CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 1
11 Luglio 2016

Nome e Cognome:	1	2	3	4	5	Σ
Matricola:						

1. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \mathbb{N}.$$

SOLUZIONE:

PASSO BASE:
Per $n = 0$ abbiamo $0 \in \mathbb{N}$.

PASSO DI INDUZIONE:

Supponiamo vera la proposizione per n e proviamola per $n+1$. Abbiamo

$$\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6} = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} + n^2 + 2n + 1$$

Per ipotesi induttiva $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \mathbb{N}$ e ovviamente $n^2 + 2n + 1 \in \mathbb{N}$, da cui segue che anche

$$\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \in \mathbb{N}.$$

2. Un postino sbadato consegna a caso 6 raccomandate a 6 destinatari. Qual è la probabilità che:

a. almeno uno riceva la propria;

b. esattamente 2 non ricevano la propria?

SOLUZIONE:

a. Il numero di casi favorevoli è dato dal numero di casi totali, 6!, da cui dobbiamo togliere il numero di casi in cui nessuno riceve la propria raccomandata, cioè il numero di permutazioni di 6 elementi senza punti fissi, $D_6 = \sum_{i=0}^{6} \frac{(-1)^i 6!}{i!}$:

$$6! - \sum_{i=0}^{6} \frac{(-1)^i 6!}{i!}.$$

Ora dobbiamo dividere questo numero per il numero di casi totali, ottenendo:

$$\frac{6! - \sum_{i=0}^{6} \frac{(-1)^i 6!}{i!}}{6!}.$$

b. Per trovare il numero di casi favorevoli dobbiamo solo scegliere i due che non ricevono la loro raccomandata. Questo puó essere fatto in $\binom{6}{2}$.

Ora dividiamo per il numero di casi totali,

$$\frac{\binom{6}{2}}{6!}.$$

3. Determinare:

i. il numero di divisori dispari di 1200;

ii. un intero con esattamente 18 divisori.

SOLUZIONE:

i. $1200 = 2^4 3 5^2$ quindi i divisori di 1200 dispari sono tutti i numeri della forma $3^a 5^b$ con a, b interi, $0 \leq a \leq 1$ e $0 \leq b \leq 2$. Dunque ci sono in tutto 6 di tali divisori.

ii. Possiamo prendere 2^{17}. Tale numero ha come divisori tutti i numeri della forma 2^a con a intero e $0 \leq a \leq 17$, cioè 18 divisori in totale.

4. Si considerino le seguenti permutazioni di S_8:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 1 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 8 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Calcolare il periodo ed il segno delle tre permutazioni.

b. Calcolare l'inversa di ciascuna permutazione.

c. Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo ciclico generato da β.

SOLUZIONE:

a.

$$\alpha = (13284)(576), \quad \beta = (17)(2365), \quad \gamma = (273)(485)$$

Siccome il segno di un prodotto di cicli è il prodotto dei segni e siccome il segno di un ciclo di lunghezza s è $(-1)^{s-1}$, abbiamo che il segno di α, β e γ è sempre 1.

b.

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 8 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 2 & 4 & 6 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. Siccome il periodo di β è 4 abbiamo che il sottogruppo generato da β conterrà id, β, β^2, β^3 e si avrà

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 2 & 4 & 6 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Sia
$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

a. Dimostrare che G è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$.

b. Dimostrare che la funzione $f : G \to \mathbb{R}^*$ definita da
$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) = a$$
è un omomorfismo del gruppo G nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$.

c. Determinare il nucleo $\ker(f)$.

SOLUZIONE:

a. G è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ infatti:
CHIUSURA:

Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a, c \neq 0$, allora
$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{bmatrix} \in G$$
perché $ac \neq 0$.
INVERSO:

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ cerchiamo c, d tali che
$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Quindi $c = 1/a$, $c \neq 0$ e $d = -b/a^2$.

b. $f : G \to \mathbb{R}^*$ è un omomorfismo di gruppi perché
$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = f\left(\begin{bmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{bmatrix} \right) = ac$$
e
$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) f\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = ac.$$

c.

$$\ker(f) = \{A \in G,\ \text{tali che } f(A) = 1\} = \{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; b \in \mathbb{R}\}.$$