

# Ciclo di una permutazione, l-ciclo

www.baudo.hol.es

June 13, 2017

## 1 DEFINIZIONE (1)

Per ciclo di una permutazione si intende il nome della notazione utilizzata per rappresentare una permutazione.

## 2 DEFINIZIONE (2)

Sia  $n$  un intero positivo. Si dice ciclo (o permutazione ciclica) ogni  $\sigma \in S_n$  per cui esistono un intero positivo  $l$  e  $a_1, \dots, a_l \in \{1, \dots, n\}$  a due a due distinti tali che

- $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_l) = a_1$ ;
- $\sigma(k) = k$  per ogni  $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$ .

Il numero  $l$  si dice lunghezza di  $\sigma$ . Una permutazione ciclica di lunghezza  $l$  si dice anche l-ciclo.

## 3 DEFINIZIONE (3)

Sia  $r$  un intero positivo,  $2 \leq r \leq n$  e siano dati  $r$  elementi distinti  $i_1, i_2, \dots, i_r \in X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Col simbolo  $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_r)$  si denoti la permutazione  $\gamma \in S_n$  tale che:

1.  $\gamma(i_k) = i_k$  se  $i_k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$
2.  $\gamma(i_k) = i_{k+1}$  se  $1 \leq k \leq r-1$
3.  $\gamma(i_r) = i_1$

Tale permutazione è detta ciclo di lunghezza  $r$ . Se il ciclo ha lunghezza 2 viene detto trasposizione o scambio.

### 3.1 NOTE

Il solo ciclo di lunghezza 1 è la permutazione identica.

Il ciclo di lunghezza 2 è detto trasposizione o scambio.

La scrittura ciclica di un l-ciclo non è unica. Se  $l > 1$ , il ciclo ammette esattamente  $l$  scritture cicliche distinte, ottenute tramite rotazioni successive degli indici verso sinistra.

## 4 NOTAZIONE

Un ciclo è una lista di indici fra parentesi, e conveniamo che rappresenti la permutazione che associa a ogni indice nel ciclo quello successivo.

## 5 ESEMPIO

Ad esempio, il ciclo

$$(12345)$$

rappresenta la permutazione che manda 1 in 2, 2 in 3 e così via fino a 5 in 1. Due cicli sono disgiunti se non hanno lettere in comune. Per esempio, (123) e (45) sono disgiunti, ma (123) e (124) no.

## 6 COMPOSIZIONE DI PERMUTAZIONI = PRODOTTO DI CICLI

Per scrivere la composizione di permutazioni rappresentate da cicli, basta scrivere i cicli di seguito.

Non è difficile calcolare la permutazione risultante da una composizione di cicli: basta, per ogni lettera, "seguire il suo destino" lungo i vari cicli. Per esempio,

$$(123)(135)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Come abbiamo fatto il conto? Cominciamo da 1: il primo ciclo manda 1 in 2, il secondo non tocca il 2, il terzo manda 2 in 4: concludiamo che i tre cicli mandano 1 in 4. Il primo ciclo manda 2 in 3, il secondo 3 in 5, e il terzo non tocca 5: concludiamo che i tre cicli mandano 2 in 5, e così via. Notate che alla fine del conto c'è un controllo di coerenza molto semplice: tutti i numeri nella seconda riga devono essere distinti.

## 7 APPRFONDIMENTI

- DISPENSA: Orbite e cicli di una permutazione [?]
- DISPENSA: Permutazioni [?]