Università degli Studi di Bologna **A.A. 2015/2016**
C.d.L. in Matematica **Corso di GEOMETRIA I**
Test di autovalutazione **3. 11. 2015**

Esercizio 1.

Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h-1 & 1 \\ 1 & h+1 & 2(h-1) & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di h.

b) Per $h = -1$ si determinino le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$, stabilendo se tra esse si possono trovare tre vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e siano v_1, v_2, v_3, v_4 i vettori colonna di A.

a) Si riduca la matrice A per righe e se ne calcoli il rango.

b) Si determinino i sottoinsiemi massimali di $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ costituiti da vettori linearmente indipendenti.

c) Si determini l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A.

Esercizio 3.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in M_3((\mathbb{R})).$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k é possibile risolvere l'equazione matriciale

$$XA + kX = B$$

e se per tali valori di k la matrice X é univocamente determinata.

Esercizio 4.

Si provino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $(AB)^t = B^t A^t$ (dove A^t indica la matrice trasposta di A).

b) Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, i sistemi lineari omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ sono equivalenti se e solo se le matrici A e B hanno lo stesso rango.

c) Dati due vettori u, v dello spazio tridimensionale applicati in un punto O e aventi direzioni diverse, tutti i vettori applicati in O e ortogonali contemporaneamente a u e v sono tra loro proporzionali.

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u_a = 2i + aj - k$, $v = i - j + 2k$, $w = i + j - 2k$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che u_a sia ortogonale ai vettori v e w?

b) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che i vettori $i, v, u_a \wedge w$ siano complanari?