ für alle $A \in \mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$ gilt.
e) Es seien $A, B \in \mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass ${}^t[A,B] = -[A,B]$ gilt, d.h. dass $\mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$ eine Lie-Algebra ist.

E8. Wir definieren jetzt die *antihermiteschen Matrizen* (*schiefhermiteschen Matrizen*)

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C}) \colon\ A + {}^t\bar{A} = 0\}.$$

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Eigenschaften in $\mathfrak{u}(n)$.

a) Für jedes $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{u}(n)$ sind die Diagonalelemente a_{ii} imaginär.
b) $\mathfrak{u}(n)$ ist ein Vektorraum über den Körper der rellen Zahlen, aber kein Vektorraum über den Körper der komplexen Zahlen.
c) $\mathfrak{u}(n)$ ist eine Lie-Algebra.

E9. Nach den letzten Aufgaben gilt $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Analog definiert man

$$\mathfrak{su}(n) := \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{su}(n)$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

E10. Zeigen Sie, dass für $A, B, C \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$ die *Jacobi-Identität*

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

gilt. (Bzgl. der Jacobi-Identität für einen anderen Fall vgl. Aufgabe 1 in Abschnitt 5.2.)

Bisher wurden spezielle Fälle von Lie-Algebren untersucht. Die allgemeine Definition ist:

Definition. Ein Vektorraum V über einen Körper $\mathbb{K}$ heißt *Lie-Algebra*, wenn alle $A, B, C \in V$ die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

(1) $\lambda \cdot [A,B] = [\lambda \cdot A, B] = [A, \lambda \cdot B]$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$,
(2) $[A,B] = -[B,A]$,
(3) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$ (Jacobi-Identität).

Hinweis. Lie-Algebren finden Anwendung in der Mathematik und der Physik. Für mathematische Hintergründe vgl. hierzu [F-H], Lecture 8.

Zu *Algebra* vgl. Aufgabe 7 in Abschnitt 6.3.

E11. Lie-Algebren finden Anwendung in der Quantenmechanik. Ein Beispiel hierfür sind die folgenden *Pauli-Matrizen*, die WOLFGANG PAULI (1900–1958) im Zusammenhang mit dem Spin von Elektronen verwendete.

Es seien

$$\sigma_0 = \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie für die Pauli-Matrizen:

a) $\xi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{bmatrix} \in \mathbf{S}_3$ sei eine Permutation. Dann gilt
$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \operatorname{sign}(\xi) \cdot \sigma_k .$$

b) $\sigma_i \cdot \sigma_j + \sigma_j \cdot \sigma_i = 2 \cdot \delta_{ij} \cdot \sigma_0$, wobei $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$ das Kronecker-Symbol ist.

c) $(\mathrm{i} \cdot \sigma_1, \mathrm{i} \cdot \sigma_2, \mathrm{i} \cdot \sigma_3)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathfrak{su}(2)$ und des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ und des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathfrak{u}(2)$.
$(\mathrm{i} \cdot \sigma_0, \mathrm{i} \cdot \sigma_1, \mathrm{i} \cdot \sigma_2, \mathrm{i} \cdot \sigma_3)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathfrak{u}(2)$ und des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathfrak{gl}(2)$.

Hinweis. Genauere Informationen und Hintergründe zu Pauli-Matrizen finden sie in [S-W], S. 536ff.

Quadriken

In den folgenden Aufgaben werden wir uns mit Quadriken beschäftigen. Zur Vereinfachung haben wir die Bezeichnungen aus [Fi4], Abschnitt 5.2.7, übernommen.

Quadriken sind verallgemeinerte Kegelschnitte bzw. mathematisch formuliert Teilmengen eines affinen Raums, die durch eine quadratische Gleichung beschrieben werden können. Dies kann auf elegante Weise mit Matrizen definiert werden. Bevor wir diese Definition formulieren, brauchen wir folgende Notation: für einen Vektor $x = {}^t(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir den Vektor $x' \in \mathbb{R}^{n+1}$ durch $x' = {}^t(1, x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Definition. Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Quadrik*, wenn es eine symmetrische Matrix $A' \in M\big((n+1) \times (n+1)\big)$ mit $\operatorname{rang}(A') \geqslant 1$ gibt, so dass
$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ {}^t x' \cdot A' \cdot x' = 0\}.$$
Für den Fall $n = 2$ heißen ein Quadriken auch *Kegelschnitte*.

Bemerkung. Eine andere übliche Definition von Quadriken ist gegeben durch symmetrische Matrizen $A \in M\big(n \times n\big)$ zusammen mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, so dass
$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ {}^t x \cdot A \cdot x = c\}.$$

E12.

a) Zeigen Sie, dass die Quadrik des Einheitskreises
$$Q = \{{}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$$
auch gegeben ist durch die Matrix A' mit
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Matrix A für einen beliebigen Kreis mit Mittelpunkt (m_1, m_2) und Radius r.

E13. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Q Quadriken sind:

a) $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :$ es gibt $a_1, a_2, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$ mit
$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0\}$,

b) $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0\}$,

c) $Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$,

d) $Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$.

Bemerkung. Weitere Quadriken sind Kreise, Ellipsen und Hyperbeln, s. Abschnitt 0.5.

E14. Zeigen Sie, dass für eine Quadrik Q gilt:

Es gibt eine (nicht triviale) symmetrische Bilinearform $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, eine Linearform $\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x,x) + 2\omega(x) + \alpha = 0\}.$$

5.5 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

1. Zeigen Sie, dass für $F \in O(3)$ gilt: $F(x) \times F(y) = (\det F) \cdot F(x \times y)$.

2. Ist V ein euklidischer Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$, so heißt F *winkeltreu*, falls F injektiv ist und

$$\sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(F(v), F(w)) \quad \text{für alle } v, w \in V \smallsetminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass F winkeltreu ist genau dann, wenn ein orthogonales $G \in \mathrm{End}(V)$ und ein $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ existieren mit $F = \lambda \cdot G$.

3. Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^n$, wobei $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

x und y sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ z und $\bar{z}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$.

4. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $S \in U(3)$, so dass ${}^t\bar{S}AS$ Diagonalgestalt hat und eine Matrix $T \in O(3)$, so dass für ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ gilt:

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

5. Sei $\pi \in \mathbf{S}_n$ eine Permutation und die lineare Abbildung $f_\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f_\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von f_π.

6. Gegeben sei ein symplektischer Vektorraum V (vgl. Aufgabe 10 zu 5.4) und eine komplexe Struktur J auf V (vgl. Aufgabe 3 zu 5.3), so dass für alle $v,w \in V$ gilt: $\omega(v,w) = \omega(J(v),J(w))$.

a) Zeigen Sie, dass durch $\langle v,w\rangle := \omega(v,J(w))$ eine symmetrische Bilinearform auf V definiert wird, und dass J orthogonal bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ ist, d. h. es gilt $\langle v,w\rangle = \langle J(v),J(w)\rangle$ für alle $v,w \in V$.

b) Die komplexe Struktur J heißt ω-kalibriert, wenn $\langle\ ,\ \rangle$ positiv definit ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall durch $s(v,w) := \langle v,w\rangle - \mathrm{i}\omega(v,w)$ eine positiv definite hermitesche Form auf dem von J induzierten $\mathbb{C}$-Vektorraum V gegeben ist.

Ergänzungsaufgabe

E1. Es sei V ein komplexer Vektorraum und s eine positiv definite hermitesche Form auf V. Ist $J\colon\ V \to V$, $v \mapsto \mathrm{i}v$, die durch i definierte komplexe Struktur auf dem reellen Vektorraum ${}_{\mathbb{R}}V$, so seien für $v,w \in V$

$$\langle v,w\rangle := \mathrm{Re}\,(s(v,w)) \quad \text{und} \quad \omega(v,w) := -\mathrm{Im}\,(s(v,w))\,.$$

Zeigen Sie:

a) $\langle\ ,\ \rangle$ ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf ${}_{\mathbb{R}}V$.

b) Mit ω wird ${}_{\mathbb{R}}V$ zu einem symplektischen Vektorraum (vgl. Aufgabe 10* zu 5.4).

c) Für alle $v,w \in V$ gilt

$$\langle v,w\rangle = \langle J(v),J(w)\rangle \quad \text{sowie} \quad \omega(v,w) = \omega\,(J(v),J(w))\,.$$

Vergleichen Sie diese Aufgabe mit der Aufgabe 6.

5.6 Selbstadjungierte Endomorphismen*

1. Sei $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $F = 0$ ist.

2. Seien F und G zwei selbstadjungierte Endomorphismen auf einem endlichdimensionalen euklidischen bzw. unitren Vektorraum V. Zeigen Sie, dass $F \circ G$ selbstadjungiert ist genau dann, wenn $F \circ G = G \circ F$.

3. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix $S \in O(3)$, so dass ${}^tSAS$ eine Diagonalmatrix ist.

Ergänzungsaufgaben

Ein Endomorphismus F eines endlichdimensionalen euklidischen oder unitären Vektorraumes V heißt *anti-selbstadjungiert*, wenn für alle $v,w \in V$ gilt:

$$\langle F(v), w \rangle = -\langle v, F(w) \rangle .$$

E1. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und F ein Endomorphismus von V.

a) Zeigen Sie, dass F genau dann anti-selbstadjungiert ist, wenn $\langle F(v), v \rangle = 0$ für alle $v \in V$ gilt.

b) Ist F anti-selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von F, so folgt $\lambda = 0$.

E2. Es sei F ein Endomorphismus eines euklidischen Vektorraumes V.

a) $\mathscr{B}$ sei eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt:

$$F \text{ ist anti-selbstadjungiert} \Leftrightarrow M_{\mathscr{B}}(F) \text{ ist schiefsymmetrisch.}$$

b) Ist F anti-selbstadjungiert, so gibt es eine Orthonormalbasis $\mathscr{B}$ von V, bezüglich der

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

gilt.

Die Theorie von anti-selbstadjungierten Endomorphismen eines unitären Vektorraumes ergibt sich aus den Aufgaben E1 und E2 zu 6.2 sowie Abschnitt 6.2.7.

5.7 Hauptachsentransformation*

1. Sei s die symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathscr{A}$ des $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathrm{M}_{\mathscr{A}}(s)$ Diagonalgestalt hat und eine weitere Basis $\mathscr{B}$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

2. Sei $\mathscr{D} = \mathscr{D}(]-1,1[;\mathbb{R})$ der Vektorraum der auf $]-1,1[$ differenzierbaren Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass $d\colon \mathscr{D} \times \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto (fg)'(0)$ eine symmetrische Bilinearform ist.

b) Bestimmen Sie den Ausartungsraum $\mathscr{D}_0$ von d.

3. Diagonalisieren Sie die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit der symmetrischen Umformungsmethode aus 5.7.6.

4. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n;\mathbb{R})$ heißt *negativ definit*, wenn

$${}^t xAx < 0$$

für jedes $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: A negativ definit $\Leftrightarrow -A$ positiv definit.

5. Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

6. Eine Teilmenge C eines K-Vektorraumes V heißt *Kegel*, wenn für $v \in C$ und $\lambda \in K$ auch $\lambda \cdot v \in C$ gilt.

Man zeige, dass die in 5.7.4 erklärten Mengen C_0, C_+ und C_- im Fall $K = \mathbb{R}$ Kegel sind, und man bestimme diese Kegel sowie V_0 explizit für $V = \mathbb{R}^2$, wenn s durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

erklärt ist.

7. Man zeige mit Hilfe der Hauptachsentranformation symmetrischer Matrizen, dass zu jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform s eine Zerlegung

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0,$$

wie im Trägheitssatz vorausgesetzt, existiert.

Ergänzungsaufgaben

E1. Lösen Sie Aufgabe 10* aus Abschnitt 5.4 erneut, diesmal mit den Methoden aus dem Beweis des Orthonormalisierungssatzes 5.7.5 (Induktion über n).

E2. $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ sei *hermitesch* und $Q(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$.

a) Zeigen Sie, dass für die Spur (vgl. [Fi1], 4.2.2 und die Aufgaben ab E4 in Abschnitt 5.1) von A

$$\mathrm{Sp}\big(Q(A)\big) = a \cdot \left(\sum_i a_{ii}^2 + 2 \sum_{i<j} \big((a_{ij}^R)^2 + (a_{ij}^I)^2 \big) \right) + b \cdot \sum_i a_{ii} + c \cdot n$$

gilt, wenn $A^0 := E_n$ gesetzt wird. Hier stehen a_{ij}^R für den Realteil und a_{ij}^I für den Imaginärteil von a_{ij}.

b) Es sei

$$\begin{aligned} P(A) &:= c \cdot \exp\Big(-\mathrm{Sp}\big(Q(A)\big) \Big) \mathrm{d}A \\ &= c \cdot \exp\big(-\mathrm{Sp}\big(Q(A)\big) \big) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}A_{ii} \prod_{i<j} \big(\mathrm{d}A_{ij}^R \mathrm{d}A_{ij}^I \big) . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie c so, dass $\int_{\mathbb{R}^{n^2}} P(A) = 1$ gilt (vgl. [Ba]).

Bemerkung. Obige Überlegung bildet eine Grundlage der Theorie von *Zufallsmatrizen*, vgl. [Me]. Diese Matrizen dürfen nicht mit den manchmal genauso bezeichneten Übergangsmatrizen in Markov-Ketten verwechselt werden.

Kapitel 6

Dualität*

Die Inhalte dieses Kapitels sind recht abstrakt und für Anfänger möglicherweise verwirrend. Bei näherer Beschäftigung entwickeln sie jedoch ihre Reize: die benutzten Methoden werden im Vergleich zu den bisherigen Kapiteln eleganter. Zusätzlich kann die hier behandelte Mathematik als Grundstein für tieferes Wissen der Algebra oder als Begleiter zu späteren Inhalten des Grundstudiums oder sogar des Hauptstudiums betrachtet werden. Dies trifft insbesondere für die Abschnitte 6.3 und 6.4 zu.

6.1 Dualräume

1. Gegeben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V mit Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$. Sind $\mathscr{A}^*$ und $\mathscr{B}^*$ die zugehörigen dualen Basen von V^*, so gilt für die Transformationsmatrizen

$$T^{\mathscr{A}^*}_{\mathscr{B}^*} = ({}^tT^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}})^{-1}\,.$$

2. Gegeben sei der Untervektorraum

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^5\,.$$

Bestimmen Sie eine Basis von U^0.

3. Zeigen Sie, dass für Vektorräume V,W durch $\operatorname{Hom}(V,W) \to \operatorname{Hom}(W^*,V^*)$, $F \mapsto F^*$, ein Isomorphismus von Vektorräumen gegeben ist.

4. Sei $F\colon V \to W$ ein Homomorphismus und $U \subset W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: $F^*(U^0) = (F^{-1}(U))^0$.

5. Es seien $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

a) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

b) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

6.2 Dualität und Skalarprodukte

1. Seien V,W euklidische Vektorräume, $F\colon V \to W$ linear und $U \subset W$ ein Untervektorraum. Dann gilt: $F^{\mathrm{ad}}(U^\perp) = (F^{-1}(U))^\perp$.

2. Ist V ein euklidischer Vektorraum und $F\colon V \to V$ selbstadjungiert, so gilt $F(U^\perp) = (F^{-1}(U))^\perp$ für alle Untervektorräume $U \subset V$. Gilt die Umkehrung auch?

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_7

3. Zeigen Sie, dass für einen unitären Vektorraum V durch $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$, $F \mapsto F^{\mathrm{ad}}$ ein Semi-Isomorphismus gegeben ist.

4. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$ antihermitesch, das heißt $-A = {}^t\overline{A}$. Zeigen Sie, dass A normal ist und alle Eigenwerte von A in $\mathrm{i}\mathbb{R}$ liegen.

5. Seien $L = v + \mathbb{R}w$ und $L' = v' + \mathbb{R}w'$ zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$ und $x := v' - v$. Zeigen Sie:

$$L \text{ und } L' \text{ sind windschief } \Leftrightarrow x, w \text{ und } w' \text{ sind linear unabhängig}\,.$$

6. Gegeben seien zwei windschiefe Geraden $L = v + \mathbb{R}w$ und $L' = v' + \mathbb{R}w'$ im $\mathbb{R}^n$. Wir wollen zwei Methoden angeben, um den Abstand

$$d(L,L') = \min\{d(u,u') = \|u' - u\| : u \in L,\ u' \in L'\}$$

zu berechnen. Zur Vereinfachung nehmen wir $\|w\| = \|w'\| = 1$ an und definieren

$$\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (\lambda, \lambda') \mapsto \|v' + \lambda' w' - v - \lambda w\|^2\,.$$

a) Untersuchen Sie die Funktion δ mit Hilfe der Differentialrechnung auf Extrema und bestimmen damit den Abstand $d(L,L')$.

b) Es gilt $\delta(\lambda,\lambda') = \lambda^2 + a\lambda\lambda' + \lambda'^2 + b\lambda + c\lambda' + d$. Setzen Sie $\mu := \lambda + \frac{a}{2}\lambda'$ und $\mu' = \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\lambda'$ und zeigen Sie, dass man auf diese Weise δ durch quadratische Ergänzung schreiben kann als $\delta(\lambda,\lambda') = (\mu - e)^2 + (\mu' - f)^2 + g$. Dann ist $g = d(L,L')$.

Ergänzungsaufgaben

E1. Zeigen Sie, dass ein anti-selbstadjungierter Endomorphismus F (vgl. die Ergänzungsaufgaben zu 5.6) eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V normal ist.

E2. Es sei F ein Endomorphismus eines unitären Vektorraumes V und $\mathscr{B}$ eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt:

$$F \text{ ist anti-selbstadjungiert} \Leftrightarrow M_{\mathscr{B}}(F) \text{ ist antihermitesch}$$

(vgl. Aufgabe 4).

6.3 Tensorprodukte*

1. Es sei V ein Vektorraum über einen Körper K und $L \supset K$ ein Erweiterungskörper von L, d.h. L ist ein Körper und K ein Unterring von L (vgl. 1.3.2).

a) Zeigen Sie, dass L eine Struktur als K-Vektorraum trägt.

b) Für Elemente $\sum \lambda_i \otimes v_i \in L \otimes_K V$ und $\lambda \in L$ definieren wir eine skalare Multiplikation durch

$$\lambda \cdot \left(\sum \lambda_i \otimes v_i\right) := \sum \lambda\lambda_i \otimes v_i\,.$$

Zeigen Sie, dass $L \otimes_K V$ mit der üblichen Addition und dieser skalaren Multiplikation zu einem L-Vektorraum wird.

c) Ist die Familie $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V über K, so ist die Familie $(1\otimes v_i)_{i\in I}$ eine Basis von $L\otimes_K V$ über L. Insbesondere gilt $\dim_K V = \dim_L(L\otimes_K V)$.

d) Durch die Abbildung

$$\varphi\colon\ V\to K\otimes_K V\,,\quad v\mapsto 1\otimes v\,,$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben.

2. Es seien U,V,W Vektorräume über demselben Körper K.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Bil}\,(V,W;U)$ mit der Addition von Abbildungen und der üblichen Multiplikation mit Skalaren ein K-Vektorraum ist und dass die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Bil}(V,W;U) & \to & \mathrm{Hom}(V\otimes W,U)\,,\\ \xi & \mapsto & \xi_\otimes\,,\end{array}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist. Insbesondere erhält man für $V=W$ und $U=K$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Bil}\,(V;K)\to(V\otimes V)^*\,,\quad \xi\mapsto\xi_\otimes\,.$$

b) Zeigen Sie analog, dass die Menge $\mathrm{Alt}^2\,(V;W)$ mit der Addition von Abbildungen und der üblichen Multiplikation von Skalaren ein K-Vektorraum ist, und dass die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Alt}^2(V;W) & \to & \mathrm{Hom}(V\wedge V,W)\,,\\ \xi & \mapsto & \xi_\wedge\,,\end{array}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist. Für $W=K$ erhält man einen Isomorphismus

$$\mathrm{Alt}^2(V;K)\to V^*\wedge V^*\,,\quad \xi\mapsto\xi_\wedge\,.$$

3. In dieser Aufgabe betrachten wir die kanonische Abbildung

$$\eta\colon\ V\times W\to V\otimes W\,,\quad (v,w)\mapsto v\otimes w\,,$$

noch etwas genauer.

a) Zeigen Sie, dass $Q:=\eta(V\times W)\subset V\otimes W$ ein *Kegel* ist, d.h. für $u\in Q$ und $\lambda\in K$ ist $\lambda u\in Q$.

b)* Für $V=K^m$ und $W=K^n$ gebe man Gleichungen für Q in $K^m\otimes K^n=K^{m\cdot n}$ an. (Hinweis: Beschreiben Sie η durch $z_{ij}:=x_iy_j$.)

c) Wann ist η injektiv/surjektiv/bijektiv?

4. Es seien V und W Vektorräume über einen Körper K und $(v_i)_{i\in I}$ bzw. $(w_j)_{j\in J}$ Familien linear unabhängiger Vektoren in V bzw. W.

a) Die Familie

$$(v_i\otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$$

ist linear unabhängig in $V\otimes_K W$.

b) Für Vektoren $v\in V$ und $w\in W$ gilt:

$$v\otimes w=0\Rightarrow v=0 \text{ oder } w=0\,.$$

5. Für K-Vektorräume V, V', W, W' sowie Homomorphismen $F\colon\ V \to V'$ und $G\colon\ W \to W'$ definieren wir das Tensorprodukt von F und G durch

$$\begin{aligned}(F\otimes G)\colon\ V\otimes W &\to V'\otimes W',\\ v\otimes w &\mapsto F(v)\otimes G(w).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass hierdurch ein Vektorraum-Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_K(V,V')\otimes\mathrm{Hom}_K(W,W')\to\mathrm{Hom}_K(V\otimes W,V'\otimes W')$$

definiert wird.

6. Für Vektoren $v_1,v_2\in V$ gilt:

$$v_1,v_2 \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow v_1\wedge v_2=0 \text{ in } V\wedge V.$$

7. Sei A ein K-Vektorraum. A heißt K-*Algebra*, falls es zusätzlich eine Multiplikationsabbildung

$$\mu\colon\ A\times A\to A,\quad (a,a')\mapsto \mu(a,a')=:a\cdot a',$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

1) μ ist K-bilinear.
2) A zusammen mit der Vektorraumaddition und der Multiplikation μ ist ein Ring.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden K-Vektorräume auch K-Algebren sind:
   i) der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$,
   ii) der K-Vektorraum $\mathrm{M}(n\times n;K)$ bzgl. der Matrizenmultiplikation,
   iii) der K-Vektorraum $K[t_1,\ldots,t_n]$ bzgl. der üblichen Multiplikation von Polynomen (vgl. Aufgabe 9 zu 1.3).
b) Sind K-Algebren A und B gegeben, so ist $A\otimes B$ als K-Vektorraum erklärt. Zeigen Sie, dass $A\otimes B$ auf eindeutige Weise so zu einer K-Algebra gemacht werden kann, dass für alle $a,a'\in A$ und $b,b'\in B$

$$(a\otimes b)\cdot(a'\otimes b')=(a\cdot a')\otimes(b\cdot b')$$

   gilt.
c) Wird $K[t]\otimes K[t]$ wie in b) zu einer K-Algebra gemacht, so definiert der Vektorraum-Isomorphismus

$$K[t]\otimes K[t]\to K[t_1,t_2],\quad t^i\otimes t^j\mapsto t_1^i t_2^j,$$

   aus Beispiel 6.3.4 a) einen Isomorphismus von Ringen mit $1_{K[t]\otimes K[t]}\mapsto 1_{K[t_1,t_2]}$.

8. Zeigen Sie in Analogie zu Theorem 6.3.8 die Existenz eines *symmetrischen Produktes*:

Für jeden K-Vektorraum V gibt es einen K-Vektorraum $V\vee V$ zusammen mit einer symmetrischen Abbildung

$$\vee\colon\ V\times V\to V\vee V,$$

die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: zu jedem K-Vektorraum W zusammen mit einer symmetrischen Abbildung $\xi\colon\ V\times V\to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\vee$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[d, "\vee"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ V \vee V \arrow[r, "\xi_\vee"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist durch $v_i \vee v_j := \vee(v_i, v_j)$ mit $i \leqslant j$ eine Basis von $V \vee V$ gegeben. Insbesondere ist

$$\dim(V \vee V) = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

9. Beweisen Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften aus Theorem 6.3.3, Theorem 6.3.8 und Aufgabe 8 die Eindeutigkeit von Tensorprodukt, äußerem Produkt und symmetrischem Produkt, d.h.

a) gibt es $\tilde{\eta}\colon\ V \times W \to V \tilde{\otimes} W$ mit denselben Eigenschaften, dann existiert ein Isomorphismus τ, so dass das Diagramm 1 kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"] & \\ V \otimes W \arrow[rr, "\tau"] & & V \tilde{\otimes} W \end{tikzcd}$$

Diagramm 1

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "\wedge"'] \arrow[dr, "\tilde{\wedge}"] & \\ V \wedge W \arrow[rr, "\tau"] & & V \tilde{\wedge} W \end{tikzcd}$$

Diagramm 2

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "\vee"'] \arrow[dr, "\tilde{\vee}"] & \\ V \vee W \arrow[rr, "\tau"] & & V \tilde{\vee} W \end{tikzcd}$$

Diagramm 3

b) gibt es $\tilde{\wedge}\colon\ V \times W \to V \tilde{\wedge} W$ mit denselben Eigenschaften, dann existiert ein Isomorphismus τ, so dass das Diagramm 2 kommutiert.

c) gibt es $\tilde{\vee}\colon\ V \times W \to V \tilde{\vee} W$ mit denselben Eigenschaften, dann existiert ein Isomorphismus τ, so dass das Diagramm 3 kommutiert.

6.4 Multilineare Algebra*

1. Führen Sie die Einzelheiten des Beweises von Theorem 6.4.1 aus.

2. Zeigen Sie, dass für K-Vektorräume V_1, V_2 und V_3 die kanonischen Abbildungen, die gegeben sind durch

$$\begin{array}{ccccc} (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \longrightarrow & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 & \longleftarrow & V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \\ & & & & \\ (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 & \longmapsto & v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 & \longleftarrow\!\!\shortmid & v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)\,, \end{array}$$

Isomorphismen sind. Folgern Sie daraus, dass für jeden K-Vektorraum W die Vektorräume

$$\mathrm{Bil}\,((V_1 \otimes V_2), V_3; W)\,, \quad \mathrm{Bil}\,(V_1, (V_2 \otimes V_3); W)$$

(vgl. Aufgabe 2 zu 6.3) und

$$\mathrm{Tril}(V_1, V_2, V_3; W) := \{\xi : \ V_1 \times V_2 \times V_3 \to W : \ \xi \text{ trilinear}\}$$

kanonisch isomorph sind.

3. Beweisen Sie Theorem 6.4.2.

4. Es sei V ein K-Vektorraum.

a) Für Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ gilt:

$$v_1, \ldots, v_k \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = 0 \text{ in } \bigwedge^k V\,.$$

b) Ist $\dim V = n$, so gilt $\bigwedge^k V = 0$ für $k > n$.

5. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung von Aufgabe 7 zu Abschnitt 6.3: Zu einem K-Vektorraum V und einer natürlichen Zahl $k \geqslant 1$ gibt es einen K-Vektorraum $\bigvee^k V$ zusammen mit einer universellen symmetrischen Abbildung

$$\vee : \ V^k \to \bigvee^k V\,,$$

d.h. zu jeder symmetrischen Abbildung

$$\xi : \ V^k \to W$$

gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\vee$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V^k = V \times \ldots \times V \arrow[d, "\vee"] \arrow[dr, "\xi"] & \\
\bigvee^k V = V \vee \ldots \vee V \arrow[r, "\xi_\vee"] & W
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist eine Basis von $\bigvee^k V$ gegeben durch die Produkte

$$v_{i_1} \vee \ldots \vee v_{i_k} \quad \text{mit } 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n\,.$$

Insbesondere ist $\dim \bigvee^k V = \binom{n+k-1}{k}$.

Der Raum $\bigvee^k V$ heißt *symmetrisches Produkt der Ordnung k über V*.

6. Es sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis des Standardraumes K^n. Mit $K[t_1, \ldots, t_n]_{(k)}$ bezeichnen wir den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad k in den Unbestimmten $t_1, \ldots, t_n$ (vgl. Aufgabe 9 zu 1.3). Zeigen Sie, dass durch die Zuordnung

$$\bigvee^k K^n \to K[t_1, \ldots, t_n]_{(k)}\,, \quad e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_k} \mapsto t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_k}\,,$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen definiert wird.

7. V sei ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\alpha = (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) \in \bigwedge^k V$ sowie $\beta = (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_l) \in \bigwedge^l V$.

a) Zeigen Sie, dass eine bilineare Abbildung

$$\mu : \ \bigwedge^k V \times \bigwedge^l V \to \bigwedge^{k+l} V$$

mit
$$(\alpha,\beta) \mapsto \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_l$$
existiert. Das Element $\alpha \wedge \beta := \mu(\alpha,\beta)$ heißt *äußeres Produkt* von α und β.

b) Es gilt
$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\cdot l}\beta \wedge \alpha\,.$$

8. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $\dim V = n$.

a) Zeigen Sie, dass die bilinearen Abbildungen, die durch die folgenden Zuordnungen definiert werden, nicht ausgeartet sind (vgl. 6.2.1).

i) $\bigwedge^k V \times \bigwedge^{n-k} V \to \bigwedge^n V \cong K\,, \quad (\alpha,\beta) \mapsto \alpha \wedge \beta.$
Die Isomorphie von $\bigwedge^n V$ und K ergibt sich dabei aus Theorem 6.4.2.

ii) Als Verallgemeinerung des Beispiels aus 6.2.1
$$\bigwedge^k V^* \times \bigwedge^k V \to K\,, \quad (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \mapsto \det \varphi(v)\,,$$
wobei
$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \cdots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}.$$

b) Folgern Sie aus Teil a), dass es kanonische Isomorphismen

i) $\bigwedge^k V^* \to \left(\bigwedge^k V\right)^*$ und

ii) $\bigwedge^k V \to \bigwedge^{n-k} V^*$

gibt.

9. V und W seien K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Menge
$$\mathrm{Alt}^k(V;W) := \left\{\xi :\ V^k \to W :\ \xi \text{ ist alternierend}\right\}$$
zusammen mit der Addition von Abbildungen und der üblichen Multiplikation mit Skalaren ein K-Vektorraum ist, und dass die kanonische Abbildung
$$\mathrm{Alt}^k(V;W) \to \mathrm{Hom}(\textstyle\bigwedge^k V, W)\,, \quad \xi \mapsto \xi_\wedge\,,$$
ein Vektorraumisomorphismus ist. Insbesondere erhält man für $W = K$ einen kanonischen Isomorphismus
$$\mathrm{Alt}^k(V;K) \to \textstyle\bigwedge^k V^*\,.$$

Ergänzungsaufgaben

Wir weisen in den folgenden Aufgaben mit den Zusammenhängen

(1) $\eta(u_1,\ldots,u_{i-1},\lambda\cdot u_i,u_{i+1},\ldots,u_k)=\lambda\cdot\eta(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_k)$
für alle $1\leqslant i\leqslant k$ und für alle $\lambda\in K$,

(2) $$\begin{aligned}\eta(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i+u_i^*,u_{i+1},\ldots,u_k)=\ &\eta(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_k)\\ &+\eta(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i^*,u_{i+1},\ldots,u_k)\end{aligned}$$
für alle $1\leqslant i\leqslant k$, für alle $u_i,u_i^*\in U_i$,

nach, dass es sich bei η um eine multilineare Abbildungen handelt.

E1. Für die folgenden Aufgaben bezeichnen wir die Menge der multilinearen Abbildungen zwischen K-Vektorräumen

$$V_1\times\ldots\times V_k\to W \text{ mit } \quad L^k(V_1,\ldots,V_k;W).$$

a) Es seien $\xi\in L^k(V_1,\ldots,V_k;W)$. Für $i=1,\ldots,k$ seien $U_i\subset V_i$ Untervektorräume und $f_i\colon\ U_i\to V_i$ lineare Abbildungen. Ferner sei Z ein K-Vektorraum und$g\in\mathrm{Hom}(W,Z)$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} g\circ\xi(f_1,\ldots,f_k)\colon\ U_1\times\ldots\times U_k & \to & Z,\\ (u_1,\ldots,u_n) & \mapsto & g\big(\xi(f_1(u_1),f_2(u_2),\ldots,f_k(u_k))\big),\end{array}$$

eine multilineare Abbildung, d.h. $g\circ\xi(f_1,\ldots,f_k)\in L^k(V_1,\ldots,V_k;Z)$. Dies ist im kommenden Diagramm dargestellt. Es ist zu zeigen, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} V_1 & \times\ldots\times & V_k \arrow[r, "\xi"] & W \arrow[d, "g"] \\ U_1 \arrow[u, "f_1"] & \times\ldots\times \arrow[u] & U_k \arrow[u, "f_k"] \arrow[r, "\eta"'] & Z \end{tikzcd}$$

b) Es seien

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 & \in & L^r(V_1,\ldots,V_r;W_1),\\ \xi_2 & \in & L^{k-r}(V_{r+1},\ldots,V_k;W_2),\\ \xi & \in & L^2(W_1,W_2;Z).\end{array}$$

Dann gilt: Die Abbildung $\eta\colon\ V_1\times\ldots\times V_k\to Z$ mit
$\eta\big(v_1,\ldots,v_k)\mapsto\xi\big(\xi_1(v_1,\ldots,v_r),\xi_2(v_{r+1},\ldots,v_k)\big)$
ist multilinear, d.h. $\eta\in L^k(V_1,\ldots,V_k;Z)$.

Zu zeigen ist, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_r \arrow[d, "\xi_1"'] \arrow[drr, hook] & & & & V_{r+1} \times \ldots \times V_k \arrow[d, "\xi_2"] \arrow[dll, hook'] \\
W_1 \arrow[drr, hook] & & V_1 \times \ldots \times V_k \arrow[d, "\xi_1 \times \xi_2"] & & W_2 \arrow[dll, hook'] \\
& & W_1 \times W_2 \arrow[d, "\eta"] & & \\
& & Z & &
\end{tikzcd}$$

E2. Es sei $\xi \in L^k(V_1, \ldots, V_k; W)$ multilinear und $v \in V_i$ für ein $1 \leqslant i \leqslant k$. Die Abbildung

$$\xi_{(i,v)} \colon V_1 \times \ldots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \ldots \times V_k \to W$$

sei definiert durch

$$\xi_{(i,v)}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k) = \xi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k).$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

a) $\xi_{(i,v)}$ ist multilinear, d.h. $\xi_{(i,v)} \in L^{k-1}(V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_k)$.

b) Es sei $V_i^0 := \{v \in V_i \colon \xi_{(i,v)} = 0\}$. Zeigen Sie, dass V_i^0 ein Untervektorraum von V_i ist.

c) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \eta \colon L^k(V_1, \ldots, V_k; W) & \to & \mathrm{Hom}\big(V_i, L^{k-1}(V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_k; W)\big), \\ \xi & \mapsto & \big(v \mapsto \xi_{(i,v)}\big), \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Im Verlauf dieser Aufgabe werden wir mehrere Indizes für Vektorräume und duale Vektorräume brauchen. Um dies übersichtlicher zu machen, werden wir bei Vektoren eines Vektorraums einen Index im Fuß des Vektors notieren, z.B. v_i, wohingegen wir Indizes bei Vektoren des dualen Raums V^* im Kopf des Vektors notieren, z.B. v^i. Hin und wieder werden wir auch auf die *Einsteinsche Summenkonvention* zurückgreifen. Dies bedeutet, dass, wenn ein Index bei einem Produkt sowohl oben als auch unten auftaucht, das Summenzeichen weggelassen wird.

Bezeichnet $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ und $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$, so kürzt man dies durch $v = v^i e_i$ ab. Analog schreibt man $\sum_{i=1}^n v_i \cdot e^i = v_i \cdot e^i$ für die kanonische Basis $(e^1, \ldots, e^n)$ des dualen Raums V^*.

Ferner schreiben wir für das Produkt $e^i(e_j) = \delta_j^i$, wobei δ_j^i das Kronecker-Symbol darstellt. Allgemein schreibt man $f(v)$ für $v \in V$ und $f \in V^*$ und nennt dies den *Wert von f an der Stelle v*. Eine analoge Schreibweise findet sich in [Fi1] in Abschnitt 6.4.

E3.

a) V sei ein Vektorraum und V^* sein dualer Raum. $(e_1, \ldots, e_n)$ sei die kanonische Basis von V. Sei $(e'_1, \ldots, e'_n)$ eine weitere Basis von V mit Transformationsformeln
$$e'_j = v'^i_j \cdot e_i \quad \text{und} \quad e_j = v^i_j \cdot e'_i . \tag{6.1}$$
Für den dualen Raum mit den Basen $(e^1, \ldots, e^n)$ und $(e'^1, \ldots, e'^n)$ gilt
$$e'_j = w'^i_j \cdot e_i \quad \text{und} \quad e_j = w^i_j \cdot e'_i . \tag{6.2}$$
Zeigen Sie, dass die Matrizen $A = (v^j_i)$ und $A' = (v'^j_i)$ bzw. $B = (w^j_i)$ und $B' = (w'^j_i)$ jeweils zueinander inverse Matrizen sind.

b) V sei ein Vektorraum und V^* sein dualer Raum. $(e_1, \ldots, e_n)$ sei die kanonische Basis von V. Sei $(e'_1, \ldots, e'_n)$ eine weitere Basis von V mit Transformationsformeln
$$e'_j = v'^i_j \cdot e_i \quad \text{und} \quad e_j = v^i_j \cdot e'_i . \tag{6.3}$$
Analog sind die Transformationsformeln für den dualen Raum mit Basen $(e^1, \ldots, e^n)$ und $(e'^1, \ldots, e'^n)$
$$e'^j = v^j_i \cdot e^i \quad \text{und} \quad e^j = v'^j_i \cdot e'^i . \tag{6.4}$$
Für einen Tensor T seien die Darstellungen bzgl. der Basen gegeben durch
$$T = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \tag{6.5}$$
und
$$T' = T^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_p} e'_{k_1} \otimes \ldots \otimes e'_{k_p} \otimes e'^{l_1} \otimes \ldots \otimes e'^{l_q} .$$
Bestimmen Sie die Transformationsformel für den Wechsel von der Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ zur Basis $(e'_1, \ldots, e'_n)$.

c) Es sei $\mathrm{x}(t) = {}^t(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. (Für Grundwissen über Kurven vgl. [Fo2], Kapitel 1.)
Zeigen Sie, dass die *Geschwindigkeit*
$$v = {}^t\left(\frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{dx'^i}{dt} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt}$$
ein 1-fach kontravarianter Tensor ist (vgl. [Fi1], Abschnitt 6.4).
Benutzen Sie hierbei $v^j_i = \dfrac{\partial x'^j}{\partial x^i}$ und $v'^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$.

d) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto f(x^1, \ldots, x^n)$, eine stetig differenzierbare Funktion (vgl. [Fo2], Kapitel 1). Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ein 1-fach kovarianter Tensor (vgl. [Fi1], Abschnitt 6.4) ist.

Teil II

Lösungen

Kapitel 0

Lineare Gleichungssysteme

0.3 Ebenen und Geraden im Standardraum $\mathbb{R}^3$

1. Hier ist die Äquivalenz von drei Aussagen zu zeigen. Am elegantesten ist es, i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i) zu zeigen. Wenn wir mit einer dieser Beweisrichtungen Probleme bekommen, können wir auf andere Schlussrichtungen zurckgreifen. Das wird hier aber nicht der Fall sein.

i) $\Rightarrow$ ii): Beweis durch Widerspruch. Angenommen, ii) ist falsch. Dann ist entweder $w = 0$, oder es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $w = \rho \cdot v$.

Zunächst sei angenommen, dass $w = 0$ gilt. Dann gilt sicher $w = 0 \cdot v$, was ein Widerspruch zu i) ist.

Nun behandeln wir den Fall, dass ein reelles ρ mit $v = \rho \cdot w$ existiert. Dann ist entweder $\rho = 0$ oder $\rho \neq 0$; ersteres ist jedoch wegen $0 \cdot w = v = 0$ ein Widerspruch zu i). Ist $\rho \neq 0$, so ist ρ invertierbar, d.h. es gilt $w = \frac{1}{\rho} \cdot v$, ein Widerspruch zu i).

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $\lambda v + \mu w = 0$ mit $\lambda \neq 0$. Dann gilt $v = -\frac{\mu}{\lambda} w$, ein Widerspruch zu ii). Also muss $\lambda = 0$ sein, d.h. $0 \cdot v + \mu \cdot w = 0$, also $\mu w = 0$. Da w nach Voraussetzung nicht der Nullvektor ist, muss $\mu = 0$ gelten. Damit haben wir $\lambda = 0 = \mu$ gezeigt.

iii) $\Rightarrow$ i): Nehmen wir an, es wäre $v = 0$. Dann gilt $1 \cdot v + 0 \cdot w = 0$ im Widerspruch zu iii). Gibt es ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $w = \rho \cdot v$, so ist $1 \cdot w - \rho \cdot v = 0$ im Widerspruch zu iii).

Alle Beweise waren Widerspruchsbeweise. Direkt ausgedrückt haben wir eigentlich folgendes gezeigt: Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

i') $v = 0$ oder es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $w = \rho v$.
ii') $w = 0$ oder es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $v = \rho w$.
iii') Es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nicht beide 0, mit $\lambda v + \mu w = 0$.

Das führt auf die Definition von *linear abhängigen Vektoren*. Dieser Begriff ist beweistechnisch oft einfacher zu handhaben als lineare Unabhängigkeit. Die Implikationen i') $\Rightarrow$ ii') $\Rightarrow$ iii') $\Rightarrow$ i') kann man direkt ohne Widerspruchsannahmen zeigen.

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_8

2. a) Wir beziehen uns auf die Definition einer Ebene aus 0.3.2. Hier ist die Äquivalenz zweier Aussagen zu zeigen. Wir beginnen mit der „Hinrichtung“. Wir haben eine Ebene E und damit reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, die nicht alle null sind, sowie ein $b \in \mathbb{R}$, so dass

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\right\}.$$

Die Bezeichnungen seien so gewählt, dass $a_1 \neq 0$ ist. Nun ist die Existenz von Vektoren u, v, w zu zeigen, die die in der Aufgabe genannten Eigenschaften haben. Wir behaupten, dass das für

$$u = (\tfrac{b}{a_1}, 0, 0,), \quad v = (a_2, -a_1, 0) \quad \text{und} \quad w = (a_3, 0, -a_1)$$

der Fall ist. (Um so etwas behaupten zu können, haben wir natürlich vorher heimlich einige Rechnungen angestellt, die aber in der Reinschrift des Beweises nicht mehr auftauchen. Andere Wahlen von u, v und w führen auch zum Ziel.) Dazu weisen wir nach, dass diese u, v, w die geforderten Eigenschaften besitzen.

Zuerst zeigen wir $E = u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w =: X$. Sei $(x_1, x_2, x_3) \in E$, d.h. nach Definition $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$. Dann gilt

$$(x_1, x_2, x_3) = (\tfrac{b}{a_1}, 0, 0) + \left(-\tfrac{x_2}{a_1}\right) \cdot (a_2, -a_1, 0) + \left(-\tfrac{x_3}{a_1}\right) \cdot (a_3, 0, -a_1).$$

Die Wahl $\lambda = -\frac{x_2}{a_1}$ und $\mu = -\frac{x_3}{a_1}$ erfüllt also die Bedingungen. Sie ist zulässig, weil $a_1 \neq 0$. Dies zeigt $E \subset X$. Sind umgekehrt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gegeben und $(x_1, x_2, x_3) = u + \lambda v + \mu w \in X$, so ist

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= u + \lambda v + \mu w = (\tfrac{b}{a_1}, 0, 0) + \lambda(a_2, -a_1, 0) + \mu(a_3, 0, -a_1) \\ &= (\tfrac{b}{a_1} + \lambda a_2 + \mu a_3, -\lambda a_1, -\mu a_1),\end{aligned}$$

woraus

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b + \lambda a_1a_2 + \mu a_1a_3 - \lambda a_1a_2 - \mu a_1a_3 = b$$

folgt, also $E \supset X$.

Es ist noch nachzuweisen, dass $v = (a_2, -a_1, 0)$ und $w = (a_3, 0, -a_1)$ linear unabhängig sind. Das machen wir mit dem Kriterium iii) (siehe Aufgabe 1), dem sogenannten *Koeffizientenkriterium*. Sei

$$\lambda \cdot (a_2, -a_1, 0) + \mu \cdot (a_3, 0, -a_1) = (0, 0, 0).$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\left\{\begin{array}{rrl} a_2\lambda & +a_3\mu & = 0 \\ -a_1\lambda & & = 0 \\ & -a_1\mu & = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{also} \quad \left\{\begin{array}{c} 0 = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array}\right\}.$$

Jetzt steht noch die Rückrichtung des Beweises aus. Sei $E = u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ mit linear unabhängigen $v, w \in V$. Dann gilt: für alle $(x_1, x_2, x_3) \in E$ existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2, x_3) = u + \lambda \cdot v + \mu \cdot w$. Die Komponenten der Vektoren u, v, w

seien $(u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)$ und (w_1,w_2,w_3). Wir wählen nun

$$a_1 = v_2w_3 - v_3w_2\,, \quad a_2 = v_3w_1 - v_1w_3\,, \quad a_3 = v_1w_2 - v_2w_1$$

und

$$b = u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 + u_2v_3w_1 - u_2v_1w_3 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1\,.$$

Das bedeutet gerade $a = v \times w$ und $b = \langle u, v \times w\rangle$, vgl. Aufgabe 4 zu Kapitel 5.2.

Die a_i sind nicht alle null, wie man sich wie folgt klar machen kann: Wir nehmen an, die a_i wären alle null. Dann gilt für den Fall $v_1 \neq 0 \neq w_1$ (die anderen Fälle gehen analog) gerade

$$v_2 = \frac{v_1}{w_1} \cdot w_2 \text{ und } \quad v_3 = \frac{v_1}{w_1} \cdot w_3\,,$$

da $a_3 = 0 = a_2$. Wegen $v_3 = \frac{v_1}{w_1} \cdot w_1$ erhalten wir so $v = \frac{v_1}{w_1} \cdot w$, d.h. v und w wären linear abhängig, ein Widerspruch.

Mit dieser Wahl gilt $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$.

b) Eine mögliche Parametrisierung (nach a)) ist

$$u = (-\tfrac{1}{3},0,0)\,, \quad v = (-2,-3,0) \quad \text{und} \quad w = (1,0,-3)\,,$$

d.h.

$$E = (-\tfrac{1}{3},0,0) + \mathbb{R}(-2,-3,0) + \mathbb{R}(1,0,-3)\,.$$

c) Nach a) kann man

$$a_1 = 5\cdot 9 - 6\cdot 8 = -3\,, \quad a_2 = 6\cdot 7 - 4\cdot 9 = 6\,,$$
$$a_3 = 4\cdot 8 - 5\cdot 7 = -3 \quad \text{und} \quad b = 1\cdot(-3) + 2\cdot 6 + 3\cdot(-3) = 0$$

wählen. Es ist somit

$$E = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0\}\,.$$

3. Es ist klar, dass E die Punkte x,y,z enthält, denn:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & x & + & 0\cdot(x-y) & + & 0\cdot(x-z) \\ y & = & x & + & (-1)\cdot(x-y) & + & 0\cdot(x-z) \\ z & = & x & + & 0\cdot(x-y) & + & (-1)\cdot(x-z) \end{array}\,.$$

E ist eine Ebene, sofern $x-y$ und $x-z$ linear unabhängig sind. Das beweisen wir mit dem Koeffizientenkriterium. Seien $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda\cdot(x-y) + \mu\cdot(x-z) = 0\,.$$

Falls $\mu \neq 0$ ist, gilt $z = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot x - \frac{\lambda}{\mu}\cdot y$, d.h. z liegt auf der Geraden durch x und y (siehe Definition 0.2.4). Das ist ein Widerspruch. Ist $\mu = 0$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\lambda\cdot(x-y) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ oder } x-y = 0\,.$$

Im letzten Fall lägen $x = y$ und z auf einer Geraden. Also muss $\lambda = \mu = 0$ sein, was zu beweisen war.

Gäbe es eine zweite Ebene $\tilde{E} \neq E$, die die Punkte x, y und z enthält, so wäre nach 0.3.4 der Schnitt von E und $\tilde{E}$ eine Gerade. Da x, y und z nach Voraussetzung nicht auf einer Geraden liegen, kann eine solche Ebene $\tilde{E}$ nicht existieren, d.h. E ist eindeutig bestimmt.

0.4 Das Eliminationsverfahren von Gauss

1. a) Hier liegt ein lineares Gleichungssystem (LGS) vor, das man durch eine erweiterte Koeffizientenmatrix darstellen kann. Die Zeilenumformungen dieser Matrix, die wir vornehmen werden, entsprechen Gleichungs- bzw. Äquivalenzumformungen eines LGS.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die erste und die zweite Zeile, addieren das (-2)-fache der (neuen) ersten Zeile zur dritten Zeile und das (-3)-fache der (neuen) ersten Zeile zur vierten Zeile. So erhalten wir in der ersten Spalte eine 1 über lauter Nullen. Danach verfahren wir analog, um die zweite Spalte „aufzuräumen“.

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Um die Lösungen einfacher ablesen zu können, subtrahieren wir das doppelte der zweiten Zeile von der ersten. Das ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösungen haben die Form $\mathbb{R}(1,-2,1,0)+\mathbb{R}(2,-3,0,1)$. Es ist auch möglich, die Lösung anders zu parametrisieren; es gibt dafür sogar unendlich viele Möglichkeiten.

b) Alle Lösungen haben die Form

$$(0,0,1,0)+\mathbb{R}(0,1,-2,1)+\mathbb{R}(1,1,1,1),$$

wie wir mit folgender Probe nachweisen können:
Wir setzen $x_1 = \mu$, $x_2 = \lambda+\mu, x_3 = 1-2\lambda+\mu, x_4 = \lambda+\mu$ in das LGS ein. Es entstehen nur wahre Aussagen.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat den Rang 2, vgl. 0.4.8, und ebenfalls nach 0.4.8 ist die Lösungsmenge $\text{Lös}\,(A,b)$ ein affiner Raum der Dimension 2.

Es kann also keine weiteren Lösungen geben.

2. Die Lösung lautet $(\frac{10}{9}, \frac{11}{9}, \frac{17}{9}, -\frac{10}{9})$.

3. Dieses LGS enthält einen reellen Parameter t, der die Anzahl der Lösungen beeinflusst. Wir verfahren wie bisher:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$

Wir addieren das (-2)-fache der dritten Zeile zu der ersten bzw. zweiten Zeile und verlegen die dritte Zeile in die erste Zeile:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 7t+8 \\ 0 & -16 & -10 & -2t-16 \\ 0 & -8 & -5 & -2t-9 \end{array}\right)$$

Nun wird das 2-fache der dritten Zeile von der zweiten subtrahiert:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 7t+8 \\ 0 & 8 & 5 & 2t+9 \\ 0 & 0 & 0 & 2t+2 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass es nur dann eine Lösung geben kann, wenn $2t+2=0$ ist, denn die dritte Gleichung des LGS lautet jetzt $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2t+2$. Wenn $t=-1$ ist, lautet die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösungen dieser Matrix haben die Form $(-9,4,-5)+\mathbb{R}(2,-5,8)$. Zusammenfassend können wir festhalten, dass das LGS keine Lösung hat, wenn $t \neq -1$ ist. Für $t=-1$ gibt es unendlich viele Lösungen. Es gibt kein t, für das genau eine Lösung existiert.

4. Die gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$\begin{array}{rcll} x+y & = & 2 & \quad \mathrm{I} \\ \varepsilon x+y & = & 1 & \quad \mathrm{II} \end{array}$$

entspricht dem Schnittpunkt der beiden durch die Gleichungen I und II beschriebenen Geraden im oberen Teil von Bild 0.1.

Nun formen wir das lineare Gleichungssystem der Gleichungen I und II um, und zwar

a) mit dem maximalen Zeilenpivot 1:

$$\begin{array}{rcll} x+y & = & 2 & \quad \mathrm{I} \\ (1-\varepsilon)y & = & 1-2\varepsilon & \quad \widetilde{\mathrm{II}} \end{array},$$

b) mit dem Pivot ε:

$$\begin{array}{rcll} \varepsilon x+y & = & 1 & \quad \mathrm{II} \\ \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)y & = & 2-\frac{1}{\varepsilon} & \quad \widetilde{\mathrm{I}} \end{array}.$$

Die den Gleichungsystemen entsprechenden Geraden mit Schnittpunkten sieht man im unteren Teil von Bild 0.1.

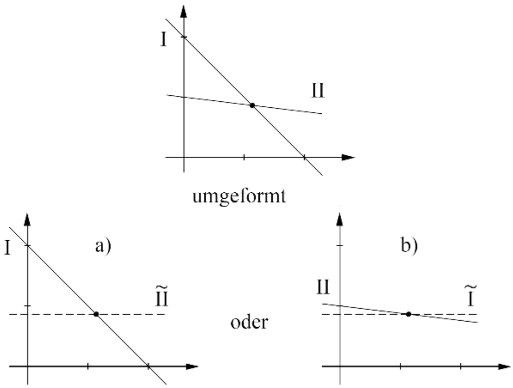


Bild 0.1

Nach den Teilen a) und b) gilt

$$y = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{2-\frac{1}{\varepsilon}}{1-\frac{1}{\varepsilon}},$$

die Werte für y bleiben bei beiden Verfahren also unverändert. Anders verhält es sich jedoch mit den Werten für x, denn es gilt

$$\text{a)} \quad x = 2-y, \qquad \text{b)} \quad x = \tfrac{1}{\varepsilon}(1-y).$$

Wir berechnen dies ausführlich für $k=3$, und die untenstehende Tabelle enthält die Ergebnisse der Berechnungen für $k=3,8,9$. Man beachte den großen Unterschied zwischen den x-Werten für $k=9$.

Für $k=3$ berechnen wir zunächst exakt

$$y = \frac{0.998}{0.999} = 0.\overline{998} = 0.9989989989\ldots.$$

Schneiden wir nun alle Stellen ab der zehnten ab, so erhalten wir

$$y = 0.998998998.$$

Man beachte den Unterschied zur gerundeten Zahl $y = 0.998998999$.

Mit Hilfe der so bestimmten Zahl y berechnen wir nun x, und zwar zuerst nach a)

$$x = 2-y = 1.001001002,$$

und dann nach b)

$$x = \tfrac{1}{\varepsilon}(1-y) = 10^3 \cdot 0.001001002 = 1.001002000.$$

Der Unterschied zwischen den beiden x-Werten ist hier von der Größenordnung $10^{-6} = 10^3 \cdot 10^{-9}$ und wächst mit der Zahl k an, wie die folgende Tabelle zeigt:

k	a)	b)
3	$y = 0.998998998$ $x = 1.001001002$	$y = 0.998998998$ $x = 1.001002000$
8	$y = 0.999999989$ $x = 1.000000011$	$y = 0.999999989$ $x = 1.100000000$
9	$y = 0.999999998$ $x = 1.000000002$	$y = 0.999999998$ $x = 2.000000000$

Moral: Eine ungünstige Wahl des Pivots bewirkt

numerisch: Fehler durch *Abrundung* werden durch kleine Nenner hochmultipliziert,

geometrisch: es entsteht eine Konfiguration von Geraden mit „schleifendem Schnitt“ (vgl. [Str], Section 1.6).

Hinweis: Mit anderen Rechnern als den unsrigen können unter Umständen andere Ergebnisse erhalten werden. Woran liegt das?

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

Wir empfehlen dringend, die Aufgaben ernsthaft zu bearbeiten, bevor eine Lösung nachgeschlagen wird. $\mathbb{L}$ bezeichnet die Lösungsmenge.

E1. $\mathbb{L} = \{x = -1\,; y = 2\,; z = 4\}$

E2. $\mathbb{L} = \{(17, 12, -9) + \lambda \cdot (-90, 35, 19)\colon\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

E3. $\mathbb{L} = \{a = -1\,; b = 4\,; c = -9\,; d = 16\}$

E4. $\mathbb{L} = \{(1, 1, 1, 1) + \lambda \cdot (14, 22, 0, 1) + \mu \cdot (19, 25, -1, 0)\colon\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

E5. $\mathbb{L} = \{(5, 0, 0, 1, 0) + \lambda \cdot (-1736, -777, 59, 83, 620)\colon\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

E6. $\mathbb{L} = \{(5, 4, 3, 2, 1)\}$

E7. Für $t = -2$ gilt $\mathbb{L} = \emptyset$. Im Fall $t \neq -2$ ist

$$\mathbb{L} = \left\{\tfrac{1}{t+2} \cdot \left(-\tfrac{7}{3}t - \tfrac{70}{3}, 8, -\tfrac{1}{3}t + \tfrac{62}{3}\right)\right\}.$$

E8. Wenn $t \neq 5$ ist, so ist die Lösungsmenge leer. Für $t = 5$ gilt

$$\mathbb{L} = \{(-3, 3, 0) + \lambda \cdot (1, 1, 1)\colon\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

E9. Für $109+23a-3b \neq 0$ gilt $\mathbb{L} = \{(0,0,0,0)\}$.
Ist $109+23a-3b = 0$, so gilt $\mathbb{L} = \{\lambda \cdot (26,19,23,-3):\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

E10. Wir müssen drei Fälle unterscheiden. Ist $b=-260$ und $a \neq -\frac{3}{65}$, so ist die Lösungsmenge leer.
Im Fall $b=-260$ und $a=-\frac{3}{65}$ gilt
$$\mathbb{L} = \left\{\left(-\tfrac{3}{65}, -2\tfrac{51}{65}, 0\right) + \lambda \cdot (4,68,-1):\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
Wenn schließlich $b \neq -260$ ist, so lautet die Lösungsmenge
$$\mathbb{L} = \left\{\tfrac{1}{b+260} \cdot (ab-12, 17ab-2b-724, 65a+3)\right\},$$

E11. $\mathbb{L} = \{(2+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, -3)\}$

E12. $\mathbb{L} = \{(1, 1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, \mathrm{i})\}$

E13.
$$\begin{aligned}\mathbb{L} \;=\; &\{\lambda \cdot (-3-53\mathrm{i}, -17+63\mathrm{i}, 0, 4+26\mathrm{i})\\ &+\mu \cdot (13+9\mathrm{i}, 9-23\mathrm{i}, 4+26\mathrm{i}, 0):\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

E14.
$$\begin{aligned}\mathbb{L} \;=\; &\{(1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, 2\mathrm{i}, -3)\\ &+\lambda \cdot (68-3\mathrm{i}, 52.5-388.5\mathrm{i}, -49-31\mathrm{i}, 43+141\mathrm{i}):\ \lambda \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

E15.
$$\begin{aligned}\mathbb{L} \;=\; &\{(1, \mathrm{i}, 2+\mathrm{i}, -3) + \lambda \cdot (20-31\mathrm{i}, 16+15\mathrm{i}, 14+38\mathrm{i}, 154-204\mathrm{i}):\\ &\lambda \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

0.5 Geraden und Quadratische Kurven im $\mathbb{R}^2$

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. a) Die Gleichung lässt sich nach y auflösen, es ergibt sich
$$y = \frac{2}{3}x + 8\,.$$
Dies lässt sich als lineare Funktion auffassen, deren Graph ist eine Gerade.
b) Um jeden Punkt der Gerade notieren zu können, benötigen wir den Ortsvektor eines Punktes der Gerade als *Stützpunkt* und müssen dann einen *Richtungsvektor* definieren, von dem beliebige Vielfache gewählt werden können.

Diese Ortsvektoren erhalten wir, indem wir beispielsweise $x=0$ und $x=1$ in die Gleichung aus Teil a) einsetzen. Damit ergeben sich die Punkte
$$P(0,8) \quad \text{und} \quad Q(3,10).$$

Nehmen wir $p = \vec{P}$ als Aufhänger und $v = \overrightarrow{QP} = {}^t(3,2)$, so ergibt sich die Gleichung der Gerade zu

$$y = p + \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Die Schnittpunkte lauten $(0,8)$ und $(-12,0)$. Zur Berechnung nutzt man am bequemsten die in der Aufgabe gegebene Gleichung.

E2. a) Um die Gleichung $\circledast\circledast$ in die Form von Gleichung $\circledast$ zu überführen, müssen wir *quadratische Ergänzungen* vornehmen. Hierzu betrachten wir zuerst

$$x^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) - 4 = (x-2)^2 - 4.$$

Weiter ergibt sich für y

$$y^2 + 6y = (y^2 + 6y + 9) - 9 = (y+3)^2 - 9.$$

Damit ergibt sich aus Gleichung $\circledast\circledast$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 = 12$$

und damit

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

Der Mittelpunkt des Kreises ist also $M(2,-3)$, der Radius $r = 5$.

b) Für einen Kreis vom Radius r um den Ursprung des Koordinatensystems ist eine Parametrisierung anzusehen durch

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\varphi.$$

Verschiebt man den Mittelpunkt M des Kreises in $M(x_0, y_0)$, so gilt

$$x - x_0 = r \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y - y_0 = r \cdot \sin\varphi.$$

Eine Parametrisierung ist dann gegeben durch

$$\varphi \mapsto (x_0 + r \cdot \cos\varphi, y_0 + r \cdot \sin\varphi).$$

Angewendet auf den Kreis aus Teil a) ergibt sich

$$x - 2 = 5 \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y + 3 = 5 \cdot \sin\varphi,$$

und damit erhält man eine Parametrisierung

$$\varphi \mapsto (2 + 5 \cdot \cos\varphi, -3 + 5 \cdot \sin\varphi) \quad \text{mit} \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

E3. a) Für die Schnittpunkte der Ellipse mit der x-Achse gilt $y = 0$, daraus folgt

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \iff x^2 = a^2 \iff x = a \text{ oder } x = -a.$$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind daher $(-a,0)$ und $(a,0)$. Analog ergeben sich die Schnittpunkte $(0,-b)$ und $(0,b)$ mit der y-Achse.

b) Wie in Bild 0.2 zu sehen ist, gilt für die Punkte einer Ellipse mit den Parametern a und b

$$\cos^2(\varphi) = \frac{x^2}{a^2} \quad \text{und} \quad \sin^2(\varphi) = \frac{y^2}{b^2}$$

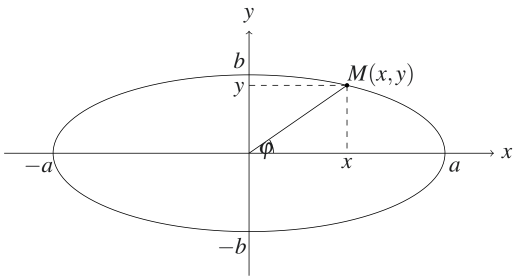


Bild 0.2: Schnittstellen mit den Achsen und der Winkel zur Parametrisierung

für geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$, denn es gilt auch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi).$$

Daher lässt sich durch

$$\varphi \mapsto \big(a \cdot \cos(\varphi), b \cdot \sin(\varphi)\big) \quad \text{mit} \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

eine Parametrisierung der Ellipse definieren.

E4. a) r_1 zu bestimmen bedeutet, die Länge der Verbindungsstrecke zwischen dem Ellipsenpunkt $M(x,y)$ und dem Brennpunkt $F_1(-e,0)$ zu berechnen. Hier gilt

$$r_1^2 = (x+e)^2 + y^2 . \tag{0.1}$$

Löst man die Gleichung der Ellipse nach y^2 auf, so ergibt sich

$$y^2 = (a^2 - x^2) \cdot \frac{b^2}{a^2}. \tag{0.2}$$

Mit Hilfe von $e = a \cdot \varepsilon$ und $e^2 = a^2 - b^2$ folgt

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2 - a^2 \cdot \varepsilon^2 = a^2(1 - \varepsilon^2),$$

daher gilt

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2.$$

Mit Gleichung (0.1) eingesetzt folgt mit Gleichung (0.2)

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x+e)^2+y^2 \\ &= x^2+2e\cdot x+e^2+y^2 \\ &= x^2+2\cdot a\cdot\varepsilon\cdot x+a^2\cdot\varepsilon^2+y^2 \\ &= x^2+2\cdot a\cdot\varepsilon\cdot x+a^2\cdot\varepsilon^2+(a^2-x^2)\frac{b^2}{a^2} \\ &= x^2+2\cdot a\cdot\varepsilon\cdot x+a^2\cdot\varepsilon^2+(a^2-x^2)(1-\varepsilon^2) \\ &= a^2+2\cdot a\cdot\varepsilon\cdot x+x^2\cdot e^2=(a+\varepsilon x)^2, \end{aligned}$$

also die Behauptung (0.1). Analog ergibt sich

$$r_2^2=(x-e)^2+y^2, \tag{0.3}$$

und daraus folgt

$$r_2^2=a^2-2ax\varepsilon+x^2\varepsilon^2=(a-\varepsilon x)^2, \quad \text{also Gleichung (0.2).}$$

b) Es gilt mit a) $r_1+r_2=a+x\cdot\varepsilon+a-x\cdot\varepsilon=2a$.
c) An Abbildung 0.2 ist sichtbar, dass $d_1=\frac{a}{\varepsilon}+x$ und $d_2=\frac{a}{\varepsilon}-x$ gilt. Hieraus folgt

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{(a+x\cdot\varepsilon)\cdot\varepsilon}{a+\varepsilon\cdot x}=\varepsilon.$$

Analog ergibt sich $\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$.
d) Durch Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} & 2x^2+4x+3y^2-12y=1 \\ \iff\quad & 2x^2+4x+2+3y^2-12y+12=1+2+12 \\ \iff\quad & 2(x+1)^2+3(y-2)^2=15 \\ \iff\quad & \frac{(x+1)^2}{\frac{15}{2}}+\frac{(y-2)^2}{5}=1, \quad \text{also} \quad a^2=\frac{15}{2} \quad \text{und} \quad b^2=5\,. \end{aligned}$$

Damit handelt es sich um eine Ellipse. Weiter gilt

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{und} \quad \varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{\sqrt{10/4}}{\sqrt{15/2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}\,.$$

E5. a) Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt $x=0$. Dann gilt im Fall i) $-\frac{y^2}{3}=1$, womit $y^2=-3$ folgt. Diese Gleichung besitzt keine reelle Lösung, daher gibt es keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Für ii) gilt $\frac{y^2}{3}=1$ für den Fall $x=0$. Hier existieren die Lösungen $y=\pm\sqrt{3}$. Damit gibt es zwei Schnittpunkte der Hyperbel mit der y-Achse.

Die Berechnungen für Schnittpunkte mit den x-Achsen verlaufen ähnlich und führen im Fall i) zu den Lösungen $x=\pm\sqrt{2}$ und damit zu zwei Schnittpunkten mit der x-Achse, im Fall ii) hingegen gibt es keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

b) Es ergibt sich Bild 0.3. Die dort abgebildeten Graphen heißen *Hyperbeln*. Hyperbeln bestehen aus zwei Teilen.

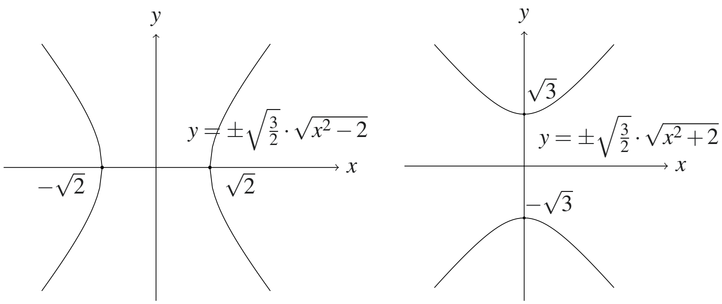


Bild 0.3: Verschiedene Typen von Hyperbeln

E6. a) An der Zeichnung lässt sich erkennen, dass
$$r_1^2 = (x+e)^2 + y^2$$
gilt. Außerdem ist
$$y^2 = (x^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2}.$$
Es gilt $e = a \cdot \varepsilon$ und damit
$$b^2 = e^2 - a^2 = a^2 \cdot \varepsilon^2 - a^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1).$$
Daraus folgt $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$.

Setzt man die letzten beiden Gleichungen in die erste ein, so folgt
$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x+e)^2 + y^2 \\ &= x^2 + 2xe + e^2 + y^2 \\ &= x^2 + 2x\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + (x^2 - a^2)(\varepsilon^2 - 1) \\ &= x^2\varepsilon^2 + 2a\varepsilon x + a^2 \\ &= (x \cdot \varepsilon + a)^2. \end{aligned}$$
Analog ergibt sich
$$r_2^2 = (x - \varepsilon)^2 + y^2 = (x \cdot \varepsilon - a)^2.$$
Die Vorzeichen ergeben sich daraus, dass
$$\begin{array}{ll} x \cdot \varepsilon \pm a > 0 & \text{für Punkte auf der rechten Hyperbelhälfte, und} \\ x \cdot \varepsilon \pm a < 0 & \text{für Punkte auf der linken Hyperbelhälfte} \end{array}$$
gilt.

b) Nach den Ergebnissen aus Teil a) gilt für Punkte auf der rechten Seite

$$r_1 - r_2 = x\varepsilon + a - (x\varepsilon - a) = 2a\,.$$

Für Punkte auf der linken Seite ergibt sich

$$r_1 - r_2 = -(x\varepsilon + a) + (x\varepsilon - a) = -2a\,.$$

c) Es gilt $d_1 = x + \frac{a}{\varepsilon}$ und $d_2 = x - \frac{a}{\varepsilon}$. Daraus folgt

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{x\varepsilon + a}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(x\varepsilon + a)\varepsilon}{x\varepsilon + a} = \varepsilon$$

und

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{x\varepsilon - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(x\varepsilon - a)\varepsilon}{x\varepsilon - a} = \varepsilon\,.$$

d) Es ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Daraus folgt

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right).$$

Hiermit ergibt sich

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.$$

Für die Differenzen der y-Werte der Hyperbel und der Geraden $y = \frac{b}{a}x$ folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x\right) = 0\,.$$

Es gilt analog für das andere Vorzeichen, hiermit folgt die Behauptung.

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Mengen und Abbildungen

1. Die erste Aufgabe enthält Aussagen, deren Beweise argumentativ sehr einfach sind und am ehesten formell Probleme bereiten könnten. Wir beschränken uns daher auf den Nachweis der ersten de Morganschen Regel aus

d) $X \setminus (M_1 \cap M_2) \overset{!}{=} (X \setminus M_1) \cup (X \setminus M_2)$

$$\begin{aligned} m \in X \setminus (M_1 \cap M_2) \quad &\Leftrightarrow \quad m \in X \wedge x \notin M_1 \cap M_2 \\ &\Leftrightarrow \quad m \in X \wedge (m \notin M_1 \vee m \notin M_2) \\ &\Leftrightarrow \quad (m \in X \wedge m \notin M_1) \vee (m \in X \wedge m \notin M_2) \\ &\Leftrightarrow \quad m \in X \setminus M_1 \vee m \in X \setminus M_2 \\ &\Leftrightarrow \quad m \in (X \setminus M_1) \cup (X \setminus M_2) \end{aligned}$$

2. Wir erinnern zunächst daran, dass zwischen einelementigen Teilmengen und Elementen nicht unterschieden wird.

a) Sei $y \in f(M_1)$. Dann existiert ein $x \in M_1$ mit $f(x) = y$. Also gilt auch $x \in M_2$ und damit $y = f(x) \in f(M_2)$.

Für den Beweis der zweiten Aussage wählen wir ein $x \in f^{-1}(N_1)$. Dann ist $f(x) \in N_1 \subset N_2$, also $f(x) \in N_2$ und somit $x \in f^{-1}(N_2)$.

b) Sei $x \in M$. Dann ist $f(x) \in f(M)$, also $x \in f^{-1}(f(M))$.

Für den Beweis des zweiten Teils sei $y \in f(f^{-1}(N))$, d.h. es existiert ein $x \in f^{-1}(N)$ mit $y = f(x)$. Dann muss $f(x) \in N$ sein, also $y \in N$.

c) Sei $x \in f^{-1}(Y \setminus N)$. Dann gilt

$$f(x) \in Y \setminus N \Leftrightarrow f(x) \notin N \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(N) \Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(N)\,.$$

d) Die ersten drei Behauptungen sind relativ einfach nachzuweisen; wir beschränken uns daher darauf, $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(N_1 \cap N_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in N_1 \cap N_2 \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) \in N_1 \wedge f(x) \in N_2 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(N_1) \wedge x \in f^{-1}(N_2) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)\,. \end{aligned}$$

Diese Schlussfolgerungen zeigen deutlich die Analogie zwischen den Operatoren $\wedge$ („und“) und $\cap$ („geschnitten“).

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_9

Die vierte Behauptung ist interessant, weil wir uns hier zusätzlich klarmachen müssen, dass eine echte Teilmenge vorliegen kann. Für den Beweis der Behauptung sei $y \in f(M_1 \cap M_2)$. Dann gibt es ein $x \in M_1 \cap M_2$ mit $f(x) = y$, also $y = f(x) \in f(M_1)$ und $y = f(x) \in f(M_2)$. Das jedoch bedeutet $y \in f(M_1) \cap f(M_2)$.

Ein Beispiel für $f(M_1 \cap M_2) \neq f(M_1) \cap f(M_2)$ liefern die Mengen $M_1 = \{0,1\}$ und $M_2 = \{2,3\}$ mit einer Abbildung f, die definiert ist durch $0 \mapsto a$, $1 \mapsto b$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto c$ (vgl. Bild 1.1).

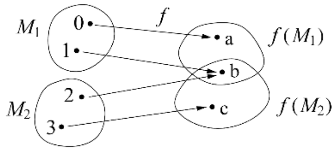


Bild 1.1

Hier gilt $f(M_1 \cap M_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, aber

$$f(M_1) \cap f(M_2) = \{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}.$$

In diesem Beispiel ist das Hindernis für $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$ dadurch gegeben, dass es Elemente $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M_2$ geben kann, für die $f(x_1) = f(x_2)$ gilt, d.h. f ist nicht injektiv (vgl. 1.1.4). Dass dies auch das einzige Hindernis ist, zeigt die folgende

Ergänzungsaufgabe: Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f: M \to N$ folgende Bedingungen gleichwertig sind:

i) f ist injektiv,

ii) für je zwei Teilmengen $M_1, M_2 \subset M$ gilt

$$f(M_1) \cap f(M_2) = f(M_1 \cap M_2).$$

Wir empfehlen den Beweis dieser Ergänzung als Übung und geben – damit die Versuchung des Nachsehens nicht zu groß ist – den Beweis erst am Ende dieses Abschnittes.

3. Unter a) und b) sind hier jeweils zwei Behauptungen zu zeigen. Da die Beweise recht ähnlich sind, führen wir nur jeweils einen aus.

a) f und g seien injektiv. Wir zeigen, dass dann auch $g \circ f$ injektiv ist. Sei $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Für die Injektivität von $g \circ f$ müssen wir daraus $x_1 = x_2$ folgern. Das funktioniert so: $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, daraus folgt $f(x_1) = f(x_2)$ weil g injektiv ist, woraus $x_1 = x_2$ folgt, weil f injektiv ist.

b) Sei $g \circ f$ surjektiv. Wir zeigen, dass dann auch g surjektiv ist. Sei $z \in Z$ beliebig. Da $g \circ f$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ und $y := f(x) \in Y$, also $g(y) = z$. Damit haben wir gezeigt, dass jedes beliebige $z \in Z$ durch die Abbildung g „getroffen" wird.

4. In dieser Aufgabe sollen einige Abbildungen auf Injektivität bzw. Surjektivität untersucht werden. Um zu begründen, dass eine Abbildung eine Eigenschaft nicht besitzt, reicht es aus, ein einziges Gegenbeispiel anzugeben. Wollen wir jedoch zeigen, dass eine Abbildung z.B. injektiv ist, muss das anhand der Definition von Injektivität für alle Elemente des Definitionsbereiches nachgewiesen werden. Eine anschauliche Argumentation ist nicht zulässig, denn die Anschauung ist für Beweiszwecke manchmal zu ungenau; sie liefert aber oft Ideen.
a) f_1 ist nicht injektiv, denn $f_1(1,0) = 1 = f_1(0,1)$ aber $(1,0) \neq (0,1)$, d.h. zwei verschiedene Elemente aus der Definitionsmenge werden auf dasselbe Element der Wertemenge abgebildet.

f_1 ist surjektiv, denn für alle $r \in \mathbb{R}$ ist $(r,0) \in \mathbb{R}^2$ und $f_1(r,0) = r + 0 = r$; jedes Element der Bildmenge $\mathbb{R}$ wird also „getroffen".
b) f_2 ist nicht injektiv, denn $f_2^{-1}(0)$ ist der gesamte Einheitskreis.

f_2 ist auch nicht surjektiv, $x^2 + y^2 - 1 \geqslant -1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
c) f_3 ist injektiv. Das weisen wir wie folgt nach: Sei

$$(x_1 + 2y_1, 2x_1 - y_1) = (x_2 + 2y_2, 2x_2 - y_2)\,.$$

Wir folgern

$$\begin{aligned}
& x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2 \quad \text{und} \quad 2x_1 - y_1 = 2x_2 - y_2 \\
\Rightarrow \quad & x_1 = x_2 + 2y_2 - 2y_1 \quad \text{und} \quad 2(x_2 + 2y_2 - 2y_1) - y_1 = 2x_2 - y_2 \\
\Rightarrow \quad & x_1 = x_2 + 2y_2 - 2y_1 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2 \\
\Rightarrow \quad & x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2 \\
\Rightarrow \quad & (x_1, y_1) = (x_2, y_2)\,.
\end{aligned}$$

f_3 ist auch surjektiv. Ein beliebiges Element $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ hat stets ein Urbild, nämlich $(\frac{1}{5}\lambda + \frac{2}{5}\mu, \frac{2}{5}\lambda - \frac{1}{5}\mu)$, wie man durch Nachrechen bestätigen kann. Wenn wir uns mehr mit der Theorie und Praxis linearer Abbildungen beschäftigt haben, werden wir eine schnellere Argumentation für diese Aufgabe gefunden haben. Die Abbildung $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kann durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden, die maximalen Rang hat, was man schon daran sehen kann, dass die zweite Spalte kein Vielfaches der ersten ist. Quadratische Matrizen maximalen Ranges beschreiben bijektive Abbildungen (vgl. Bemerkung 2 aus 2.5).

5. Die in dieser Aufgabe eingeforderten Beweise kann man mit gutem Gewissen als klassisch bezeichnen. Man kann nicht verlangen, dass jedem an Mathematik interessierten Menschen die Ideen zu diesen Beweisen selbst kommen. Wichtig ist jedoch, dass man die Ideen versteht und kennt. Das spiegelt sich auch in der Tatsache wider, dass kaum jemand die Beweise jemals ausführlich aufgeschrieben hat. Auch wir werden uns auf die Darstellung der Beweisidee beschränken.
a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar (unendlich), da man eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ angeben kann. Wir geben nur die Abbildung an und lassen den Beweis der Bijektivität aus. Es sei $0 \mapsto 0$, $2k+1 \mapsto k$, $2k \mapsto -k$ für $k \in \mathbb{N}$. Die ungeraden natürlichen Zahlen werden also auf die positiven ganzen Zahlen abgebildet; die geraden natürlichen Zahlen gehen auf die negativen ganzen Zahlen.

Um zu zeigen, dass auch $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, verwendet man das *Erste Cantorsche Diagonalverfahren*. Wir stellen uns alle positiven Brüche als unendlich großes Schema vor:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Wie durch die Pfeile angedeutet, lassen sich so alle hier aufgeführten Brüche in eine Reihenfolge bringen. Das ist schon eine Vorform der bijektiven Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Nun streichen wir alle ungekürzten Brüche, damit keine rationalen Zahlen mehrfach auftreten. Unter den obigen Brüchen müssten wir $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}$ und $\frac{4}{4}$ streichen. Nach einem systematischen Hinzufügen der Null und der negativen Brüche (z.B. nach dem Konzept, das wir für den Nachweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Z}$ verwendet haben), erhalten wir so eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.
b) Der Beweis, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, ist als *Zweites Cantorsches Diagonalverfahren* berühmt geworden. Er wird als Widerspruchsbeweis geführt.

Wir nehmen an, $\mathbb{R}$ sei doch abzählbar. Dann ist auch das Intervall $]0;1[$ abzählbar, also muss man eine (unendlich lange) Liste aller reellen Zahlen aus $]0;1[$ angeben können. Wir stellen uns vor, diese Liste sei in Dezimalschreibweise gegeben. Ohne Einschränkungen kann man verlangen, dass jeder dieser Dezimalbrüche in unendlicher Dezimalbruchentwicklung gegeben ist, indem man eventuell noch Nullen anfügt. Die Liste sähe dann etwa so aus:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & := & 0,a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ a_2 & := & 0,a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ a_3 & := & 0,a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & , \end{array}$$

wobei $a_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ gilt. Nun konstruieren wir eine reelle Zahl z aus $]0;1[$, die in der Liste nicht vorhanden ist. Das stellt einen Widerspruch zur Annahme dar, die Liste wäre vollständig.

Es sei

$$z := 0,b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\ldots$$

mit

$$\begin{array}{ll} b_i = 1 & \text{falls } a_{ii} \neq 1, \\ b_i = 0 & \text{falls } a_{ii} = 1. \end{array}$$

$z \neq a_i$ für alle i, weil die Zahlen an der i-ten Dezimale nicht übereinstimmen.
c) Die Argumentation ist ähnlich dem zweiten Cantorschen Diagonalverfahren (s.o.). Sei $M \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass es in diesem Fall keine surjektive Abbildung $M \to \mathrm{Abb}(M,\{0,1\})$ geben kann.

Nehmen wir an, es existiert eine solche Abbildung. Diese ordnet jedem $m \in M$ ein eindeutiges Element $f \in \mathrm{Abb}(M,\{0,1\})$ zu, das wir mit f_m bezeichnen wollen, d.h. diese Abbildung ist von der Form

$$\varphi\colon\ M \to \mathrm{Abb}(M,\{0,1\}), \quad m \mapsto f_m\,.$$

Wir konstruieren nun eine Abbildung $g \in \mathrm{Abb}(M,\{0,1\})$, die nicht im Bild von φ liegt. Dazu definieren wir

$$g\colon\ M \to \{0,1\}$$

durch

$$g(m) \neq f_m(m) \quad \text{für alle } m \in M\,.$$

Da $\{0,1\}$ mehr als ein Element hat, existiert ein solches g. Nach Konstruktion liegt g nicht im Bild von φ, denn wäre $g = f_{m_0}$ für ein $m_0 \in M$, so wäre $g(m_0) = f_{m_0}(m_0)$ im Widerspruch zur Konstruktion von g.

6. Das Mathematikerhotel ist ein weiteres berühmtes Beispiel, mit dem man den Umgang mit bijektiven Abbildungen üben kann. Es veranschaulicht außerdem auf amüsante Weise die eigentlich unbegreifliche Unendlichkeit der natürlichen Zahlen.

a) Trifft ein neuer Gast ein, so zieht jeder Gast von Zimmer N nach $N+1$ um. So wird Zimmer 0 für den Neuankömmling frei.
b) Bei n neuen Gästen ist das Vorgehen ähnlich: Jeder Gast zieht von Zimmer N nach $N+n$ um. Die Zimmer $0,1,2,\ldots n-1$ werden frei und können von den neu eintreffenden Gästen bezogen werden.
c) Treffen $\mathbb{N}$ neue Gäste ein, so muss jeder Gast aus Zimmer N nach $2N$ umziehen. So werden die Zimmer mit den ungeraden Nummern frei.
d) Bei $n\cdot\mathbb{N}$ neuen Gästen müssen wieder alle alten Gäste umziehen, diesmal von Zimmer N nach $(n+1)N$.
e) Wenn $\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$ Neuankömmlinge eintreffen, wird es etwas komplizierter. Zunächst weisen wir jedem Gast ein Element aus $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zu.

$$\begin{array}{ccccl}
(0,0) & (0,1) & (0,3) & \cdots & \text{für die alten Gäste}\\
(1,0) & (1,1) & (1,3) & \cdots & \text{für die Gäste aus Bus 1}\\
(2,0) & (2,1) & (2,3) & \cdots & \text{für die Gäste aus Bus 2}\\
\vdots & & & & \\
(n,0) & (n,1) & (n,3) & \cdots & \text{für die Gäste aus Bus } n\\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Nach dem Cantorschen Verfahren (siehe Lösung zu Aufgabe 5a) bekommen nun die Gäste ihre neuen Zimmer zugewiesen.
Fazit: Schlafe nie in einem Mathematikerhotel, du wirst immer umziehen müssen, sobald neue Gäste eintreffen!

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

Ergänzung zu Aufgabe 2 d). Wir zeigen beide Richtungen von

$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow f(M_1\cap M_2)=f(M_1)\cap f(M_2)$$

für alle Teilmengen $M_1,M_2\subset M$.

Für die „Hinrichtung" genügt es, die Inklusion

$$f(M_1\cap M_2)\supset f(M_1)\cap f(M_2)$$

zu zeigen, da die andere Inklusion nach Aufgabe 2 d) immer gilt. Sei dazu $y\in f(M_1)\cap f(M_2)$. Dann gibt es ein $x_1\in M_1$ und ein $x_2\in M_2$ mit

$$y=f(x_1)=f(x_2)\,.$$

Da f injektiv ist, gilt $x_1=x_2$, d.h. $x_1\in M_1\cap M_2$ und somit $y\in f(M_1\cap M_2)$.

Nun zeigen wir die andere Richtung. Hierzu nehmen wir an, dass f nicht injektiv ist. Dann existieren $x_1,x_2\in M$ mit $x_1\neq x_2$ und $y=f(x_1)=f(x_2)$. Wählen wir $M_1:=\{x_1\}$ und $M_2:=\{x_2\}$, so folgt

$$f(M_1\cap M_2)=\emptyset\neq\{y\}=f(M_1)\cap f(M_2)\,.$$

E1. Eine Abbildung $f\colon\ M \to N$ kann als Teilmenge des direkten Produktes $M \times N$ aufgefasst werden (vgl. Abschnitt 1.1.7), und zwar via
$$\Gamma_f = \{(m, f(m)) \in M \times N\colon\ m \in M\}\,.$$
Ist $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ eine endliche Menge, so ist eine Abbildung f eindeutig bestimmt durch
$$\Gamma_f = \{(m_1, f(m_1)), \ldots, (m_k, f(m_k))\}\,.$$
Umgekehrt ist durch jedes k-Tupel
$$T := \{(m_1, \tilde{n}_1), \ldots, (m_k, \tilde{n}_k)\} \quad \subset M \times N$$
eindeutig eine Abbildung bestimmt. Falls $N = \{n_1, \ldots, n_l\}$ ebenfalls endlich ist, so gibt es zur Auswahl jedes $\tilde{n}_i \in N$ genau l Möglichkeiten, also insgesamt l^k Stück k-Tupel T, und damit l^k Abbildungen $f\colon\ M \to N$.

1.2 Gruppen

1. Die Behauptung lautet $ab = ba$ für alle $a, b \in G$. Seien $a, b \in G$ beliebig. Nach der Voraussetzung gilt wegen der Eindeutigkeit von inversen Elementen $a = a^{-1}$ und $b = b^{-1}$ sowie $ab = (ab)^{-1}$. Mit Hilfe der Bemerkung 1.2.3 c) folgt daraus
$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba\,,$$
also $ab = ba$, was zu beweisen war.

2. Wir zeigen gleich, dass alle Gruppen G mit höchstens vier Elementen abelsch sind: Hat G nur ein Element, ist die Behauptung klar.

Sei $G = \{e, x\}$, wobei x das neutrale Element bezeichne. Dann muss nach der Eigenschaft des neutralen Elements $ex = x = xe$ gelten.

Sei $G = \{e, x, y\}$. Das neutrale Element e kommutiert mit jedem anderen Gruppenelement. Es ist nur zu testen, ob $xy = yx$ gilt. Es gibt drei Möglichkeiten, denn es gilt $xy \in \{e, x, y\}$. Ist $xy = e$, so ist $y = x^{-1}$, und daraus folgt $xy = yx$. Die beiden anderen Fälle können nicht auftreten, denn gilt $xy = x = xe$, so folgt $y = e$, ein Widerspruch. Den übriggebliebenen Fall kann man analog zum Widerspruch führen.

Sei $G = \{e, x, y, z\}$. e kommutiert mit allen anderen Elementen. Für den Fall $xy \in \{e, x, y\}$ gilt $xy = yx$ mit demselben Argument wie oben. Analog folgt $yx = xy$ für $yx \in \{e, x, y\}$. Damit gilt jedoch $xy = z$ genau dann, wenn $yx = z$ gilt, d.h. $xy = yx$ auch in diesem Fall.

Ein analoges Argument greift für $xz = zx$ und $yz = zy$.

Alle Gruppen mit höchstens vier Elementen sind, wie man sich nach den obigen Ausführungen überlegen kann, bis auf Isomorphie $(\{e\},+)$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$.

3. Um zu testen, ob ein Gruppenhomomorphismus vorliegt, müssen wir sorgfältig beachten, welche Verknüpfungen in der Ausgangsgruppe und welche in der Bildgruppe gemeint sind.
a) f_1 ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für alle $x,y\in G$ gilt

$$f_1(x+y)=2(x+y)=2x+2y=f_1(x)+f_1(y)\,.$$

b) f_2 ist kein Gruppenhomomorphismus, denn $f_2(1+0)=f_2(1)=2$, aber $f_2(1)+f_2(0)=2+1=3$.
c) f_3 ist ebenfalls kein Gruppenhomomorphismus, weil

$$f_3(1+1)=f_3(2)=2^2+1=5\,,$$

aber

$$f_3(1)\cdot f_3(1)=(1^2+1)\cdot(1^2+1)=4\,.$$

d) Hier sind die Gruppen multiplikativ geschrieben. f_4 ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für alle $a+\mathrm{i}b, c+\mathrm{i}d\in\mathbb{C}^*$ gilt:

$$\begin{aligned}
f_4((a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)) &= f_4((ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc))\\
&= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}\\
&= \sqrt{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\\
&= f_4(a+\mathrm{i}b)\cdot f_4(c+\mathrm{i}d)\,.
\end{aligned}$$

e) f_5 ist für $(\mathbb{C},+)$ und $(\mathbb{R},+)$ kein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt z.B. $f_5(1)+f_5(\mathrm{i})=1+1=2$, aber $f_5(1+\mathrm{i})=\sqrt{2}$.
f) Bei f_6 liegt wieder ein Gruppenhomomorphismus vor. Für alle $x,y\in\mathbb{Z}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}
f_6(x+y)-f_6(x)-f_6(y) &= (x+y)^p-x^p-y^p=\sum_{i=1}^{p-1}\tbinom{p}{i}x^iy^{p-i}\\
&= \sum_{i=1}^{p-1}\frac{p!}{i!(p-i)!}x^iy^{p-i}=p\cdot\sum_{i=1}^{p-1}\underbrace{\frac{(p-1)!}{i!(p-i)!}}_{\in\mathbb{Z}}x^iy^{p-i}\in p\mathbb{Z}\,,
\end{aligned}$$

d.h. $f_6(x+y)$ und $f_6(x)+f_6(y)$ liegen in derselben Restklasse in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Der Quotient ist ganzzahlig, weil $\binom{p}{i}$ ganzzahlig sowie p prim ist und i von 1 bis $p-1$ läuft, woraus $i<p$ und $p-i<p$ für alle hier auftretenden i folgt.

4. Die Behauptungen sind einfach einzusehen; wir verzichten daher auf einen Beweis. Wir können uns jedoch an dieser Aufgabe klarmachen, dass das neutrale Element einer Gruppe auch das neutrale Element jeder Untergruppe ist.

Zusätzlich sind in einer Untergruppe die inversen Elemente dieselben wie in der ursprünglichen Gruppe.

Für den Fall, dass A nur ein Element a umfasst, gilt

$$\operatorname{erz}(\{a\}) = \{e, a^n, (a^{-1})^n \colon n \in \mathbb{N}\},$$

wobei e das neutrale Element bezeichnet. Eine solche Gruppe muss nicht notwendigerweise unendlich viele Elemente haben, vgl. Aufgabe 6. Eine Gruppe, die von nur einem Element erzeugt werden kann, heißt *zyklisch*. Gilt $a = e$, so besteht die von $\{a\}$ erzeugte Untergruppe nur aus dem neutralen Element.

5. Die Diedergruppen („Di-e-der“ spricht sich dreisilbig) sind ein relativ einfaches Beispiel für eine nicht kommutative Gruppe mit endlich vielen Elementen. Wir machen uns zunächst einige Zusammenhänge klar, um diese Symmetriegruppen von Vielecken (siehe Bild 1.2 für $n = 5$ und $n = 6$) besser zu verstehen.

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt $d^n = e$ und $s^2 = e$. Stellt man die Gruppenelemente als Matrizen dar (vgl. 2.4 und 2.5), so gilt

$$d = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man kann nachweisen, dass $sd = d^{n-1}s$ ist. Dies ist an Bild 1.2 zu erkennen, und mit Hilfe der Multiplikation von Matrizen (vgl. 2.5) sowie der oben angegebenen Matrizen kann die Behauptung leicht bewiesen werden.

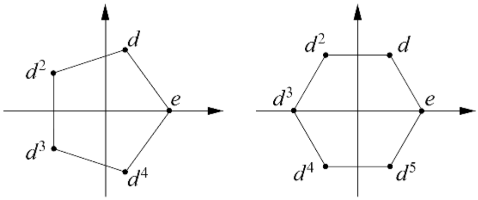


Bild 1.2

Daraus können wir schließen, dass D_n genau $2n$ Elemente besitzt, nämlich $e, d, d^2, d^3, \ldots d^{n-1}, s, sd, sd^2, sd^3, \ldots sd^{n-1}$. Um eine Verknüpfungstafel angeben zu können, helfen folgende Gleichheiten, die alle aus $sd = d^{n-1}s$ und $d^n = e$ gefolgert werden können:

$$d^i \circ sd^j = \begin{cases} sd^{j-i} & \text{für } j \geqslant i, \\ sd^{n+j-i} & \text{für } j < i. \end{cases} \quad \text{und} \quad sd^i \circ sd^j = \begin{cases} d^{j-i} & \text{für } j \geqslant i, \\ d^{n+j-i} & \text{für } j < i. \end{cases}$$

Für die nach diesen Erkenntnissen also sechselementige Diedergruppe D_3 gilt konkret $d^3 = e, s^2 = e, d^2s = sd$ und $ds = sd^2$. Somit lautet die Verknüpfungstafel (erster Faktor senkrecht) von D_3:

$\cdot$	e	d	d^2	s	sd	sd^2
e	e	d	d^2	s	sd	sd^2
d	d	d^2	e	sd^2	s	sd
d^2	d^2	e	d	sd	sd^2	s
s	s	sd	sd^2	e	d	d^2
sd	sd	sd^2	s	d^2	e	d
sd^2	sd^2	s	sd	d	d^2	e

6. a) Wir wissen bereits aus Aufgabe 4, dass die Gruppe G aus Elementen der Gestalt $e, g, g^2, g^3, \ldots, g^{-1}, g^{-2}, g^{-3}, \ldots$ bestehen muss. Ist G endlich, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$. Ohne Einschränkungen wählen wir uns das kleinste n mit dieser Eigenschaft. Dann ist $G = \{e = g^n, g, g^2, g^3, \ldots, g^{n-1}\}$. Die Gruppentafel lautet

$\cdot$	e	g	g^2	g^3	$\cdots$	g^{n-1}
e	e	g	g^2	g^3	$\cdots$	g^{n-1}
g	g	g^2	g^3	$\cdots$		e
g^2	g^2	g^3	g^4	$\cdots$		g
g^3	g^3	g^4	$\cdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
g^{n-1}	g^{n-1}	e	g	g^2	$\cdots$	g^{n-2}.

Ist G unendlich, so gilt $g^n g^m = g^{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$. Es ist offensichtlich, dass eine solche zyklische Gruppe immer kommutativ ist. Entsprechend den Konventionen können wir die Verknüpfung also auch additiv schreiben.

b)* Sei G (additiv geschrieben) eine zyklische Gruppe mit erzeugendem Element g. Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

i) Ist g von endlicher Ordnung, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$ng := \underbrace{g + g + \ldots + g}_{n\text{-mal}} = 0\,.$$

n sei minimal mit dieser Eigenschaft. Dann ist die Abbildung $G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $kg \mapsto k + n\mathbb{Z}$, ein Isomorphismus von Gruppen. Das Nachrechnen der Linearität und Bijektivität lassen wir an dieser Stelle aus.

ii) Ist g von unendlicher Ordnung, d.h. $g + g + \ldots + g \neq 0$, egal, wie oft man g addiert, so gilt $G \cong \mathbb{Z}$ via $kg \mapsto k$.

7. In dieser Aufgabe ist G eine abelsche Gruppe, wurde jedoch multiplikativ geschrieben. Das sollte uns nicht weiter verwirren.

Zunächst müssen wir zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Dafür testen wir die drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Das bereitet keine weiteren Probleme, denn es gilt:

$$x \sim x \quad \text{bedeutet nach Definition} \quad xx^{-1} = e \in H\,.$$

$$\begin{aligned} x \sim y \quad \text{entspricht} \quad & xy^{-1} \in H, \text{ also } (xy^{-1})^{-1} \in H, \text{ und damit} \\ & yx^{-1} \in H, \text{ d.h. } y \sim x\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \sim y \text{ und } y \sim z \quad \text{ist gleichbedeutend mit} \quad & xy^{-1} \in H \text{ und } yz^{-1} \in H\,, \\ \text{also} \quad & xy^{-1} \cdot yz^{-1} = xz^{-1} \in H, \\ \text{das bedeutet gerade} \quad & x \sim z\,. \end{aligned}$$

Damit die Verknüpfung auf Restklassen wohldefiniert ist, muss sie unabhängig von der Wahl des Repräsentanten aus einer Restklasse sein, mit dem man konkret rechnet. Seien also x und x' sowie y und y' jeweils aus derselben Restklasse, d.h. $x \sim x'$ und $y \sim y'$. Wir zeigen $xy \sim x'y'$. Nach Voraussetzung gilt $xx'^{-1} \in H$ und $yy'^{-1} \in H$. Liegt $xy(x'y')^{-1}$ in H, so ist die Behauptung gezeigt.

$$\begin{aligned} xy(x'y')^{-1} &= xyy'^{-1}x'^{-1} \\ &\overset{G\,\text{abelsch}}{=} \underbrace{xx'^{-1}}_{\in H}\underbrace{yy'^{-1}}_{\in H} \in H\,. \end{aligned}$$

G/H wird so zu einer abelschen Gruppe (Gruppeneigenschaften nachprüfen!). Das neutrale Element ist $\overline{1}$, die Restklasse, die das neutrale Element 1 enthält. Invers zu $\overline{x}$ ist $\overline{x^{-1}}$, die Restklasse, die das in G inverse Element zu x enthält. Die Kommutativität vererbt sich von G auf G/H.

Die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}$ und $n\mathbb{Z}$ schreibt man immer additiv, die Übertragung der hier dargestellten Restklassenbildung könnte also auf Probleme bei der Übertragung multiplikativ gedachter Sachverhalte auf eine additive Gruppe stoßen. Deshalb wollen wir noch angeben, dass die Äquivalenzrelation nun

$$x \sim y \Leftrightarrow x + (-y) \text{ ist teilbar durch } n$$

lautet.

8. Die Verknüpfung $\circ$ wird durch die folgende Tabelle definiert, dabei steht die erste „Zahl" senkrecht:

$\circ$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Wie an den Zeilen bzw. den Spalten der Tabelle erkennbar ist, sind alle Translationen ${}_a\tau$ und τ_a surjektiv (sie sind bijektiv), denn in jeder Zeile und in jeder Spalte kommt jedes Element aus G vor.

Diese Verknüpfung ist nicht assoziativ, denn es gilt

$$(1 \circ 1) \circ 2 = 1 \circ 2 = 3 \neq 2 = 1 \circ 3 = 1 \circ (1 \circ 2).$$

Es handelt sich um keine Gruppe, denn es existiert kein neutrales Element, und die Verknüpfung ist nicht kommutativ.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. a) Wir wählen ein $k \in m\mathbb{Z}$. Hierfür existiert ein $l_1 \in \mathbb{Z}$ mit $k = m \cdot l_1$. Aufgrund von $n|m$ existiert ein $l_2 \in \mathbb{Z}$ mit $m = n \cdot l_2$, und hieraus folgt

$$k = m \cdot l_1 = (n \cdot l_2) \cdot l_1 = n \cdot \underbrace{(l_2 \cdot l_1)}_{\in \mathbb{Z}} \in n \cdot \mathbb{Z}.$$

Da $k \in m\mathbb{Z}$ beliebig war, folgt $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$; die Gruppenstruktur vererbt sich problemlos.
b) Es sei vorausgeschickt, dass $\overline{l_1} = \overline{l_2} \iff l_1 - l_2 \in n\mathbb{Z}$ gilt.
Die Abbildung φ ist wohldefiniert: Es sei $\overline{l_1} = \overline{l_2}$. Es ist nachzuweisen, dass $\overline{\frac{m}{n} \cdot l_1} = \overline{\frac{m}{n} \cdot l_2}$ gilt. Die Voraussetzung ist äquivalent zu $l_1 - l_2 \in n\mathbb{Z}$, d.h. es existiert ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $l_1 - l_2 = n \cdot z$. Dann gilt

$$\tfrac{m}{n} \cdot l_1 - \tfrac{m}{n} \cdot l_2 = \tfrac{m}{n} \cdot (l_1 - l_2) = \tfrac{m}{n} \cdot nz = m \cdot z \in m\mathbb{Z},$$

was zu beweisen war.

Um zu sehen, dass es sich bei φ um einen Gruppenhomomorphismus handelt, berechnen wir

$$\begin{aligned} \varphi((k_1 + n\mathbb{Z}) + (k_2 + n\mathbb{Z})) &= \varphi((k_1 + k_2) + n\mathbb{Z}) \\ &= \tfrac{m}{n} \cdot (k_1 + k_2) + m\mathbb{Z} \\ &= (\tfrac{m}{n} \cdot k_1 + m\mathbb{Z}) + (\tfrac{m}{n} \cdot k_2 + m\mathbb{Z}) \\ &= \varphi(k_1 + n\mathbb{Z}) + \varphi(k_2 + n\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Nun ist noch die Injektivität von φ zu zeigen. Da es sich bei φ um einen Gruppenhomomorphismus handelt, genügt es nachzuweisen, dass

$$\varphi^{-1}(0 + m\mathbb{Z}) = 0 + n\mathbb{Z}$$

gilt. Sei also $k \in \mathbb{Z}$ mit $k + m\mathbb{Z} = 0 + m\mathbb{Z}$, was gleichbedeutend ist mit $k - 0 \in m\mathbb{Z}$, d.h. k ist ein Vielfaches von m. Weil n nun aber ein Teiler von m ist, muss k dann auch ein Vielfaches von n sein. Das wiederum bedeutet $k \in n\mathbb{Z}$, d.h. $k + n\mathbb{Z} = 0 + n\mathbb{Z}$. Und das war gerade zu zeigen.

E2. Die einzigen Untergruppen der ganzen Zahlen sind vom Typ $m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dass es sich wirklich um Untergruppen handelt, findet sich in Beispiel c) in Abschnitt 1.2.6 in [Fi1]. Es bleibt zu zeigen, dass es keine weitere Untergruppen der ganzen Zahlen gibt, d.h. für jede Untergruppe U von $\mathbb{Z}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $U = m\mathbb{Z}$.

U sei eine Untergruppe der ganzen Zahlen. Es existiert ein kleinstes positives Element $m \in U$. Aufgrund der Bedingungen einer Untergruppe ist $m\mathbb{Z} \subset U$. Sei jetzt $u \in U$. Nach der Division mit Rest existieren ein $q \in \mathbb{Z}$ und ein $0 \leqslant r < m$ mit $u = q \cdot m + r$. Hieraus folgt $r = u - q \cdot m$. m war jedoch minimal gewählt, daraus folgt $r = 0$, und hiermit gilt $u = q \cdot m$. Aufgrund von $q \in \mathbb{Z}$ ist $q \cdot m \in m\mathbb{Z}$.

E3. a) Zu zeigen ist

$$U_1 \cup U_2 \text{ ist Untergruppe von } G \overset{!}{\iff} U_1 \subseteq U_2 \text{ oder } U_2 \subseteq U_1$$

„$\Leftarrow$“: Für den Fall $U_1 \subseteq U_2$ gilt $U_1 \cup U_2 = U_2$, und U_2 ist eine Untergruppe von U. Analog für $U_2 \subseteq U_1$.

„$\Rightarrow$“: Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

$U_1 \cup U_2$ sei eine Untergruppe von G. Gilt

$$U_1 \nsubseteq U_2 \quad \text{und} \quad U_2 \nsubseteq U_1\,, \tag{1.1}$$

so existieren ein $u_1 \in U_1 \smallsetminus U_2$ und ein $u_2 \in U_2 \smallsetminus U_1$. Da $u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cup U_2$ eine Untergruppe von U ist, folgt $u_1u_2 \in U_1 \cup U_2$.

Können wir zeigen, dass $u_1 \in U_2$ oder $u_2 \in U_1$ liegt, sind wir fertig, denn es ist ein Widerspruch zu (1.1). Wir beschränken uns o.B.d.A. auf den ersten Fall.

Gilt $u_1u_2 \in U_1$. Dann gibt es ein $\tilde{u}_1 \in U_1$ mit $\tilde{u}_1 = u_1u_2$. U_1 ist eine Gruppe. Daher existiert ein inverses Element $\tilde{u}_1^{-1}$, und es folgt

$$u_1^{-1} \cdot (u_1 \cdot u_2) = u_1^{-1} \cdot \tilde{u}_1 \in U_1\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$u_2 = e \cdot u_2 = (u_1^{-1} \cdot u_1) \cdot u_2 = u_1^{-1} \cdot (u_1 \cdot u_2) = u_1^{-1} \cdot \tilde{u}_1 \in U_1\,.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme.

b) Wir führen wieder einen Beweis per Widerspruch. Wäre $U_1 \cup U_2 = G$, so wäre nach Teil a) $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$. Dann folgt $G = U_1 \cup U_2 = U_1$ oder $G = U_1 \cup U_2 = U_2$. Es handelt sich um einen Widerspruch zu $U_1, U_2 \neq G$.

c) Für den Fall, dass $U_1U_2 \subseteq G$ eine Untergruppe ist, gilt für $u_1 \in U_1$ auch $u_1^{-1} \in U_1$, analog für $u_2 \in U_2$. Ist U_1U_2 eine Untergruppe von G, so existiert zu $u_1u_2 \in U_1U_2$ auch das inverse $(u_1u_2)^{-1} \in U_1U_2$. Andererseits gilt $(u_1u_2)^{-1} = u_2^{-1}u_1^{-1}$. Da dies für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$ gilt, folgt $U_1U_2 = U_2U_1$.

Angenommen, $U_1U_2 = U_2U_1$. Da es sich dabei um Untergruppen handelt, ist das neutrale Element e von G sowohl in U_1 als auch in U_2 enthalten, d.h. $e \in U_1$

und $e \in U_2$. Es folgt $e = e \cdot e \in U_1U_2 \Rightarrow U_1U_2 \neq \emptyset$. Aufgrund der Tatsache, dass G eine Gruppe ist, gilt $u_1u_2 \in G$ für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$. Für $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ gilt $(u_1u_2)^{-1} = u_2^{-1}u_1^{-1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} e &= u_1(u_1)^{-1} = u_1 \cdot e \cdot u_1^{-1} = u_1 \cdot \underbrace{u_2 \cdot u_2^{-1}}_{=e} \cdot u_1^{-1} \\ &= (u_1 \cdot u_2)(\underbrace{u_2^{-1}u_1^{-1}}_{\in U_2U_1}) \overset{\circledast}{=} (\underbrace{u_1 \cdot u_2}_{\in U_1U_2}) \cdot (\underbrace{u_1 \cdot u_2}_{\in U_1U_2})^{-1}, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $\circledast$ die Bedingung $U_1U_2 = U_2U_1$ benutzt wurde. Es existiert das inverse Element.

E4. Die Gesetzmäßigkeiten lassen sich durch geradlinige Berechnungen nachweisen. Symmetrie- und Vollständigkeitseigenschaften der Tabelle können angeführt werden.

E5. Für die Gruppe mit zwei Elementen ist es sofort klar. Die einzige Möglichkeit, eine Gruppe aus drei Elementen zu bilden, wird durch die folgende Tabelle dargestellt.

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Wie man sieht, gibt es keine Möglichkeit, Elemente zu vertauschen, ohne dass eines der Elemente mindestens zweimal in einer Zeile oder Spalte vorkommt. Es existiert daher keine weitere Gruppe mit drei Elementen. Die Kleinsche Vierergruppe ist (bis auf Vertauschung der Namen der Elemente) die einzige Möglichkeit, eine Gruppe mit vier Elementen zu bilden. Mit denselben Überlegungen wie für die Gruppe mit drei Elementen gelangt man zum Ziel.

E6. a) Die vier Drehungen sind

$$\mathrm{id}: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad d_{90}: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$d_{180}: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad d_{270}: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Die Tabelle der Verknüpfungen sieht folgendermaßen aus:

$\circ$	id	d_{90}	d_{180}	d_{270}
id	id	d_{90}	d_{180}	d_{270}
d_{90}	d_{90}	d_{180}	d_{270}	id
d_{180}	d_{180}	d_{270}	id	d_{90}
d_{270}	d_{270}	id	d_{90}	d_{180}

Die Gesetze der Gruppe lassen sich an dieser Verknüpfungs-Tabelle erkennen.

Die Abgeschlossenheit ist daran zu erkennen, dass die Tabelle nur mit Drehungen gefüllt ist. Das Assoziativgesetz (G1) zeigt sich auch mit Hilfe der Tabelle. Es liegt an der Symmetrie der Tabelle zur diagonalen Achse durch die Zellen, welche die Verknüpfungen derselben Drehungen enthält. Hierbei ist zu bedenken, dass das Ergebnis der ersten vollbrachten Verknüpfung wiederum mit der dritten Drehung in derselben Tabelle zu verknüpfen ist.

Das neutrale Element ist die identische Abbildung. An der Tabelle ist zu erkennen, dass in der Zeile bzw. Spalte mit *id* dieselben Drehungen stehen wie in der zugehörigen Spalte bzw. Zeile.

Jedes Element besitzt genau ein inverses Element, da in jeder Zeile bzw. in jeder Spalte der Tabelle genau einmal die Identität auftritt. Damit ist auch (G2) nachgewiesen.

Dass es sich um eine abelsche Gruppe handelt, sieht man an der Symmetrie der Tabelle zur Diagonalen.

c) Um zu zeigen, dass die Spiegelungen $S := \{id, s_a, s_b, c_c, s_d\}$ keine Gruppe bilden, reicht ein Gegenbeispiel aus. Wir notieren mit Blick auf Teil d) alle Elemente der Gruppe:

$$id\colon \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad s_a\colon \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad s_b\colon \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$s_c\colon \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad s_d\colon \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Menge der Spiegelungen ist nicht abgeschlossen, wie sich an den folgenden Beispielen zeigt:

$$\begin{aligned} s_a \circ s_b\colon &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \notin S \\ s_c \circ s_a\colon &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \notin S \\ s_a \circ s_c\colon &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \notin S \end{aligned}$$

Die letzten beiden Beispiele zeigen auch, dass die Verknüpfung nicht abelsch ist.

d) Die Vereinigung der Drehungen und Spiegelungen bildet eine Gruppe. Dies lässt sich mit Hilfe einer analogen Tabelle wie in Teil b) erkennen. Es zeigte sich bereits in Aufgabenteil c), dass die Gruppe nicht kommutativ ist. Hinzu kommt, dass die Menge der Spiegelungen nicht abgeschlossen bzgl. der Operation ist, wie sich auch bereits in Aufgabenteil c) zeigte.

Die Gruppe $D_4 \cup S_4$ bezeichnet man als *Symmetriegruppe*, vgl. auch die Lösung von Aufgabe 5 dieses Abschnitts.

E7. Aus char $(K) \neq 2,3$ folgt $4 \neq 0 \neq 27$, was im folgenden Beweis verwendet wird.

$a) \Rightarrow b)$: Zu zeigen ist
$$4a^3 + 27b^2 \neq 0 \overset{!}{\Rightarrow} \nexists\, c,d \in K \text{ mit } x^3 + ax + b = (x+c)^2(x+d)\,.$$
Wir zeigen die Negation und nehmen an, es existieren $c,d \in K$ mit
$$x^3 + ax + b = (x+c)^2(x+d)\,.$$
Es gilt
$$\begin{aligned}(x+c)^2(x+d) &= (x^2+2cx+c^2)(x+d)\\ &= x^3+2cx^2+c^2x+dx^2+2cdx+c^2d\\ &= x^3+(2c+d)x^2+(c^2+2cd)x+c^2d\,.\end{aligned}$$
Dann folgt
$$x^3+ax+b = x^3+(2c+d)x^2+(c^2+2cd)x+c^2d\,.$$
Durch einen Koeffizientenvergleich ergibt sich
$$2c+d=0 \Rightarrow d=-2c\,, \quad \text{daraus folgt}$$

$$a = c^2+2cd = c^2-4c^2 = -3c^2 \quad \text{und} \quad b = c^2d = c^2\cdot(-2c) = -2c^3\,.$$
Daher gilt
$$\begin{aligned}4a^3+27b^2 &= 4\cdot(-3c^2)^3+27(-2c^3)^2\\ &= -108c^6+108c^6 = 0\,,\end{aligned}$$
was zu zeigen war.

$a) \Leftarrow b)$: Falls $4a^3+27b^2=0$, so wähle
$$c := \sqrt{-\frac{a}{3}} \quad \text{und} \quad d := -2\cdot\sqrt{-\frac{a}{3}}\,.$$
Da $27b^2 \geqslant 0$, muss $a \leqslant 0$ sein, d.h. c,d sind definiert. Dann gilt
$$\begin{aligned}(x+c)^2(x+d) &= \left(x+\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^2\left(x-2\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)\\ &= \left(-x^2+2\sqrt{-\frac{a}{3}}x-\frac{a}{3}\right)\left(x-2\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)\\ &= x^3+x^2\underbrace{\left(-2\sqrt{-\frac{a}{3}}+2\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)}_{=0}+x\left(4\cdot\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\right)+\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}\\ &= x^3+ax+\underbrace{b}_{\circledast}\,.\end{aligned}$$
$\circledast$ folgt hierbei aus $4a^3=-27b^2$.

E8. Wir führen einen Beweis per Induktion über n. Für $n=1$ und $n=2$ ist die Behauptung klar.

$n \to n+1$: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra und dem Korollar 1.3.5 in [Fi1] existieren $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, so dass
$x^{n+1} + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x-x_1)(x-x_2) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)(x-x_{n+1})$.

Nach der Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned} &(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)\cdot x \\ &= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(-1)^{n-i}\Big(\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_{n-i}\leqslant n} x_{j_1}x_{j_2}\cdot\ldots\cdot x_{j_{n-i}}\Big)}_{=:b_i}\cdot x^i, \end{aligned}$$

womit folgt

$$\begin{aligned} (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)(x-x_{n+1}) &= \Big((x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)\Big)(x-x_{n+1}) \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\Big)\cdot(x-x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} b_i x^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} b_i x_{n+1} x^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} b_{i-1} x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x_{n+1} x^i \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\big(b_{i-1} + (-1) b_i x_{n+1}\big) + (-1) b_0 x_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der b_i und Rechnung ergibt sich die Behauptung. Die Vorzeichenwechsel ergeben sich dabei durch die Vorzeichen in den b_i und den Faktoren -1 vor den Summanden, die x_{n+1} enthalten. Speziell ist $b_0 = (-1)^n x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.

E9. a) Wir betrachten die Punkte $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$ und $R(x_R, y_R)$ und beginnen mit dem Fall $P \neq Q$ und $x_P \neq x_Q$. Die Gerade $\overline{PQ}$ sei gegeben durch

$$g\colon\; y = \lambda x + \beta\,.$$

Ihre Steigung ist gegeben durch $\lambda = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.

Bei der Berechnung von x_R hilft der Satz von Vieta. R liegt sowohl auf der Gerade g als auch auf der elliptischen Kurve E. Für die Schnittpunkte von Gerade und Kurve gilt

$$\begin{aligned} & (\lambda x + \beta)^2 = x^3 + ax + b \\ \iff\; & \lambda^2 x^2 + 2\lambda\beta x + \beta^2 = x^3 + ax + b \\ \iff\; & x^3 - \lambda^2 x^2 + (a - 2\lambda\beta)x + b - \beta^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Vieta folgt $-\lambda^2 = -(x_P + x_Q + x_R)$. Hiermit ergibt sich

$$x_R = \lambda^2 - x_P - x_Q\,. \tag{1.2}$$

Da P auf g liegt, gilt $y_P = \lambda \cdot x_P + \beta$. Löst man die Gleichung nach β auf, so ergibt sich

$$\beta = y_P - \lambda x_P\,. \tag{1.3}$$

Beim Umgang mit $R(x_R, y_R)$ ist zu beachten, dass er nicht auf der Gerade g, sondern auf der Gerade $-g\colon\ y = -\lambda x - \beta$ liegt. Damit folgt

$$\beta = -y_R - \lambda x_R\,. \tag{1.4}$$

Aus den Gleichungen (1.3) und (1.4) folgt

$$y_R = -y_P + \lambda(x_P - x_R)\,. \tag{1.5}$$

Die Gleichungen (1.2) und (1.5) ergeben gemeinsam mit der Bedingung von λ die Behauptung.

Im Fall $P = Q$ handelt es sich bei g um die Tangente an die Kurve im Punkt P. Wir betrachten o.B.d.A. den Fall, dass P auf dem oberen Teil der Kurve liegt, der gleich dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^3 + ax + b}$ ist. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2 + a}{\sqrt{x^3 + ax + b}} \quad \text{und} \quad y_P = \sqrt{x_P^2 + ax_P + b}\,,$$

da P auf der Kurve liegt. Damit ergibt sich

$$\lambda = \frac{3x_P^2 + a}{2y_P}\,.$$

b) (G2) ergibt sich aus den oben notierten Regeln. Das neutrale Element ist der Punkt im Unendlichen, was sich in der Regel 3 zeigt. Das inverse Element eines Punkts P ist gegeben durch $-P$. Anschaulich bedeutet das in der Kurve, dass die Gerade durch P und $-P$ parallel zu y-Achse verläuft, daher die Kurve noch einmal im Unendlichen schneidet.

Dass es sich um eine abelsche Gruppe handelt, zeigt sich an den Gleichungen (1.2) und (1.5), denn nach (1.2) folgt

$$x_R = \lambda^2 - x_P - x_Q = \lambda^2 - x_Q - x_P\,,$$

d.h. Gleichung (1.5) orientiert sich nicht an Q.

Die Rechnung zu (G1) wird hier nicht notiert. Es handelt sich lediglich um eine umfangreiche, jedoch tricklose Rechnung, bei der die Indizes nicht durcheinander geraten dürfen.

E10. Die Lösung verläuft analog zu Aufgabe E4. Hierbei ist auf die Rechnung „modulo“ zu achten.

In Verbindung mit diesen Verfahren lassen sich Nachrichten codieren und decodieren, vgl. [We].

1.3 Ringe, Körper und Polynome

1. Es gibt bis auf Isomorphie nur jeweils einen Körper mit drei bzw. vier Elementen, wie man durch systematisches Ausprobieren zeigen kann. Mit etwas Theorie im Hintergrund kann man allgemein zeigen, dass jeder endliche Körper durch die Anzahl seiner Elemente bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist (vgl. [St], §16).

Nach Aufgabe 2 zu Abschnitt 1.2 existiert bis auf Isomorphie nur eine Gruppe mit drei Elementen, nämlich $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$. Also muss jeder Körper mit drei Elementen bezüglich der Addition dieselbe Form haben. Bezeichnen wir die Elemente in unserem dreielementigen Körper (in weiser Voraussicht) mit $0,1,2$, so lautet die Verknüpfungtafel der Addition

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1\,. \end{array}$$

In der Verknüpfungstabelle der Multiplikation sind durch $0 \cdot m = 0$ und $1 \cdot m = m$ für alle $m \in M$ bis auf die Verknüpfung $2 \cdot 2$ bereits alle Ergebnisse klar. Es ist jedoch

$$2 \cdot 2 = (1+1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 1\,,$$

und damit sieht die Verknüpfungstabelle der Multiplikation so aus:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1\,, \end{array}$$

was unsere Bezeichnungsweise nachträglich rechtfertigt, da M nun isomorph zu $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist.

Beim Körper mit vier Elementen nennen wir die Elemente nun a,b,c,d, um zu verdeutlichen, dass diese Bezeichnungen völlig unerheblich sind. Der Ring $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist nicht nullteilerfrei, kommt also als ein Kandidat für einen Körper mit vier Elementen nicht in Frage (vgl. 1.3.4 d)). Wie man nachprüfen kann, ist die einzige Möglichkeit der Verknüpfungen, die $(\{a,b,c,d\},+,\cdot)$ zu einem Körper macht, die folgende (vgl. auch Aufgabe 2 zu 1.2):

$$\begin{array}{c|cccc} + & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & a & a & a & a \\ b & a & b & c & d \\ c & a & c & d & b \\ d & a & d & b & c \end{array}$$

a ist dabei das Nullelement, b die Eins.

2. Angenommen, $\varphi\colon\ K \to K'$ ist nicht injektiv. Dann existieren $x,y \in K$, $x \neq y$, mit $\varphi(x) = \varphi(y)$ in K'. Somit gilt $0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x-y)$ und $x-y \neq 0$, also ist $x-y$ invertierbar. Nun zeigen wir, dass φ dann der Nullhomomorphismus ist. Sei dazu $z \in K$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(z\cdot(x-y)\cdot(x-y)^{-1})\\ &= \varphi(z)\cdot\varphi(x-y)\cdot\varphi((x-y)^{-1})\\ &= \varphi(z)\cdot 0\cdot\varphi((x-y)^{-1}) = 0\,,\end{aligned}$$

d.h. φ bildet alle $z \in K$ auf null ab.

3. a) Wir wollen an dieser Stelle darauf verzichten, die Ringeigenschaften von S nachzuweisen. Es sei nur angemerkt, dass die Nullabbildung das Nullelement ist. Die Abbildung, die jedes Element aus M auf 1 abbildet, ist das Einselement von S. Die inverse Abbildung bezüglich der Addition einer Abbildung f ist die Abbildung g mit $g(m) = -f(m)$ für alle $m \in M$.
b) Auch wenn R ein Körper ist, wird $S = \mathrm{Abb}(M;R)$ im Allgemeinen nicht zu einem Körper. Genauer gilt: S ist genau dann ein Körper, wenn R ein Körper ist und M aus einem Element besteht.

Nehmen wir zunächst an, dass $M = \{m\}$ aus einem Element besteht. Nach Teil a) ist die Nullabbildung das Nullelement und die Abbildung f mit $f(m) = 1$ das Einselement von S. Ist für $f \in S$ das Bild $f(m) \notin \{0,1\}$, so existiert ein $r \in R$ mit $r\cdot f(m) = 1$. Die Abbildung $g \in S$ mit $g(m) = r$ ist dann das inverse Element zu f in S.

Hat M mehr als ein Element, so definieren wir eine Abbildung $f\colon\ M \to R$ durch $f(m_1) = 1$ für ein $m_1 \in M$ und $f(m) = 0$ für alle $m \in M \setminus \{m_1\}$. Falls ein Inverses $g \in S$ zu f existierte, so müsste für alle $m \in M \setminus \{m_1\}$

$$1 = (f\cdot g)(m) = f(m)\cdot g(m) = 0\cdot g(m) = 0$$

gelten, was wegen $1 \neq 0$ in einem Körper nicht sein kann.

4.* Betrachte das Polynom $f = t^{p^n} - t$. Für dieses Polynom existiert der Zerfällungskörper $\tilde{K}$ ber $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (vgl. [Ku1], Satz 7.25).

Wir bezeichnen mit K die Menge der Nullstellen von f in $\tilde{K}$. Für zwei Elemente $t_1,t_2 \in K \setminus 0$ gilt

$$t_1^{p^n-1} = 1\,,\quad t_2^{p^n-1} = 1\,,\quad \text{also auch}\quad (t_1\cdot t_2)^{p^n-1} = 1\,.$$

Die Assoziativität der Verknüpfung „·“ ist klar, neutrales Element ist die 1, und das zu $t \in K \setminus 0$ inverse Element ist t^{p^n-2}. Die Nullstellen ungleich null von f bilden also bezüglich der Multiplikation bereits eine Gruppe. (Man kann zeigen, dass diese Gruppe *zyklisch* ist, vgl. [Ku1], 11.18 und Aufgabe 6 zu 1.2. Standardbeispiele für zyklische Gruppen sind die Einheitswurzelgruppen

$\left(e^{\nu\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}\right)_{\nu=0,\ldots,n-1}$, die die komplexen Nullstellen der Polynome t^n-1 sind, vgl. [Ku1], 11.22 b). Da endliche Körper durch die Anzahl ihrer Elemente bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind, vgl. die Lösung zu Aufgabe 1 dieses Abschnittes, nennt man die Nullstellen der Polynome t^n-1 über beliebigen Körpern n-te *Einheitswurzeln*, vgl. [Ku1] §13.)

Für $t_1,t_2 \in K$ gilt

$$(t_1+t_2)^{p^n} = \sum_{i=0}^{p^n} \binom{p^n}{i} t_1^i t_2^{p^n-i}.$$

Für alle $1 \leqslant i \leqslant p^n-1$ ist jedoch p ein Teiler von $\binom{p^n}{i}$, also gilt $\binom{p^n}{i}=0$ für $1 \leqslant i \leqslant p^n-1$ in einem Körper der Charakteristik p. Daraus folgt

$$(t_1+t_2)^{p^n} = t_1^{p^n}+t_2^{p^n} \overset{(*)}{=} t_1+t_2\,,$$

wobei an der Stelle $(*)$ die Tatsache $t \in K$ benutzt wurde. Analog gilt

$$(t_1-t_2)^{p^n} = t_1^{p^n}-t_2^{p^n} = t_1-t_2\,.$$

Also bilden die Elemente aus K bezüglich der Addition eine Gruppe mit neutralem Element 0. Die Kommutativität der Addition und der Multiplikation folgt jeweils aus den entsprechenden Gesetzen in $\tilde{K}$. Damit ist K ein Körper.

Es verbleibt zu zeigen, dass f in $\tilde{K}$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt. Null ist sicherlich keine mehrfache Nullstelle von f. Nehmen wir daher an, $\bar{f} := t^{p^n-1}-1$ hätte eine mehrfache Nullstelle $\lambda \neq 0$ in $\tilde{K}$, also

$$\bar{f} = (t-\lambda)^k \cdot \tilde{f} \quad \text{mit } k \geqslant 2\,.$$

Dann würde für die formale Ableitung (die ebenso wie in der Analysis gebildet wird, hier jedoch keinerlei analytische Eigenschaften besitzt; daher der Name *formale* Ableitung) $\bar{f}'(t) = (t-\lambda)^{k-1}\left(k\cdot\tilde{f}+(t-\lambda)\cdot\tilde{f}'\right)$ von $\bar{f}$ ebenfalls $\bar{f}'(\lambda)=0$ folgen. Da $\bar{f}=t^{p^n-1}-1$ irreduzibel in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[t]$ und daher ein Polynom minimalen Grades mit Nullstelle λ ist, folgt $\bar{f}'=0$ wegen $\deg \bar{f}' < \deg \bar{f}$. Für unser Polynom $\bar{f}$ gilt allerdings

$$\bar{f}' = (p^n-1)t^{p^n-2} = -t^{p^n-2} \neq 0\,,$$

also kann f keine mehrfache Nullstelle haben.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass K ein Körper ist und genau p^n Elemente enthält.

5. Als erstes wollen wir geeignete Bezeichnungen wählen. Es sei

$$\begin{aligned} f &= a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0\,,\\ g &= c_mX^m + c_{m-1}X^{m-1} + \ldots + c_1X + c_0\,,\\ q &= b_lX^l + b_{l-1}X^{l-1} + \ldots + b_1X + b_0 \end{aligned}$$

mit
$$a_i, c_j \in K \subset K' \text{ für } 0 \leqslant i \leqslant n \text{ und } 0 \leqslant j \leqslant m$$
sowie
$$b_i \in K' \text{ für } 0 \leqslant i \leqslant l\,.$$
Ohne Einschränkung seien a_n, c_m und b_l ungleich null. Damit ist auch festgelegt, dass $n = m + l$ ist. Die Behauptung lautet nun, dass $b_i \in K$ gilt für alle i. Da $f = q \cdot g$ ist, gilt $a_n = b_l \cdot c_m$, also $b_l = \frac{a_n}{c_m} \in K$. Desweiteren ist $a_{n-1} = b_{l-1} \cdot c_m + b_l \cdot c_{m-1}$, und somit $b_{l-1} = \frac{a_{n-1} - c_{m-1} \cdot b_l}{c_m} \in K$. So können wir uns weiter die verschiedenen b_i „entlanghangeln“ und nacheinander zeigen, dass sie alle in K liegen.

6. Die Behauptung bedeutet geometrisch, dass ein Polynom höchstens n-ten Grades bereits durch $n+1$ verschiedene Punkte eindeutig festgelegt ist.

In der Aufgabenstellung wird ein Tipp gegeben, den wir wie folgt nutzen können: Wenn wir die g_k mit den angegebenen Eigenschaften konstruiert haben, lässt sich
$$f = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot g_k$$
verifizieren, denn für $0 \leqslant i \leqslant n$ gilt
$$f(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot g_k(x_i) = y_i \cdot 1 = y_i\,.$$
Die g_k konstruieren wir so:
$$g_k := \frac{1}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)} \cdot \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (t - x_i)\,.$$
($\prod$ bezeichnet dabei das Produkt der bezeichneten Elemente, analog zu $\sum$ für die Summe.) Hier geht die Bedingung ein, dass alle x_i verschieden sein sollen, denn andernfalls könnte eine Null im Nenner auftreten. Wir rechnen nach:
$$g_k(x_i) = 0 \quad \text{für } i \neq k \quad \text{und}$$
$$g_k(x_k) = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)} \cdot \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i) = y_k\,.$$
Damit gelten die an die g_k gestellten Bedingungen. Wie oben schon dargelegt, können wir damit die Existenz (mindestens) eines $f \in K[t]$ nachweisen. Wir sollen aber zeigen, dass es genau ein solches Polynom gibt. Es ist ja bis jetzt noch nicht klar, ob man nicht ein anderes Polynom f auf eine andere Weise konstruieren könnte, das ebenfalls die geforderten Eigenschaften besitzt.

Nehmen wir also an, es gäbe ein weiteres Polynom $g \neq f$ vom Grad $\leqslant n$ mit $g(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$. Dann ist $f - g$ nicht das Nullpolynom, und es gilt $(f-g)(x_i) = 0$ für $i = 0, \ldots, n$, d.h. $f - g$ besitzt mindestens $n+1$ Nullstellen. Da jedoch

$$\deg(f-g) \leqslant \max\{\deg f, \deg g\} \leqslant n$$

ist, kann $f - g \neq 0$ nach Korollar 1 zu 1.3.8 maximal n Nullstellen haben, was einen Widerspruch bedeutet. Also ist $g = f$, und damit gibt es genau ein f mit den gewünschten Voraussetzungen.

7. In $\mathbb{C}[t]$ besitzen f und g eindeutige Zerlegungen in Linearfaktoren, weil $\mathbb{C}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Die Voraussetzung bedeutet, dass jeder Linearfaktor, der in f vorkommt, mit mindestens derselben Vielfachheit auch in g auftritt. In g können auch noch andere Linearfaktoren auftreten. Das umschreibt gerade die Tatsache, dass g ein Vielfaches von f ist.

In $\mathbb{R}[t]$ gibt es keine analoge Aussage, weil nicht jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Ein mögliches Beispiel lautet $f = (t-1)(t^2+1)$ und $g = (t-1)^2$.

8. Die Abbildung $\tilde{}$ ist nach Aufgabe 6 dieses Kapitels surjektiv. (Achtung: Die Tatsache, dass der Körper endlich ist, geht entscheidend ein. Für unendliche Körper ist die Behauptung falsch.)

$\tilde{}$ ist nicht injektiv, da $K[t]$ unendlich viele Elemente enthält, $\mathrm{Abb}(K,K)$ jedoch nur endlich viele. Ersteres folgt daraus, dass $t^k \in K[t]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, die zweite Behauptung gilt nach Ergänzungsaufgabe E1 zu Abschnitt 1.1.

9. a) Es seien

$$f = \sum_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k} a_{i_1 \cdots i_n} \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n}$$

und

$$g = \sum_{0 \leqslant j_1, \ldots, j_n \leqslant l} b_{j_1 \cdots j_n} \cdot t_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{j_n}$$

gegeben. Durch Hinzufügen von entsprechenden $a_{j_1 \cdots j_n} = 0$ und $b_{i_1 \cdots i_n} = 0$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Summen über dieselben n-Tupel gebildet werden, d.h.

$$f = \sum_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k} a_{i_1 \cdots i_n} \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n}$$

und

$$g = \sum_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k} b_{i_1 \cdots i_n} \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n} .$$

Damit folgt dann sofort

$$f + g = \sum_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k} (a_{i_1 \cdots i_n} + b_{i_1 \cdots i_n}) \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n} .$$

Eine Formel für die Multiplikation können wir angeben durch

$$f \cdot g = \sum_{\substack{0 \leqslant i_1,\ldots,i_n \leqslant k \\ 0 \leqslant j_1 \ldots, j_n \leqslant k}} a_{i_1 \cdots i_n} \cdot b_{j_1 \cdots j_n} \cdot t_1^{i_1+j_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n+j_n}.$$

Der Nachweis der Ringeigenschaften von $K[t_1, \ldots, t_n]$ ist Routine; wir lassen ihn hier aus. Die Kommutativität der Multiplikation ist klar nach der Konstruktion.

Die Nullteilerfreiheit ist deutlich leichter einzusehen, wenn wir die Teile b) bis d) gelöst haben; wir verschieben ihren Beweis daher auf später.

b) Ist

$$h(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=d} a_{i_1 \cdots i_n} \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n},$$

so folgt

$$\begin{aligned} h(\lambda t_1, \ldots, \lambda t_n) &= \sum_{i_1+\ldots+i_n=d} a_{i_1 \cdots i_n} \cdot (\lambda t_1)^{i_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda t_n)^{i_n} \\ &= \sum_{i_1+\ldots+i_n=d} a_{i_1 \cdots i_n} \cdot \lambda^{i_1} \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda^{i_n} t_n^{i_n} \\ &= \lambda^d \sum_{i_1+\ldots+i_n=d} a_{i_1 \cdots i_n} \cdot t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n} \\ &= \lambda^d \cdot h(t_1, \ldots, t_n). \end{aligned}$$

c) Es sei

$$f = f_{(0)} + \ldots + f_{(k)}$$

die Zerlegung von f in homogene Komponenten, d.h. die $f_{(i)}$ sind die Summe aller homogenen Summanden vom Grad i. Für festes $t := (t_1, \ldots, t_n) \in K^n$ gilt dann nach Teil b)

$$f(\lambda t) = \underbrace{f_{(0)}(t)}_{\in K} + \lambda \cdot \underbrace{f_{(1)}(t)}_{\in K} + \ldots + \lambda^k \cdot \underbrace{f_{(k)}(t)}_{\in K} \in K[\lambda].$$

Andererseits ist

$$f(\lambda t) = \lambda^d \cdot \underbrace{f(t)}_{\in K} \in K[\lambda]$$

nach Voraussetzung. Damit folgt für alle $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} g(\lambda) &:= f_{(0)}(t) + \lambda \cdot f_{(1)}(t) + \ldots + \lambda^k \cdot f_{(k)}(t) - \lambda^d \cdot f(t) \\ &= f_{(0)}(t) + \ldots + \lambda^{d-1} \cdot f_{(d-1)}(t) + \lambda^d \cdot \big(f_{(d)}(t) - f(t)\big) \\ &\quad + \lambda^{d+1} \cdot f_{(d+1)}(t) + \ldots + \lambda^k \cdot f_{(k)}(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da K unendlich viele Elemente besitzt, ist g nach Korollar 1 aus Abschnitt 1.3.8 das Nullpolynom, d.h. $f(t) = f_{(d)}(t)$. Da diese Aussage für beliebiges $t \in K^n$ gilt, ist $f_{(d)} = f$.

d) Diese Aussage sieht man durch einfaches Ausmultiplizieren.

Wir kommen nun zum Beweis der Nullteilerfreiheit von $R := K[t_1, \ldots, t_n]$ aus Teil a). Dazu betrachten wir die homogenen Zerlegungen

$$f = f_{(0)} + \ldots + f_{(k)} \quad \text{und} \quad g = g_{(0)} + \ldots + g_{(l)}$$

zweier Polynome f und g aus R. Für das Produkt dieser beiden Polynome gilt

$$f \cdot g = \sum_{d=0}^{k+l} \sum_{i+j=d} f_{(i)} \cdot g_{(j)} \,.$$

Falls $f \cdot g = 0$ ist, so gilt für alle $0 \leqslant d \leqslant k+l$

$$\sum_{i+j=d} f_{(i)} \cdot g_{(j)} = 0 \,.$$

Sei nun $d_f := \min\left\{d\colon\ f_{(d)} \neq 0\right\}$ und $d_g := \min\left\{d\colon\ g_{(d)} \neq 0\right\}$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i+j=d_f+d_g} f_{(i)} \cdot g_{(j)} = f_{(d_f)} \cdot g_{(d_g)} = \sum_{i_1+\ldots+i_n=d_f+d_g} c_{i_1 \cdots i_n} t^{i_1} \cdot \ldots \cdot t^{i_n} \,.$$

Da in je zwei Summanden mindestens zwei der i_j verschieden sind, folgt $c_{i_1 \cdots i_n} = 0$ für alle Tupel $(i_1, \ldots, i_n)$, und damit entweder $f_{(d_f)} = 0$ oder $g_{(d_g)} = 0$ im Widerspruch zur Annahme. Damit ist R nullteilerfrei.

Nach Aufgabe 3 zu Abschnitt 1.5 ist eine rundere Argumentation möglich, da die $t^{i_1} \cdot \ldots \cdot t^{i_n}$ mit $i_1 + \ldots + i_n = d$ eine Basis des Vektorraumes der homogenen Polynome vom Grad d sind.

10. Die Konstruktion ist analog zu den rationalen Zahlen als *Quotientenkörper* der ganzen Zahlen und kann an geeigneter Stelle nachgesehen werden (z.B. in [E], Kapitel 1, §4, oder [K-P], Kapitel III). Es sollte jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass der Körper der rationalen Funktionen in der algebraischen Geometrie eine gewisse Bedeutung hat, da durch ihn Einblicke in die Struktur von *algebraischen Varietäten* gewonnen werden kann (vgl. z.B. [Ku2], Kapitel IV, §2).

11. Hier sei $f(t) = t^n + 1 \in \mathbb{R}[t]$. Wegen $\alpha_0 \neq 0$ kann die Vorzeichenregel von DESCARTES angewandt werden, und es gilt

i) $N_+(f) \leqslant Z(f) = 0$, d.h. es existieren keine positiven Nullstellen.

ii)
$$N_-(f) \leqslant Z(f_-) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

Ist n gerade, dann existiert keine Nullstelle im negativen Bereich. Ist n hingegen ungerade, so existiert keine oder genau eine Nullstelle im negativen Bereich.

Zusammengefasst ergibt sich damit, dass für den Fall $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ das Polynom f keine Nullstelle besitzt. Für $n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$ besitzt f keine oder genau eine Nullstelle im negativen Bereich.

12. Wir beweisen die Teile a) und b) der Vorzeichenregel für jede Richtung einzeln, um die Schritte deutlich zu machen und auch die kurze mathematische Schreibweise zu üben.
a) „$\Rightarrow$“: Es sei $\lambda_i < 0\ \forall i = 1, \ldots, n$. Damit gibt es genau n negative Nullstellen. Andererseits existieren maximal n Vorzeichenwechsel der Koffizienten von $f_- := f(-t)$. Damit ergibt sich nach der Vorzeichenregel von DESCARTES

$$n = N_-(f) \leqslant Z(f_-) \leqslant n.$$

Dies bedeutet, dass die Anzahl der Vorzeichenwechsel im Tupel $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$ gleich null ist, oder anders formuliert, dass $\alpha_i > 0 \forall i = 0, \ldots, n-1$.
„$\Leftarrow$“: Wenn alle Koeffizienten α_j größer als oder gleich null sind, ergibt sich

$$\alpha_i \geqslant 0 \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow Z(t) = 0 \overset{\circledast}{\Rightarrow} N_+(f) = 0,$$

wobei an der Stelle $\circledast$ die Vorzeichenregel von DESCARTES verwendet wurde. Damit sind alle Nullstellen negativ.
b) „$\Rightarrow$“: Gilt $\lambda_i \geqslant 0$ für alle Nullstellen λ_i, so ergibt sich analog zu dieser Richtung aus Teil a)

$$n = N_+(f) \leqslant Z(f) \leqslant n.$$

Damit sind die Vorzeichen der α_j alternierend.
„$\Leftarrow$“: Ist das Tupel der α_j alternierend, so gilt

$$N_-(f) \leqslant Z(f_-) = 0, \quad \text{jedoch} \quad N_+(f) \leqslant Z(f) = n.$$

Da jedoch die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) gleich n ist, ergibt sich

$$n \leqslant N_+(f) + N_-(f) = N_+(f) \leqslant n \Rightarrow N_+(f) = n,$$

d.h. alle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind positiv.
Damit ist die Vorzeichenregel bewiesen.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. a) Zunächst zeigen wir, dass $R[t]$ eine abelsche Gruppe bzgl. der Addition ist, d.h. die Eigenschaft (R1). Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes ist durch eine Rechnung zu bestätigen. Das neutrale Element des Polynomrings ist gleich dem neutralen Element des Rings R, in Zeichen $0_{R[t]} = 0_R$. Das inverse Element zu einem Element $f = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in R[t]$ ist gegeben durch

$$-f = -a_0 - a_1 t - \ldots - a_n t^n.$$

Ist zusätzlich ein $g = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m \in R[t]$ gegeben, so gilt

$$f \cdot g = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n+m} t^{n+m} \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j\,. \qquad \circledast$$

Da R kommutativ ist, folgt hieraus

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{j+i=k} b_j a_i \, ,$$

und damit folgt $f \cdot g = g \cdot f$.

Die Eigenschaft R1 von $R[t]$ wurde letztlich auf die analoge Eigenschaft von R zurückgeführt. Ähnlich verläuft dies für die Eigenschaft R2 der Assoziativität und R3 der Distributivität von $R[t]$.

b) Die Polynome f und g seien wie in Teil a) gegeben. Dann gilt für das Produkt der Polynome die Formel $\circledast$ aus Teil a) und $\deg f \cdot g = n + m$ ist gleichbedeutend mit $c_{n+m} \neq 0$. Aufgrund von $\deg f = n$ und $\deg g = m$ gilt $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$, und da R nullteilerfrei ist, folgt $c_{n+m} = a_m \cdot b_n \neq 0$. Damit gilt $\deg f \cdot g = n + m$.

c) Zunächst sei bemerkt, dass $\deg f \cdot g > \deg f + \deg g$ nicht gelten kann. Dies sieht man unmittelbar an der Formel $\circledast$ aus Teil a). Um ein Beispiel für „$<$“ zu finden, betrachten wir $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ und wählen $f := \bar{2} \cdot t =: g$. Dann folgt

$$f \cdot g = \bar{2} \cdot t \cdot \bar{2} \cdot t = \bar{0} \cdot t^2 = \bar{0} \, .$$

Hiermit gilt

$$\deg f \cdot g = -\infty < 2 = \deg f + \deg g \, .$$

Es sei jedoch bemerkt, dass auch in einem Ring mit Nullteilern der Fall „$=$“ auftreten kann, wie das Beispiel $f = g = t$ und $f \cdot g = t^2$ zeigt.

E2. a) Für alle $r \in R$ gilt

$$r = r^2 = (-r)^2 = -r \, .$$

Daraus folgt $r + r = 0$.

b) Seien $r, s \in R$. Dann gilt

$$r^2 + s^2 = r + s = (r+s)^2 = r^2 + rs + sr + s^2 \, .$$

Dies ist äquivalent zu $0 = rs + sr$. Mit Hilfe der Aussage aus Teil a) an der Stelle $\circledast$ folgt

$$rs = -sr \overset{\circledast}{=} sr \, .$$

Damit folgt die Behauptung.

c) Ist R ein Integritätsring, so gilt $0 \neq 1$. Für alle $0 \neq r \in R$ gilt

$$r \cdot (r-1) = r^2 - r = r - r = 0 \Rightarrow r \cdot (r-1) = 0 \, .$$

Aus $r \neq 0$ folgt $r - 1 = 0$ und hiermit $r = 1$. Da r beliebig gewählt war, folgt $R = \{0; 1\}$. Bis auf Isomorphie gibt es nur einen Ring und Körper mit zwei Elementen, daher ist R der Körper mit zwei Elementen.

E3. a) Zu zeigen ist, dass $R^\times$ multiplikativ abgeschlossen ist. Dies trifft zu, denn für $a_1, a_2 \in R^\times$ existieren $b_1, b_2 \in R^\times$ mit

$$a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1 = a_2 \cdot b_2 = b_2 \cdot a_2 = 1\,.$$

Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes überträgt sich von R auf $R^\times$. Für $a_1 \cdot a_2$ folgt mit Hilfe des Assoziativgesetzes in R

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot (b_2 \cdot b_1) = a_1 \cdot \underbrace{(a_2 \cdot b_2)}_{=1} \cdot b_1 = a_1 \cdot b_1 = 1\,.$$

Damit liegt das Produkt von a_1 und a_2 in R. Analog lassen sich die anderen Fälle betrachten.

Es gilt $1 \in R^\times$. Die Existenz eines Inversen für Elemente in $R^\times$ ist erfüllt, da es sich um Einheiten handelt.

b) Zu zeigen ist für einen kommutativen Ring R:

$$R^\times = R \setminus \{0\} \overset{!}{\iff} R \text{ ist Körper}$$

Dies deckt sich genau mit einem der Axiome für Körper, vgl. [Fi1], 1.3.3, Bedingung (K2).

Für den Fall, dass die Multiplikation nicht das Kommutativgesetz erfüllt, ist auch das Distributivgesetz lediglich in bestimmter Reihenfolge gültig. Verändert man jedoch das Distributivgesetz dahingehend, dass für $a, b, c \in G$ beliebig

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{als auch} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,,$$

so bezeichnet man die Struktur als *Schiefkörper*.

E4. a) Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. Damit gilt $a_1 + \mathrm{i} \cdot b_1 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ und $a_2 + \mathrm{i} \cdot b_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Summe und Produkt lauten

$$(a_1 + \mathrm{i}b_1) + (a_2 + \mathrm{i}b_2) = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2) \quad \text{und}$$
$$(a_1 + \mathrm{i}b_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1)\,.$$

Damit lassen sich die Rechenregeln der ganzen Zahlen auf $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ übertragen.

b) Es seien $z_1 = a + \mathrm{i}b$ und $z_2 = c + \mathrm{i}d$. Durch eine Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\delta(z_1 \cdot z_2) &= \delta\Big((a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d)\Big) = \delta\Big((ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)\Big) \\
&= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\
&= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\
&= \delta(a + \mathrm{i}b) \cdot \delta(c + \mathrm{i}d) = \delta(z_1) \cdot \delta(z_2)\,,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

c) Behauptung: Es ist $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times \overset{!}{=} \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$.

„$\subset$": Es sei $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$. Dann existiert ein $\tilde{z} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit $z \cdot \tilde{z} = 1$. Mit der Normabbildung folgt dann

$$1 = \delta(1) = \delta(z \cdot \tilde{z}) = \delta(z) \cdot \delta(\tilde{z})\,.$$

Der Bildraum von δ besteht aus den natürlichen Zahlen ohne 0, womit $\delta(z) = \delta(\tilde{z}) = 1$ folgt, somit $z \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$.

„$\supset$" folgt aus $|\pm 1| = |\pm \mathrm{i}| = 1$.

E5. Wie sich an der Lösung von Aufgabe 6 a) in Abschnitt 1.2 zeigt, muss $R^\times$ bei einer Anzahl von fünf Elementen zyklisch sein, d.h. es gibt ein $g \in R$ mit $R^\times = \{1, g, g^2, g^3, g^4\}$. Die folgende Tabelle zeigt die Verknüpfung:

$\cdot$	1	g	g^2	g^3	g^4
1	1	g	g^2	g^3	g^4
g	g	g^2	g^3	g^4	1
g^2	g^2	g^3	g^4	1	g
g^3	g^3	g^4	1	g	g^2
g^4	g^4	1	g	g^2	g^3.

Es gilt $(-1)^2 = 1$, daher ist -1 eine Einheit. In der Diagonale der Tabelle zeigt sich andererseits, dass lediglich $1^2 = 1$ gilt, und es folgt

$$-1 = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 0 \iff a + a = 0 \text{ für alle } a \in R^\times\,.$$

Wir werden zeigen, dass $1 + g^2 + g^3 \in R^\times$ liegt. Sein inverses Element ist $1 + g + g^4$, denn es gilt

$$\begin{aligned}
(1+g^2+g^3)(1+g+g^4) &= 1+g+g^4+g^2+g^3 && (1.6)\\
&\quad +g+g^3+g^4+g^2 && (1.7)\\
&= 1+\underbrace{(g+g)}_{=0}+\underbrace{(g^2+g^2)}_{=0} && (1.8)\\
&\quad +\underbrace{(g^3+g^3)}_{=0}+\underbrace{(g^4+g^4)}_{=0} && (1.9)\\
&= 1\,. && (1.10)
\end{aligned}$$

Damit folgt $1+g^2+g^3 \in R^\times = \{1, g, g^2, g^3, g^4\}$. Wir zeigen jetzt, dass $1+g^2+g^3$ nicht gleich einem dieser Elemente in $R^\times$ sein kann. Damit haben wir einen Widerspruch dazu, dass $1 + g^2 + g^3 \in R^\times$ ist.

Es ergibt sich in den folgenden Gleichungen (mit der Anwendung der Ergebnisse der Gleichungen (1.6) bis (1.10) an den Stellen $\circledast$ sowie $1 = -1$):

$$\begin{array}{lllll}
1. & 1+g^2+g^3=1 & \Longleftrightarrow & g^2+g^3=0 & \\
 & & \Longleftrightarrow & g^2(1+g)=0 & \\
 & & \Longleftrightarrow & g^2=0 \vee 1+g=0 & \\
 & & \Longleftrightarrow & g=0 \vee g=1 & \rightsquigarrow \text{Widerspruch} \\
2. & 1+g^2+g^3=g & \overset{\circledast}{\Longleftrightarrow} & 1+g+g^4=g^4 & (\text{da } g\cdot g^4=1) \\
 & & \Longleftrightarrow & g=1 & \rightsquigarrow \text{Widerspruch} \\
3. & 1+g^2+g^3=g^2 & \Longleftrightarrow & g^3=1 & \rightsquigarrow \text{Widerspruch} \\
4. & 1+g^2+g^3=g^3 & \Longleftrightarrow & 1+g^2=0 & \\
 & & \Longleftrightarrow & g^2=1 & \rightsquigarrow \text{Widerspruch} \\
5. & 1+g^2+g^3=g^4 & \overset{\circledast}{\Longleftrightarrow} & 1+g+g^4=g & (\text{ da } g\cdot g^4=1) \\
 & & \Longleftrightarrow & g^4=1 & \rightsquigarrow \text{Widerspruch}
\end{array}$$

Dies bedeutet, dass $1+g^2+g^3$ nicht gleich einem der Elemente aus $R^\times$ sein kann, womit es keinen Ring mit fünf Elementen geben kann.

1.4 Vektorräume

1. a) Es ist
$$W := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}\colon\ x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3 .$$
Zu zeigen sind die Eigenschaften UV1, UV2 und UV3 aus 1.4.2.
UV1: $(0,0,0) \in W$, also $W \neq \emptyset$.
UV2: Es seien $v = (v_1,v_2,v_3) \in W$ und $w = (w_1,w_2,w_3) \in W$. Dann gilt
$$v = (v_1,v_1,\tfrac{1}{2}v_1) \quad \text{und} \quad w = (w_1,w_1,\tfrac{1}{2}w_1),$$
also
$$v+w = (v_1+w_1,v_1+w_1,\tfrac{1}{2}(v_1+w_1)) \in W .$$
UV3: Es seien $v = (v_1,v_1,v_3) \in W$ und $\lambda \in K$. Es ist
$$v = (v_1,v_1,\tfrac{1}{2}v_1),$$
also
$$\lambda v = (\lambda v_1,\lambda v_1,\tfrac{1}{2}\lambda v_1) \in W .$$
Also ist W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
b) Nun ist $W := \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1^2 + x_2^4 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Für alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus 0$ gilt $x^2 > 0$ und $x^4 > 0$, woraus folgt, dass für alle $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (0,0)$ gerade $x_1^2 + x_2^4 > 0$ gilt. Also ist $W = \{(0,0)\}$, und die Bedingungen UV1 und UV2 sind trivialerweise erfüllt.
c) Die Menge $W := \left\{(\mu+\lambda,\lambda^2) \in \mathbb{R}^2\colon\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ ist kein Untervektorraum. Zwar gelten UV1 und UV2, jedoch ist UV3 nicht erfüllt. Das sieht man wie folgt: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda^2 \geqslant 0$. Wähle $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\alpha = -1$. Dann ist $\alpha \cdot (\mu+\lambda,\lambda^2) = (-1)\cdot(1,1) = (-1,-1) \notin W$.

d) In $W := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}):\ f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ ist die Nullabbildung sicherlich in W enthalten; das zeigt UV1. Die Eigenschaft UV2 folgt für $f,g \in W$ aus

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = f(-x)+g(-x) = (f+g)(-x).$$

UV3 schließlich folgt aus

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(-x) = (\lambda f)(-x)$$

für alle $f \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Also ist W ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
e) Wie bereits in Teil c) gelten für $W := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3:\ x_1 \geqslant x_2\right\} \subset \mathbb{R}^3$ die Eigenschaften UV1 und UV2, jedoch nicht UV3. Für $v = (2,1,1) \in W$ und $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$ folgt

$$\lambda \cdot v = (-2,-1,-1) \notin W\,, \text{ da } \quad x_1 = -2 < -1 = x_2\,.$$

W ist also kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
f) Die Menge $W := \{A \in \mathrm{M}(m \times n;\mathbb{R}):\ A \text{ ist in Zeilenstufenform}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathrm{M}(m \times n;\mathbb{R})$. Anders als in den Aufgabe c) und e) ist hier bereits die Summe zweier Vektoren im Allgemeinen nicht mehr in W enthalten. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

ist

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht in W. Also ist W kein Untervektorraum.

2. Die Eigenschaft V1 folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass es sich bei V und W bereits um abelsche Gruppen handelt. Für die Eigenschaft V2 zeigen wir stellvertretend:

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)(v,w) &= ((\lambda+\mu)v,(\lambda+\mu)w) = (\lambda v+\mu v,\lambda w+\mu w) \\ &= (\lambda v,\lambda w)+(\mu v,\mu w) = \lambda(v,w)+\mu(v,w)\,.\end{aligned}$$

3. Es sind die Eigenschaften V1 und V2 zu zeigen. Für V1 sind die Gruppenaxiome G1 und G2 aus 1.2.2 nachzuweisen. G1 ist dabei klar.

Das Nullelement ist die Abbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in X$, das zur Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(X,V)$ negative Element ist gegeben durch g mit $g(x) = -f(x)$ für alle $x \in X$, wobei für $f(x) \in V$ auch $-f(x) \in V$ gilt, da V ein Vektorraum ist. Die Kommutativität von $\mathrm{Abb}(X,V)$ folgt aus der Kommutativität von V als Gruppe, denn für alle $g \in \mathrm{Abb}(X,V)$ gilt

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x) \quad \text{für alle } x \in X\,.$$

Auch die Eigenschaft V2 folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für V:

$$((\lambda+\mu)\cdot f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x)$$

für alle $f,g \in \mathrm{Abb}(X,V)$ und alle $x \in X$.

4. a) Die Sinus-Funktion ist 2π-periodisch, also ist die Menge V nicht leer. Die Eigenschaften UV1 und UV2 folgen unmittelbar aus der Definition der Addition und skalaren Multiplikation in Aufgabe 3.

b) Bevor wir die Eigenschaften UV1 bis UV3 nachweisen, müssen wir zeigen, dass $W \subset V$ gilt. Die 2π-Symmetrie von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ist bekannt. Für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(m(x+2\pi)) &= \sin(mx+m2\pi) = \sin((mx+(m-1)2\pi)+2\pi) \\ &= \sin(mx+(m-1)2\pi) = \ldots = \sin(mx)\,. \end{aligned}$$

Analog zeigt man die 2π-Periodizität von $\cos(mx)$.

Nun kommen wir zu den Nachweisen der Eigenschaften UV1 bis UV3. Die Menge W ist nicht leer. Sind $f,g \in W$, so gibt es Darstellungen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cos(n_i x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \sin(m_j x) \quad \text{und} \\ g(x) &= \sum_{i=k+1}^{\tilde{k}} \lambda_i \cos(n_i x) + \sum_{j=l+1}^{\tilde{l}} \mu_j \sin(m_j x)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cos(n_i x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \sin(m_j x) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{\tilde{k}} \lambda_i \cos(n_i x) + \sum_{j=l+1}^{\tilde{l}} \mu_j \sin(m_j x) \\ &= \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \lambda_i \cos(n_i x) + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \mu_j \sin(m_j x) \in W\,. \end{aligned}$$

Analog folgt die Eigenschaft UV3.

5. Wir zeigen zunächst, dass die Inklusionen $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell \subset \ell_\infty$ der entsprechenden Mengen gelten. Dabei werden an einigen Stellen Grenzwertsätze für reelle Zahlenfolgen benutzt, die, sofern sie nicht aus Schule oder Studium bekannt sind, in [Fo1], §4 nachgesehen werden können.

Um die Inklusion $\ell \subset \ell_\infty$ zu zeigen, wählen wir ein $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell$ mit Grenzwert g, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|x_i - g| < \varepsilon$ für alle $i \geqslant N(\varepsilon)$.

Speziell für $\varepsilon = 1$ gilt $|x_i - g| < 1$ für alle $i \geqslant N(1)$, woraus
$$|x_i| < |g| + 1 \quad \text{für alle } i \geqslant N(1)$$
folgt. Wählen wir
$$M := \max\left(|x_1|, \ldots, |x_{N(1)-1}|, |g| + 1\right),$$
so gilt $|x_i| \leqslant M$ für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h. $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Es sei nun $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit
$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 = c\,.$$
Wegen
$$|x_n|^2 = x_n^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2$$
für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgt
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_i^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2\\ &= c - c = 0\,.\end{aligned}$$
Aus $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0$ folgt jedoch sofort $\lim_{n\to\infty} x_i = 0$, d.h. $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell$.

Nun kommen wir zur Inklusion $\ell^1 \subset \ell^2$. Dazu wählen wir ein $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit
$$c := \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|\,,$$
woraus folgt
$$c^2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|\right)^2.$$
Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|\right)^2 - \sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i\neq j} 2|x_i|\cdot|x_j| \geqslant 0\,,$$
da jeder einzelne Summand auf der rechten Seite größer oder gleich 0 ist. Umgeformt ergibt dies
$$\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|\right)^2 \geqslant \sum_{i=0}^{n} |x_i|^2$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus folgt
$$c^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|\right)^2 \geqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2\,.$$
Insbesondere ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ und $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

Es sind nun für unsere Mengen die Eigenschaften UV1, UV2 und UV3 zu zeigen. Für $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i = 0$ für alle i ist

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell \subset \ell_\infty\,,$$

also sind alle Mengen nicht leer.

Die restlichen Eigenschaften müssen für alle Mengen einzeln gezeigt werden. Es reicht nicht, die Eigenschaften für eine Obermenge zu zeigen, da überhaupt nicht klar ist, ob man bei der Addition von Vektoren oder der skalaren Multiplikation nicht „aus der Menge fällt"; genau das soll ja letztlich erst gezeigt werden.

Für eine beschränkte Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit Schranke $m \in \mathbb{R}$ ist λm eine Schranke der Folge $(\lambda x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, und sind zwei beschränkte Folgen (x_i) und (y_i) mit Schranken m und n gegeben, so ist für alle $i \in \mathbb{N}$

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant m + n\,,$$

also ist $(x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Damit ist gezeigt, dass ℓ_∞ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ist.

Aus den Grenzwertsätzen folgt, dass ℓ ein Untervektorraum von ℓ_∞ ist.

Für $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda x_i|^2 = \lambda^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\,.$$

Sind $(x_i),(y_i) \in \ell^2$ gegeben, so gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$|x_i| \cdot |y_i| \leqslant \max\left(|x_i|^2, |y_i|^2\right) \leqslant |x_i|^2 + |y_i|^2\,. \qquad (*)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} |x_i + y_i|^2 &\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2|x_i| \cdot |y_i|\right)\\ &\overset{(*)}{\leqslant} 3\sum_{i=0}^{\infty} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right) < \infty\,,\end{aligned}$$

also ist $(x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

Zum Schluss folgt für $(x_i),(y_i) \in \ell^1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda \cdot x_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| < \infty$$

und

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \left(|x_i| + |y_i|\right) < \infty\,.$$

Damit ist alles gezeigt.

6. Jeder Vektorraum enthält einen Untervektorraum, der isomorph zum zugrundeliegenden Körper ist. Daher kann eine abzählbar unendliche Teilmenge keine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur besitzen, denn $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, siehe Aufgabe 5 zu Abschnitt 1.1.

7. Für eine skalare Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{i} \cdot 1 = r$. Dann aber ist nach den Eigenschaften V2 einer skalaren Multiplikation

$$-1 = (-1) \cdot 1 = \mathrm{i}^2 \cdot 1 = \mathrm{i} \cdot (\mathrm{i} \cdot 1) = \mathrm{i} \cdot r = \mathrm{i} \cdot 1 \cdot r = r^2 .$$

Da es keine reelle Zahl r mit $r^2 = -1$ gibt, kann die gesuchte skalare Multiplikation nicht existieren.

8. a) Sei $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} = -a \in \mathbb{Q}, \tag{$*$}$$

also auch

$$(-a)^2 = 2b^2 + 2bc \cdot \sqrt{6} + 3c^2 \in \mathbb{Q}. \tag{$**$}$$

Gilt $b \neq 0$ und $c \neq 0$, so ist nach $(**)$

$$\sqrt{6} = \frac{(-a)^2 - 2b^2 - 3c^2}{2bc} \in \mathbb{Q},$$

was ein Widerspruch ist. Ist entweder $b \neq 0$ und $c = 0$ oder $c \neq 0$ und $b = 0$, so folgt aus $(*)$

$$\sqrt{2} = -\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \quad \text{oder} \quad \sqrt{3} = -\tfrac{a}{c} \in \mathbb{Q},$$

dies ist ebenfalls ein Widerspruch. Also gilt $b = c = 0$, woraus nach Gleichung $(*)$ auch $a = 0$ folgt. Damit sind $1, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig.

b) Nein, es gilt $2 \cdot (4,5,6) - (1,2,3) = (7,8,9)$.

c) Es bezeichne $f_n(x) := \left(\frac{1}{n+x}\right)$. Für eine Summe

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = 0 \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

wollen wir zeigen, dass alle λ_i verschwinden müssen. Da die Summe endlich ist, können wir den Hauptnenner der Brüche bilden. Damit erhält man im Zähler ein Polynom vom Grad $k-1$ in der Variablen x. Ein solches Polynom hat maximal $k-1$ Nullstellen. Da $\mathbb{R}_+^*$ aber unendlich viele Elemente besitzt, muss das Polynom im Zähler das Nullpolynom sein. Dies führt aufgrund von $x \in \mathbb{R}_+^*$ zu einem Gleichungssystem in den λ_i, dessen Lösung sich zu $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ ergibt.

d) Ja, sie sind linear unabhängig. Es gibt zwar Verknüpfungen zwischen den trigonometrischen Funktionen, die aus der Schule bekannten Additionstheoreme, jedoch sind dies Verknüpfungen im *Ring* $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nicht im Vektorraum über den reellen Zahlen. Einen strengen Beweis kann man mit Hilfe von Fourier-

Zerlegungen der Funktionen $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ finden, vgl. dazu [Fo3], §12 und Aufgabe 7 zu Abschnitt 5.4.

9. Das zur Aufgabe gehörige lineare Gleichungssystem führt auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & t & 11 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix formen wir mittels elementarer Zeilenumformungen um zu

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & t-9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4t-37 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abhängigkeit der drei Vektoren ist gleichbedeutend damit, dass die zweite Zeile der Matrix verschwindet, also $4t-37=0$ oder $t=\frac{37}{4}$.

10. a) $w=\frac{35}{48}v_1+\frac{37}{48}v_2-\frac{1}{16}v_3$. **b)** $w=-v_1+v_2+v_3$.

Lösung der Ergänzungsaufgabe

E1. a) Es sei

$$x=u+w\in(V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3)$$

beliebig mit $u\in V_1\cap V_3$ und $w\in V_2\cap V_3$. Das bedeutet $u\in V_1$ und $u\in V_3$ sowie $w\in V_2$ und $w\in V_3$. Dann gilt

$$x=u+w\in V_1+V_2\,,$$

weil $u\in V_1$ und $w\in V_2$ sowie

$$x=u+w\in V_3\,,$$

weil $u,w\in V_3$ und Vektorräume additiv abgeschlossen sind.

b) Die Inklusion $(V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3)\subset(V_1+V_2)\cap V_3$ gilt allgemein, wie in Teil a) gezeigt.

Sei nun $V_1\subset V_2$ und $x=u+w$ mit $u\in V_1$, $w\in V_2$ und $x\in V_3$. Wegen $V_1\subset V_3$ gilt $u\in V_3$ und somit $w=x-u\in V_3$, denn Vektorräume sind abgeschlossen gegenüber Inversen und Addition. Damit ist $u\in V_1\cap V_3=V_1$ und $w\in V_2\cap V_3$, also

$$x=u+w\in(V_1\cap V_3)+(V_2\cap V_3).$$

c) Ein Beispiel ist gegeben durch drei verschiedene Geraden in $\mathbb{R}^2$, die sich im Ursprung schneiden, dargestellt in Bild 1.3. In diesem Fall gilt

$$(V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3) = \{0\} + \{0\} = \{0\},$$

jedoch

$$(V_1 + V_2) \cap V_3 = \mathbb{R}^2 \cap V_3 = V_3\,.$$

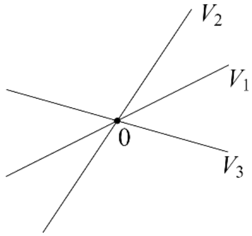


Bild 1.3

1.5 Basis und Dimension

Basen von Vektorräumen sind im Allgemeinen alles andere als eindeutig. Daher kann im Folgenden immer nur *ein* Beispiel für eine Basis gegeben werden. Sollte der/die LeserIn eine andere gefunden haben: don't worry. Die ultimative Basis gibt es nicht, auch wenn die Anzahl der Basiselemente eines endlichdimensionalen Vektorraumes fest ist! Es gibt höchstens Basen, die besonders einfach sind oder bestimmte Bedingungen erfüllen, wie zum Beispiel, dass ein gegebener Endomorphismus (siehe 2.1.2) eine besonders einfache Form hat (siehe 4.3 oder 4.6).

1. a) Eine mögliche Basis, die man wie in Beispiel 2 aus 1.5.7 erhalten kann, ist

$$w_1 = (1,1,1,1,1)\,, \quad w_2 = (0,1,4,-1,2)\,, \quad w_3 = (0,0,9,-7,0)\,.$$

b) Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$v_3 = v_1 + 2v_2\,, \quad v_5 = -2v_2\,, \quad v_5 = v_1 - v_3\,.$$

Daraus ergeben sich als mögliche Basen für V aus $v_1, \ldots, v_5$:

$$\{v_1,v_2,v_4\}\,, \quad \{v_1,v_3,v_4\}\,, \quad \{v_1,v_4,v_5\}\,, \quad \{v_2,v_3,v_4\}\,, \quad \{v_3,v_4,v_5\}\,.$$

Die Darstellungen der jeweils nicht in den Basen enthaltenen v_i ergeben sich aus den oben angegebenen Gleichungen.

2. a) Eine Basis ist gegeben durch (v_1,v_2) mit $v_1 = (1,0,1)$ und $v_2 = (0,1,0)$.
b) $v_1 = (3,-1,-5,0)$ und $v_2 = (-1,1,1,-1)$ bilden eine Basis.
c) Für $V = \operatorname{span}(t^2, t^2+t, t^2+1, t^2+t+1, t^7+t^5)$ ist

$$\mathscr{B} = \left(t^2, t^2+1, t^2+t, t^7+t^5\right)$$

eine Basis. Dazu ist zu zeigen, dass diese Polynome ber $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, und dass $V = \operatorname{span}\mathscr{B}$ gilt. Die zweite Aussage folgt aus

$$t^2+t+1 = 1\cdot(t^2+t)+1\cdot(t^2+1)-1\cdot t^2 .$$

Die Aussage $t^7+t^5 \notin \operatorname{span}(t^2, t^2+t, t^2+1)$ folgt durch Betrachtung der Grade der Polynome. Bleibt also die lineare Unabhängigkeit der drei Polynome t^2, t^2+t, und t^2+1 zu zeigen. Seien $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$\alpha\cdot t^2+\beta\cdot(t^2+t)+\gamma\cdot(t^2+1) = 0 .$$

Zusammenfassen nach Potenzen von t ergibt

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot t^2+\beta\cdot t+\gamma\cdot 1 = 0 ,$$

woraus unmittelbar $\alpha=\beta=\gamma=0$ folgt.
d) Eine Basis von

$$V := \{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \; f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$$

ist gegeben durch

$$(f_r \in V : \; f_r(x) = \delta_{xr}) ,$$

wobei δ das *Kronecker-Symbol*

$$\delta_{xr} := \begin{cases} 1 & \text{für } x = r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist. Die lineare Unabhängigkeit der Funktionen f_r ist unmittelbar klar. Ist andererseits $f \in V$ gegeben, so existieren $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, so dass $a_i := f(x_i) \neq 0$ für alle $i = 1,\ldots,n$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{x_1,\ldots,x_n\}$. Dann aber gilt $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot f_{x_i}$.

3. Zunächst zeigen wir, dass die Menge $W := K[t_1,\ldots,t_n]_{(d)}$ der homogenen Polynome vom Grad d in n Veränderlichen vereinigt mit dem Nullpolynom einen Untervektorraum des Polynomringes über K in n Veränderlichen bilden. Wegen $0 \in W$ ist $W \neq \emptyset$. Dass für $f,g \in W$ auch $f+g \in W$ gilt, haben wir in Aufgabe 9 zu Abschnitt 1.3 gezeigt.

Die Aussage für die Multiplikation mit $\lambda \in K$ ist klar; aus den Koeffizienten $a_{i_1\cdots i_n}$ von $f = \sum\limits_{0\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant k} a_{i_1\cdots i_n} t_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot t_n^{i_n}$ werden Koeffizienten $\lambda a_{i_1\cdots i_n}$ von λf.

Nach den obigen Ausführungen und ähnlichen Überlegungen wie in der Lösung zu Aufgabe 2 ist klar, dass die Polynome $t_1^{d_1}\cdot\ldots\cdot t_n^{d_n}$ mit $d_1+\ldots+d_n = d$ eine Basis von W bilden. Wir behaupten, dass es davon $\binom{n+d-1}{d}$ Stück gibt. Der Beweis wird per Induktion über n geführt.

Für $n = 1$ ist $W = \operatorname{span}(t^d)$, also ist $\dim W = 1$, was mit $\binom{1+d-1}{d} = 1$ übereinstimmt.

Für den Induktionschritt nehmen wir an, die Aussage sei für $n-1$ Variablen richtig. Da der Grad von $t_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{d_n}$ gleich d ist, gilt

$$\deg\left(t_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot t_{n-1}^{d_{n-1}}\right) = d - d_n\,.$$

Aufgrund der Induktionsannahme gilt

$$\dim K[t_1,\ldots,t_{n-1}]_{(d-d_n)} = \binom{n-1+d-d_n-1}{d-d_n}\,.$$

Für jedes $d_n = 0,\ldots,d$ erhält man so die Dimension des Untervektorraumes von W, der aus homogenen Polynomen mit dem Exponenten d_n von t_n besteht.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\dim K[t_1,\ldots,t_n]_{(d)} &= \sum_{d_n=0}^{d} \dim K[t_1,\ldots,t_{n-1}]_{(d-d_n)} \\
&= \sum_{d_n=0}^{d} \binom{n-2+d-d_n}{d-d_n} = \sum_{k=0}^{d} \binom{n-2+k}{k} \\
&\overset{(*)}{=} \binom{n+d-1}{d}\,.
\end{aligned}$$

Es bleibt der Beweis von $(*)$; er wird durch Induktion über d geführt. Für $d=0$ gilt $\binom{n-1+0}{0} = 1 = \binom{n-1}{0}$. Für den Induktionsschritt betrachtet man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{d} \binom{n-2+k}{k} &= \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-2+k}{k} + \binom{n-2+d}{d} \\
&= \binom{n-2+d}{d-1} + \binom{n-2+d}{d}\,,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsannahme benutzt wurde. Aufgrund der Beziehungen im Pascalschen Dreieck (vgl. [Fo1], §1) gilt

$$\binom{n-2+d}{d-1} + \binom{n-2+d}{d} = \binom{n-1+d}{d}\,.$$

4. Wir zeigen zunächst, dass $\mathbb{C}$ endlich erzeugt über $\mathbb{R}$ ist. Das folgt leicht aus Abschnitt 1.3.4, denn $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und $\{(1,0),(0,1)\}$ ist endliches Erzeugendensystem, da $(a,b) = a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1)$ für alle $(a,b) \in \mathbb{C}$ gilt.

Um einzusehen, dass $\mathbb{R}$ nicht endlich erzeugt über $\mathbb{Q}$ ist, bemerken wir, dass $\mathbb{Q}$ als Menge abzählbar ist. Wäre $\mathbb{R}$ endlich erzeugt über $\mathbb{Q}$, so gäbe es $r_1,\ldots,r_n \in \mathbb{R}$, so dass für alle $r \in \mathbb{R}$ eine Darstellung

$$r = \sum_{i=1}^{n} q_i r_i \quad \text{mit} \quad q_i \in \mathbb{Q}$$

existiert. Damit wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, was nach Aufgabe 5 zu Abschnitt 1.1 nicht der Fall ist.

Mit dem gleichen Argument kann man auch zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar erzeugt über $\mathbb{Q}$ ist.

5. Wir beginnen damit, nachzuweisen, dass die $\big((v_i,0)\big)_{i\in I}\cup\big((0,w_j)\big)_{j\in J}$ ein Erzeugendensystem sind. Dazu sei $(v,w)\in V\times W$ gegeben. Wegen $v\in V$ gilt $v=\sum'_{i\in I}a_iv_i$, wobei der Strich am Summenzeichen andeuten soll, dass nur endlich viele der formal unendlich vielen aufgeschriebenen Summanden ungleich null sind (vgl. [Fi1], 6.3.2). Wegen $w\in W$ gibt es eine Darstellung $w=\sum'_{j\in J}b_jw_j$. Aufgrund der Definitionen der Verknüpfungen in $V\times W$ folgt damit

$$\begin{aligned}(v,w) &= (v,0)+(0,w)=(\sum_{i\in I}{}'a_iv_i,0)+(0,\sum_{j\in J}{}'b_jw_j)\\ &= \sum_{i\in I}{}'a_i(v_i,0)+\sum_{j\in J}{}'b_j(0,w_j)\,,\end{aligned}$$

also wird $V\times W$ von den $\big((v_i,0)\big)_{i\in I}\cup\big((0,w_j)\big)_{j\in J}$ erzeugt.

Die lineare Unabhängigkeit ist wie folgt einzusehen; sei

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I}{}'a_i(v_i,0)+\sum_{j\in J}{}'b_j(0,w_j)=0\\ \Leftrightarrow\ &(\sum_{i\in I}{}'a_iv_i,0)+(0,\sum_{j\in J}{}'b_jw_j)=0\\ \Leftrightarrow\ &(\sum_{i\in I}{}'a_iv_i,\sum_{j\in J}{}'b_jw_j)=0\\ \Leftrightarrow\ &\sum_{i\in I}{}'a_iv_i=0 \quad\text{und}\quad \sum_{j\in J}{}'b_jw_j=0\,.\end{aligned}$$

Da $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j\in J}$ eine Basis von W ist, folgt $a_i=0$ für alle i und $b_j=0$ für alle j.

6. Die Dimension des von den fünf Vektoren a,b,c,d,e aufgespannten Raumes ist kleiner oder gleich fünf. Nach dem Austauschsatz in 1.5.4 ist die Dimension eines Vektorraumes die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren, in unserem Fall höchstens fünf. Also sind die sechs Vektoren $v_1,\ldots v_6$ in jedem Falle linear abhängig.

7. Die Terminologie dieser Aufgabe kommt aus der algebraischen Geometrie, wo die $h(V)$ für Primideale in kommutativen Ringen definiert wird und *Höhe* heißt (vgl. [Ku2], Kapitel VI, Definition 1.4). Die hier vorgestellte Höhe eines Vektorraumes ist sozusagen der triviale Fall.

Wir zeigen $\dim V\leqslant h(V)$ sowie $\dim V\geqslant h(V)$, daraus folgt dann die Gleichheit.

Sei $m := \dim V$ und $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von V. Setzt man $V_0 := \{0\}$ und $V_i := \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_i)$ für $1 \leqslant i \leqslant m$, so ist

$$V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_m$$

eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen der Länge $\dim V$, also gilt $\dim V \leqslant h(V)$.

Sei andererseits

$$V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_{n-1} \subsetneqq V_n$$

eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen. Für jedes $0 \leqslant i \leqslant n-1$ ist $V_i \subsetneqq V_{i+1}$ ein Untervektorraum. Aus Korollar 3 in 1.5.5 folgt daher, dass $\dim V_i < \dim V_{i+1}$ für alle $0 \leqslant i \leqslant n-1$ gilt. Wegen $0 \leqslant \dim V_0$ folgt daraus

$$i \leqslant \dim V_i \quad \text{für alle } 0 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{$*$}$$

Andererseits ist $\dim V_n \leqslant m$, daraus folgt nach Korollar 3

$$\dim V_{n-i} \leqslant m - i \quad \text{für alle } 0 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{$**$}$$

Aus $(*)$ und $(**)$ ergibt sich

$$n - i \leqslant \dim V_{n-i} \leqslant m - i \quad \text{und damit} \quad n \leqslant m\,.$$

Da dies für jede mögliche Kette gilt, folgt $h(V) \leqslant \dim V$.

8. a) Zu zeigen ist $W = \mathrm{span}_R(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Wir sollten bedenken, dass nicht die lineare Hülle über einen Körper, sondern über den Ring der auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktionen gebildet wird. Nach 1.6.5 ist W also ein Modul über R. Wir zeigen beide Inklusionen.

Für $f = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} f_{k_i} \in \mathrm{span}_R(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f^{(i)} \in R$ (wobei die Indizes zur Unterscheidung oben geschrieben wurden) sei $k := \max_{i=1,\ldots,n}\{k_i\}$. Es gilt dann für alle $x \geqslant k$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)}(x) \cdot f_{k_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)}(x) \cdot 0 = 0\,.$$

Für die Inklusion $W \subset \mathrm{span}_R(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genügt es zu zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geqslant k, \\ k - x & \text{für } k-1 \leqslant x \leqslant k, \\ 1 & \text{für } x \leqslant k-1 \end{cases}$$

in $\mathrm{span}_R(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liegt. Da für ein $f \in W$ ein $\rho \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = 0$ für alle $x \geqslant \rho$, wähle ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ mit $k - 1 \geqslant \rho$, und es gilt

$$f = f \cdot g_k \in \mathrm{span}_R(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\,.$$

$g_k \in \mathrm{span}_R(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist einfach zu sehen, denn es gilt $g_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$.

b) Wir nehmen das Gegenteil an, also $W = \mathrm{span}_R(g_1, \ldots, g_n)$ mit $g_i(x) = 0$ für alle $x \geqslant \rho_i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\rho_n = \max(\rho_i)$. Wähle ein $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho > \rho_n$. Wegen $f_\rho \in W$ gibt es eine Darstellung $f_\rho = \sum_{i=1}^n f^{(i)} g_i$ mit $f^{(i)} \in R$. Es gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\rho > x \geqslant \rho_n$

$$0 \neq \rho - x = f_\rho(x) = \sum_{i=1}^n f^{(i)}(x) \cdot g_i(x) = \sum_{i=1}^n f^{(i)}(x) \cdot 0 = 0\,,$$

ein Widerspruch. Also ist W über R nicht endlich erzeugt.

Andererseits ist R ein Ring mit Einselement $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, somit wird R über R durch das Einselement erzeugt.

c) Die Familie $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist linear abhängig, da $W \subset R$ gilt und zum Beispiel $f_1 \cdot f_0 + (-f_0) \cdot f_1 = 0$ in $\mathrm{span}_R(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f_1, -f_0 \neq 0$.

9. Die Inklusion $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ist klar, da $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ gilt. Für die Umkehrung genügt es zu zeigen, dass $1 \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$. Das jedoch folgt aus $1 = 3 + (-1) \cdot 2$.

Es ist $2\mathbb{Z} = \mathrm{span}_\mathbb{Z}(2) \subsetneq \mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z} = \mathrm{span}_\mathbb{Z}(3) \subsetneq \mathbb{Z}$, aber $\mathrm{span}_\mathbb{Z}(2,3) = \mathbb{Z}$. (2,3) ist also unverkürzbares Erzeugendensystem der Länge 2. Andererseits ist $\mathrm{span}_\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}$, also (1) ein unverkürzbares Erzeugendensystem der Länge 1.

10. Ist k die Anzahl der Elemente in K und $\dim_K V = n$, so ist die Anzahl der Elemente in V gleich k^n. Um dies einzusehen, betrachten wir einen beliebigen Vektor $v \in V$. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so existiert für jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$$

mit $\lambda_i \in K$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Nun definieren wir uns eine Abbildung

$$\varphi\colon\ V \to K^n\,, \quad v \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,.$$

φ ist wohldefiniert, da die Darstellung für jedes $v \in V$ eindeutig ist. Ferner ist φ bijektiv (φ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen, siehe 2.1.2), also besitzt V genauso viele Elemente wie K^n; dies sind jedoch genau k^n.

11.* **a)** Es sei P der Schnitt aller Unterkörper von K. Man sieht einfach ein, dass P ein Unterkörper von K ist. P ist daher der eindeutig bestimmte kleinste Unterkörper von K; er heißt *Primkörper* von K.

P enthält als Unterkörper von K insbesondere die Elemente 0 und 1. Daher enthält P auch die Elemente $\tilde{n}$, die definiert sind durch

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-\text{mal}}, \quad \text{falls } n > 0\,, \\ \tilde{0} &= 0\,, \\ \tilde{n} &= -(\widetilde{-n})\,, \quad \text{falls } n < 0\,. \end{aligned}$$

Man sieht unmittelbar, dass die Abbildung
$$\varphi\colon\ \mathbb{Z}\to P\,,\quad n\mapsto\tilde{n}\,,$$
ein Ringhomomorphismus ist (vgl. 1.3.2). Da die Charakteristik von P gleich p ist (P „erbt" diese Eigenschaft selbstverständlich von K), gilt $\tilde{p}=0$. Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass die Abbildung
$$\tilde{\varphi}\colon\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to P\,,\quad a+p\mathbb{Z}\mapsto\tilde{a}\,,$$
die das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & P \\
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \tilde{a} \\
a+p\mathbb{Z} \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$
kommutativ macht, ein Isomorphismus von Körpern ist. Der Rest der Behauptung ist klar.

Ist die Charakteristik von K gleich null, so kann man mit einem ähnlichen Argument zeigen, dass der Primkörper von K in diesem Falle gleich $\mathbb{Q}$ ist. (Siehe hierzu [St], §1.2, wo der Begriff der Charakteristik eines Körpers über den Primkörper eingeführt wird.)

Insbesondere wird damit gezeigt, dass die Körper $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die „einfachsten" Körper der Charakteristik 0 bzw. p sind.

b) Ist K ein endlicher Körper mit Charakteristik $p>0$, so ist nach a) K ein $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Vektorraum. Wegen $|K|<\infty$ ist K als $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Vektorraum endlichdimensional. Damit folgt die Behauptung aus der Lösung von Aufgabe 10.

12. Für $m=1$ ist die Behauptung sofort klar, da eine einzeilige Matrix $A=(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ein Vektor eines K^n ist und für $A\neq 0$ ein $a_j\neq 0$ existiert. Für jedes $a_i\in A$ gibt es ein $\lambda_i\in K$ mit $a_i=\lambda\cdot a_j$.

Für $m=2$ muss man etwas mehr arbeiten. Ist $A=0$, so ist nichts zu zeigen. Falls $\mathrm{ZR}(A)=1$, so sind die beiden Zeilen von $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ linear abhängig. O.B.d.A. sei die erste Zeile ungleich null. Nach Lemma 1.5.8 ist dann der Spaltenrang von $\overline{A}$ gleich dem Spaltenrang von A, wobei $\overline{A}$ wie im Lemma definiert ist. $\overline{A}$ hat allerdings nur eine Zeile, darauf lässt sich der oben behandelte Fall anwenden.

Ist schließlich $\mathrm{ZR}(A) = 2$, so sind die beiden Zeilen linear unabhängig. Dann gibt es a_{1i}, a_{1j}, a_{2i}, $a_{2j} \in A$, so dass die Vektoren $a_1 := (a_{1i}, a_{1j})$ und $a_2 := (a_{2i}, a_{2j})$ linear unabhängig sind. O.B.d.A. sei $a_{1j} \neq 0$.

Die zu a_1 und a_2 gehörenden Spaltenvektoren (a_{1i}, a_{2i}) und (a_{1j}, a_{2j}) sind linear unabhängig. Andernfalls gäbe es ein $\lambda \in K$ mit $a_{1i} = \lambda a_{1j}$ und $a_{2i} = \lambda a_{2j}$. Dann aber wären

$$a_1 = \left(\lambda a_{1j}, a_{1j}\right) \quad \text{und} \quad a_2 = \left(\lambda a_{2j}, a_{2j}\right), \quad \text{also} \quad \tfrac{a_{2j}}{a_{1j}} \cdot a_1 = a_2$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von a_1 und a_2. Das zeigt $\mathrm{SR}(A) \geqslant \mathrm{ZR}(A)$. Andererseits gilt $\mathrm{ZR}(A) \geqslant \mathrm{SR}(A)$, da eine Spalte von A als Vektor in K^2 aufgefasst werden kann und $\dim K^2 = 2$ ist.

13. Zunächst sei vorausgeschickt, dass die Aussage, die in Lemma 1.5.8 für weggelassene Zeilen- und Spaltenränge formuliert ist, genauso für weggelassene Spalten- und Zeilenränge gilt. Dies ergibt sich logisch zwingend, wenn man die transponierte Matrix betrachtet, und bedarf keines weiteren Beweises.

Daher genügt es b) nachzuweisen, um die Gesamtaussage (Zeilenrang = Spaltenrang) zu folgern.

Wir betrachten nun eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n; K)$. Nach dem Basisauswahlsatz 1.5.3 kann man aus den m Zeilen der Matrix A genau r Zeilen ($r \leqslant m$) auswählen, die eine Basis des Zeilenraumes bilden. Laut Lemma 1.5.8 dürfen wir alle anderen Zeilen streichen (dabei entsteht eine neue Matrix $A' \in \mathrm{M}(r \times n; K)$), ohne dass der Spaltenrang verändert wird. Insgesamt gilt also

Spaltenrang (A) = Spaltenrang $(A') \leqslant r$ = Zeilenrang (A') = Zeilenrang (A),

denn der Spaltenraum von A' ist ein Unterraum von K^r.

1.6 Summen von Vektorräumen*

1. i) $\Rightarrow$ iii): Die erste Eigenschaft von iii) ist genau DS1. Eine Darstellung $w_1 + \ldots + w_k = 0$ des Nullvektors ist nichts anderes als eine Linearkombination $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k = 0$ mit $\lambda_i = 1$ für alle i. Falls ein $w_i \neq 0$ wäre, so stünde dies im Widerspruch zur Eigenschaft DS2.

iii) $\Rightarrow$ ii): Wegen $V = W_1 + \ldots + W_k$ existiert für $v \in V$ mindestens eine Darstellung $v = w_1 + \ldots + w_k$ mit $w_i \in W_i$ für alle i. Für eine zweite Darstellung $v = \tilde{w}_1 + \ldots + \tilde{w}_k$ mit $\tilde{w}_i \in W_i$ für alle i gilt

$$0 = v - v = (w_1 - \tilde{w}_1) + \ldots + (w_k - \tilde{w}_k),$$

wobei $w_i - \tilde{w}_i \in W_i$ für alle i gilt. Daraus folgt $w_i - \tilde{w}_i = 0$ für alle i.

ii) $\Rightarrow$ iv): Da für jedes $v \in V$ eine Darstellung $v = w_1 + \ldots + w_k$ existiert mit $w_i \in W_i$ für $i = 1, \ldots, k$, gilt $V = W_1 + \ldots + W_k$. Wäre andererseits

$$W_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} W_j \neq \{0\}$$

für ein i, so gäbe es ein $0 \neq w_i \in W_i$ und $w_j \in W_j$ für $j \neq i$ mit

$$w_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} w_j \,.$$

Wegen $W_i \subset V$ wäre das ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung von w_i.

iv) $\Rightarrow$ v) folgt unmittelbar.

v) $\Rightarrow$ i): Die Eigenschaft DS1 ist klar. Seien $w_1 \in W_1, \ldots, w_k \in W_k$ gegeben und $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k = 0$. Sind nicht alle $\lambda_i = 0$, so gibt es ein kleinstes i mit $\lambda_i \neq 0$. Daraus folgt $\lambda_i w_i = -\lambda_{i+1} w_{i+1} - \ldots - \lambda_k w_k$, also $W_i \cap (W_{i+1} + \ldots + W_k) \neq \{0\}$, ein Widerspruch.

Ein einfaches Gegenbeispiel zur Äquivalenz zur Bedingung $W_1 \cap \ldots \cap W_k = \{0\}$ für $k > 2$ ist für den Fall $V = K^3$ gegeben durch

$$W_1 = \mathrm{span}\,((1,0,0),(0,1,0))\,, \quad W_2 = \mathrm{span}\,((0,1,0),(0,0,1))\,,$$
$$W_3 = \mathrm{span}\,((1,0,0),(0,0,1))\,.$$

Es gilt $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$, aber $(1,0,0) \in W_1$, $(0,1,0) \in W_2$, $(1,0,0) \in W_3$ sind linear abhängig.

Ein Gegenbeispiel zur Bedingung $W_i \cap W_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$ ist durch Bild 1.4 gegeben, das sich auf $n+1$ eindimensionale Untervektorräume im K^{n+1} verallgemeinern lässt.

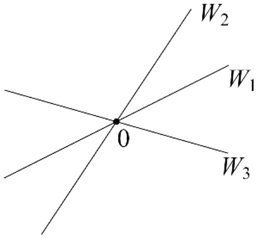


Bild 1.4

2. Ist $(v,w) \in V \times W$, so gilt $(v,w) = (v,0) + (0,w)$, daraus folgt DS1. Für $(v,w) \in (V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W)$ ist $v = 0$ und $w = 0$, also $(v,w) = (0,0)$.

3. a) Die Einheitsmatrix ist symmetrisch, also gilt $\mathrm{Sym}\,(n;K) \neq \emptyset$. Für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Sym}\,(n;K)$ und $\lambda \in K$ gilt nach den Rechenregeln für transponierte Matrizen aus 1.5.8

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = (A+B) \quad &\text{und} \\ {}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA = \lambda \cdot A\,, \end{aligned}$$

also ist $\mathrm{Sym}\,(n;K) \subset \mathrm{M}(n \times n;K)$ ein Untervektorraum.

Eine Basis von $\mathrm{Sym}\,(n;K)$ ist durch die Matrizen

$$A_{kl} = (a_{ij}) \text{ mit } a_{kl} = a_{lk} = 1 \text{ und } a_{ij} = 0 \text{ sonst}$$

für $1 \leqslant k < l \leqslant n$ und

$$A_k = (a_{ij}) \text{ mit } a_{kk} = 1 \text{ und } a_{ij} = 0 \text{ sonst}$$

für $1 \leqslant k \leqslant n$ gegeben. Davon gibt es $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ Stück, also ist

$$\dim \mathrm{Sym}\,(n;K) = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

b) Der Nachweis der Untervektorraumeigenschaften verläuft wie oben, nur dass an den entsprechenden Stellen das $+$ durch ein $-$ ersetzt werden muss.

Die Matrizen

$$A_{kl} = (a_{ij}) \text{ mit } a_{kl} = 1 = -a_{lk} \text{ und } a_{ij} = 0 \text{ sonst}$$

für $1 \leqslant k < l \leqslant n$ bilden eine Basis von $\mathrm{Alt}\,(n;K)$. (Achtung: Man beachte, dass im Gegensatz zu den symmetrischen Matrizen bei den schiefsymmentrischen Matrizen in der Diagonalen keine Einträge ungleich null stehen dürfen. Dies macht den Unterschied in den Dimensionen der Vektorräume aus.) Daher gilt

$$\dim \mathrm{Alt}\,(n;K) = \frac{(n-1)n}{2}\,.$$

c) Für die Matrizen A_s und A_a gilt

$$\begin{aligned} {}^tA_s &= {}^t\left(\tfrac{1}{2}(A + {}^tA)\right) = \tfrac{1}{2} \cdot {}^t(A + {}^tA) \\ &= \tfrac{1}{2}\left({}^tA + {}^t({}^tA)\right) = \tfrac{1}{2}({}^tA + A) = A_s\,, \\ {}^tA_a &= {}^t\left(\tfrac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = \tfrac{1}{2} \cdot {}^t(A - {}^tA) \\ &= \tfrac{1}{2}\left({}^tA - {}^t({}^tA)\right) = \tfrac{1}{2}({}^tA - A) \\ &= -\tfrac{1}{2}(A - {}^tA) = -A_a \end{aligned}$$

und

$$A_s + A_a = \tfrac{1}{2}(A + {}^tA) + \tfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}{}^tA + \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}{}^tA = A\,.$$

d) Für jedes $A \in \mathrm{M}(n \times n;K)$ ist $A = A_s + A_a$, also gilt

$$\mathrm{M}(n \times n;K) = \mathrm{Sym}\,(n;K) + \mathrm{Alt}\,(n;K)\,.$$

Nach den Ergebnissen aus Teil b) und c) folgt

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{M}(n\times n;K) &= n^2 = \frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\\ &= \dim \mathrm{Sym}(n;K)+\dim \mathrm{Alt}(n;K)\,,\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Lösungen der Ergänzungsaufgabe

E1. a) Bei der Teilmenge U_1 handelt es sich um einen Untervektorraum, da die reellen Zahlen ein Körper sind. Für den Fall U_2 ergibt sich folgendes:
UV1: ${}^t(0,\ldots,0)\in U_2$, also gilt $U_2\neq\emptyset$.
UV2: Für $v_1={}^t(r_1,\ldots,r_n)\in U_2$ und $v_2={}^t(s_1,\ldots,s_n)\in U_2$ gilt

$$v_1+v_2={}^t(r_1+s_1,\ldots,r_n+s_n).$$

Wir rechnen

$$\sum_{i=1}^n(r_i+s_i)=\sum_{i=1}^n r_i+\sum_{i=1}^n s_i=0+0=0\,,$$

also gilt $v_1+v_2\in U_2$.
UV3: Es seien $v={}^t(r_1,\ldots,r_n)\in U_2$ und $\lambda\in\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda\cdot v={}^t(\lambda r_1,\ldots,\lambda r_n)\,,$$

und es folgt

$$\sum_{i=1}^n\lambda r_i=\lambda\sum_{i=1}^n r_i=\lambda\cdot 0=0\,,$$

das bedeutet $\lambda v\in U_2$. Somit ist U_2 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

b) Wir behaupten $\dim U_2=n-1$ und weisen nach, dass folgende Vektoren $v_1,\ldots,v_{n-1}$ eine Basis von U_2 bilden:

$$v_i={}^t(0,\ldots,0,1,-1,0,\ldots,0)\,,$$

wobei 1 an der Stelle i und -1 an der Stelle $i+1$ steht. Die lineare Unabhängigkeit der v_i kann man so nachweisen: Wir schreiben die v_i als Spalten in eine Matrix, dies ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & -1\end{pmatrix}$$

mit $n-1$ Spalten und n Zeilen. Offensichtlich hat diese Matrix Rang $n-1$, d.h. der Untervektorraum U_2, in dem diese Spaltenvektoren linear unabhängig sind, hat mindestens Dimension $n-1$. Dass dieser Untervektorraum nicht Dimension

n haben kann, ist schnell einzusehen, handelt es sich bei U_2 doch sicherlich nicht um den ganzen $\mathbb{R}^n$. Dann muss $\dim U_2 = n-1$ sein, was wir beweisen wollten.

Die Tatsache, dass die v_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, ein Erzeugendensystem von U_2 bilden, kann aber auch nachgerechnet werden: Es sei $v = (r_1, \ldots, r_n) \in U_2$ gewählt, d.h. $\sum_{i=1}^n r_i = 0$. Indem im zweiten Eintrag des Vektors r_1 addiert und subtrahiert wird, ändert sich der Gesamtwert des Vektors nicht, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} v &= (r_1, r_2, \ldots, r_n) = (r_1, -r_1 + r_1 + r_2, r_3, \ldots, r_n) \\ &= (r_1, -r_1, 0, \ldots, 0) + (0, r_1 + r_2, r_3, \ldots, r_n)\,. \end{aligned}$$

Wiederholt man diesen Schritt an der nächsten Stelle, so erhält man

$$\begin{aligned} v = {} & (r_1, -r_1, 0, \ldots, 0) + (0, r_1 + r_2, -r_1 - r_2, 0, \ldots, 0) \\ & +(0, 0, r_1 + r_2 + r_3, 0, \ldots, 0)\,. \end{aligned}$$

Wird dieser Schritt insgesamt $(n-1)$-mal durchgeführt (was genaugenommen eine Induktion ist), so folgt

$$\begin{aligned} v &= (r_1, -r_1, 0, \ldots, 0) + (0, r_1 + r_2, -r_1 - r_2, 0, \ldots, 0) + \ldots \\ &\quad +(0, \ldots, 0, r_1 + \ldots + r_{n-1}, -r_1 - \ldots - r_{n-1}) \\ &\quad +(0, \ldots, 0, r_1 + \ldots + r_n) \\ &= \sum_{i=1}^{1} r_r v_1 + \sum_{i=1}^{2} r_i v_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n-1} r_i v_{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} r_i v_j\,. \end{aligned}$$

Da $v \in U_2$ gilt, ist der letzte Summand gleich dem Nullvektor, und durch Herausziehen der Skalare aus den Vektoren ist somit gezeigt, dass der beliebig gewählte Vektor v in der linearen Hülle der Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ liegt, diese Vektoren somit ein Erzeugendensystem bilden.

Es gilt $U_1 \cap U_2 = (0, \ldots, 0)$, und hiermit folgt $\dim U_1 \cap U_2 = 0$.

Mit Hilfe der Dimensionsformel für Summen ergibt sich

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 1 + n - 1 - 0 = n\,.$$

Dies kann man sich auch wieder durch eine Matrix bestätigen, die aus der oben aufgeführten entsteht, indem eine weitere Spalte, die nur aus Einsen besteht, angehängt wird. Diese neue Matrix hat Rang n, das entspricht der Dimension von $U_1 + U_2$.

Kapitel 2

Lineare Abbildungen

2.1 Beispiele und Definitionen

1. Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und alle $f_1, f_2 \in V$ gilt

$$\begin{array}{rcl} F_\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) & = & (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \circ \varphi(x) \\ & = & (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,(\varphi(x)) \\ & \overset{(*)}{=} & \lambda_1 \cdot f_1\,(\varphi(x)) + \lambda_2 \cdot f_2\,(\varphi(x)) \\ & = & \lambda_1 \cdot f_1 \circ \varphi(x) + \lambda_2 \cdot f_2 \circ \varphi(x) \\ & = & \big(\lambda_1 \cdot F_\varphi(f_1)\big)\,(x) + \big(\lambda_2 \cdot F_\varphi(f_2)\big)\,(x) \\ & = & \big(\lambda_1 \cdot F_\varphi(f_1) + \lambda_2 \cdot F_\varphi(f_2)\big)\,(x)\,, \end{array}$$

wobei im Schritt $(*)$ die Definition aus Aufgabe 3 zu 1.4 benutzt wurde.

2. Die in den einzelnen Teilaufgaben gegebenen Abbildungen werden außer in Aufgabe e) durchgehend mit F bezeichnet.
a) Es gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} F(\lambda_1(x_1,y_1) + \lambda_2(x_2,y_2)) & = & F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ & = & (3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2), \\ & & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ & = & \lambda_1(3x_1 + 2y_1, x_1) + \lambda_2(3x_2 + 2y_2, x_2) \\ & = & \lambda_1 F(x_1,y_1) + \lambda_2 F(x_2,y_2)\,, \end{array}$$

somit ist F linear.
b) Für $b \neq 0$ gilt $F(0) \neq 0$ im Widerspruch zu Bemerkung 2.1.2 a). Ist $b = 0$, so erinnern wir an Beispiel c) aus 2.1.1 für $K = \mathbb{R}$ und $m = n = 1$.
c) Analog zu a) kann man die Linearität dieser Abbildung nachrechnen.
d), f) Für alle $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ gilt $F(x + \mathrm{i}y) = x - \mathrm{i}y$. Wähle $\lambda = \mathrm{i}$ und $z = \mathrm{i}$. Dann folgt

$$F(\lambda \cdot z) = F(\mathrm{i}^2) = F(-1) = -1\,,$$

aber

$$\lambda \cdot F(z) = \mathrm{i} \cdot F(\mathrm{i}) = \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) = 1\,.$$

Beschränkt man sich jedoch auf die $\mathbb{R}$-Linearität, so gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und alle $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \in \mathbb{C}$

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_10

$$\begin{aligned}
F(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) &= F(\lambda_1(x_1 + \mathrm{i}y_1) + \lambda_2(x_2 + \mathrm{i}y_2)) \\
&= F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mathrm{i}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)) \\
&\overset{(*)}{=} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - \mathrm{i}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\
&= \lambda_1(x_1 - \mathrm{i}y_1) + \lambda_2(x_2 - \mathrm{i}y_2) \\
&= \lambda_1 F(z_1) + \lambda_2 F(z_2)\,.
\end{aligned}$$

Dabei wurde an der Stelle $(*)$ benutzt, dass $\lambda_i x_i$ und $\lambda_i y_i$ für $i = 1,2$ reell sind. Somit ist die Abbildung F gerade $\mathbb{R}$-linear, jedoch nicht $\mathbb{C}$-linear.

e) Es bezeichne φ die gegebene Abbildung. Die $\mathbb{R}$-Linearität von φ folgt unmittelbar aus den Eigenschaften des Vektorraumes $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und des Körpers der reellen Zahlen:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(1) \\
&= (\lambda_1 f_1)(1) + (\lambda_2 f_2)(1) = \lambda_1 \cdot f_1(1) + \lambda_2 \cdot f_2(1) \\
&= \lambda_1 \cdot \varphi(f_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(f_2)\,.
\end{aligned}$$

3. a) Wegen $F(0) = 0$ ist $\mathrm{Fix}\,F \neq \emptyset$. Die Eigenschaften UV2 und UV3 folgen aus der Linearität von F. Auf dieselbe Art kann man für beliebiges $\lambda \in K$ zeigen, dass $\{v \in V\colon\ F(v) = \lambda \cdot v\}$ ein Untervektorraum ist. Dies führt auf die Definition des *Eigenraumes* zum *Eigenwert* λ, vgl. Kapitel 4.

b) i) Es gilt

$$F(x) = x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & x_1 \\ & x_2 & & = & x_2 \\ 3x_1 & & +x_3 & = & x_3\,. \end{array} \right.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $x_1 = 0$ und damit aus der ersten Gleichung $x_2 = -x_3$. Somit ist eine Basis von $\mathrm{Fix}\,F$ durch $(0,1,-1)$ gegeben. Eine elegantere Möglichkeit zur Lösung des gegebenen Problems ist mit Hilfe des in Kapitel 4 entwickelten Formalismus möglich. Man bestimmt dann den Vektorraum $\mathrm{Eig}\,(F;1)$ der Eigenvektoren zum Eigenwert 1, siehe Kapitel 4, insbesondere Bemerkung 4.2.4.

ii) Für $\deg P > 0$ ist $\deg P' = \deg P - 1$, also insbesondere $F(P) \neq P$. Ist $\deg P = 0$, so folgt $F(P) = 0$, also $\deg P' = \infty$. Damit ist $\mathrm{Fix}\,F = \{0\}$ und die leere Menge eine Basis von $\mathrm{Fix}\,F$.

iii) $\mathrm{Fix}\,F$ ist die Lösung der Differentialgleichung $f' = f$, deren Lösungen durch die Funktionen $f = \lambda \cdot \exp$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben sind (vgl. [Fo2], Beispiel 11.2). Also gilt $\mathrm{Fix}\,F = \mathrm{span}\,(\exp)$.

Mit iii) ist ii) leicht zu lösen, denn $\mathbb{R}[t] \subset \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum, und damit gilt

$$\mathrm{Fix}\left(F|_{\mathbb{R}[t]}\right) = \mathrm{Fix}\,(F) \cap \mathbb{R}[t] = 0 \cdot \exp = 0\,.$$

4. Die Assoziativität ist klar. Neutrales Element ist $F = \mathrm{id}_V$. Da für jedes $v \in V$ die Menge $F^{-1}(v)$ aus genau einem Element besteht, definiert man

$$F^{-1}\colon\ V \to V\,, \quad v \mapsto F^{-1}(v)\,,$$

wobei die Abbildung ebenfalls mit F^{-1} bezeichnet wird. F^{-1} ist die inverse Abbildung zu F. Damit ist $\mathrm{Aut}\,(V)$ eine Gruppe.

5. Es ist $F^k(v) \neq 0$ für alle $k < n$, da sonst $F(F^l(v)) = 0$ für alle $l \geqslant k$ wäre im Widerspruch zu $F^n(v) \neq 0$. Sei

$$\lambda_0 v + \lambda_1 F(v) + \ldots + \lambda_n F^n(v) = 0\,.$$

Dann folgt

$$F(\lambda_0 v + \ldots + \lambda_n F^n(v)) = \lambda_0 F(v) + \ldots + \lambda_{n-1} F^n(v) + \lambda_n \underbrace{F^{n+1}(v)}_{=0} = 0\,.$$

Wendet man F weitere $(n-1)$-mal an, so erhält man ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc}
\lambda_0 v & + & \ldots & \ldots & \ldots & +\lambda_n F^n(v) & = & 0 \\
\lambda_0 F(v) & + & \ldots & \ldots & +\lambda_{n-1} F^n(v) & & = & 0 \\
\lambda_0 F^2(v) & + & \ldots & +\lambda_{n-2} F^n(v) & & & = & 0 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
\lambda_0 F^n(v) & & & & & & = & 0\,.
\end{array}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\lambda_0 = 0$ wegen $F^n(v) \neq 0$. Jeweils durch einsetzen in die darüberstehende Gleichung folgt daraus sukzessive $\lambda_i = 0$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Ein Endomorphismus F, für den ein $n \in \mathbb{N} \smallsetminus 0$ existiert mit $F^n = 0$, heißt *nilpotent*, vgl. Abschnitt 4.5.7.

6. F ist surjektiv, also gilt $F(U_1) + F(U_2) = W$. Ist $w \in F(U_1) \cap F(U_2)$ gegeben, so gilt $w \in F(U_1)$, also gibt es ein $v_1 \in U_1$ mit $w = F(v_1)$. Analog gibt es wegen $w \in F(U_2)$ ein $v_2 \in U_2$ mit $w = F(v_2)$. Aus der Injektivität von F folgt $v_1 = v_2 =: v$ und $v \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$, also $v = 0$. Wegen der Linearität von F gilt $F(v) = F(0) = 0 = w$ und damit $F(U_1) \cap F(U_2) = \{0\}$. Insgesamt ist $W = F(U_1) \oplus F(U_2)$.

2.2 Bild, Fasern und Kern, Quotientenvektorräume*

1. i) Gegeben ist $F\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot x = A \cdot x$. Nach Abschnitt 2.2.1 ist

$$\mathrm{Im}\,A = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\right),$$

eine Basis ist gegeben durch zwei beliebige dieser drei Vektoren, z.B. ${}^t(1,4)$ und ${}^t(2,5)$.

Nach Satz 2.2.4 ist $\dim \mathrm{Ker}\,F = 1$. Wenn man nicht das zugehörige lineare Gleichungssystem lösen möchte, genügt es, einen Vektor $v \neq 0$ mit $F(v) = 0$ zu finden. Der Vektor $v = {}^t(1,-2,1)$ erfüllt diese Eigenschaft, also gilt $\mathrm{Ker}\,F = \mathrm{span}\,(v)$.

ii) Für die Abbildung

$$F\colon\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = B \cdot x,$$

ist ebenfalls das Bild von F gegeben durch die lineare Hülle der Spaltenvektoren von B, eine Basis ist gegeben durch

$$\mathscr{B} := \left({}^t(1,0,1,0), {}^t(0,1,0,1), {}^t(1,0,0,0)\right).$$

Wiederum nach Satz 2.2.4 gilt $\dim \mathrm{Ker}\,F = 2$. Um eine Basis zu finden, lösen wir das zur Matrix B gehörige homogene lineare Gleichungssystem. Da durch elementare Zeilenumformungen nach Satz 0.4.6 die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändert wird, rechnen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten daraus die Basis

$$\left({}^t(1,-1,1,0,0), {}^t(-1,0,0,1,1)\right) \quad \text{von } \mathrm{Ker}\,F.$$

2. Die $\mathbb{R}$-Linearität von d folgt aus den Ableitungsregeln

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

für alle $x \in I$. Der Kern von d besteht aus allen auf I konstanten differenzierbaren Abbildungen, daher gilt $\mathrm{Ker}\,d = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(1)$.

Falls $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ mit $I_{j_0} \cap \bigcup_{j \neq j_0} I_j = \emptyset$ für alle $j_0 \in I$ eine disjunkte Vereinigung von Intervallen ist, so gilt

$$\mathrm{Ker}\,d = \left\{ f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})\colon \text{ es gibt } (c_j)_{j \in J} \text{ mit } f|_{I_j} = c_j \text{ für alle } j \in J \right\}.$$

In diesem Falle ist $\operatorname{Ker} d$ im Allgemeinen nicht endlichdimensional, denn die Indexmenge J braucht nicht endlich zu sein.

3. Es genügt zu zeigen, dass ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $W_{m+1} = W_m$, denn dann gilt

$$\begin{aligned} W_{m+i} &= F(W_{m+i-1}) = \ldots = F^i(W_m) \\ &= F^{i-1}(F(W_m)) = F^{i-1}(W_m) = \ldots = W_m \end{aligned}$$

für alle $i \geqslant 1$.

Wir können F als lineare Abbildung

$$F\colon\ W_{l-1} \to W_l$$

auffassen. Nach Korollar 1 zu 2.2.4 gilt

$$\dim W_l \leqslant \dim W_{l-1}\,.$$

Ist $\dim W_{l-1} = \dim W_l$, so sind wir wegen $W_l \subset W_{l-1}$ fertig. Ansonsten ist $\dim W_l \leqslant \dim W_{l-1} - 1$, und durch wiederholte Anwendung dieses Arguments gilt

$$\dim W_l \leqslant \dim W_{l-1} - 1 \leqslant \ldots \leqslant \dim W_{l-i} - i$$

für $1 \leqslant i \leqslant l$. Speziell für $i = l$ erhalten wir mit $W_0 = V$

$$0 \leqslant \dim W_l \leqslant \dim W_{l-l} - l = \dim V - l\,.$$

Da $\dim V = n < \infty$, gilt nach spätestens n Schritten $\dim W_n = 0$, also ist W_n der Nullvektoraum, und wir sind fertig.

Man beachte, dass dies nicht heißt, dass für jeden Endomorphismus F notwendig $W_m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. Zum Beispiel ist für $F = \mathrm{id}_V$ bereits $m = 0$ und $W_0 = V$.

4. Sei $W := \operatorname{Ker} F$ und $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von W. Wir wählen

$$U := \operatorname{Im} F\,,$$

und wegen $F^2 = F$ und Korollar 1 aus 2.2.4 gilt $V = U \oplus W$.

Ist $u \in U$, so folgt

$$F(u - F(u)) = F(u) - F^2(u) = F(u) - F(u) = 0$$

und damit

$$u - F(u) \in U \cap \operatorname{Ker} F = (0)\,.$$

Das heißt gerade $u = F(u)$ für alle $u \in U$.

Ein Endomorphismus $F \neq 0$ mit $F^2 = F$ heißt *idempotent*, siehe auch Aufgabe 8 zu 2.4.

5. a) Die angegebene Matrix hat Rang 1, also gilt $\dim \operatorname{Ker} F = 2$. Eine Möglichkeit der Darstellung ist

$$\operatorname{Ker} F = \operatorname{span}\left({}^t(1,-2,0), {}^t(0,3,-1)\right) = \operatorname{span}(v_1, v_2)\,.$$

Nach dem Faktorisierungssatz 2.2.5 ist es gleich, wie wir (v_1, v_2) zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Wir wählen $u := {}^t(1,0,0)$ und bezeichnen $U := \operatorname{span}(u)$; dann ist (u, v_1, v_2) eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Ferner ist

$$F|_U: \; U \to \operatorname{Im} F$$

ein Isomorphismus. Für $F(u) = {}^t(2,-4) =: w$ gilt $\operatorname{Im} F = \operatorname{span}(w)$, und wir wählen $w' := {}^t(1,0)$ zur Ergänzung zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$.

b) Ist $x \in \operatorname{Im} F$, so existiert ein $v \in \mathbb{R}^3$ mit $F(v) = x$. Bezeichnet (v_1, v_2) die unter a) berechnete Basis von $\operatorname{Ker} F$, so gilt für jedes Paar $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

$$F(v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = F(v) + \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(v) = x\,,$$

und die gesuchte Parametrisierung ist gegeben durch

$$\varphi: \; \mathbb{R}^2 \to F^{-1}(x)\,, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\,.$$

F^{-1} ist eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$, genauer ist sie der um den Vektor v parallelverschobene Kern von F, siehe Bild 2.1. Damit ist anschaulich sofort klar, dass $F^{-1}(x)$ mit der Geraden $\operatorname{span}(u)$ genau einen Schnittpunkt hat. Die Aussage folgt aber auch aus dem Faktorisierungssatz 2.2.5, Teil 2), denn danach gibt es für ein $x \in \operatorname{Im} F$ genau ein $v \in U$ mit $F(v) = x$.

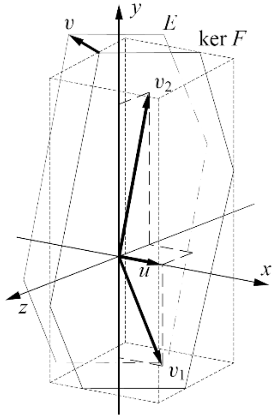


Bild 2.1

6. π ist nach Konstruktion injektiv. Gilt nämlich $\pi(x) = \bar{x} = 0$, so ist $x_1 = \ldots = x_{m-1} = 0$. Allerdings ist für $x \in W$ gerade

$$x_m = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_{m-1} x_{m-1} = 0\,,$$

also $x = 0$. Wegen $\mathrm{SR}(\bar{A}) = \pi(\mathrm{SR}(A))$ folgt aus der Injektivität von π unmittelbar $\dim \mathrm{SR}(\bar{A}) = \dim \mathrm{SR}(A)$.

Übrigens kann man die Surjektivität von π genauso leicht nachweisen.

7. Es sei $V = \tilde{V} \oplus \operatorname{Ker} F$ eine Zerlegung gemäß des Faktorisierungssatzes 2.2.5. Da $F|_{\tilde{V}}\colon\ \tilde{V} \to \operatorname{Im} F$ ein Isomorphismus ist, ist auch

$$F|_{F^{-1}(U)\cap\tilde{V}}\colon\ F^{-1}(U)\cap\tilde{V} \to U \cap \operatorname{Im} F$$

ein Isomorphismus, also gilt

$$\dim\left(F^{-1}(U)\cap\tilde{V}\right) = \dim(U\cap\operatorname{Im} F)\,. \tag{$*$}$$

Wegen $V = \tilde{V} \oplus \operatorname{Ker} F$ gilt mit $\operatorname{Ker} F \subset F^{-1}(U)$ gerade

$$F^{-1}(U) = \left(F^{-1}(U)\cap\tilde{V}\right) \oplus \operatorname{Ker} F\,.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\dim F^{-1}(U) &= \dim\left(F^{-1}(U)\cap\tilde{V}\right) + \dim\operatorname{Ker} F\\ &\overset{(*)}{=} \dim(U\cap\operatorname{Im}) + \dim\operatorname{Ker} F\,.\end{aligned}$$

8. Die Behauptung folgt aus

$$v' \in X \Leftrightarrow v - v' \in W \Leftrightarrow v' + W = v + W \in V/W$$

und der Tatsache, dass es sich bei $\sim_W$ um eine Äquivalenzrelation handelt. (Beachte auch den einleitenden Text in 2.2.7.)

9. Nach Satz 2.2.7 ist für eine lineare Abbildung $F\colon\ V \to W$ mit $U \subset \operatorname{Ker} F$ die Abbildung $\bar{F}\colon\ V/U \to W$ mit $F = \bar{F}\circ\rho$ eindeutig bestimmt, also ist die Abbildung

$$\varphi\colon\ \{F \in \operatorname{Hom}(V,W)\colon\ F|_U = 0\} \to \operatorname{Hom}(V/U,W)\,,\quad F \mapsto \bar{F}\,,$$

wohldefiniert.

Die Linearität von φ folgt sofort aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\rho"'] & W \\ V/U \arrow[ur, "\bar{F}"'] & \end{tikzcd}$$

mit Hilfe von Aufgabe 3 zu 1.4.

Um den Kern von φ zu bestimmen, betrachten wir die Nullabbildung $\bar{F}_0 \in \operatorname{Hom}(V/U,W)$ und wählen ein $F_0 \in \{F \in \operatorname{Hom}(V,W)\colon\ F|_U = 0\}$ mit $\bar{F}_0 = \varphi(F_0)$. Für alle $v+U \in V/U$ gilt dann $\bar{F}_0(v+U) = 0$. Aus der Bedingung $F_0 = \bar{F}_0\circ\rho$ folgt für alle $v \in V$

$$F_0(v) = \bar{F}_0\left(\rho(v)\right) = \bar{F}_0(v+U) = 0\,,$$

also ist F_0 wegen $F_0|_U = 0$ die Nullabbildung, und φ ist injektiv.

Um die Surjektivität von φ zu zeigen, wählen wir ein $\bar{F} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)$ und definieren $F := \bar{F} \circ \rho$. Für ein $u \in U$ gilt $u \sim_U 0$, und damit folgt

$$F(u) = \bar{F} \circ \rho(u) = \bar{F}(u+U) = \bar{F}(0+U) = 0\,,$$

d.h. $F|_U = 0$ und $\bar{F} = \varphi(F)$. Also ist φ surjektiv.

Lösung der Ergänzungsaufgabe

E1. Mithilfe eines CAS erhält man durch Ausprobieren

$$A_3^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$A_5^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich die Vermutung

$$\lim_{k\to\infty} A_n^k = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

mit $r = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Der Rang der Grenz-Matrix A ist gleich 1.

2.3 Lineare Gleichungssysteme

1. Wir lösen zunächst das lineare Gleichungssystem, das durch folgende Matrix dargestellt wird.

$$\left(\begin{array}{ccccc|l} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7.5 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 22.5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 6.5 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 7.5 \end{array}\right).$$

Es hat die Lösung $(3, 1, 0.5, 1, 0.5)$. Dieser Vektor beschreibt die Beiträge in Gewichtseinheiten (GE), den die Stationen leisten. Z.B. trägt der Landwirt 3 GE zur Gesamtschadstoffbelastung bei. Da er ausschließlich das Mittel A aufbringt, dessen Zusammensetzung wir kennen, kann man schließen, dass er für 0.6 GE des Schadstoffes S_1, 1.5 GE von S_2 und 0.9 GE von S_4 verantwortlich ist. Entsprechende Folgerungen gelten analog für die übrigen Stationen.

2. Wer die zehnte Auflage der *Linearen Algebra* hat, kann diese Aufgabe sehr schnell beantworten; hier hat sich nämlich der Fehlerteufel eingeschlichen: Die gesuchte Legierung soll lediglich 50% Silber enthalten. Unter diesen Umständen ist die Aufgabe nicht ganz so einfach. Wir lösen mittels Zeilenumformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 70 & 50 & 40 \\ 60 & 10 & 50 & 50 \\ 20 & 20 & 0 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right),$$

um die gewünschte Mischung aus 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold zu bekommen; das liefert $(0.4, 0.1, 0.5)$. Für die gewünschte Mischung nimmt man also 40% der Mischung M_1, 10% der Mischung M_2 und 50% der Mischung M_3.

3. Es seien $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}$ die Pivots von A, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} & \underline{\lfloor a_{1j_1} \cdots} & & & * \\ & & \underline{\lfloor a_{2j_2} \cdots} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \underline{\lfloor a_{rj_r} \cdots} \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Wegen $a_{ij_i} \neq 0$ kann man die Vektoren

$$v_i = {}^t(0, \ldots, 0, \underbrace{(a_{ij_i})^{-1}}_{j_i}, 0, \ldots, 0)$$

für $i = 1, \ldots, r$ definieren. Es gilt $Av_i = e_i$ nach Konstruktion, und damit ist

$$\operatorname{span}(e_1, \ldots, e_r) \subset \operatorname{Im} A.$$

Aus Teil 1) von Korollar 2.3.1 folgt $\dim \operatorname{Ker} A = n - r$, also $\dim \operatorname{Im} A = r$. Damit erhalten wir

$$\operatorname{span}(e_1, \ldots, e_r) = \operatorname{Im} A.$$

4. Die Matrizen lauten

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{7} & -\frac{25}{28} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Wir lösen zunächst Teilaufgabe b), was auch eine Lösung für den Spezialfall a) liefert. $Ax = b$ ist universell lösbar mit der Lösung

$$\left(\tfrac{1}{2}b_2 - b_3, -4b_1 + \tfrac{5}{2}b_2 + 2b_3, 3b_1 - 2b_2 - b_3\right).$$

Für

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ergibt sich somit die Lösung $x = (-7, 20, -11)$.

$Bx = b$ ist universell lösbar mit der Lösung

$$x = \left(-b_1 + 2b_2, \tfrac{1}{2}b_1 - \tfrac{9}{8}b_2 + \tfrac{3}{8}b_3, \tfrac{1}{2}b_1 - \tfrac{5}{8}b_2 - \tfrac{1}{8}b_3, 0\right) + \lambda(-4, -3, 1, 4).$$

Die spezielle in Teil a) gefragte Lösung lautet also

$$\left(-2, \tfrac{7}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right) + \lambda(-4, -3, 1, 4).$$

6. Das gesuchte Polynom f ist gegeben durch $f := \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i^2$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\varphi^2(x) \geqslant 0$, und die Summe von reellen Quadratzahlen ist genau dann gleich 0, wenn alle Quadratzahlen gleich 0 sind. Daher gilt $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) = 0\}$.

Nun sei K ein endlicher Körper. Wir greifen zu einem Trick: Bei einem Polynom $f \in R := K[t_1, \ldots, t_n]$ können wir die Unbestimmten $t_1, \ldots, t_n$ durch Polynome $g_1, \ldots, g_n \in R$ ersetzen – diesen Vorgang nennt man *Substitution*. Es gilt $f(g_1, \ldots, g_n) \in R$.

Fassen wir nun die φ_i als Elemente in R auf, so genügt es, ein Polynom $\tilde{f} \in R$ zu finden, das 0 als einzige Nullstelle besitzt, denn für

$$f := \tilde{f}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R$$

gilt dann

$$f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \ldots = \varphi_n(x) = 0.$$

Ein solches Polynom $\tilde{f}$ gilt es im Folgenden zu konstruieren.

Da K ein endlicher Körper ist, ist er insbesondere nicht algebraisch abgeschlossen (vgl. [W], 6.3 oder [Ku1], 7.III.), denn das Polynom

$$f_1 = \prod_{\lambda \in K} (t_1 - \lambda) + 1 \in K[t_1]$$

besitzt keine Nullstelle in K. Das Polynom f_1 ist das nach Aufgabe 6 zu 1.3 existierende Polynom für den Fall, dass für die x_i alle Elemente des Körpers K eingesetzt und alle $y_i = 1$ gesetzt werden.

Im nächsten Schritt konstruieren wir aus f_1 ein homogenes Polynom $f_2 \in K[t_1,t_2]$, die *Homogenisierung* von f_1. Dazu sei $f_1 = a_0 + a_1t_1 + \ldots + a_dt_1^d$. Dann ist das Polynom

$$f_2 := a_0 \cdot t_2^d + a_1t_1 \cdot t_2^{d-1} + \ldots + a_{d-1}t_1^{d-1} \cdot t_2 + a_dt_1^d \in K[t_1,t_2]$$

homogen vom Grad d (vgl. die Lösung von Aufgabe 3 zu 1.3).

Für das Polynom f_2 gilt außerdem

$$f_2(t_1,t_2) = 0 \Leftrightarrow (t_1,t_2) = (0,0)\,,$$

d.h. 0 ist die einzige Nullstelle von f_2.

Ist $n = 2$, so sind wir damit bereits fertig. Ansonsten bilden wir das Polynom

$$f_3(t_1,t_2,t_3) := f_2\,(t_3, f_2(t_1,t_2)) \in K[t_1,t_2,t_3]\,.$$

Nach Konstruktion ist

$$f_3(t_1,t_2,t_3) = 0 \Leftrightarrow (t_3, f_2(t_1,t_2)) = (0,0) \Leftrightarrow (t_1,t_2,t_3) = (0,0,0)\,.$$

Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis das richtige n erreicht ist, und definieren $\tilde{f} := f_n \in R$.

7. Wir zeigen ein paar Ideen für einen neuen Beweis von Satz 0.2.4. Die Einzelheiten stecken vor allem im Beweis von Satz 2.3.4. Den LeserInnen wird empfohlen, sich diesen Beweis noch einmal genau anzusehen. Die neue Lösung von Aufgabe 2 a) zu 0.3 findet man analog.

Die gesuchte Gerade L kann durch $L = \text{Lös}\,(A,b)$ mit $A = (a_1,a_2)$ beschrieben werden. Nach Voraussetzung ist $(a_1,a_2) \neq (0,0)$, daher ist $\operatorname{rang} A = 1$, und nach Satz 2.3.4, Teil 3) gilt

$$\text{Lös}\,(A,b) = \varphi(b) + \text{Lös}\,(A,0) = v + \mathbb{R} \cdot w\,,$$

vgl. auch Abschnitt 2.3.5. Die Umkehrung ist nach Satz 2.3.4 ebenfalls klar.

8. Der Beweis verläuft analog wie in Aufgabe 7, also unter Benutzung von Satz 2.3.4, siehe hierzu auch Abschnitt 2.3.5.

Zur geometrischen Bedeutung betrachten wir zunächst $v = 0$, d.h. auch $b = 0$, und $L = \text{Lös}\,(A,0)$. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$. Dann gilt für den Vektor w gerade $A \cdot w = 0$, d.h. (a_{11},a_{12},a_{13}) und (a_{21},a_{22},a_{23}) spannen eine Ebene des $\mathbb{R}^3$ auf, die senkrecht auf der Geraden $\mathbb{R} \cdot w$ steht. Die Multiplikation von w mit den Zeilen von A entspricht dem kanonischen Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$, vgl. Kapitel 5.1.

Sind v und w linear abhängig, so kann dies auf den obigen Fall zurückgeführt werden.

Sind v und w linear unabhängig, so gilt für $v \neq 0$ auch $b = A \cdot v \neq 0$, und für alle $v + \lambda w \in L$ ist

$$A \cdot (v + \lambda w) = A \cdot v + \lambda \cdot A \cdot w = b + \lambda \cdot 0 = b\,,$$

d.h. die beiden Zeilenvektoren der Matrix A bestimmen immer noch einen zweidimensionalen Unterraum E des $\mathbb{R}^3$, der senkrecht auf der Geraden L steht (vgl. Bild 2.2).

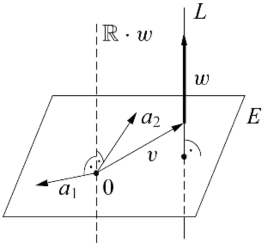


Bild 2.2

Wie vielleicht aus der Schule noch bekannt ist, ist der Richtungsvektor, der senkrecht auf einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ steht, bis auf das Vorzeichen und die Länge eindeutig bestimmt. Man gelangt so zur Hesseschen Normalenform einer Ebene, vgl. auch Aufgabe 5 d) zu Abschnitt 5.1.

2.4 Lineare Abbildungen und Matrizen

1. Es gilt

$$-(2,0)+4\cdot(1,1)=2\cdot(1,2)\,.$$

Für eine lineare Abbildung F mit $F(2,0)=(0,1)$, $F(1,1)=(5,2)$ und $F(1,2)=(2,3)$ gilt dann

$$\begin{aligned}F(-(2,0)+4\cdot(1,1)) &= -F(2,0)+4\cdot F(1,1)\\ &= -(0,1)+4\cdot(5,2)=(20,7)\\ &\neq (4,6)=2\cdot F(1,2)=F(2\cdot(1,2))\,,\end{aligned}$$

daher gibt es keine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften.

2. a) Es ist nur die lineare Unabhängigkeit der Elemente aus $\mathscr{B}$ zu zeigen. Seien dazu $\lambda_1,\ldots,\lambda_5\in\mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1\cdot\sin+\lambda_2\cdot\cos+\lambda_3\cdot\sin\cdot\cos+\lambda_4\cdot\sin^2+\lambda_5\cdot\cos^2=0$$

in Abb$(\mathbb{R},\mathbb{R})$, also die Nullabbildung. Wir wenden sie auf $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{4}$, $x_3=\frac{\pi}{3}$, $x_4=\frac{\pi}{2}$ und $x_5=\frac{2\pi}{3}$ an. Das liefert die fünf Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
 & & \lambda_2 & & & & & + & \lambda_5 & = & 0\\
\sqrt{0.5}\lambda_1 & + & \sqrt{0.5}\lambda_2 & + & 0.5\lambda_3 & + & 0.5\lambda_4 & + & 0.5\lambda_5 & = & 0\\
\sqrt{0.75}\lambda_1 & + & 0.5\lambda_2 & + & 0.5\sqrt{0.75}\lambda_3 & + & 0.75\lambda_4 & + & 0.25\lambda_5 & = & 0\\
\lambda_1 & & & & & + & \lambda_4 & & & = & 0\\
\sqrt{0.75}\lambda_1 & - & 0.5\lambda_2 & - & 0.5\sqrt{0.75}\lambda_3 & + & 0.75\lambda_4 & + & 0.25\lambda_5 & = & 0,
\end{array}$$

die wir als Einträge einer Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ \sqrt{0.75} & 0.5 & 0.5\sqrt{0.75} & 0.75 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{0.75} & -0.5 & -0.5\sqrt{0.75} & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

auffassen können. Wegen $\operatorname{rang} A = 5$ müssen alle $\lambda_i = 0$ sein.
b) Nach 2.4.4 ist $M_{\mathscr{B}}(F)$ bestimmt durch

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{5} a_{ij} v_i \quad \text{für } j = 1, \ldots, 5\,.$$

Bezeichnet $v_1 = \sin$, $v_2 = \cos$, $v_3 = \sin \cdot \cos$, $v_4 = \sin^2$, $v_5 = \cos^2$, so folgt

$$\begin{array}{lclcl} F(v_1) & = & \cos & = & a_{21} v_2\,, \\ F(v_2) & = & -\sin & = & a_{12} v_1\,, \\ F(v_3) & = & \cos^2 - \sin^2 & = & a_{53} v_5 + a_{43} v_4\,, \\ F(v_4) & = & 2\sin \cdot \cos & = & a_{34} v_3\,, \\ F(v_5) & = & -2\sin \cdot \cos & = & a_{35} v_3\,. \end{array}$$

Insgesamt folgt daraus

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Aus den Spalten von $M_{\mathscr{B}}(F)$ bestimmt man eine Basis von $\operatorname{Im} F$. Wie man leicht erkennt, sind die vierte und die fünfte Spalte von $M_{\mathscr{B}}(F)$ linear abhängig, die ersten vier Spalten jedoch linear unabhängig. Daher ist eine Basis von $\operatorname{Im} F$ gegeben durch $(\cos, -\sin, \cos^2 - \sin^2, 2\sin\cos)$.

Aus den Spalten vier und fünf von $M_{\mathscr{B}}(F)$ erkennt man, dass $\sin^2 + \cos^2$ im Kern von F liegt, was aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ auch sofort nachzuvollziehen ist. Da $\dim \operatorname{Ker} F = \dim V - \dim \operatorname{Im} F = 5 - 4 = 1$ gilt, ist somit $\operatorname{Ker} F = \operatorname{span}(v_4 + v_5)$.

3. a) Es gilt $t^i \overset{\mathscr{D}_n}{\mapsto} i \cdot t^{i-1}$ für $0 \leqslant i \leqslant n$, also

$$M^{\mathscr{B}_n}_{\mathscr{B}_{n-1}}(\mathscr{D}_n) = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}}_{n+1}\right\} n\,.$$

b) Wir definieren $\mathscr{I}_n$ als lineare Fortsetzung von $t^i \mapsto \frac{1}{i+1} t^{i+1}$. Dann gilt die notwendige Bedingung $\mathscr{D}_n \circ \mathscr{I}_n = \mathrm{id}_{V_{n-1}}$. Die Matrix von $\mathscr{I}_n$ lautet

$$M^{\mathscr{B}_{n-1}}_{\mathscr{B}_n}(\mathscr{I}_n) = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}}_{n}\right\} n+1\,.$$

4. a) Wir bestimmen zunächst die Bilder der Basisvektoren aus $\mathscr{B}$. Es gilt:

$$F(1) = \int_{-1}^{1} 1dt = 2\,, \quad F(t) = \int_{-1}^{1} tdt = 0\,,$$
$$F(t^2) = \int_{-1}^{1} t^2 = \tfrac{2}{3}\,, \quad F(t^3) = \int_{-1}^{1} t^3dt = 0\,,$$

und

$$G(1) = (1,1,1)\,, \quad G(t) = (-1,0,1)\,,$$
$$G(t^2) = (1,0,1)\,, \quad G(t^3) = (-1,0,1)\,.$$

Somit ist

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}}(F) = \left(2,0,\tfrac{2}{3},0\right) \in \mathrm{M}(1\times 4,\mathbb{R})$$

und

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}'}(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3\times 4,\mathbb{R})\,.$$

b) Wir vereinfachen $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}'}(G)$ durch Zeilenumformungen und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt $\mathrm{Ker}(G) = \mathrm{span}\{t - t^3\}$. Es genügt, $t - t^3 \overset{F}{\mapsto} 0$ zu zeigen. Das ist leicht einzusehen: $F(t - t^3) = F(t) - F(t^3) = 0 - 0 = 0$. Die $\subset$-Relation ist echt, denn an der Matrix $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}}(F)$ sehen wir, dass $\mathrm{Ker}F$ Dimension 3 hat. Es gilt $\mathrm{Ker}F = \mathrm{span}\{t, t^3, 1 - 3t^2\}$.

c) Wir bestimmen die Matrix $M^{\mathscr{K}'}_{\mathscr{K}}(H)$. Es gilt $M^{\mathscr{K}'}_{\mathscr{K}}(H) \in \mathrm{M}(1 \times 3, \mathbb{R})$ und $M^{\mathscr{K}'}_{\mathscr{K}}(H) \cdot M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}'}(G) = M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}}(F)$. Eine Rechnung liefert $M^{\mathscr{K}'}_{\mathscr{K}}(H) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$. H ist also die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \overset{H}{\mapsto} \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}z$.

5. Es seien $\mathscr{A}_1 = (v_1, \ldots, v_r)$ bzw. $\mathscr{A}_2 = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_s)$ Basen von V_1 bzw. V_2 und $\mathscr{B}_1 = (w_1, \ldots, w_k)$ bzw. $\mathscr{B}_2 = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_l)$ Basen von $F(V_1) \subset W_1$ bzw. $F(V_2) \subset W_2$. Wir ergänzen $\mathscr{B}_1$ bzw. $\mathscr{B}_2$ zu Basen $\mathscr{B}'_1$ von W_1 bzw. $\mathscr{B}'_2$ von W_2. Wegen $W = W_1 \oplus W_2$ ist $\mathscr{B} := \mathscr{B}'_1 \cup \mathscr{B}'_2$ eine Basis von W. Analog ist wegen $V = V_1 \oplus V_2$ gerade $\mathscr{A} := \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ eine Basis von V (vgl. Satz 1.6.4). Bezüglich der Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ hat $M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$ die angegebene Gestalt.

6. Wir zeigen zuerst, dass die F_i^j ein Erzeugendensystem sind. Dazu nehmen wir ein beliebiges $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ein solches F ist durch die Bilder der Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ eindeutig bestimmt. Ist

$$F(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \cdot w_j \quad \text{für } k = 1, \ldots, n,$$

so gilt

$$F = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot F_i^j .$$

Das zeigt, dass die F_i^j ein Erzeugendensystem bilden.

Sei nun

$$F = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i^j = 0$$

die Nullabbildung. Dann gilt für beliebiges $k = 1, \ldots, n$

$$0 = F(v_k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i^j(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} w_j .$$

Da die w_j linear unabhängig sind, folgt daraus $a_{kj} = 0$ für $j = 1, \ldots, m$. Dies gilt für beliebiges k, also müssen alle $a_{ij} = 0$ sein; damit sind die F_i^j linear unabhängig.

7. Wir berechnen mittels Zeilenumformungen von A eine Basis des Kerns von F:

$$\mathrm{Ker}F = \mathrm{span}\,(a_3, a_4) \quad \text{mit} \quad a_3 := {}^t(12, 7, 0, 1), \quad a_4 := {}^t(10, 6, 1, 0).$$

Mit Hilfe von Spaltenumformungen erhalten wir eine Basis des Bildes von F:

$$\mathrm{Im}F = \mathrm{span}\,(b_1, b_2) \quad \text{mit} \quad b_1 := {}^t(1, 0, -1), \quad b_2 := {}^t(0, 1, 1).$$

Im nächsten Schritt berechnen wir spezielle Urbilder dieser Basisvektoren. Wir erhalten

$$F(\underbrace{{}^t(-5,-3,0,0)}_{=:a_1}) = b_1 \quad \text{und} \quad F(\underbrace{{}^t(3,2,0,0)}_{=:a_2}) = b_2\,.$$

Damit steht $\mathscr{A} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$ fest. b_1,b_2 müssen noch zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden. Wir wählen $b_3 := {}^t(0,0,1)$. Dann ist $\mathscr{B} = (b_1,b_2,b_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, und $M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(F)$ hat die gewünschte Form.

8. Nach Aufgabe 4 zu 2.2 gibt es Untervektorräume V_1 und V_2 von V mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $F|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}$ sowie $F|_{V_2} = 0$. Insbesondere gilt $F(V_1) \subset V_1$ und $F(V_2) \subset V_2$. Nach Aufgabe 5 existieren Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ von V mit

$$M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Wegen $V = W$ und den obigen Überlegungen können wir sogar $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ wählen. Aus $F|_{V_2} = 0$ folgt $B = 0$, wegen $F|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}$ gilt $A = E_r$, wobei $r = \dim V_1$ ist.

9. Es sei $\mathscr{B}_1 = (v_1,\ldots,v_r)$ eine Basis von $\mathrm{Fix}\,F$. Wir ergänzen sie zu einer Basis $\mathscr{B}$ von V. Nach Satz 2.4.2 hat $M_{\mathscr{B}}(F)$ die angegebene Gestalt.

Man beachte die Ähnlichkeit zu Aufgabe 8. Ein Endomorphismus F mit $F^2 = F$ ist ein spezieller Fall der hier betrachteten Endorphismen mit $V = \mathrm{Fix}\,F \oplus \mathrm{Ker}\,F$.

Lösung der Ergänzungsaufgabe

E1. a) Eine standardgemäße Basis ist gegeben durch $\mathscr{B} = (1,t,t^2,t^3)$.

Aus

$$\frac{d}{dt}(1) = 0\,, \quad \frac{d}{dt}(t) = 1\,, \quad \frac{d}{dt}t^2 = 2t\,, \quad \frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2$$

folgt

$$M_{\mathscr{B}}\left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Analog zu oben berechnet man

$$\frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2\,, \quad \frac{d}{dt}(3t^2) = 6t\,, \quad \frac{d}{dt}(6t) = 6\,, \quad \frac{d}{dt}(6) = 0\,.$$

Die Faktoren von den Potenzen sind zu berücksichtigen, daher ergibt sich die Matrix

$$M_{\tilde{\mathscr{B}}}\left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Mit Rechnungen analog zu den Teilen a) und b) ergibt sich

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wie sich durch eine Probe bestätigen lässt. Ihre Inverse ist gegeben durch

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und es ergibt sich

$$T \cdot M_{\tilde{\mathscr{B}}} \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5 Multiplikation von Matrizen

1. Die möglichen Produkte der Matrizen lauten:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -17 \\ 5 & 49 & -20 \\ -6 & -33 & 91 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix},$$

$$AE = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ -41 & -12 \end{pmatrix}, \qquad BC = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$CD = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{pmatrix}, \quad DC = (-57).$$

2. a) Es sei $M \in \mathrm{M}(m \times n; K)$ mit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant n}$. Für die Diagonaleneinträge gilt $i = j$. Die Einträge auf der Geraden L von der Stelle $(1,k)$ bis zu $(n+1-k,n)$ oberhalb der Diagonale lauten m_{ij} mit

$$j = i - 1 + k \Leftrightarrow i = j + 1 - k\,.$$

Für die Einträge m_{ij} auf der Geraden L' von $(k,1)$ bis $(n,n+1-k)$ gilt

$$j = i + 1 - k \Leftrightarrow i = j - 1 + k\,.$$

Dementsprechend gilt für die Einträge m_{ij} in H oberhalb von L

$$j > i - 1 + k \Leftrightarrow i < j + 1 - k$$

und für die Einträge in H' unterhalb von L'

$$i > j - 1 + k \Leftrightarrow j < i + 1 - k\,.$$

Diese etwas lästig zu formulierenden Zusammenhänge werden wir für den formalen Beweis der Aussagen aus Aufgabe b) brauchen.

b) Die Formulierungen der Aussagen gelingen unseren LeserInnen bestimmt mindestens genauso gut wie uns; wir lassen sie daher aus.

Für die erste Matrix $A = (a_{ij})$ gilt: $a_{ij} \neq 0$ ist nur für $i \leqslant j \leqslant i - 1 + k$ möglich. Andererseits ist für $B = (b_{jm})$ gerade $b_{jm} \neq 0$ nur für $m \leqslant j \leqslant m - 1 + k$ möglich. Sei nun $i < m$, also c_{im} im oberen Dreieck von $(c_{im}) = C$ mit $C = AB$. Dann gilt

$$c_{im} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jm} = \sum_{j=m}^{i-1+k} a_{ij} b_{jm}\,.$$

Insbesondere ist $c_{im} = 0$ falls $m > i - 1 + k$, falls also c_{im} im Bereich von H liegt.

Sei nun $i > m$, d.h. c_{im} liegt im unteren Dreieck von C. Dann gilt

$$c_{im} = \sum_{j=i}^{m-1+k} a_{ij} b_{jm}\,,$$

insbesondere $c_{im} = 0$ für $i > m - 1 + k$, was so viel bedeutet wie $(i, m) \in H'$.

Nun kommen wir zur zweiten Gleichung. Wenn wir die erste obere Dreiecksmatrix mit $D = (d_{ij})$ bezeichnen, ist $d_{ij} \neq 0$ nur für $j > i - 1 + k$ möglich. Die zweite Dreiecksmatrix soll nun $E = (e_{jm})$ heißen; es gilt dann $e_{jm} \neq 0$ nur für $j \leqslant m$. Für das Produkt $DE = F = (f_{im})$ gilt dann

$$f_{im} = \sum_{j=0}^{n} d_{ij} e_{jm} = \sum_{j=i+k}^{m} d_{ij} e_{jm}\,.$$

Insbesondere ist $f_{im} = 0$, wenn $m < i + k$, d.h. wenn f_{im} echt unterhalb der Indexgerade durch $(1, k+1)$, $(2, k+2)\ldots$ liegt, was zu beweisen war.

c) Wir zeigen zunächst eine Hilfsbehauptung, aus der wir dann die hier beschriebene Tatsache folgern können.

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ mit $a_{ij} = 0$ für $i \geqslant j$. Die Hilfsbehauptung lautet: Für $A^m =: B_m = (b_{ij}^m)$ gilt $b_{ij}^m = 0$ für $i \geqslant j + 1 - m$ für alle $m \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Den Beweis führen wir durch Induktion über m. Für $m = 1$ haben wir die Voraussetzung in etwas neuer Form. Angenommen, die Behauptung sei für m bereits gezeigt. Dann gilt

$$B_{m+1} = A^{m+1} = A^m \cdot A = B_m \cdot A\,,$$

wobei B_m und A die Gestalt haben, die den Matrizen D und E aus der zweiten Aussage von b) entsprechen. Nach b) folgt dann

$$b_{ij}^m = 0 \text{ für } i > j - m \Leftrightarrow i \geqslant j + 1 - m\,.$$

Nachdem wir diese Hilfsbehauptung bewiesen haben, gilt für den Spezialfall $m = n+1$ gerade $(j+1)-(n+1) = j-n \leqslant 0$, damit ist $i \geqslant j+1-m$ stets gegeben, B_{n+1} ist somit die Nullmatrix.

Zur Veranschaulichung berechnen wir die Potenzen von

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^5 = (0).$$

Vergleiche auch die Ergebnisse dieses Beispiels mit der Lösung zu Aufgabe E1.

3. a) Diese Teilmenge ist ein Unterring. Die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation folgt aus Aufgabe 2 b). Dass die angegebene Menge bzgl. der Addition eine Gruppe bildet, rechnet man ohne Schwierigkeiten nach.
b) Die Matrizen sind von der Form wie auf der rechten Seite der ersten Gleichung von Aufgabe 2 b). Aus diesem Grunde bilden sie, wie man dort erkennen kann, für $k \geqslant 2$ keinen Unterring, da bei der Multiplikation die Anzahl der Diagonalreihen ungleich 0 ansteigen kann.

Für $k = 0$ besteht die Menge hingegen nur aus der Nullmatrix, und für $k = 1$ nur aus Diagonalmatrizen. Diese Mengen sind Unterringe von $\mathrm{M}(n \times n; K)$.
c) Diese Menge ist ein Unterring. Die wesentliche Eigenschaft ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix},$$

denn aus $a, a' \in \mathbb{Q}$ folgt $aa' \in \mathbb{Q}$.
d) Diese Menge ist ebenfalls ein Unterring, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab' \\ 0 & bb' \end{pmatrix}.$$

e) Die Menge enhält alle Matrizen der Form

$$\left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{k-1} \\ \hline & 0 & \end{array}\right),$$

wobei in den letzten $n-k$ Zeilen lauter Nullen stehen. Diese Menge ist sicher ein Unterring.

4. a) Es seien $B = (b_{ij})$, $\lambda E_n B = (a_{ij}) =: A$ und $B(\lambda E_n) = (c_{ij}) =: C$. Dann gilt

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda \delta_{ik} b_{kj} = \lambda b_{ij} \quad \text{und} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \lambda \delta_{kj} = b_{ij} \lambda \,.$$

Dabei steht δ_{ij} wie üblich für das *Kronecker-Symbol*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt, weil in K das Kommutativgesetz für die Multiplikation gilt.

b) Sei nun $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ mit $AB = BA$ für alle B. Daraus wollen wir $A = \lambda E_n$ folgern. Zum Beweis betrachten wir ein spezielles B. Es sei

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 1 & \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} & 1 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 1 & \end{pmatrix},$$

wobei die Spalte aus Einsen an i-ter Stelle stehen soll. Multipliziert man diese Gleichung aus, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} & a_{11} + \ldots + a_{1n} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{n1} + \ldots + a_{nn} & \end{array}\right),$$

wobei in der Matrix auf der rechten Seite nur in der i-ten Spalte Einträge ungleich null stehen können. Ein Vergleich der beiden Seiten liefert

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für } j \neq i$$

und

$$a_{11} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} = a_{nn}\,,$$

was zu beweisen war.

5. In dieser Aufgabe geht es um eine Matrizendarstellung des Körpers der komplexen Zahlen.

a) Zunächst ist zu zeigen, dass die Menge $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$ ein Körper ist. Es sollte klar sein, dass C in Bezug auf die Addition eine kommutative Gruppe ist, denn C ist abgeschlossen gegenber Addition, die Nullmatrix liegt in C und inverse Elemente bzgl. Addition liegen ebenfalls in C. Betrachten wir nun die Eigenschaften von C im Hinblick auf Multiplikation. Die Einheitsmatrix liegt in C. Eine kurze Rechnung

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \in C$$

zeigt, dass C bzgl. der Multiplikation abgeschlossen ist. Die Distributivgesetze für Matrizen brauchen nicht erneut nachgerechnet werden; das haben wir allgemeiner schon getan. In C ist die Multiplikation sogar kommutativ, denn es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun wird es spannend, weil wir zu jedem Element $\neq 0$ aus C ein Inverses bzgl. der Multiplikation finden müssen, das zudem noch in der Menge C enthalten sein muss. Das ist für Matrizen im Allgemeinen weder möglich noch besonders einfach, falls es möglich ist. Hier gelingt es jedoch, es gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}.$$

Dieses Inverse ist definiert, denn für $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$ ist $a^2+b^2 > 0$, also insbesondere ungleich null.

b) Angenommen, $X^2+1=0$ hat eine Lösung in C. Dann existieren $a,b \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & a^2-b^2 = -1 \text{ und } 2ab = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a = 0 \text{ und } b = \pm 1, \end{aligned}$$

womit nicht nur die Existenz einer Lösung gezeigt, sondern auch eine Lösung angegeben ist.

c) Der Isomorphismus ist gegeben durch die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + \mathrm{i}b\,;$$

das Nachrechnen ist dann nur noch eine Formalität.

Die Ergebnisse dieser Aufgabe ermöglichen es uns, die Multiplikation mit komplexen Zahlen als Drehstreckungen in der Ebene zu sehen, bei der die x-Achse den reellen Punkten und die y-Achse den imaginären Punkten entspricht (vgl. auch 2.1.1 b)). Die Multiplikation mit i entspricht beispielsweise einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn. Zu dieser Darstellung der komplexen Zahlen siehe auch [E], Kapitel 3, §2.5 und §5.

6. Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen wir zuerst eine Topologie definieren; wir wählen hierzu die Standard-Topologie oder metrische Topologie in den Standard-Räumen $\mathbb{R}^{m\cdot n}$ und $\mathbb{R}^{m\cdot k}$, die durch die Standard-Metrik induziert wird (vgl. [O], Abschnitt 2.1 oder [C-V], 1.C, insbesondere Example 4). Für eine Matrix $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times k;\mathbb{R})$ und eine beliebige Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n;\mathbb{R})$ gilt

$$A \cdot B = (c_{ij}) \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}\,,$$

d.h. die Einträge der Matrix $A \cdot B$ sind lineare Polynome $\mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}$ in den Unbestimmten a_{il}. Diese sind bzgl. der Standard-Topologien in $\mathbb{R}^{m\cdot n}$ und $\mathbb{R}$ selbstverständlich stetig. Wer das nicht glaubt, möge mit offenen Bällen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^{m\cdot n}$ hantieren; dies ist eine Schlacht gegen die Indizes, bringt jedoch keine weiteren Einblicke.

7. Ein mögliches Beispiel für $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - n = \operatorname{rang}(AB)$ findet man für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und somit $AB = (0)$, denn es gilt $(n-r) + r - n = 0$. Die Schärfe der zweiten Abschätzung

$$\operatorname{rang}(AB) = \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$$

liefert das Beispiel $A = B = E_n$, womit $AB = E_n$ ist und $\min\{n,n\} = n$.

8. Die hier beschriebene Methode ist die gängigste, um die Inverse einer Matrix zu berechnen. Da das Verfahren für einige unserer LeserInnen neu sein wird, führen wir die Rechnung ausführlich vor. Es ist zu empfehlen, in dieser Art der Rechentechnik gewisse Fertigkeiten und Routine zu erlangen; das geht nur, wenn man immer wieder viele Aufgaben rechnet. Zu diesem Zweck haben wir im Aufgabenteil dieses Buches im Anschluss an Abschnitt 2.7 einige invertierbare Matrizen aufgeführt. Ihre Inversen befinden sich im Lösungsteil nach den Lösungen der Aufgaben zu 2.7.

Zunächst wollen wir allerdings die Behauptung beweisen. Tragen wir die Vektoren e_i als Spaltenvektoren in eine Matrix ein, so lautet sie in Matrizenschreibweise

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = (e_1, \cdots, e_n) = E_n \,.$$

Daraus folgt jedoch sofort die Behauptung.

Nun kommen wir zur Berechnung der Inversen der angegebenen Matrix A. Unsere Kürzel und Hieroglyphen zur Rechnung auf der folgenden Seite sollen dabei folgende Bedeutung haben: Die römischen Ziffern am rechten Rand bezeichnen die Zeilenumformung, aus der diese Zeile der beiden Matrizen entstanden ist. Z.B. heißt $\text{II} - 2 \cdot \text{I}$, dass das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten abgezogen wurde und an der Stelle dieser Notierung plaziert wurde. IIneu bedeutet, dass mit der neuen zweiten Zeile, die gerade in diesem Schritt erst erstellt wurde, gerechnet wurde.

1	1	2	4	1	0	0	0	
1	3	4	−2	0	1	0	0	
0	1	3	6	0	0	1	0	
1	3	5	3	0	0	0	1	
1	1	2	4	1	0	0	0	
0	2	2	−6	−1	1	0	0	$\text{II} - \text{I}$
0	1	3	6	0	0	1	0	
0	2	3	−1	−1	0	0	1	$\text{IV} - \text{I}$
1	1	2	4	1	0	0	0	
0	1	3	6	0	0	1	0	III
0	0	−4	−18	−1	1	−2	0	$\text{II} - 2 \cdot \text{III}$
0	0	1	5	0	−1	0	1	$\text{IV} - \text{II}$
1	1	2	4	1	0	0	0	
0	1	3	6	0	0	1	0	
0	0	1	5	0	−1	0	1	IV
0	0	0	2	−1	−3	−2	4	$\text{III} + 4 \cdot \text{IV}$
1	1	2	0	3	6	4	−8	$\text{I} - 4 \cdot \text{IVneu}$
0	1	3	0	3	9	7	−12	$\text{II} - 6 \cdot \text{IVneu}$
0	0	1	0	2.5	6.5	5	−9	$\text{III} - 5 \cdot \text{IVneu}$
0	0	0	1	−0.5	−1.5	−1	2	$0.5 \cdot \text{IV}$
1	1	0	0	−2	−7	−6	10	$\text{I} - 2 \cdot \text{IIIneu}$
0	1	0	0	−4.5	−10.5	−8	15	$\text{II} - 2 \cdot \text{IIIneu}$
0	0	1	0	2.5	6.5	5	−9	
0	0	0	1	−0.5	−1.5	−1	2	

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 3.5 & 2 & -5 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -4.5 & -10.5 & -8 & 15 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2.5 & 6.5 & 5 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & -1.5 & -1 & 2
\end{array} \qquad \mathrm{I}-\mathrm{II}$$

Die gesuchte inverse Matrix ist also

$$0.5 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & -10 \\ -9 & -21 & -16 & 30 \\ 5 & 13 & 10 & -18 \\ -1 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

was man sich immer durch eine Probe bestätigen sollte.

9. a) Sei $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant n}$ und $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$. Dann gilt

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk} x_k \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Jacobi-Matrix hat an der Stelle (i, j) den Eintrag

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{jk} = a_{ij}.$$

Hierbei bezeichnen wir wie in der Lösung von Aufgabe 4 a) zu 2.5 δ_{ij} das *Kronecker-Symbol*. Die Jacobi-Matrix der Abbildung $x \mapsto Ax$ ist also A selbst, wie es für eine lineare Abbildung zu erwarten war.

b) Wir betrachten nun die Abbildung

$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

Die Jacobi-Matrix von P ist ein Element von $\mathrm{M}(1 \times n; \mathbb{R})$ und hat an der k-ten Stelle den Eintrag

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} x_i}_{=\delta_{ik}}
\end{aligned}$$

(Dabei kann $\frac{\partial}{\partial x_k} x_i x_j$ nur dann $\neq 0$ sein, wenn $i = k$ oder $j = k$ ist.)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} x_i x_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} x_k x_j + b_k \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} x_i x_k + a_{kk} \frac{\partial}{\partial x_k} x_k^2 \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} x_k x_j + b_k \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} x_i + 2a_{kk} x_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j + b_k\,.
\end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix von P hat n Spalten und n Zeilen, und an der Stelle (l,k) den Eintrag

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} x_i + 2a_{kk} x_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j + b_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_l} x_i + 2a_{kk} \frac{\partial}{\partial x_l} x_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_l} x_j\,.
\end{aligned}$$

Im Fall $l < k$ ist dieser Term a_{lk}, im Fall $l = k$ ist er $2a_{kk} = 2a_{ll}$. Falls aber $l > k$ ist, ist er a_{kl}. Somit haben wir

$$\mathrm{Hess}_x P = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 2a_{22} & \ddots & & \vdots \\ a_{31} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & 2a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zum Ende dieses Abschnitts erlauben wir uns noch drei Bemerkungen:

i) Im Zeitalter des Computers werden Jacobi- und Hesse-Matrizen nur noch in seltenen Fällen von Hand berechnet. Computer-Algebra-Systeme stellen effektive Algorithmen hierfür zur Verfgung, vgl. [B-M], §29.

ii) Die Hesse-Matrix tritt in der Analysis bei der Untersuchung der Extremwerte von Funktionen auf, vgl. [Fo2], §7.

iii) Mit Hilfe der Determinante der Hesse-Matrix kann man für eine ebene algebraische Kurve (das ist die Nullstellenmenge eines Polynoms in zwei Veränderlichen) die sogenannte *Hesse-Kurve* erklären, die die Wendepunkte der Kurve liefert (vgl. [Fi2], 4.4–4.6).

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. Wir bezeichnen die Einträge der Matrix M^{k-1} mit $m_{ij}^{(k-1)}$. Es ergibt sich die rekursive Formel

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & k & \sum\limits_{j=1}^{3} m_{1,k+j}^{(k-1)} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n-k} m_{1,k+j}^{(k-1)} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \ddots & \sum\limits_{j=1}^{3} m_{1,k+j}^{(k-1)} \\ \vdots & & \vdots & & & & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & & & & & 1 \\ & 0 & & & & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die ersten k Spalten und die letzten k Zeilen 0 sind. Daraus bestimmen wir die Matrizen

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & 3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \cdots & \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

E2. Ist $A \cdot B$ symmetrisch, so gilt

$$A \cdot B = {}^t(A \cdot B). \qquad \circledast$$

Nach der Regel 4) aus 2.5.4 gilt

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA, \qquad \circledast\circledast$$

und da A, B symmetrisch sind, gilt ${}^tA = A$ und ${}^tB = B$, womit aus $\circledast$ und $\circledast\circledast$ $A \cdot B = B \cdot A$ folgt.

Gilt $A \cdot B = B \cdot A$, so folgt aus der Symmetrie von A und B

$$A \cdot B = B \cdot A = {}^tB \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot B), \quad \text{d.h. } A \cdot B \text{ ist symmetrisch.}$$

E3. Da sich in heutiger Zeit Rechnungen gut mit CAS oder GTR überprüfen lassen und es sich hier lediglich um geradlinige Berechnungen handelt, wurden die Lösungen hier nicht notiert. Eine Freeware eines CAS ist beispielsweise `wxMaxima`.

E4. Der Nachweis wird per Induktion über k geführt. Der Fall $k = 1$ lautet

$$A^1 \cdot B - B \cdot A^1 = E \cdot (AB - BA) = 1 \cdot A^0(AB - BA).$$

Für $k = 2$ erhält man

$$\begin{aligned} 2 \cdot A \cdot (A \cdot B - B \cdot A) &= A \cdot (A \cdot B - B \cdot A) + A \cdot (A \cdot B - B \cdot A) \\ &\overset{\circledast}{=} A \cdot (A \cdot B - B \cdot A) + (A \cdot B - B \cdot A) \cdot A \\ &= A^2B - ABA + ABA - BA^2 = A^2B - BA^2. \end{aligned}$$

Hierbei wurde an der Stelle $\circledast$ die Voraussetzung benutzt.

Der Induktionsschritt $k \to k+1$ ergibt sich mit

$$\begin{aligned} (k+1) \cdot A^k(AB - BA) &= k \cdot A^k(AB - BA) + A^k(AB - BA) \\ &= A \cdot \Big(k \cdot A^{k-1}(AB - BA)\Big) + A^k(AB - BA) \\ &\overset{\circledast\circledast}{=} A \cdot (A^kB - BA^k) + (AB - BA)A^k \\ &= A^{k+1}B - ABA^k + ABA^k - BA^{k+1} \\ &= A^{k+1}B - BA^{k+1}. \end{aligned}$$

Hierbei wurden an der Stelle $\circledast\circledast$ die Induktionsannahme und die Voraussetzung (k-mal) verwendet.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

2.6 Koordinatentransformationen

1. Zu zeigen ist $T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{A}} = T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \cdot T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}$. Wir müssen diese Gleichheit unter Bezug auf die in 2.6.2 beschriebene Eigenschaft der Transformationsmatrizen zeigen. Zunächst legen wir einige Bezeichnungen fest. Es seien $\mathscr{A} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathscr{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ und $\mathscr{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ drei Basen des n-dimensionalen Vektorraums V. Desweiteren sei $v \in V$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j = \sum_{k=1}^{n} z_k u_k \,.$$

Die Voraussetzungen können wir nun als

$$\text{(i)}: \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{(ii)}: \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Die Behauptung lautet analog

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \cdot T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

denn $T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \cdot T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}$ soll Koordinaten von $\mathscr{A}$ nach $\mathscr{C}$ transformieren. Diese Aussage lässt sich nach all der Vorarbeit nun verhältnismäßig leicht nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \overset{(ii)}{=} T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{(i)}{=} T_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \cdot T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

was zu beweisen war.

2. In dieser Aufgabe soll nun das bisher theoretisch erworbene Wissen auf einen konkreten Fall angewendet werden. Als kleine zusätzliche Schwierigkeit sind die Vektoren hier als Zeilen geschrieben, daher müssen alle Matrizen transponiert werden, was wir jedoch einfach meistern werden.

a) Wegen $T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\mathrm{id})$ berechnen wir die Koordinaten der Basisvektoren aus $\mathscr{A}$ bzgl. der Basis $\mathscr{B}$. Aufgrund der in 2.6.2 beschriebenen Eigenschaft von Transformationsmatrizen liefert dies die Spalten von $T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} (1,-1,2) &= 1 \cdot (1,2,2) + 6 \cdot (-1,3,3) - 3 \cdot (-2,7,6)\,, \\ (2,3,7) &= 2.6 \cdot (1,2,2) + 8.6 \cdot (-1,3,3) - 4 \cdot (-2,7,6)\,, \\ (2,3,6) &= 2.4 \cdot (1,2,2) + 6.4 \cdot (-1,3,3) - 3 \cdot (-2,7,6)\,, \end{aligned}$$

und damit

$$T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2.6 & 2.4 \\ 6 & 8.6 & 6.4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Die gesuchten Koordinaten erhalten wir nun schnell durch

$$T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2.6 & 2.4 \\ 6 & 8.6 & 6.4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.2 \\ 38.2 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe bestätigen wir

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (1,-1,2) + 9 \cdot (2,3,7) - 8 \cdot (2,3,6) = (4,1,19) \\ & = 6.2 \cdot (1,2,2) + 38.2 \cdot (-1,3,3) - 18 \cdot (-2,7,6). \end{aligned}$$

3. a) Die Behauptung folgt direkt aus dem Austauschsatz aus 1.5.4. Wir erhalten die Transformationsmatrizen quasi geschenkt, nämlich

$$T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beide Matrizen haben vollen Rang, und nach dem Austauschsatz sind $\mathscr{A}'$ bzw. $\mathscr{B}'$ daher Basen von V bzw. W.

b) Wir berechnen durch Invertieren (siehe Aufgabe 8 zu 2.5) die Matrix

$$T_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Transformationsformel aus 2.6.5 errechnen sich die gesuchten Matrizen wie folgt:

$$M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}'} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(F) \cdot T_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}'} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 15 & 16 & 4 \\ 4 & -13 & -12 & 5 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{A}} = T_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \cdot M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(F) = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 7 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -17 & 5 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{A}'} = T_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \cdot M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(F) \cdot T_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}'} = T_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \cdot M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}'}(F) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 & -3 \\ -4 & 5 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 15 & 16 & 4 \\ 4 & -13 & -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) Zur Berechnung von $F^{-1}(\mathrm{span}\,(w_1,w_2,w_3))$ müssen wir die Lösung von

$$M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(F)x = {}^t(a,b,c,0,0)\,,$$

für beliebige $a,b,c \in \mathbb{R}$ finden. $v_1+5v_2-4v_4$ ist eine Basis des Kerns von F, und damit ist $\mathrm{span}\,(v_1+5v_2-4v_4)$ in jedem Urbild unter F enthalten. Eine einfache Rechnung ergibt, dass weiterhin genau die Vielfachen des Vektors $-99v_1+17v_2+4v_3$ im Urbild von $\mathrm{span}\,(w_1,w_2,w_3)$ liegen, da sich einige Bedingungen an a,b,c stellen (nämlich $a=-1.5b$ und $c=-2b$), um das lineare Gleichungssystem lösen zu können. Somit ist

$$F^{-1}(\mathrm{span}\,(w_1,w_2,w_3)) = \mathrm{span}\,(v_1+5v_2-4v_4, -99v_1+17v_2+4v_3)\,.$$

4. Seien A, $B \in \mathrm{M}(m\times n;K)$. Wir betrachten die Relation

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind äquivalent}\,.$$

Nach Definition bedeutet dies gerade, dass $S \in \mathrm{GL}(m;K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n;K)$ existieren mit $B = SAT^{-1}$. Wir wollen nun zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, wie es die Bezeichnung „äquivalent“ vorwegnimmt. Die Reflexivität $A \sim A$ erhalten wir durch $A = E_m \cdot A \cdot E_n^{-1}$. Die Transitivität weisen wir wie folgt nach: Seien $A \sim B$ und $B \sim C$, d.h. $B = SAT^{-1}$ und $C = XBY^{-1}$ mit geeigneten Matrizen S,T,X,Y. Dann gilt auch

$$C = XBY^{-1} = X(SAT^{-1})Y^{-1} = (XS)\cdot A\cdot (YT)^{-1}\,,$$

also $A \sim C$. Die Relation ist auch symmetrisch, denn aus $B = SAT^{-1}$ folgt $A = S^{-1}BT = (S^{-1})\cdot B\cdot (T^{-1})^{-1}$. Für Matrizen quadratischer Größe und die Ähnlichkeitsrelation geht der Beweis analog.

5. Wir betrachten eine lineare Abbildung, die durch eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n\times n;\mathbb{R})$ mittels $x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto x\cdot A$ (der Vektor x ist in Zeilenform gegeben) definiert ist. Hierbei ist die Multiplikation wie in Abschnitt 2.5 definiert. Analog zu Abschnitt 2.4 kann nachgewiesen werden, dass hierdurch lineare Abbildungen definiert werden. Damit werden wir $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}\,(A\cdot {}^tA)$ zeigen, und mit Hilfe von Satz 2.2.4 folgt daraus $\dim A = \dim(A\cdot {}^tA)$, denn sowohl A als auch $A\cdot {}^tA$ können als lineare Abbildungen $V \to V$ mit $V = \mathbb{R}^n$ betrachtet werden.

Ist nun ein $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben mit $xA = 0$, so folgt unmittelbar $xA\cdot {}^tA = 0$, also $\mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}\,(A\cdot {}^tA)$.

Um die Inklusion $\mathrm{Ker}A \supset \mathrm{Ker}\,(A\cdot {}^tA)$ zu zeigen, wählen wir ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $xA\cdot {}^tA = 0$, woraus folgt

$$0 = xA\cdot {}^tA{}^tx = (xA)\cdot {}^t(xA)\,. \qquad (*)$$

Setzen wir nun $y = (y_1,\ldots,y_n) := xA$, so folgt aus $(*)$

$$0 = y\cdot {}^ty = y_1^2+\ldots+y_n^2 = 0\,,$$

womit wegen $K=\mathbb{R}$ gerade $y_1=\cdots=y_n=0$ folgt, d.h. $0=y=xA$, was zu zeigen war.

Nun kann man schon erahnen, woran die Aussage über $\mathbb{C}$ scheitert. Im Körper der komplexen Zahlen ist die Summe über Quadrate von Zahlen ungleich 0 nicht notwendig ungleich 0. Ein Gegenbeispiel ist

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & \\ 1 & i & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} & 0 \end{array}\right)\in \mathrm{M}(n\times n;\mathbb{C})\,,$$

denn in diesem Fall ist $A\cdot {}^tA$ die Nullmatrix und hat Rang 0, A hat jedoch den Rang 1.

2.7 Elementarmatrizen und Matrizenumformungen

1. Die Darstellung von A als Produkt von Elementarmatrizen, die wir angeben, ist keineswegs eindeutig. Wir haben sie durch zweimaliges Invertieren von A mit dem üblichen Verfahren und durch das Notieren der Umformungen erhalten. Es gilt

$$A=S_2(-1)\cdot S_1(-1)\cdot Q_1^2(2)\cdot Q_1^3\cdot Q_2^3(-1)\cdot Q_3^2(3)\cdot P_3^2\cdot Q_2^1(2)\cdot P_2^1\,.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6&3&4&5\\1&2&2&1\\2&4&3&2\\3&3&4&2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1&-21&6&7\\-1&-9&6&1\\0&12&-6&0\\3&21&-6&-9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&2&0\\1&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1&-2&2\\1&1&-1\\-2&4&-1\end{pmatrix}$$

Als Element von $\mathrm{M}(3\times 3;\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ist diese letzte Matrix jedoch nicht invertierbar, weil sie nur Rang zwei hat.

3. Wir versuchen, A auf die herkömmliche Weise zu invertieren, und beobachten, welche Bedingungen sich an a, b, c und d stellen. Eine solche Rechnung zeigt, dass die einzig mögliche inverse Matrix

$$\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

lauten müsste, die nur genau dann existieren kann, wenn $ad-bc\neq 0$ gilt.

An dieser Stelle sei auch auf das folgende Kapitel über Determinanten verwiesen, denn $\det A = ad - bc$.

4. Benutzt man die Inversen der Elementarmatrizen aus 2.7.2, so ist mit den Bezeichnungen in 2.7.6 S^{-1} gegeben durch $B_1^{-1} \cdot \ldots \cdot B_k^{-1}$, denn

$$B_k \cdot \ldots \cdot B_1 \cdot E_m \cdot B_1^{-1} \cdot \ldots \cdot B_k^{-1} = E_m .$$

Da Inverse von Elementarmatrizen nach 2.7.2 einfach zu bestimmen sind, kann das Verfahren folgendermaßen modifiziert werden:

E_m	A
$E_m \cdot B_1^{-1}$	$B_1 \cdot A$
$\vdots$	$\vdots$
$E_m \cdot B_1^{-1} \cdot \ldots \cdot B_k^{-1}$	$B_k \cdot \ldots \cdot B_1 \cdot A$

Dabei ist die Bearbeitung beendet, wenn $B_k \cdot \ldots \cdot B_1 \cdot A$ Zeilenstufenform hat. Der Rest des Verfahrens bleibt unberührt.

5. i) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Die Transformationsmatrix lautet

$$S = Q_3^2(-1) \cdot Q_3^1(-2) \cdot Q_2^1(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und es gilt

$$\tilde{b} = S \cdot b = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

ii) Nun betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 27 & -63 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Dabei erhalten wir die Transformationsmatrix

$$\begin{aligned} S &= Q_4^3(-\tfrac{2}{3}) \cdot S_4(-4) \cdot S_3(-4) \cdot Q_4^2(-\tfrac{1}{2}) \\ &\quad \cdot Q_3^2(\tfrac{3}{4}) \cdot Q_4^1(-3) \cdot Q_3^1(-2) \cdot Q_2^1(-4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & -3 & -4 & 0 \\ -\frac{28}{3} & 4 & \frac{8}{3} & -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und es ergibt sich $\tilde{b} = S \cdot b = {}^t(7, -19, 121, -\frac{80}{3})$.

6. a) Wir zeigen die erste der angegebenen Gleichheiten, der zweite Beweis verläuft ganz analog. Es gilt

$$\begin{aligned} (E_n - A) \sum_{i=0}^{m-1} A^i &= \sum_{i=0}^{m-1} A^i - \sum_{i=0}^{m-1} A^{i+1} \\ &= A^0 + \sum_{i=1}^{m-1} A^i - \sum_{i=1}^{m-1} A^i - A^m \\ &= A^0 - A^m = E_n - A^m. \end{aligned}$$

Diese soeben durchgeführte Umformung ist aus der elementaren Analysis bekannt, wo die Vorteile einer *Teleskopsumme* öfter benutzt werden.

b) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ mit $A^m = (0)$. Solche Matrizen nennt man *nilpotent* (vgl. Aufgabe 5 zu 2.1). Zum Beispiel sind echte obere Dreicksmatrizen stets nilpotent, wie wir in Aufgabe 2 c) zu Abschnitt 2.5 gezeigt haben. Sei m minimal mit $A^m = (0)$; nach a) gilt dann

$$E_n = E_n - A^m = (E_n - A) \sum_{i=0}^{m-1} A^i,$$

d.h. $E_n - A$ ist invertierbar mit inverser Matrix $\sum_{i=0}^{m-1} A^i$.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. Rechenergebnisse lassen sich mit GTR oder CAS überprüfen. Daher sind die Lösungen hier nicht notiert.

E2. Teil **a)** lässt sich durch simple Rechnung nachweisen, die analog zur Rechnung in Abschnitt 2.5.2 in [Fi1] verläuft.

Ergebnisse von Teil **b)** lassen sich mit GTR oder CAS berechnen. Hierbei ist lediglich zu bedenken, dass die Vektoren vielleicht in Zeilenform eingegeben werden müssen.

c) Die Multiplikation lässt sich notieren durch $(a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = (c_{ij})$. Für c_{11} gilt damit

$$c_{11} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{i1},$$

und die c_{1j} lauten analog

$$c_{1j} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{ij}.$$

Dies lässt sich verallgemeinern auf

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

E3. a)

$$p(A) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix},$$

b)

$$p(A) = \begin{pmatrix} 52 & -70 \\ -42 & 66 \end{pmatrix},$$

c)

$$p(A) = \begin{pmatrix} -16 & -43 & 2 \\ 92 & 79 & 32 \\ 12 & 20 & 3 \end{pmatrix}.$$

E4. Nach Aufgabe 2 in Abschnitt 2.2 ist d linear. Daher reicht es aus, die Behauptung für die Basis $\mathscr{B}$ zu zeigen. Hier gilt

$$(p \circ d)(\sin) = \left(d^2 + \mathrm{id}\right)(\sin) = -\sin + \sin = 0 \quad \text{und}$$
$$(p \circ d)(\cos) = \left(d^2 + \mathrm{id}\right)(\cos) = -\cos + \cos = 0\,.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

E5. Es sei $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t^1 + a_0$.

Der Beweis erfolgt per Induktion über den Grad $n = \deg(p)$ von p.

$n = 0$: Es ist $F = \mathrm{id}_V$, nach 2.4.4 in [Fi1] gilt $M_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V) = E_n$. In diesem Fall ist $p(t) = a_0$, und es folgt

$$M_{\mathscr{B}}(p(F)) = M_{\mathscr{B}}(a_0 \cdot \mathrm{id}_V) = a_0 \cdot M_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V) = a_0 \cdot E_n = p(A)\,.$$

$n \to n+1$: Mit Hilfe der Linearität der Abbildung $M_{\mathscr{B}}$ an den Stellen (1) und der Induktionsannahme an der Stelle (2) in der folgenden Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B}}\big(p(F)\big) &= M_{\mathscr{B}}(a_nF^n + a_{n-1}F^{n-1} + \ldots + a_1F^1 + a_0\mathrm{id}_V) \\ &\overset{(1)}{=} M_{\mathscr{B}}(a_nF^n) + M_{\mathscr{B}}(a_{n-1}F^{n-1} + \ldots + a_1F^1 + a_0\mathrm{id}_V) \\ &\overset{(1)}{=} a_nM_{\mathscr{B}}(F^n)M_{\mathscr{B}}(F^{n-1}) + M_{\mathscr{B}}(a_{n-1}F^{n-1} + \ldots + a_1F + a_0\mathrm{id}_V) \\ &\overset{(2)}{=} a_nA \cdot A^{n-1} + (a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0E_n) \\ &= a_nA^n + \ldots + a_1A + a_0E_n = p(A)\,. \end{aligned}$$

E6. Es sei $N := n^2$. Wir betrachten die Endomorphismen $\mathrm{id}_V, F, F^2, \ldots, F^N$.

Erinnern Sie sich, dass $\dim\big(\mathrm{End}\,(V)\big) = N = n^2$ gilt, da man die $(n \times n)$-Matrizen als N-Vektoren und die Multiplikation von Matrizen mit Elementen des als skalare Multiplikation betrachten kann. Damit sind $\mathrm{id}_V, F, F^2, \ldots, F^N$ linear abhängig, und es existieren $a_N, a_{N-1}, \ldots, a_1, a_0 \in K$ (nicht alle gleich Null) mit

$$a_NF^N + a_{N-1}F^{N-1} + \ldots + a_1F + a_0\mathrm{id}_V = 0\,.$$

Damit ist F eine Nullstelle von $p(t) = \sum\limits_{i=0}^{N} a_i \cdot t^i$.

Achtung! Es handelt sich nicht notwendig um das Polynom des geringsten Grades, das diese Bedingung $p(F) = 0$ erfüllt.

E7. (1) Der Beweis lässt sich per Induktion über n notieren.

Gegeben sei ein Polynom $p \in K[t]$ mit

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} b_it^i = b_nt^n + b_{k-1}t^{k-1} + \ldots + b_1t + b_0\,.$$

Aufgrund der Rechengesetze des Vektorraums der Matrizen über K reicht es aus, die Behauptung für $p(t) = t^k$ zu zeigen.

Für die Matrix A_1 gilt dann für $k = 2$, d.h. $p(t) = t^2$,

$$p(A_1) = A_1^2 = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(a_1) & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & p(a_n) \end{pmatrix}.$$

Für den Schritt $k \to k+1$ nehmen wir

$$\begin{aligned}
A_1^{k+1} &= \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}^{k} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \\
&\overset{(\diamondsuit)}{=} \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{k+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(a_k) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

An der Stelle $(\diamondsuit)$ wurde die Induktionsvoraussetzung verwendet. Damit gilt

$$p(A_1) = A_1^k = \begin{pmatrix} a_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(a_n) \end{pmatrix},$$

was zu zeigen war.
(2) Diese Behauptung lässt sich auf den Teil a) zurückführen. Analog zu Teil a) beschränken wir uns auf den Fall $p(t) = t^k$. Für A_2 gilt

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = A_1 + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Fall $k = 1$ ist klar. Wir betrachten zusätzlich den Fall $k = 2$, um die Rechnung genauer zu betrachten. Hier gilt

$$\begin{aligned}
A_2^2 &= \left(A_1 + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right)^2 \\
&= A_1^2 + \underbrace{A_1 \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{(1)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} A_1}_{(2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}^2}_{(3)}.
\end{aligned}$$

A_1^2 erfüllt nach Teil a) bereits die Voraussetzungen. (1) ergibt

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \circledast \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

da in der Diagonale und darunter von $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ ausschließlich die Null steht, vgl. hierzu auch [Fi1], Abschnitt 2.5.2. Analoge Überlegungen führen zu den Ergebnissen für (2) und (3).

Für den Schritt $k \to k+1$ schreiben wir

$$\begin{aligned} A_2^{k+1} &= A_2^k \cdot A_2 \overset{(\diamondsuit)}{=} \begin{pmatrix} a_1^k & & \circledast \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \circledast \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad \cdot \left[\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

An der Stelle $(\diamondsuit)$ wurde die Induktionsannahme benutzt. Multipliziert man diese Klammern aus, so ergibt sich

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}}_{(a)} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{(b)}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \circledast \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}}_{(c)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \circledast \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{(d)}.$$

Analog zu Teil a) folgt die Behauptung für (a) und (b). Die Produkte (c) und (d) führen zu Ergebnissen, deren Diagonalelemente gleich Null sind. Damit gilt es auch für die Summe dieser Produkte (c) und (d), womit die Behauptung folgt, wenn man $p(a_i) = a_i^{k+1}$ berücksichtigt.

An den Berechnungen zeigt sich auch, dass $* \neq \circledast$ sein kann.

E8. a) Die Matrix A lässt sich wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} + \ldots \\
&\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & A_n \end{pmatrix}}_{M_n}.
\end{aligned}$$

Es gilt $M_i \cdot M_j = 0$ für alle $i \neq j$. Daher können wir uns auf Potenzen M_i^k beschränken. In diesem Fall lassen sich die Ergebnisse aus Aufgabe E7 anwenden, denn es gilt

$$M_i^k = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & A_i^k & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

und auf A_i^k lassen sich die Ergebnisse aus Aufgabe E7 anwenden, womit sich die Behauptung ergibt.

Schlüsse in Aufgabenteil **b)** verlaufen analog zu Aufgabe E7 b).

Kapitel 3

Determinanten

3.1 Beispiele und Definitionen

1. Die Determinanten betragen 4 bzw. 18 (vgl. auch Aufgabe E2 zu 3.3).
2. Bei der folgenden Rechnung haben wir stets angegeben, welche Eigenschaft der Determinante wir verwendet haben:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} &\overset{\text{D7}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 1-x & 1-x^2 \\ 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{D6}}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & 1-x \\ 0 & 1-x & 1-x^2 \end{pmatrix} \overset{\text{D9}}{=} -\det(1)\cdot\det\begin{pmatrix} x-1 & 1-x \\ 1-x & 1-x^2 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{D4}}{=} -1\cdot(x-1)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{D7}}{=} -1\cdot(x-1)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -x-2 \end{pmatrix} \overset{\text{D8}}{=} (x-1)^2(x+2)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} \\
\overset{\text{D7}}{=}\;& \det\begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ 0 & \frac{-a^2b^2}{a^2+1}+b^2+1 & \frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc \\ 0 & \frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc & \frac{-a^2c^2}{a^2+1}+c^2+1 \end{pmatrix} \\
\overset{\text{D9}}{=}\;& (a^2+1)\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{-a^2b^2}{a^2+1}+b^2+1 & \frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc \\ \frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc & \frac{-a^2c^2}{a^2+1}+c^2+1 \end{pmatrix} \\
\overset{(*)}{=}\;& (a^2+1)\left[\left(\frac{-a^2b^2}{a^2+1}+b^2+1\right)\left(\frac{-a^2c^2}{a^2+1}+c^2+1\right)\right. \\
& \left. -\left(\frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc\right)\left(\frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc\right)\right] \\
=\;& a^2+b^2+c^2+1\,,
\end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(*)$ das Ergebnis aus Beispiel 3.1.4 b) benutzt wurde.

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_11

3.
$$\det\left(\begin{array}{cc|cc} \sin\alpha & \cos\alpha & & \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & & * \\ \hline & & 1 & \\ & 0 & & \begin{array}{|cc} a & b \\ -b & a \end{array} \end{array}\right)$$
$$\begin{aligned} &\overset{D9}{=} \det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}\cdot\det(1)\cdot\det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cdot 1\cdot(a^2+b^2) \\ &= a^2+b^2\,. \end{aligned}$$

4. Sei $A=(a_{ij})$ und $B=((-1)^{i+j}a_{ij})$. Ist m die große gerade Zahl $\leqslant n$, so gilt:
$$\begin{aligned} \det B &= \det(S_m(-1)\cdot S_{m-2}(-1)\cdot\ldots\cdot S_4(-1)\cdot S_2(-1)\cdot A \\ &\quad \cdot S_2(-1)\cdot S_4(-1)\cdot\ldots\cdot S_m(-1)) \\ &\overset{D11}{=} (-1)^m\cdot\det A=\det A\,, \end{aligned}$$
weil m gerade ist. In dieser Rechnung bezeichnet $S_i(-1)$ dieselbe Elementarmatrix wie in 2.7.1.

5. a) A sei eine alternierende quadratische Matrix mit ungerader Zeilen- bzw. Spaltenanzahl ber einen Körper mit Charakteristik $\neq 2$. Nach Satz 3.2.6 gilt
$$\det(A)=\det({}^tA)=\det(-A)\overset{D4}{=}(-1)^n\cdot\det(A)=-\det(A)\,,$$
weil n ungerade ist. Aus $\det A=-\det A$ folgt $\det A=0$. Bei dieser letzten Schlussfolgerung geht ein, dass der zugrundeliegende Körper Charakteristik $\neq 2$ hat. In einen Körper der Charakeristik 2 gilt, wie den meisten unserer LeserInnen sicher bekannt ist, $x=-x$ für jedes Körperelement x.

b) Nach Beispiel 3.1.4 c) ist die Aussage für $n=2$ und $n=4$ klar. Wir beweisen den Rest per Induktion nach n. Sei also die Matrix
$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & \cdots & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$
gegeben. O.B.d.A. ist $a_{12}\neq 0$, denn sonst lässt sich durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen (beide sind notwendig, um die Nullen in der Diagonale zu erhalten) $a_{12}\neq 0$ erreichen, falls ein $a_{1i}\neq 0$ existiert. Gilt $a_{1i}=0$ für alle i, so ist $\det A=0$, und die Behauptung wäre sicher wahr. Wir unterteilen

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cline{3-5} \vdots & -a_{23} & 0 & & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -* & & 0 \end{array} \right),$$

und addieren zunächst für $i = 3, \ldots, n$ zu der i-ten Zeile das $\left(\frac{-a_{1i}}{a_{12}}\right)$-fache der zweiten Zeile. Das Ergebnis sieht so aus:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cline{3-5} 0 & -a_{23} & & & \\ \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & -a_{2n} & & & \end{array} \right),$$

wobei in B an der Stelle ij der Eintrag

$$-\frac{a_{1i}}{a_{12}} \cdot a_{2j} + a_{ij}$$

und speziell für $i = j$ gerade

$$-\frac{a_{1i}}{a_{12}} \cdot a_{2i}$$

steht. Nun addieren wir für $i = 3, \ldots, n$ das $\left(\frac{a_{2i}}{a_{12}}\right)$-fache der ersten Zeile zur i-ten Zeile und erhalten

$$A'' = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B' & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right),$$

wobei in B' an der Stelle ij der Eintrag

$$-\frac{a_{1i}}{a_{12}} \cdot a_{2j} + a_{ij} + \frac{a_{2i}}{a_{12}} \cdot a_{1j} \qquad \circledast$$

und für $i = j$ eben

$$-\frac{a_{1i} \cdot a_{2i}}{a_{12}} + \frac{a_{2i} \cdot a_{1i}}{a_{12}} = 0$$

steht. B' ist alternierend, und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden. Damit folgt $\det B' = \tilde{Q}^2$ mit einem Polynom $\tilde{Q}$. Es ist jedoch zu beachten, dass es sich hierbei um ein Polynom in den Termen aus $\circledast$ und nicht in den a_{ij} handelt. Zunächst gilt

$$\det A = \det A'' \overset{\text{D9}}{=} a_{12}^2 \cdot \tilde{Q}^2 = (a_{12} \cdot \tilde{Q})^2 .$$

Wir definieren $Q := a_{12} \cdot \tilde{Q}$, womit $\det A = Q^2$ gilt.

Aus der Ergänzungsaufgabe E2 folgt, dass $\det A = Q^2$ ein Polynom in den a_{ij} ist und keine Quotienten wie in ⊛ enthält.

Damit ist $\det A$ also ein Polynom in den a_{ij}. Es könnte jedoch sein, dass Q Quotiententerme enthält, die sich beim Quadrieren aufheben. Nehmen wir an, es existiert in einigen Termen ein Nenner $d \neq 1$. Alle Terme, deren Nenner Teiler von d sind, fassen wir zusammen zum Bruch $\frac{c}{d}$. Nach eventuellem Kürzen ergibt sich $\frac{\tilde{c}}{\tilde{d}}$ mit teilerfremden Zahlen $\tilde{c}$ und $\tilde{d}$. O.B.d.A. lässt sich $\tilde{d} \neq 1$ annehmen, da ansonsten $\frac{\tilde{c}}{\tilde{d}} \in \mathbb{Z}$ gilt, und wir damit fertig sind. Die Summe der restlichen Terme wird einfach mit b bezeichnet. Dann gilt

$$Q = b + \frac{\tilde{c}}{\tilde{d}},$$

woraus folgt

$$Q^2 = b^2 + 2b \cdot \frac{\tilde{c}}{\tilde{d}} + \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{d}^2}.$$

Hiermit hätte auch Q^2 einen Term mit Nenner $\tilde{d}^2 \neq 1$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Somit ist Q ein Polynom in den a_{ij}, und es gilt $\det A = Q^2$.

6. i) $\Leftrightarrow$ ii): Es sei V der Vektorraum der $f \in K[t]$ mit $\deg f < m+n$. Dann sind die Zeilen der Resultantenmatrix gerade die Komponenten der Vektoren

$$f, tf, \ldots, t^{n-1}f, g, tg, \ldots, t^{m-1}g \qquad (*)$$

bezüglich der Basis

$$1, t, \ldots, t^{m+n-1} \quad \text{von } V\,.$$

Die lineare Abhängigkeit der Polynome in $(*)$ ist also gleichbedeutend mit $\mathrm{Res}_{f,g} = 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii): Die lineare Abhängigkeit der Polynome

$$f, tf, \ldots, t^{n-1}f, g, tg, \ldots, t^{m-1}g$$

ist gleichbedeutend mit der Existenz von $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1} \in K$, die nicht alle gleich 0 sind, so dass

$$\mu_0 f + \mu_1 tf + \ldots + \mu_{n-1}t^{n-1}f + \lambda_0 g + \lambda_1 tg + \ldots + \lambda_{m-1}t^{m-1}g = 0$$

gilt. Da $\deg t^i f < \deg t^j f$ und $\deg t^i g < \deg t^j g$ für $i < j$ gilt, sind $f, tf, \ldots, t^{n-1}f$ linear unabhängig in $K[t]$ und $g, tg, \ldots, t^{m-1}g$ linear unabhängig in $K[t]$. Damit existieren mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ sowie mindestens ein $\mu_j \neq 0$. Mit den Definitionen

$$p := \mu_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \mu_1 t + \mu_0 \quad \text{und} \quad q := -\lambda_{m-1}t^{m-1} - \ldots - \lambda_1 t - \lambda_0$$

sind wir fertig, denn nach den vorausgegangenen Definitionen erfüllen p und q die verlangten Bedingungen.

iii) $\Rightarrow$ ii): Es seien

$$p = \mu_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \mu_1 t + \mu_0 \quad \text{und} \quad q = \lambda_{m-1}t^{m-1} + \ldots + \lambda_1 t + \lambda_0$$

mit $pf = qg$ gegeben. Da $p, q \neq 0$ gilt, existieren ein $\mu_i \neq 0$ sowie ein $\lambda_j \neq 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= pf - qg \\ &= \mu_0 f + \mu_1 tf + \ldots + \mu_{n-1}t^{n-1}f - \lambda_0 g - \lambda_1 tg - \ldots - \lambda_{m-1}t^{m-1}g\,, \end{aligned}$$

also sind $f, tf, \ldots t^{n-1}f, g, tg, \ldots, t^{m-1}g$ linear abhängig.

Wir zeigen nun noch die Äquivalenz der Aussagen iii) und iv). Die hierbei benutzte Teilbarkeitstheorie von Polynomen findet sich z.B. in [Ku1]. Genauere Hinweise geben wir im Verlauf der Lösung.

iii) $\Rightarrow$ iv): Wir zerlegen die Polynome p, f, q, g in Primfaktoren

$$p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k\,, \quad f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r\,,$$
$$q = q_1 \cdot \ldots \cdot q_l \quad \text{und} \quad g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_s\,;$$

dann schreibt sich die Gleichung $pf = qg$ als

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_l \cdot g_1 \cdot \ldots \cdot g_s\,,$$

wobei auch Faktoren vom Grad 0 auftreten können. Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung (vgl. [Ku1], Satz 4.21) folgt, dass bis auf Einheiten die $g_1, \ldots, g_s$ auch auf der linken Seite vorkommen. Da aber $\deg p < \deg g$ ist, muss mindestens ein g_i vom Grad $\geqslant 1$ bis auf eine Einheit eines der f_i und damit ein Teiler von f sein.

iv) $\Rightarrow$ iii): Ist h ein gemeinsamer nichtkonstanter Teiler von f und g, so gilt

$$f = f_1 \cdot h \quad \text{und} \quad g = g_1 \cdot h \quad \text{mit } f_1, g_1 \in K[t]\,.$$

Da h nicht konstant ist, gilt $\deg f_1 \leqslant m-1$ und $\deg g_1 \leqslant n-1$. Wir definieren daher

$$p := g_1 \quad \text{und} \quad q := f_1\,.$$

Schaut man sich die obigen Beweise genau an, so stellt man fest, dass die Behauptungen im wesentlichen auch dann gelten, wenn der Körper K durch einen faktoriellen Ring (siehe [Ku1], 4.III) ersetzt wird, vgl. hierzu auch Aufgabe 7 zu 3.2. Dies ermöglicht es, die Resultante auch von Polynomen mehrerer Veränderlicher zu bestimmen, vergleiche hierzu etwa [Fi2], Anhang 1.

Ein wichtiger Spezialfall der Resultante ist die Diskriminante, die definiert ist durch $D_f := \mathrm{Res}_{f,f'}$, wobei f' die formale Ableitung von f ist (zum Begriff „formale Ableitung“ vergleiche die Lösung von Aufgabe 4 zu Abschnitt 1.3). Auf diese Art kann geprüft werden, ob ein Polynom einen mehrfachen Primfaktor besitzt, denn dies ist äquivalent zu $D_f = 0$. Vergleiche auch Ergänzungsaufgabe E1 zu diesem Abschnitt und Ergänzungsaufgabe E1 zu Abschnitt 3.2.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. i) $\Rightarrow$ ii): Hat f eine mehrfache Nullstelle, so existieren ein $\lambda \in K$ und ein $g \in K[t] \smallsetminus 0$ mit $f = (t-\lambda)^2 \cdot g$. Dann aber gilt $f' = 2(t-\lambda)\cdot g + (t-\lambda)^2 \cdot g'$, also $f'(\lambda) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Es sei $\lambda \in K$ die gemeinsame Nullstelle von f und f'. Aus Lemma 1.3.8 folgt die Existenz eines eindeutigen $g \in K[t] \smallsetminus 0$ mit $f = (t-\lambda)\cdot g$. Dann gilt $f' = g + (t-\lambda)\cdot g'$, und wegen $f'(\lambda) = 0$ ist

$$0 = g(\lambda) + (\lambda - \lambda)\cdot g'(\lambda) = g(\lambda)\,.$$

Wiederum nach Lemma 1.3.8 existiert ein $\tilde{g} \in K[t] \smallsetminus 0$ mit $g = (t-\lambda)\cdot \tilde{g}$, also $f = (t-\lambda)^2 \cdot \tilde{g}$, und f hat eine mehrfache Nullstelle.

Nun widmen wir uns der dritten Eigenschaft. Nach Aufgabe 6 gilt $D_f = 0$ genau dann, wenn f und f' einen gemeinsamen nichtkonstanten Teiler $h \in \mathbb{C}[t]$ haben, d.h.

$$f = h \cdot g \quad \text{und} \quad f' = h \cdot \tilde{g}\,.$$

Da jedes Polynom vom Grad $\geqslant 1$ über den komplexen Zahlen nach dem Fundamentalsatz der Algebra (vgl. 1.3.9) mindestens eine Nullstelle hat, folgt die Äquivalenz von ii) und iii).

E2. Bei dieser Lösung benutzen wir die Bezeichnung

$$a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e_j\,,$$

wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des K^n darstellt. Im Folgenden wenden wir (D1) a) und b) an und erhalten

$$\begin{aligned}
\det A &= \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} a_{11}e_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \ldots + \det\begin{pmatrix} a_{1n}e_n \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \ldots + a_{1n} \cdot \det \begin{pmatrix} e_n \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \quad \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Führen wir diesen Schritt für jede Zeile durch, so erhalten wir

$$
\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix} \qquad \circledast
$$

Wenn wir zeigen können, dass $\det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix} \in \{-1, 0, 1\}$ gilt, sind wir fertig.

Nehmen wir daher an, dass die Determinante ungleich null ist. Dies ist gleichbedeutend mit der linearen Unabhängigkeit von $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$. Aufgrund von $\dim K^n = n$ bedeutet dies, dass $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$ bis auf ihre Vorzeichen die kanonische Basis von K^n bilden. Durch l-maligen Zeilenvertausch in der Matrix $\begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}$ können wir diese somit in die Einheitsmatrix E_n überführen, für die $\det E_n = 1$ gilt. Mit Hilfe von (D6) folgt daher

$$
\det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix} = (-1)^l,
$$

daher können wir $\circledast$ umformulieren zu

$$
\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} (-1)^l \cdot a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} ,
$$

womit wir fertig sind.

Bemerkung: Ähnliche Überlegungen befinden sich allgemeiner formuliert in Abschnitt 3.2.

3.2 Existenz und Eindeutigkeit

1. τ_{ij} sei die Transposition, die i und j vertauscht. Dann gilt $\sigma = \tau_{2,4} \circ \tau_{1,5}$.

2. Die Vandermonde-Determinante ist eine klassische Aufgabe, die auch einige Anwendungen bietet, siehe z.B. Aufgabe 6 zu 1.3. Diese Determinante findet sich in fast jedem Buch über Determinanten oder lineare Algebra; ihre Lösung ist daher in verschiedenen Exaktheitsstufen an vielen Stellen nachzulesen. Wir führen eine ganz ausführliche Lösung vor, die für jedeN nachvollziehbar sein sollte. Zu zeigen ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)\,.$$

Systematisch betrachtet steht also an der Stelle (i, j) der Matrix der Eintrag x_i^{j-1}. Die x_i stehen für Einträge aus einem beliebigen Körper (allgemeiner: aus einem kommutativen Ring; für diese lassen sich Determinanten- und Matrizentheorien entwickeln, vgl. Aufgabe 7). Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 1$ lautet:

$$\det(1) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 1} (x_j - x_i) = 1\,,$$

weil es sich um das „leere“ Produkt handelt, dessen Wert als 1 definiert ist. Angenommen, die Aussage sei für n bereits bewiesen. Wir zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gelten muss. Wir müssen

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

berechnen. Durch Addieren des $(-x_{n+1})$-fachen der k-ten Spalte zur $(k+1)$-ten Spalte (k durchläuft hier 1 bis n) erhalten wir

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_{n+1} & x_1(x_1 - x_{n+1}) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_{n+1}) & x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_{n+1} & x_n(x_n - x_{n+1}) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_{n+1}) & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun können wir durch Zeilenvertauschungen die letzte Zeile in die erste Zeile bringen und die Eigenschaften D9 sowie D1 b) verwenden:

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^n \cdot \underbrace{(x_1 - x_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n+1})}_{\prod\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{n+1})} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)\,,
\end{aligned}
$$

wobei an der durch $(*)$ markierten Stelle die Induktionsannahme eingeht.

3. Die Vandermonde-Determinante, mit der wir uns in der letzten Aufgabe beschäftigt haben, liefert die Idee: Wir wählen die unendliche Teilmenge

$$M := \{(1, k, k^2, \ldots, k^{n-1}) : \; k \in \mathbb{N}\}$$

des $\mathbb{R}^n$. Für paarweise verschiedene $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ sind die Vektoren

$$(1, k_1, \ldots, k_1^{n-1}), \ldots, (1, k_n, \ldots, k_n^{n-1})$$

aus M sind linear unabhängig, weil die Determinante der Matrix, deren Zeilen von den Vektoren gebildet werden, gerade

$$\det \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \cdots & k_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k_n & k_n^2 & \cdots & k_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (k_j - k_i)$$

beträgt. Dieses Produkt kann jedoch nie null sein, weil die k_i alle verschieden sind.

4. Wir zeigen $\det(a_{ij}) = \det((-1)^{i+j} a_{ij})$ mit Hilfe der Formel von Leibniz, die die Determinante über

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

sehr formell definiert, was für Rechnungen und Beweise zunächst sehr unhandlich erscheint. Hier gilt

$$
\begin{aligned}
\det((-1)^{i+j} a_{ij}) &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) (-1)^{1+\sigma(1)} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot (-1)^{n+\sigma(n)} a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) (-1)^{\sum_i \sigma(i) + \sum_i i} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \,.
\end{aligned}
$$

Da $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ist, ist diese Summe gleich

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n(n+1)} \cdot \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \\
&= (-1)^{n(n+1)} \cdot \det(a_{ij})\,.
\end{aligned}
$$

$n(n+1)$ ist jedoch stets eine gerade Zahl; damit ist die Behauptung gezeigt.

5. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n; k)$.

a) Wenn wir $\det A$ mit Hilfe der Leibniz-Formel berechnen, erhalten wir $n!$ Summanden, die aus jeweils $n+1$ Faktoren bestehen. Das ergibt insgesamt $(n+1)n! = (n+1)!$ Multiplikationen und $n!$ Additionen. Wenn wir jedoch A erst mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform bringen und die Determinante durch Multiplikation der Diagonalenelemente berechnen, benötigen wir folgende Rechenoperationen:

Anzahl der Additionen	Anzahl der Multiplikationen	
$n(n-1)$	$n(n-1)$	erste Spalte
$(n-1)(n-2)$	$(n-1)(n-2)$	zweite Spalte
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	Zeilenstufenform
0	n	Diagonalelemente

Das ergibt
$$n + \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n^2+2)}{3} \quad \text{Multiplikationen}$$
und
$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n^2-1)}{3} \quad \text{Additionen}.$$
Dabei sollte jedoch beachtet werden, dass wir hier das Vorzeichen, das als Signum der Permutation bei Leibniz auftritt, als Rechenoperation mitgezählt haben. Unter diesen Voraussetzungen ist die Gauß-Methode stets günstiger.

Zählt man das Vorzeichen nicht als Rechenoperation mit (in der Praxis ist ein Vorzeichenwechsel ja auch nicht sehr mühsam), so muss man, wenn man die Leibniz-Formel anwenden möchte, nur $n \cdot n!$ Multiplikationen und $n!$ Additionen durchführen. Damit hat man insgesamt folgende Anzahlen von Rechnungen zu leisten:
$$\frac{n(n^2-1)}{3} + \frac{n(n^2+2)}{3} = \frac{n(2n^2+1)}{3} \quad \text{(Gauß)}$$
$$n \cdot n! + n! = n!(n+1) = (n+1)! \quad \text{(Leibniz)}$$
Demnach wäre es für $n = 2$ egal, welches Verfahren man benutzt. Für $n = 3$ macht die Wahl keinen sehr großen Unterschied (19 Rechenoperationen nach Gauß gegenber 24 nach Leibniz), für $n \geqslant 4$ wird der Aufwand tatsächlich sehr unterschiedlich, das Gauß-Verfahren gewinnt mit wachsendem n immer mehr an Vorteil. Diese Erkenntnisse entsprechen ganz der bewährten Rechenpraxis, für $n = 2$ und $n = 3$ die Formel von Leibniz zu verwenden (siehe 3.2.6), und

für größere n die Matrix mittels des Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform zu bringen.
b) 48 Stunden entsprechen $1.728 \cdot 10^{11}$ Mikrosekunden. In diesem Zeitraum sind also $5 \cdot 1.728 \cdot 10^{11} = 8.64 \cdot 10^{11}$ Rechenoperationen möglich. Mit der Formel von Leibniz kann die Determinante einer (13×13)-Matrix unter den gegebenen Umstnden in zwei Tagen ausgerechnet werden. Mit Hilfe der Vorgehensweise nach Gauß ist jedoch die Determinante einer Matrix mit bis zu 10 902 Zeilen und Spalten zu kalkulieren. Das belegt eindrucksvoll, welche Vorteile dieses Verfahren bei großen Matrizen bietet.

Hinweis. Bei der Anzahl an Rechenschritten in Algorithmen spricht man von der *Effizienz* oder der *Ordnung* des Algorithmen, vgl. [S4], Abschnitt 1.5.

6. D4:

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) &= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\lambda a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\lambda a_{n\sigma(n)}\\ &= \lambda^n\cdot\sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\ &= \lambda^n\cdot\det A\,.\end{aligned}$$

D5: Ist die i-te Zeile von A gleich null, d.h. $a_{i1} = \ldots = a_{in} = 0$, so gilt

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a_{i\sigma(i)}}_{=0}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} = 0\,.$$

D6: Ohne Einschränkung sei B aus A durch Vertauschung der ersten und zweiten Zeile entstanden, d.h. $b_{1j} = a_{2j}$ und $b_{2j} = a_{1j}$ für $j = 1,\ldots,n$ sowie $b_{ij} = a_{ij}$ für $i \neq 1,2$. Es gilt

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\cdot b_{3\sigma(3)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{2\sigma(1)}\cdot a_{1\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{2\sigma\tau(2)}\cdot a_{1\sigma\tau(1)}\cdot a_{3\sigma\tau(3)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma\tau(n)}\,,\end{aligned}$$

wobei τ die Transposition ist, die 1 und 2 vertauscht. Bezeichnen wir $\rho := \sigma\circ\tau$ und benutzen, dass die Abbildung $\mathbf{S}_n \to \mathbf{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma\circ\tau$, bijektiv ist, so folgt mit $\operatorname{sign}(\sigma) = -\operatorname{sign}(\rho)$

$$\det B = -\sum_{\rho\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\rho)\cdot a_{1\rho(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\rho(n)} = -\det A\,.$$

D7: O.E. sei B aus A durch Addition des λ-fachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile entstanden, d.h. $b_{1j} = a_{1j} + \lambda a_{2j}$ für $j = 1,\ldots,n$ und $b_{ij} = a_{ij}$ für $i \neq 1$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot (a_{1\sigma(1)}+\lambda a_{2\sigma(1)})\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\
&\quad +\lambda \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{2\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\,.
\end{aligned}$$

Die zweite Summe ist null, weil sie die Determinante einer Matrix ist, die zwei gleiche Zeilen hat, siehe auch D2 in 3.2.5.

D8: A sei eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij}=0$ für $i>j$. Es gilt

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\,.$$

In jedem Summanden ist mindestens ein Faktor null, falls $\sigma\neq\mathrm{id}$ ist, da in diesem Fall mindestens ein i mit $i>\sigma(i)$ existiert. Dann gilt für die Determinante von A

$$\det A = \operatorname{sign}(\mathrm{id})\cdot a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}\,,$$

sie entspricht also dem Produkt der Diagonaleneintrge.

D9: Mit einer analogen Idee wie im Beweis von D8 lässt sich auch diese Aussage zeigen. Wir führen dies aus, da wir in der Lösung zu Aufgabe 7 darauf zurückgreifen werden.

Sei $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}(n\times n;K)$ gegeben durch

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & C\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

mit

$$A_1=\left(a_{ij}^{(1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\,,\quad A_2=\left(a_{ij}^{(2)}\right)_{k+1\leqslant i,j\leqslant n}\quad C=(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ k+1\leqslant j\leqslant n}}\,.$$

Für die Determinante gilt

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\,.$$

Gilt $k+1\leqslant i\leqslant n$ sowie $1\leqslant j=\sigma(i)\leqslant k$ für eines der a_{ij}, so ist $a_{ij}=0$, d.h. jeder Summand, der ein solches a_{ij} enthält, verschwindet und muss bei der Bestimmung der Determinante nicht berücksichtigt werden. In jedem weiteren Summanden ist, falls $k+1\leqslant i\leqslant n$ gilt, $\sigma(i)\in\{k+1,\ldots,n\}$, d.h. $a_{i\sigma(i)}=a^{(2)}_{i\sigma(i)}$. (Man beachte, dass ein solcher Summand trotzdem gleich null sein kann, da nicht notwendig alle Einträge der Matrix A_2 von null verschieden sein müssen.) In diesem Summanden gilt dann jedoch aufgrund der Bijektivität von σ für alle $1\leqslant i\leqslant k$

gerade $a_{i\sigma(i)} = a^{(1)}_{i\sigma(i)}$. Bezeichnen wir die Menge aller Permutationen in $\mathbf{S}_n$, die diese Voraussetzung erfüllen, d.h. die Mengen $\{1,\ldots,k\}$ sowie $\{k+1,\ldots,n\}$ invariant lassen, mit $\mathbf{S}$, so folgt

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}} \operatorname{sign}(\sigma) a^{(1)}_{1\sigma(1)} \cdot\ldots\cdot a^{(1)}_{k\sigma(k)} \cdot a^{(2)}_{k+1\sigma(k+1)} \cdot\ldots\cdot a^{(2)}_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\substack{\rho_1\in\mathbf{S}_k \\ \rho_2\in\mathbf{S}_{n-k}}} \operatorname{sign}(\rho_1)\operatorname{sign}(\rho_2) a^{(1)}_{1\rho_1(1)} \cdot\ldots\cdot a^{(1)}_{k\rho_1(k)} \cdot a^{(2)}_{k+1\rho_2(k+1)} \cdot\ldots\cdot a^{(2)}_{n\rho_2(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_k} \operatorname{sign}(\sigma) a^{(1)}_{1\sigma(1)} \cdot\ldots\cdot a^{(1)}_{k\sigma(k)} \cdot \sum_{\rho\in\mathbf{S}_{n-k}} \operatorname{sign}(\rho) a^{(2)}_{k+1\rho(k+1)} \cdot\ldots\cdot a^{(2)}_{n\rho(n)} \\
&= \det A_1 \cdot \det A_2\,.
\end{aligned}$$

D10: O.E. kann man die Matrix mittels Gaußverfahren auf Zeilenstufenform bringen. Das verändert die Determinante nicht. D8 liefert die Behauptung.

D11: Wir betrachten für zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zunächst $\det(A \cdot B)$. Es gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{pmatrix}.$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
\det(A\cdot B) &= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}b_{j_1\sigma(1)} \cdot\ldots\cdot \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}b_{j_n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}b_{j_1\sigma(1)} \cdot\ldots\cdot a_{nj_n}b_{j_n\sigma(n)}\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Existieren in einem Summanden einer Permutation σ in $(*)$ $k \neq l$ mit $j_k = j_l$, so gibt es eine eindeutige Permutation $\sigma' \in \mathbf{S}_n$ mit $\sigma'(k) = \sigma(l)$ sowie $\sigma'(l) = \sigma(k)$ und $\sigma'(i) = \sigma(i)$ für $i \neq k,l$. Daraus folgt $\operatorname{sign}(\sigma') = -\operatorname{sign}(\sigma)$ und

$$\operatorname{sign}(\sigma')\cdot a_{1j_1}b_{j_1\sigma'(1)} \cdot\ldots\cdot a_{nj_n}b_{j_n\sigma'(n)} + \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1j_1}b_{j_1\sigma(1)} \cdot\ldots\cdot a_{nj_n}b_{j_n\sigma(n)} = 0\,.$$

Also bleiben in $(*)$ nur Summanden übrig, für die $j_k \neq j_l$ für alle $k \neq l$ gilt. Damit existiert eine eindeutige Permutation $\bar\sigma \in \mathbf{S}_n$ mit $j_k = \bar\sigma(k)$ für alle k, d.h. $(*)$ wird zu

$$\det(A\cdot B) = \sum_{\sigma,\bar\sigma\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\bar\sigma(1)}b_{\bar\sigma(1)\sigma(1)} \cdot\ldots\cdot a_{n\bar\sigma(n)}b_{\bar\sigma(n)\sigma(n)}\,. \qquad (**)$$

Nun wenden wir uns dem Produkt

$$\begin{aligned}
\det A \cdot \det B &= \sum_{\bar{\sigma}\in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\bar{\sigma}) \cdot a_{1\bar{\sigma}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\bar{\sigma}(n)} \\
&\quad \cdot \sum_{\pi\in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \cdot b_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\bar{\sigma},\pi\in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\bar{\sigma}) \cdot \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{1\bar{\sigma}(1)} b_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\bar{\sigma}(n)} b_{n\pi(n)}
\end{aligned} \qquad (***)$$

zu. Zu jedem $i \in \{1,\ldots,n\}$ existiert ein eindeutiges $j \in \{1,\ldots,n\}$ mit $j = \bar{\sigma}(i)$. Daher können wir $(***)$ mit Hilfe der Kommutativität der Faktoren umformen zu

$$\det A \cdot \det B = \sum_{\bar{\sigma},\pi\in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\bar{\sigma}) \cdot \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{1\bar{\sigma}(1)} b_{\bar{\sigma}(1)\pi(\bar{\sigma}(1))} \cdot \ldots \cdot a_{n\bar{\sigma}(n)} b_{\bar{\sigma}(n)\pi(\bar{\sigma}(n))} \, .$$

Die Abbildung $\sigma := \pi \circ \bar{\sigma}$ ist nach Satz 3.2.3 eine Permutation mit $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\bar{\sigma}) \cdot \operatorname{sign}(\pi)$, und aufgrund der Bijektivität der Abbildung $\mathbf{S}_n \to \mathbf{S}_n$, $\pi \mapsto \pi \circ \bar{\sigma}$, folgt

$$\begin{aligned}
\det A \cdot \det B &= \sum_{\sigma,\bar{\sigma}\in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\bar{\sigma}(1)} b_{\bar{\sigma}(1)\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\bar{\sigma}(n)} b_{\bar{\sigma}(n)\sigma(n)} \\
&\overset{(**)}{=} \det(A \cdot B)\, .
\end{aligned}$$

7. In dieser Aufgabe geht es darum, zu ergründen, ob Determinantentheorie auch über kommutativen Ringen entwickelt werden können. Das wird uns spätestens in Kapitel 4 interessieren, wenn wir das charakteristische Polynom einer Matrix $M \in \mathrm{M}(n;K)$ durch $P_M(t) = \det(M - t \cdot E_n)$ definieren. Die Einträge der Matrix $M - t \cdot E_n$ sind Elemente des Polynomringes $K[t]$.

Die Hinweise zu Beweisen und Rechnungen beziehen sich im Folgenden stets auf die Lösung von Aufgabe 6.

Die Eigenschaft D4 gilt auch in einem kommutativen Ring. In der Lösung von Aufgabe 6 wurden nur Umformungen gemacht, die auch in einem Ring möglich sind.

D5 ist richtig, da $0 \cdot r = 0$ in jedem Ring R für alle $r \in R$ gilt.

D6 ist ebenfalls richtig, da im Beweis nur Gruppeneigenschaften bzgl. der Addition sowie die Kommutativität von R benutzt werden.

Auch D7 gilt. Die Gleichheit folgt aus der Eigenschaft

$$\det \begin{pmatrix} a_i + \lambda a_j \\ a_j \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a_j \\ a_j \end{pmatrix},$$

wobei nur Gruppeneigenschaften bzgl. der Addition verwendet werden.

Eigenschaft D8 gilt aus dem gleichen Grund wie Eigenschaft D5.

Die Gültigkeit von D9 folgt aus dem Beweis von D9 in Aufgabe 6, da sämtliche Rechenschritte auch in kommutativen Ringen ausgeführt werden können.

Der Begriff *Rang* ist über $\dim \operatorname{Im} A$ bzw. lineare Abhängigkeit definiert (vgl. 2.2.1). Dies macht jedoch in einem Modul über einem Ring keinen Sinn, daher gibt es in diesem Fall kein äquivalent zur Aussage D10.

Zur Gültigkeit von D11 vgl. die Lösung zur Aufgabe 6. Die dort durchgeführte Rechnung kann auch in einem kommutativen Ring durchgeführt werden.

Die Gültigkeit der Aussage D11 hat eine interessante Konsequenz, denn ist R ein kommutativer Ring und $A \in \mathrm{M}(n \times n; R)$, so gilt

$$A \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow \det A \in R \text{ ist invertierbar},$$

d.h. es existiert ein $r \in R$ mit $\det A \cdot r = 1$. In einem kommutativen Ring ist im Allgemeinen nicht jedes Element aus $R \smallsetminus 0$ invertierbar, und $\det A \neq 0$ bedeutet dann nicht notwendig, dass A invertierbar ist. Die invertierbaren Elemente eines Rings heißen *Einheiten* und bilden bzgl. der Multiplikation eine Gruppe, die *Einheitengruppe* von R, vgl. [W], 3.1.2 und [Ku1], §4.I.

Zur Theorie von Determinanten über kommutativen Ringen vgl. [L], Chapter XIII, §4. Wir empfehlen die folgende

Ergänzungsaufgabe. Bestimmen Sie für den Ring $R := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ die Einheitengruppe sowie die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathrm{M}(2 \times 2; R)$.

Die Lösung befindet sich am Ende dieses Abschnittes.

8. Wir wählen einen einzelnen Summanden

$$a := \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

von

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \,.$$

Von Bedeutung sind nur die $\sigma \in \mathbf{S}_n$, für die kein ungerader *Zykel* existiert, d.h. keine ungerade Zahl $1 \leqslant j < n$ mit $\{i_1, \ldots, i_j\} = \{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_j)\}$. Wir betrachten $\{i_1, \ldots, i_j\} = \{1, \ldots, j\}$; der allgemeine Fall verläuft analog, er ist nur schwerer zu notieren. Nach Aufgabe 5 a) aus 3.1 gilt dann

$$\sum_{\rho \in \mathbf{S}_j} \operatorname{sign}(\rho) \cdot a_{1\rho(1)} \cdot \ldots \cdot a_{j\rho(j)} \cdot a_{j+1,l_1} \cdot \ldots \cdot a_{n,l_{n-j}} = 0$$

für $l_1, \ldots, l_{n-j}$ fest. Die Permutation σ enthält also o.B.d.A. höchstens gerade Zykel.

Wir zerlegen nun die Menge der Paare $(i, \sigma(i))$ aus a in zwei disjunkte Mengen M_1 und M_2, so dass in jeder dieser Mengen alle Zahlen $1 \leqslant j \leqslant n$ genau einmal vorkommen. Das geht so: Wir wählen das Paar $(1, \sigma(1))$ für M_1. Es existiert genau ein weiteres Paar (k_2,l_2) mit $k_2=\sigma(1)$, nämlich $(\sigma(1),\sigma(\sigma(1)))$. Dieses wählen wir für M_2. Gilt $l_2=1$, so starten wir unsere Überlegungen mit dem kleinsten i der verbleibenden Paare $(i,\sigma(i))$ erneut. Ansonsten gibt es genau ein weiteres Paar (k_3,l_3) mit $k_3=l_2$. Dieses wählen wir für M_1. Da σ keine ungeraden Zykel enthält, gilt $l_3\neq 1$. Also gibt es genau ein weiteres Paar (k_4,l_4) mit $k_4=l_3$. Dieses wählen wir für M_2. Gilt $l_4=1$, so beginnen wir unsere Überlegungen mit dem kleinsten i der verbleibenden $(i,\sigma(i))$ erneut. Ansonsten gibt es genau ein weiteres Paar (k_5,l_5) mit $k_5=l_4$. Fahren wir so fort, erhalten wir Mengen M_1 und M_2 von Paaren (k,l), so dass in jeder Menge jede Zahl $1\leqslant j\leqslant n$ in genau einem Paar vorkommt.

Es seien $(i_1,\sigma(i_1)),\ldots,(i_s,\sigma(i_s))$ die Paare $(i,\sigma(i))$ mit $i>\sigma(i)$. Da A schiefsymmetrisch ist, folgt

$$a_{i_1\sigma(i_1)}\cdot\ldots\cdot a_{i_s\sigma(i_s)}=(-1)^s\cdot a_{\sigma(i_1)i_1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(i_s)i_s}\,. \qquad (*)$$

Vertauschen wir die Elemente der Paare (k_i,l_i) in M_1 und M_2, so dass $k_i<l_i$ für alle i gilt, ordnen dann die Paare $(k_i^{(1)},l_i^{(1)})$ in M_1 und $(k_i^{(2)},l_i^{(2)})$ in M_2 für $1\leqslant i\leqslant m$ so an, dass $k_i^{(j)}<k_{i+1}^{(j)}$ für alle i und $j=1,2$ gilt, können wir den so geordneten Paaren eindeutig Permutationen $\sigma_1,\sigma_2\in\mathbf{S}_n$ zuordnen mit $\sigma_j(2i)>\sigma_j(2i-1)$ für $i=1,\ldots,m$ und $\sigma_j(2i+1)>\sigma_j(2i-1)$ für $i=1,\ldots,m-1$ sowie $j=1,2$.

Die Vertauschung der Einträge eines Paares (k,l) von σ_1 bzw. σ_2 entspricht nach 3.2.2 der Multiplikation mit einer Transpositon, und die Vertauschung zweier Paare (k_i,l_i) und (k_j,l_j) von σ_1 bzw. σ_2 der Multiplikation mit einer geraden Anzahl von Transpositionen. Daher gilt nach Korollar 1, Teil 2) in 3.2.3

$$\operatorname{sign}(\sigma)=(-1)^s\cdot\operatorname{sign}(\sigma_1)\cdot\operatorname{sign}(\sigma_2)\,,$$

und mit $(*)$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
a &= \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\
&= (-1)^s\operatorname{sign}(\sigma_1)\cdot\operatorname{sign}(\sigma_2)\cdot(-1)^s a_{\sigma_1(1)\sigma_1(2)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma_1(2m-1)\sigma_1(2m)}\cdot\\
&\quad\cdot a_{\sigma_2(1)\sigma_2(2)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma_2(2m-1)\sigma_2(2m)}\\
&= \operatorname{sign}(\sigma_1)\cdot\operatorname{sign}(\sigma_2)\cdot a_{\sigma_1(1)\sigma_1(2)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma_1(2m-1)\sigma_1(2m)}\cdot\\
&\quad\cdot a_{\sigma_2(1)\sigma_2(2)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma_2(2m-1)\sigma_2(2m)}\,. \qquad (**)
\end{aligned}$$

Damit gehört zu jedem Summanden a von $\det A$ ein eindeutiges Produkt $(**)$ mit $\sigma_j(2i)>\sigma_j(2i-1)$ für $i=1,\ldots,m$ als auch mit $\sigma_j(2i+1)>\sigma_j(2i-1)$ für $i=1,\ldots,m-1$ sowie $j=1,2$, wobei die Reihenfolge von σ_1 und σ_2 von Bedeutung ist. Es gibt genau $m!$ verschiedene Möglichkeiten, das Produkt

$$a_{\sigma_i(1)\sigma_i(2)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma_i(2m-1)\sigma_i(2m)}$$

für $i = 1,2$ umzuordnen, indem die zweite der obigen Bedingungen unberücksichtigt bleibt. Durch Berücksichtigung dieser zweiten Bedingung werden also gerade $m!$ Summanden von P zusammengefasst; dies erklärt den Faktor $\frac{1}{m!}$.

Um zu sehen, dass auch jeder Summand von $(P(a_{11},\dots,a_{nn}))^2$ in $\det A$ auftritt, kann eine ähnliche Konstruktion wie oben umgekehrt durchgeführt werden. Da die Reihenfolge im Produkt $(**)$ wichtig ist, ist die Konstruktion eindeutig. Insgesamt folgt

$$\det A = \left(\tfrac{1}{m!}P(a_{11},\dots,a_{nn})\right)^2 ,$$

also die Behauptung.

9. Sind $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ aus K^2 und L die Gerade durch v und w, so ist das gleichbedeutend mit

$$L = \left\{(x_1, x_2) \in K^2 : \text{ es gibt ein } \lambda \in K \text{ mit } x_i = v_i + \lambda(w_i - v_i) \text{ für } i = 1,2\right\}.$$

Andererseits berechnen wir

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 0 & w_1 - v_1 & w_2 - v_2 \\ 0 & x_1 - v_1 & x_2 - v_2 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} w_1 - v_1 & w_2 - v_2 \\ x_1 - v_1 & x_2 - v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn diese Determinante null sein soll, bedeutet das gerade, dass ein $\lambda \in K$ existiert mit

$$\lambda(w_i - v_i) = x_i - v_i \quad \text{für } i = 1,2 .$$

10.* Für zwei Matrizen $C, D \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ gilt nach D11

$$\det(C \cdot D) = \det C \cdot \det D = 1 \cdot 1 = 1 ,$$

also folgt $C \cdot D \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$, und die Multiplikation

$$\cdot : \ \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$$

ist wohldefiniert. Aus der Assoziativität der Matrizenmultiplikation folgt die Assoziativität der Multiplikation in $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$.

Ist $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$, so gilt $C^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$, da $\det C^{-1} = \frac{1}{\det C} = 1$.

Es bleibt, $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) = \mathrm{erz}(A,B)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

zu zeigen. Die Inklusion $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \supset \mathrm{erz}(A,B)$ ist dabei klar.

Der Beweis der verbleibenden Inklusion ist trickreich und wird an der entscheidenden Stelle durch eine Induktion über den Betrag eines der Matrizen-Einträge erfolgen. Zuvor betrachten wir jedoch Matrizen, die mindestens einen Eintrag mit 0 enthalten.

Im Folgenden bezeichnen wir für $m \in \mathbb{N} \smallsetminus 0$ mit A^m und B^m die Potenzen von A und B sowie mit A^{-m} die m-te Potenz der inversen Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von A, und $A^0 = E_2$. Für die Matrix B gilt $B^4 = E_2$, und für $m \in \mathbb{Z}$ gilt $A^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ist in einer Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Eintrag $a = 0$, so folgt aus $\det C = 1$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$. C hat in diesem Falle die Darstellung

$$C = B^3 \cdot A^m \quad \text{oder} \quad C = B \cdot A^{-m},$$

d.h. $C \in \operatorname{erz}(A,B)$.

Analog gilt für den Fall $d = 0$

$$C = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad C = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, woraus folgt

$$C = A^{-m} \cdot B \quad \text{oder} \quad C = A^m \cdot B^3 .$$

Genauso zeigt man, dass für $b = 0$ oder $c = 0$ die entsprechenden Matrizen in $\operatorname{erz}(A,B)$ liegen.

Jetzt kommt der schwierige Teil, denn wir müssen für eine beliebige Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$, in der auch alle Einträge ungleich 0 sein können, zeigen, dass sie in $\operatorname{erz}(A,B)$ liegt.

Dazu nehmen wir zunächst an, dass $|c| = \min\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$ gilt und führen Induktion über $|c|$.

Den Fall $|c| = 0$ haben wir bereits oben ausführlich behandelt. Ist $|c| = 1$, so hat C die Gestalt

$$C_\pm = \begin{pmatrix} a & b \\ \pm 1 & d \end{pmatrix},$$

und damit folgt für $c = 1$

$$A^{-a} \cdot C_+ = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_+ = \begin{pmatrix} 0 & -ad+b \\ 1 & d \end{pmatrix} =: D_1 ,$$

sowie für $c=-1$

$$A^a \cdot C_- = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_- = \begin{pmatrix} 0 & ad+b \\ -1 & d \end{pmatrix} =: D_{-1}\,,$$

und nach den obigen Ausführungen gilt $D_1, D_{-1} \in \operatorname{erz}(A,B)$. Durch Multiplikation von links mit der Inversen Matrix von A^{-a} erkennen wir daran, dass $C \in \operatorname{erz}(A,B)$ gilt.

Ist nun $|c| \geqslant 2$, so sind a und c wegen der Bedingung $ad-bc=1$ teilerfremd. Da c der vom Betrag her minimale Eintrag der Matrix C ist, existiert nach dem euklidischen Algorithmus (vgl. [B], Kapitel 2 sowie [W], Satz 1.6) ein $n \in \mathbb{N} \smallsetminus 0$ mit

$$|nc| < |a| < |(n+1)c|\,,$$

und damit existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$|mc+a| < |c|\,.$$

Nun multiplizieren wir die Matrix C von links mit der Matrix $B^3 \cdot A^m$ und erhalten

$$C' = \begin{pmatrix} -c & -d \\ mc+a & md+b \end{pmatrix}.$$

Auf die Matrix C' können wir wegen $|mc+a| < |c|$ die Induktionsvoraussetzung anwenden, also gilt $C' \in \operatorname{erz}(A,B)$, und damit folgt durch Linksmultiplikation mit der inversen Matrix von $B^3 \cdot A^m$ auch $C \in \operatorname{erz}(A,B)$.

Falls eines der anderen Matrixelemente minimal ist, verläuft der Beweis analog, so lauten die Multiplikationen im Induktionsschritt für minimales $|a|$

$$A^{-m} \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma+c & mb+d \\ -a & -b \end{pmatrix},$$

für minimales $|b|$

$$C \cdot B \cdot A^{-m} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a+mb \\ -d & c+md \end{pmatrix},$$

und für minimales $|d|$

$$B^3 \cdot A^m \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+mc & b+md \end{pmatrix}.$$

Damit ist alles gezeigt.

11. a) Ist gezeigt, dass $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{D}$ ein Untervektorraum ist, so ist $\mathscr{L}$ wegen $\mathscr{L} = b + \mathscr{L}_0$ ein affiner Unterraum.

Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathscr{L}_0$ ein Untervektorraum von $\mathscr{D}$ ist. Wegen $0 = A \cdot 0$ ist $\mathscr{L}_0$ nicht leer, das zeigt UV1. Sind $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{L}$ gegeben, so folgt mit der Linearität der Ableitung (vgl. Aufgabe 2 zu 2.2)

$$A \cdot (\lambda\varphi) = \lambda \cdot A \cdot \varphi = \lambda\varphi' = (\lambda\varphi)'$$

und $$A\cdot(\varphi_1+\varphi_2)=A\cdot\varphi_1+A\cdot\varphi_2=\varphi_1'+\varphi_2'=(\varphi_1+\varphi_2)',$$
das zeigt UV2 und UV3.

b) Um die Folgerung i) $\Rightarrow$ ii) zu zeigen, wählen wir ein beliebiges $x_0\in I$ und $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ mit
$$\varphi(x_0):=\lambda_1\varphi^{(1)}(x_0)+\ldots+\lambda_n\varphi^{(n)}(x_0)=0\,.$$
Eine Lösung dieser Gleichung ist sicherlich durch $\varphi=0$ gegeben. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz ([Fo2], §12, Satz 1) existiert jedoch genau eine Lösung φ zu x_0 und dem Anfangswert $c=0$. Damit gilt in $\mathscr{L}_0$
$$\lambda_1\varphi^{(1)}+\ldots+\lambda_n\varphi^{(n)}=\varphi=0\,.$$
Da $\varphi^{(1)},\ldots,\varphi^{(n)}$ nach Voraussetzung über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$, d.h. $\varphi^{(1)}(x_0),\ldots,\varphi^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

Wir haben mehr gezeigt als verlangt war, nämlich

ii)* Für beliebiges $x\in I$ sind die Vektoren $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{n)}(x)\in\mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Tatsächlich ist diese Aussage äquivalent zu den Aussagen i) bis iii), da die Implikation ii)* $\Rightarrow$ ii) trivial ist.

Die Folgerung ii) $\Rightarrow$ i) ist klar, denn wären $\varphi^{(1)},\ldots,\varphi^{(n)}$ linear abhängig, so gäbe es $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, die nicht alle gleich 0 sind, so dass
$$\lambda_1\varphi^{(1)}+\ldots+\lambda_n\varphi^{(n)}=0$$
die Nullfunktion ist. Insbesondere wäre für alle $x\in I$
$$\lambda_1\varphi^{(1)}(x)+\ldots+\lambda_n\varphi^{(n)}(x)=0$$
im Widerspruch zu ii).

Es bleibt, die Äquivalenz von ii) und iii) zu zeigen. Es gilt $\varphi_i^{(j)}\in\mathscr{D}$ für alle i,j, und $\mathscr{D}$ ist kein Körper. Daher dürfen wir nicht mit dem Rang der Matrix $\left(\varphi_i^{(j)}\right)$ argumentieren (vgl. die Lösung von Aufgabe 7). Allerdings ist $\det\left(\varphi_i^{(j)}\right)\neq 0$ gleichbedeutend damit, dass es sich nicht um die Nullfunktion in $\mathscr{D}$ handelt, d.h. es existiert ein $x_0\in I$ mit
$$\det\left(\varphi_i^{(j)}\right)(x_0)=\det\left(\varphi_i^{(j)}(x_0)\right)\neq 0\,.$$
Da jedoch die $\varphi_i^{(j)}(x_0)$ Elemente eines Körpers sind, ist dies gleichbedeutend mit $\operatorname{rang}\left(\varphi_i^{(j)}(x_0)\right)=n$, was nach D10 äquivalent zur linearen Unabhängigkeit von $\varphi^{(1)}(x_0),\ldots,\varphi^{(n)}(x_0)$ ist. Dies zeigt die Äquivalenz von ii) und iii).

c) Nach Teil a) genügt es, $\dim \mathscr{L}_0 = n$ zu zeigen. Dazu wählen wir ein $x_0 \in I$ und definieren

$$F_{x_0} \colon \; \mathscr{L}_0 \to \mathbb{R}^n , \quad \varphi \mapsto \varphi(x_0) =: c \, .$$

Mit Hilfe der Definition der Vektorraum-Struktur auf $\mathscr{D}$ (vgl. Aufgabe 3 zu 1.4) folgt, dass F_{x_0} linear ist. Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz folgt, dass F_{x_0} bijektiv ist. Also ist F_{x_0} ein Isomorphismus, es gilt $\dim \mathscr{L} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Eine Basis von $\mathscr{L}_0$, d.h. $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in \mathscr{L}$, welche die Bedingungen unter b) erfüllen, heißt *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung $\varphi' = A \cdot \varphi$. Die allgemeine Lösung φ dieser Differentialgleichung hat dann die Form

$$\varphi = \lambda_1 \varphi^{(1)} + \ldots + \lambda_n \varphi^{(n)} \quad \text{mit } \; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \, .$$

Mit Hilfe der Wronski-Determinante kann man leicht prüfen, ob Funktionen $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $\varphi' = A \cdot \varphi$ bilden. Diese Aussage ist nach Bedingung iii) aus Teil b) äquivalent dazu, dass mindestens ein $x_0 \in I$ existiert mit $\det \left(\varphi_i^{(j)} \right) (x_0) \neq 0$, vergleiche auch mit der Lösung von Aufgabe 12.

12. Es sei wie in der Aufgabenstellung $y_0 = y$, $y_1 = y'$. Die Differentialgleichung schreibt sich dann

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} , \tag{$*$}$$

und wegen $y'' = -y$ gilt

$$\begin{array}{rcr} y_0' & = & y_1 \\ y_1' & = & -y_0 \end{array} ;$$

damit lautet die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nach Aufgabe 11 c) gilt $\dim \mathscr{L}_0 = 2$, und wir wählen zwei Funktionen

$$\varphi^{(1)} = (\cos, -\sin) \quad \text{und} \quad \varphi^{(2)} = (\sin, \cos) \, .$$

Die Wronski-Determinante lautet

$$\det \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} = \cos^2 + \sin^2 ,$$

und wegen $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist sie ungleich 0, damit bilden $\varphi^{(1)}$ und $\varphi^{(2)}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $(*)$.

Da φ genau dann eine Lösung von $y'' = -y$ ist, wenn (φ, φ') eine Lösung des linearen Systems ist (was nach der Konstruktion von $(*)$ unmittelbar klar ist), ist die allgemeine Lösung von $y'' = -y$ gegeben durch

$$\varphi = \lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

Ergänzungsaufgabe zu Aufgabe 7. Die Einheitengruppe von $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ besteht aus $\{\bar{1}, \bar{3}\}$, wobei wir wie bereits in Abschnitt 1.2.7 durch $\bar{a}$ die Restklasse von a in R bezeichnen. Dies sieht man leicht an einer Verknüpfungstabelle für die Multiplikation:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Im Folgenden stellen wir daher alle Matrizen aus $\mathrm{M}(2 \times 2; R)$ auf, die die Determinante $\bar{1}$ oder $\bar{3}$ haben. Die Tatsache $-\bar{1} = \bar{3}$ wird uns dabei noch zu Hilfe kommen.

Es bezeichne $\bar{a}$ ein beliebiges Element aus R. Zunächst gilt

$$\det\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \bar{1} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} = \bar{3}\,.$$

Durch Vertauschung von Elementen innerhalb einer Diagonalen verändert sich die Determinante der Matrix nicht; ebenso verändert sich durch Vertauschung der beiden Diagonalen nur das Vorzeichen der Determinante. Alle Matrizen, die durch diese Operationen aus den beiden obigen Matrizen hervorgehen, sind also ebenfalls invertierbar. Damit sind, wie man sich leicht überlegt, bereits alle invertierbaren Matrizen mit mindestens einem Eintrag gleich null behandelt.

Falls $\bar{a} \cdot \bar{d} \neq 0$ und $\bar{b} \cdot \bar{c} \neq 0$ für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2; R)$ ist, gibt es folgende Möglichkeiten:

i) $\bar{a} \cdot \bar{d} = \bar{1}$ und $\bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{2}$, ii) $\bar{a} \cdot \bar{d} = \bar{2}$ und $\bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{1}$,
iii) $\bar{a} \cdot \bar{d} = \bar{2}$ und $\bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{3}$, iv) $\bar{a} \cdot \bar{d} = \bar{3}$ und $\bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{2}$.

Die sich daraus für die Einträge $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ ergebenden 32 Möglichkeiten können obiger Multiplikationstafel entnommen werden.

Damit haben wir alle invertierbaren Matrizen in $\mathrm{M}(2 \times 2; R)$ bestimmt.

E1. Für $f = at^2 + bt + c$ ist $f' = 2at + b$ und $f'' = 2a$, und damit gilt

$$D_f = \det\begin{pmatrix} c & b & a \\ b & 2a & 0 \\ 0 & b & 2a \end{pmatrix} = 4a^2c - b^2a\,.$$

Wegen $a \neq 0$ ist $D_f = 0$ gleichbedeutend mit $b^2 - 4ac = 0$. Der Term $b^2 - 4ac$ ist die Diskriminante, die aus der Schule vom Lösen quadratischer Gleichungen bekannt ist (vgl. [Scha], Kapitel 3), was die Namensgleichheit erklärt.

$b^2 - 4ac = 0$ gilt genau dann, wenn die zugrundeliegende quadratische Gleichung $at^2 + bt + c = 0$ exakt eine Lösung hat und die zur Funktion $f = at^2 + bt + c$ gehörige Parabel die x-Achse berührt.

E2. a) Zu zeigen ist, dass $(\Omega, \oplus)$ eine Gruppe ist. Wichtig ist es hier, sorgfältig mit den verschiedenen Rechenoperationen umzugehen. Zunächst betrachten wir das Assoziativgesetz (G1), wählen $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ und $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen ist

$$\begin{array}{rl} & \big((m_1\omega_1 + n_1\omega_2) \oplus (m_2\omega_1 + n_2\omega_2)\big) \oplus (m_3\omega_1 + n_3\omega_2) \\ \stackrel{!}{=} & (m_1\omega_1 + n_1\omega_2) \oplus \big((m_2\omega_1 + n_2\omega_2) \oplus (m_3\omega_1 + n_3\omega_2)\big) \end{array}$$

Die Rechnung ergibt

$$\begin{array}{rl} & \big((m_1\omega_1 + n_1\omega_2) \oplus (m_2\omega_1 + n_2\omega_2)\big) \oplus (m_3\omega_1 + n_3\omega_2) \\ = & \big((m_1 + m_2)\omega_2 + (n_1 + n_2)\omega_2\big) \oplus (m_3\omega_1 + n_3\omega_2) \\ = & \big((m_1 + m_2) + m_3\big)\omega_1 + \big((n_1 + n_2) + n_3\big)\omega_2 \\ \stackrel{\circledast}{=} & \big(m_1 + (m_2 + m_3)\big)\omega_1 + \big(n_1 + (n_2 + n_3)\big)\omega_2 \\ = & (m_1\omega_1 + n_1\omega_2) \oplus \big((m_2 + m_3)\omega_1 + (n_2 + n_3)\omega_3\big) \\ = & (m_1\omega_1 + n_1\omega_2) \oplus \big((m_2\omega_1 + n_2\omega_2) \oplus (m_3\omega_1 + n_3\omega_2)\big)\,. \end{array}$$

An der Stelle $\circledast$ wurden $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ und das Assoziativgesetz der ganzen Zahlen benutzt. (G1) wurde damit gezeigt.

(G2): Das neutrale Element ist gegeben durch $(0\omega_1 + 0\omega_2)$. Hiermit berechnen wir für $m, n \in \mathbb{Z}$ beliebig

$$\begin{array}{rcl} (m\omega_1 + n\omega_2) \oplus (0\omega_1 + 0\omega_2) & = & \big((m+0)\omega_1 + (n+0)\omega_2\big) \\ & = & (m\omega_1 + n\omega_2)\,. \end{array}$$

Das inverse Element zu $(m\omega_1 + n\omega_2)$ ist gegeben durch $\big((-m)\omega_1 + (-n)\omega_2\big)$, denn

$$\begin{array}{rcl} (m\omega_1 + n\omega_2) \oplus ((-m)\omega_1 + (-n)\omega_2) & = & \big((m + (-m))\omega_1 + (n + (-n))\omega_2\big) \\ & = & (0\omega_1 + 0\omega_2)\,. \end{array}$$

b) ω_1 und ω_2 erzeugen Ω, daher existieren $\tilde{m}_1$ und $\tilde{m}_2$ sowie $\tilde{n}_1$ und $\tilde{n}_2$ mit

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{m}_1\omega_1 + \tilde{n}_1\omega_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{m}_2\omega_1 + \tilde{n}_2\omega_2\,.$$

Gilt

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\tilde{\omega}_1 = a\omega_1 + b\omega_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_2 = c\omega_1 + d\omega_2\,.$$

Dann folgt

$$\begin{array}{rcl} \tilde{m}\tilde{\omega}_1 + \tilde{n}\omega_2 & = & \tilde{m}(a\omega_1 + b\omega_2) + \tilde{n}(c\omega_1 + d\omega_2) \\ & = & (\tilde{m}a + \tilde{n}c)\omega_1 + (\tilde{m}b + \tilde{n}d)\omega_2\,. \end{array}$$

Damit erzeugen $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_2$ in Ω. Aufgrund der Linearität der Abbildung in Verbindung mit der Matrix erzeugen $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_2$ die Gruppe Ω.

ω_1 und ω_2 erzeugen die Gruppe Ω. Daher existieren $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{\omega}_1 = a\omega_1 + b\omega_2$ und $\tilde{\omega}_2 = c\Omega_1 + d\omega_2$. Damit ergibt sich die Matrix.

Da die ω_i und die $\tilde{\omega}_i$ dieselben Maßeinheiten besitzen, muss $|\omega_i| = |\tilde{\omega}_i|$ sein. Da die Determinante den Streckungsfaktor einer linearen Abbildung angibt (vgl [Fi1], Abschnitt 3.1), muss $\left|\frac{1}{ad-bc}\right| = 1$ sein. Die Rechengesetze der Gruppe lassen sich wie in Teil a) zeigen.

E3. a) Surjektivität: Es sei $\tilde{z} \in \mathbb{C}$. Es werden die Fälle $\tilde{z} \neq \frac{a}{c}$ und $\tilde{z} = \frac{a}{c}$ unterschieden.

Für $\tilde{z} \neq \frac{a}{c}$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{z} = \frac{az+b}{cz+d} \quad &\Longleftrightarrow \quad \tilde{z}(cz+d) = az+b \\
&\Longleftrightarrow \quad cz\tilde{z} + d\tilde{z} = az+b \\
&\Longleftrightarrow \quad cz\tilde{z} - az = b - d\tilde{z} \\
&\Longleftrightarrow \quad z(c\tilde{z} - a) = b - d\tilde{z} \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \frac{b-d\tilde{z}}{c\tilde{z}-a}
\end{aligned}$$

Im Fall $\tilde{z} \neq \frac{a}{c}$ ist hiermit eine Lösung gegeben. Ist $z = \frac{a}{c}$, so ist $z = 1$ eine Lösung. Somit ist die Abbildung surjektiv.

Injektivität: Es gilt

$$\begin{aligned}
& \tfrac{az_1+b}{cz_1+d} = \tfrac{az_2+b}{cz_2+d} \\
\Longleftrightarrow \quad & (az_1+b)(cz_2+d) = (az_2+b)(cz_1+d) \\
\Longleftrightarrow \quad & acz_1z_2 + az_1d + bcz_2 + bd = az_2cz_1 + az_2d + bcz_1 + bd \\
\Longleftrightarrow \quad & adz_1 + bcz_2 = adz_2 + bcz_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & (ad-bc)z_1 = (ad-bc)z_2 \\
\Longleftrightarrow \quad & z_1 = z_2\,,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $ad - bc \neq 0$ berücksichtigt wurde.

Hiermit ist die Abbildung injektiv für $ad - bc \neq 0$ und insgesamt bijektiv.

b) Zunächst ist zu zeigen, dass die Verknüpfung zweier Möbius-Transformationen wieder eine Möbius-Transformation ist. Hierzu seien

$$M_1(z) := \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} \quad \text{und} \quad M_2(z) := \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

zwei Möbius-Transformationen. Für die Verknüpfung $\circ$ ergibt sich

$$(M_2 \circ M_1) = \frac{(a_2a_1+b_2c_1)z + (a_2b_1+b_2d_1)}{(c_2a_1+d_2c_1)z + (c_2b_1+d_2d_1)}, \tag{3.1}$$

womit es sich um eine Möbius-Transformation handelt. Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$(a_2a_1+b_2c_1)(c_2b_1+d_2d_1) - (c_2a_1+d_2c_1)(a_2b_1+b_2d_1) \neq 0$$

gilt. Die Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} & (a_2a_1+b_2c_1)(c_2b_1+d_2d_1)-(c_2a_1+d_2c_1)(a_2b_1+b_2d_1) \\ = \quad & a_1a_2b_1c_2+a_1a_2d_1d_2+b_1b_2c_1c_2+b_2c_1d_1d_2 \\ - \quad & a_1a_2b_1c_2-a_1b_2c_2d_1-a_2b_1c_1d_2-b_2c_1d_1d_2 \\ = \quad & \underbrace{(a_1d_1-b_1c_1)}_{\neq 0}\underbrace{(a_2d_2-b_2c_2)}_{\neq 0} \neq 0\,, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(G1) Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes kann mithilfe einer simplen, wenngleich aufwändigen, Rechnung nachgewiesen werden.

(G2) Das neutrale Element ist gegeben durch $z \mapsto z$, d.h. $a = d = 1$ und $b = c = 0$.

Durch $M^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$ ist das inverse Element gegeben, denn mit Hilfe von Gleichung (3.1) und $ad-bc=1$ ergibt sich

$$\left(M^{-1}\circ M\right)(z) = \frac{(da-bc)z+(db-bd)}{(-ca+ac)z+(-cb+ad)} = z\,.$$

Dass die Gruppe nicht kommutativ ist, zeigen $M_1 := \frac{z}{z+1}$ und $M_2 := \frac{z+1}{z}$. Es gilt

$$M_2\circ M_1 = \frac{2z+1}{z}\,, \quad \text{jedoch} \quad M_1\circ M_2 = \frac{z+1}{2z+1}\,.$$

c) Zu bedenken ist, dass für alle $k \neq 0$

$$\frac{k\cdot a\cdot z+k\cdot b}{k\cdot c\cdot z+k\cdot b} = \frac{a\cdot z+b}{c\cdot z+b}$$

gilt. Damit kann man o.B.d.A. annehmen, dass a,b,c,d keine gemeinsamen Teiler haben. Wegen $(ad-bc) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Abbildung bijektiv.

Es bleibt zu zeigen, dass für a_1,b_1,c_1,d_1 und a_2,b_2,c_2,d_2 und die zugehörigen

$$M_1 := \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} \quad \text{und} \quad M_2 := \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

sowie

$$A_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_1 := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

als auch

$$M_2\circ M_1 \mapsto A_2\cdot A_1$$

gelten. Nach obiger Rechnung ergibt sich

$$(M_2\circ M_1) = \frac{(a_2a_1+b_2b_1)\cdot z+(a_2b_1+b_2d_1)}{(c_2a_1+d_2c_1)\cdot z+(c_2b_1+d_2d_1)}\,.$$

Für die Matrizenmultiplikation gilt

$$A_2\cdot A_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_2c_1 & b_1a_2+b_2d_1 \\ c_2a_1+c_1d_2 & b_1c_2+d_1d_2 \end{pmatrix},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Die Abbildung wird bijektiv, wenn für den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a,b,c,d)=1$ erfüllt ist.
d) Es sei $z=z_1+\mathrm{i}z_2$ mit $z_i\in\mathbb{R}$ und $z_2>0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{az+b}{cz+d} &= \frac{a(z_1+\mathrm{i}z_2)+b}{c(z_1+\mathrm{i}z_2)+d}\\
&= \frac{az_1+\mathrm{i}az_2+b}{cz_1+\mathrm{i}cz_2+d}\\
&= \frac{(az_1+\mathrm{i}az_2+b)(cz_1+d-\mathrm{i}cz_2)}{(cz_1+d)^2+(cz_2)^2}\\
&= \frac{acz_1^2+adz_1+acz_2^2+bcz_1+bd}{(cz_1+d)^2+(cz_2)^2}\\
&\quad +\frac{-\mathrm{i}az_1cz_2+\mathrm{i}az_2cz_1+\mathrm{i}adz_2-\mathrm{i}bcz_2}{(cz_1+d)^2+(cz_2)^2}\\
&= \text{Realteil}+\mathrm{i}\cdot\frac{(-acz_1z_2+acz_1z_2+adz_2-bcz_2)}{(cz_1+d)^2+(cz_2)^2}\\
&= \text{Realteil}+\mathrm{i}\cdot z_2\frac{ad-bc}{(cz_1+d)^2+(cz_2)^2},
\end{aligned}$$

wobei der Realteil nicht ausgeschrieben ist, da wir lediglich am Imaginärteil interessiert sind. Mit $z_2>0$ und $ad-bc>0$ folgt die Behauptung.

3.3 Minoren*

1. a) Für $n=2$ ist die Abbildung $A\mapsto A^\sharp$ noch linear, für $n>2$ jedoch nicht. Im ersten Fall gilt

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^\sharp=\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Die Abbildung entspricht also in etwas anderer Schreibweise

$${}^t(a,b,c,d)\mapsto {}^t(d,-b,-c,a),$$

also der Linksmultiplikation durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Für $n \geqslant 3$ gibt es folgendes Gegenbeispiel, das die Linearität ausschließt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & 0 & \\ & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}^{\#} = (0) \quad , \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}^{\#} = (0) \, ,$$

aber

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \boxed{1} \end{pmatrix} .$$

b) Die Lösung dieser Aufgabe birgt keine besondere Schwierigkeit in sich; es handelt sich um eine geradlinige Rechnung mit einigen Indizes, die wir unseren LeserInnen ohne weiteres zutrauen und aus diesem Grunde auslassen.

c) Mit Hilfe der Eigenschaft D11 der Determinante, Satz 3.3.1 und Eigenschaft D1 b) der Determinante folgt

$$\det A^{\sharp} \cdot \det A = \det \left(A^{\sharp} \cdot A \right) = \det \left(\det A \cdot E_n \right) = \left(\det A \right)^n .$$

Für $\det A \neq 0$ folgt daraus sofort $\det A^{\sharp} = (\det A)^{n-1}$.

Ist $\det A = 0$, so bleibt $\det A^{\sharp} = 0$ zu zeigen. Für $A = 0$ folgt $A^{\sharp} = 0$, also $\det A^{\sharp} = 0$.

Falls $A \neq 0$ ist, gilt $1 \leqslant \operatorname{rang} A \leqslant n-1$. Mit Hilfe von Lemma 2.5.5 bekommen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} A^{\sharp} + 1 - n &\leqslant \operatorname{rang} A^{\sharp} + \operatorname{rang} A - n \leqslant \operatorname{rang} \left(A^{\sharp} \cdot A \right) \\ &= \operatorname{rang} \left((\det A) \cdot E_n \right) = 0 , \end{aligned}$$

woraus $\operatorname{rang} A^{\sharp} \leqslant n-1$ und damit $\det A^{\sharp} = 0$ folgt.

d) Bevor wir die Behauptung zeigen, bemerken wir, dass $n \geqslant 3$ sein muss. Für $n = 1$ ist $n - 2 < 0$, d.h. für $\det A = 0$ ist die Aussage falsch. Ferner ist für $n = 2$ die Aussage im Prinzip zwar richtig, aber 0^0 keine „vernünftige“ Zahl. Der Fall $n = 2$ wird daher in der Zusatzaufgabe E1 behandelt.

Wie in Teil c) bestimmen wir mit Satz 3.3.1

$$\left(A^{\sharp} \right)^{\sharp} \cdot A^{\sharp} = \left(\det A^{\sharp} \right) \cdot E_n \overset{\text{c)}}{=} (\det A)^{n-1} \cdot E_n .$$

Andererseits gilt wegen der Assoziativität der Matrizen-Multiplikation

$$(\det A)^{n-1} \cdot A = \left(\left(A^{\sharp} \right)^{\sharp} \cdot A^{\sharp} \right) \cdot A = \left(A^{\sharp} \right)^{\sharp} \cdot \left(A^{\sharp} \cdot A \right) = \left(A^{\sharp} \right)^{\sharp} \cdot (\det A) \cdot E_n ,$$

woraus folgt

$$0 = (\det A)^{n-1} \cdot A - \det A \cdot \left(A^\sharp\right)^\sharp = \det A \cdot \left((\det A)^{n-2} \cdot A - \left(A^\sharp\right)^\sharp\right).$$

Ist $\det A \neq 0$, so gilt $(\det A)^{n-2} \cdot A - \left(A^\sharp\right)^\sharp = 0$, also $\left(A^\sharp\right)^\sharp = (\det A)^{n-2} \cdot A$.

Im Fall $\det A = 0$ nehmen wir an, es gilt $\left(A^\sharp\right)^\sharp \neq 0$. Dann existiert ein $(n-1)$-Minor von $A^\sharp$, der ungleich 0 ist, und nach Satz 3.3.6 ist $\operatorname{rang} A^\sharp \geqslant n-1$. Mit derselben Argumentation folgt $\operatorname{rang} A \geqslant n-1$. (Es folgt wegen $\det A = 0$ sogar $\operatorname{rang} A^\sharp = n-1 = \operatorname{rang} A$.) Da jedoch aus $\det A = 0$ wie in Teil c) $\operatorname{rang}(A^\sharp \cdot A) = 0$ folgt, gilt nach Lemma 2.5.5

$$n-2 \leqslant \operatorname{rang} A^\sharp + \operatorname{rang} A - n \leqslant \operatorname{rang}\left(A^\sharp \cdot A\right) = 0.$$

Wegen $n \geqslant 3$ ist $n-2 > 0$, was ein Widerspruch ist. Also ist im Fall $\det A = 0$ ebenfalls $\left(A^\sharp\right)^\sharp = 0$, was zu zeigen war.

2. Wegen $m > n$ folgt $\operatorname{rang} A \leqslant n$ und $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} {}^tB \leqslant n$. Aus Lemma 2.5.5 erhalten wir die Abschätzung

$$\operatorname{rang}(A \cdot {}^tB) \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\} \leqslant n < m.$$

Wegen $A \cdot {}^tB \in \mathrm{M}(m \times m; K)$ und nach Eigenschaft D10 folgt $\det(A \cdot {}^tB) = 0$.

3. Diese Aufgabe löst man durch geradlinige Rechnung; wir lassen die Lösung daher aus.

4. Das Ergebnis erhält man z.B. durch Entwickeln nach Laplace. Wir wollen diese Aufgabe hier nicht ausführlich vorrechnen. Insbesondere ist die Determinante immer $\geqslant 0$ für reelle a, b, c, d.

5. i) $\Rightarrow$ ii): $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ seien linear abhängig. Dann existiert o.B.d.A. (siehe Aufgabe 1 zu 0.3) ein $\lambda \in K$ mit $y_i = \lambda x_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$. In diesem Fall gilt für alle i, j

$$\det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_i & \lambda x_i \\ x_j & \lambda x_j \end{pmatrix} = \lambda x_i x_j - \lambda x_i x_j = 0.$$

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $\det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0$ für alle i, j. Nach Satz 3.3.6 ist dann der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ höchstens 1. Er ist genau 1, wenn $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, andernfalls ist der Rang 0.

6. a) Gilt $E = \mathrm{span}\,(x,y) = \mathrm{span}\,(x',y')$, so existieren $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit
$$x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y \quad \text{und} \quad y' = \mu_1 x + \mu_2 y\,.$$
Aus der linearen Unabhängigkeit von x' und y' folgt
$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0\,.$$
Bezeichnen wir nun $p(x,y) = (p_{ij})$ und $p(x',y') = (p'_{ij})$, so folgt
$$\begin{aligned}
p'_{ij} &= \det\begin{pmatrix} x'_i & y'_i \\ x'_j & y'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i & \mu_1 x_i + \mu_2 y_i \\ \lambda_1 x_j + \lambda_2 y_j & \mu_1 x_j + \mu_2 y_j \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{D1}}{=} \underbrace{\det\begin{pmatrix} \lambda_1 x_i & \mu_1 x_i \\ \lambda_1 x_j & \mu_1 x_j \end{pmatrix}}_{=0} + \det\begin{pmatrix} \lambda_1 x_i & \mu_1 x_i \\ \lambda_2 y_j & \mu_2 y_j \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} \lambda_2 y_i & \mu_2 y_i \\ \lambda_1 x_j & \mu_1 x_j \end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} \lambda_2 y_i & \mu_2 y_i \\ \lambda_2 y_j & \mu_2 y_j \end{pmatrix}}_{=0} \\
&= \lambda_1\mu_2 x_i y_j - \lambda_2\mu_1 x_i y_j + \lambda_2\mu_1 y_i x_j - \lambda_1\mu_2 x_j y_i \\
&= (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\cdot\det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$
Wie oben bereits gezeigt, ist $\lambda := \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$. Da λ unabhängig von i und j ist, folgt
$$p(x,y) = \lambda\cdot p(x',y')\,.$$

Die Eindeutigkeit der Plückerkoordinaten nur bis auf einen Faktor $\lambda \neq 0$ mag als Nachteil erscheinen. Die Plückerkoordinaten können jedoch als Punkte in einem projektiven Raum betrachtet werden (zu projektiven Räumen vgl. [Fi3], Kapitel 3). Da zwei Zahlentupel $(x_0,\ldots,x_n)$ und $(y_0,\ldots,y_n)$ genau dann denselben Punkt im projektiven Raum beschreiben, wenn ein $\lambda \neq 0$ existiert mit $x_i = \lambda\cdot y_i$ für $i = 0,\ldots,n$, sind Plückerkoordinaten im projektiven Raum eindeutig bestimmt.

b) Es sei $E_1 = \mathrm{span}\,(x^{(1)},y^{(1)})$ und $E_2 = \mathrm{span}\,(x^{(2)},y^{(2)})$. Die Basis des K^n sei so gewählt, dass $x^{(1)} = (1,0,\ldots,0)$ und $y^{(1)} = (0,1,0,\ldots,0)$ gilt. $p(E_1)$ und $p(E_2)$ sind linear abhängig, d.h. es existiert ein $\lambda \in K \smallsetminus 0$, so dass für alle $1 \leqslant i < j \leqslant n$ gilt
$$\det\begin{pmatrix} x_i^{(1)} & y_i^{(1)} \\ x_j^{(1)} & y_j^{(1)} \end{pmatrix} = \lambda\cdot\det\begin{pmatrix} x_i^{(2)} & y_i^{(2)} \\ x_j^{(2)} & y_j^{(2)} \end{pmatrix},$$
d.h.
$$x_i^{(1)}y_j^{(1)} - x_j^{(1)}y_i^{(1)} = \lambda\,(x_i^{(2)}y_j^{(2)} - x_j^{(2)}y_i^{(2)})\,.$$
Aufgrund der Koordinatenwahl gilt für $i = 1$
$$y_j^{(1)} = \lambda x_1^{(2)}y_j^{(2)} - \lambda x_j^{(2)}y_1^{(2)} \quad \text{für alle } j \geqslant 2\,.$$

Ist $j=1$, so gilt $0=y_1^{(1)}=\lambda x_1^{(2)}y_1^{(2)}-\lambda x_1^{(2)}y_1^{(2)}$, also ist
$$y^{(1)}=-\lambda y_1^{(2)}\cdot x^{(2)}+\lambda x_1^{(2)}\cdot y^{(2)}\in E_2\,.$$
Eine ähnliche Überlegung liefert
$$x^{(1)}=\lambda y_2^{(2)}\cdot x^{(2)}-\lambda x_2^{(2)}\cdot y^{(2)}\in E_2\,,$$
insgesamt also $E_1\subset E_2$, und wegen $\dim E_1=\dim E_2$ folgt damit $E_1=E_2$.
c) Nach der Definition der Plückerkoordinaten folgt
$$\begin{aligned}p_{12}p_{34}-p_{13}p_{24}+p_{14}p_{23} &= (x_1y_2-x_2y_1)(x_3y_4-x_4y_3)\\ &\quad -(x_1y_3-x_3y_1)(x_2y_4-x_4y_2)\\ &\quad +(x_1y_4-x_4y_1)(x_2y_3-x_3y_2)=0\,.\end{aligned}$$
Für die Umkehrung wählen wir ein $p=(p_{ij})\in K^6\smallsetminus 0$, das die Gleichung
$$p_{12}p_{34}-p_{13}p_{24}+p_{14}p_{23}=0 \qquad (*)$$
erfüllt. Wegen $p\neq 0$ gibt es ein $p_{ij}\neq 0$. Wir betrachten den Fall $p_{14}\neq 0$, der Rest geht analog.

Wählen wir
$$x=\left(1,\tfrac{p_{24}}{p_{14}},\tfrac{p_{34}}{p_{14}},0\right) \quad \text{und} \quad y=(0,p_{12},p_{13},p_{14})\,,$$
so sind x und y linear unabhängig, und es gelten wegen $(*)$ die Relationen
$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix} &= 1\cdot p_{12}-0\,,\\
\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{pmatrix} &= 1\cdot p_{13}-0\,,\\
\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_4 & y_4\end{pmatrix} &= 1\cdot p_{14}-0\,,\\
\det\begin{pmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{pmatrix} &= \tfrac{p_{24}}{p_{14}}\cdot p_{13}-\tfrac{p_{34}}{p_{14}}\cdot p_{12}=p_{23}\,,\\
\det\begin{pmatrix}x_2 & y_2\\ x_4 & y_4\end{pmatrix} &= \tfrac{p_{24}}{p_{14}}\cdot p_{14}-0=p_{24}\,,\\
\det\begin{pmatrix}x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{pmatrix} &= \tfrac{p_{34}}{p_{14}}\cdot p_{14}-0=p_{34}\,,
\end{aligned}$$
was zu zeigen war.

Die Gleichung $(*)$ heißt *Plücker-Relation.*

d) Wegen
$$\begin{aligned}4 &= \dim\operatorname{span}(x,y)+\dim\operatorname{span}(x'y')\\ &= \dim\operatorname{span}(x,y,x',y')+\dim(E_1\cap E_2)\end{aligned}$$
ist $E_1\cap E_2\neq\{0\}$ genau dann, wenn $\dim\operatorname{span}(x,y,x',y')<4$ gilt. Dies ist allerdings äquivalent zur linearen Abhängigkeit der Vektoren (x,y,x',y'), was genau

dann der Fall ist, wenn die Determinante der Matrix bestehend aus den Spaltenvektoren (x, y, x', y') gleich 0 ist.

Entwicklung der Matrix mit den Spaltenvektoren (x, y, x', y') nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned}\det(x, y, x', y') &= x_1(y_2q_{34} - y_3q_{24} + y_4q_{23}) - x_2(y_1q_{34} - y_3q_{14} + y_4q_{13}) \\ &\quad + x_3(y_1q_{24} - y_2q_{14} + y_4q_{12}) - x_4(y_1q_{23} - y_2q_{13} + y_3q_{12}) \\ &= p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + p_{23}q_{14} - p_{24}q_{13} + p_{34}q_{12},\end{aligned}$$

woraus die zweite Äquivalenz folgt.

Analog kann man für $1 \leqslant k \leqslant n$ auch Plückerkoordinaten eines k-dimensionalen Untervektorraumes $E \subset K^n$ einführen. Das sind die $\binom{n}{k}$-Minoren einer aus k Basisvektoren von E bestehenden Matrix. Analog zu Teil a) und b) zeigt man, dass diese Plückerkoordinaten bis auf einen Faktor aus $K \smallsetminus 0$ eindeutig bestimmt sind, ihnen somit ein eindeutiger Punkt im projektiven Raum $\mathbb{P}(K^{\binom{n}{k}})$ zugeordnet werden kann. Wir nennen die entsprechende Abbildung für beliebiges k ebenfalls p.

Die Menge $G(k, n)$, die durch

$$G(k, n) := \{U \subset K^n : \ \dim U = k\}$$

definiert wird, heißt *Grassmann-Varietät* oder *Grassmann-Mannigfaltigkeit*, siehe hierzu etwa [Sh], §4.1, [Ha], Lecture 6.

7. Wir beweisen die Behauptung per Induktion über n. Für $n = 1$ ist $\det(x) = x_{11}$ sicher irreduzibel.

Um den Induktionsschritt zu zeigen, übetrachten wir die Summe

$$\det(x) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)}$$

und übertragen sie durch Ausklammern in

$$\begin{aligned}\det(x) &= x_{1n} \sum_{\rho \in \mathbf{S}_{n-1}} \operatorname{sign}(\rho) \cdot x_{2\rho(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\rho(n-1)} \\ &\quad + x_{2n} \sum_{\rho \in \mathbf{S}_{n-1}} \operatorname{sign}(\rho) \cdot x_{1\rho(1)} \cdot x_{3\rho(2)} \cdot \ldots \cdot x_{n\rho(n-1)} \\ &\quad + \ldots + x_{nn} \sum_{\rho \in \mathbf{S}_{n-1}} \operatorname{sign}(\rho) \cdot x_{1\rho(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n-1\rho(n-1)}.\end{aligned}$$

Auf die Summen über $\mathbf{S}_{n-1}$ in jedem Summanden können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden; sie sind also irreduzibel. Daraus folgt jedoch unmittelbar die Irreduzibilität von $\det(x)$, denn die einzelnen Summanden in der obigen Summe sind teilerfremd.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. Der erste Schritt – die Berechnung von $A^\sharp$ – wurde bereits in der Lösung von Aufgabe 1 a) zu 3.3 durchgeführt. Im zweiten Schritt berechnen wir

$$a_{11}^{\sharp\sharp} = a\,, \quad a_{12}^{\sharp\sharp} = b\,, \quad a_{21}^{\sharp\sharp} = c\,, \quad a_{22}^{\sharp\sharp} = d\,,$$

d.h.

$$\left(A^\sharp\right)^\sharp = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A\,.$$

E2. Durch Addition des (-1)-fachen der letzten Zeile zur zweiten bis $(n-1)$-ten Zeile erhalten wir

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Eigenschaft D7 der Determinante gilt $\det A = \det A'$.
Nun entwickeln wir die Matrix A' nach der ersten Spalte; das liefert

$$\det A' = (-1)^{n-1} \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \det A''\,.$$

Durch Addition der ersten bis $(n-1)$-ten Spalte zur letzten Spalte überführen wir die Matrix A'' in die Form

$$A''' := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & n-1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von D7 und Satz 3.2.6 gilt $\det A''' = \det A''$, und entwickeln wir nun

A''' nach der letzten Spalte, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\det A''' &= (-1)^n \cdot (n-1) \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}}_{n-2} \\ &= (-1)^n \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-2} = n-1\,.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\det A = \det A' = (-1)^{n-1} \cdot \det A''' = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)\,.$$

Man beachte, dass diese Determinante in einem Körper, dessen Charakteristik die Zahl $n-1$ teilt, gleich 0 ist. In diesem Fall sind die Zeilen der Matrix A linear abhängig.

3.4 Determinante eines Endomorphismus und Orientierung*

1. Für alle Basen $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ gilt $M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) \in \mathrm{GL}(n;K)$ wegen Bemerkung 2 aus 2.5.6 und Satz 1.5.2. Φ kann kein Gruppenhomomorphismus sein, denn X trägt keine Gruppenstruktur. Wir müssen daher nur die Bijektivität von Φ als Mengenabbildung nachweisen.

Angenommen $M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) = M_{\mathscr{A}'}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) = (a_{ij})$. Dann gilt für alle Basisvektoren $a_i \in \mathscr{A}$ bzw. $a_i' \in \mathscr{A}'$

$$a_i := \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_j \quad \text{bzw.} \quad a_i' := \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_j\,,$$

wobei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ ist. Daraus folgt $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$.

Φ ist surjektiv, weil wir für jedes $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}(n;K)$ aus einer Basis $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine neue Basis $\mathscr{A} := (a_1, \ldots, a_n)$ durch $a_j := \sum\limits_{i=1}^n a_{ij} b_i$ konstruieren können.

Der Zusammenhang zwischen Φ und der in 3.4.3 definierten kanonischen Abbildung ist nun einzusehen, denn es gilt $\mathrm{M}(\mathscr{A}) = \Phi(\mathscr{A}) = M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$, wenn man für $\mathscr{B}$ die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ wählt.

2. Die Bezeichnungen seien wie in Definition 3.4.4 gewählt, und es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$. Wir definieren $\varphi\colon\ I \to \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$, $t \mapsto (a_{ij})$, als den konstanten Weg. Dieser ist sicher stetig, und für alle $t \in I$ ist $\varphi(t) = A$ invertierbar. Das zeigt die Reflexivität der Verbindbarkeit.

Sind $A, B \in \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$ verbindbar, so existiert ein Weg $\varphi\colon\ I \to \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$ mit $\varphi(\alpha) = A$ und $\varphi(\beta) = B$ sowie $\varphi(t) \in \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$ für alle $t \in I$. Definieren wir eine Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon\ I \to \mathrm{M}(n\times n;\mathbb{R}) \quad \text{durch} \quad \tilde{\varphi}(t) := \varphi(\alpha+\beta-t)\,,$$

so ist $\tilde{\varphi}$ stetig, da φ stetig ist und $\alpha+\beta-t \in I$ für jedes $t \in I$ gilt. Aus der Invertierbarkeit von φ für alle $t \in I$ folgt die Invertierbarkeit von $\tilde{\varphi}$ für alle $t \in I$. Schließlich folgt aus $\tilde{\varphi}(\alpha) = \varphi(\beta) = B$ und $\tilde{\varphi}(\beta) = \varphi(\alpha) = A$, dass $\tilde{\varphi}$ ein Weg von B nach A ist. Das zeigt die Symmetrie der Verbindbarkeit.

Für $A,B,C \in \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$ mit $A \sim B$ und $B \sim C$ existieren Wege φ_1 mit $\varphi_1(\alpha_1) = A$, $\varphi_1(\beta_1) = B$ bzw. φ_2 mit $\varphi_2(\alpha_2) = B$, $\varphi_2(\beta_2) = C$ auf Intervallen $I_1 = [\alpha_1,\beta_1]$ bzw. $I_2 = [\alpha_2,\beta_2]$, so dass $\varphi_1(t) \in \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$ für alle $t \in I_1$ und $\varphi_2(t) \in \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$ für alle $t \in I_2$ gilt. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass $I_1 = I_2$ gilt, denn sonst definiere

$$\xi\colon\ I_1 \to I_2\,, \quad t \mapsto \frac{\beta_1 - t}{\beta_1 - \alpha_1}\cdot\alpha_2 + \frac{t-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}\cdot\beta_2\,,$$

und $\tilde{\varphi} := \varphi_2 \circ \xi$ ist ein Weg mit dem Definitionsbereich I_1. (Man beachte, dass wir hierdurch sogar o.B.d.A. $I = [0,1]$ annehmen können, was bei Rechnungen häufig Vorteile bringt, in unserem Fall jedoch egal ist.)

Es sei also $I = [\alpha,\beta] = I_1 = I_2$. Wir definieren jetzt eine Abbildung $\varphi\colon\ I \to \mathrm{M}(n\times n;\mathbb{R})$ durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(2t-\alpha) & \text{für } \alpha \leqslant t \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}\,, \\ \varphi_2(2t-\beta) & \text{für } \frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant t \leqslant \beta\,. \end{cases}$$

Die Abbildung φ ist wohldefiniert und stetig, da

$$\varphi_1(2\cdot\tfrac{\alpha+\beta}{2} - \alpha) = \varphi_1(\beta) = B = \varphi_2(\alpha) = \varphi_2(2\cdot\tfrac{\alpha+\beta}{2} - \beta)$$

gilt und φ_1 bzw. φ_2 stetig sind. Da für alle $t \in I$ die Matrizen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ invertierbar sind, folgt $\varphi(t) \in \mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$ für alle $t \in I$.

Ferner gilt

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(2\alpha-\alpha) = A \quad \text{und} \quad \varphi(\beta) = \varphi_2(2\beta-\beta) = C\,,$$

also ist φ ein Weg von A nach C.

Anschaulich werden beim Durchlaufen des Weges φ die Wege φ_1 und φ_2 nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen.

Wege zwischen zwei Punkten eines Raumes werden vor allem in der Topologie verwendet. Mit ihrer Hilfe kann untersucht werden, ob ein topologischer Raum $\mathscr{T}$ *wegzusammenhängend* ist oder nicht (vgl. [C-V], Section 2.C. bzw. [O], Abschnitte 1.2 und 2.3), d.h. ob zwischen zwei beliebigen Punkten aus $\mathscr{T}$ ein Weg existiert. Nach Lemma 2 aus 3.4.4 ist $\mathrm{GL}\,(n;\mathbb{R})$ nicht wegzusammenhängend, wohingegen die topologischen Räume $\mathrm{M}(n\times n;\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}\,(n;\mathbb{C})$ nach den Aufgaben 4 und 5 wegzusammenhängend sind.

3. Die Behauptung folgt aus dem Beweis von Satz 2.7.3, indem man den letzten Schritt der Normierung der Diagonalelemente weglässt, zusammen mit der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2.7.4.

4. Zunächst müssen wir klären, was *Verbindbarkeit* in der Menge $\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$ bedeutet. Dazu seien $A, B \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$. Unter einen *Weg* von A nach B verstehen wir eine stetige Abbildung

$$\varphi\colon\ I \to \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R}), \quad t \mapsto \varphi(t) = \big(\varphi_{ij}(t)\big)\,,$$

wobei $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit $\varphi(\alpha) = A$ und $\varphi(\beta) = B$. Die Stetigkeit von φ bedeutet dabei wie in Abschnitt 3.4.4, dass alle Abbildungen $\varphi_{ij}\colon\ I \to \mathbb{R}$ stetig sind. Im Unterschied zu Abschnitt 3.4.4 muss hier jedoch keine Matrix $\varphi(t) \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$ invertierbar sein; das ist für nichtquadratische Matrizen ohnehin nicht möglich.

Die Matrizen A und B heißen *verbindbar*, wenn ein Weg von A nach B existiert.

Es seien nun $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei Matrizen aus $\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$. Wir definieren zu jedem Paar (i, j) eine stetige Abbildung

$$\varphi_{ij}\colon\ [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varphi_{ij}(0) = a_{ij} \text{ und } \varphi_{ij}(1) = b_{ij}$$

durch

$$\varphi_{ij}(t) := (1-t) \cdot a_{ij} + t \cdot b_{ij}\,.$$

Damit wird durch $\varphi := \big(\varphi_{ij}\big)$ ein Weg von A nach B definiert.

5. Wir zeigen in Analogie zu Lemma 3 aus 3.4.4:

$$\text{Ist } A \in \mathrm{GL}\,(n; \mathbb{C}) \text{ gegeben, so gibt es einen Weg von } A \text{ nach } E_n. \qquad (*)$$

Da die Verbindbarkeit auch in $\mathrm{GL}\,(n; \mathbb{C})$ eine Äquivalenzrelation ist – der Beweis verläuft genauso wie in Aufgabe 2 – folgt daraus sofort die Behauptung.

Es bleibt $(*)$ zu zeigen. Dabei verläuft die erste Etappe analog wie im Beweis des Lemmas 3 in 3.4.4. Nach Aufgabe 3 kann die Matrix A durch Spaltenumformungen vom Typ III in eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i \neq 0$ für alle i überführt werden. Da $\mathrm{GL}\,(n; \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}\,(n; \mathbb{C})$ gilt, sind die im Beweis von Lemma 3 konstruierten Wegstückchen auch in diesem Fall verwendbar.

Im zweiten Schritt müssen die λ_i mit Hilfe stetiger Abbildungen φ_i in 1 überführt werden. Die geometrische Idee ist dabei, in einer Schraubenlinie um den Ursprung der komplexen Ebene einen Weg von λ_i zur 1 zu durchlaufen, wie in Bild 3.1 erkennbar:

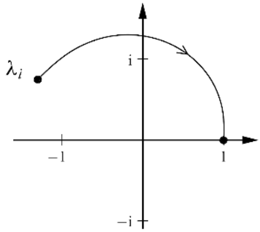


Bild 3.1

Um eine solche Abbildung φ_i zu konstruieren, verwenden wir *Polarkoordinaten* in der komplexen Ebene. Es seien $\lambda_i = (r_i, \alpha_i)$ die Polarkoordinaten der Diagonaleinträge der Matrix D. Wir definieren

$$\varphi_i\colon\ I = [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto (r_i + t \cdot (1 - r_i), (1-t)\cdot \alpha_i)\ .$$

Die Abbildungen φ_i sind stetig, und es gilt $\varphi_i(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, d.h. die Matrix

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

ist für alle $t \in I$ invertierbar. Ferner gilt

$$\varphi(0) = D \quad \text{und} \quad \varphi(1) = E_n\,,$$

also haben wir einen Weg von A nach E_n konstruiert.

Lösung der Ergänzungsaufgabe

E1.

$\det(A) = 1$,	$\det(B) = 40$,
$\det(C) = -3$,	$\det(D) = -192$,
$\det(E) = -2999$,	$\det(F) = -6$,
$\det(G) = 5$,	$\det(H) = -9$,
$\det(I) = 288$ (Vandermonde, s. 3.2.7),	$\det(J) = 1$,
$\det(K) = 91 + \mathrm{i}$,	$\det(L) = -117 + 141\mathrm{i}$,
$\det(M) = -38 + 44\mathrm{i}$,	$\det(N) = 16 - 56\mathrm{i}$,
$\det(O) = 2\mathrm{i}$.	

Kapitel 4

Eigenwerte

4.1 Beispiele und Definitionen

1. Ist F nilpotent, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $F^m = 0$.

Es sei λ ein Eigenwert von F. Für einen Eigenvektor $v \neq 0$ zu λ gilt $F(v) = \lambda \cdot v$. Erneute Anwendung von F liefert $F^2(v) = \lambda^2 \cdot v$, und nach schließlich m-maliger Anwendung von F gelangen wir zu

$$0 = F^m(v) = \lambda^m \cdot v\,,$$

d.h. $\lambda^m = 0$ wegen $v \neq 0$. Da $\lambda \in K$ folgt $\lambda = 0$, also ist 0 einziger Eigenwert von F.

2. Die hier betrachtete lineare Abbildung F operiert auf einem unendlichdimensionalen Vektorraum, Matrizenkalkül ist also in diesem Fall nicht anwendbar.

a) Es bezeichne M die Menge aller Eigenwerte von F. Für einen Eigenwert $\lambda \in M$ und einen zugehörigen Eigenvektor φ gilt $\varphi'' = \lambda\varphi$.

Sei dazu zunächst $\varphi(t) = e^{\mu t}$, dann gilt $\varphi'' = \mu^2\varphi$. Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\mu \mapsto \mu^2$ ist surjektiv, daher ist $\mathbb{R}_+ \subset M$.

Wählt man nun $\varphi(t) = \cos(\mu t)$, so gilt $\varphi'' = -\mu^2\varphi$. Mit derselben Argumentation wie oben folgt, dass $\mathbb{R}_- \subset M$. Insgesamt ist $M = \mathbb{R}$, d.h. jede reelle Zahl ist Eigenwert von F.

b) Zur Lösung dieser und der nächsten Aufgabe sind Kenntnisse über Differentialgleichungen nötig. Das nötige Hintergrundwissen hierzu findet man beispielsweise in [Fo2], Kapitel II. Man bestimmt mit $\mathrm{Eig}\,(F,-1)$ genau die Lösungsmenge der Differentialgleichung $\varphi'' = -\varphi$. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung hat nach Aufgabe 12 zu Abschnitt 3.2 die Form

$$\varphi = \alpha\cos + \beta\sin \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Es gilt also $\mathrm{Eig}\,(F,-1) = \mathrm{span}\,(\cos, \sin)$.

3. a) Mit $\varphi'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot v = \lambda \cdot \varphi(t)$ sowie $A \cdot \varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot A \cdot v$ folgt

$$\varphi'(t) = A \cdot \varphi(t) \Leftrightarrow \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot v = e^{\lambda t} \cdot A \cdot v \Leftrightarrow \lambda \cdot v = A \cdot v\,.$$

b) Zunächst nehmen wir an, dass $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind. Sind dann $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gegeben mit $\alpha_1\varphi^{(1)} + \ldots + \alpha_k\varphi^{(k)} = 0$, so gilt für alle $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\alpha_1 e^{\lambda_1 t_0}}_{\in\mathbb{R}} v_0 + \ldots + \underbrace{\alpha_k e^{\lambda_k t_0}}_{\in\mathbb{R}} v_k = 0\,.$$

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_12

Aus der linearen Unabhängigkeit der v_i folgt

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t_0} = \ldots = \alpha_k e^{\lambda_k t_0} = 0\,.$$

Da $e^{\lambda t} \neq 0$ für alle $\lambda, t \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ und damit die Behauptung.

Um die andere Richtung zu zeigen, sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(t_0) + \ldots + \alpha_k \varphi^{(k)}(t_0) = 0\,. \tag{$*$}$$

Wir definieren $\varphi := \alpha_1 \varphi^{(1)} + \ldots + \alpha_k \varphi^{(k)}$, ferner sei $0(t) = 0$ die Nullfunktion. Dann gilt $\varphi, 0 \in \mathscr{L}_0$ und $\varphi(t_0) = 0 = 0(t_0)$. Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. [Fo2], §10) folgt $\varphi = 0$ in $\mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$, und wegen der linearen Unabhängigkeit der $\varphi^{(i)}$ gilt damit $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Für $t_0 = 0$ schreibt sich $(*)$ als $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$, wegen $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k$ sind die $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

Es ist bemerkenswert, dass wir mehr bewiesen haben, als in der Aufgabe gefordert war, denn unter den Annahmen der Aufgabe wurde die Äquivalenz der drei folgenden Aussagen gezeigt:

i) $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(k)}$ sind linear unabhängig in $\mathscr{D}(I; \mathbb{R}^n)$;
ii) für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ sind $\varphi^{(1)}(t_0), \ldots, \varphi^{k)}(t_0)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$;
iii) die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

4. Ist -1 Eigenwert von $F^2 + F$, so existiert ein $0 \neq v \in V$ mit

$$(F^2 + F)(v) = F^2(v) + F(v) = -v\,.$$

Daraus folgt $F^2(v) + F(v) + v = 0$. Wendet man auf diese Gleichung erneut F an, so erhält man

$$0 = F\left(F^2(v) + F(v) + v\right) = F^3(v) + F^2(v) + F(v) = F^3(v) - v\,,$$

oder $F^3(v) = v$. Damit hat F^3 den Eigenwert 1, und der Eigenvektor von $F^2 + F$ zum Eigenwert -1 ist auch Eigenvektor von F^3 zum Eigenwert 1.

5. a) Die Behauptung folgt aus

$$G \circ F(G(v)) = G(F \circ G(v)) = G(\lambda v) = \lambda G(v)\,.$$

b) Da die Aussage symmetrisch in F und G ist, genügt es, eine Inklusion zu zeigen, d.h. wir brauchen nur nachzuweisen, dass alle Eigenwerte von $F \circ G$ auch Eigenwerte von $G \circ F$ sind.

Für $G(v) \neq 0$ folgt die Behauptung aus a). Ist $G(v) = 0$, so folgt $\lambda = 0$. Es genügt in diesem Fall zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}\,(G \circ F) \neq \{0\}$ ist. Wegen $v \in \mathrm{Ker}\, G$ ist für den Fall $\mathrm{Im} F \cap \mathrm{Ker}\, G \neq \{0\}$ alles klar. Gilt $\mathrm{Im} F \cap \mathrm{Ker}\, G = \{0\}$, so ist F nicht surjektiv und nach Korollar 3 aus 2.2.4 nicht injektiv, also ist $\mathrm{Ker} F \neq \{0\}$ und somit $\mathrm{Ker}\,(G \circ F) \neq \{0\}$.

Man beachte, dass die Behauptung für einen unendlichdimensionalen Vektorraum V falsch ist. Hierzu betrachte man $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und die Endomorphismen $(x_1, x_2, \ldots) \overset{F}{\mapsto} (0, x_1, x_2, \ldots)$ sowie $(x_1, x_2, \ldots) \overset{G}{\mapsto} (0, x_2, x_3, \ldots)$. Dann gilt $F \circ G(x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, x_2, x_3, \ldots)$, und 0 ist Eigenwert dieser Abbildung. Andererseits ist $G \circ F(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ injektiv, also ist 0 kein Eigenwert von $G \circ F$.

Lösung der Ergänzungsaufgabe

E1 a) Mithilfe eines CAS ergibt sich die Vermutung

$$\lim_{n\to\infty} P^n = A = \begin{pmatrix} \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \end{pmatrix}. \qquad \circledast$$

Damit ergäbe sich $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_0 \cdot P^n = \pi_0 \cdot A = \left(\frac14, \frac14, \frac14, \frac14\right) = \pi$, und es gilt $|\pi| = \frac12$ sowie $\pi \cdot P = \pi$ (vgl. auch Teil c)).

b) Der Beweis von $\circledast$ verläuft per Induktion über n. Die Behauptung lautet $P^n = (p_{ij}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ mit

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(n)} &= (-1)^n \cdot \frac{1}{4\cdot 3^{n-1}} + \frac14 \quad \text{und} \\ p_{ij}^{(n)} &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{4\cdot 3^{n}} + \frac14 \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Für $n = 1$ gilt

$$p_{ii}^{(1)} = (-1)^1 \cdot \frac14 + \frac14 = 0 \quad \text{und} \quad p_{ij}^{(1)} = (-1)^0 \cdot \frac{1}{12} + \frac14 = \frac13.$$

Den Induktionsschritt $n \to n+1$ erhält man für

$$P^{n+1} = P^n \cdot P = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & & p_{ij}^{(n)} \\ & \ddots & \\ p_{ij}^{(n)} & & p_{44}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac13 & \frac13 & \frac13 \\ \frac13 & 0 & \frac13 & \frac13 \\ \frac13 & \frac13 & 0 & \frac13 \\ \frac13 & \frac13 & \frac13 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(n+1)} &= \left((-1)^n \cdot \frac{1}{4\cdot 3^{n-1}} + \frac14\right) \cdot 0 + 3 \cdot \frac13 \cdot \left((-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{4\cdot 3^{n}} + \frac14\right) \\ &= \left((-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{4\cdot 3^{n}} + \frac14\right), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+1)} &= \frac{1}{3}\cdot\left((-1)^n\cdot\frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}+\frac{1}{4}\right)+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left((-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{4\cdot 3^n}+\frac{1}{4}\right)\\
&= (-1)^n\cdot\frac{1}{4\cdot 3^n}+\frac{1}{12}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{4\cdot 3^{n+1}}+\frac{1}{6}\\
&= (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{4\cdot 3^n}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\\
&= (-1)^n\cdot\frac{1}{4\cdot 3^{n+1}}+\frac{1}{4}\quad \text{für } i\neq j.
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}
P^n - A &= (p_{ij}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}\quad \text{mit}\\
p_{ii}^{(n)} &= (-1)^n\cdot\frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}\quad \text{und}\\
p_{ij}^{(n)} &= (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{4\cdot 3^n},
\end{aligned}$$

woraus

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall\ 1\leqslant i,j\leqslant 4$$

folgt. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\pi_0\cdot P = \pi_0\cdot A = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \pi,$$

was zu zeigen war.

c) Dass es sich bei π um einen Eigenvektor von P zum Eigenwert 1 handelt, lässt sich mithilfe einer simplen Rechnung bestätigen.

4.2 Das charakteristische Polynom

1. Mit der Bezeichnung

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

gilt

$$P_A(t) = \det(A - t\cdot E_3) = -t^3 + 5t^2 - 2t - 8 = -(t+1)(t-2)(t-4),$$

die Eigenwerte sind also -1, 2 und 4.

Wir bestimmen zunächst $\mathrm{Eig}(A;-1) = \mathrm{Ker}(A+E_3)$ durch geeignete Zeilenumformungen

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

aus denen $\mathrm{Eig}(A;-1) = \mathrm{span}\,{}^t(1,0,-1)$ folgt.

$\mathrm{Eig}\,(A;2) = \mathrm{Ker}\,(A-2E_3)$ bestimmen wir auf dieselbe Art:

$$A-2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und hieraus lesen wir $\mathrm{Eig}\,(A;2) = \mathrm{span}\,{}^t(2,3,-2)$ ab.

Für $\mathrm{Eig}\,(A;4) = \mathrm{Ker}\,(A-4E_3)$ schließlich erhalten wir den Eigenraum $\mathrm{Eig}\,(A;4) = \mathrm{span}\,{}^t(8,5,2)$.

Es bezeichne nun

$$B := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$P_B(t) = \det\,(B - t\cdot E_3) = -t^3 + 3t^2 + 4 = -(t+1)(t-2)^2.$$

Zunächst bestimmen wir $\mathrm{Eig}\,(B;-1) = \mathrm{Ker}\,(B+E_3)$:

$$B+E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

führt zu $\mathrm{Eig}\,(B;-1) = \mathrm{span}\,{}^t(7,-6,4)$.

Nun bestimmen wir $\mathrm{Eig}\,(B;2) = \mathrm{Ker}\,(B-2E_3)$: Aus

$$B-2E_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir $\mathrm{Eig}\,(B;2) = \mathrm{span}\,({}^t(1,0,1), {}^t(0,1,0))$.

Hier haben wir eine Besonderheit, da der Eigenraum von B zum Eigenwert 2 die Dimension 2 hat, die gleich der Multiplizität der Nullstelle 2 von $P_B(t)$ ist. Ein solches Ergebnis ist für die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus von Bedeutung, vgl. Abschnitt 4.3, insbesondere Aufgabe 2.

2. Ist $A \in \mathrm{M}(2\times 2;\mathbb{R})$ symmetrisch, so ist A von der Gestalt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Für das charakteristische Polynom folgt daraus

$$P_A(t) = \det\begin{pmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{pmatrix} = t^2 - (a+c)t - b^2.$$

Die Diskriminante (vgl. [Scha], Kapitel 3) $(a+c)^2 + 4b^2$ ist immer größer oder gleich null, für $a \neq -c$ und $b \neq 0$ sogar echt größer als null. Daher hat $P_A(t)$ nur reelle Nullstellen, also A nur reelle Eigenwerte.

3. Wegen $P_F(t) = \det(A - t \cdot E_n)$ gilt $P_F(0) = \det A$, daher ist nach Bemerkung 3.4.1 $P_F(0) \neq 0$ gleichbedeutend mit der Surjektivität von F. Ist V endlichdimensional, so ist dies nach Korollar 3 aus 2.2.4 äquivalent dazu, dass F ein Isomorphismus ist.

4. Wir führen Induktion über n. Der Induktionsanfang ist trivial. Betrachten wir

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -t & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & -t & -\alpha_{n-2} \\ 0 & & & 1 & -\alpha_{n-1} - t \end{pmatrix},$$

so erscheint eine Entwicklung nach der ersten Zeile sinnvoll. Dies ergibt

$$\begin{aligned} P_A(t) &= (-t) \cdot \det \begin{pmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & -t & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -t & \alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} - t \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^n \cdot \alpha_0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -t & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Determinante der zweiten Matrix ist 1, und auf die erste Matrix können wir die Induktionsannahme anwenden, womit wir

$$\begin{aligned} P_A(t) &= (-t) \cdot (-1)^{n-1} \left(t^{n-1} + \alpha_{n-1} t^{n-2} + \ldots + \alpha_1 \right) + (-1)^n \cdot \alpha_0 \\ &= (-1)^n \left(t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0 \right) \end{aligned}$$

erhalten, was zu zeigen war.

5. Wir fassen die Abbildung Φ als Endomorphismus des K^{n^2} auf; die Koordinaten werden dabei wie folgt durchnummeriert:

$${}^t(x_{11}, \ldots, x_{n1}, x_{12}, \ldots, x_{n2}, \ldots, x_{nn}).$$

Die Matrix B lautet damit $B = {}^t(b_{11}, \ldots, b_{n1}, b_{12} \ldots, b_{n2}, \ldots, b_{nn})$, und die Abbildung Φ kann als $(n^2 \times n^2)$-Matrix geschrieben werden. Für die Einträge von $\left(\Phi(B)_{ij}\right) \in K^{n^2}$ folgt damit

$$\Phi(B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Somit hat Φ die Darstellung

$$\Phi = \begin{pmatrix} \boxed{A} & & & \\ & \boxed{A} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A} \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix A genau n-mal in der Diagonale steht. Nach der Eigenschaft D9 aus 3.1.3 folgt $\det\Phi = (\det A)^n$ und damit auch $P_\Phi = (P_A)^n$.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. a) Es ist

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det(A - t\cdot E_3) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-t & 3 & 0 \\ -2 & 2-t & -1 \\ 4 & 0 & -2-t \end{pmatrix} \\ &= -t^3 + t^2 - 2t - 28 \end{aligned}$$

b) Hier gilt

$$\begin{aligned} P_B(t) &= \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 4 & 5-t & 6 \\ 7 & 8 & 9-t \end{pmatrix} \\ &= -t^3 + 15t^2 + 18t \end{aligned}$$

E2. Wir beginnen mit der Matrix A. Hier ergibt sich für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det(A - t\cdot E_2) = \det\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ 2 & -1-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)(-1-t) + 2 \\ &= t^2 + 1\,. \end{aligned}$$

$P_A(t) = t^2 + 1$ besitzt in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen, also existiert kein Eigenwert und damit auch kein Eigenvektor von A über den reellen Zahlen. Über den komplexen Zahlen gilt $P_A(t) = (t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i})$, womit sich die Matrizen

$$A_1 = A - \mathrm{i}\cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -\mathrm{i}-1 \end{pmatrix} \quad \text{für } t = \mathrm{i}$$

und

$$A_2 = A + \mathrm{i}\cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 \\ 2 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{für } t = -\mathrm{i}$$

ergeben.

Wir beginnen mit der Berechnung für A_1 und bestimmen den Kern. Es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 \\ 2 & -\mathrm{i}-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert i ist damit gegeben durch $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right)$. Es handelt sich um eine Basis des Eigenraums.

Für A_2 gilt

$$\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 \\ 2 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und eine Basis des Eigenraums ist gegeben durch $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right)$. Die beiden Einheitsvektoren bilden auch eine $\mathbb{C}$-Basis des $\mathbb{C}^2$, d.h. A ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Das charakteristische Polynom der Matrix B ist gleich

$$\begin{aligned} P_B(t) &= \det(B-t\cdot E_2) = \det\begin{pmatrix} 3-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= (3-t)(1-t)+1 \\ &= t^2-4t+4 = (t-2)^2. \end{aligned}$$

Der einzige Eigenwert über $\mathbb{R}$ ist $t=2$. Über $\mathbb{C}$ existiert kein weiterer Eigenwert, daher betrachten wir hier lediglich die reellen Zahlen. Es gilt

$$B_1 = B-t\cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor und damit eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 2 ist daher $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dieser Einheitsvektor ist keine Basis des $\mathbb{R}^2$.

4.3 Diagonalisierung

Bevor wir beginnen, charakteristische Polynome sowie deren Nullstellen und Eigenräume zu berechnen, schicken wir eine Bemerkung vorweg, die uns das Leben in den Aufgaben 1 bis 3 erleichtern wird:
Zur Beurteilung der Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus müssen wir wegen $1 \leqslant \dim \mathrm{Eig}(A;\lambda) \leqslant \mu(P_A;\lambda)$ die Dimension der Eigenräume nur für mehrfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen, da für einfache Nullstellen λ von P_A die Beziehung $\dim \mathrm{Eig}(A;\lambda) = \mu(P_A;\lambda)$ automatisch erfüllt ist.

1. Nach der obenstehenden Bemerkung ist für

$$P_F(t) = \pm(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)$$

mit paarweise verschiedenen λ_i insbesondere $\dim \mathrm{Eig}(F;\lambda_i) = \mu(P_F,\mu) = 1$ für alle $i = 1,\ldots,n$, d.h. die Voraussetzung für Theorem 4.3.3 ii) ist erfüllt.

2. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom besonders leicht zu berechnen, da A obere Dreiecksmatrix ist. Man erhält

$$P_A(t) = (1-t)(2-t)(3-t)^2 .$$

Nach obiger Bemerkung ist nur $\dim \mathrm{Eig}\,(A;3) = \dim \mathrm{Ker}\,(A - 3E_4)$ zu bestimmen:

$$A - 3E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Der Rang von $A - 3E_4$ ist 2, also gilt $\dim \mathrm{Eig}\,(A;3) = 2 = \mu(P_A;3)$ und A ist diagonalisierbar.

Das charakteristische Polynom und die Eigenräume von

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

haben wir bereits in Aufgabe 1 zu Abschnitt 4.2 bestimmt. Aufgrund von $\dim \mathrm{Eig}\,(B;2) = \mu(P_B;2)$ ist B diagonalisierbar.

Für

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ist

$$P_C(t) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4 = -(t-1)(t-2)^2 .$$

Wir bestimmen $\dim \mathrm{Eig}\,(C;2)$:

$$C - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Hier ist $\dim \mathrm{Eig}\,(C;2) = 1 < 2 = \mu(P_C;2)$ und C nicht diagonalisierbar.

3. Um die Abhängigkeit von den beiden Parametern a und b zu kennzeichnen, bezeichnen wir die gegebene Matrizenschar durch

$$A_{a,b} := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Entwicklung nach der ersten Zeile liefert für das charakteristische Polynom

$$P_{A_{a,b}}(t) = \det \begin{pmatrix} -3-t & 0 & 0 \\ 2a & b-t & a \\ 10 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (-3-t)(b-t)(2-t) .$$

Für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ hat $P_{A_{a,b}}(t)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ drei verschiedene Nullstellen und ist daher nach Satz 4.3.1 diagonalisierbar.

Ist $b = -3$, so lautet $P_{A_{a,-3}}(t) = (-3-t)^2(2-t)$, und wir bestimmen nach dem System von Aufgabe 2 den Rang der Matrix

$$A_{a,-3} + 3E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

der für alle a stets 1 beträgt. Dann gilt

$$\dim \mathrm{Eig}\,(A_{a,-3}; -3) = 2 = \mu\left(P_{A_{a,-3}}; -3\right),$$

und A ist nach Theorem 4.3.3 diagonalisierbar.

Es bleibt der Fall $b = 2$. Hier gilt $P_{A_{a,2}}(t) = (-3-t)(2-t)^2$, daher bestimmen wir $\dim \mathrm{Eig}\,(A_{a,2}; 2)$ in Abhängigkeit von a:

$$A_{a,2} - 2E_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $a = 0$ ist $\mathrm{rang}\,(A_{0,2} - 2E_3) = 1$, d.h. $\dim \mathrm{Eig}\,(A_{0,2}; 2) = 2 = \mu(P_{A_{0,2}}; 2)$, und $A_{0,2}$ ist diagonalisierbar. Ist a allerdings von null verschieden, so gilt $\mathrm{Eig}\,(A_{a,2}; 2) = \mathrm{span}\,{}^t(0,1,0)$, und $A_{a,2}$ ist nicht diagonalisierbar.

Wir fassen zusammen: $A_{a,b}$ ist nur dann nicht diagonalisierbar, wenn $b = 2$ und $a \neq 0$ ist.

4. Wie bereits in 4.3.5 berechnet, lautet das charakteristische Polynom von A

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2.$$

a) Für den Fall $\mu > \omega$ lauten die Nullstellen von $P_A(t)$

$$\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2}.$$

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}\,(A; \lambda_1) &= \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_1 E_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu - \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\,{}^t(1, \lambda_1), \end{aligned}$$

wobei wir $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \omega^2$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = -2\mu$ benutzt haben.

Für den zweiten Eigenraum berechnen wir analog

$$\mathrm{Eig}\,(A; \lambda_2) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_2 E_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\,{}^t(1, \lambda_2).$$

Eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A ist damit gegeben durch

$$\mathscr{B} = \left({}^t(1, \lambda_1), {}^t(1, \lambda_2)\right),$$

und nach Aufgabe 3 zu 4.1 ist

$$\left(e^{\lambda_1 t}(1,\lambda_1), e^{\lambda_2 t}(1,\lambda_2)\right)$$

eine Basis des Lösungsraumes $\mathscr{L}_0$ von $\dot{y} = A \cdot y$. Die allgemeine Lösung von $(*)$ hat die Form

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Die Bedingungen $y_0(0) = \alpha$ und $y_1(0) = \beta$ bedeuten dann

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \quad \text{und} \quad \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 = \beta\,,$$

durch einfache Umformung ergibt sich die Lösung

$$\alpha_1 = \frac{\beta - \lambda_2\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{\beta - \lambda_1\alpha}{\lambda_2 - \lambda_1}\,.$$

Man beachte, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

durch

$$y_0(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

gegeben ist, also sofort aus der oben gefundenen Lösung abgelesen werden kann. Durch die Wahl von 1 für die erste Koordinate der Basen der Eigenräume von A hat diese Lösung eine besonders einfache Form.

b) Für $\mu^2 - \omega^2 < 0$ ist $\omega^2 - \mu^2 > 0$, daher gilt für die Nullstellen $\lambda_{1,2}$ von P_A

$$\lambda_1 = -\mu + \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \mu^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\mu - \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\,.$$

Die Eigenräume berechnen wir wie in a) und erhalten

$$\mathrm{Eig}\,(A;\lambda_1) = \mathrm{span}\,(1,\lambda_1) \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}\,(A;\lambda_2) = \mathrm{span}\,(1,\lambda_2)\,.$$

Damit ist eine Basis des $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von A gegeben durch

$$\mathscr{B} = ((1,\lambda_1),(1,\lambda_2))\,.$$

Um die Lösung von $(*)$ zu bestimmen, setzen wir $\gamma := \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ und multiplizieren den ersten der beiden Basisvektoren aus $\mathscr{B}$ mit $e^{\lambda_1 t}$:

$$v := e^{\lambda_1 t}(1,\lambda_1) = \begin{pmatrix} e^{-\mu t}\cdot e^{\mathrm{i}\gamma t} \\ e^{-\mu t}\cdot(-\mu + \mathrm{i}\gamma)e^{\mathrm{i}\gamma t} \end{pmatrix}.$$

Der Realteil und der Imaginärteil von v bilden eine Basis des Lösungsraumes von $(*)$. Zur deren Berechnung nutzen wir $e^{\mathrm{i}\gamma t} = \cos(\gamma t) + \mathrm{i}\sin(\gamma t)$ (Formel von Euler) und erhalten so

$$\begin{aligned} e^{-\mu t}\cdot e^{\mathrm{i}\gamma t} &= e^{-\mu t}\cos(\gamma t) + \mathrm{i}\cdot e^{-\mu t}\sin(\gamma t)\,, \\ e^{-\mu t}\cdot(-\mu + \mathrm{i}\gamma)e^{\mathrm{i}\gamma t} &= \left(-\mu e^{-\mu t}\cos(\gamma t) - \gamma e^{-\mu t}\sin(\gamma t)\right) \\ &\quad + \mathrm{i}\left(\gamma e^{-\mu t}\cos(\gamma t) - \mu e^{-\mu t}\sin(\gamma t)\right)\,, \end{aligned}$$

also
$$\operatorname{re} v = e^{-\mu t}\begin{pmatrix} \cos(\gamma t) \\ -\mu\cos(\gamma t) - \gamma\sin(\gamma t) \end{pmatrix}$$
und
$$\operatorname{im} v = e^{-\mu t}\begin{pmatrix} \sin(\gamma t) \\ \gamma\cos(\gamma t) - \mu\sin(\gamma t) \end{pmatrix}.$$
Die allgemeine Lösung von $(*)$ hat somit die Form
$$e^{-\mu t}\left(\alpha_1\begin{pmatrix} \cos(\gamma t) \\ -\mu\cos(\gamma t) - \gamma\sin(\gamma t) \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} \sin(\gamma t) \\ \gamma\cos(\gamma t) - \mu\sin(\gamma t) \end{pmatrix}\right),$$
und $y_0(0) = \alpha$ und $y_1(0) = \beta$ bedeuten
$$\alpha_1 = \alpha\,, \quad -\mu\alpha_1 + \gamma\alpha_2 = \beta\,.$$
Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet
$$\alpha_1 = \alpha \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{\beta + \mu\alpha}{\gamma}\,.$$

5. Als erstes berechnen wir die charakteristischen Polynome der beiden Matrizen. Sie lauten
$$P_A(t) = (t+2)(t-1)(t-2)^2 \quad \text{und} \quad P_B(t) = (t+2)(t+1)(t-1)^2\,.$$
Die Eigenvektoren müssen nun (insbesondere zu den doppelt auftretenden Eigenwerten) so gewählt werden, dass sie stets Eigenvektoren von beiden Matrizen sind. Wir ermitteln
$$\begin{aligned}
&\operatorname{Eig}(A;-2) = \operatorname{span}{}^t(1,3,-1,1)\,, && \operatorname{Eig}(B;-2) = \operatorname{span}{}^t(1,1,0,1)\,,\\
&\operatorname{Eig}(A;1) = \operatorname{span}{}^t(1,0,1,0)\,, && \operatorname{Eig}(B;-1) = \operatorname{span}{}^t(1,3,-1,1)\,,\\
&\operatorname{Eig}(A;2) = \operatorname{span}\,({}^t(1,1,1,0), && \operatorname{Eig}(B;1) = \operatorname{span}\,({}^t(1,1,1,0),\\
&\qquad\qquad\qquad {}^t(0,0,-1,1))\,, && \qquad\qquad\qquad {}^t(1,0,1,0))\,.
\end{aligned}$$
Ein Basiswechsel für $\operatorname{Eig}(A;2)$ führt zum gewünschten Ergebnis, nur Vektoren zu verwenden, die Eigenvektoren beider Matrizen sind. Wir wählen daher
$$\operatorname{Eig}(A;2) = \operatorname{span}\,({}^t(1,1,1,0), {}^t(1,1,0,1)),$$
denn ${}^t(0,0,-1,1) = -{}^t(1,1,1,0) + {}^t(1,1,0,1)$, siehe Austauschlemma 1.5.4. Die Eigenvektoren, die die Spalten von S^{-1} bilden sollen, sind nun noch in eine Reihenfolge zu bringen, die gewährleistet, dass in den Diagonalmatrizen SAS^{-1} und SBS^{-1} gleiche Eigenwerte nebeneinander stehen. Wir wählen
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$
sie liefern das gewünschte Ergebnis.

6. Seien $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die Eigenwerte von A und $v_1,\dots,v_k$ die zugehörigen Eigenvektoren. Ferner seien $\mu_1,\dots,\mu_l$ die Eigenwerte von B und $w_1,\dots,w_l$ die zugehörigen Eigenvektoren. Wegen $BA(w_i) = AB(w_i) = \mu_i A(w_i)$ ist $A(w_i)$ Eigenvektor von B zum Eigenwert μ_i. Da jedoch alle Eigenwerte von B einfach sind, existiert ein $\lambda \in K$ mit $A(w_i) = \lambda w_i$, also ist w_i Eigenvektor von A. Genauso kann man zeigen, dass alle Eigenvektoren von A auch Eigenvektoren von B sind.

7. Wir betrachten die obere Dreiecksmatrix

$$A := \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} & \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & a_{\mu-1,\mu} & 0 \\ 0 & & & \lambda & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right) \in M(n \times n; K)\,.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$P_A(t) = (\lambda - t)^{\mu} \cdot (-t)^{n-\mu}\,,$$

also $\mu(P_A;\lambda) = \mu$. $\dim \mathrm{Eig}\,(A;\lambda) = 1$ ist gleichbedeutend mit

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{\mu-1,\mu} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = n-1\,.$$

Das gilt z.B. für $a_{i,i+1} = 1$ für $i = 1,\dots,\mu-1$ und $a_{ij} = 0$ für $j > i+1$. Damit erfüllt A die gewünschten Bedingungen.

Matrizen vom Typ wie die obige Matrix spielen eine besondere Rolle bei der Bestimmung von Jordanschen Normalformen, vgl. Abschnitt 4.6 in [Fi1].

8. Die angegebenen Matrizen erfüllen offensichtlich die Gleichung $A^2 = E_2$. Sei andererseits $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2; K)$ gegeben. Notwendig für $A^2 = E_2$ ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$a^2+bc = 1 = bc+d^2\,, \quad (a+d)b = 0 = (a+d)c\,.$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

1) Für $a+d \neq 0$ folgt $b = c = 0$, d.h. $a^2 = 1 = d^2$, und damit wegen $a \neq -d$ und $\operatorname{char} K \neq 2$ gerade $A = E_2$ oder $A = -E_2$.

2) Ist $a+d = 0$, so gilt $a = -d$. Das charakteristische Polynom von A lautet in

diesem Fall

$$P_A(t) = t^2 - a^2 - cb$$

mit den Nullstellen

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + cb} = \pm 1\,.$$

Nach Satz 4.3.1, Teil 2) ist A diagonalisierbar. Daraus folgt die Existenz eines $S \in \mathrm{GL}(2;K)$ mit $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$, also gilt $SDS^{-1} = A$.

9. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von F, und $\mathscr{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Basis aus den zugehörigen Eigenvektoren. Für $v_i, v_j \in \mathscr{A}$ mit $i \neq j$ ist $v_i + v_j \neq 0$, daher gibt es ein λ mit $F(v_i + v_j) = \lambda(v_i + v_j)$, und es gilt

$$\lambda_i v_i + \lambda_j v_j = F(v_i) + F(v_j) = F(v_i + v_j) = \lambda(v_i + v_j) = \lambda v_i + \lambda v_j\,.$$

Da v_i und v_j linear unabhängig sind, ist die Darstellung eines jeden Vektors in $\mathrm{span}\,(v_i, v_j)$ eindeutig, also folgt $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$. Dies gilt für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$, daher ist λ der einzige Eigenwert von F.

Sei nun $0 \neq v = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i v_i \in V$ beliebig. Dann gilt

$$F(v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot F(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \lambda \cdot v_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \lambda \cdot v\,,$$

d.h. $F = \lambda \cdot \mathrm{id}$.

10. Da t ein Teiler der Ordnung 1 von $P_A(t)$ ist, gilt $\mathrm{rang}\,A = 2$, d.h. die Spalten von A sind linear abhängig.

Andererseits ist 0 kein Eigenwert von B, das heißt $\mathrm{Ker}\,B = (0)$ und B hat Rang 3, ist also invertierbar.

Da bei der Multiplikation einer Matrix A mit einer invertierbaren Matrix B der Rang des Produktes AB gleich dem Rang der Matrix A ist (vgl. Hilfssatz 2.6.6), folgt

$$\mathrm{rang}\,AB = \mathrm{rang}\,A = 2 \quad \text{und} \quad \dim \mathrm{Ker}\,AB = 3 - \mathrm{rang}\,AB = 1\,.$$

Lösung der Ergänzungsaufgabe

E1. a) Die ersten zehn Folgenglieder lauten:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix},$$
$$v_6 = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad v_7 = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad v_8 = \begin{pmatrix} 21 \\ 34 \end{pmatrix}, \quad v_9 = \begin{pmatrix} 34 \\ 55 \end{pmatrix}, \quad v_{10} = \begin{pmatrix} 55 \\ 89 \end{pmatrix}.$$

Bei den Einträgen in diesen Vektoren handelt es sich um die sogenannten FIBONACCI-Zahlen. Wer mehr darüber erfahren möchte, kann z.B. bei [W] Abschnitt 1.2.3, [Enz] S. 108ff., [Fo1] Kapitel 6, Aufgabe 6.7, nachschlagen.

b) Zunächst ist das charakteristische Polynom zu bestimmen. Es gilt

$$P_F(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - t - 1 = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\,,$$

wobei die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lauten. Nach Satz 4.3.1, Teil 2) ist F diagonalisierbar.

Die folgenden Beziehungen zwischen λ_1 und λ_2 erleichtern die Rechnung: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ als auch $\lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{5}$. (Bei $\frac{1}{\lambda_1} = -\lambda_2$ handelt es sich um den sogenannten *Goldenen Schnitt*, vgl. [A-Z], Kapitel 33.)

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i ergeben sich als die Kerne der Abbildungen $A - \lambda_i E_2$ für $i = 1, 2$.

$$\mathrm{Eig}\,(F, \lambda_i) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 \\ 1 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} = \mathrm{span} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Damit besitzt $\mathbb{R}^2$ eine Basis von Eigenvektoren zu F: $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

c) Sei $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Da $\det T = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ ist, lässt sich T invertieren. Es gilt: $Te_i = v_i$ sowie $Av_i = \lambda_i v_1$ und $T^{-1}v_1 = e_i$, wobei durch e_i die Einheitsvektoren bezeichnet sind. Daher gilt

$$De_i = T^{-1}ATe_i = \lambda_i e_i\,,$$

und wir finden

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

d) Zunächst ist

$$T^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{(TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdot \ldots \cdot (TDT^{-1})}_{n-\mathrm{mal}} \\ &= TD^nT^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 \cdot \lambda_1^n - \lambda_1 \cdot \lambda_2^n & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ \lambda_2 \cdot \lambda_1^{n+1} - \lambda_1 \cdot \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &\overset{\circledast}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^n - \lambda_1^n \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n & \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $\circledast$ die obigen Beziehungen zwischen λ_1 und λ_2 verwendet wurden.

Damit erhalten wir $v_n = A^n v_0 = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$, und die FIBONACCI-Zahl a_n können wir ohne Rekursionsformel berechnen durch

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

4.4 Trigonalisierung*

1. Nehmen wir an, es gibt ein solches $P \in \mathbb{Q}[t]$. Dann gibt es ein $1 \leqslant m \leqslant n-1$ mit

$$P(t) = \alpha_0 t^m + \alpha_1 t^{m-1} + \ldots + \alpha_m .$$

In $\mathbb{C}[t]$ gibt es eine Zerlegung

$$t^n - 2 = \prod_{j=1}^{n}\left(t - \sqrt[n]{2}\cdot\zeta^j\right),$$

wobei $\zeta := e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}\cdot j}$ eine *n-te Einheitswurzel* ist, und diese Zerlegung ist bis auf Einheiten eindeutig. Für jedes P mit den gewünschten Voraussetzungen müssen daher $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$ existieren mit

$$P(t) = \alpha \prod_{j=j_1}^{j_m}\left(t - \sqrt[n]{2}\cdot\zeta^j\right),$$

woraus

$$\alpha_m = \alpha\cdot(-1)^m\cdot 2^{\frac{m}{n}}\cdot\zeta^l \quad \text{mit} \quad l = \sum_{i=1}^{m} j_i$$

folgt. Da alle nichtkomplexen Einheitswurzeln 1 oder -1 sind, muss für $\alpha_m \in \mathbb{Q}$ notwendig $2^{\frac{m}{n}} \in \mathbb{Q}$ gelten. Dies ist nun zu widerlegen.

Der Beweis für die Irrationalität von $2^{\frac{m}{n}}$ wird analog zum Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ geführt. Nehmen wir also an, es wäre $2^{\frac{m}{n}} \in \mathbb{Q}$, dann gibt es teilerfremde Zahlen $p,q \in \mathbb{Z}$ mit $2^{\frac{m}{n}} = \frac{p}{q}$. Daraus folgt jedoch $2^m = \frac{p^n}{q^n}$, was äquivalent zu $q^n\cdot 2^m = p^n$ ist. Da 2 prim ist, ist 2 ein Teiler von p, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2r$. Damit folgt jedoch $q^n 2^m = r^n 2^n$, und wegen $n > m$ folgt daraus $q^n = 2^{n-m} r^n$, d.h. 2 ist ein Teiler von q, weil 2 prim ist. Damit haben p und q einen gemeinsamen Primteiler, was der Voraussetzung widerspricht.

Wir haben gezeigt, dass $2^{\frac{m}{n}}$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ irrational ist, daher ist α_m für alle m irrational, und $t^n - 2$ kann keinen Teiler $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $1 \leqslant \deg P \leqslant n-1$ besitzen. Ein Polynom wie dieses, das nicht das Produkt zweier Polynome kleineren Grades ist, heißt *irreduzibel*.

2. Wir behandeln zuerst die Matrix

$$A_1 := A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bzgl. der kanonischen Basis $\mathscr{B}_1 = \mathscr{K}$. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$P_A(t) = -(t-1)^3$$

aber $\dim \mathrm{Eig}\,(A;1) = 1 < 3 = \mu(P_A;1)$, daher ist A zwar trigonalisierbar, nicht jedoch diagonalisierbar.

Im ersten Schritt wählen wir nach der Umformung

$$A_1 - E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = {}^t(1,-1,1)$, $\lambda_1 = 1$, $j_1 = 1$. Damit gilt $\mathscr{B}_2 = (v_1, e_2, e_3)$ sowie

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus folgt

$$A_2 := S_1 \cdot A_1 \cdot S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt betrachten wir zunächst die Matrix $A_2' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und die Basis $\mathscr{B}_2' = (e_2, e_3)$. Aus $P_{A_2'}(t) = (t-1)^2$ folgern wir $\lambda_2 = 1$, und mit

$$A_2' - E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen wir $v_2 = {}^t(0,1,-1)$ sowie $j_2 = 2$, d.h. $\mathscr{B}_3 = (v_1, v_2, e_3)$, woraus

$$S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt. Damit erhalten wir schließlich

$$A_3 := S_2 \cdot A_1 \cdot S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

eine obere Dreiecksmatrix.

Für die Matrix

$$B_1 := B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

verfahren wir wie im ersten Teil der Aufgabe. Die sich dabei ergebenden Matrizen S_1 und S_2 sind exakt dieselben wie im obigen Beispiel, und die Matrix

$$B_3 := S_2 \cdot B_1 \cdot S_2^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist eine obere Dreiecksmatrix.

3. Der Induktionsanfang ist schnell behandelt, denn für $\dim V = 0,1$ gilt $F = 0$ für alle nilpotenten Endomorphismen.

Nun kommen wir zum Induktionsschritt. Ist $F = 0$, so sind wir fertig. Andernfalls gilt $\dim F(V) < \dim V$ für einen nilpotenten Endomorphismus F, mit anderen Worten $\operatorname{Ker} F \neq 0$ und 0 ist Eigenwert. (0 ist sogar einziger Eigenwert, vgl. Aufgabe 1 zu 4.1.) Sei $0 \neq v_1 \in \operatorname{Ker} F$. Wir ergänzen v_1 zu einer Basis $\mathscr{B}' = (v_1, w_2, \ldots, w_n)$ von V; es gilt dann

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(F) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

Da $W := \operatorname{span}(w_2, \ldots, w_n)$ im Allgemeinen nicht F-invariant ist, definieren wir wie im Beweis des Trigonalisierungssatzes 4.4.3 die linearen Abbildungen

$$H(w_j) = a_{1j} v_1 \quad \text{und} \quad G(w_j) = a_{2j} w_2 + \ldots + a_{nj} w_n .$$

Dann gilt $F(w) = H(w) + G(w)$ für alle $w \in W$, und bezüglich der Basis $\tilde{\mathscr{B}}' = (w_2, \ldots, w_n)$ gilt $B = M_{\tilde{\mathscr{B}}'}(G)$. Ferner gilt $\operatorname{Im} H \subset \operatorname{Ker} F$ und G ist nilpotent, denn wegen der Nilpotenz von F gilt für alle $w \in W$

$$\begin{aligned} 0 = F^k(w) &= F^{k-1}(F(w)) \\ &= F^{k-1}(H(w) + G(w)) = F^{k-1}(\lambda v_1 + G(w)) \\ &= F^{k-1}(G(w)) = F^{k-2}\left(G^2(w)\right) = \ldots = G^k(w) . \end{aligned}$$

Wegen $\dim W = \dim V - 1$ können wir auf G die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt eine Basis $\tilde{\mathscr{B}} = (v_2, \ldots, v_n)$ von W, so dass

$$\mathrm{M}_{\tilde{\mathscr{B}}}(G) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die Basis $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_F(t) = (-1)^n t^n .$$

Mit etwas mehr Wissen über Algebra kann der Beweis deutlich gekürzt werden. Im Zerfällungskörper $\tilde{K}$ (siehe [W], Abschnitt 6.2) des charakteristischen Polynoms P_F hat dieses mit Hilfe von Aufgabe 1 zu Abschnitt 4.1 die Form $P_F(t) = (-1)^n t^n$, und mit dem Trigonalisierungssatz 4.3.3 folgt die Behauptung.

4. Wegen $\mu = \omega$ gilt
$$A_1 := A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & -2\mu \end{pmatrix}.$$
Weil $P_A(t) = (t+\mu)^2$ in Linearfaktoren zerfällt, ist A nach 4.4.3 trigonalisierbar. Dass A nicht diagonalisierbar ist, wurde bereits in 4.3.5 gezeigt. $v_1 = (1, -\mu)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -\mu$, und mit $j_1 = 1$ bestimmen wir $\mathscr{B}_2 = (v_1, e_2)$, womit
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$$
und damit
$$B := S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$
folgt.

Mit der Substitution $z := Sy$ geht das System $\dot{y} = Ay$ über in
$$B \cdot z = SAS^{-1} \cdot Sy = SAy = S\dot{y} = \dot{z}.$$
Aus der zweiten der beiden Gleichungen
$$\dot{z}_0 = -\mu z_0 + z_1 \quad \text{und} \quad \dot{z}_1 = 0z_0 - \mu z_1$$
folgt zunächst $z_1 = a \cdot e^{-\mu t}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Im Fall $a = 0$ ist $\dot{z}_0 = -\mu z_0$, eine von 0 verschiedene Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch $z_0 = b \cdot e^{-\mu t}$ mit $b \in \mathbb{R} \setminus 0$. Für $z_1 = e^{-\mu t}$, d.h. $a = 1$, gilt $\dot{z}_0 = -\mu z_0 + e^{-\mu t}$. Mit Hilfe der Methode der *Variation der Konstanten* (siehe [Fo2], §11) folgt daraus $z_0 = t \cdot e^{-\mu t}$. Insgesamt erhalten wir die beiden linear unabhängigen Lösungen ${}^t(e^{-\mu t}, 0)$ und ${}^t(t \cdot e^{-\mu t}, e^{-\mu t})$, die ein Fundamentalsystem bilden. Aus diesen beiden Lösungen des Systems $\dot{z} = Bz$ erhalten wir durch die Transformation mit S^{-1} Lösungen des Systems $\dot{y} = Ay$, denn aus $z = Sy$ folgt $S^{-1}z = y$. Damit folgt
$$S^{-1} \begin{pmatrix} e^{-\mu t} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-\mu t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix}$$
und
$$S^{-1} \begin{pmatrix} t \cdot e^{-\mu t} \\ e^{-\mu t} \end{pmatrix} = e^{-\mu t} \begin{pmatrix} t \\ -\mu t + 1 \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

daher ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{y}+2\mu\dot{y}+\mu^2y=0$ gegeben durch $\varphi(t) = \alpha_1 e^{-\mu t} + \alpha_2 te^{-\mu t}$. Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0)=\alpha$, $\dot{\varphi}(0)=\beta$ lesen wir aus $(*)$ ab:

$$\alpha_1=\alpha \quad \text{und} \quad \alpha_2=\beta+\alpha\mu\,,$$

also $\varphi(t)=\alpha\cdot e^{-\mu t}+(\beta+\alpha\mu)t\cdot e^{-\mu t}$.

Man beachte, dass mit Hilfe der Methode aus Aufgabe 4 zu Abschnitt 4.3 nur die Lösung $y_0=e^{-\mu t}$ gewonnen werden kann. Dies liegt daran, dass in Aufgabe 3 aus Abschnitt 4.1 der Ansatz $e^{\lambda t}v$ für die Lösung gemacht wurde, nicht etwa $f(t)\cdot e^{\lambda t}$. Zur allgemeinen Theorie solcher Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten vgl. [Fo2], §13.

4.5 Potenzen eines Endomorphismus*

1. Ist λ ein Eigenwert von F, so existiert ein $0\neq v\in V$ mit $F(v)=\lambda v$. Für ein $P(t)=\alpha_r t^r+\ldots+\alpha_1 t+\alpha_0\in K[t]$ gilt

$$\begin{aligned} P(F)(v) &= \alpha_r F^r(v)+\ldots+\alpha_1 F(v)+\alpha_0\mathrm{id}_V(v)\\ &= \alpha_r\lambda^r v+\ldots+\alpha_1\lambda v+\alpha_0 v=P(\lambda)\cdot v\,. \end{aligned}$$

2. Seien $P(t):=\alpha_r t^r+\ldots+\alpha_0$ und $Q(t):=\beta_s t^s+\ldots+\beta_0$. Dann gilt aufgrund der Linearität von F für alle $v\in V$

$$\begin{aligned} P(F)\circ Q(F)(v) &= P(F)\left(\beta_s F^s(v)+\ldots+\beta_1 F(v)+\beta_0\mathrm{id}_V(v)\right)\\ &= \alpha_r F^r\left(\beta_s F^s(v)+\ldots+\beta_1 F(v)+\beta_0 v\right)+\ldots\\ &\quad +\alpha_0\left(\beta_s F^s(v)+\ldots+\beta_1 F(v)+\beta_0 v\right)\\ &= \sum_{k=0}^{r+s}\left(\sum_{i+j=k}\alpha_i\beta_j F^k\right)(v)=(P\cdot Q)(v)\,. \end{aligned}$$

Aus der Kommutativität von $K[t]$ folgt der Rest.

3. a) Φ_F ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt mit den Bezeichnungen aus der Lösung von Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \Phi_F(P+Q) &= (P+Q)(F)\\ &= \alpha_r F^r+\ldots+\alpha_0+\beta_s F^s+\ldots+\beta_0\\ &= P(F)+Q(F)\,. \end{aligned}$$

Dass Φ_F ein Ringhomomorphismus ist, folgt aus Aufgabe 2. Die K-Linearität folgt schließlich aus

$$\begin{aligned} \lambda\Phi_F(P) &= \lambda\left(P(F)\right)=\lambda\left(\alpha_r F^r+\ldots+\alpha_0\right)\\ &= \lambda\alpha_r F^r+\ldots+\lambda\alpha_0=\Phi_F(\lambda P)\,. \end{aligned}$$

b) Die Kommutativität folgt aus Aufgabe 2, der Rest aus Teil a).

c) Für $\dim V = n$ gilt $\dim \mathrm{End}(V) = n^2$. Daher sind die Endomorphismen $\mathrm{id}_V, F, F^2, \ldots, F^{n^2}$ linear abhängig in $\mathrm{End}(V)$, d.h. es existieren $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n^2} \in K$, die nicht alle 0 sind, mit

$$\gamma_{n^2} F^{n^2} + \ldots + \gamma_1 F + \gamma_0 = 0 \in \mathrm{End}(V)\,.$$

Sei $r := \max\{i\colon\ 0 \leqslant i \leqslant n^2 \text{ und } \gamma_i \neq 0\}$. Es gilt $\gamma_{r_i} F^{r_i} + \ldots + \gamma_0 = 0$, also $F^{r_i} + \ldots + \frac{\gamma_0}{\gamma_{r_i}} = 0$. Das Polynom $P := t^{r_i} + \ldots + \frac{\gamma_1}{\gamma_{r_i}} t + \frac{\gamma_0}{\gamma_{r_i}}$ hat die gewünschten Eigenschaften.

Nach der Definition aus Aufgabe 7 zu 6.3 sind $K[t]$ und $\mathrm{End}(V)$ sogar K-*Algebren*, und Teil a) besagt gerade, dass Φ_F ein K-*Algebra-Homomorphismus*, also gleichzeitig ein Homomorphismus von K-Vektorräumen und Ringen, der Einselemente aufeinander abbildet (vgl. [P], Section 1.1), ist. Weiter ist in dieser Schreibweise $K[F]$ eine *Unteralgebra* von $K[t]$.

4. Diese Aufgabe ist durch einfache Rechnung zu lösen.

5. $F \in \mathrm{End}(V)$ sei diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis von V mit

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: A\,.$$

Dann lautet das charakteristische Polynom

$$P_A(t) = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$$

und somit

$$P_A(A) = (\lambda_1 E_n - A) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n E_n - A).$$

Es ist zu zeigen, dass $P_A(t)$ die Nullmatrix ist. Die i-te Faktormatrix $\lambda_i E_n - A$ hat die Form

$$\lambda_i E_n - A = \begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_i - \lambda_{i-1} & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \lambda_i - \lambda_{i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \lambda_i - \lambda_n \end{pmatrix},$$

enthält also in der i-ten Zeile nur Nullen. Ein Produkt von n Matrizen, für die $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt und unter denen für alle $i = 1, \ldots, n$ eine Matrix mit $a_{ii} = 0$ existiert, kann nach den Regeln der Matrizenmultiplikation nur die Nullmatrix sein.

6. a) Es sei $w \in W$, d.h. $w = \lambda_0 v + \lambda_1 F(v) + \ldots + \lambda_{k-1}F^{k-1}(v)$. Dann gilt
$$F(w) = \lambda_0 F(v) + \lambda_1 F^2(v) + \ldots + \lambda_{k-2}F^{k-1}(v) + \lambda_{k-1}F^k(v).$$
Da k maximal gewählt ist, gilt $F^k(v) \in \operatorname{span}(v, \ldots, F^{k-1}(v))$. Damit existieren $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \in K$ mit
$$F^k(v) = -\alpha_0 v - \alpha_1 F(v) - \ldots - \alpha_{k-1}F^{k-1}(v). \quad \circledast$$
Hiermit folgt
$$F(w) = -\lambda_{k-1}\alpha_0 v + (\lambda_0 - \lambda_{k-1}\alpha_1)F(v) + \ldots + (\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1}\alpha_{k-1})F^{k-1}(v) \in W.$$
Da $w \in W$ beliebig ist, gilt $F(W) \subset W$. Damit ist W jedoch F-invariant.

Nach $\circledast$ gilt
$$\alpha_0 v + \alpha_1 F(v) + \ldots + \alpha_{k-1}F^{k-1}(v) + F^k(v) = 0.$$
Dies lässt sich für W durch die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & -\alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$
dargestellt, und nach Aufgabe 4 in Abschnitt 4.2 folgt damit für $G := F|W$
$$P_G(t))(-1)^k(t^k + \alpha_{k-1}t^{k-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0).$$
b) Zu zeigen ist $P_G(G)\big(F^i(v)\big) = 0$ für $i = 0, \ldots, k-1$, denn damit gilt $P_G(G)(W) = 0$.

Es gilt
$$\begin{aligned} F_G(G)\big(F^i(v)\big) &= (-1)^k\big(F^k\left(F^i(v)\right) + \alpha_{k-1}F^{k-1}\left(F^i(v)\right) + \ldots \\ &\quad + \alpha_1 F\left(F^i(v)\right) + \alpha_0 F^i(v)\big) \\ &= F^i\Big((-1)^k(F^k(v) + \alpha_{k-1}F^{k-1}(v) + \ldots + \alpha_0 v)\Big) \\ &= F^i(0) = 0 \end{aligned}$$
für alle $i = 0, \ldots, k-1$. Hieraus folgt $P_G(G)(W) \equiv 0$.

c) Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist klar.

Mit den Bezeichnungen aus Teil a) und b) ist W ein Untervektorraum von V. Es sei $\tilde{W}$ ein Untervektorraum von V, so dass $V = W \oplus \tilde{W}$ gilt. Ist $\tilde{\mathscr{B}} = (w_{k+1}, \ldots, w_n)$ eine Basis von $\tilde{W}$, so ist
$$\mathscr{B} = (v, F(v), \ldots, F^{k-1}(v), w_{k+1}, \ldots, w_n)$$
eine Basis von V. Bezüglich dieser Basis gilt
$$M := M_{\mathscr{B}}(F) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

Nach der Bemerkung 4.4.1 gilt (wobei D9 verwendet wird)

$$P_M(M) = P_A(M) \cdot P_B(M).$$

Es sei $\pi\colon\ V \to \tilde{W}$ die kanonische Projektion. Dann gilt

$$P_F(F) = P_{F|W}(F) \cdot P_{\pi\circ F|\tilde{W}}(F).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $P_B(B) = 0$, woraus $P_{\pi\circ F|\tilde{W}}(F)(w) = 0$ für alle $w \in \tilde{W}$, d.h. $P_{\pi\circ F|\tilde{W}}(F) \equiv 0$ folgt. In Teil a) wurde $P_A(A) = 0$ gezeigt, woraus $P_{F|W}(F)(w) = 0$ für alle $w \in W$, d.h $P_{F|W}(F) \equiv 0$ folgt. Hiermit gilt $P_F(F) \equiv 0$.

7. Es ist $P_F(t) = \pm(t-\lambda_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_r)^{s_r}$ mit $s_1 + \ldots + s_r = n = \dim V$. Sei nun $M := (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_r)$. Zu zeigen ist $M = M_F$. Nach Beispiel 4.5.1 gilt $M(F) = 0$, d.h. $M \in \mathscr{I}_F$. Da nach Satz 4.5.6 P_F ein Teiler von M_F^n ist, muss M_F^n jedes $(t-\lambda_i)$ als Teiler enthalten (da diese Elemente irreduzibel sind), woraus $(t-\lambda_i)|M_F$ für alle i folgt. Damit ist M ein Teiler von M_F und $\deg M \leqslant \deg M_F$. Aus der Minimalität von M_F folgt dann $\deg M = \deg M_F$, und da M und M_F normiert sind, folgt $M = M_F$.

4.6 Die Jordansche Normalform*

1. i) Für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist

$$P_A(t) = (t-1)^3(t+1)\,.$$

Wegen $\mathrm{Hau}\,(A;\lambda) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda E_4)^{\mu(P_A;\lambda)}$ (vgl. 4.6.1) gilt

$$\mathrm{Hau}\,(A;-1) = \mathrm{Eig}\,(A;-1) = \mathrm{span}\,\left({}^t(0,-2,3,2)\right)$$

sowie $\mathrm{Hau}\,(A;1) = \mathrm{Ker}\,(A-E_4)^3$. Eine Rechnung ergibt

$$(A-E_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

also $\mathrm{Hau}\,(A;1) = \mathrm{span}\,({}^t(1,0,0,0), {}^t(0,1,0,0), {}^t(0,0,1,0))$.

Für die Berechnung der Jordanschen Normalform ist eine andere Wahl der Hauptraumvektoren nötig, z.B. die folgende:

$$\mathrm{Hau}\,(A;1) = \mathrm{span}\,\left\{{}^t\left(1,0,0,0\right), {}^t\left(0,\tfrac{1}{4},0,0\right), {}^t\left(0,-\tfrac{1}{16},\tfrac{1}{8},0\right)\right\}.$$

Dann ist

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

was

$$T^{-1}AT = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

liefert.

ii) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ & 2 & 7 & 2 & 8 \\ & & 2 & 5 & 4 \\ & & & -1 & -4 \\ & & & & -1 \end{pmatrix} =: B$$

hat (wegen ihrer Dreiecksform leicht einsehbar) das charakteristische Polynom

$$P_B(t) = -(t-2)^3(t+1)^2\,;$$

sie hat daher die Eigenwerte 2 und -1. Wir berechnen den Kern der Matrix

$$B - 2E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ & 0 & 7 & 2 & 8 \\ & & 0 & 5 & 4 \\ & & & -3 & -4 \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

der von ${}^t(1,0,0,0,0)$ aufgespannt wird. Da der Eigenwert 2 jedoch die Vielfachheit 3 hatte, was man am charakteristischen Polynom ablesen kann, müssen wir noch zwei Hauptraumvektoren zum Eigenwert 2 bestimmmen. Dafür gibt es verschiedene Rechenmöglichkeiten. Wir bestimmen eine Lösung des LGS

$$(B - 2E_5) \cdot x = {}^t(1,0,0,0,0)\,,$$

also zum Beispiel $x = {}^t\left(0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$, als ersten Hauptraumvektor. Dieses Vorgehen ist korrekt, weil damit $B \cdot x = 2 \cdot x + 1 \cdot {}^t(1,0,0,0,0)$ gilt, was wunschgemä gerade den Einträgen in einer Spalte der späteren Jordanschen Normalform entspricht. Den zweiten Hauptraumvektor errechnen wir genauso als Lösung des LGS

$$(B - 2E_5) \cdot y = {}^t\left(0, \tfrac{1}{3}, 0, 0, 0\right)\,,$$

eine Möglichkeit ist $y = {}^t(0, -\frac{1}{21}, \frac{1}{21}, 0, 0)$.

Mit dem Eigenwert -1 verfahren wir ganz genauso. Als Basis des Kerns der Matrix

$$B+E_5=\begin{pmatrix}3&3&3&1&8\\&3&7&2&8\\&&3&5&4\\&&&0&-4\\&&&&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}3&3&3&1&0\\&3&7&2&0\\&&3&5&0\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$$

ergibt sich der Eigenvektor ${}^t(17,-29,15,-9,0)$. Der zugehörige Hauptraumvektor ist eine Lösung des LGS

$$(B+E_5)\cdot z={}^t(17,-29,15,-9,0)\,.$$

$z={}^t\left(18,-\frac{61}{3},2,0,\frac{9}{4}\right)$ ist eine mögliche Lösung.

Damit sind die Haupträume vollständig bestimmt. Auerdem liefern diese Rechnungen die Transformationsmatrix T, in deren Spalten die Eigen- und Hauptraumvektoren stehen:

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0&17&18\\&\frac{1}{3}&-\frac{1}{21}&-29&-\frac{61}{3}\\&&\frac{1}{21}&15&2\\&&&-9&0\\&&&&\frac{9}{4}\end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{17}{9}&-8\\&3&3&-\frac{14}{3}&\frac{220}{9}\\&&21&35&-\frac{56}{3}\\&&&-\frac{1}{9}&0\\&&&&\frac{4}{9}\end{pmatrix},$$

und als Probe bestätigen wir die Jordansche Normalform

$$T^{-1}BT=\left(\begin{array}{ccc|cc}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\\hline 0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{array}\right).$$

2. Wir wählen die Bezeichnungen wie in Beispiel 4.6.8 und stellen ein weiteres Verfahren zu dem aus Aufgabe 1 zur Ermittlung der Transformationsmatrix und der Jordanschen Normalform vor.

i) Für die Matrix

$$A:=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{ist}\quad P_A(t)=-t^3\,.$$

Einziger Eigenwert von A ist somit 0, was nach Aufgabe 1 zu Abschnitt 4.1 nicht verwunderlich ist. Wir berechnen zunächst die Potenzen von A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = (0).$$

Daraus bestimmen wir

$$\begin{aligned} U_1 &:= \operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\left({}^t(1,0,0)\right), \\ U_2 &:= \operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{span}\left({}^t(1,0,0), {}^t(0,1,0)\right). \end{aligned}$$

Aus den Zerlegungen

$$\mathbb{R}^3 = U_2 \oplus W_3 = U_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = U_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$$

bestimmen wir $\dim W_3 = \dim W_2 = \dim W_1$, d.h. $s_3 = 1$, $s_2 = s_1 = 0$, was auch wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \min\{d \in \mathbb{N}\colon\ A^d = 0\}$ klar ist. Daher sind die Basisvektoren, bzgl. derer die Abbildung A Jordansche Normalform hat, gegeben durch die drei Vektoren

$$e_3 \in W_3, \quad A \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2, \quad A^2 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1.$$

Zur Probe bestimmen wir

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

womit folgt

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wie es sein muss.

Schließlich ist das Minimalpolynom nach dem Lemma von Fitting 4.6.2 gegeben durch $M_A(t) = t^3$.

ii) Wir betrachten die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zunächst als Endomorphismus des $\mathbb{C}^5$. Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren, es gibt also mit Vielfachheit gezählt genau fünf Eigenwerte. Da jedoch B nilpotent ist, ist 0 der einzige Eigenwert von B, und daraus folgt $P_B(t) = -t^5 \in \mathbb{C}[t]$. Alle Nullstellen sind reell, also gilt $P_B(t) = -t^5$ auch für den

Endomorphismus $B\colon\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$. Wir können uns daher die aufwändige Rechnung zur Bestimmung von $P_B(t)$ sparen.

Wir berechnen zunächst

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^3 = 0\,.$$

Das Minimalpolynom von B lautet dann $M_B(t) = t^3$. Aus $\operatorname{rang} B = 3$ lesen wir $\dim U_1 = 2$ ab, aus $\operatorname{rang} B^2 = 1$ folgt $\dim U_2 = 4$, und $\dim U_3 = 5$ ist ohnehin klar. Anhand von $\mathbb{R}^5 = U_2 \oplus W_3$ bestimmen wir zunächst $s_3 = 1$, und anhand der Matrix B^2 sehen wir, dass e_5 eine mögliche Basis für W_3 ist. Aus $\mathbb{R}^5 = U_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ folgt $s_2 = 1$, was man auch mit Hilfe der Formel $s_2 = \dim U_2 - \dim U_1 - \dim W_3 = 1$ aus 4.6.5 bestimmen kann. Der Vektor $B \cdot e_5 = {}^t(2,3,-3,-2,2)$ ist in jedem Falle in einer Basis von W_2 vertreten. Er kann sinnvoll durch e_4 zu einer Basis von W_2 ergänzt werden. Nun folgt aus $\mathbb{R}^5 = U_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ gerade $\dim W_1 = 2$, also $s_1 = 0$, was ebenfalls mit der Formel aus 4.6.5 berechnet werden kann. Daher ist durch die Vektoren $B^2 e_5 = {}^t(2,2,-1,0,1)$ und $Be_4 = {}^t(-1,0,-1,-1,0)$ die geeignete Basis von W_1 gegeben. Ordnen wir die Basisvektoren wie im Beweis von Theorem 4.6.5 an, so ergibt sich folgendes Schema:

$$\begin{array}{ll} e_5\,, & \\ {}^t(2,3,-3,-2,2)\,, & e_4\,, \\ {}^t(2,2,-1,0,1)\,, & {}^t(-1,0,-1,-1,0)\,. \end{array}$$

Eine Basis, bezüglich der B Jordansche Normalform hat, ist durch diese fünf Vektoren gegeben. Wir wollen dies noch einmal explizit überprüfen. Es ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus folgt

$$TBT^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} d = 3 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\end{array}}\right\} d-1 = 2\,. \end{array}$$

Die Linien begrenzen dabei die Jordan-Blöcke, $d = \min\{l\colon\ G^k = 0\}$. Mit den

Bezeichnungen aus Theorem 4.6.5 ist also
$$5 = \dim V = 3 \cdot s_3 + 2 \cdot s_2 + 1 \cdot s_1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0.$$

3. Wir haben bereits in den Lösungen zu Aufgaben 1 und 2 dieses Abschnitts zwei verschiedene Möglichkeiten kennengelernt, eine Transformationsmatrix zur Jordanschen Normalform zu bestimmen. Welche Methode man vorzieht, bleibt jedem/jeder selbst überlassen; wir wollen uns jedoch stets auf die Vorführung einer Rechnung beschränken.

Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
hat das charakteristische Polynom $P_A(t) = -(t-2)^3$. Als eine Basis des Kerns der Matrix
$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ermitteln wir den Eigenvektor $v = {}^t(1,-1,1)$. Damit ist jetzt schon klar, dass die Jordanform von A nur aus einem Jordanblock der Länge 3 besteht. In dieser Aufgabe ist jedoch auch eine Basis gefragt, bezüglich der A Jordanform hat, und das Minimalpolynom soll bestimmt werden. Dieses lautet $M_A(t) = (t-2)^3$, weil $(A-2E_3)^2 \neq 0$ ist, siehe Satz 4.5.5.

Der Vektor $x = {}^t(1,0,0)$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems $(A-2E_3) \cdot x = {}^t(1,-1,1)$ und wird somit unser erster Hauptraumvektor. Analog bestimmen wir $y = {}^t\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$ als Lösung von $(A-2E_3) \cdot y = {}^t(1,0,0)$. Die gesuchte Basis lautet $\mathscr{B} = (v,x,y)$, d.h. die Matrix T^{-1}, die aus den Spaltenvektoren v,x,y zusammengesetzt wird, lautet
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
mit inverser Matrix
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe rechnen wir
$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$
nach: alles in Ordnung.

Mit der zweiten Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gehen wir genauso vor. Da sich hier jedoch einige kleine Besonderheiten ergeben, dokumentieren wir unser Vorgehen ausführlich. Das charakteristische Polynom lautet

$$P_B(t) = -(t-2)^2(t-1)^3 .$$

Es gilt

$$B - 2E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix hat Rang 3, ihr Kern ist also zweidimensional. Eine Basis des Kerns besteht aus den beiden Eigenvektoren

$$v_1 = {}^t(0,0,0,1,0) \quad \text{und} \quad v_2 = {}^t(1,1,1,0,1) .$$

Damit ist der Teil der Jordanmatrix, der zum Eigenwert 2 gehört, diagonalisierbar, weil es genauso viele linear unabhängige Eigenvektoren zu 2 gibt, wie die Vielfachheit der Nullstelle 2 im charakteristischen Polynom beträgt. Wir brauchen uns auch um keine Hauptraumvektoren mehr zu kümmern.

Beim Eigenwert 1 wird es etwas komplizierter. Wir berechnen

$$B - E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 0 & 1 & -1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} ;$$

das liefert die Eigenvektoren $w_1 = {}^t(0,1,1,1,1)$ und $w_2 = {}^t(1,1,0,1,1)$. Nun müssen wir einen Vektor bestimmen, der durch $(B - E_5)$ in den durch w_1 und w_2 aufgespannten Unterraum abgebildet wird, das entspricht einer Lösung des LGS

$$(B - E_5) \cdot x = a \cdot w_1 + b \cdot w_2 ,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig sind. Eine Möglichkeit ist

$$(B - E_5) \cdot {}^t(1,-1,0,0,0) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 .$$

Damit lautet die gesuchte Basis (v_1, v_2, w_1, x, w_2), wobei $x = {}^t(1,-1,0,0,0)$ ist.

Es ist

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$SBS^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Minimalpolynom von B lautet $M_B(t)=(t-2)(t-1)^2$. Man kann an ihm die Länge der gröten Jordanblöcke zum jeweiligen Eigenwert ablesen, siehe auch Aufgabe 8 zu diesem Abschnitt.

4. a) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über m. Für $m=2$ ist $(SAS^{-1})^2 = SAS^{-1}\cdot SAS^{-1} = SA^2S^{-1}$. Den Induktionsschritt beweisen wir mit

$$(SAS^{-1})^m = (SAS^{-1})(SAS^{-1})^{m-1} \overset{(*)}{=} (SAS^{-1})(SA^{m-1}S^{-1}) = SA^mS^{-1}\,,$$

wobei bei $(*)$ die Induktionsannahme benutzt wurde.

b) Den Beweis kann man einerseits wie den Beweis des binomischen Lehrsatzes (vgl. [Fo1], §1) durch Induktion über m führen, da dort lediglich die Kommutativität in $\mathbb{R}$ sowie $x+y\in\mathbb{R}$ und $x\cdot y\in\mathbb{R}$ für $x,y\in\mathbb{R}$ ausgenutzt werden. Daher gilt der binomische Lehrsatz in jedem kommutativen Ring mit Eins.

Auf dieser Grundlage geben wir einen Beweis an. Sind zwei Matrizen $A,B\in R := \mathrm{M}(n\times n;K)$ mit $AB=BA$ gegeben, so betrachten wir den von A und B in R erzeugten Unterring (Achtung: Nicht das von A und B erzeugte Ideal!). Dieser ist wegen $AB=BA$ kommutativ, also gilt der binomische Lehrsatz, woraus die Behauptung folgt.

c) Für die Matrix A ist $P_A(t) = -(t-2)^3$, wie man nach einer kurzen Rechnung herausfindet. Wegen

$$\dim \mathrm{Eig}\,(A;2) = 1 < 3 = \mu(P_A;2)$$

ist A nicht diagonalisierbar, aber trigonalisierbar. Die Matrix $N := A-2E_3$ ist nilpotent mit $N^3=0$, also gilt $\mathrm{Hau}\,(A;2) = \mathrm{Ker}\,N^3 = \mathbb{R}^3$. Wir können daher $A = E_3(D+N)E_3$ wählen mit

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimmt leicht $DN = 2N = ND$.

Für die Berechnung von A^{50} ist es vorteilhaft, dass $S = E_3$ gilt. Zunächst erhalten wir

$$A^{50} = (D+N)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} D^k N^{50-k}.$$

Da N nilpotent ist mit $N^l = 0$ für alle $l \geqslant 3$, bleiben nur drei Summanden stehen:

$$A^{50} = \binom{50}{48} D^{48} N^2 + \binom{50}{49} D^{49} N + \binom{50}{50} D^{50} N^0.$$

Benutzen wir ferner $N^0 = E_3$ sowie $D^l = 2^l \cdot E_3$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A^{50} &= \tfrac{49\cdot 50}{2} \cdot 2^{48} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 50 \cdot 2^{49} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2^{50} E_3 \\ &= 2^{49} \begin{pmatrix} 52 & 1425 & 1375 \\ -50 & -1323 & -1275 \\ 50 & 1325 & 1277 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. a) Wie wir bereits für die Lösung zu Aufgabe 4c) benutzt haben, gilt für eine Diagonalmatrix D für alle $k \in \mathbb{N}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt direkt

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

b) Nach Aufgabe 4a) gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ gerade $(SAS^{-1})^k = SA^kS^{-1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \exp(SAS^{-1}) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (SAS^{-1})^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} SA^kS^{-1} \\ &= S \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \right) S^{-1} = S \cdot \exp(A) \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

c) Wir betrachten die Folge $(C_m) \subset \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ von Matrizen mit

$$C_m := \sum_{k=0}^{2m} \frac{1}{k!} (A+B)^k - \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \right) \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} B^k \right).$$

Wenn wir zeigen können, dass $\lim_{m\to\infty} C_m = (0)$ gilt (wobei $(0) \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ die Nullmatrix bezeichnet), sind wir fertig. Hierzu genügt es zu zeigen, dass alle Einträge von C_m für große m beliebig klein werden. Wir zeigen dies durch geschickte Abschätzung der Einträge von C_m. Aus Aufgabe 4b) folgt

$$C_m = \sum_{l=0}^{2m} \sum_{k=0}^{l} \tfrac{1}{k!(l-k)!} A^k B^{l-k} - \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \tfrac{1}{k!l!} A^k B^l = \sum_{\substack{k+l \leqslant 2m \\ k>m \text{ oder } l>m}} \tfrac{1}{k!} A^k \tfrac{1}{l!} B^l .$$

Nun bezeichne für $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$

$$c := \max\{|a_{ij}|, |b_{ij}|\} .$$

Wir behaupten: Die Einträge aus A^m und B^m sind durch $(nc)^m$ beschränkt. $(*)$

Ist dies gezeigt, so sind die Komponenten von $\frac{1}{k!l!} A^k B^l$ beschränkt durch $\frac{n}{k!l!}(nc)^{k+l}$. Die Summe C_m enthält höchstens m^2 Summanden, daher ist jeder Eintrag von C_m beschränkt durch

$$\frac{m^2 n}{k!l!}(nc)^{k+l} \leqslant \frac{m^2 n}{m!} \vartheta^{2m} \quad \text{mit } \vartheta := \max\{1, nc\} ,$$

da $k > m$ oder $l > m$ sowie $k + l \leqslant 2m$ gilt. Schließlich folgt aus $\lim_{m\to\infty} \frac{m^2 \cdot \vartheta^{2m}}{m!} = 0$, dass alle Komponenten von C_m für $m \to \infty$ beliebig klein werden, d.h. $\lim_{m\to\infty} C_m = (0)$.

Es bleibt der Beweis von $(*)$. Dazu wählen wir für die Matrizen $A = (a_{ij})$ und $A^m = (a_{ij}^{(m)})$ die Bezeichnungen $a := \max\{|a_{ij}|\}$ und $a^{(m)} := \max\{|a_{ij}^{(m)}|\}$. Aus

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m-1)} a_{kj}$$

folgt $a^{(m)} \leqslant (n \cdot a) \cdot a^{(m-1)}$, und per Induktion erhalten wir $a^{(m)} \leqslant (n \cdot a)^m$. Da eine analoge Aussage für B gilt, folgt die Behauptung.

Die Abbildung $\exp\colon \mathrm{M}(n \times n; K) \to \mathrm{GL}(n, K)$ wird in der Theorie der Lie-Algebren und Lie-Gruppen weiter verallgemeinert, vgl. [F-H], §8.3.

d) Aus $P_A(t) = -(t-1)^3$ bestimmen wir zunächst

$$\dim \mathrm{Eig}(A; 1) = 1 < 3 = \mu(P_A; 1) ,$$

also ist A zwar trigonalisierbar, nicht aber diagonalisierbar. Der Satz über die Hauptraumzerlegung 4.6.1 ergibt ohne weitere Rechnung

$$\dim \mathrm{Hau}(A; 1) = \dim \mathrm{Ker}(A - E_3)^3 = \mathbb{R}^3 .$$

Setzen wir

$$N := A - E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

so erhalten wir eine Zerlegung $A = E_3 + N$, wobei N nilpotent und E_3 Diagonalmatrix ist. Also können wir $D = S = E_3$ wählen, was die weiteren Berechnungen sehr übersichtlich macht. Die Bedingung $DN = ND$ ist sofort klar, und unter Berücksichtigung der Teile a) und c) folgt aufgrund von $N^3 = 0$

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \exp(D+N) = \exp(D)\cdot\exp(N) = e\cdot\exp(N)\\ &= e\left(\tfrac{1}{0!}N^0 + \tfrac{1}{1!}N^1 + \tfrac{1}{2!}N^2\right) = e\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

6. Nach 4.6.5 gilt $s_l = \dim U_l - \dim U_{l-1} - \dim W_{l+1}$. Da $U_{l-1} \subset U_l$ ein Untervektorraum ist, können wir Satz 2.2.7 anwenden, woraus

$$\dim U_l - \dim U_{l-1} = \dim\left(U_l/U_{l-1}\right)$$

folgt. Nach Konstruktion im Beweis von Theorem 4.6.5 gilt

$$U_{l+1} = U_l \oplus W_{l+1}\,,\quad \text{also}\quad \dim U_{l+1} = \dim U_l + \dim W_{l+1}$$

bzw. nach Umformung $\dim W_{l+1} = \dim U_{l+1} - \dim U_l$. Aus $U_l \subset U_{l+1}$ folgt mit erneuter Anwendung von Satz 2.2.7 $\dim W_{l+1} = \dim\left(U_{l+1}/U_l\right)$. Insgesamt gilt daher

$$s_l = \dim U_l - \dim U_{l-1} - \dim W_{l+1} = \dim\left(U_l/U_{l-1}\right) - \dim\left(U_{l+1}/U_l\right).$$

7. Teil **a)** ergibt sich durch simple Rechnung, vgl. auch Aufgabe 4 zu 2.6.
b) Nach Definition 2.6.7 heißen zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}(n\times n; K)$ ähnlich, wenn ein $S \in \mathrm{GL}(n;K)$ existiert mit $B = SAS^{-1}$. Bezüglich einer beliebigen Basis $\mathscr{B}$ betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M_{\mathscr{B}}(F)"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathscr{B}}"] \arrow[ddd, "S = M_{\mathscr{B}}(H)"'] & & & K^n \arrow[dl, "\Phi_{\mathscr{B}}"'] \arrow[ddd, "M_{\mathscr{B}}(H) = S"] \\
& V \arrow[r, "F"'] \arrow[d, "H"] & V \arrow[d, "H"'] & \\
& V \arrow[r, "G"] & V & \\
K^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathscr{B}}"] \arrow[rrr, "M_{\mathscr{B}}(G)"'] & & & K^n \arrow[ul, "\Phi_{\mathscr{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Aus diesem lesen wir sofort ab, dass die Existenz eines Isomorphismus H mit $G = H\circ F\circ H^{-1}$ gleichbedeutend zur Existenz einer Matrix

$$S = M_{\mathscr{B}}(H) \in \mathrm{GL}(n;K) \quad \text{mit} \quad M_{\mathscr{B}}(G) = S\cdot M_{\mathscr{B}}(F)\cdot S^{-1}$$

ist. Das zeigt die Äquivalenz von i) und ii).

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $\mathscr{B}$ eine Basis, bezüglich der $M_{\mathscr{B}}(G)$ Jordansche Normalform hat. Nach ii) existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n;K)$ mit $M_{\mathscr{B}}(G) = S\cdot M_{\mathscr{B}}(F)\cdot S^{-1}$. Sei $\mathscr{A}$ die Basis, die von den Spalten von S^{-1} gebildet wird. Dann gilt $M_{\mathscr{B}}(G) = M_{\mathscr{A}}(F)$, und F und G haben dieselbe Jordansche Normalform.

iii) $\Rightarrow$ i): Einer anderen Anordnung der Jordanblöcke längs der Diagonale entspricht eine Permutation der Basis. Also sind die zugehörigen Endomorphismen ähnlich.

8. Ist $V_i := \mathrm{Hau}\,(F;\lambda_i)$ und $G_i := (F - \lambda_i \mathrm{id}_V)|_{V_i}$, so ist nach dem Lemma von Fitting 4.6.2 $M_{G_i} = t^{d_i}$, d.h. nach Definition von G_i gilt $M_{F|_{V_i}} = (t-\lambda_i)^{d_i}$. Wegen $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ folgt daraus jedoch sofort
$$M_F = M_{F|_{V_1}} \cdot \ldots \cdot M_{F|_{V_k}} = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{d_k}\,.$$

9. Aufgrund der Form des charakteristischen Polynoms stehen in der Diagonalen der Jordan-Matrix von F einmal die 1 und fünfmal die -2. Aus den Exponenten des Minimalpolynoms liest man ab, dass der größte Jordanblock zum Eigenwert 1 ein (1×1)-Block ist, der größte Jordanblock zum Eigenwert -2 ist ein (3×3)-Block. Daher gibt es zwei Möglichkeiten für die Jordansche Normalform von F:
$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|c}
1 & & & & & \\ \hline
 & -2 & 1 & 0 & & \\
 & & -2 & 1 & & \\
 & & & -2 & & \\ \hline
 & & & & -2 & \\ \hline
 & & & & & -2
\end{array}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{c|ccc|cc}
1 & & & & & \\ \hline
 & -2 & 1 & 0 & & \\
 & & -2 & 1 & & \\
 & & & -2 & & \\ \hline
 & & & & -2 & 1 \\
 & & & & & -2
\end{array}\right),$$
wobei die Jordan-Böcke eingerahmt und die nicht angegebenen Einträge alle 0 sind.

10. Die Bedingung $F^3 = F$ ist äquivalent zu $F^3 - F = 0$. Daraus folgt aufgrund der Definition des Minimalpolynoms $M_F|(t^3-t)$. Aus der Zerlegung
$$t^3 - t = t(t+1)(t-1)$$
erkennt man, dass M_F in jedem Falle einfache Nullstellen besitzt. Daher erfüllt M_F die Bedingungen von Korollar 4.6.7 ii), also ist F diagonalisierbar.

Lösung der Ergänzungsaufgabe

E1. Lösungen lassen sich heutzutage mit GTR und CAS leicht überprüfen, wurden daher weggelassen.

Kapitel 5

Euklidische und unitäre Vektorräume

5.1 Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

1. Die Lösungen aller Teilaufgaben werden durch geradlinige Rechnungen erhalten, die wir an dieser Stelle auslassen.

2. Für $n = 1$ ist nicht viel zu zeigen, da für $x = (x_1)$ und $y = (y_1)$ gilt

$$|\langle x,y\rangle| = |x_1y_1| = |x_1|\cdot|y_1| = \|x\|\cdot\|y\|\,.$$

Ist $n = 2$, so haben x und y die Form $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$. Damit folgt

$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_2^2$$

und

$$\langle x,y\rangle^2 = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_2^2\,.$$

Für die Differenz berechnen wir

$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2 = x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 = (x_2y_1 - x_1y_2)^2 \geqslant 0\,,$$

also

$$\langle x,y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\cdot\|y\|^2\,.$$

Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion folgt daraus

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|\,.$$

Den Fall $n = 3$ behandelt man ähnlich wie den letzten, nur dass die auftretenden Terme komplizierter werden. Dies zeigt ganz deutlich, welchen Vorteil ein allgemeines Beweisverfahren gegenüber der Behandlung jedes einzelnen Falles haben kann.

3. Ist $L = v + \mathbb{R}w = v + \mathbb{R}\tilde{w}$ und $L' = v' + \mathbb{R}w' = v' + \mathbb{R}\tilde{w}'$, so existieren $\lambda,\lambda' \in \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$, so dass $w = \lambda\cdot\tilde{w}$ und $w' = \lambda'\cdot\tilde{w}'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle w,w'\rangle &= \langle\lambda\cdot\tilde{w},\lambda'\cdot\tilde{w}'\rangle = \lambda\cdot\lambda'\langle\tilde{w},\tilde{w}'\rangle\,,\\
\|w\|^2 = \langle w,w\rangle &= \langle\lambda\cdot\tilde{w},\lambda\cdot\tilde{w}\rangle = \lambda^2\langle\tilde{w},\tilde{w}\rangle = \lambda^2\|\tilde{w}\|^2\,,\\
\|w'\|^2 = \langle w',w'\rangle &= \langle\lambda'\tilde{w}',\lambda'\tilde{w}'\rangle = \lambda'^2\langle\tilde{w}',\tilde{w}'\rangle = \lambda'^2\|\tilde{w}'\|^2\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt unmittelbar

$$\frac{\langle w,w'\rangle^2}{\|w\|^2\cdot\|w'\|^2} = \frac{\lambda^2\lambda'^2\langle\tilde{w},\tilde{w}'\rangle^2}{\lambda^2\|\tilde{w}\|^2\cdot\lambda'^2\|\tilde{w}'\|^2} = \frac{\langle\tilde{w},\tilde{w}'\rangle^2}{\|\tilde{w}\|^2\cdot\|\tilde{w}'\|^2}\,,$$

also

$$\frac{\langle w,w'\rangle}{\|w\|\cdot\|w'\|} = \pm\frac{\langle\tilde{w},\tilde{w}'\rangle}{\|\tilde{w}\|\cdot\|\tilde{w}'\|}\,. \qquad (*)$$

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_13

Falls die Vorzeichen der Skalarprodukte $\langle w, w' \rangle$ und $\langle \tilde{w}, \tilde{w}' \rangle$ übereinstimmen, so stimmen auch die Quotienten in $(*)$ überein, und damit auch die arccos-Werte, somit gilt $\sphericalangle(w, w') = \sphericalangle(\tilde{w}, \tilde{w}')$.

Falls $\langle w, w' \rangle$ und $\langle \tilde{w}, \tilde{w}' \rangle$ unterschiedliche Vorzeichen haben, wird es etwas komplizierter. Ist $\langle w, w' \rangle > 0$ und $\langle \tilde{w}, \tilde{w}' \rangle < 0$, so gilt nach der Definition $\sphericalangle(w, w') = \sphericalangle(-\tilde{w}, \tilde{w}')$; falls $\langle w, w' \rangle < 0$, so folgt $\langle \tilde{w}, \tilde{w}' \rangle > 0$ und damit $\sphericalangle(\tilde{w}, \tilde{w}') = \sphericalangle(-w, w')$.

Die Behauptung $0 \leqslant \sphericalangle(L, L') \leqslant \frac{\pi}{2}$ ist klar aufgrund der Definition des Winkels.

4. a) Für alle $x, y \in L$ gibt es eindeutige Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass
$$x = v + \lambda_1 w \quad \text{und} \quad y = v + \lambda_2 w\,,$$
also
$$x - y = (\lambda_1 - \lambda_2)w\,.$$
Wenn wir zeigen können, dass
$$\langle s, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle s, \lambda w \rangle = 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}\,,$$
so ist die Behauptung gezeigt. Letzteres folgt aber aus
$$s \perp w \Leftrightarrow \langle s, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle s, \lambda w \rangle = \lambda \langle s, w \rangle = 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$
b) Nach Definition 0.2.4 gilt $(a_1, a_2) \neq (0,0)$. Im Fall $a_1 \neq 0$ (den Fall $a_2 \neq 0$ rechnet man analog) ist nach 0.2.4 eine mögliche Wahl für $L = v + \mathbb{R}w$ durch $v = \left(\frac{b}{a_1}, 0\right)$ und $w = (-a_2, a_1)$ gegeben, und w ist bis auf ein skalares Vielfaches $\lambda \neq 0$ eindeutig bestimmt. Damit folgt
$$\langle (a_1, a_2), \lambda w \rangle = \langle (a_1, a_2), \lambda(-a_2, a_1) \rangle = \lambda(-a_1 a_2 + a_1 a_2) = 0\,,$$
also $(a_1, a_2) \perp L$.

c) Es ist keineswegs klar, dass man $d(u, L) = \min\{\|x - u\| : x \in L\}$ definieren kann; eigentlich ist das Infimum zu wählen. Aufgrund der Vollständigkeit der reellen Zahlen existiert das Minimum und kann somit direkt in der Definition auftauchen.

Für jedes $x \in L$ existiert ein eindeutiges $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so dass $x = v + \lambda_0 w$ gilt. Nun rechnen wir
$$\begin{aligned}(x - u) \perp L &\overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} (x - u) \perp w \Leftrightarrow \langle x - u, w \rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \langle v + \lambda_0 w - u, w \rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \langle v, w \rangle + \lambda_0 \|w\|^2 - \langle u, w \rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\langle u, w \rangle - \langle v, w \rangle}{\|w\|^2} = \lambda_0\,.\end{aligned}$$
Also ist das $x = v + \lambda_0 w$ mit diesem λ_0 eindeutig mit $(x - u) \perp L$.

Für ein beliebiges $y = v + \lambda w \in L$ gilt

$$\begin{aligned} \|y-u\|^2 &= \langle y-u, y-u\rangle = \langle y,y\rangle - 2\langle y,u\rangle + \langle u,u\rangle \\ &= \langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle - 2\langle v+\lambda w, u\rangle + \langle u,u\rangle \\ &= \lambda^2\langle w,w\rangle + \lambda(2\langle v,w\rangle - 2\langle w,u\rangle) + \langle u,u\rangle \\ &\quad -2\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle =: f(\lambda), \end{aligned}$$

wobei wir den Ausdruck als Funktion in λ auffassen. Um das Minimum zu bestimmen, bilden wir die ersten beiden Ableitungen

$$f'(\lambda) = 2\lambda\langle w,w\rangle + 2\langle v,w\rangle - 2\langle u,w\rangle \quad \text{und} \quad f''(\lambda) = 2\langle w,w\rangle .$$

Es gilt

$$f'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle u,w\rangle - \langle v,w\rangle}{\|w\|^2} .$$

Da $f''(\lambda) = 2\|w\|^2 > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, handelt es sich um ein Minimum. Wir haben insgesamt gezeigt, dass das eindeutig bestimmte λ_0 zum Punkt x mit $(x-u) \perp L$ dieselbe Zahl ist, an der die Funktion f ihr Minimum hat. Damit ist der senkrechte Abstand der kürzeste.

Eine Möglichkeit, die Behauptung ohne Hilfsmittel der Analysis zu beweisen, findet sich in der Lösung zu Aufgabe 5. Dort wird der Satz von Pythagoras benutzt.

d) Für alle $x,y \in L$ gilt $\langle s, x-y\rangle = 0$, somit ist auch für ein beliebiges $v \in L$ $\langle s, x-v\rangle = 0$ für alle $x \in L$. Daraus folgt $L \subset \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \ \langle s, x-v\rangle = 0\}$.

Es ist $L = v + \mathbb{R}w$ für geeignetes $w \in \mathbb{R}^2$, und es gilt $s \perp L \Leftrightarrow \langle s,w\rangle = 0$. Umgekehrt folgt aus $\langle s,y\rangle = 0$, dass $y = \lambda w$ für ein $\lambda \neq 0$. (Wären w und y linear unabhängig, so wäre $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\,(y,w)$, also gäbe es für jedes $z \in \mathbb{R}^2$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $z = \lambda_1 y + \lambda_2 w$. Daraus folgt jedoch unmittelbar

$$\langle s,z\rangle = \lambda_1\langle s,y\rangle + \lambda_2\langle s,w\rangle = 0 ,$$

also $s = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.) Daher gilt: ist $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle s, x-v\rangle = 0$, so gilt $x - v = \lambda w$ und somit $x = v + \lambda w \in L$. Insgesamt ist $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \ \langle s, x-v\rangle = 0\}$.

Ist $u \in \mathbb{R}^2$, $v \in L$ und $s \perp L$, so gilt

$$|\langle s, u-v\rangle| = \|s\| \cdot \|u-v\| \cdot |\cos\sphericalangle(s, u-v)| ,$$

also

$$\frac{|\langle s, u-v\rangle|}{\|s\|} = \|u-v\| \cdot |\cos\sphericalangle(s, u-v)| .$$

Für den Punkt $x \in L$ mit $(x-u) \perp L$ gilt jedoch nach der Definition des Skalarproduktes (vgl. Bild 5.1 sowie Bild 5.3 aus [Fi1])

$$\begin{aligned} d(u,L) = \|x-u\| &= \|u-v\| \cdot |\cos\sphericalangle(x-u, u-v)| \\ &= \|u-v\| \cdot |\cos\sphericalangle(s, u-v)| . \end{aligned}$$

In Aufgabe 5 d) werden wir diese Argumentation auf den höherdimensionalen Fall übertragen.

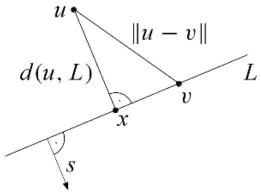


Bild 5.1

Die letzte Gleichung folgt unmittelbar aus der soeben bewiesenen durch Einsetzen von $s=(a_1,a_2)$ unter Berücksichtigung von $v\in L$.

5. a) „$\Rightarrow$": Ist s orthogonal zu H, so ist für alle $x,y\in H$ gerade $\langle s,x-y\rangle=0$. Insbesondere gilt $x_i=v+2w_i\in H$ sowie $y_i=v+w_i\in H$ für $i=1,\ldots,n-1$ und damit

$$0=\langle s,x_i-y_i\rangle=\langle s,w_i\rangle\,,\quad \text{also } s\perp w_i \text{ für } i=1,\ldots,n-1\,.$$

„$\Leftarrow$": Ist $s\perp w_i$ für $i=1,\ldots,n-1$, so gilt für alle $x=v+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_iw_i\in H$ und $y=v+\sum_{i=1}^{n-1}\mu_iw_i\in H$

$$\begin{aligned}\langle s,x-y\rangle &= \langle s,v+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_iw_i-v-\sum_{i=1}^{n-1}\mu_iw_i\rangle\\ &= \langle s,\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-\mu_i)w_i\rangle=\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-\mu_i)\underbrace{\langle s,w_i\rangle}_{=0}=0\,,\end{aligned}$$

also ist s orthogonal zu H.

b) Sind $x=(x_1,\ldots,x_n)$ und $y=(y_1,\ldots,y_n)$ aus H, so gilt

$$\langle(a_1,\ldots,a_n),x\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b\quad\text{und}\quad\langle(a_1,\ldots,a_n),y\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_iy_i=b$$

nach Voraussetzung. Daraus folgt jedoch

$$\langle(a_1,\ldots,a_n),x-y\rangle=b-b=0$$

für alle $x,y\in H$. Damit steht $(a_1,\ldots,a_n)$ senkrecht auf H.

c) Ist $x\in H$, so existieren eindeutige Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$ mit $x=v+\lambda_1w_1+\ldots+\lambda_{n-1}w_{n-1}$. Ferner gilt unter Berücksichtigung von Teil a)

$$(x-u)\perp H\Leftrightarrow\langle x-u,w_i\rangle=0\quad\text{für } i=1,\ldots,n-1\,.$$

Setzt man für x die obige Darstellung ein, so ist dies gleichbedeutend mit

$$\langle v+\lambda_1w_1+\ldots+\lambda_{n-1}w_{n-1}-u,w_i\rangle=0\quad\text{für alle } i=1,\ldots,n-1\,.$$

Als Gleichungssystem in den Unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ betrachtet führt dies zur erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \langle w_1, w_1 \rangle & \cdots & \langle w_{n-1}, w_1 \rangle & \langle u - v, w_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle w_1, w_{n-1} \rangle & \cdots & \langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle & \langle u - v, w_{n-1} \rangle \end{array} \right).$$

Diese Matrix hat Rang $n-1$, weil die w_i linear unabhängig sind. Rang $n-1$ des Gleichungssystems ist jedoch gleichbedeutend damit, dass es eine eindeutige Lösung $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ gibt. Durch diese λ_i ist x eindeutig bestimmt, was zu zeigen war.

Ist $(x-u) \perp H$ und $\tilde{x}$ ein weiterer Punkt auf H, so so betrachten wir die eindeutig bestimme Ebene E, in der $x, u, \tilde{x}$ liegen. In E gilt der Satz von Pythagoras (siehe Bild 5.2 für den dreidimensionalen Fall), der in diesem Fall lautet:

$$\|\tilde{x} - u\|^2 = \|x - u\|^2 + \|x - \tilde{x}\|^2,$$

also wegen $\|x - \tilde{x}\| \neq 0$ insbesondere $\|\tilde{x} - u\|^2 > \|x - u\|^2$, und aus der Monotonie der Wurzel folgt

$$\|\tilde{x} - u\| > \|x - u\|.$$

Da $\tilde{x} \in H$ beliebig mit $\tilde{x} \neq x$ war, folgt $d(u, H) = \|x - u\|$.

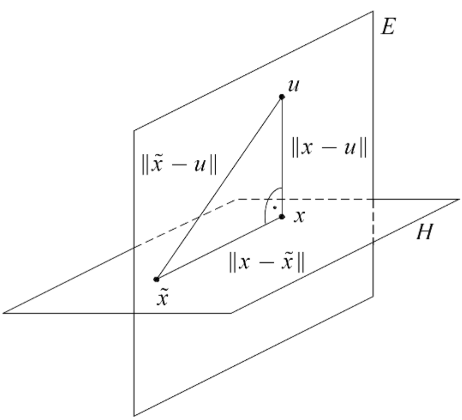


Bild 5.2

d) Es genügt wie im Fall $n = 2$, die Gleichung

$$d(u,H) = \frac{|\langle s, u - v\rangle|}{\|s\|}$$

zu zeigen. Die in Aufgabe 4 d) angegebene Argumentation kann direkt übernommen werden, da s parallel zu $x - u$ mit $\|x - u\| = d(u,H)$ liegt.

6. In der Lösung der Aufgabe unterscheiden wir nicht zwischen dem Riemannschen Integral und dem Lebesgue-Integral, da dies für die Eigenschaften der Abbildungen $\|\ \|$ und $\|\ \|'$ nicht von Bedeutung ist. Lediglich in der Bemerkung am Ende der Lösung der Aufgabe sprechen wir vom Lebesgue-Integral.

Wir untersuchen zunächst die Abbildung

$$\|\ \|\colon\ \mathscr{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt\,,$$

und benutzen an den geeigneten Stellen die Linearität und die Monotonie des Integrals (vgl. [Fo1], §18, Satz 5 oder [Ba], Satz 12.3).

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, so gilt, da der Betrag eine Norm ist (vgl. [Fo1], §3)

$$\|\lambda \cdot f\| = \int_{\mathbb{R}} |\lambda \cdot f(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |\lambda| \cdot |f(t)|\, dt = |\lambda| \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = |\lambda| \cdot \|f\|\,,$$

also N2. Ebenso bestimmen wir für $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)+g(t)|\, dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)| + |g(t)|\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt + \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt = \|f\| + \|g\|\,, \end{aligned}$$

damit gilt N3.

Die Aussage N1 gilt jedoch nicht, denn für ein $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ ist

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = 0\,.$$

Das heißt jedoch nicht, dass $f = 0$ ist, wie das Beispiel

$$f_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = i\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aus 2.2.6 zeigt.

Um diesen Nachteil zu beheben, definiert man die Abbildung

$$\|\ \|'\colon\ \mathscr{L}(\mathbb{R})/\mathscr{N} \to \mathbb{R}, \quad f + \mathscr{N} \mapsto \|f\|\,.$$

Sie erbt die Eigenschaften N2 und N3 von der Abbildung $\|\ \|$, aber zusätzlich gilt N1, denn für ein $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ ist

$$\|f\|' = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = 0 \Leftrightarrow f \in \mathscr{N}\,,$$

d.h. $f + \mathscr{N} = 0 + \mathscr{N}$.

Die Menge $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ ist ein Spezialfall der Menge $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ der *p-fach integrierbaren Funktionen* mit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, d.h. der Abbildungen, für die das Integral $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt$ existiert, und die Abbildung $\|\ \|$ ist ein Spezialfall der Abbildungen

$$\|\ \|_p\colon\ \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Abbildungen $\|\ \|_p$ erfüllen die Eigenschaften N2 und N3, solche Abbildungen heißen *Halbnormen*.

Behält man die Menge $\mathscr{N}$ wie gehabt bei und bildet den Quotienten $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})/\mathscr{N}$, so sind die Abbildungen

$$\|\ \|_p'\colon\ \mathscr{L}^p(\mathbb{R})/\mathscr{N} \to \mathbb{R}\,, \quad f+\mathscr{N} \mapsto \|f\|_p\,,$$

wiederum Normen, und die Räume $\left(\mathscr{L}^p(\mathbb{R})/\mathscr{N}, \|\ \|_p'\right)$ sind Banachräume. Diese Räume spielen eine Rolle in der Funktionentheorie, zu Einzelheiten siehe [M-V], §13.

5.2 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

1. Die Lösung dieser Aufgabe ist ganz einfach, wenn wir überlegt vorgehen. Der ganze Trick besteht darin, die Summanden richtig zu ordnen und im passenden Augenblick die Null in der richtigen Form zu addieren, so dass alles passt. Besitzen die Vektoren die Komponenten $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ sowie $z = (z_1, z_2, z_3)$, so berechnen wir zunächst

$$y \times z = (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1)\,,$$

und daraus

$$\begin{aligned}
x \times (y \times z) &= (x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3)\,,\\
&\quad\ x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1),\\
&\quad\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2))\\
&= ((x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_2y_2 + x_3y_3)z_1\,,\\
&\quad\ (x_3z_3 + x_1z_1)y_2 - (x_3y_3 + x_1y_1)z_2,\\
&\quad\ (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2)z_3)\\
&= ((x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_2y_2 + x_3y_3)z_1 + x_1y_1z_1 - x_1y_1z_1,\\
&\quad\ (x_3z_3 + x_1z_1)y_2 - (x_3y_3 + x_1y_1)z_2 + x_2y_2z_2 - x_2y_2z_2,\\
&\quad\ (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2)z_3 + x_3y_3z_3 - x_3y_3z_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_1,(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_2\,,\\
&\quad (x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_3)\\
&\quad -((x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)z_1,(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)z_2,\\
&\quad (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)z_3)\\
&= \langle x,z\rangle y-\langle x,y\rangle z\,.
\end{aligned}$$

Der zweite Teil der Aufgabe ergibt sich daraus durch

$$\begin{aligned}
& x\times(y\times z)+y\times(z\times x)+z\times(x\times y)\\
=\;& \langle x,z\rangle y-\langle x,y\rangle z+\langle y,x\rangle z-\langle y,z\rangle x+\langle z,y\rangle x-\langle z,x\rangle y=0\,,
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Symmetrie des Skalarproduktes ausgenutzt wurde.

Zum Thema Jacobi-Identität vgl. auch Aufgabe E7 in Abschnitt 5.4.

2. Die beiden Behauptungen folgen durch geradlinige Rechnung. Anders als bei Aufgabe 1 ist hier nicht einmal ein Trick vonnöten. Aus diesem Grunde lassen wir die Lösung hier aus.

3. Anschaulich ist die Behauptung

$$x,y,z \text{ sind linear unabhängig} \Leftrightarrow x\times y, y\times z, z\times x \text{ sind linear unabhängig}$$

sofort klar, da $x\times y$ senkrecht auf der durch x und y aufgespannten Ebene steht. Wir wollen es uns trotzdem etwas genauer überlegen.

„$\Leftarrow$“: Sind x,y,z linear abhängig, so sei o.B.d.A.

$$z=\lambda_1x+\lambda_2y \quad \text{mit} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)\,.$$

Dann aber folgt mit Hilfe der Rechenregeln aus 5.2.1

$$z\times x=\lambda_1x\times x+\lambda_2y\times x=-\lambda_2x\times y$$

sowie

$$y\times z=\lambda_1y\times x+\lambda_2y\times y=-\lambda_1x\times y\,.$$

Damit liegen $z\times x$ und $y\times z$ in span$\,(x\times y)$, also sind die drei Vektoren $x\times y$, $y\times z$ und $z\times x$ linear abhängig.

„$\Rightarrow$“: Nach Bemerkung 5.2.2, Teil a) steht $x\times y$ senkrecht auf der von x und y aufgespannten Ebene, in Zeichen $(x\times y)\perp \text{span}\,(x,y)=:E_1$, und analog gilt $(y\times z)\perp\text{span}\,(y,z)=:E_2$ sowie $(z\times x)\perp\text{span}\,(x,z)=:E_3$. Sind $x\times y$, $y\times z$ und $z\times x$ linear abhängig, so liegen sie in einer Ebene E. Das aber bedeutet, dass $E_1\cap E_2\cap E_3$ eine Gerade $L=\mathbb{R}\cdot v$ enthält (siehe Bild 5.3 für den Fall, dass die drei Vektoren $x\times y$, $y\times z$ und $z\times x$ paarweise verschieden sind). Damit gilt $v\in\text{span}\,(x,y)$, $v\in\text{span}\,(y,z)$ und $v\in\text{span}\,(z,x)$, was nur dann sein kann, wenn x,y,z linear abhängig sind.

Die Argumentation in dieser Lösung ist anschaulicher Natur. In der Lösung zu Aufgabe 6 b) wird hingegen algebraisch argumentiert.

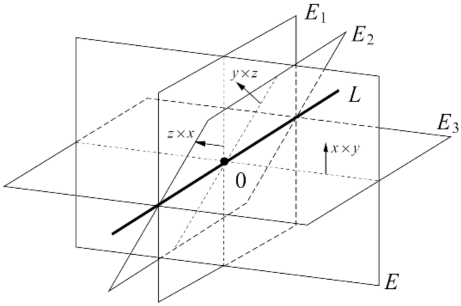


Bild 5.3

4. Die Lösung dieser Aufgabe befindet sich in der Lösung von Aufgabe 2 zu 0.3, in der in Ermangelung einer festen Theorie mit den Komponenten der Vektoren gerechnet wurde.

5. a) Ist $L = E \cap E'$ und $U = W \cap W'$, so sind L und U parallele affine Räume. Aus $\dim U = 1$ folgt damit sofort $L = u + U$ für alle $u \in L$, vgl. auch Bemerkung 2.3.2.

b) Wegen $W \neq W'$ ist $w \neq 0$. Weiter gilt $w \in W$ aufgrund von $s \perp W$ und $w \perp s$ (vgl. Aufgabe 5 zu 5.1), und analog folgt $w \in W'$. Insgesamt gilt somit $w \in W \cap W' = U$. Da U ein Vektorraum ist, folgt sofort $\mathbb{R}w \subset U$. Aus $\dim U = 1 = \dim(\mathbb{R}w)$ folgt $\mathbb{R}w = U$.

Um eine Parameterdarstellung für den Schnitt von
$$E = (0,2,3) + \mathbb{R}(3,6,5) + \mathbb{R}(1,7,-1)$$
und
$$E' = (-1,3,2) + \mathbb{R}(8,2,3) + \mathbb{R}(2,-1,-2)$$
zu bestimmen, berechnen wir zunächst die notwendigen Vektoren. Wir erhalten
$$\begin{aligned} s &= w_1 \times w_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = (-41,8,15)\,, \\ s' &= w_1' \times w_2' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 8 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1,22,-12) \end{aligned}$$
sowie
$$s \times s' = (-41,8,15) \times (-1,22,-12) = (-426,-507,-894) = w\,,$$
und damit $U = \mathbb{R} \cdot (-426,-507,-894)$.

Um einen Vektor aus $E \cap E'$ zu bestimmen, setzen wir beide Ebenengleichungen gleich:

$$(0,2,3)+\lambda_1(3,6,5)+\lambda_2(1,7,-1) = (-1,3,2)+\lambda_3(8,2,3)+\lambda_4(2,-1,-2),$$

in Matrizenschreibweise lautet die Standardform

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & -1 & 8 & 2 & 1 \\ -6 & -7 & 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & -1 & 8 & 2 & 1 \\ -15 & -15 & 12 & 0 & -1 \\ -8 & 0 & 11 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Eine Lösung ist gegeben durch

$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -\tfrac{47}{15}, \quad \lambda_3 = 6, \quad \lambda_4 = -\tfrac{196}{15}.$$

Mit λ_1 und λ_2 berechnen wir einen Schnittpunkt:

$$(0,2,3) + 8\cdot(3,6,5) - \tfrac{47}{15}\cdot(1,7,-1) = (\tfrac{313}{15}, \tfrac{421}{15}, \tfrac{692}{15}),$$

also ist

$$L = \tfrac{1}{15}(313,421,692) + \mathbb{R}\cdot(-426,-507,-894).$$

6. a) Die beiden Regeln folgen unmittelbar aus den Rechenregeln D1 a) und b) für Determinanten, siehe 3.1.2.

b) Per definitionem gilt

$$x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(\det A_i)\cdot e_i,$$

wobei A_i aus der ursprünglichen Matrix durch Streichen der i-ten Spalte entsteht. Also folgt mit der linearen Unabhängigkeit der e_i

$$x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)} = 0 \Leftrightarrow \det A_i = 0 \text{ für alle } i.$$

Nach Satz 3.3.6 ist dies gleichbedeutend damit, dass die Vektoren $x^{(1)},\ldots,x^{(n-1)}$ linear abhängig sind.

c) Die Behauptung zeigen wir durch eine Rechnung, bei der benutzt wird, dass die Vektoren $e_1,\ldots,e_n$ eine Orthonormalbasis bilden. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)}, y\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\det A_i)\cdot e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\det A_i)\cdot y_i \\ &= \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ x_1^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Mit Aufgabe c) gilt

$$\langle x^{(1)} \times \ldots \times x^{(n-1)}, x^{(i)} \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1^{(i)} & \cdots & x_n^{(i)} \\ x_1^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0\,,$$

da zwei gleiche Zeilen auftreten.

5.3 Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

1. Es sei $v = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ mit $\omega(v, w) = 0$ für alle

$$w = (x_1', y_1', \ldots, x_n', y_n') \in \mathbb{R}^{2n}\,.$$

Dann gilt dies insbesondere für die Vektoren

$$w_i := (0, \ldots, 0, x_i' = 1, 0, \ldots, 0) \text{ und } w^i := (0, \ldots, 0, y_i' = 1, 0, \ldots, 0)\,.$$

Jedoch ist

$$\omega(v, w_i) = -y_i = 0 \quad \text{und} \quad \omega(v, w^i) = x_i = 0$$

für $i = 1, \ldots, n$. Das bedeutet $v = 0$.

2. Mit den Bezeichnungen für v und w wie in Aufgabe 1 gilt

$$J(w) = (-y_1', x_1', \ldots, -y_n', x_n')\,.$$

Damit berechnen wir

$$\omega(v, J(w)) = \sum_{\nu=1}^{n} \det \begin{pmatrix} x_\nu & y_\nu \\ -y_\nu' & x_\nu' \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu x_\nu' + y_\nu y_\nu') = \langle v, w \rangle\,.$$

3. a) V1 ist erfüllt, da V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und J ein Endomorphismus ist. Um V2 nachzuweisen, berechnen wir

$$\begin{aligned} \big(\underbrace{(x + \mathrm{i}y)}_{=\lambda} + \underbrace{(x' + \mathrm{i}y')}_{=\mu}\big) \cdot v &= \big((x + x') + \mathrm{i}(y + y')\big) \cdot v \\ &= \underbrace{(x + x')}_{\in\mathbb{R}} \cdot v + \underbrace{(y + y')}_{\in\mathbb{R}} \cdot J(v) \\ &\overset{(*)}{=} (x \cdot v + y \cdot J(v)) + (x' \cdot v + y' \cdot J(v)) \\ &= \lambda \cdot v + \mu \cdot v\,, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(*)$ benutzt wurde, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Ebenso rechnen wir

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (v + w) &= (x + \mathrm{i}y) \cdot (v + w) = x \cdot (v + w) + y \cdot J(v + w) \\ &\overset{(**)}{=} x \cdot v + x \cdot w + y \cdot J(v) + y \cdot J(w) \\ &= (x \cdot v + y \cdot J(v)) + (x \cdot w + y \cdot J(w)) \\ &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w\,, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(**)$ benutzt wurde, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und J ein Endomorphismus ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\lambda\cdot(\mu\cdot v) &= \lambda\cdot\big((x'+\mathrm{i}y')\cdot v\big) = \lambda\cdot\big(x'\cdot v + y'\cdot J(v)\big)\\
&= (x+\mathrm{i}y)\cdot x'\cdot v + (x+\mathrm{i}y)\cdot y'\cdot J(v)\\
&= x\cdot x'\cdot v + y\cdot x'\cdot J(v) + x\cdot y'\cdot J(v) + y\cdot y'\cdot J^2(v)\\
&= xx'\cdot v + (yx'+xy')\cdot J(v) - yy'\cdot v\\
&= \big((xx'-yy') + \mathrm{i}(yx'+xy')\big)\cdot v\\
&= \big((x+\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y')\big)\cdot v = (\lambda\cdot\mu)\cdot v\,.
\end{aligned}$$

$1\cdot v = v$ ist wegen $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ und der $\mathbb{R}$-Vektorraumeigenschaften von V klar.

b) Da V als $\mathbb{R}$-Vektorraum endlichdimensional ist, ist die $\mathbb{C}$-Dimension ebenfalls endlich, denn eine $\mathbb{R}$-Basis von V ist immerhin ein $\mathbb{C}$-Erzeugendensystem von V. Ist $\infty > n = \dim_{\mathbb{C}} V$, so gilt $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$, wie wir nun beweisen wollen. Genauer behaupten wir: Ist $v_1,\ldots,v_n$ eine Basis von ${}_{\mathbb{C}}V$, so ist $v_1,\ldots,v_n,J(v_1),\ldots,J(v_n)$ eine Basis von ${}_{\mathbb{R}}V$.

i) Es liegt ein Erzeugendensystem vor: Sei $v\in{}_{\mathbb{R}}V = {}_{\mathbb{C}}V$. Dann existieren $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$, so dass $v=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_n v_n$. Wegen $\lambda_\nu = x_\nu + \mathrm{i}y_\nu$ mit $x_\nu, y_\nu\in\mathbb{R}$ für $\nu = 1,\ldots,n$ können wir dafür auch schreiben

$$\begin{aligned}
v &= (x_1+\mathrm{i}y_1)v_1+\ldots+(x_n+\mathrm{i}y_n)v_n\\
&= x_1v_1+\ldots+x_nv_n+y_1J(v_1)+\ldots+y_nJ(v_n)\\
&\in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1,\ldots,v_n,J(v_1),\ldots,J(v_n))\,.
\end{aligned}$$

ii) Für die lineare Unabhängigkeit der Vektoren sei

$$x_1v_1+\ldots+x_nv_n+y_1J(v_1)+\ldots+y_nJ(v_n)=0\,,$$

wobei die x_ν und y_ν für $\nu=1,\ldots,n$ aus $\mathbb{R}$ stammen. Diese Gleichung können wir mit Hilfe der komplexen Vektorraumstruktur von V auch schreiben als

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)v_1+\ldots+(x_n+\mathrm{i}y_n)v_n=0\,.$$

Da $(v_1,\ldots,v_n)$ eine Basis von ${}_{\mathbb{C}}V$ ist, folgt

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)=\ldots=(x_n+\mathrm{i}y_n)=0\,,$$

woraus jedoch wegen der linearen Unabhängigkeit von 1 und i über $\mathbb{R}$ sofort

$$x_1=\ldots=x_n=y_1=\ldots=y_n=0$$

folgt, also sind $v_1,\ldots v_n,J(v_1),\ldots,J(v_n)$ linear unabhängig.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass die Dimension von ${}_{\mathbb{R}}V$ gleich $2n$, also insbesondere gerade ist.

5.4 Bilinearformen und Sesquilinearformen

1. Sei $s\colon\ V \times V \to V$ eine Bilinearform. Wir verwenden denselben Trick wie in Aufgabe 3c) zu Abschnitt 1.6 und definieren

$$\begin{aligned} s_s(v,w) &:= \tfrac{1}{2}\left(s(v,w)+s(w,v)\right), \\ s_a(v,w) &:= \tfrac{1}{2}\left(s(v,w)-s(w,v)\right). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist s_s symmetrisch und s_a alternierend. Ferner gilt

$$s_s(v,w)+s_a(v,w)=\tfrac{1}{2}\left(s(v,w)+s(w,v)+s(v,w)-s(w,v)\right)=s(v,w).$$

Ist $s=\tilde{s}_s+\tilde{s}_a$ eine weitere Zerlegung, wobei $\tilde{s}_s$ symmetrisch und $\tilde{s}_a$ antisymmetrisch ist, gilt für alle $v,w\in V$

$$\tilde{s}_s(v,w)+\tilde{s}_a(v,w)=s_s(v,w)+s_a(v,w)$$

und

$$\tilde{s}_s(v,w)-\tilde{s}_a(v,w)=s_s(v,w)-s_a(v,w).$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt für alle $v,w\in V$

$$2\tilde{s}_s(v,w)=2s_s(v,w),$$

was gleichbedeutend zu $\tilde{s}_s=s_s$ ist. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$\tilde{s}_a(v,w)=s_a(v,w)$$

für alle $v,w\in V$, also $\tilde{s}_a=s_a$. Damit sind beide Abbildungen eindeutig.

2. Nach dem Austauschlemma aus 1.5.4 ist $\mathscr{B}$ eine Basis von V.

Die Matrix $M_{\mathscr{B}}(s)$ berechnen wir mittels $M_{\mathscr{B}}(s)={}^tT^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}\cdot M_{\mathscr{A}}(s)\cdot T^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}$ (vgl. 5.4.3), wobei die Matrix $T^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}$ gegeben ist durch

$$T^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$M_{\mathscr{B}}(s)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&2\\3&4&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

3. Die Eigenschaften B1 und B2 von s folgen direkt aus der Linearität der Abbildungen F und G. Die Matrix ist ebenfalls leicht zu bestimmen:

$$M_{\mathscr{B}}(s)=\left(s(e_i,e_j)\right)_{i,j}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{pmatrix}.$$

4. a) Wir berechnen

$$\begin{array}{rcl} \|v+w\|^2+\|v-w\|^2 & = & \langle v+w,v+w\rangle+\langle v-w,v-w\rangle \\ & = & \langle v,v\rangle+2\langle v,w\rangle+\langle w,w\rangle \\ & & +\langle v,v\rangle-2\langle v,w\rangle+\langle w,w\rangle \\ & = & 2\langle v,v\rangle+2\langle w,w\rangle=2\|v\|^2+2\|w\|^2 . \end{array}$$

b)* Für eine Norm $\| \;\; \|$ mit der gewünschten Eigenschaft $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ muss für zwei Vektoren $v,w\in V$ gelten

$$\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2+2\langle v,w\rangle .$$

Wir definieren daher

$$\langle v,w\rangle := \tfrac{1}{2}\left(\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2\right) .$$

Man beachte die Analogie zur Polarisierung 5.4.4.

Da die Norm $\| \;\; \|$ die Parallelogramm-Gleichung erfüllt, gilt

$$2\|v+w\|^2-2\|v\|^2-2\|w\|^2=\|v+w\|^2-\|v-w\|^2 ,$$

und damit folgt

$$\langle v,w\rangle=\tfrac{1}{2}\left(\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2\right)=\tfrac{1}{4}\left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2\right) .$$

Bestimmen wir für $v=w$ das Skalarprodukt, so erhalten wir

$$\langle v,v\rangle=\tfrac{1}{4}\left(\|v+v\|^2-\|v-v\|^2\right)=\tfrac{1}{4}\cdot\|2v\|^2=\|v\|^2 ,$$

wie es gefordert war.

Es seien $v,v',w\in V$. Wir berechnen

$$\begin{array}{rcl} \langle v+v',w\rangle & = & \frac{1}{4}\left(\|v+v'+w\|^2-\|v+v'-w\|^2\right) \\ & = & \frac{1}{4}(\|v+v'+w\|^2+\|v-v'-w\|^2-\|v-v'-w\|^2 \\ & & -\|v+v'-w\|^2) \\ & \overset{(*)}{=} & \frac{1}{4}\left(2\|v\|^2+2\|v'+w\|^2-2\|v-w\|^2-2\|v'\|^2\right) \\ & = & \frac{1}{2}(\|v'+w\|^2-\|v'\|^2+\|v\|^2-\|v-w\|^2 \\ & & -\|v+w\|^2+\|v+w\|^2) \\ & \overset{(*)}{=} & \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2+\|v'+w\|^2-\|v'\|^2-\|w\|^2\right) \\ & = & \langle v,w\rangle+\langle v',w\rangle , \end{array}$$

wobei an den Stellen $(*)$ die Parallelogramm-Gleichung verwendet wurde.

Die Symmetrie von $\langle \;,\; \rangle$ ist klar, und die positive Definitheit folgt aus der Eigenschaft N1 der Norm sowie $\langle v,v\rangle=\|v\|^2$ für alle $v\in V$.

Es bleibt, $\langle\lambda v,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle$ für alle $v,w\in V$ und alle $\lambda\in\mathbb{R}$ zu zeigen. Dies ist der schwierigste Teil der Aufgabe. Wir beginnen damit, die Aussage für $\lambda\in\mathbb{N}$ per Induktion zu zeigen.

Für $\lambda=0$ oder $\lambda=1$ ist die Behauptung klar.

Um den Induktionsschritt zu zeigen, ersetzen wir in der obigen Rechnung v' durch $(\lambda-1)v$ und erhalten

$$\langle \lambda v, w\rangle = \langle v+(\lambda-1)v, w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle(\lambda-1)v,w\rangle\,.$$

Auf den zweiten Summanden der rechten Seite können wir nun die Induktionsvoraussetzung anwenden, und damit folgt

$$\langle \lambda v, w\rangle = \langle v,w\rangle + (\lambda-1)\langle v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle\,.$$

Ist $\lambda\in\mathbb{Z}$ mit $\lambda<0$, so ist $-\lambda>0$. Wegen

$$0=\langle 0,w\rangle = \langle v-v,w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle -v,w\rangle$$

gilt $-\langle -v,w\rangle = \langle v,w\rangle$ für alle $v,w\in V$, also ist

$$\langle \lambda v,w\rangle = -\langle -\lambda v,w\rangle = -(-\lambda)\langle v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle\,,$$

und damit ist die Behauptung auch für alle $\lambda\in\mathbb{Z}$ gezeigt.

Für $\lambda=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ gilt

$$\tfrac{q}{p}\cdot\langle \tfrac{p}{q}v,w\rangle = \tfrac{q}{p}\cdot p\cdot\langle \tfrac{1}{q}v,w\rangle = \langle q\cdot\tfrac{1}{q}v,w\rangle = \langle v,w\rangle\,,$$

und das beweist die Behauptung für $\lambda\in\mathbb{Q}$.

Im letzten Schritt gilt es nun, die Aussage für eine beliebige reelle Zahl zu zeigen. Ist $\lambda\in\mathbb{R}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\lambda_\varepsilon\in\mathbb{Q}$ mit $|\lambda-\lambda_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$.

Aus den Eigenschaften N2 und N3 der Norm sowie der Monotonie der Quadratfunktion folgt

$$\|(\lambda-\lambda_\varepsilon)v+w\|^2 \leqslant (\lambda-\lambda_\varepsilon)^2\cdot\|v\|^2 + 2(\lambda-\lambda_\varepsilon)\cdot\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2\,. \tag{1}$$

Analog erhält man

$$\|(\lambda_\varepsilon-\lambda)v+w\|^2 \leqslant (\lambda_\varepsilon-\lambda)^2\cdot\|v\|^2 + 2(\lambda_\varepsilon-\lambda)\cdot\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2\,. \tag{2}$$

Mit diesen beiden Gleichungen folgt

$$\langle\lambda v,w\rangle - \lambda_\varepsilon\langle v,w\rangle \leqslant \varepsilon\cdot\|v\|\cdot\|w\|\,, \tag{3}$$

wie mit (1) für $\langle\lambda v,w\rangle-\lambda_\varepsilon\langle v,w\rangle\geqslant 0$ gezeigt wird und mit (2) für $\langle\lambda v,w\rangle - \lambda_\varepsilon\langle v,w\rangle\leqslant 0$ analog verläuft. Mit der Definition des Skalarproduktes ergibt sich

$$\begin{array}{rcl}
|\langle\lambda v,w\rangle-\lambda_\varepsilon\langle v,w\rangle| & = & \langle\lambda v,w\rangle-\lambda_\varepsilon\langle v,w\rangle = \langle(\lambda-\lambda_\varepsilon)v,w\rangle\\
& \leqslant & \frac{1}{2}\big((\lambda-\lambda_\varepsilon)^2\cdot\|v\|^2+2(\lambda-\lambda_\varepsilon)\cdot\|v\|\cdot\|w\|+\|w\|^2\\
& & \quad -(\lambda-\lambda_\varepsilon)^2\cdot\|v\|^2-\|w\|^2\big)\\
& = & (\lambda-\lambda_\varepsilon)\cdot\|v\|\cdot\|w\| < \varepsilon\cdot\|v\|\cdot\|w\|\,.
\end{array}$$

Andererseits ist stets

$$|\lambda\langle v,w\rangle - \lambda_\varepsilon\langle v,w\rangle| = |\lambda-\lambda_\varepsilon|\cdot|\langle v,w\rangle| \leqslant \varepsilon\cdot\langle v,w\rangle|\,,$$

und mit der Dreiecksungleichung folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
|\langle\lambda v,w\rangle-\lambda\langle v,w\rangle| & \leqslant & |\langle\lambda v,w\rangle-\lambda_\varepsilon\langle v,w\rangle|+|\lambda_\varepsilon\langle v,w\rangle-\lambda\langle v,w\rangle|\\
& \leqslant & \varepsilon\cdot\|v\|\cdot\|w\|+\varepsilon\cdot|\langle v,w\rangle|\\
& = & \varepsilon\cdot(\|v\|\cdot\|w\|+|\langle v,w\rangle|)\,.
\end{array}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$.

Eine analoge Aussage gilt auch für eine Norm auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V, die die Parallelogramm-Gleichung erfüllt, vgl. hierzu [M-V], §11.

5. a) Es gilt $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \max\{|x_i|:\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = 0$, was aufgrund von $|y| \geqslant 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gleichbedeutend ist mit $x_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, also $x = 0$. Das zeigt N1. N2 gilt wegen

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot x\| &= \max\{|\lambda \cdot x_i|:\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = \max\{|\lambda| \cdot |x_i|:\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \\ &= |\lambda| \cdot \max\{|x_i|:\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = |\lambda| \cdot \|x\|\,. \end{aligned}$$

Schließlich folgt N3 aus

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \max\{|x_i + y_i|:\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \overset{(*)}{\leqslant} \max\{|x_i| + |y_i|:\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \\ &\leqslant \max\{|x_i|:\ 1 \leqslant i \leqslant n\} + \max\{|y_i|:\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = \|x\| + \|y\|\,, \end{aligned}$$

wobei $(*)$ aufgrund der Dreiecksungleichung gilt. Damit ist $\|\ \ \|$ eine Norm.

Nehmen wir an, es existiert ein Skalarprodukt mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $n \geqslant 2$ gilt. Nach Aufgabe 4 a) gilt dann die Parallelogramm-Gleichung. Jedoch ist für $x = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ und $y = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ gerade

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2 + 2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,.$$

Daher kann es kein solches Skalarprodukt geben.

b) Die Eigenschaften D1 bis D3 zeigen wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f-g\|_k}{1+\|f-g\|_k} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \|f-g\|_k = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \quad \max\{|f(x) - g(x)|:\ x \in [-k, k]\} = 0 \\ &\qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad f = g\,, \end{aligned}$$

das beinhaltet D1. Wegen $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\|f-g\|_k = \|g-f\|_k$ für alle k, und daraus folgt $d(f,g) = d(g,f)$, also D2. Die Dreiecksungleichung D3 folgt aus

$$\begin{aligned} d(f,g) + d(g,h) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f-g\|_k}{1+\|f-g\|_k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|g-h\|_k}{1+\|g-h\|_k} \\ = \ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} &\frac{\|f-g\|_k + \|f-g\|_k\|g-h\|_k + \|g-h\|_k + \|f-g\|_k\|g-h\|_k}{1+\|f-g\|_k + \|g-h\|_k + \|f-g\|_k \cdot \|g-h\|_k} \\ \overset{(*)}{\geqslant} \ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} &\frac{\|f-g\|_k + \|g-h\|_k}{1+\|f-g\|_k + \|g-h\|_k} \overset{(*)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f-h\|_k}{1+\|f-h\|_k}\,, \end{aligned}$$

wobei die beiden mit $(*)$ gekennzeichnete Relationen für jeden einzelnen Summanden und damit für die gesamte Summe gelten. Dabei wurden die Dreiecksungleichung für den Betrag sowie die Ungleichung $\frac{x}{1+x} \leqslant \frac{x+y}{1+x+y}$ für alle $x \geqslant 0$ und alle $y \geqslant 0$ benutzt.

Nehmen wir an, es existiert eine Norm $\| \ \| \colon\ V \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\|f-g\| = d(f,g) \text{ für alle } f,g \in \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}),$$

so gilt insbesondere

$$\|f\| = d(f,0) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f\|_k}{1+\|f\|_k}$$

für alle $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Wählen wir $f=1$ und $\lambda = 2$, so gilt

$$\|\lambda \cdot f\|_k = \max\{|\lambda \cdot f(x)| \colon\ x \in [-k,k]\} = 2,$$

womit folgt

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\| &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|\lambda f\|_k}{1+\|\lambda f\|_k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\tfrac{2}{3} \\ &\neq 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\tfrac{1}{2} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f\|_k}{1+\|f\|_k} = |\lambda| \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

6. Die Folgerungen i) $\Rightarrow$ ii) und i) $\Rightarrow$ iii) zeigen wir gleichzeitig. Ist $v \in V$, so gibt es eine eindeutige Darstellung $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$. Aus der Orthonormalität der v_i folgt unmittelbar $\langle v, v_i \rangle = \lambda_i$, also $v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$. Ferner folgt für $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle i, dass $v = 0$ ist.

Für iii) $\Rightarrow$ iv) wählen wir zwei Vektoren

$$v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i \quad \text{und} \quad w = \sum_{j=1}^{r} \langle w, v_j \rangle \cdot v_j .$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i, \sum_{j=1}^{r} \langle v_j, w \rangle \cdot v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \langle v_j, w \rangle \cdot \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot \langle v_i, w \rangle . \end{aligned}$$

Dabei ist δ_{ij} wie in der Lösung zu Aufgabe 2 d) in Abschnitt 1.5 das Kronecker-Symbol.

iv) $\Rightarrow$ v) folgt aus

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i \rangle|^2 .$$

Die v_i sind orthonormal, also linear unabhängig. Für v) $\Rightarrow$ i) ist daher nur $V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r)$ zu zeigen. Nehmen wir an, dies ist nicht der Fall. Wir ergänzen die v_i zu einer Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s)$ von V. Für jedes $j = 1, \ldots, s$ gilt dann $1 = \|w_j\|^2$. Nach v) gilt jedoch

$$\|w_j\|^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle w_j, v_i \rangle| = 0\,,$$

und wegen $0 \neq 1$ ist dies ein Widerspruch.

Es fehlt noch ii) $\Rightarrow$ i). Wir ergänzen $(v_1, \ldots, v_r)$ zu einer Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s)$ von V. Für jedes $j = 1, \ldots, s$ gilt dann $\langle w_j, v_i \rangle = 0$ für alle i, und aus ii) folgt $w_j = 0$, also $s = 0$ und $V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r)$.

7. a) Zunächst ist für alle $f, g \in V$

$$\begin{aligned} \langle f+g, h \rangle &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x)+g(x)) \cdot h(x)dx \\ &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot h(x)dx + \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cdot h(x)dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle\,, \end{aligned}$$

sowie

$$\langle \lambda f, g \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lambda f(x) \cdot g(x)dx = \tfrac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)dx = \lambda \langle f, g \rangle\,,$$

daher gilt B1. Die Eigenschaft S folgt aus

$$\langle f, g \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)dx = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cdot f(x)dx = \langle g, f \rangle\,,$$

und B2 folgt aus B1 und S.

b) Zu zeigen ist die Orthonormalität der Elemente aus $\mathscr{B}$. Für all diejenigen, die nicht gerne integrieren, gilt: Alle auftretenden Integrale befinden sich in der Integrationstabelle von [B-S], S. 52ff, Integrale 274ff.

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)dx = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

gilt

$$\langle \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \cos(nx) \rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = 0$$

sowie

$$\langle \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \sin(nx) \rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx)dx = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Diese Vektoren sind somit orthogonal. Wegen

$$\langle \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}dx = 1$$

und
$$\langle \cos(nx), \cos(nx)\rangle = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = 1\,,$$
sowie
$$\langle \sin(nx), \sin(nx)\rangle = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = 1$$
sind sie sogar normiert.

Mit Hilfe von partieller Integration sowie Additionstheoremen zeigen wir für $m \neq n$
$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx \\ = \quad & -\tfrac{1}{\pi n}\cos(nx)\sin(mx)\Big|_0^{2\pi} + \tfrac{m}{\pi n}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx) + \cos((n+m)x)dx\,, \end{aligned}$$
und daraus folgt
$$\begin{aligned} (n-m)\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx \quad = \quad & -\cos(nx)\sin(mx)\Big|_0^{2\pi} \\ & + \tfrac{m}{n+m}\sin((n+m)x)\Big|_0^{2\pi} = 0\,, \end{aligned}$$
also $\langle \sin(nx), \sin(mx)\rangle = 0$ für $n \neq m$. Eine analoge Rechnung zeigt
$$\langle \cos(nx), \cos(mx)\rangle = 0 \quad \text{für } n \neq m\,,$$
damit sind diese Vektoren orthonormal. Schließlich erhalten wir
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx \quad = \quad & -\tfrac{1}{n\pi}\cos(nx)\cos(mx)\Big|_0^{2\pi} \\ & -\tfrac{m}{n\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx\,. \end{aligned}$$
Für $n = m$ folgt hier bereits $\langle \cos(nx), \sin(nx)\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ist $n \neq m$, so zeigen wir durch eine weitere Integration
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = -\tfrac{1}{n\pi}\cos(nx)\sin(mx)\Big|_0^{2\pi} \\ -\tfrac{m}{n^2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\Big|_0^{2\pi} + \tfrac{m^2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx\,. \end{aligned}$$
Da die beiden ersten Terme auf der rechten Seite verschwinden, folgt
$$\langle \sin(nx), \cos(mx)\rangle = 0$$
für alle $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Damit sind wir fertig.

c) Die Behauptung folgt aus Aufgabe 6, Bedingung iii). Man beachte, dass auch $a_0 = \langle f, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ ein Fourierkoeffizient ist, obwohl er in der Aufgabe nicht explizit aufgeführt ist.

d)* In der Aufgabenstellung der Teile d)* und e)* der zehnten sowie der elften Auflage der *Linearen Algebra* hat sich ein Fehler eingeschlichen. Statt $\frac{a_0^2}{2}$ bzw. $\frac{a_0 a_0'}{2}$ muss in der Aufgabenstellung a_0^2 bzw. $a_0 a_0'$ stehen.

Für jede endliche Summe

$$f_n := \frac{a_0}{2}\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

definieren wir

$$\tilde{f}_n := f - f_n\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \|\tilde{f}_n\|^2 = \langle \tilde{f}_n, \tilde{f}_n \rangle \\
&= \|f\|^2 - 2a_0\langle f, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\rangle - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \langle f, \cos(kx)\rangle - 2\sum_{k=1}^{n} b_k \langle f, \sin(kx)\rangle \\
&\quad + \langle \frac{a_0}{2}\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \\
&\quad\ \frac{a_0}{2}\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\rangle \\
&\overset{(*)}{=} \|f\|^2 - 2a_0^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \\
&= \|f\|^2 - a_0^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \|f\|^2,
\end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(*)$ die Orthonormalität der Basisvektoren von $\mathscr{B}$ ausgenutzt wurde. Umformung ergibt

$$\|f\|^2 \geqslant a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)\,.$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ gilt, folgt die Behauptung.

e)* Betrachten wir die Lösung von Teil d), so erkennen wir, dass die Gleichheit bei der Besselschen Ungleichung nicht gilt, wenn f nicht durch seine Fourier-Reihe dargestellt werden kann, d.h. wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right) \neq f(x)\,. \qquad (*)$$

Gilt für zwei Funktionen f und g punktweise Konvergenz für die $(*)$ entsprechenden Reihen ihrer Fourierkoeffizienten, so wird die Besselsche Ungleichung für sie zur Gleichung, und dies ist gleichbedeutend mit

$$\langle f, g\rangle = a_0 a_0' + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k a_k' + b_k b_k'\right)\,.$$

Seien nun $f,g\in V$ stückweise stetig differenzierbar. Nach der Theorie der punktweisen Konvergenz von Fourier-Reihen (vgl. [B-F1], Kapitel 12, Abschnitt 4)) wird jede auf $[0,2\pi]$ stetige stückweise differenzierbare Funktion durch ihre Fourier-Reihe dargestellt, d.h. es gilt punktweise Konvergenz, somit

$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}\sqrt{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\ &:=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}\sqrt{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)=f(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\frac{a_0'}{2}\sqrt{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k'\cos kx+b_k'\sin kx\right)\\ &:=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0'}{2}\sqrt{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k'\cos kx+b_k'\sin kx\right)\right)=g(x)\,.\end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}\vartheta_n \quad:=\quad &\langle f-\frac{a_0}{2}\sqrt{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,,\\ &g-\frac{a_0'}{2}\sqrt{2}-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k'\cos kx+b_k'\sin kx\right)\rangle\\ =\quad &\langle f,g\rangle-a_0a_0'-\sum_{k=1}^{n}\left(a_ka_k'+b_kb_k'\right)\,.\end{aligned}$$

Da f und g durch ihre Fourier-Reihen dargestellt werden, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\vartheta_n=\langle 0,0\rangle=0\,,$$

und damit

$$\langle f,g\rangle=a_0a_0'+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a_ka_k'+b_kb_k'\right)=a_0a_0'+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_ka_k'+b_kb_k'\right)\,.$$

Fourier-Reihen spielen in der Analysis eine Rolle, weil bestimmte Funktionen wie in dieser Aufgabe durch trigonometrische Funktionen dargestellt werden können. Dabei müssen diese Funktionen nicht einmal stetig sein. Zur Theorie der Fourier-Reihen vgl. [B-F1], Kapitel 12.

Fourier-Reihen finden ebenfalls in der Physik Anwendung bei der Darstellung periodischer Vorgänge, vgl. [G], Kapitel III, §9 und [C-H], Kapitel II, §5 und §10.

Die Besselsche Ungleichung gilt unter allgemeineren Bedingungen als in dieser Aufgabe, nämlich in einem *Prähilbertraum* zusammen mit einem *Orthonormalsystem* von Vektoren. Gilt unter diesen Bedingungen Gleichheit in der Besselschen Ungleichung, so heißt sie *Gleichung von Parseval*. Für Einzelheiten siehe [M-V], §12.

8. Wir berechnen wie im Text beschrieben zunächst orthogonale Vektoren und normieren diese anschließend.

Der erste Vektor $w_1 = {}^t(1,0,0,0,0)$ dient als Startpunkt und ist bereits normiert. Den im Beweis des Orthonormalisierungssatzes mit v bezeichneten Vektor bezeichnen wir im i-ten Schritt mit v_i, entsprechend die normierten Vektoren mit $\tilde{v}_i$. Dann ist $v_2 = {}^t(1,0,1,0,0)$ und $\tilde{v}_2 = \langle v_2, w_1\rangle \cdot w_1 = {}^t(1,0,0,0,0)$. Daraus folgt

$$w_2 = v_2 - \tilde{v}_2 = {}^t(0,0,1,0,0)\,.$$

Auch dieser Vektor ist bereits normiert.

Für den nächsten Schritt gilt $v_3 = {}^t(1,1,1,0,2)$, damit ergibt sich

$$\tilde{v}_3 = \langle v_3, w_1\rangle w_1 + \langle v_3, w_2\rangle w_2 = {}^t(1,0,1,0,0)\,.$$

Der Vektor $\tilde{w}_3 := v_3 - \tilde{v}_3 = {}^t(0,1,0,0,2)$ muss nun normiert werden:

$$w_3 = \frac{1}{\|\tilde{w}_3\|} \cdot \tilde{w}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot {}^t(0,1,0,0,2)\,.$$

Wir fahren wie bisher fort und erhalten

$$\tilde{v}_4 = \langle v_4, w_1\rangle \cdot w_1 + \langle v_4, w_2\rangle \cdot w_2 + \langle v_4, w_3\rangle \cdot w_3 = {}^t(2, \tfrac{7}{5}, 0, 0, \tfrac{14}{5})\,.$$

Damit erhalten wir den Vektor $\tilde{w}_4 = v_4 - \tilde{v}_4 = {}^t(0, -\frac{2}{5}, 0, 2, \frac{1}{5})$, der wiederum nicht normiert ist. Das ist jedoch schnell erledigt:

$$w_4 = \frac{1}{\|\tilde{w}_4\|} \cdot \tilde{w}_4 = \tfrac{1}{\sqrt{105}} \cdot {}^t(0,-2,0,10,1)\,.$$

Die Vektoren (w_1, w_2, w_3, w_4) bilden nun eine Orthonormalbasis des in der Aufgabe gegebenen Untervektorraumes.

Eine Bemerkung zum Schluss: In den meisten Fällen ist es sinnvoll, die Normierung der Vektoren erst ganz am Ende vorzunehmen, da hierbei im Allgemeinen Zahlen auftreten, mit denen sich nur schwer rechnen lässt. In unserer Aufgabe jedoch waren bereits zwei Vektoren normiert, und mit der Zahl $\sqrt{5}$ kann man eigentlich ganz gut rechnen. Daher bereitete es keine Schwierigkeiten, die Normierung der Vektoren direkt vorzunehmen.

9. a) Die Matrix von s bezüglich der gegebenen Basis ist symmetrisch, da s eine symmetrische Bilinearform ist. Daher müssen nur zehn der sechzehn benötigten Einträge berechnet werden.

Es sei $M_{\mathscr{B}}(s) = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = s(t^i, t^j)$ für $0 \leqslant i, j \leqslant 3$. Damit errechnen wir leicht

$$\begin{array}{lllllll} s(1,1) & = & \int\limits_{-1}^{1} 1\,dt = 2\,, & s(1,t) & = & \int\limits_{-1}^{1} t\,dt = 0\,, \\ s(1,t^2) & = & \int\limits_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}\,, & s(1,t^3) & = & \int\limits_{-1}^{1} t^3\,dt = 0\,, \\ s(t,t) & = & \int\limits_{-1}^{1} t^2\,,dt = \frac{2}{3}\,, & s(t,t^2) & = & \int\limits_{-1}^{1} t^3\,dt = 0\,, \\ s(t,t^3) & = & \int\limits_{-1}^{1} t^4\,dt = \frac{2}{5}\,, & s(t^2,t^2) & = & \int\limits_{-1}^{1} t^4\,dt = \frac{2}{5}\,, \\ s(t^2,t^3) & = & \int\limits_{-1}^{1} t^5\,dt = 0\,, & s(t^3,t^3) & = & \int\limits_{-1}^{1} t^6\,dt = \frac{2}{7}\,. \end{array}$$

Für die Matrix erhalten wir

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

b) Die Vektoren 1 und t sind bereits zueinander orthogonal, jedoch beide (!) nicht normiert. Wegen $\|1\| = \sqrt{2}$ ist $w_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}$ normiert. Analog folgt, dass $w_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}t$ normiert ist. Für den Rest der Aufgabe wählen wir dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe 8. Zunächst ist

$$\tilde{v}_3 = \langle t^2, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \langle t^2, \sqrt{\tfrac{3}{2}}t\rangle \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}t = \tfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} t^2\,dt + \tfrac{3}{2}t\int\limits_{-1}^{1} t^3\,dt = \tfrac{1}{3}\,,$$

also

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \tilde{v}_3 = t^2 - \tfrac{1}{3}\,,$$

und damit

$$w_3 = \frac{1}{\|\tilde{w}_3\|} \cdot \tilde{w}_3 = \sqrt{\tfrac{45}{8}}(t^2 - \tfrac{1}{3})\,.$$

Für den vierten Vektor führt die analoge Rechnung zu

$$\tilde{v}_4 = \tfrac{3}{5}t\,, \quad \tilde{w}_4 = t^3 - \tfrac{3}{5}t\,,$$

und schließlich

$$w_4 = \sqrt{\tfrac{175}{8}}(t^3 - \tfrac{3}{5}t)\,.$$

Damit ist $\mathscr{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ eine Orthonormalbasis von V.

10.* Die Konstruktion einer Darboux-Basis verläuft ähnlich wie die Konstruktion einer Orthonormalbasis im Orthonormalisierungssatz. Wir formulierern daher zunächst die Aussage der Aufgabe etwas anders:

Sei V ein endlichdimensionaler symplektischer Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum mit Darboux-Basis $(v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_m)$. Dann gibt es eine Ergänzung zu einer Darboux-Basis

$$(v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,v_n) \quad \text{von } V\,.$$

Da $W=0$ erlaubt ist, folgt die Aussage der Aufgabe.

Wir wählen die Bezeichnungen wie im Beweis des Orthonormalisierungssatzes, um die Analogie aufzuzeigen.

Ist $W=V$, so ist nichts mehr zu zeigen. Ansonsten gibt es einen Vektor $v \in V \smallsetminus W$, und wir definieren

$$\tilde{v} := \omega(v_1,v)w_1+\ldots+\omega(v_m,v)w_m+\omega(v,w_1)v_1+\ldots+\omega(v,w_m)v_m\,.$$

Nun setzen wir $v_{m+1} := v-\tilde{v}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\omega(v_{m+1},v_j) &= \omega(v,v_j)-\omega(\tilde{v},v_j)\\ &= \omega(v,v_j)-\sum_{i=1}^{m}\big(\omega(v_i,v)\omega(w_i,v_j)+\omega(v,w_i)\omega(v_i,v_j)\big)\\ &= \omega(v,v_j)+\omega(v_j,v)=0\end{aligned}$$

sowie durch analoge Rechnung

$$\omega(v_{m+1},w_j)=0$$

für alle $j=1,\ldots,m$. Daraus folgt insbesondere, dass $v_{m+1}\notin W$ ist.

Da ω schiefsymmetrisch ist, folgt $\omega(v_{m+1},v_{m+1})=0$. Damit gilt jedoch

$$\omega(v_{m+1},v)=0 \quad \text{für alle } v\in \operatorname{span}(v_1,\ldots,v_{m+1},w_1,\ldots,w_m) =: W'\,,$$

also ist $W'\neq V$, da ω nicht-entartet ist. Also existiert ein $w\in V\smallsetminus W'$ mit $\omega(v_{m+1},w)\neq 0$, und wir definieren ähnlich wie im ersten Schritt

$$\tilde{w} := \sum_{i=1}^{m}\left(\omega(v_i,w)w_i+\omega(w,w_i)v_i\right)+\omega(w,v_{m+1})v_{m+1}\,.$$

Setzen wir wie oben $\tilde{w}_{m+1} := w-\tilde{w}$, so gilt für alle $j=1,\ldots,m$

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{w}_{m+1},v_j) &= \omega(w,v_j)-\sum_{i=1}^{m}\big(\omega(v_i,w)\omega(w_i,v_j)-\omega(w,w_i)\omega(v_i,v_j)\big)\\ &\quad -\omega(w,v_{m+1})\omega(v_{m+1},v_j)\\ &= \omega(w,v_j)+\omega(v_j,w)=0\,,\end{aligned}$$

und analog folgt $\omega(\tilde{w}_{m+1},w_j)=0$ für alle $j=1,\ldots,m$. Andererseits gilt

$$\omega(v_{m+1},\tilde{w}_{m+1})=\omega(v_{m+1},w)\neq 0$$

nach Voraussetzung. Setzen wir nun

$$w_{m+1} := \frac{\tilde{w}_{m+1}}{\omega(v_{m+1}, w)},$$

so gilt

$$\omega(v_{m+1}, w_{m+1}) = 1.$$

Indem wir das Verfahren so oft wie nötig wiederholen, gelangen wir zum gewünschten Ergebnis.

Mit den Methoden aus Abschnitt 5.7 lässt sich der Beweis deutlich kürzen, vgl. Aufgabe E1 zu 5.7.

Ist eine Darboux-Basis $\mathscr{B}$ eines symplektischen Vektorraumes gegeben, so bedeutet dies, dass die darstellende Matrix von ω die Form

$$M_{\mathscr{B}}(\omega) = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

besitzt. Diese Matrix ist leichter zu merken als die Bedingungen an die schiefsymmetrische Bilinearform ω.

Die symplektische Struktur von Vektorräumen und Mannigfaltigkeiten wird in der Differentialgeometrie, der Darstellungstheorie von Lie-Gruppen und der Mathematischen Physik betrachtet. Siehe hierzu beispielsweise [F-H], Lecture 16, [Arn], Chapter 8, insbesondere §41, oder die folgenden Ergänzungsaufgaben E4 bis E11.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. Wir geben zu dieser Aufgabe nur die Lösungen ohne die Rechnungen an. Zu beachten ist dabei, dass je nach Anfangsvektor die Lösung im Allgemeinen nicht eindeutig ist.

a) Die Dimension des gegebenen Unterraumes ist gleich 2, und eine Orthonormalbasis ist gegeben durch

$$w_1 = \tfrac{1}{\sqrt{14}} \cdot {}^t(1,2,3), \quad w_2 = \tfrac{1}{\sqrt{21}} \cdot {}^t(4,1,-2).$$

b) Die drei gegebenen Vektoren sind linear unabhängig, eine mögliche Orthonormalbasis besteht aus

$$w_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot {}^t(2,1,0,0), \quad w_2 = \tfrac{1}{\sqrt{130}} \cdot {}^t(1,-2,10,5),$$

$$w_3 = \tfrac{1}{\sqrt{546}} \cdot {}^t(-1,2,-10,21).$$

c) Die Dimension des gegebenen Unterraumes ist 4, und eine mögliche Orthonormalbasis ist

$$w_1 = \tfrac{1}{2} \cdot {}^t(1,\mathrm{i},-\mathrm{i},0,1)\,, \quad w_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot {}^t(\mathrm{i},1,0,\mathrm{i},0)\,,$$

$$w_3 = \tfrac{1}{\sqrt{60}} \cdot {}^t(\mathrm{i},3,1+4\mathrm{i},-4\mathrm{i},4+\mathrm{i})\,,$$

$$w_4 = \tfrac{1}{\sqrt{870}} \cdot {}^t(7-13\mathrm{i},6-6\mathrm{i},\mathrm{i},-13+7\mathrm{i},19\mathrm{i})\,.$$

E2. Nach der Lösung von Aufgabe 2 c) zu 1.5 ist eine Basis gegeben durch (t,t^2+1,t^2+t). Hierbei sind die Vektoren $v_1 = t$ und $v_2 = t^2+1$ orthogonal, denn

$$s(v_1,v_2) = \int_{-1}^{1} t(t^2+1)dt = \tfrac{1}{4}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{1} = 0\,.$$

Wie in Aufgabe 9 b) ist $w_1 := \sqrt{\frac{3}{2}}t$ normiert. Ferner ergibt sich

$$s(v_2,v_2) = \int_{-1}^{1} (t^2+1)^2 dt = \tfrac{56}{15}\,,$$

also ist $w_2 := \sqrt{\frac{15}{56}}(t^2+1)$ normiert.

Mit dem Verfahren von Schmidt erhalten wir weiterhin

$$\tilde{v}_3 = s(v_3,w_1)w_1 + s(v_3,w_2)w_2 = \tfrac{2}{7}t^2 + \tfrac{2}{7}\,,$$

und damit

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \tilde{v}_3 = \tfrac{5}{7}t^2 - \tfrac{2}{7}\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$w_3 = \frac{1}{\|\tilde{w}_3\|} \cdot \tilde{w}_3 = \sqrt{\tfrac{21}{2}} \cdot \left(\tfrac{5}{7}t^2 - \tfrac{2}{7}\right)\,.$$

E3. Es ist einfach zu zeigen, dass es sich bei der Abbildung um ein Skalarprodukt handelt; wir lassen die Rechnungen an dieser Stelle aus. Die in Aufgabe 2 d) zu Abschnitt 1.5 bestimmte Basis $(f_r \in V: \; f_r(x) = \delta_{xr})$ ist eine Orthonormalbasis, denn

$$\langle f_r, f_r \rangle = f_r(r) \cdot f_r(r) = 1\,,$$

und für $r \neq s$ gilt

$$\langle f_r, f_s \rangle = f_r(r) \cdot f_s(r) + f_r(s) \cdot f_s(s) = 0\,.$$

E4. a) Nach der Definition gelten

$$\mathrm{Sp}\,(A\cdot B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}\cdot a_{ij}=\mathrm{Sp}\,(B\cdot A)\,.$$

b) Mit Hilfe von Aufgabenteil a) gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\left(B^{-1}\cdot(A\cdot B)\right) &= \mathrm{Sp}\left((A\cdot B)\cdot B^{-1}\right)\\ &= \mathrm{Sp}\left(A\cdot(B\cdot B^{-1})\right)=\mathrm{Sp}\,(A)\,.\end{aligned}$$

E5. a) Wir betrachten den Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$; für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ verläuft die Lösung fast analog. Aus den Rechenregeln 1), 2) in 2.5.4 in [Fi1] folgen die Regeln (B1) und ($\overline{\mathrm{B}}$2). Davon zeigen wir

$$\begin{aligned}s(A,\lambda B) &= \mathrm{Sp}\left({}^t(\overline{\lambda B})\cdot A\right)=\mathrm{Sp}\left(\bar\lambda\cdot{}^t\overline{B}\cdot A\right)\\ &= \bar\lambda\cdot\mathrm{Sp}\left({}^t\overline{B}\cdot A\right)=\bar\lambda\cdot\mathrm{Sp}(A,B)\,.\end{aligned}$$

Für $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ gilt

$${}^t\overline{B}\cdot A=(c_{ik})\quad\text{mit}\quad c_{ik}=\sum_{j=1}^{m}\bar b_{ji}a_{jk}$$

sowie

$${}^t\overline{A}\cdot B=(d_{ik})\quad\text{mit}\quad d_{ik}=\sum_{j=1}^{m}\bar a_{ji}b_{jk}\,,$$

woraus $c_{ii}=\sum_{j=1}^{m}\bar b_{ji}a_{ji}$ und $d_{ii}=\sum_{j=1}^{m}\bar a_{ji}b_{ji}$ folgt. Wegen $\bar b_{ji}a_{ji}=\overline{(\bar a_{ji}b_{ji})}$ gilt $c_{ii}=\bar d_{ii}$, und damit

$$s(A,B)=\overline{s(B,A)}\,,$$

also die Bedingung (H), d.h. s ist eine hermitesche Bilinearform.

Für $A\in\mathrm{M}(m\times n;\mathbb{C})$ ist $e_{ii}:=\sum_{j=1}^{m}\bar a_{ji}a_{ji}\in\mathbb{R}_+$ nach 1.3.4 b), und damit gilt

$$s(A,A)=\sum_{i=1}^{n}e_{ii}\in\mathbb{R}_+\qquad\text{mit}\quad s(A,A)=0\Leftrightarrow A=0\,,$$

also ist s positiv definit.

b) Die Dimension von V ist gleich 4, und wie man durch Ausprobieren herausfindet, ist eine Orthonormalbasis von V gegeben durch

$$\mathscr{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

Man beachte, dass dies nicht die einzige Möglichkeit für eine Orthonormalbasis ist.

E6. (1) Wir schreiben $A=\begin{pmatrix}a_{11}&&A_1\\&\ddots&\\A_2&&a_{nn}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}(n;\mathbb{K})$. Hierbei ist A_1 das obere Matrizendreieck der Elemente a_{ij} mit $j > i$ und A_2 das untere Matrizendreieck der Elemente a_{ij} mit $i > j$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\,(\lambda \cdot A) &= \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & & \lambda \cdot A_1 \\ & \ddots & \\ \lambda \cdot A_2 & & \lambda \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot a_{ii} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}\, A\,.
\end{aligned}$$

(2) Für A wie oben und analog definiertes $B = \begin{pmatrix} b_{11} & & B_1 \\ & \ddots & \\ B_2 & & b_{nn} \end{pmatrix}$ gilt

$$\mathrm{Sp}\,(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Sp}\,A + \mathrm{Sp}\,B\,.$$

Damit wurde die Behauptung bewiesen.

E7. a) Die Behauptung folgt aus

$$\mathrm{Sp}\,(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{Sp}\,(B \cdot A).$$

b) Die Gesetzmäßigkeiten lassen sich durch Rechnung nachweisen. Aus Teil a) folgt, dass $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{K})$ eine Lie-Algebra ist.
c) Wir betrachten die Wohldefiniertheit. Es seien $A,B,C \in \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$, so dass $[A,B]$ und $[C,B]$ schiefsymmetrisch sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[A+C,B] &= (A+C)\cdot B - B\cdot(A+C) \\
&= (A\cdot B - B\cdot A) + (C\cdot B - B\cdot C) \\
&= [A,B] + [C,B] \overset{\circledast}{=} -{}^t[B,A] - {}^t[B,C] \\
&\overset{\circledast\circledast}{=} -{}^t[B,A+C]\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde an der Stelle $\circledast$ berücksichtigt, dass $[A,B]$ und $[C,B]$ schiefsymmetrisch sind. An der Stelle $\circledast\circledast$ wurden analoge Schritte wie zu Beginn der Rechnung, nur entgegengesetzt, durchgeführt.
d) Es gilt ${}^tA = -A$. Daraus folgt $a_{ii} = 0$ für alle $i = 1,\ldots,n$; damit ist $\mathrm{Sp}\,A = 0$.
e) Es gilt

$$\begin{aligned}
{}^t[A,B] &= {}^t(AB-BA) = {}^t(AB) - {}^t(BA) \\
&= -B\cdot(-A) - (-A)\cdot(-B) = -AB+BA \\
&= -(A\cdot B - B\cdot A) = -[A,B]\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $[A,B] \in \mathfrak{o}(n;K)$.

E8. a) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{u}(n)$. Die Elemente in der Diagonale der Matrix haben die Form $a_{ii} = a + \mathrm{i} \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Es gilt

$a_{ii} = -\bar{a}_{ii} \iff a + \mathrm{i} \cdot b = -(a - \mathrm{i} \cdot b) \iff a + \mathrm{i} \cdot b = -a + \mathrm{i} \cdot b \iff a = 0.$

Daher folgt $a_{ii} \in \mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$.

b) Das Additionsgesetz ist klar. Wir weisen die Regel des Skalarprodukts nach. Wir betrachten hier die Diagonalelemente a_{ii} von A, da es sich um imaginäre Zahlen handelt. Für die übrigen Elemente der Matrix A gelten die Rechenregeln, da $\mathbb{C}$ ein Körper und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ein Unterkörper der reellen Zahlen sind.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a_{ii} \in \mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$ folgt $\lambda \cdot a_{ii} \in \mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$. Damit ist die Bedingung, dass die Diagonalelemente der Matrix $\lambda \cdot A$ imaginär sind, erfüllt.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda = b + \mathrm{i} \cdot c$ (mit $b, c \in \mathbb{R}$) und $a_{ii} = \mathrm{i} \cdot a \in \mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$ (d.h. $a \in \mathbb{R}$) folgt

$$\lambda \cdot a_{ii} = (b + \mathrm{i} \cdot c) \cdot \mathrm{i} \cdot a = \mathrm{i} \cdot ab - ac \notin \mathrm{i} \cdot \mathbb{R}.$$

Daher ist $\mathfrak{u}(n)$ zwar ein $\mathbb{R}$-, aber kein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

c) Für $A, B \in u(n)$ gilt $A = -{}^t\bar{A}$ und $B = -{}^t\bar{B}$. Hieraus folgen

$${}^tA = -{}^t\big({}^t\bar{A}\big) = -\bar{A} \quad \text{und} \quad {}^tB = -{}^t\big({}^t\bar{B}\big) = -\bar{B}. \qquad \circledast$$

Damit lässt sich berechnen:

$$\begin{aligned} {}^t[A,B] &= {}^t(AB - BA) = {}^t(AB) - {}^t(BA) \\ &= {}^tB \cdot {}^tA - {}^tA \cdot {}^tB \\ &\overset{\circledast}{=} (-\bar{B}) \cdot (-\bar{A}) - (-\bar{A}) \cdot (-\bar{B}) = \bar{B} \cdot \bar{A} - \bar{A} \cdot \bar{B} \\ &= -\big(\bar{A} \cdot \bar{B} - \bar{B} \cdot \bar{A}\big) = -(\overline{A \cdot B - B \cdot A}) \\ &= -\overline{[A,B]}. \end{aligned}$$

E9. Da $\mathfrak{u}(n)$ und $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ Vektorräume über die reellen Zahlen sind und $\mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ ein Vektorraum ist, folgt die Behauptung.

E10. Wir formen zunächst die drei Terme um:

$$\begin{aligned} [A,[B,C]] &= [A,(BC - CB)] \\ &= A \cdot (BC - CB) - (BC - CB) \cdot A \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [B,[C,A]] &= [B,(CA - AC)] \\ &= B \cdot (CA - AC) - (CA - AC) \cdot B \\ &= BCA - BAC - CAB + ACB, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C,[A,B]] &= [C,(AB - BA)] \\ &= C \cdot (AB - BA) - (AB - BA) \cdot C \\ &= CAB - CBA - ABC + BAC. \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] &= ABC-ACB-BCA+CBA\\ &+ BCA-BAC-CAB+ACB\\ &+ CAB-CBA-ABC+BAC\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

E11. a) Wir betrachten die sechs Permutationen ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$ aus $\mathbf{S}_3$:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\xi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \xi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \xi_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für diese Permutationen gilt

$$\operatorname{sign}(\xi_1) = 1, \quad \operatorname{sign}(\xi_2) = -1, \quad \operatorname{sign}(\xi_3) = 1,$$
$$\operatorname{sign}(\xi_4) = -\operatorname{sign}(\xi_1), \quad \operatorname{sign}(\xi_5) = -\operatorname{sign}(\xi_2), \quad \operatorname{sign}(\xi_6) = -\operatorname{sign}(\xi_3)\,.$$

Daher genügt es, die Fälle ξ_1, ξ_2 und ξ_3 zu untersuchen, denn wegen $\sigma_i \cdot \sigma_j - \sigma_j \cdot \sigma_i = -(\sigma_j \cdot \sigma_i - \sigma_i \cdot \sigma_j)$ folgt

$$[\sigma_2, \sigma_1] = -[\sigma_1, \sigma_2], [\sigma_3, \sigma_1] = -[\sigma_1, \sigma_3] \quad \text{und} \quad [\sigma_3, \sigma_2] = -[\sigma_2, \sigma_3]\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}[\sigma_1, \sigma_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}\\ &= 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \operatorname{sign}(\xi_1) \cdot \sigma_3\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\sigma_1, \sigma_3] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\\ &= 2 \cdot \mathrm{i} \cdot (-1) \cdot \sigma_2 = 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \operatorname{sign}(\xi_2) \cdot \sigma_2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}[\sigma_2, \sigma_3] &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\\ &= 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \operatorname{sign}(\xi_3) \cdot \sigma_2\,,\end{aligned}$$

Hiermit folgt die Behauptung.

b) Wir unterscheiden die Fälle $i = j$ und $i \neq j$.

Für $i = j$: Es gilt $\sigma_i \cdot \sigma_j = 2 \cdot \sigma_i^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \sigma_0\,, \\ \xi_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}^2 = \sigma_0, \quad \text{und} \\ \xi_3^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \sigma_0, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Für $i \neq j$: Aufgrund der Gültigkeit des Kommutativgesetzes sei o.B.d.A. $i < j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = 0\,, \\ \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0\,, \\ \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = 0\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

c) Um die Lösung übersichtlicher zu notieren, definieren wir

$$\eta_0 = \mathrm{i} \cdot \sigma_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \eta_1 = \mathrm{i} \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta_2 = \mathrm{i} \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \quad \eta_0 = \mathrm{i} \cdot \sigma_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Hiermit beweisen wir die vier Aussagen.

i) Bei

$$\mathfrak{u}(2) = \{A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \cdot b_{11} & a_{12} + \mathrm{i} \cdot b_{12} \\ -a_{12} + \mathrm{i} \cdot b_{12} & \mathrm{i} \cdot b_{22} \end{pmatrix} : \, a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

ist eine Lösung der Gleichung

$$A = \lambda_0 \cdot \eta_0 + \lambda_1 \cdot \eta_1 + \lambda_2 \cdot \eta_2 + \lambda_3 \cdot \eta_3$$

zu finden. Die Lösungen $\lambda_1 = b_{12}$ und $\lambda_2 = a_{12}$ lassen sich sofort ablesen. Für $\lambda_0, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_0 \cdot \eta_0 + \lambda_3 \cdot \eta_3 = \mathrm{i} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathrm{i} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich das LGS

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_3 &= b_{11}\,, \\ \lambda_0 - \lambda_3 &= b_{22}\,. \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$A = \tfrac{1}{2}(b_{11}+b_{22})\cdot\eta_0 + b_{12}\cdot\eta_1 + a_{12}\cdot\eta_2 + \tfrac{1}{2}(b_{11}-b_{22})\cdot\eta_3\,,$$

und es gilt ${}_{\mathbb{R}}\mathfrak{u}(2) = {}_{\mathbb{R}}\mathrm{span}(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3)$.

ii) Über $\mathbb{C}$ gelten $\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C}) \subset \mathrm{span}(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ und

$$\dim\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C}) = \mathrm{span}(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = 4\,.$$

Damit folgt

$$\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C}) = \mathrm{span}(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\,.$$

iii) Für $A \in \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\cdot a_{11}\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Da η_1,η_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind und

$$\dim\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2) = 2 = \dim\left\{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}\right\} :\ a_{12},a_{21} \in \mathbb{C})$$

gilt, folgt die Behauptung, d.h. $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) = \mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$.

iv) Es gilt $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{u}(2)\cap\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Außerdem gelten

$$\mathfrak{u}(2) = \mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \quad \text{und} \quad \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) = \mathrm{span}(\eta_,\eta_2,\eta_3)\,,$$

woraus $\mathfrak{su}(2) = \mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ folgt.

Die lineare Unabhängigkeit lässt sich zeigen, indem man die (2×2)-Matrizen als Vektoren des $\mathbb{C}^4$ auffasst, sie als Spalten einer (4×4)-Matrix notiert und den Rang dieser Matrix bestimmt, d.h.:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^t(\mathrm{i},0,0,\mathrm{i})\,,\\
\eta_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^t(0,\mathrm{i},\mathrm{i},0)\,,\\
\eta_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^t(0,1,-1,0)\,,\\
\eta_3 &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\mathrm{i},0,0,-\mathrm{i})\,.
\end{aligned}$$

Dies führt zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -1 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(A) = 4$. Hieraus folgt die Behauptung.

E12. a) Man wähle

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann multipliziere man A' mit $x = {}^t(1, x_1, x_2)$.

$$(1, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 + x_1^2 + x_2^2.$$

Damit ist Q eine Quadrik, denn $\operatorname{rang}(A') = 3 \geqslant 1$.

b) Es sei ${}^t(m_1, m_2)$ der Mittelpunkt, r sei der Radius. Es gilt für die Kreisgleichung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 - r^2 = 0$$

genau dann, wenn

$$x_1^2 - 2m_1x_1 + m_1^2 + x_2^2 - 2m_2x_2 + m_2^2 - r^2 = 0.$$

Nach einer Rechnung ähnlich wie in Teil a) gilt für die Komponenten der gesuchten symmetrischen Matrix A'

$$a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0\,.$$

Hiermit folgt durch Koeffizientenvergleich

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{01} = a_{10} = -m_1, \quad a_{02} = a_{20} = -m_2, \quad a_{00} = m_1^2 + m_2^2 - r^2$$

ist. Insgesamt folgt

$$A' = \begin{pmatrix} m_1^2 + m_2^2 - r^2 & -m_1 & -m_2 \\ -m_1 & 1 & 0 \\ -m_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E13. a) Wir führen eine Rechnung für $A = (a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant 2}$ durch und sehen dann, welche Bedingungen die Einträge a_{ij} erfüllen müssen.

$$\begin{aligned}
(1, x_1, x_2) \cdot A \cdot {}^t(1, x_1, x_2) &= (1, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= (a_{00} + x_1a_{10} + a_2x_{20}, a_{01} + x_1a_{11} + x_2a_{21}, a_{02} + x_1a_{12} + x_2a_{22}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= a_{00} + x_1a_{10} + x_2a_{20} + x_1(a_{01} + x_1a_{11} + x_2a_{21}) + x_2(a_{02} + x_1a_{12} + x_2a_{22}) \\
&\overset{\circledast}{=} a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2.
\end{aligned}$$

An der Stelle $\circledast$ wurde die Symmetrie der Matrix A benutzt. Damit folgt

$$a_1 = a_{11}, \quad a_2 = a_{22}, \quad a_3 = 2a_{12}, \quad b_1 = 2a_{01}, \quad b_2 = 2a_{02}, \quad c = a_{00}\,,$$

also

$$A = \begin{pmatrix} c & \frac{1}{2}b_1 & \frac{1}{2}b_2 \\ \frac{1}{2}b_1 & a_1 & \frac{1}{2}a_3 \\ \frac{1}{2}b_2 & \frac{1}{2}a_3 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Es ist sinnvoll, sich diesen Transfer zu merken, er kommt häufiger vor. (Vgl. auch E1 b) für einen simplen Fall.)

b) Es sei $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Hiermit gilt

$$(1,x_1,x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-1,x_1,-x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1+x_1^2-x_2^2.$$

c) Wir wählen

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} (1,x_2,x_2,x_3)\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= (-1,x_1,x_2,0)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= -1+x_1^2+x_2^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

d) Hier wählen wir

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

so folgt

$$\begin{aligned} (1,x_2,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= (0,x_1,x_2,-x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2+x_2^2-x_3^2. \end{aligned}$$

E14. Im Teil b) von Aufgabe E1 haben wir herausgefunden, dass für die Komponenten einer symmetrischen Matrix $A' = (a_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant 2}$ und $x = {}^t(x_1,x_2,x_3)$ gilt:

$${}^tx\cdot A'\cdot x = a_{00}+2a_{01}x_1+2a_{02}x_2+2a_{12}x_1x_2+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2 = 0\,.$$

Mit analogen Überlegungen zeigt sich, dass allgemein für eine symmetrische Matrix $A' = (a_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ und $x = {}^t(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $x_0 = 1$ gilt:

$${}^tx\cdot A'\cdot x = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j\,.$$

Definieren wir jetzt die symmetrische Bilinearform β durch $\beta(x,x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$, die Linearform ω durch $\omega(x) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n a_{0i}x_i$ und schließlich $\alpha = a_{00}$, so haben wir die Behauptung bewiesen.

5.5 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

1. Es gilt

$$\begin{aligned} \|F(x) \times F(y)\|^2 &= \|F(x)\|^2 \cdot \|F(y)\|^2 - \langle F(x), F(y)\rangle^2 \\ &\overset{(*)}{=} \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2 \\ &= \|x \times y\|^2 \overset{(*)}{=} \|F(x \times y)\|^2 , \end{aligned}$$

wobei an den Stellen $(*)$ die Orthogonalität von F benutzt wurde. Daher existiert für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mit $F(x \times y) \neq 0$ ein $\lambda(x,y) \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda(x,y)| = 1$, so dass $F(x) \times F(y) = \lambda(x,y) \cdot F(x \times y)$. Allerdings ist F linear, also stetig; daher ist $\lambda = \lambda(x,y)$ konstant und auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ fortsetzbar.

Um $\lambda = \det F$ zu zeigen, betrachten wir die Matrix A von F. Ihre Spalten bilden nach Bemerkung 5.5.2 eine Orthonormalbasis x,y,z des $\mathbb{R}^3$. Aus Beispiel c) in 5.5.4 folgt $\langle A(x) \times A(y), A(z)\rangle = 1$, und mit Hilfe von Bemerkung 5.2.2 a) erhalten wir daraus

$$1 = \langle A(x) \times A(y), A(z)\rangle = \lambda \langle A(x \times y), A(z)\rangle = \lambda \langle x \times y, z\rangle = \lambda \cdot \det A .$$

Wegen $|\lambda| = 1$, d.h. $\lambda \in \{-1,1\}$ folgt daraus $\lambda = \det F$.

2. „$\Leftarrow$“: Aufgrund der Orthogonalität von G gilt für alle $v,w \in V \setminus \{0\}$

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle \lambda \cdot G(v), \lambda \cdot G(w)\rangle = \lambda^2 \langle G(v), G(w)\rangle = \lambda^2 \langle v,w\rangle ,$$

sowie

$$\|F(v)\| = \sqrt{\langle F(v), F(v)\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle G(v), G(v)\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v,v\rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

und

$$\|F(w)\| = |\lambda| \cdot \|w\| .$$

Also gilt für alle $v,w \in V \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \sphericalangle(F(v), F(w)) &= \arccos \frac{\langle F(v), F(w)\rangle}{\|F(v)\| \cdot \|F(w)\|} = \arccos \frac{\lambda^2 \langle v,w\rangle}{\lambda^2 \|v\| \cdot \|w\|} \\ &= \arccos \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \sphericalangle(v,w) . \end{aligned}$$

Die Injektivität von F ist klar.

„$\Rightarrow$“: Es sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonoermalbasis von V und $\lambda_i := \|F(e_i)\|$ für alle $i \in I$.

Es wird nun gezeigt, dass $\lambda_i = \lambda_j$ für alle $i,j \in I$ gilt.

Aufgrund der Bijektivität des arccos auf $]-1;1[$ ist

$$\sphericalangle(F(v),F(w)) = \sphericalangle(v,w)$$

gleichbedeutend mit

$$\frac{\langle F(v),F(w)\rangle}{\|F(v)\|\cdot\|F(w)\|} = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\,.$$

Insbesondere gilt für alle $i,j\in I$ mit $i\neq j$

$$0 = \frac{\langle e_i+e_j,e_i-e_j\rangle}{\|e_i+e_j\|\cdot\|e_i-e_j\|} = \frac{\langle F(e_i+e_j),F(e_i-e_j)\rangle}{\|F(e_i+e_j)\|\cdot\|F(e_i-e_j)\|}. \qquad (*)$$

Setzt man $\lambda_i := \|F(e_i)\| = \frac{\|F(e_i)\|}{\|e_i\|}$, so folgt mit $(*)$, da $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis ist,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle F(e_i+e_j)),F(e_i-e_j)\rangle = \|F(e_i\|^2 - \|F(e_j)\|^2 \\ &= \lambda_i^2-\lambda_j^2 = (\lambda_i+\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j), \end{aligned}$$

womit $\lambda_i = \pm\lambda_j$ folgt. Da jedoch $\lambda_i \geqslant 0$ für alle $i\in I$ gilt, folgt $\lambda_i=\lambda_j$ für alle $i,j\in I$.

Nun wird $\langle F(v),F(w)\rangle = \lambda^2(v,w)$ für alle $v,w\in V$ gezeigt. Dazu seien $v=\sum_{i\in I}\mu_ie_i$ und $w=\sum_{i\in I}\nu_ie_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle F(v),F(w)\rangle &= \langle F(\sum_{i\in I}\mu_ie_i),F(\sum_{j\in I}\nu_je_j)\rangle = \langle\sum_{i\in I}\mu_iF(e_i),\sum_{j\in I}\nu_jF(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j\in I}\mu_i\nu_j\langle F(e_i),F(e_j)\rangle = \sum_{i,j\in I}\mu_i\nu_j\lambda^2\delta_i^j, \end{aligned}$$

wobei der erste Schritt für $i=j$ klar ist und für $i\neq j$ aus der Winkeltreue von F folgt. Aus der letzten Gleichung ergibt sich damit

$$\langle F(v),F(w)\rangle = \sum_{i,j\in I}\mu_i\nu_j\langle e_i,e_j\rangle = \lambda^2\langle\sum_{i\in I}\mu_ie_i,\sum_{j\in I}\nu_je_j\rangle = \lambda^2\langle v,w\rangle.$$

Somit existiert ein $\lambda\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ mit

$$\langle F(v),F(w)\rangle = \lambda^2\cdot\langle v,w\rangle \quad \text{und} \quad \|F(v)\| = |\lambda|\cdot\|v\|$$

für alle $v,w\in V\smallsetminus\{0\}$. Definieren wir $G := \frac{1}{\lambda}\cdot F$, so sind wir fertig.

3. Der Fall $x=0$ oder $y=0$ ist klar.

Nehmen wir also an, $z=x+\mathrm{i}y$ und $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}^n\smallsetminus 0$ sind linear abhängig über $\mathbb{C}$, dann existieren $\lambda_1=a_1+\mathrm{i}b_1\neq 0$ und $\lambda_2=a_2+\mathrm{i}b_2\neq 0$ mit

$$\begin{aligned} &(a_1+\mathrm{i}b_1)(x+\mathrm{i}y)+(a_2+\mathrm{i}b_2)(x-\mathrm{i}y)=0 \\ \Leftrightarrow\ &(a_1+a_2)x+(b_2-b_1)y+\mathrm{i}\big((b_1+b_2)x+(a_1-a_2)y\big)=0\,. \qquad (*) \end{aligned}$$

Dabei müssen λ_1 *und* λ_2 von null verschieden sein, weil $\mathbb{C}$ ein Körper ist.

Wir behaupten, dass entweder $a_1+a_2\neq 0$ oder $a_1-a_2\neq 0$ ist. Wäre beispielsweise $a_1+a_2=0=a_1-a_2$, so hätte $(*)$ die Form

$$(b_2-b_1)y+\mathrm{i}(b_1+b_2)x=0\,.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von 1 und i über $\mathbb{R}$ folgte aufgrund von $x,y \neq 0$ daraus $b_2 - b_1 = 0 = b_1 + b_2$ und daher $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ im Widerspruch zur Annahme. Ebenso gilt $b_2 - b_1 \neq 0$ oder $b_1 + b_2 \neq 0$. Damit aber sind x und y über $\mathbb{R}$ linear abhängig.

Sind andererseits x und y linear abhängig über $\mathbb{R}$, so existieren $a,b \in \mathbb{R}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$, so dass $ax + by = 0$ gilt. Damit gilt jedoch

$$\left(\tfrac{1}{2}(a+b) + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}(a-b)\right)(x+\mathrm{i}y) + \left(\tfrac{1}{2}(a-b) + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}(a+b)\right)(x-\mathrm{i}y) = 0\,,$$

und wegen $(a,b) \neq (0,0)$ sind nicht alle Koeffizienten gleich null, d.h. z und $\overline{z}$ sind linear abhängig.

4. Zunächst prüfen wir, ob $A \in U(3)$ gilt, da wir dann das Korollar zu Theorem 5.5.5 anwenden können. Nach diesem Korollar bestehen die Spalten von S aus einer Basis von Eigenvektoren von A.

Es ist

$$A \cdot {}^t\overline{A} = \frac{1}{90^2}\begin{pmatrix} 90^2 & 0 & 0 \\ 0 & 90^2 & 0 \\ 0 & 0 & 90^2 \end{pmatrix} = E_3 = {}^t\overline{A} \cdot A\,,$$

also $A \in U(3)$. Als nächstes bestimmen wir das charakteristische Polynom. Wir erhalten nach einiger Rechnung

$$P_A(t) = -t^3 + \tfrac{11}{5}t^2 - \tfrac{11}{5}t + 1 = -(t-1)(t^2 - \tfrac{6}{5}t + 1)\,.$$

Die Eigenwerte sind 1, $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$ und $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$. Wir können uns leicht bestätigen, dass alle drei Eigenwerte den Betrag 1 haben, wie es nach Bemerkung 5.5.1 auch sein soll. Die zugehörigen Eigenvektoren können wir wie üblich bestimmen.

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} & -\frac{1}{5}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{15}\sqrt{6} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{7}{15}\sqrt{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 7\sqrt{2} & 3\sqrt{3} & 5 \\ \sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Kern

$$\mathrm{Eig}\,(A;1) = \mathrm{span}\,{}^t(1, -\tfrac{1}{2}\sqrt{6}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$

sowie

$$\begin{aligned} A - \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\mathrm{i}\right) \cdot E_3 \quad &= \begin{pmatrix} \frac{2}{15} - \frac{4}{5}\mathrm{i} & -\frac{1}{5}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{15}\sqrt{6} & \frac{1}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{7}{15}\sqrt{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{3} & \frac{1}{15} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &\leadsto \begin{pmatrix} 2 - 12\mathrm{i} & -3\sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{3}\mathrm{i} & \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit dem Kern

$$\mathrm{Eig}\,\left(A; \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\mathrm{i}\right) = \mathrm{span}\,{}^t\left(\tfrac{1}{5}\sqrt{2} - \tfrac{3}{5}\sqrt{2}\mathrm{i}, -\tfrac{1}{5}\sqrt{3} - \tfrac{2}{5}\sqrt{3}\mathrm{i}, 1\right)\,.$$

Durch komplexe Konjugation erhalten wir schließlich

$$\operatorname{Eig}\left(A;\tfrac{3}{5}-\tfrac{4}{5}\mathrm{i}\right)=\operatorname{span}{}^t\left(\tfrac{1}{5}\sqrt{2}+\tfrac{3}{5}\sqrt{2}\mathrm{i},-\tfrac{1}{5}\sqrt{3}+\tfrac{2}{5}\sqrt{3}\mathrm{i},1\right).$$

Bevor wir diese Eigenvektoren von A als Spalten von S verwenden, müssen wir sie auf Länge 1 normieren. Das ergibt

$$S=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{30}\sqrt{30}-\frac{1}{10}\sqrt{30}\mathrm{i} & \frac{1}{30}\sqrt{30}+\frac{1}{10}\sqrt{30}\mathrm{i} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{5}\mathrm{i} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}\mathrm{i} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{15} & \frac{1}{6}\sqrt{15} \end{pmatrix},$$

wunschgemäß eine unitäre Matrix. Als Probe bestätigen wir

$${}^t\bar{S}\cdot A\cdot S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Für die Ermittlung der orthogonalen Matrix T spalten wir einen komplexen Eigenvektor – wie im ersten Beweis von Theorem 5.5.6 vorgeschlagen – in Real- und Imaginärteil auf. So kommen wir zu den Vektoren

$${}^t\left(\tfrac{1}{30}\sqrt{30},-\tfrac{1}{10}\sqrt{5},\tfrac{1}{6}\sqrt{15}\right)\quad\text{und}\quad{}^t\left(-\tfrac{1}{10}\sqrt{30},-\tfrac{1}{5}\sqrt{5},0\right).$$

Diese normieren wir und können sie dann gemeinsam mit dem normierten Eigenvektor zum reellen Eigenwert 1 als Spalten von T übernehmen:

$$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{15}\sqrt{15} & -\frac{1}{5}\sqrt{15} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{10} & -\frac{1}{5}\sqrt{10} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{30} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestätigen, dass es sich bei T um eine orthogonale Matrix handelt und berechnen

$${}^tT\cdot A\cdot T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha\approx-0.927$.

5. Ins Matrizenkalkül übertragen bedeutet die Voraussetzung, dass die Spalten der Matrix M_π von f_π gerade die kanonische Orthonormalbasis bilden (in von π abhängiger Reihenfolge). Damit ist M_π orthogonal, einzige reelle Eigenwerte können 1 und -1 sein. Beide Zahlen treten auf, wie das Beispiel

$$(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\overset{f_\pi}{\mapsto}(x_2,x_1,x_3,\ldots,x_n)$$

zeigt.

Wir sollten bedenken, dass die Eigenvektoren von f_π sehr viel schwieriger zu finden sind und z.B. von den Fehlständen der Permutation π abhängen.

6. Die Eigenschaften B1 und B2 von $\langle\ ,\ \rangle$ sind klar, da ω eine Bilinearform und J ein Endomorphismus ist. Es ist also nur die Eigenschaft S zu zeigen. Dazu seien $v,w\in V$, dann gilt

$$\begin{array}{rcl}\langle v,w\rangle & = & \omega(v,J(w)) = -\omega(J(w),v)\\ & \overset{(*)}{=} & -\omega\left(J^2(w),J(v)\right) = -\omega(-w,J(v)) = \langle w,v\rangle\,,\end{array}$$

wobei an der Stelle $(*)$ die Voraussetzung $\omega(v,w)=\omega(J(v),J(w))$ für alle $v,w\in V$ benutzt wurde. Die Orthogonalität von J bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ ist lediglich eine andere Schreibweise dieser Voraussetzung.

b) Die durch J induzierte $\mathbb{C}$-Vektorraum-Struktur auf V ist nach Aufgabe 3 zu Abschnitt 5.3 gegeben durch $(x+\mathrm{i}y)\cdot v = xv+yJ(v)$.

Aus der Bilinearität von ω und $\langle\ ,\ \rangle$ folgen unmittelbar die Eigenschaften

$$s(v+v',w)=s(v,w)+s(v',w) \text{ und } s(v,w+w')=s(v,w)+s(v,w')$$

für alle $v,v',w,w'\in V$.

Sind $v,w\in V$ und $\lambda=(x+\mathrm{i}y)\in\mathbb{C}$, so gilt

$$\begin{array}{rcl}s(\lambda v,w) & = & s(xv+yJ(v),w) = \langle xv+yJ(v),w\rangle - \mathrm{i}\omega(xv+yJ(v),w)\\ & = & \omega(xv+yJ(v),J(w)) - \mathrm{i}\omega(xv+yJ(v),w)\\ & = & x\omega(v,J(w)) + y\omega(J(v),J(w)) - \mathrm{i}x\omega(v,w) - \mathrm{i}y\omega(J(v),w)\\ & = & x\omega(v,J(w)) + y\omega(v,w) - \mathrm{i}x\omega(v,w) - \mathrm{i}y\omega\left(J^2(v),J(w)\right)\\ & = & x\omega(v,J(w)) + y\omega(v,w) - \mathrm{i}x\omega(v,w) + \mathrm{i}y\omega(v,J(w))\\ & = & (x+\mathrm{i}y)(\omega(v,J(w)) - \mathrm{i}\omega(v,w)) = \lambda\cdot s(v,w)\end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl}s(v,\lambda w) & = & s(v,xw+yJ(w))\\ & = & \langle v,xw+yJ(w)\rangle - \mathrm{i}\omega(v,xw+yJ(w))\\ & = & \omega\left(v,xJ(w)+yJ^2(w)\right) - \mathrm{i}\omega(v,xw+yJ(w))\\ & = & x\omega(v,J(w)) - y\omega(v,w) - \mathrm{i}x\omega(v,w) - \mathrm{i}y\omega(v,J(w))\\ & = & (x-\mathrm{i}y)(\omega(v,J(w)) - \mathrm{i}\omega(v,w)) = \bar{\lambda}\cdot s(v,w)\,.\end{array}$$

Ferner folgt

$$\begin{array}{rcl}s(v,w) & = & \omega(v,J(w)) - \mathrm{i}\omega(v,w) = -\omega(J(w),v) + \mathrm{i}\omega(w,v)\\ & = & -\omega\left(J^2(w),J(v)\right) + \mathrm{i}\omega(w,v)\\ & = & \omega(w,J(v)) + \mathrm{i}\omega(w,v) = \overline{s(w,v)}\,.\end{array}$$

Schließlich ist s positiv definit, denn ω ist schiefsymmetrisch, d.h. für alle $v\in V\smallsetminus 0$ gilt $\omega(v,v)=0$, und daher gilt

$$s(v,v)=\langle v,v\rangle - \mathrm{i}\omega(v,v) = \langle v,v\rangle > 0\,,$$

da $\langle\ ,\ \rangle$ positiv definit ist. Damit ist alles gezeigt.

Man beachte, dass die durch s definierte hermitesche Form mit der in Abschnitt 5.3.2 definierten Fortsetzung $\langle\ ,\ \rangle_c$ des kanonischen Skalarproduktes für den Fall $V = \mathbb{R}^{2n}$ übereinstimmt.

Lösung der Ergänzungsaufgabe

E1. a) Die Eigenschaften (B1) und (B2) folgen aus $\mathrm{Re}\,(z+z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z')$ für beliebige $z, z' \in \mathbb{C}$ sowie aus $\lambda = \bar{\lambda}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, denn s ist sesquilinear. Die Symmetrie von $\langle\ ,\ \rangle$ folgt aus $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(\bar{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$, denn s ist hermitesch. Schließlich folgt aus der Tatsache, dass s positiv definit ist, gerade $\langle v, v\rangle = s(v,v) > 0$ für alle $0 \neq v \in V$, also ist $\langle\ ,\ \rangle$ positiv definit.

b) Die Argumentation verläuft ähnlich wie unter a). Wir zeigen daher zum Beweis der Bilinearität lediglich mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \omega(v, \lambda w) &= -\mathrm{Im}\,(s(v, \lambda w)) = -\mathrm{Im}\,(\lambda \cdot s(v,w)) \\ &= \lambda \cdot (-\mathrm{Im}\,(s(v,w))) = \lambda \cdot \omega(v,w)\,. \end{aligned}$$

Die Schiefsymmetrie von ω folgt mit Hilfe der Schiefsymmetrie von s aus

$$\begin{aligned} \omega(v,w) &= -\mathrm{Im}\,(s(v,w)) = -\mathrm{Im}\left(\overline{s(w,v)}\right) \\ &= -(-\mathrm{Im}\,(s(w,v))) = -\omega(w,v)\,. \end{aligned}$$

Da s positiv definit ist, ist ω nicht-entartet.

c) Die Behauptungen folgen aus

$$s\,(\mathrm{i} \cdot v, \mathrm{i} \cdot w) = \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) \cdot s(v,w) = s(v,w)$$

für alle $v, w \in V$.

d) ist klar nach der Definition von $\langle\ ,\ \rangle$ und ω.

5.6 Selbstadjungierte Endomorphismen*

1. Sei $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $F^m = 0$. Nach Theorem 5.6.2 existiert eine Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von F. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von F zu $e_1, \ldots, e_n$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$F^m(e_i) = \lambda_i^m e_i = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_i^m = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_i = 0\,.$$

Das ist gleichbedeutend mit $F(e_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $F = 0$.

2. Sind F und G selbstadjungiert, so gilt für alle $v, w \in V$

$$\langle F\,(G(v))\,, w\rangle = \langle G(v), F(w)\rangle = \langle v, G\,(F\,(w))\rangle\,.$$

Also ist $F \circ G$ selbstadjungiert gleichbedeutend mit $G \circ F = F \circ G$ für alle $v, w \in V$.

3. Die Matrix A ist symmetrisch und damit nach Satz 5.6.1 selbstadjungiert, also gibt es nach Theorem 5.6.2 und dem nachfolgenden Korollar eine orthogonale

Matrix S, so dass ${}^tSAS$ Diagonalgestalt besitzt. Die Spalten von S bilden dabei eine Orthonormalbasis nach Bemerkung 5.5.2. Genauer bilden die Spalten von S nach Theorem 5.6.2 eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A, und die Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ aus dem zugehörigen Korollar sind die Eigenwerte von A. Wir bestimmen also zunächst eine Basis aus Eigenvektoren von A nach dem Verfahren aus 5.6.3.

1) Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynom von A,

$$P_A(t) = -t(t-3)^2 .$$

A hat somit die Eigenwerte 0 und 3.

2) Nun bestimmen wir die Eigenräume zu den Eigenwerten; $\mathrm{Eig}\,(A;0) = \mathrm{Ker}A$ finden wir durch Zeilenumformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -1 & 1 \\ -1 & 2-0 & 1 \\ 1 & 1 & 2-0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

daraus folgt $\mathrm{Eig}\,(A,0) = \mathbb{R}\cdot(1,1,-1)$. Für den Eigenraum $\mathrm{Eig}\,(A,3)$ betrachten wir

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 1 \\ -1 & 2-3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\mathrm{Eig}\,(A;3) = \mathbb{R}\cdot(1,1,2) + \mathbb{R}\cdot(1,-1,0)$. Sicherlich kann man auch eine andere Basis dieses Eigenraumes angeben, doch die von uns gewählte hat den Vorteil, dass sie bereits orthogonal ist und später nur noch normiert werden muss.

Wie erwartet gilt $\dim \mathrm{Eig}\,(A;\lambda) = \mu(P_A,\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von A, denn wie zu Anfang der Aufgabe bemerkt, ist A diagonalisierbar.

3) Die Basisvektoren der Eigenräume müssen nun normiert werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}) \\ e_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2) \\ e_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3},-\sqrt{3},0) . \end{aligned}$$

Diese Vektoren bilden die Spalten der Matrix S:

$$S = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Man kann leicht nachrechnen, dass wie erwartet ${}^tS \cdot S = S \cdot {}^tS = E_3$ gilt. Als Endergebnis berechnen wir

$$ {}^tSAS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, $$

was die Korrektheit unserer Rechnungen bestätigt.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. a) Ist F anti-selbstadjungiert, so gilt für alle $v \in V$

$$ \langle F(v), v \rangle = -\langle v, F(v) \rangle = -\langle F(v), v \rangle, $$

also $\langle F(v), v \rangle = 0$.

Ist umgekehrt $\langle F(v), v \rangle = 0$ für alle $v \in V$, und sind $v, w \in V$ gegeben, so gilt

$$ \begin{aligned} 0 &= \langle F(v+w), v+w \rangle \\ &= \langle F(v), v \rangle + \langle F(w), v \rangle + \langle F(v), w \rangle + \langle F(w), w \rangle \\ &= \langle F(w), v \rangle + \langle F(v), w \rangle, \end{aligned} $$

also ist $\langle F(v), w \rangle = -\langle v, F(w) \rangle$.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von F und v ein Eigenvektor zu λ, so gilt nach Teil a)

$$ 0 = \langle F(v), v \rangle = \langle \lambda \cdot v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle, $$

und da $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \neq 0$ ist, folgt $\lambda = 0$.

E2. a) Es sei $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von V und F mit

$$ F(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i \quad \text{für } j = 1, \ldots, n $$

anti-selbstadjungiert. Dann gilt

$$ \begin{aligned} \lambda_{lk} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} \langle e_i, e_l \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} e_i, e_l \rangle = \langle F(e_k), e_l \rangle = -\langle e_k, F(e_l) \rangle \\ &= -\langle e_k, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{il} e_i \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_{il} \langle e_k, e_i \rangle = -\lambda_{kl} \end{aligned} $$

für alle $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Damit ist $M_{\mathscr{B}}(F) = (\lambda_{kl})$ schiefsymmetrisch.

Für die Rückrichtung genügt es, die Elemente der Basis $\mathscr{B}$ zu betrachten, da F linear und $\langle\ ,\ \rangle$ eine symmetrische Bilinearform ist. Füür alle $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt jedoch

$$ \langle F(e_k), e_l \rangle = \lambda_{kl} = -\lambda_{lk} = \langle e_k, F(e_l) \rangle, $$

und daraus folgt, dass F anti-selbstadjungiert ist.

b) Der Beweis verläuft ähnlich zum Beweis von Theorem 5.5.6. Wir übernehmen daher die Bezeichnungen.

Der Trick liegt in der Komplexifizierung der Abbildung F. Bezüglich einer Orthonormalbasis $\mathscr{A}$ bezeichne $A := M_{\mathscr{A}}(F)$. Das charakteristische Polynom $P_A(t)$ zerfällt überer den Körper der komplexen Zahlen in Linearfaktoren. Da nach Aufgabe E1 b) die Abbildung F nur den Eigenwert 0 besitzt, folgt mit Hilfe von 1.3.10 in [Fi1].

$$P_A(t) = \pm t^l \cdot (t-\lambda_1)(t-\bar{\lambda}_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)(t-\bar{\lambda}_k)\,,$$

wobei $l+2k = n = \dim V$ ist und alle λ_j ungleich 0 sind. Bezeichnen wir $\lambda_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$, so ist nach Voraussetzung $\beta_j \neq 0$, und es gilt

$$(t-\lambda_j)(t-\bar{\lambda}_j) = t^2 - 2\alpha_j t + (\alpha_j^2 + \beta_j^2)\,.$$

Im $\mathbb{C}^n$ existiert eine Orthonormalbasis $\mathscr{B}$ aus Eigenvektoren von F. Dies zeigt man analog zum Induktionsbeweis in der ersten Hälfte des Beweises von Theorem 5.6.2. Da A reell ist, liegen die in $\mathscr{B}$ enthaltenen Eigenvektoren $v_1,\ldots,v_l$ zum Eigenwert 0 im $\mathbb{R}^n$.

Ist $z \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zu einem nicht reellen Eigenwert λ, so ist mit der Begründung wie im Beweis von Theorem 5.5.6 auch $\bar{z} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda}$. Wir können daher die übrigen Elemente von $\mathscr{B}$ so ordnen:

$$\begin{array}{lll} z_1,\ldots,z_k & \text{zu den Eigenwerten} & \lambda_1,\ldots,\lambda_k\,, \\ \bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_k & \text{zu den Eigenwerten} & \bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_l\,. \end{array}$$

Wie im Beweis von Theorem 5.5.6 kann man aus jedem solchen Paar $z,\bar{z}$ von Eigenvektoren zu Eigenwerten λ und $\bar{\lambda}$ einen unter A invarianten Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^n$ konstruieren, indem man für $z = x + \mathrm{i}y$

$$W := \mathrm{span}\,(x,y) \subset \mathbb{R}^n$$

wählt. Die A-Invarianz von W und die Orthogonalität von x und y zeigt man wie in 5.5.6, und normieren wir die Basis von W via

$$x^* := \sqrt{2}\cdot x \quad \text{und} \quad y^* := \sqrt{2}\cdot y\,,$$

so folgt, da A anti-selbstadjungiert ist,

$$\langle x^*, A(x^*)\rangle = -\langle A(x^*), x^*\rangle = 0\,,$$

und daher gilt $A(x^*) \in \mathrm{span}\,(y^*)$, also existiert ein $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus 0$ mit

$$A(x^*) = \lambda \cdot y^*\,. \tag{$*$}$$

Analog folgt aus

$$\langle y^*, A(y^*)\rangle = -\langle A(y^*), y^*\rangle = 0\,,$$

dass $A(y^*) \in \mathrm{span}\,(x^*)$ ist, und damit existiert ein $\mu \in \mathbb{R} \smallsetminus 0$ mit

$$A(y^*) = \mu \cdot x^*\,. \tag{$**$}$$

Unter Benutzung der Tatsache, dass A anti-selbstadjungiert ist, berechnen wir

$$\lambda = \langle \lambda y^*, y^* \rangle \overset{(*)}{=} \langle A(x^*), y^* \rangle = -\langle x^*, A(y^*) \rangle \overset{(**)}{=} -\langle x^*, \mu x^* \rangle = -\mu\,,$$

und aus der Orthonormalität von x^* und y^* folgt somit, dass $A|_W$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Nun folgt mit derselben Argumentation wie im Beweis von Theorem 5.5.6 die Behauptung.

5.7 Hauptachsentransformation*

1. Die Matrix A zu s ist symmetrisch, also bestimmen wir nach dem Hauptachsentransformationssatz aus 5.7.1, Teil 1), eine Orthonormalbasis $\mathscr{A}$ aus Eigenvektoren von A. Bezüglich dieser Basis hat $M_{\mathscr{A}}(s)$ Diagonalgestalt. Ist

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

so berechnen wir das charakteristische Polynom

$$P_A(t) = -(t-2)(t-5)(t+1)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind somit 2, 5 und -1. Nach dem üblichen Verfahren ermitteln wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}\,(A;2) &= \mathrm{span}\,\left({}^t(2,1,-2)\right), \quad \mathrm{Eig}\,(A;5) = \mathrm{span}\,\left({}^t(2,-2,1)\right), \\ \mathrm{Eig}\,(A;-1) &= \mathrm{span}\,\left({}^t(1,2,2)\right), \end{aligned}$$

und die Basis $\mathscr{A}$ ist durch die drei Vektoren

$$w_1 := \tfrac{1}{3}(2,1,-2)\,, \quad w_2 := \tfrac{1}{3}(2,-2,1) \quad \text{und} \quad w_3 := \tfrac{1}{3}(1,2,2)$$

gegeben. Nach 5.7.1 ist die zweite Basis gegeben durch $\mathscr{B} = (w_1', w_2', w_3')$, wobei

$$w_1' := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot w_1 \quad w_2' := \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot w_2 \quad \text{und} \quad w_3' := w_3$$

gilt.

2. a) B1 folgt mit Hilfe der Regeln für die Differentiation (vgl. [Fo1], §15) aus

$$\begin{aligned} d(f+g,h) &= ((f+g)h)'(0) = (fh+gh)'(0) \\ &= (fh)'(0) + (gh)'(0) = d(f,h) + d(g,h) \end{aligned}$$

und

$$d(\lambda f, g) = ((\lambda f)g)'(0) = (\lambda fg)'(0) = \lambda (fg)'(0) = \lambda \cdot d(f,g)\,.$$

Die Regel S folgt aus der Produktregel und der Kommutativität der reellen Zahlen, und aus der Gültigkeit von B1 und S folgt B2.

b) Aus
$$d(f,g) = (fg)'(0) = f(0)g'(0) + f'(0)g(0) = 0$$
folgt
$$M := \{f \in \mathscr{D}\colon\ f(0) = f'(0) = 0\} \subset \mathscr{D}_0\,.$$
Gilt andererseits $d(f,g) = 0$ für alle $g \in \mathscr{D}$, so gilt für alle g mit $g'(0) \neq 0$
$$f(0) = -\frac{g(0)}{g'(0)} f'(0)\,.$$
Da der Koeffizient vor dem $f'(0)$ mit Hilfe der Abbildungen $g = t + r$ für $r \in \mathbb{R}$ jeden reellen Wert annehmen kann, kann die Gleichung nur für
$$f(0) = f'(0) = 0$$
erfüllt sein. Daraus folgt $\mathscr{D}_0 \subset M$. $\mathscr{D}_0$ besteht also aus allen differenzierbaren Funktionen, deren Graph durch den Ursprung verläuft und dort die Steigung null hat.

3. Die Umformung der ersten Matrix lautet
$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{2-7}
 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
A = & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & = E_3 \\
 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & \\
\cline{2-7}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & \\
 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & = S\,. \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$
Dann ist
$${}^tSAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Es wird jeweils das (-2)-fache der ersten Zeile bzw. Spalte zu der zweiten und dritten Zeile bzw. zweiten und dritten Spalte addiert. Die Matrix S gibt das Produkt der Matrizen für die Spaltenumformungen wieder (vgl. 2.7.1).

Für die zweite Matrix erhält man

$$B = \begin{array}{|rrrr|rrrr|}
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array} = T$$

Die Umformungen und Bezeichnungen erklären sich dabei von selbst. Wir empfehlen, zur Überprüfung der Rechnung immer eine Probe durchzuführen, in diesem Fall sollte man

$$^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nachrechnen.

4. A ist negativ definit genau dann, wenn $^txAx =< 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt jedoch für alle x

$$0 < -(^txAx) = {^tx}(-A)x\,,$$

d.h. $^txAx < 0 \Leftrightarrow {^tx}(-A)x > 0$, daraus folgt die Behauptung.

5. Nach 5.7.7 sind die Matrizen genau dann positiv (negativ) definit, wenn alle Eigenwerte positiv (negativ) sind. Dies kann man an den charakteristischen Polynomen erkennen, wobei man (siehe A_2) die Nullstellen unter Umständen nicht einmal genau kennen muss. Für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$P_{A_1}(t) = -t(t^2 + t - 18)\,.$$

Da ein Eigenwert 0 ist, kann A_1 weder positiv noch negativ definit sein.

Das charakteristische Polynom der zweiten Matrix A_2 lautet

$$P_{A_2}(t) = -(t^3 + 9t^2 + 16t + 2)\,.$$

Man kann erkennen, dass A_2 negativ definit ist, ohne die Nullstellen des charakteristischen Polynoms auszurechnen (das ist nämlich gar nicht so einfach). Da alle Koeffizienten dasselbe Vorzeichen haben, kann $P_{A_2}(t)$ nur negative Nullstellen haben.

Für die dritte Matrix A_3 lautet das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P_{A_3}(t) &= -(t^3 - 25t^2 + 75t - 27) \\ &= -(t-3)(t - 11 + \sqrt{112})(t - 11 - \sqrt{112})\,, \end{aligned}$$

und alle Eigenwerte sind größer als null. A_3 ist positiv definit. Dass alle Eigenwerte positiv sind, kann man auch schon daran erkennen, dass die Koeffizienten vor ungeraden Potenzen von t negativ und vor geraden Potenzen von t positiv sind; diese Argumentation erspart die konkrete Berechnung der Eigenwerte.

6. C_0 ist ein Kegel, denn für $v \in C_0$ und beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$s(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \cdot s(v,v) = \lambda^2 \cdot 0 = 0.$$

Für $v \in C_+$ gilt $s(v,v) > 0$. Wegen $\lambda^2 > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt

$$s(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \cdot s(v,v) > 0.$$

Mit $\lambda = 0$ folgt

$$s(\lambda v, \lambda v) = 0 \cdot s(v,v) = 0.$$

Damit ist C_+ ein Kegel.

Ähnlich kann die Behauptung für C_- gezeigt werden.

Ist s durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gegeben, dann gilt

$$\begin{aligned} C_0 &= \{v = {}^t(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 :\ v_1^2 = v_2^2\} \\ &= \{v = {}^t(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 :\ v_1 = v_2\} \cup \{v = {}^t(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 :\ v_1 = -v_2\}. \end{aligned}$$

Dies ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

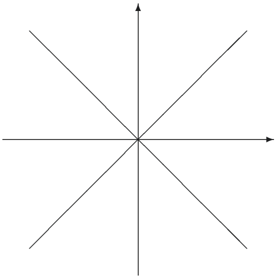


Bild 5.4

Weiter ist

$$C_+ = \{v\mathbb{R}^2 \colon\ v_1^2 > v_2^2\} \cup \{0\}.$$

Dies ist in Abbildung 5.5 zu sehen.

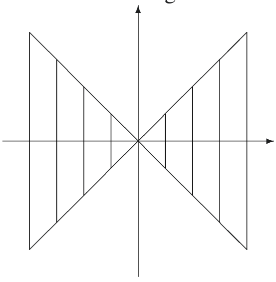


Bild 5.5

Zusätzlich erhält man

$$C_- = \{v\mathbb{R}^2 \colon\ v_1^2 < v_2^2\} \cup \{0\}.$$

Kegel werden ebenfalls in Aufgabe 3 zu Abschnitt 6.3 betrachtet.

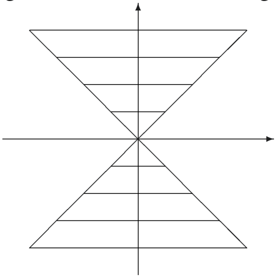


Bild 5.6

7. Nach Teil 1) der Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen existiert eine Orthonormalbasis $\mathscr{B} = (w_1, \dots, w_n)$ des $\mathbb{R}^n$ mit

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s(w_i, w_j) = \lambda_i \cdot \delta_{ij}.$$

Damit gilt für alle Eigenwerte λ_i mit

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lambda_i > 0 \\ \lambda_i < 0 \end{array}\right\} \text{ und alle } v \in \text{Eig}\,(A; \lambda_i) : \left\{ \begin{array}{l} s(v,v) > 0, \\ s(v,v) < 0, \end{array}\right. \\ \lambda_i = 0 \quad \text{und alle } v \in \text{Ker}\,(A) : s(v,w) = 0 \;\forall w \in V. \end{array}$$

Aufgrund der Definition

$$\begin{array}{rcl} V_+ & = & \{v \in V : \; s(v,v) > 0\}, \\ V_- & = & \{v \in V : \; s(v,v) < 0\} \quad \text{und} \\ V_0 & = & \{v \in V : \; s(v,w) = 0 \forall w \in V\} \end{array}$$

folgt damit die Behauptung.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. Der Fall $V = (0)$ als Induktionsanfang ist trivial. Ist $V \neq (0)$, so wähle ein $0 \neq v_1 \in V$. Da ω nicht-entartet ist, existiert ein $w_1 \in V$ mit $\omega(v_1, w_1) = 1$. Es ist $W := \text{span}\,(v_1, w_1) \subset V$ ein zweidimensionaler *symplektischer Unterraum* von V, d.h. $\omega|_{W \times W}$ ist (nach Konstruktion) nicht-entartet. Wir definieren das *symplektische Komplement*

$$W^\perp := \{v \in V : \; \omega(v,w) = 0 \quad \text{für alle } w \in W\}\,.$$

Da ω nicht-entartet ist, ist auch $W^\perp$ symplektischer Unterraum von V. Wir behaupten $V = W \oplus W^\perp$.

Um $V = W + W^\perp$ zu sehen, wählen wir ein $v \in V$ und definieren

$$v' := \omega(v, w_1) \cdot v_1 - \omega(v, v_1) \cdot w_1\,.$$

Dann ist $v = v' + (v - v')$, und es bleibt $(v - v') \in W^\perp$ zu zeigen. Ist $w = \lambda v_1 + \mu w_1 \in W$, so folgt

$$\begin{array}{rcl} \omega(v - v', w) & = & \omega(v,w) - \omega(v,w_1)\omega(v_1, \mu w_1) + \omega(v, v_1)\omega(w_1, \lambda v_1) \\ & = & \omega(v,w) - \omega(v, \lambda v_1) - \omega(v, \mu w_1) = 0\,. \end{array}$$

Nach Konstruktion ist $W \cap W^\perp = (0)$, also gilt $V = W \oplus W^\perp$.

Auf $W^\perp$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, es gibt also eine Darboux-Basis $\mathscr{B}'$ von $W^\perp$, und $\mathscr{B} := (v_1, w_1) \cup \mathscr{B}'$ ist damit eine Darboux-Basis von V.

E2. a) Nach der Definition der Matrizenmultiplikation gilt für $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\bar{A} = {}^tA$ gilt

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki} \Rightarrow a_{ik} \cdot a_{ki} = a_{ik} \cdot \bar{a}_{ik} = \left(a_{ik}^R\right)^2 + \left(a_{ik}^I\right)^2. \qquad \circledast$$

Ferner gilt aufgrund von $\bar{A} = {}^tA$ auch $a_{ii} \in \mathbb{R}$ für alle i. Für die Elemente in der Diagonalen an der i-ten Stelle ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{ki} = \sum_{k=1}^n \left((a_{ik}^R)^2 + (a_{ik}^I)^2\right) = a_{ii}^2 + \sum_{k\neq i}\left((a_{ik}^R)^2 + (a_{ik}^I)^2\right). \qquad \circledast\circledast$$

Da es sich um eine hermitesche Matrix A handelt, folgt aus $\circledast\circledast$

$$\sum_{k\neq i}^n \left((a_{ik}^R)^2 + (a_{ik}^I)^2\right) = 2\sum_{i<k}\left((a_{ik}^R)^2 + (a_{ik}^I)^2\right),$$

also

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} = a_{ii}^2 + 2\sum_{i<k}\left((a_{ik}^R)^2 + (a_{ik}^I)^2\right).$$

Damit folgt die Behauptung für den ersten Summanden, und die Behauptungen für den zweiten und dritten Sumanden sind klar.

b) Für die Konstante c gilt

$$c = \frac{1}{\exp\Big(-\mathrm{Sp}\big(Q(A)\big)\Big)\mathrm{d}A}.$$

Kapitel 6

Dualität*

6.1 Dualräume

1. Nach Bemerkung 2.6.3 gilt $M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V) = T_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}$ und $M_{\mathscr{A}^*}^{\mathscr{B}^*}(\mathrm{id}_V^*) = T_{\mathscr{A}^*}^{\mathscr{B}^*}$. Aus Satz 6.1.4 folgt damit

$$T_{\mathscr{A}^*}^{\mathscr{B}^*} = M_{\mathscr{A}^*}^{\mathscr{B}^*}(\mathrm{id}_V^*) = {}^t\left(M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\mathrm{id}_V)\right) = {}^tT_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} = \left({}^tT_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1}.$$

2. Nach der Konvention in 6.1.6 bestimmen wir zunächst die Menge aller Vektoren $(x_1,\ldots,x_5) \in \left(\mathbb{R}^5\right)^*$, für die

$$(x_1,\ldots,x_5)\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ 1\\ 4\\ 3 \end{pmatrix} = 0\,, \quad (x_1,\ldots,x_5)\cdot\begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 1\\ -1\\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$(x_1,\ldots,x_5)\cdot\begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 1\\ 1\\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

gilt. Dies sind nach dem Transponieren genau die Vektoren im $\mathbb{R}^5$, die im Kern der durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 1 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

beschriebenen Abbildung liegen. Es genügt also, eine Basis von $\mathrm{Ker}A$ zu bestimmen und dann zu transponieren. Dazu formen wir A zunächst um:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 21 & 10\\ 0 & 1 & 0 & 8 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -41 & -22 \end{pmatrix}.$$

Daraus bestimmen wir Basisvektoren von $\mathrm{Ker}A$ und transponieren sie:

$$u_1 = (-5,-5,22,0,1)\,, \quad u_2 = (-\tfrac{21}{2},-8,41,1,0)\,.$$

Es folgt $U^0 = \mathrm{span}\,(u_1,u_2)$.

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4_14

3. Mit Hilfe von Satz 6.1.4 erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_K(V,W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(W^*,V^*) \\
 & F \longmapsto F^* & \\
M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} \downarrow & \downarrow \quad\quad \downarrow & \downarrow M_{\mathscr{A}^*}^{\mathscr{B}^*} \\
 & A \longmapsto {}^tA & \\
M(m\times n;K) & \longrightarrow & M(n\times m;K)\,.
\end{array}$$

Die Abbildungen $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}$, $M_{\mathscr{A}^*}^{\mathscr{B}^*}$ und die Transposition sind Isomorphismen, also ist die Abbildung $F\mapsto F^*$ ebenfalls ein Isomorphismus.

4. Wir zeigen beide Inklusionen. Für $\psi\in F^*(U^0)$ existiert ein $\varphi\in U^0$ mit $\psi=\varphi\circ F$. Aus $\varphi|_U=0$ folgt $\psi|_{F^{-1}(U)}=0$, daher gilt $\psi\in\left(F^{-1}(U)\right)^0$.

Ist andererseits $\psi\in\left(F^{-1}(U)\right)^0$, so gilt $\psi|_{F^{-1}(U)}=0$. Wir betrachten die Zerlegungen

$$V=F^{-1}(U)\oplus\tilde{V}\quad\text{und}\quad W=U\oplus\tilde{W}\quad\text{mit}\quad\tilde{W}=F(\tilde{V})\oplus W'$$

für geeignetes $W'\subset W$. Es gilt $F(\tilde{V})\subset\tilde{W}$ und $\dim F(\tilde{V})\leqslant\dim\tilde{W}$. Wegen $\mathrm{Ker}\,F\subset F^{-1}(U)$ ist $F|_{\tilde{V}}$ injektiv. Es sei $(\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_k)$ eine Basis von $\tilde{V}$ und $(\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_k)$ eine Basis von $F(\tilde{V})$ mit $F(\tilde{v}_i)=\tilde{w}_i$ für $i=1,\ldots,k$. Die Basis von $F(\tilde{V})$ ergänzen wir zu einer Basis $(\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_k,w_1,\ldots,w_m)$ von $\tilde{W}$. Nach 2.4.1 gibt es genau ein lineares $\varphi\in\mathrm{Hom}(W,K)$ mit

$$\begin{gathered}\varphi(\tilde{w}_i)=\psi(\tilde{v}_i)\quad\text{für } i=1,\ldots,k\quad\text{und}\\ \varphi(w_j)=0\quad\text{für } j=1,\ldots,m\quad\text{sowie}\quad\varphi|_U=0\,.\end{gathered}$$

Daraus folgt $\psi=\varphi\circ F$, also $\psi\in F^*(U^0)$.

5. a) „$\supset$“: Für $\varphi\in W_1^\circ\cap W_2^\circ$ gilt $\varphi(w_1)=0$ für alle $w_1\in W_1$ und $\varphi(w_2)=0$ für alle $w_2\in W_2$. Hiermit folgt

$$\varphi(w_1+w_2)=\varphi(w_1)+\varphi(w_2)=0+0=0$$

für alle $w_1\in W_1$ und alle $w_2\in W_2$, und damit gilt $\varphi\in(W_1+W_2)^\circ$.

„$\subset$“: Sei nun $\varphi\in(W_1+W_2)^\circ$ und $w_1\in W_1$ beliebig. Wegen $0\in W_2$ gilt $\varphi(w_1)=\varphi(w_1+0)\in\varphi(W_1+W_2)=0$. Analog zeigt man $\varphi(w_2)=0$ für alle $w_2\in W_2$. Damit gilt $\varphi\in W_1^\circ$ und $\varphi\in W_2^\circ$.
b) „$\subset$“: Ist $\varphi\in(W_1\cap W_2)^\circ$, so folgt $\varphi(w)=0$ für alle $w\in W_1\cap W_2$. Definiert man $\varphi_1,\varphi_2\in W_1^\circ+W_2^\circ$ mit

$$\varphi_1(v):=\begin{cases}0 & \text{für } v\in W_1,\\ \varphi(v) & \text{für } v\in V\smallsetminus W_1\end{cases}$$

und

$$\varphi_2(v) := \varphi(v) - \varphi_1(v) \quad \text{für alle } v \in V,$$

so gilt $\varphi_1 \in W_1^\circ$ und $\varphi_2 \in W_2^\circ$ sowie $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

„$\supset$": Ist $\varphi \in W_1^\circ + W_2^\circ$, so gilt $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit $\varphi_1 \in W_1^\circ$ und $\varphi_2 \in W_2^\circ$. Hieraus folgt $\varphi_1(w_1) = 0$ für alle $w_1 \in W_1$ und $\varphi_2(w_2) = 0$ für alle $w_2 \in W_2$, und damit ergibt sich für alle $w \in W_1 \cap W_2$

$$\varphi(w) = \varphi_1(w) + \varphi_2(w) = 0 + 0 = 0,$$

also gilt $\varphi \in (W_1 \cap W_2)^\circ$.

6.2 Dualität und Skalarprodukte

1. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\Phi"'] & W \arrow[l, "F^{\mathrm{ad}}"'] \arrow[d, "\Psi"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "F^*"'] \end{tikzcd}$$

gilt für die Isomorphismen Ψ und Φ nach Satz 6.2.3

$$\Psi(U^\perp) = U^0 \quad \text{und} \quad \Phi\left(F^{-1}(U)^\perp\right) = \left(F^{-1}(U)\right)^0 .$$

Daher folgt die Behauptung aus Aufgabe 4 zu 6.1.

2. Die Aussage folgt aus Aufgabe 1.

Die Umkehrung gilt nicht, denn für eine anti-selbstadjungierte Abbildung F (vgl. die Ergänzungsaufgaben zu 5.6) folgt aus Aufgabe 1

$$-F\left(U^\perp\right) = \left(F^{-1}(U)\right)^\perp .$$

Da $F\left(U^\perp\right)$ ein Untervektorraum von V ist, gilt

$$F\left(U^\perp\right) = -F\left(U^\perp\right) = \left(F^{-1}(U)\right)^\perp$$

für jede anti-selbstadjungierte Abbildung F.

3. Alles folgt aus Satz 6.2.5, Teil 3). Die Bijektivität ist unmittelbar klar, da $\left(F^{\mathrm{ad}}\right)^{\mathrm{ad}} = F$. Ferner gilt für eine Orthonormalbasis $\mathscr{B}$ von V

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B}}(F_1^{\mathrm{ad}} + F_2^{\mathrm{ad}}) &= {}^t\overline{(M_{\mathscr{B}}(F_1 + F_2))} = {}^t\overline{M_{\mathscr{B}}(F_1)} + {}^t\overline{M_{\mathscr{B}}(F_2)} \\ &= M_{\mathscr{B}}(F_1^{\mathrm{ad}}) + M_{\mathscr{B}}(F_2^{\mathrm{ad}}) \end{aligned}$$

sowie

$$M_{\mathscr{B}}(\lambda F^{\mathrm{ad}}) = {}^t\overline{M_{\mathscr{B}}(\lambda F)} = \bar{\lambda} \cdot {}^t\overline{M_{\mathscr{B}}(F))} = \bar{\lambda} \cdot M_{\mathscr{B}}(F^{\mathrm{ad}}) .$$

4. A ist normal, da
$$A\cdot{}^t\bar{A}=A\cdot(-A)=(-A)\cdot A={}^t\bar{A}\cdot A\,.$$
Ist v Eigenvektor zum Eigenwert λ, so gilt $A\cdot v=\lambda\cdot v$. Andererseits gilt ${}^t\bar{v}\cdot{}^t\bar{A}=\bar{\lambda}\cdot{}^t\bar{v}$, und damit folgt
$$\bar{\lambda}\cdot{}^t\bar{v}\cdot v=\left({}^t\bar{v}\cdot{}^t\bar{A}\right)\cdot v={}^t\bar{v}(-A\cdot v)={}^t\bar{v}(-\lambda v)=-\lambda\cdot{}^t\bar{v}\cdot v\,,$$
also $\bar{\lambda}=-\lambda$. Das jedoch ist gleichbedeutend mit $\lambda\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

5. Die Behauptung ist anschaulich sofort klar, wie z.B. Bild 6.3 in [Fi1] zeigt. Auch der Beweis birgt keinerlei Schwierigkeiten.

Sind L und L' windschief, so sind notwendigerweise w und w' linear unabhängig. Wäre $x\in\operatorname{span}(w,w')$, so existierten $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ mit
$$v'-v=x=\lambda_1 w+\lambda_2 w'\,.$$
Daraus würde jedoch $v'-\lambda_2 w'=v+\lambda_1 w$ folgen, d.h. L und L' hätten einen Schnittpunkt.

Sind umgekehrt w und w' linear unabhängig, so sind L und L' nicht parallel. Hätten sie einen Schnittpunkt, so existierten $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ mit
$$v+\lambda_1 w=v'+\lambda_2 w'\,,$$
und daraus folgte $x=v'-v=\lambda_1 w-\lambda_2 w'$, d.h. x,w,w' wären linear abhängig.

6. a) Es gilt
$$\begin{aligned}\delta(\lambda,\lambda') &= \|v'+\lambda' w'-v-\lambda w\|^2\\ &= \lambda^2-2\langle w,w'\rangle\lambda\lambda'+\lambda'^2+2\left(\langle v,w\rangle-\langle v',w\rangle\right)\lambda\\ &\quad +2\left(\langle v',w'\rangle-\langle v,w'\rangle\right)\lambda'+\|v\|^2+\|v'\|^2-2\langle v,v'\rangle\,,\end{aligned}$$
d.h. δ ist ein quadratisches Polynom in den Variablen λ,λ'. Auf δ können wir daher die Theorie zur Bestimmung lokaler Extrema von Funktionen mehrerer Variablen anwenden (vgl. [Fo2], §7, Satz 4), nach der δ ein lokales Minimum an der Stelle (λ,λ') besitzt, falls $\operatorname{grad}\delta(\lambda,\lambda')=0$ und $(\operatorname{Hess}\delta)(\lambda,\lambda')$ eine positiv-definite Matrix ist, wobei grad den Gradienten und Hess die Hesse-Matrix von δ bezeichnen (vgl. auch Aufgabe 9 zu 2.5, wobei grad mit der Jacobi-Matrix für $m=1$ und $n=2$ übereinstimmt). Wir bestimmen daher die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von δ:
$$\frac{\partial\delta}{\partial\lambda}(\lambda,\lambda')=2\lambda-2\langle w,w'\rangle\lambda'+2\left(\langle v,w\rangle-\langle v',w\rangle\right)\,,$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\lambda'}(\lambda,\lambda')=2\lambda'-2\langle w,w'\rangle\lambda+2\left(\langle v',w'\rangle-\langle v,w'\rangle\right)\,,$$
$$\frac{\partial^2\delta}{\partial\lambda^2}(\lambda,\lambda')=2=\frac{\partial^2\delta}{\partial\lambda'^2}(\lambda,\lambda')\,,\quad \frac{\partial^2\delta}{\partial\lambda\partial\lambda'}(\lambda,\lambda')=-2\langle w,w'\rangle=\frac{\partial^2\delta}{\partial\lambda'\partial\lambda}(\lambda,\lambda')\,.$$

Damit gilt zunächst

$$\det(\operatorname{Hess}\delta)(\lambda,\lambda') = \det\begin{pmatrix} 2 & -2\langle w,w'\rangle \\ -2\langle w,w'\rangle & 2 \end{pmatrix} = 4 - 4\langle w,w'\rangle^2 .$$

Da die Vektoren w und w' normiert und linear unabhängig sind, folgt nach 5.1.4

$$-1 < \langle w,w'\rangle < 1 , \quad \text{d.h.} \quad 0 \leqslant \langle w,w'\rangle^2 < 1 ,$$

und daher

$$\det(\operatorname{Hess}\delta)(\lambda,\lambda') > 0$$

für alle $(\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2$. Andererseits ist auch die Determinante des einreihigen Hauptminors A_1 wegen $\det A_1 = 2 > 0$ positiv, und nach dem Hauptminoren-Kriterium in 5.7.7 ist damit $\operatorname{Hess}\delta$ positiv definit. Also ist ein lokales Extremum in jedem Fall ein Minimum.

Andererseits gilt

$$\operatorname{grad}\delta(\lambda,\lambda') = \left(\frac{\partial\delta}{\partial\lambda}(\lambda,\lambda'), \frac{\partial\delta}{\partial\lambda'}(\lambda,\lambda')\right) = (0,0)$$

genau dann, wenn

$$\begin{array}{rcl} \lambda & = & \langle w,w'\rangle\lambda' + \langle v',w\rangle - \langle v,w\rangle \quad \text{und} \\ \lambda' & = & \langle w,w'\rangle\lambda + \langle v,w'\rangle - \langle v',w'\rangle . \end{array} \qquad (*)$$

Bezeichnen wir

$$a := \langle w,w'\rangle , \quad b := \langle v',w\rangle - \langle v,w\rangle , \quad c := \langle v,w'\rangle - \langle v',w'\rangle ,$$

so lautet die Lösung von $(*)$

$$\lambda = \frac{ac+b}{1-a^2} \quad \text{und} \quad \lambda' = \frac{ab+c}{1-a^2} .$$

Es gibt also ein eindeutig bestimmtes lokales Minimum. Da für $\lambda \to \infty$ oder $\lambda' \to \infty$ auch $\delta(\lambda,\lambda') \to \infty$ gilt, ist das lokale Minimum auch das globale Minimum.

Aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion ist $\|v' + \lambda' w' - v - \lambda w\|^2$ genau dann minimal, wenn $\|v' + \lambda' w' - v - \lambda w\|$ minimal ist. Damit ist durch das globale Minimum von δ der Abstand $d(L,L')$ bestimmt.

b) Leider ist die Aufgabenstellung in der zehnten Auflage der Linearen Algebra falsch; wer sich an dieser versucht hat, wird nicht besonders weit gekommen sein. Die richtige Aufgabenstellung befindet sich im Aufgabenteil sowie ab der elften Auflage der Linearen Algebra.

Ersetzen wir in der Gleichung für $\delta(\lambda,\lambda')$ die Variablen λ und λ' durch die in der Aufgabenstellung gegebenen Formeln, so erhalten wir nach einer etwas längeren Rechnung

$$\delta(\lambda,\lambda') = \mu^2 + b\mu + \mu'^2 + \frac{-ab+2c}{\sqrt{4-a^2}}\mu' + d .$$

Mit dem üblichen Verfahren der quadratischen Ergänzung (vgl. [Scha], §3) auf beide Unbekannte angewandt ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\delta(\lambda,\lambda') &= \left(\mu^2+b\mu+\frac{b^2}{4}\right)+\left(\mu'^2+\frac{-ab+2c}{\sqrt{4-a^2}}\mu'+\left(\frac{-ab+2c}{2\sqrt{4-a^2}}\right)^2\right)\\ &\quad -\frac{b^2}{4}-\left(\frac{-ab+2c}{2\sqrt{4-a^2}}\right)^2+d\,.\end{aligned}$$

Setzen wir

$$e:=-\frac{b}{2},\quad f:=\frac{-ab+2c}{2\sqrt{4-a^2}},\quad g:=d-e^2-f^2,$$

so hat $\delta(\lambda,\lambda')$ die gewünschte Form. Der Rest der Aufgabe ist klar, da Quadrate von reellen Zahlen stets größer oder gleich 0 sind, und für $\mu=e$ sowie $\mu'=f$ das Minimum erreicht wird.

Beim Vergleich von a) und b) stellen wir fest, dass die Lösung in Teil b) deutlich kürzer ist. Sie ist jedoch nur im quadratischen Fall möglich, während die Lösung von Teil a) unter allgemeineren Bedingungen Gültigkeit besitzt.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. Wegen $F^{\mathrm{ad}}=-F$ gilt

$$F\circ F^{\mathrm{ad}}=F\circ(-F)=(-F)\circ F=F^{\mathrm{ad}}\circ F\,.$$

E2. Die Lösung verläuft analog zur Lösung der Aufgabe E2 a) in Abschnitt 5.6.

6.3 Tensorprodukte*

1. a) $(L,+)$ ist sicherlich eine abelsche Gruppe, das zeigt V1. Wegen $K\subset L$ gilt $k\cdot l\in L$ für alle $k\in K$ und alle $l\in L$, und da $K\subset L$ ein Körper ist, folgt $1_K=1_L$. Die Eigenschaften V2 folgen somit aus den Körpereigenschaften von L.
b) Nach Teil a) ist L ein K-Vektorraum. Daher folgt aus Theorem 6.3.3 die Existenz des K-Vektorraumes $L\otimes_K V$, d.h. $L\otimes_K V$ ist bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe. Es bleibt V2 zu zeigen.

Es seien $\lambda,\mu\in L$ und $v,v'\in L\otimes_K V$. Wir können annehmen, dass

$$v=\sum_{i=1}^n \lambda_i\otimes v_i \quad\text{und}\quad v'=\sum_{i=1}^n \mu_i\otimes v_i\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\cdot v &= (\lambda+\mu)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\otimes v_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda+\mu)\lambda_i\otimes v_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda\lambda_i+\mu\lambda_i)\otimes v_i \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n}(\lambda\lambda_i\otimes v_i+\mu\lambda_i\otimes v_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda\lambda_i\otimes v_i+\sum_{i=1}^{n}\mu\lambda_i\otimes v_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\otimes v_i+\mu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\otimes v_i\\ &= \lambda\cdot v+\mu\cdot v\,.\end{aligned}$$

Dabei wurde bei $(*)$ eine Rechenregel für Tensoren aus 6.3.3 verwendet.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(v+v') &= \lambda\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\otimes v_i+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\otimes v_i\right)\\ &\overset{(*)}{=} \lambda\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)\otimes v_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot(\lambda_i+\mu_i)\otimes v_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\lambda_i+\lambda\mu_i)\otimes v_i\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n}\lambda\lambda_i\otimes v_i+\sum_{i=1}^{n}\lambda\mu_i\otimes v_i\\ &= \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\otimes v_i+\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu_i\otimes v_i=\lambda\cdot v+\lambda\cdot v'\,,\end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ die Rechenregeln für Tensoren aus 6.3.3 verwendet wurden.

Die beiden restlichen Regeln aus V2 sind unmittelbar einzusehen.

c) Es ist klar, dass die Familie $(1\otimes v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem ist.

Um ihre lineare Unabhängigkeit zu zeigen, sei $(\mu_j)_{j\in J}$ eine Basis des K-Vektorraums L. Gilt

$$\sum_i \lambda_i(1\otimes v_i)=0$$

mit $\lambda_i\in L$, wobei die Summe wie üblich endlich ist, so besitzt jedes der λ_i eine eindeutige endliche Darstellung

$$\lambda_i=\sum_j \kappa_{ij}\cdot\mu_j \quad \text{mit } \kappa_{ij}\in K\,.$$

Damit folgt

$$0=\sum_i\lambda_i(1\otimes v_i)=\sum_{i,j}\kappa_{ij}\cdot\mu_j(1\otimes v_i)=\sum_{i,j}\kappa_{ij}(\mu_j\otimes v_i)\,.$$

Da nach dem Beweis von Theorem 6.3.3 die $(\mu_j \otimes v_i)_{(j,i)\in J\times I}$ eine Basis des K-Vektorraumes $L \otimes V$ sind, folgt $\kappa_{ij} = 0$ für alle i, j und damit auch $\lambda_i = 0$ für alle i; also ist die Familie $(1 \otimes v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

d) φ definiert nach Teil c) und Satz 2.4.1 in eindeutiger Weise eine lineare Abbildung.

Nach Teil c) ist für den Spezialfall $L = K$ für eine Basis $(v_i)_{i\in I}$ von V die Familie $(1 \otimes v_i)_{i\in I}$ eine Basis von $K \otimes_K V$. Daher ist φ ein Isomorphismus.

2. a) Zum Beweis der ersten Behauptung bemerken wir, dass $\mathrm{Abb}(V \times W, U)$ ein Vektorraum ist, und behaupten, dass $\mathrm{Bil}_K(V,W;U) \subset \mathrm{Abb}(V \times W, U)$ ein Untervektorraum ist. Dazu sind die Eigenschaften UV1, UV2 und UV3 aus 1.4.2 zu zeigen, die durch eine kurze Rechnung zu verifizieren sind.

Bevor wir beweisen, dass die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathrm{Bil}_K(V,W;U) \to \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, U)\,, \quad \xi \mapsto \xi_\otimes\,,$$

ein Isomorphismus ist, müssen wir zunächst ihre Wohldefiniertheit zeigen. Diese folgt aus Theorem 6.3.3, nach dem die Abbildung $\xi_\otimes$ zu einer Abbildung ξ eindeutig bestimmt ist. Es ist jedoch zu beachten, dass dies keineswegs selbstverständlich ist, da der Raum $V \otimes W$ nach Konstruktion ein Raum von Restklassen ist und man daher die Invarianz von Rechenoperationen auf den einzelnen Restklassen zeigen muss.

Wir zeigen nun die Linearität von φ. Dazu seien $\xi, \xi' \in \mathrm{Bil}_K(V,W;U)$ und $\xi_\otimes$ bzw. $\xi'_\otimes$ ihre Bilder unter φ, d.h. $\xi = \xi_\otimes \circ \eta$ und $\xi' = \xi'_\otimes \circ \eta$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\xi+\xi'"] & \\ V \otimes W \arrow[r, "\alpha"] & U \end{tikzcd}$$

kommutiert mit $\alpha = \xi_\otimes + \xi'_\otimes$ sowie mit $\alpha = (\xi + \xi')_\otimes$. Aus der Eindeutigkeit der Abbildung α (siehe Theorem 6.3.3) folgt

$$(\xi + \xi')_\otimes = \xi_\otimes + \xi'_\otimes\,, \quad \text{d.h.} \quad \varphi(\xi + \xi') = \varphi(\xi) + \varphi(\xi')\,.$$

Ebenso gilt $\varphi(\lambda\xi) = \lambda\varphi(\xi)$ für alle $\xi \in \mathrm{Bil}_K(V,W;U)$ und alle $\lambda \in K$. Dies zeigt die Linearität von φ.

Ist $\varphi(\xi) = \xi_\otimes = 0$, so ist bereits $\xi = 0 \circ \eta = 0$, also ist φ injektiv. Für $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, U)$ definieren wir $\xi := \psi \circ \eta$; dann ist ξ bilinear, da η bilinear und ψ linear ist, und es gilt $\psi = \xi_\otimes$ aufgrund der Eindeutigkeit von $\xi_\otimes$; dies zeigt die Surjektivität von φ.

Die Behauptung in Teil b) zeigt man analog, wobei $V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^*$ aus Satz 6.3.5 benutzt wird.

3. a) Es sei $u \in Q$. Dann existiert ein $(v,w) \in V \times W$ mit $u = v \otimes w$. Aus der Bilinearität von η folgt

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (v \otimes w) = \underbrace{\lambda v}_{\in V} \otimes w \in Q;$$

also ist Q ein Kegel.

Die Bezeichnung *Kegel* bedeutet geometrisch, dass es sich um eine Vereinigung von Geraden durch den Ursprung handelt, siehe auch Bild 6.1.

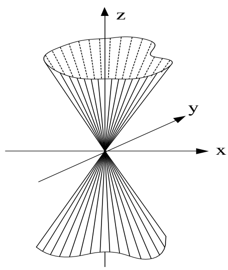


Bild 6.1

b)* Wir benutzen die kanonischen Basen $(e_1, \ldots, e_m)$ von K^m und $(e'_1, \ldots, e'_n)$ von K^n sowie die Basis $e_i \otimes e'_j$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ von $K^m \otimes K^n$. Die kanonische Basis von $K^{m\cdot n}$ bezeichnen wir mit e_{ij}, sie wird mit meist in lexikographischer Ordnung geschrieben, d.h.

$$(e_{11}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, \ldots, e_{2n}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{mn}).$$

Identifizieren wir $K^m \otimes K^n = K^{m\cdot n}$, so wird η gegeben durch

$$K^m \times K^n \to K^{m\cdot n}, \quad (e_i, e'_j) \mapsto e_{ij}, \quad \text{d.h.}$$
$$((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto (x_1y_1, \ldots, x_1y_n, \ldots, x_my_1, \ldots, x_my_n).$$

Für $m = 0$ oder $n = 0$ ist $Q = 0$, für $m = 1$ oder $n = 1$ ist η surjektiv, also können wir $m \geqslant 2$ und $n \geqslant 2$ voraussetzen.

Der einfachste Fall ist $m = n = 2$, und wir behaupten

$$Q = \{z = (z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}) \in K^4\colon\ z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} = 0\} =: Q',$$

d.h. Q ist eine *Quadrik* (siehe [Fi3], Abschnitt 1.4.1).

Die Inklusion $Q \subset Q'$ ist offensichtlich, denn

$$z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} = x_1y_1x_2y_2 - x_1y_2x_2y_1 = 0.$$

Sei umgekehrt $z = (z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}) \in Q'$. Wegen $0 \in Q$ genügt es, den Fall $z \neq 0$ zu betrachten. Ist $z_{11} \neq 0$, so erhalten wir ein Urbild durch

$$x_1 := z_{11}, \quad x_2 := z_{21}, \quad y_1 := 1, \quad y_2 := \frac{z_{12}}{z_{11}},$$

denn dann ist

$$x_1 \cdot y_1 = z_{11}\,, \quad x_1 \cdot y_2 = z_{12}\,, \quad x_2 \cdot y_1 = z_{21}\,, \quad x_2 \cdot y_2 = z_{22}\,.$$

Ist ein anderes $z_{ij} \neq 0$, so verläuft die Rechnung analog.

Im allgemeinen Fall behaupten wir

$$\begin{aligned} Q \;=\; \big\{&(z_{11},\ldots,z_{mn}) \in K^{m\cdot n}:\; z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} = 0 \\ &\text{mit } i,k \in \{1,\ldots,m\} \text{ und } j,l \in \{1,\ldots,n\}\big\} =: Q\,. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu $m = n = 2$ hat man nicht nur eine, sondern mehrere quadratische Gleichungen, und zwischen ihnen bestehen Abhängigkeiten; z. B. ist

$$z_{12}z_{34} - z_{14}z_{32} = 0 \Leftrightarrow z_{14}z_{32} - z_{12}z_{34} = 0\,.$$

Es schadet jedoch nichts, mehr Gleichungen zu wählen als benötigt, insbesondere wenn dadurch die Darstellung leichter und schöner wird.

Es sei $z = (z_{11},\ldots,z_{mn}) \in Q$. Dann existieren $x = (x_1,\ldots,x_m) \in K^m$ und $y = (y_1,\ldots,y_n) \in K^n$ mit

$$\begin{aligned} z &= \eta(x,y) = (x_1y_1, x_1y_2, \ldots, x_my_{n-1}, x_my_n) \\ &= (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{m,n-1}, z_{mn})\,, \end{aligned}$$

woraus für alle $i,k \in \{1,\ldots,m\}$ und alle $j,l \in \{1,\ldots,n\}$ folgt

$$z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} = x_iy_jx_ky_l - x_iy_lx_ky_j = 0\,, \quad \text{also } z \in Q'\,.$$

Bisher lief der allgemeine Fall völlig analog zum Fall $m = n = 2$. Auch die Inklusion $Q' \subset Q$ zeigen wir ähnlich wie oben. Dazu sei $z \in Q'$. Falls $z = 0$, so ist $z = \eta(0,0)$. Ansonsten sei wie oben zunächst $z_{11} \neq 0$. Die anderen Fälle zeigt man analog. Wir behaupten, dass

$$z = \eta\Bigg(\underbrace{(z_{11},\ldots,z_{m1})}_{x}, \underbrace{(1, \frac{z_{12}}{z_{11}}, \ldots, \frac{z_{1n}}{z_{11}})}_{y}\Bigg)\,.$$

Um dies zu beweisen, rechnen wir

$$\begin{aligned} x_1 \cdot y_j &= z_{11} \cdot \tfrac{z_{1j}}{z_{11}} = z_{1j} && \text{für alle } j \in \{2,\ldots,n\}\,, \\ x_i \cdot y_1 &= z_{i1} \cdot 1 = z_{i1} && \text{für alle } i \in \{1,\ldots,n\}\,, \end{aligned}$$

und für alle $i, j \neq 1$

$$x_i \cdot y_j = z_{i1} \cdot \frac{z_{1j}}{z_{11}} = z_{ij}\,.$$

Damit ist $z \in Q$.

Die hier aus dem Tensorprodukt erhaltene Abbildung η ergibt in der algebraischen Geometrie die sogenannte Segre-Abbildung, die jedoch als Abbildung zwischen projektiven Räumen definiert wird (vgl. [Ha], Example 2.11ff).

c) Wegen $\eta(v,0) = v \otimes 0 = 0$ für alle $v \in V$ und $\eta(0,w) = 0 \otimes w = 0$ für alle $w \in W$ kann η für $\dim V > 0$ oder $\dim W > 0$ nicht injektiv sein. Also ist η nur für die trivialen Räume $V = W = 0$ injektiv.

Zur Surjektivität bemerken wir zunächst, dass zwar immer

$$\operatorname{span} \operatorname{Im} \eta = V \otimes W$$

gilt, aber im Allgemeinen nicht $\operatorname{Im} \eta = V \otimes W$. Dies ist kein Widerspruch, da η nicht linear, sondern bilinear ist. $\operatorname{Im} \eta$ ist daher im Allgemeinen kein Untervektorraum von $V \otimes W$. Also genügt es auch nicht, zur Surjektivität zu zeigen, dass eine Basis von $V \otimes W$ im Bild von η liegt.

Nach diesen Vorbemerkungen machen wir uns ans Werk und zeigen, dass η surjektiv ist, wenn $\dim V = 0$ oder $\dim W = 0$ oder $\dim V = 1$ oder $\dim W = 1$ gilt. Die Fälle $\dim V = 0$ oder $\dim W = 0$ sind dabei trivial.

Wir behandeln den Fall $\dim W = 1$, der Fall $\dim V = 1$ läuft analog.

Es sei w eine Basis von W und $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Dann ist die Familie $(v_i \otimes w)_{i \in I}$ eine Basis von $V \otimes W$, und ein $v \in V \otimes W$ hat aufgrund der Rechenregel b) für Tensoren aus 6.3.3 eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum \lambda_i \cdot (v_i \otimes w) \quad \text{mit } \lambda_i \in K\,,$$

wobei nur endlich viele Summanden ungleich 0 sind. Daher gilt

$$v = \sum \lambda_i \cdot \eta(v_i, w) = \eta\Big(\sum \lambda_i v_i, w\Big) \in \operatorname{Im} \eta\,,$$

d.h. η ist surjektiv.

Für endlichdimensionale Vektorräume V, W mit $\dim V = m \geqslant 2$ sowie $\dim W = n \geqslant 2$ gilt nach Teil b) $\operatorname{Im} \eta = Q'$. Da der Punkt

$$z = (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{mn})$$

mit

$$z_{11} = 1,\ z_{12} = 0,\ z_{21} = 0,\ z_{22} = 1,\ z_{ij} = 0 \quad \text{für } i, j \notin \{1, 2\}$$

wegen

$$z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21} = 1 \neq 0$$

nicht in Q' liegt, kann η nicht surjektiv sein.

Auch für unendlichdimensionale Vektorräume V und W kann η nicht surjektiv sein, da η wie gerade ausgeführt auf unendlich vielen Untervektorräumen nicht surjektiv ist.

η ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Das ist nur für den trivialen Fall $V = W = 0$ der Fall.

4. a) Wir ergänzen $(v_i)_{i \in I}$ bzw. $(w_j)_{j \in J}$ zu Basen $(v_i)_{i \in \tilde{I}}$ von V bzw. $(w_j)_{j \in \tilde{J}}$ von W. Dann ist nach dem Beweis von Theorem 6.3.3 $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in \tilde{I} \times \tilde{J}}$ eine Basis von $V \otimes W$. Insbesondere ist jede Teilmenge, also auch

$$(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J},$$

linear unabhängig.
b) Es seien $0 \neq v \in V$ und $0 \neq w \in W$. Dann sind (v) bzw. (w) Familien linear unabhängiger Vektoren in V bzw. W, erfüllen also die Voraussetzungen für Teil a). Daher ist die Familie $(v \otimes w)$ linear unabhängig in $V \otimes W$, also insbesondere ungleich 0.

5. Aufgrund der Linearität von F und G ist die Zuordnung $F \otimes G$ wohldefiniert, denn sind $v \otimes w$ und $v' \otimes w'$ zwei Vektoren aus $V \otimes W$ mit $v \otimes w = v' \otimes w'$, so existiert o.E. ein $\lambda \in K$ mit $v = \lambda v'$ und $w' = \lambda w$, und es gilt

$$\begin{aligned} F(v) \otimes G(w) &= F(\lambda v') \otimes G(w) = \lambda F(v) \otimes G(w) \\ &= F(v') \otimes \lambda G(w) = F(v') \otimes G(\lambda w) \\ &= F(v') \otimes G(w'). \end{aligned}$$

Diese Überlegung lässt sich mit Hilfe der Linearität von F und G sowie einer Basis $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ von $V \otimes W$ auf beliebige Elemente übertragen.

Es seien $(v_i)_{i\in I}$ bzw. $(w_j)_{j\in J}$ Basen von V bzw. W. Dann wird nach Satz 2.4.1 durch die Familie

$$\big((F \otimes G)(v_i \otimes w_j)\big)_{(i,j)\in I\times J} \subset V' \otimes W'$$

in eindeutiger Weise eine lineare Abbildung definiert, die wir ebenfalls mit $F \otimes G$ bezeichnen.

Wir definieren nun eine bilineare Abbildung

$$\chi\colon\ \mathrm{Hom}_K(V,V') \times \mathrm{Hom}_K(W,W') \to \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W')$$

durch

$$(F,G) \mapsto F \otimes G.$$

Nach der universellen Eigenschaft existiert ein eindeutiges lineares $\chi_\otimes$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_K(V,V') \times \mathrm{Hom}_K(W,W') \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W') \\ \mathrm{Hom}_K(V,V') \otimes \mathrm{Hom}_K(W,W') \arrow[ur, "\chi_\otimes"'] & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

kommutiert. Um die Bijektivität von $\chi_\otimes$ zu beweisen, zeigen wir, dass $\chi_\otimes$ eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V,V') \otimes \mathrm{Hom}_K(W,W')$ auf eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W')$ abbildet. Wir betrachten hierzu Basen $(v_i)_{i\in I}$ bzw. $(v'_i)_{i\in I'}$ von V bzw. V' und $(w_j)_{j\in J}$ bzw. $(w'_j)_{j\in J'}$ von W bzw. W'. Dann sind die Familien $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ bzw. $(v'_i \otimes w'_j)_{(i,j)\in I'\times J'}$ Basen von $V \otimes W$ bzw. $V' \otimes W'$.

Eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V,V') \times \mathrm{Hom}_K(W,W')$ ist nach 2.4.2 gegeben durch die Abbildungen $F_i^{i'} \times F_j^{j'}$ mit

$$F_i^{i'}(v_k) := \begin{cases} v'_{i'}, & \text{falls } i=k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad F_j^{j'}(w_l) := \begin{cases} w'_{j'}, & \text{falls } j=l, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W')$ ist gegeben durch die Abbildungen

$$F_{i,j}^{i',j'} \quad \text{mit} \quad F_{i,j}^{i',j'}(v_k \otimes w_l) := \begin{cases} v'_{i'} \otimes w'_{j'}, & \text{falls } (k,l) = (i,j), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$F_{i,j}^{i',j'} = F_i^{i'} \otimes F_j^{j'} = \chi(F_i^{i'}, F_j^{j'}),$$

also bildet χ diese Basis von $\mathrm{Hom}_K(V,V') \times \mathrm{Hom}_K(W,W')$ auf eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W')$ ab. Da η Basen auf Basen abbildet, folgt die Behauptung aus der Kommutativität von $(*)$.

6. „$\Rightarrow$“: Sind v_1, v_2 linear abhängig, so existieren $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, die nicht beide gleich null sind, so dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ gilt. Ist $\lambda_1 \neq 0$, so gilt $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2$, und damit folgt

$$v_1 \wedge v_2 = -\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 \wedge v_2 = -\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}(v_2 \wedge v_2) = 0.$$

„$\Leftarrow$“: Es seien $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängig. Wir ergänzen sie zu einer Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V mit $1,2 \in I$ und definieren eine bilineare Abbildung

$$\xi\colon V \times V \to K$$

durch

$$\xi(v,w) := \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \qquad \text{für } v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \text{ und } w = \sum_{i \in I} \mu_i v_i .$$

Dann ist ξ alternierend, und es gilt

$$\xi_\wedge(v_1 \wedge v_2) = \xi(v_1, v_2) = 1 \neq 0,$$

woraus $v_1 \wedge v_2 \neq 0$ folgt.

7. a) Die Aussage i) ist klar, da $\mathbb{C}$ ein Körper und insbesondere ein Ring ist. ii) folgt aus Korollar 2.5.4, und iii) gilt nach Aufgabe 9 a) zu 1.3. Die Eigenschaft 1) ist hierbei in allen drei Fällen unmittelbar einsichtig.

b) Es sei $\lambda_a \in \mathrm{End}(A)$ die Linksmultiplikation mit $a \in A$, d.h.

$$\lambda_a(a') = a \cdot a' \quad \text{für alle } a' \in A .$$

Analog sei $\lambda_b \in \operatorname{End}(B)$ die Linksmultiplikation mit $b \in B$. Dann ist (vgl. Aufgabe 5) $\lambda_a \otimes \lambda_b \in \operatorname{End}(A \otimes B)$, und die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \lambda\colon\ A \times B & \to & \operatorname{End}(A \otimes B)\,, \\ (a,b) & \mapsto & \lambda_a \otimes \lambda_b\,, \end{array}$$

ist bilinear. Daher existiert eine lineare Abbildung $\lambda_\otimes\colon\ A \otimes B \to \operatorname{End}(A \otimes B)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & \operatorname{End}(A \otimes B) \\ A \otimes B \arrow[ur, "\lambda_\otimes"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wir definieren nun die Multiplikation μ durch

$$\mu\colon\ (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to A \otimes B\,,$$
$$(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) \mapsto (\lambda_\otimes(a_1 \otimes b_1))(a_2 \otimes b_2) =: (a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2)\,.$$

Nach Konstruktion ist μ gerade K-bilinear, und es gilt

$$\begin{array}{rcl} (\lambda_\otimes(a_1 \otimes b_1))(a_2 \otimes b_2) & = & \lambda(a_1,b_1)(a_2 \otimes b_2) = (\lambda_{a_1} \otimes \lambda_{b_1})(a_2 \otimes b_2) \\ & = & a_1a_2 \otimes b_1b_2\,. \end{array}$$

Die Ringeigenschaften folgen aus der Bilinearität von μ, das Einselement von $A \otimes B$ ist gegeben durch $1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}$.

c) Zur besseren Übersicht kennzeichnen wir für einen Augenblick die Multiplikation in $K[t] \otimes K[t]$ mit $\odot$ und den Vektorraum-Isomorphismus aus Beispiel 6.3.4 a) wie dort mit $\xi_\otimes$. Dann gilt für alle $f_1, f_2, g_1, g_2 \in K[t]$

$$\begin{array}{rcl} \xi_\otimes((f_1 \otimes g_1) \odot (f_2 \otimes g_2)) & = & \xi_\otimes(f_1f_2 \otimes g_1g_2) = f_1f_2 \cdot g_1g_2 \\ & = & f_1g_1 \cdot f_2g_2 = \xi_\otimes(f_1 \otimes g_1) \cdot \xi_\otimes(f_2 \otimes g_2)\,, \end{array}$$

also ist $\xi_\otimes$ ein Ringhomomorphismus.

Die Bijektivität von $\xi_\otimes$ ist klar, da $\xi_\otimes$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Algebren können auch über einem Ring R statt einem Körper K definiert werden (vgl. [P], 1.1). Teil b) gilt auch in diesem Fall, und der Beweis verläuft genauso wie oben gezeigt (vgl. [P], 9.2, Proposition a).

Für eine Anwendung von Algebren vgl. die Ergänzungsaufgaben in Abschnitt 5.4.

8. Wir definieren
$$V \vee V := (V \otimes V)/S(V)\,,$$
wobei $S(V)$ der in 6.3.7 definierte Untervektorraum von $V \otimes V$ ist. Wie im Beweis von Theorem 6.3.8 bezeichnen wir mit $\rho:\ V \otimes V \to V \vee V$ die Quotientenabbildung und erklären $\vee := \rho \circ \eta$, d.h. für alle $v, v' \in V$ ist
$$v \vee v' := \vee(v, v') = \rho \circ \eta(v, v') = \rho(v \otimes v')\,.$$
$\vee$ ist sicher bilinear, da η bilinear und ρ linear ist. Wegen
$$S(V) \subset \operatorname{Ker} \vee_{\otimes} = \operatorname{Ker} \rho$$
und Lemma 6.3.7 ist $\vee$ symmetrisch.

Es verbleibt der Nachweis der universellen Eigenschaft, der jedoch analog zum Beweis von Theorem 6.3.8 verläuft. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[dd, "\vee"'] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[drr, "\xi"] & & \\
& V \otimes V \arrow[r, "\xi_\otimes"] \arrow[dl, "\rho"] & W \\
V \vee V \arrow[urr, "\xi_\vee"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes existiert ein eindeutiges $\xi_\otimes$, und nach der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes (2.2.7) gibt es ein eindeutiges $\xi_\vee$. Aus der Kommutativität der Teildiagramme folgt $\xi = \xi_\vee \circ \vee$, d.h.
$$\xi_\vee(v \vee v') = \xi(v, v') \quad \text{für alle } v, v' \in V\,.$$
Wie bereits im Beweis von Theorem 6.3.8 steckt die Schwierigkeit im Beweis der Behauptung über die Basis von $V \vee V$. Die Tensoren $(v_i \otimes v_j)_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ erzeugen $V \otimes V$. Daher erzeugen die Produkte $(v_i \vee v_j)_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ den Raum $V \vee V$. Wegen der Symmetrie der Abbildung $\vee$ gilt $v_i \vee v_j = v_j \vee v_i$, daher erzeugen bereits die Produkte $(v_i \vee v_j)_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ den Raum $V \vee V$, und es genügt, deren lineare Unabhängigkeit zu zeigen.

Hierzu betrachten wir den Vektorraum $W = K^N$ mit $N = \binom{n+1}{2}$ und bezeichnen dessen kanonische Basis mit $(e_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$. Wir konstruieren nun eine Abbildung $\xi:\ V \times V \to K^N$. Sind
$$v = \sum \lambda_i v_i \quad \text{und} \quad v' = \sum \mu_i v_i$$

aus V, so bezeichnen wir $a_{ij} := \lambda_i\mu_j + \lambda_j\mu_i$ für $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Durch die Zuordnung

$$\xi(v,v') := \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}e_{ij}$$

wird eindeutig eine symmetrische Abbildung definiert. Aus der universellen Eigenschaft folgt

$$\xi_\vee(v_i \vee v_j) = \xi(v_i, v_j) = e_{ij}\,,$$

und da die e_{ij} in K^N linear unabhängig sind, sind die $v_i \vee v_j$ in $V \vee V$ linear unabhängig. Die hier erhaltene Abbildung $\xi_\vee\colon\ V \vee V \to K^N$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Einen Zusammenhang zwischen symmetrischem Produkt und symmetrischen Matrizen (vgl. Aufgabe 3 zu 1.6) erhält man wie folgt. Die Zuordnung

$$\xi\colon\ V \vee V \to \mathrm{Sym}\,(n;K)\,, \quad (v \vee v') \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \cdots & \lambda_1\mu_n \\ \lambda_1\mu_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\mu_n & \cdots & \cdots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

für $v = \sum \lambda_i v_i$ und $v' = \sum \mu_i v_i$ definiert einen K-Vektorraum-Isomorphismus. Wegen $\dim \mathrm{Sym}\,(n;K) = \binom{n+1}{2}$ folgt auch so die Behauptung über die Dimension; die Urbilder der in Aufgabe 3 zu 1.6 bestimmten Basis von $\mathrm{Sym}\,(n;K)$ ergeben die oben angegebene Basis von $V \vee V$.

Auf dieselbe Art kann man einen Isomorphismus

$$\zeta\colon\ V \wedge V \to \mathrm{Alt}\,(n;K)$$

durch

$$(v \wedge v') \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1\mu_2 & \cdots & \lambda_1\mu_n \\ -\lambda_1\mu_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1}\mu_n \\ -\lambda_1\mu_n & \cdots & -\lambda_{n-1}\mu_n & 0 \end{pmatrix}$$

definieren. Durch Vergleich dieser beiden Darstellungen vom alternierenden bzw. symmetrischen Produkt wird der Unterschied zwischen ihnen und insbesondere der Dimensionen besonders deutlich.

In Theorem 6.4.2 sowie Aufgabe 5 zu 6.4 werden die hier konstruierten Isomorphismen

$$V \wedge V \to K^{\binom{n}{2}} \quad \text{bzw.} \quad V \vee V \to K^{\binom{n+1}{2}}$$

verallgemeinert.

9. Aufgrund der Eigenschaften der Tensorprodukte $V \otimes W$ und $V \tilde{\otimes} W$ existieren eindeutige lineare Abbildungen τ und $\tilde{\tau}$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tilde{\eta}"] \arrow[d, "\eta"'] & V \tilde{\otimes} W \\ V \otimes W \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\tilde{\eta}"'] & V \otimes W \\ V \tilde{\otimes} W \arrow[ur, "\tilde{\tau}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutieren. Damit aber kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dd, "\eta"'] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"] & & V \otimes W \\ & V \tilde{\otimes} W \arrow[ur, "\tilde{\tau}"] & \\ V \otimes W \arrow[ur, "\tau"] & & \end{tikzcd}$$

Andererseits ist auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"'] & V \otimes W \\ V \otimes W \arrow[ur, "\mathrm{id}_{V \otimes W}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ. Aus der Eindeutigkeit der Abbildung $\eta_\otimes$ folgt damit $\tilde{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}_{V \otimes W}$, und nach Lemma 1.1.5 ist τ injektiv.

Eine analoge Überlegung zeigt, dass τ surjektiv, also insgesamt bijektiv ist.

Die Teile b) und c) zeigt man genauso.

Das Ergebnis dieser Aufgabe gilt allgemein für Strukturen, die mit Hilfe einer universellen Eigenschaft konstruiert werden; sie sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Beispiele hierfür sind *Quotientenvektorräume* (vgl. 2.2.7) und *Quotientenkörper* (siehe [W], Abschnitt 3.1.5), weiterhin *Produkte*, *Coprodukte* sowie *Pullbacks* und *Pushouts* in einer beliebigen *Kategorie*, vgl. [L], Chapter I,§7 oder ausführlicher [Schu], insbesondere die Abschnitte 7.3, 7.8, 8.3 und 8.8.

6.4 Multilineare Algebra

1. Wir wählen Basen $(v_i^{(j)})_{i\in I_j}$ von V_j für $j=1,\ldots,k$ und betrachten den K-Vektorraum

$$\begin{aligned} V_1\otimes\ldots\otimes V_k \ := \ \{&\tau\in \mathrm{Abb}(I_1\times\ldots\times I_k,K)\colon\ \tau(i_1,\ldots,i_k)\neq 0\\ &\text{für nur endlich viele } (i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\ldots\times I_k\}\,. \end{aligned}$$

Es sei

$$v_{i_1}^{(1)}\otimes\ldots\otimes v_{i_k}^{(k)}(\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_k):=\begin{cases}1, & \text{falls } (i_1,\ldots,i_k)=(\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_k),\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Mit denselben Argumenten wie im Beweis von Theorem 6.3.3 bilden die $v_{i_1}^{(1)}\otimes\ldots\otimes v_{i_k}^{(k)}$ eine Basis für $V_1\otimes\ldots\otimes V_k$. Die Abbildung η wird definiert durch

$$\eta\left(v_{i_1}^{(1)},\ldots,v_{i_k}^{(k)}\right):=v_{i_1}^{(1)}\otimes\ldots\otimes v_{i_k}^{(k)}\,.$$

Analog zu Bemerkung 6.3.2 gilt:

Seien $V_1,\ldots,V_k$ Vektorräume über K mit Basen $(v_i^{(j)})_{i\in I_j}$ für $j=1,\ldots,k$. Ist U ein weiterer K-Vektorraum, so gibt es zu einer beliebig vorgegebenen Familie

$$(u_{i_1\cdots i_k})_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\ldots\times I_k}$$

in U genau eine multilineare Abbildung

$$\xi\colon\ V_1\times\ldots\times V_k\to U \quad \text{mit} \quad \xi(v_{i_1}^{(1)},\ldots,v_{i_k}^{(k)})=(u_{i_1\cdots i_k})_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\ldots\times I_k}$$

für alle $(i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\ldots\times I_k$.

Der *Beweis* verläuft völlig analog zu dem von Bemerkung 6.3.2, nur dass die Indizes komplizierter werden; er sei hier ausgelassen. Auch die Argumentation bezüglich der universellen Eigenschaft ist analog zum Beweis von Theorem 6.3.3. Der Zusatz bzgl. der Dimension ist ohnehin klar.

2. Wir zeigen, dass durch die Zuordnung

$$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\to V_1\otimes V_2\otimes V_3\,,\quad (v_1\otimes v_2)\otimes v_3\mapsto v_1\otimes v_2\otimes v_3\,,$$

in eindeutiger Weise ein Isomorphismus von K-Vektorräumen definiert wird. Die zweite Aussage folgt analog.

Für jedes $v_3\in V_3$ betrachten wir die nach Bemerkung 6.3.2 eindeutige bilineare Abbildung f_{v_3}, die definiert wird durch

$$V_1\times V_2\to V_1\otimes V_2\otimes V_3\,,\quad (v_1,v_2)\mapsto v_1\otimes v_2\otimes v_3\,.$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes existiert eine eindeutige lineare Abbildung

$$f_{v_3\otimes}\colon\ V_1\otimes V_2\to V_1\otimes V_2\otimes V_3\,,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[rr, "f_{v_3}"] \arrow[dr, "\eta"'] & & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ & V_1 \otimes V_2 \arrow[ur, "f_{v_3 \otimes}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir betrachten nun die nach Bemerkung 6.3.2 eindeutig bestimmte bilineare Abbildung g, die definiert ist durch

$$(V_1 \otimes V_2) \times V_3 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3\,, \quad (v_1 \otimes v_2, v_3) \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 = f_{v_3 \otimes}(v_1 \otimes v_2)\,.$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts existiert eine eindeutige lineare Abbildung $g_\otimes$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\eta"'] & & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \arrow[ur, "g_\otimes"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Abbildung $g_\otimes$ ist nach obigen Ausführungen eindeutig bestimmt, nach Konstruktion erfüllt sie die Voraussetzung

$$g_\otimes((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3\,.$$

$g_\otimes$ ist aus demselben Grunde bijektiv wie $\chi_\otimes$ in Aufgabe 5 zu 6.3. Damit ist $g_\otimes$ ein Isomorphismus.

Analog konstruiert man den kanonischen Isomorphismus

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3\,.$$

Von den verbleibenden Aussagen zeigen wir, dass $\mathrm{Bil}\,(V_1 \otimes V_2, V_3; W)$ und $\mathrm{Tril}\,(V_1, V_2, V_3; W)$ kanonisch isomorph sind; der Rest folgt analog.

Da $(V_1 \times V_2) \times V_3$ und $V_1 \times V_2 \times V_3$ kanonisch isomorph sind, wählen wir zunächst die Abbildung χ, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \times V_3 \cong (V_1 \times V_2) \times V_3 \arrow[d, "\eta \times \mathrm{id}_{V_3}"] \arrow[d, phantom, ""] \\ (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \end{tikzcd}$$

mit $\chi \colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \times V_3$

kommutativ macht. Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V_1\otimes V_2)\times V_3 \arrow[dr, "f'"] \arrow[ddr, "\eta'"'] & & V_1\times V_2\times V_3 \arrow[ll, "\chi"'] \arrow[dl, "f"'] \arrow[ddl, "\eta"] \\
& W & \\
& (V_1\otimes V_2)\otimes V_3 = V_1\otimes V_2\otimes V_3 \arrow[u, "f_\otimes"'] &
\end{tikzcd}$$

und definieren eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcll}\varphi\colon\ \mathrm{Tril}\,(V_1,V_2,V_3;W) & \to & \mathrm{Bil}\,(V_1\otimes V_2,V_3;W) & \text{durch}\\ f & \mapsto & f_\otimes\circ\eta'\,. & \end{array}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Abbildung $f_\otimes$ ist φ wohldefiniert, und durch die lineare Abbildung

$$\varphi'\colon\ \mathrm{Bil}\,(V_1\otimes V_2,V_3;W)\to \mathrm{Tril}\,(V_1,V_2,V_3;W)\quad \text{mit}\quad f'\mapsto f'\circ\chi$$

wird wegen $\eta'\circ\chi=\eta$ die Umkehrabbildung zu φ definiert.

3. Wie man mit Hilfe der Ausführungen zu Theorem 6.4.2 erkennt, ist die Konstruktion des k-fachen äußeren Produktes völlig analog zu der des zweifachen äußeren Produktes. Von den k-spaltigen Minoren der Matrix A gibt es nach 3.3.7 genau $\binom{n}{k}$ Stück, also ist die Zuordnung ξ eine vernünftige alternierende Abbildung.

Da die Konstruktion des k-fachen äußeren Produktes ansonsten auch analog zur Konstruktion des k-fachen symmetrischen Produktes verläuft, verweisen wir für weitere Einzelheiten auf Aufgabe 5.

4. a) „$\Rightarrow$“: Da die Abbildung $\wedge$ alternierend ist, gilt für alle $(v_1,\ldots,v_k)\in V^k$, für die ein $i\neq j$ mit $v_i=v_j$ existiert, $\wedge(v_1,\ldots,v_k)=0$.

Ist $(v_1,\ldots,v_k)\in V^k$ mit linear abhängigen v_i, so sei ohne Einschränkung $v_k\in\mathrm{span}\,(v_1,\ldots,v_{k-1})$, also existieren $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}\in K$ mit

$$v_k=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i v_i\,.$$

Aus der Multilinearität von $\wedge$ folgt damit

$$\begin{aligned}\wedge(v_1,\ldots v_k) &= \wedge(v_1,\ldots,v_{k-1},\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i v_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\cdot\wedge(v_1,\ldots,v_{k-1},v_i)=0\,.\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Seien $v_1,\ldots,v_k\in V$ linear unabhängig. Wir ergänzen sie zu einer Basis $(v_i)_{i\in I}$ von V mit $1,\ldots,k\in I$ und definieren eine multilineare Abbildung

$\xi\colon\ V^k \to K$ durch

$$\xi(w_1,\ldots,w_k) := \det\begin{pmatrix}\lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_k^{(1)}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{(k)} & \cdots & \lambda_k^{(k)}\end{pmatrix},$$

wobei

$$w_j = \sum_{i\in I}\lambda_i^{(j)} v_i \quad \text{für } j = 1,\ldots,k\,.$$

Dann ist ξ alternierend, und es gilt

$$\xi_\wedge(v_1\wedge\ldots\wedge v_k) = \xi(v_1,\ldots,v_k) = 1 \neq 0\,,$$

woraus $v_1\wedge\ldots\wedge v_k \neq 0$ folgt.

b) Im Fall $k > \dim V$ sind in jedem n-Tupel $(v_1,\ldots,v_k)\in V^k$ die Vektoren v_i linear abhängig (vgl. Satz 1.5.2). Daraus folgt nach Teil a) $\wedge(V^k) = 0$, und wegen $\bigwedge^k V = \operatorname{span}\big(\wedge(V^k)\big)$ folgt $\bigwedge^k V = 0$.

5. Analog zu Aufgabe 7 zu Abschnitt 6.3 definieren wir

$$\bigvee^k V := V^k/S^k(V)\,,$$

wobei $S^k(V)$ in 6.4.2 definiert wurde, und bezeichnen mit $\rho\colon\ \bigotimes^k V \to \bigvee^k V$ die Quotientenabbildung.

Nun erklären wir $\vee := \rho\circ\eta$, d.h. für alle $(v_1,\ldots,v_k)\in V^k$ ist

$$v_1\vee\ldots\vee v_k := \vee(v_1,\ldots,v_k) = \eta\circ\rho(v_1,\ldots,v_k) = \rho(v_1\otimes\ldots\otimes v_k)\,.$$

Aufgrund der Multilinearität von η und der Linearität von ρ ist $\vee$ multilinear, und wegen $S^k(V)\subset \operatorname{Ker}\vee_\otimes = \operatorname{Ker}\rho$ ist $\vee$ nach Lemma 6.4.2 symmetrisch.

Die universelle Eigenschaft erarbeiten wir mittels des folgenden Diagramms.

$$\begin{tikzcd}
V^k \arrow[dd, "\vee"'] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[drr, "\xi"] & & \\
 & \bigotimes^k V \arrow[r, "\xi_\otimes"] \arrow[dl, "\rho"] & W \\
\bigvee^k V \arrow[urr, "\xi_\vee"'] & &
\end{tikzcd}$$

Wie in Aufgabe 7 zu 6.3 folgt die Existenz eines eindeutigen linearen $\xi_\otimes$ aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes, und wegen der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes gibt es damit ein eindeutiges lineares $\xi_\vee$. Es folgt $\xi = \xi_\vee\circ\vee$, d.h. $\xi_\vee(v_1\vee\ldots\vee v_k) = \xi(v_1,\ldots,v_k)$ für alle $(v_1,\ldots,v_k)\in V^k$.

Nun kommen wir zum Beweis der Behauptung über die Basis. Wie am Ende der Lösung zu Aufgabe 7 in 6.3 bemerkt, ist die dort für $k = 2$ durchgeführte Konstruktion verallgemeinerungsfähig. Nach Theorem 6.4.1 sind die Tensoren $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k}$ mit $1 \leqslant i_j \leqslant n$ eine Basis von $\bigotimes^k V$. Daher erzeugen die Produkte

$$v_{i_1} \vee \ldots \vee v_{i_k} \quad \text{mit } 1 \leqslant i_j \leqslant n$$

den Raum $\bigvee^k V$. Aus der Symmetrie von $\vee$ folgt allerdings, dass bereits die Produkte

$$v_{i_1} \vee \ldots \vee v_{i_k} \quad \text{mit } 1 \leqslant i_i \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$$

den Raum $\bigvee^k V$ erzeugen. Es genügt also, deren lineare Unabhängigkeit zu zeigen.

Dazu betrachten wir den Vektorraum $W = K^N$ mit $N = \binom{n+k-1}{k}$ und bezeichnen seine kanonische Basis mit

$$(e_{i_1 \cdots i_k})_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} \,.$$

Genauso wie für das zweifache symmetrische Produkt konstruieren wir eine Abbildung $\xi\colon\ V^k \to K^N$, so dass $\xi_\vee$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Das geht so: Für Vektoren $w_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} v_j$ aus V für $i = 1, \ldots, k$ bezeichnen wir

$$a_{i_1 \cdots i_k} := \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_k} \lambda_{1\sigma(i_1)} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k\sigma(i_k)} \quad \text{mit } 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$$

und definieren durch

$$\xi(w_1, \ldots w_k) := \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_k} \cdot e_{i_1 \cdots i_k}$$

eine symmetrische Abbildung. Aus der universellen Eigenschaft folgt

$$\xi_\vee(v_{i_1} \vee \ldots \vee v_{i_k}) = \xi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) = e_{i_1 \cdots i_k}\,,$$

und da die $e_{i_1 \cdots i_k}$ linear unabhängig in K^N sind, folgt die lineare Unabhängigkeit der $v_{i_1} \vee \ldots \vee v_{i_k}$ in $\bigvee^k V$. Wie bereits zuvor ist die so erhaltene Abbildung $\xi_\vee\colon\ \bigvee^k V \to K^N$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

6. Es ist zu zeigen, dass durch die angegebene Zuordnung in eindeutiger Weise eine lineare Abbildung definiert wird. Der Rest ist dann offensichtlich, da nach der Lösung zu Aufgabe 3 von Abschnitt 1.5 die Polynome $t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_k}$ eine Vektorraumbasis von $K[t_1, \ldots, t_n]_{(k)}$ bilden. Insbesondere gilt hiernach

$$\dim K[t_1, \ldots, t_n]_{(k)} = \binom{n+k-1}{k} = \dim \bigvee^k K^n\,,$$

also wissen wir bereits, dass ein Isomorphismus zwischen den beiden Vektorräumen existiert. Es ist jedoch keineswegs klar, dass er auf diese kanonische Art gegeben werden kann.

Wir betrachten nun die eindeutige multilineare Abbildung ξ, die durch die Zuordnung

$$(K^n)^k \to K[t_1,\ldots,t_n]_{(k)}, \quad (e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) \mapsto t_{i_1}\cdot\ldots\cdot t_{i_k},$$

definiert wird. Aufgrund der Kommutativität von $K[t_1,\ldots,t_n]_{(k)}$ ist ξ symmetrisch. Daher existiert eine eindeutige lineare Abbildung

$$\xi_\vee\colon\ \bigvee^k K^n \to K[t_1,\ldots,t_n]_{(k)},$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(K^n)^k \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\vee"'] & & K[t_1,\ldots,t_n]_{(k)} \\
& \bigvee^k K^n \arrow[ur, "\xi_\vee"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dies ist genau die gesuchte Abbildung.

7. a) Es sei $\beta = (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_l) \in \bigwedge^l V$. Durch

$$\mu_\beta\colon\ V^k \to \bigwedge^{k+l} V, \quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \mapsto \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \wedge \beta,$$

wird eine eindeutige multilineare Abbildung definiert, also existiert nach der universellen Eigenschaft des äußeren Produktes ein eindeutiges

$$\eta_\beta \in \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k V, \bigwedge^{k+l} V\right),$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V^k \arrow[r, "\mu_\beta"] \arrow[d, "\wedge"'] & \bigwedge^{k+l} V \\
\bigwedge^k V \arrow[ur, "\eta_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Durch die Zuordnung $(\beta_1,\ldots,\beta_l) \mapsto \eta_\beta$ wird eine eindeutige multilineare und alternierende Abbildung

$$\lambda\colon\ V^l \to \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k V, \bigwedge^{k+l} V\right)$$

definiert. Nach der universellen Eigenschaft des äußeren Produktes existiert eine eindeutige lineare Abbildung

$$\bar\lambda\colon\ \bigwedge^l V \to \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k V, \bigwedge^{k+l} V\right),$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V^l \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\wedge"'] & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k V, \bigwedge^{k+l} V\right) \\ \bigwedge^l V \arrow[ur, "\bar{\lambda}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definieren wir $\mu: \bigwedge^k V \times \bigwedge^l V \to \bigwedge^{k+l} V$ durch

$$\mu(\alpha,\beta) := \bar{\lambda}(\beta)(\alpha) = \eta_\beta(\alpha),$$

so ist μ nach Konstruktion bilinear und eindeutig bestimmt.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_l \\ &= -\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \beta_1 \wedge \alpha_k \wedge \ldots \wedge \beta_l \\ &= \ldots = (-1)^l \cdot \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1} \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_l \wedge \alpha_k \\ &= (-1)^{2l} \cdot \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-2} \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_l \wedge \alpha_{k-1} \wedge \alpha_k \\ &= \ldots = (-1)^{k \cdot l} \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_l \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k . \end{aligned}$$

8. a) Die Injektivität der linearen Abbildungen b' und b'' zu einer Bilinearform b (vgl. 6.2.1) lässt sich so ausdrücken, dass für jedes $0 \neq v \in V$ ein $w \in W$ existiert, so dass $b(v,w) \neq 0$ gilt, und für jedes $0 \neq w \in W$ ein $v \in V$ existiert, so dass $b(v,w) \neq 0$ gilt. Diese Eigenschaft wollen wir im Folgenden benutzen.

i) Wir betrachten zunächst ein $0 \neq \alpha \in \bigwedge^k V$ der Form $\alpha = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig; wir ergänzen sie zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und definieren

$$\beta := v_{k+1} \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge^{n-k} V .$$

Es gilt $\alpha \wedge \beta \neq 0$, da die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und daher linear unabhängig sind.

Nun sei ein $\tilde{\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \in \bigwedge^k V$ mit $\alpha_i = v_{i1} \wedge \ldots \wedge v_{ik}$ und $\alpha_1 \neq 0$ gegeben. Falls ein α_i mit $v_{ij} \in \mathrm{span}\,(v_{11}, \ldots, v_{1k})$ existiert, so gibt es nach analogen Aussagen zu den Rechenregeln aus 6.3.8 sowie Aufgabe 4 a) ein $\lambda \in K$ mit $\alpha_i = \lambda \cdot \alpha_1$.

Wir können daher annehmen, dass

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$$

mit $\alpha = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$, und für alle $i = 1, \ldots, r$ existiert ein v_{ij} mit $v_{ij} \notin \mathrm{span}\,(v_1, \ldots, v_k)$. Wählen wir für α ein $\beta \in \bigwedge^{n-k} V$ wie bereits oben, so folgt

mit Aufgabe 4 a)
$$\tilde{\alpha} \wedge \beta = \alpha \wedge \beta \neq 0\,.$$
Die Behauptung für ein $\beta \neq 0$ zeigt man analog.

ii) Es genügt nach einer analogen Argumentation wie in Teil i), die Behauptung für Vektoren der Form $v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge^k V$ zu zeigen.

Wir wählen dazu ein $v \neq 0$ der obigen Form. Dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig und können zu einer Basis $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ergänzt werden. Mit $\mathscr{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ bezeichnen wir die duale Basis von $\mathscr{B}$. Wählen wir
$$\varphi := v_1^* \wedge \ldots \wedge v_k^* \in \bigwedge^k V^*\,,$$
so folgt
$$\det \varphi(v) = \det \begin{pmatrix} v_1^*(v_1) & \cdots & v_1^*(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ v_k^*(v_1) & \cdots & v_k^*(v_k) \end{pmatrix} = \det E_n = 1 \neq 0\,.$$
Der zweite Teil der Behauptung folgt wegen $V^{**} \cong V$ durch Dualisierung.

b) Aus Teil a) ii) zusammen mit Satz 6.2.1 erhalten wir
$$\bigwedge^k V^* \cong \left(\bigwedge^k V\right)^*,$$
dies ist i). Ferner gilt nach Teil a) i) mit Satz 6.2.1
$$\bigwedge^k V \cong \left(\bigwedge^{n-k} V\right)^*,$$
also zusammen mit i)
$$\bigwedge^k V \cong \left(\bigwedge^{n-k} V\right)^* \cong \bigwedge^{n-k} V^*\,,$$
das zeigt ii).

9. Analog zu Aufgabe 2 zu 6.3 zeigt man, dass $\mathrm{Alt}^k(V;W) \subset \mathrm{Abb}\,(V^k, W)$ ein Untervektorraum ist. Dies folgt mit einer kurzen Rechnung, die wir hier auslassen.

Auch der Nachweis, dass die kanonische Abbildung
$$\varphi\colon\ \mathrm{Alt}^k(V;W) \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^k V, W)\,, \quad \xi \mapsto \xi_\wedge\,,$$
ein Isomorphismus ist, verläuft wie in Aufgabe 2 zu 6.3. Wie bereits dort sollte allerdings beachtet werden, dass die Wohldefiniertheit einer Abbildung auf Restklassen keineswegs klar ist.

Mit Hilfe von Aufgabe 8 a) i) folgt, dass $(\bigwedge^k V)^*$ und $\bigwedge^k V^*$ kanonisch isomorph sind. Damit können wir im Fall $W = K$ die kanonische Abbildung φ als Abbildung
$$\varphi\colon\ \mathrm{Alt}^k(V, K) \to \bigwedge^k V^*$$
auffassen, d.h. eine alternierende Abbildung $\xi\colon\ V^k \to K$, auch *alternierende k-Form* genannt, kann mit dem Element $\varphi(\xi) \in \bigwedge^k V^*$ identifiziert werden.

Auf diese Art werden z.B. in [Fo3], §19 *Differentialformen höherer Ordnung* eingeführt, indem für $K=\mathbb{R}$ mit $V=T_p(U)$ der Tangentialraum im Punkt $p\in U$ einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gewählt wird.

Mit Hilfe von Differentialformen kann der Integralbegriff auf Mannigfaltigkeiten erweitert werden. Als Höhepunkt erhält man den allgemeinen Stokesschen Integralsatz, der als Spezialfälle den Gaußschen Integralsatz und den klassischen Stokesschen Integralsatz enthält. Zu Einzelheiten siehe [Fo3], §18–21 oder [C-B], Chapter IV.

Lösungen der Ergänzungsaufgaben

E1. a) Wir zeigen die zu Beginn der Aufgabe notierten Zusammenhänge (1) und (2).

Zu (1):

$$\begin{aligned}
&\big(g(\xi(f_1,\ldots,f_k))\big)(u_1,\ldots,\lambda\cdot u_i,\ldots,u_k)\\
=\ & g(\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(\lambda\cdot u_i),\ldots,f_k(u_k)))\\
\overset{f_i\,\text{lin.}}{=}\ & g(\xi(f_1(u_1),\ldots,\lambda\cdot f_i(u_i),\ldots,f_k(u_k)))\\
\overset{\xi\,\text{multilin.}}{=}\ & g(\lambda\cdot\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(u_i),\ldots,f_k(u_k)))\\
\overset{g\,\text{lin.}}{=}\ & \lambda\cdot g(\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(u_i),\ldots,f_k(u_k)))\,.
\end{aligned}$$

Zu (2):

$$\begin{aligned}
&\big(g(\xi(f_1,\ldots,f_k))\big)(u_1,\ldots,u_i+u_i^*,\ldots,u_k)\\
=\ & g(\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(u_i+u_i^*),\ldots,f_k(u_k)))\\
\overset{f_i\,\text{lin.}}{=}\ & g(\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(u_i)+f_i(u_i^*),\ldots,f_k(u_k)))\\
\overset{\xi\,\text{multilin.}}{=}\ & g\big(\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(u_i),\ldots,f_k(u_k))\\
& +\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(u_i^*),\ldots,f_k(u_k))\big)\\
\overset{g\,\text{lin.}}{=}\ & g\big(\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(u_i),\ldots,f_k(u_k))\big)\\
& +g\big(\xi(f_1(u_1),\ldots,f_i(u_i^*),\ldots,f_k(u_k))\big).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

b) Es seien $(v_1,\ldots,v_r)\in V_1\times\ldots\times V_r$ und $(v_{r+1},\ldots,v_k)\in V_{r+1}\times\ldots\times V_k$. Ferner seien

$$\xi_1(v_1,\ldots,v_i+v_i^*,\ldots,v_r)\in W_1 \quad\text{und}\quad \xi_2(v_{r+1},\ldots,v_k)\in W_2\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\xi\left(\xi_1(v_1,\ldots,v_i+v_i^*,\ldots,v_r),\xi_2(v_{r+1},\ldots,v_k)\right)\\
\overset{\xi_1\,\text{multilin.}}{=}\ & \xi\left(\xi_1(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r)+\xi_1(v_1,\ldots,v_i^*,\ldots,v_r),\xi_2(v_{r+1},\ldots,v_k)\right)\\
\overset{\xi\,\text{multilin.}}{=}\ & \xi\left(\xi_1(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r),\xi_2(v_{r+1},\ldots,v_k)\right)\\
& +\xi\left(\xi_1(v_1,\ldots,v_i^*,\ldots,v_r),\xi_2(v_{r+1},\ldots,v_k)\right).
\end{aligned}$$

Analog verläuft die Rechnung für $(v_{r+1},\ldots,v_i+v_i^*,\ldots,v_k)\in V_{r+1}\times\ldots\times V_k$ und ξ_2.

Damit ist die Bedingung (2) bewiesen. (1) lässt sich analog zu Teil a) nachweisen.

E2. a) Zu Bedingung (1) von multilinearen Abbildungen: Wir bezeichnen $V:=V_1\times\ldots\times V_{i-1}\times V_{i+1}\times\ldots\times V_k$, und es seien $v\in V_i$ für $1\leqslant i\leqslant k$ beliebig, $(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k)\in V$.

Für ein beliebiges $\lambda\in K$ und $j<i$ folgt

$$\begin{aligned}
&\xi_{(i,v)}(v_1,\ldots,\lambda\cdot v_j,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k)\\
=\;&\xi(v_1,\ldots,\lambda\cdot v_j,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_k)\\
\overset{\xi\text{ multilin.}}{=}\;&\lambda\cdot\xi(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_k)\\
=\;&\lambda\cdot\xi_{(i,v)}(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k)\,.
\end{aligned}$$

Analog verläuft die Berechnung für $j>i$.

Bei dem Beweis der Bedingung (2) wird die Multilinearität der Abbildung ξ analog berücksichtigt.

b) $\xi_{(i,v)}=0$ bedeutet, dass es sich bei Nullabbildung handelt, d.h. es gilt

$$\xi_{(i,v)}=0\iff\xi(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_k)=0\quad\forall v_j\in V_j\quad\text{mit } j\neq i\,.$$

Da $\xi_{(i,l)}$ eine multilineare Abbildung ist, ist sie für festes

$$(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k)\in V_1\times\ldots\times V_{i-1}\times V_{i+1}\times\ldots\times V_k$$

eine lineare Abbildung $V_i\to W$. Daher ist für $v,w\in V_i^0$

$$\xi_{(i,\lambda\cdot(v+w))}=0\iff\xi(v_1,\ldots,v_{i-1},\lambda\cdot(v+w),v_{i+1},\ldots,v_k)=0$$

Mithilfe der Rechenregeln für Vektorräume folgt

$$\begin{aligned}
&\xi(v_1,\ldots,v_{i-1},\lambda\cdot(v+w),v_{i+1},\ldots,v_k)\\
=\;&\lambda\cdot\xi(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_k)+\lambda\cdot\xi(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_k)\,.
\end{aligned}$$

Daher gilt $\xi_{(i,\lambda\cdot(v+w))}=0$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\xi(v_1,\ldots,v_{i-1},\lambda\cdot(v+w),v_{i+1},\ldots,v_k)=\\
&\lambda\cdot\xi(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_k)+\lambda\cdot\xi(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_k)=0
\end{aligned}$$

$\iff\lambda\cdot\xi_{(i,v)}+\lambda\cdot\xi_{(i,w)}=0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

c) Die Linearität der Abbildung und ihre Surjektivität ergeben sich direkt aus Teil a).

Es sei $\xi\in\ker(\eta)$ Dann gilt für alle $v\in V_i$:

$$\xi_{(i,v)}(\tilde v)=0\quad\text{für alle }\tilde v\in V_1\times\ldots\times V_{i-1}\times V_{i+1}\times\ldots\times V_n\,.$$

Damit ist $\xi_{(i,v)}$ eine Nullabbildung für alle $v\in V_i$, und damit folgt $\xi(w)=0$ für alle $w\in V_1\times\ldots\times V_k$.

E3. a) Setzen wir $e_i = v_j^j \cdot e'_j$ in Gleichung 6.1 ein, so folgt

$$e'_j = v'^i_j \cdot e_i = v'^i_j \cdot (v^j_i \cdot e'_j) = (v'^i_j \cdot v^j_i) \cdot e'_j\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

b) Setzt man die Gleichungen (6.3) und (6.4) in Gleichung (6.5) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} T &= T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \\ &= T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} v^{k_1}_{i_1} \cdot e'_{k_1} \otimes \ldots \otimes v^{k_p}_{i_p} e'_{k_p} \otimes v'^{j_1}_{l_1} \cdot e'^{l_1} \otimes \ldots \otimes v'^{j_q}_{l_q} \cdot e'^{l_q} \\ &= v^{k_1}_{i_1} v'^{j_1}_{l_1} \cdot \ldots \cdot v'^{j_k} \cdot T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \cdot e'_{k_1} \otimes \ldots \otimes e'_{k_p} \otimes e'^{l_1} \otimes \ldots \otimes e'^{l_q} \\ &= T'^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q} \cdot e'^{l_1} \otimes \ldots \otimes e'^{l_q}\,. \end{aligned}$$

Die Transformationsformel ist daher

$$T'^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q} = v^{k_1}_{i_1} v^{k_2}_{i_2} \cdot \ldots \cdot v^{k_p}_{i_p} \cdot v'^{j_1}_{l_1} \cdot v'^{j_2}_{l_2} \cdot v'^{j_q}_{l_q} \cdot T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\,. \qquad \circledast$$

c) Es handelt sich um einen kontravarianten Tensor, daher ist in Gleichung $\circledast$ aus Teil b) $q = 0$. Damit ergibt sich

$$T'^{k_1\cdots k_p} = \frac{\partial x'^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x'^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot T^{i_1\cdots i_p}\,.$$

Mit $T'^k = \frac{dx'^k}{dt}$ und $T^i = \frac{dx^i}{dt}$ ergibt sich $T'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \cdot T^i$.

d) Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x'^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\,.$$

Für einen kovarianten Tensor ergibt sich nach Gleichung $\circledast$ mit $p = 0$

$$T'_{l_1\cdots l_q} = v'^{j_1}_{l_1} \cdot v'^{j_2}_{l_2} \cdot v'^{j_q}_{l_q} \cdot T_{j_1\cdots j_q}\,.$$

Setzt man $T'_i = \frac{\partial f}{\partial x'^i}$, $T_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$ und $v'^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}$, so ergibt sich die Gleichung der Geschwindigkeit.

Literaturverzeichnis

[A-M] L. Auslander und R.E. MacKenzie: *Introduction to Differentiable Manifolds*. Dover Publications, Inc. 1977.

[Ar] M.A. Armstrong: *Basic Topology*. Springer 1983.

[Arn] V.I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer 1978.

[A-Z] M. Aigner und G.M. Ziegler: *Das Buch der Beweise*, 4. Auflage. Springer Spektrum 2015.

[B] A. Bartholomé et al: *Zahlentheorie für Einsteiger*, 7. Auflage. Vieweg+Teubner 2010.

[Ba] H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter 1990.

[Be] E. Behrends: *Introduction to Markov Chains*. Vieweg 2000.

[B-F1] M. Barner und F. Flohr: *Analysis I*. Walter de Gruyter 1974.

[B-F2] M. Barner und F. Flohr: *Analysis II*. Walter de Gruyter 1982.

[B-M] R. Braun und R. Meise: *Analysis mit Maple*, 2. Auflage. Vieweg+Teubner 2012.

[B-S] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik,* 23. Auflage. Verlag Harri Deutsch 1987.

[C-B] Y. Choquet-Bruhat und C. DeWitt-Morette: *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland 1977.

[C-H] R. Courant und D. Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, 4. Auflage. Springer 1993.

[C-V] C.O. Christenson und W.L. Voxman: *Aspects of Topology*. Marcel Dekker, Inc. 1977.

[E] H.D. Ebbinghaus et al: *Zahlen*, 3. Auflage. Springer 1992.

[Enz] H.M. Enzensberger: *Der Zahlenteufel*. Hanser 1997.

[F-H] W. Fulton und J. Harris: *Representation Theory: A First Course*. Springer 2004.

[Fi1] G. Fischer: *Lineare Algebra*, 18. Auflage. Springer Spektrum 2014.

[Fi2] G. Fischer: *Ebene algebraische Kurven*. Vieweg 1994.

[Fi3] G. Fischer: *Analytische Geometrie*, 7. Auflage. Vieweg 2001.

[Fi4] G. Fischer: *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, 2. Auflage. Springer Spektrum 2012.

[Fo1] O. Forster: *Analysis 1*, 12. Auflage. Springer Spektrum 2016.

[Fo2] O. Forster: *Analysis 2*, 10. Auflage. Springer Spektrum 2013.

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4

[Fo3] O. Forster: *Analysis 3*, 7. Auflage. Springer Spektrum 2012.

[G] W. Greiner: *Mechanik, Teil 2*, 5. Auflage. Verlag Harri Deutsch 1989.

[Ha] J. Harris: *Algebraic Geometry: A First Course.* Springer 1992.

[Hä] O. Häggström: *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. Oxford University Press 2002.

[K-P] J. Kramer und A.-M. von Pippich: *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*. Springer Spektrum 2013.

[Ku1] E. Kunz: *Algebra*, 2. Auflage. Vieweg 1994.

[Ku2] E. Kunz: *Einführung in die algebraische Geometrie*. Vieweg 1997.

[L] S. Lang: *Algebra*, 2nd Edition. Addison-Wesley 1984.

[Li] S. Lipschutz: *Lineare Algebra*. McGraw-Hill 1977.

[Me] M.L. Mehta: *Random Matrices*, 2nd Edition. Academic Press 1991.

[M-V] R. Meise und D. Vogt: *Einführung in die Funktionalanalysis*, 2. Auflage. Vieweg+Teubner 2011.

[Ne] T. Needham. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press 1997.

[O] E. Ossa: *Topologie*, 2. Auflage. Vieweg+Teubner 2009.

[P] R.S. Pierce: *Associative Algebras*. Springer 1982.

[S1] H. Stoppel: *Mathematik anschaulich: Brückenkurs mit* MAPLE. Oldenbourg 2002.

[S2] H. Stoppel: `http://wwwmath.uni-muenster.de/42/de/institute/didaktik`.

[S3] H. Stoppel: *Stochstik und Statistik*. Aulis 2010.

[S4] H. Stoppel: *Algorithmen im Mathematikunterricht*. Vorlesung RUB WS 2004/05. Unter `http://wwwmath.uni-muenster.de/42/de/institute/didaktik/`

[Scha] W. Scharlau: *Schulwissen Mathematik: Ein Überblick*, 3. Auflage. Vieweg+Teubner 2001.

[Scho] M. Schottenloher: *Geometrie und Symmetrie in der Physik*. Vieweg 1995.

[Schu] H. Schubert: *Kategorien I*. Springer 1970.

[SG] H. Stoppel, B. Griese: `http://www.springer.com`.

[Sh] I.R. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry 1*, 3rd Edition. Springer 2007.

[St] I. Stewart: *Galois Theory*, 2nd Edition. Chapman and Hall 1989.

[Str] G. Strang: *Linear Algebra and its Applications*. Academic Press 1976.

[S-W] M. Schubert, G. Weber: *Quantentheorie*. Spektrum, Akademischer Verlag 1993.

[V] *Vieweg Mathematik Lexikon*, 2. Auflage. Vieweg 1993.

[W] J. Wolfart: *Einführung in die Zahlentheorie und Algebra*, 2. Auflage. Vieweg+Teubner 2011.

[We] A. Werner: *Elliptische Kurven in der Kryptographie*. Springer 2002.

Sachwortverzeichnis

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4

Symbolverzeichnis

$a := b$	a ist definiert durch b
$a \Rightarrow b$	aus a folgt b
$a \Leftrightarrow b$	a und b sind gleichwertig
$\emptyset$	leere Menge
$\in$	Element
$\subset$	Teilmenge
$\cup$	Vereinigung
$\cap$	Durchschnitt
$\setminus$	Differenzmenge
$\times$	direktes Produkt oder Vektorprodukt
$\to, \mapsto$	Abbildungspfeile
$\circ$	Komposition von Abbildungen
$\vert$	Beschränkung von Abbildungen
f^{-1}	Umkehrabbildung von f
$\sim$	äquivalent
$(x_i)_{i \in I}$	Familie
$\sum$	Summenzeichen
$\prod$	Produktzeichen
$+$	Summe
$\oplus$	direkte Summe
$\textcircled{\perp}$	orthogonale Summe
$\langle\ ,\ \rangle$	Skalarprodukt
$\Vert\ \Vert$	Norm
$\sphericalangle$	Winkel
d	Abstand

$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+$	nicht-negative reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+^*$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}^n$	reeller Standardraum
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	zyklische Gruppe
K^*	Elemente ungleich null
V^*	dualer Vektorraum
K^n	Standardraum
$K[t]$	Polynomring über K
$K[t_1, \ldots, t_n]$	Polynomring über K
$\mathbb{R}[t]_3$	Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 über $\mathbb{R}$
$R^\times$	Einheitengruppe
$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$	Ring der Gaußschen Zahlen
$\mathscr{K}$	kanonische Basis
e_i	kanonischer Basisvektor
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
$\mathscr{C}$	stetige Funktionen
$\mathscr{D}$	differenzierbare Funktionen
$\mathbf{A}_n$	alternierende Gruppe
$\mathbf{S}_n$	symmetrische Gruppe
$\mathrm{M}(m \times n; K)$	Matrizenring
$\mathrm{M}(n; K)$	Matrizenring $\mathrm{M}(n \times n; K)$
$\mathrm{GL}\,(n; K)$	allgemeine lineare Gruppe
$O(n)$	orthogonale Gruppe
$SO(n)$	spezielle orthogonale Gruppe
$U(n)$	unitäre Gruppe

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4

A^{-1}	inverse Matrix
$\mathrm{Alt}(n;K)$	alternierende Matrizen
${}^tA$	transponierte Matrix
$A^\sharp$	komplementäre Matrix
E_i^j	Basismatrix
E_n	n-reihige Einheitsmatrix
$M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}$	darstellende Matrix
$M_{\mathscr{B}}$	darstellende Matrix
$T_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}$	Transformationsmatrix
Q_i^j	Elementarmatrix
$Q_i^j(\lambda)$	Elementarmatrix
$S_i(\lambda)$	Elementarmatrix
$\mathrm{SL}(n;G)$	spezielle lineare Gruppe
$\mathrm{Sym}(n;K)$	symmetrische Matrizen
P_i^j	Elementarmatrix
$\Phi_{\mathscr{B}}$	Koordinatensystem
F_i^j	Basishomomorphismen
F^*	duale Abbildung
F^{ad}	adjungierte Abbildung
$\mathscr{I}_F$	Ideal von F
L^k	Multilineare Abbildung

Abb	Abbildungen
char	Charakteristik
deg	Grad
det	Determinante
dim	Dimension
Eig	Eigenraum
Fix	Fixpunktraum
Hau	Hauptraum
End	Endomorphismen
Hom	Homomorphismen
Im	Bild
Ker	Kern
L^k	multilineare Abbildungen
Lös	Lösungsmenge
$\mathbb{L}$	Lösungsmenge
rang	Rang
sign	Signum
Sp	Spur
span	aufgespannter Vektorraum

Verzeichnis der Ergänzungsaufgaben

Im Verlauf der Auflagen ist die Anzahl an Ergänzungsaufgaben auf 90 angestiegen. Die Aufgaben finden sich am Ende der Aufgaben des Abschnitts, ihre Lösungen an entsprechenden Stellen im Lösungsteil. Um einen Überblick zu erhalten, sind sie hier in einer Liste dargestellt. Dabei wurden auch Stichworte über die Inhalte und Bezüge zu anderen Bereichen der Mathematik notiert. Die erstmals in der neunten Auflage auftretenden Ergänzungsaufgaben sind kursiv gedruckt.

0 Lineare Gleichungssysteme

0.4 Das Eliminationsverfahren von Gauß

- **E1** bis **E10.** Lösung linearer Gleichungssysteme mit reellen Lösungen
- **E11** bis **E15.** Lösung linearer Gleichungssysteme mit komplexen und reellen Lösungen

0.5 Geraden und Quadratische Kurven im $\mathbb{R}^2$

Dieser Abschnitt wurde gegenüber [Fi1] ergänzt, um über Geraden hinaus einen kurzen Blick auf elementare geometrische Figuren zu werfen. Er lässt sich auch als Ausblick auf die Übungsaufgaben **E12** bis **E14** in Abschnitt 5.4 betrachten.

- **E1.** Geraden
- **E2.** Kreise
- **E3** und **E4.** Ellipsen
- **E5** und **E6.** Hyperbeln

1 Grundbegriffe

1.1 Mengen und Abbildungen

- **E1.** Mächtigkeit der Menge der Abbildungen zwischen Mengen

H. Stoppel und B. Griese, *Übungsbuch zur Linearen Algebra*,
Grundkurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-14522-4

1.2 Gruppen

- **E1.** Untersuchung von $m\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- ***E2.*** *Untergruppen*
- ***E3.*** *Vereinigung von Untergruppen, Produkt von Untergruppen*
- ***E4.*** *Kleinsche Vierergruppe, Gruppenprüfung*
- ***E5.*** *Gruppen mit vier Elementen, Gruppenprüfung*
- ***E6.*** *Drehung und Spiegelung, Permutation*
- ***E7*** *bis* ***E10.*** *Elliptische Kurven, Restklassen, Codierung und Kryptographie, Weierstraß-Kurven, Satz von Vieta, Singularität*

1.3 Ringe, Körper und Polynome

- **E1.** Eigenschaften des Polynomrings
- ***E2.*** *Charakteristik, Gruppennachweis, Integritätsring*
- ***E3.*** *Einheitengruppe, Nachweis der Ringeigenschaften*
- ***E4.*** *Ring der Gaußschen Zahlen, Komplexe Zahlen, Norm, Einheitengruppe*
- ***E5.*** *Ringnachweis, Einheitengruppe*

1.4 Vektorräume

- **E1.** Untersuchung von Untervektorräumen

1.6 Summen von Vektorräumen*

- **E1.** Untervektorräume

2 Lineare Abbildungen

2.2 Bild, Fasern und Kern, Quotientenvektorräume*

- **E1.** Potenzen von Matrizen unter Anwendung eines Computer-Algebra-Systems (CAS)

2.4 Lineare Abbildungen und Matrizen

- ***E1.*** *Polynome vom Grad 3, Vektorraum, Basis, Standardbasis, Darstellungsmatrix, Transformationsmatrix*

2.5 Multiplikation von Matrizen

- **E1.** Potenzen von Matrizen, Charakteristik
- **E2.** Symmetrische Matrizen
- **E3.** Multiplikation von Matrizen
- **E4.** Potenz von Matrizen

2.7 Elementarmatrizen und Matrizenumformungen

- **E1.** Untersuchung auf Invertierbarkeit, ggf. Inverse bestimmen
- **E2.** Umkehrung der Multiplikation von Matrizen mit Vektoren
- ***E3.*** *Anwendung von Polynomen auf Matrizen*
- ***E4.*** *Untervektorraum, differenzierbare & trigonometrische Funktion*
- ***E5.*** *Gruppe der Endomorphismen, Polynome*
- ***E6.*** *Satz von Cayley-Hamilton*
- ***E7*** *und* ***E8.*** *Anwendung von Polynomen auf Matrizen*

3 Determinanten

3.1 Beispiele und Definitionen

- **E1.** Mehrfache Nullstellen von Polynomen
- **E2.** Beziehung zwischen Polynom und Determinante

3.2 Existenz und Eindeutigkeit

- **E1.** Diskriminante
- ***E2*** *und* ***E3.*** *Möbius-Transformation, Determinante, spezielle lineare Gruppe und spezielle projektive Gruppe*

3.3 Minoren*

- **E1.** Komplementäre Matrix
- **E2.** Berechnung von Determinante

3.4 Determinante eines Endomorphismus und Orientierung*

- **E1.** Berechnung von Determinante

4 Eigenwerte

4.1 Beispiele und Definitionen

- **E1.** Markov-Ketten, Anwendung von CAS

4.2 Das charakteristische Polynom

- ***E1*** *und* ***E2.*** *Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren, Körper der reellen Zahlen, Körper der komplexen Zahlen*

4.3 Diagonalisierung

- **E1.** Rekursive Folge von Vektoren

4.6 Die Jordansche Normalform*

- **E1.** Matrizenauswahl zu Berechnungen

5 Euklidische und unitäre Vektorräume

5.4 Bilinearformen und Sesquilinearformen

- **E1.** Anwendung des Schmidtschen Verfahrens
- **E2.** Bestimmung von Orthonormalbasen
- **E3.** Nachweis eines Skalarprodukts
- **E4** bis **E6.** Spur
- **E7** bis **E11.** Lie-Algebra
- **E12** bis **E14.** Quadrik

5.5 Orthogonalität und unitäre Endomorphismen

- **E1.** Symmetrische Bilinearform

5.6 Selbstadjungierte Endomorphismen*

- **E1** und **E2.** Anti-selbstadjungierter Endomorphismus

5.7 Hauptachsentransformation*

- **E1.** Beweis ähnlich zum Orthonormalisierungssatz
- **E2.** Hermitescher Endomorphismus, Spur, Zufallsmatrix, Markov-Kette

6 Dualität*

6.2 Dualität und Skalarprodukte

- **E1.** Anti-selbstadjungierter Endomorphismus, normaler Endomorphismus
- **E2.** Anti-selbstadjungierter Endomorphismus, antihermitescher Endomorphismus

6.4 Multilineare Algebra*

- **E1** und **E2.** Nachweis multilinearer Abbildung
- **E3.** Transformationformel, 1-fach kontravarianter Tensor, 1-fach kovarianter Tensor, Einsteinsche Summenkonvention

Themenbereiche von Ergänzungsaufgaben

An einigen Stellen in den Ergänzungsaufgaben existieren Sequenzen von Aufgaben oder umfangreiche Aufgaben zu bestimmten Themen. Dies bezieht sich auf folgende Kapitel und Themen:

- 0.5 Geraden und quadratische Funktionen im $\mathbb{R}^2$:

  Überblick über Geraden, Kreise, Ellipsen und Hyperbeln

- 1.2 Gruppen:

  Elliptische Kurven von Seiten der Codierung und Kryptographie

- 3.2 Existenz und Eindeutigkeit:

  Möbius-Transformation

- 4.1 Beispiele und Definitionen, 5.7 Hauptachsentransformation (E2):

  Markov-Ketten, Zufallsmatrizen

- 5.4 Bilinearformen und Sesquilinearformen:

  Lie-Gruppen, Symmetrie mit Blick in Richtung Quantenmechanik, Quadrik

- 6.4 Multilineare Algebra:

  Tensoren mit Blick in Richtung Relativitätstheorie