

Carlo Presilla

Elementi di Analisi Complessa

Funzioni di una variabile

2a edizione



Springer

UNITEXT

UNITEXT – La Matematica per il 3+2

Volume 72

Carlo Presilla

Elementi di Analisi Complessa

Funzioni di una variabile

2^a edizione

 Springer

Carlo Presilla
Dipartimento di Fisica
Sapienza – Università di Roma
Roma, Italy

UNITEXT – La Matematica per il 3+2

ISSN versione cartacea: 2038-5722

ISSN versione elettronica: 2038-5757

ISBN 978-88-470-5500-1

ISBN 978-88-470-5501-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-88-470-5501-8

Springer Milan Heidelberg New York Dordrecht London

© Springer-Verlag Italia 2014

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Layout di copertina: Beatrice B., Milano

Impaginazione: PTP-Berlin, Protago TeX-Production GmbH, Germany (www.ptp-berlin.eu)

Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (MI)

Springer fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

A Daniela, Francesco e Federico

Prefazione

La presente opera raccoglie gli argomenti di Analisi Complessa trattati nelle lezioni di *Modelli e Metodi Matematici della Fisica*, corso da me tenuto a partire dal 2003 all'Università di Roma "La Sapienza". È un testo adatto per una prima esposizione della teoria delle funzioni di singola variabile complessa e si rivolge a studenti di Fisica, Matematica e Ingegneria che abbiano acquisito le nozioni fondamentali dell'Analisi Matematica reale.

Esistono già molti trattati eccellenti sull'Analisi Complessa, per alcuni dei quali si rimanda alla Bibliografia allegata. L'esigenza di una nuova pubblicazione nasce dall'idea di effettuare una selezione di argomenti, ritenuti fondamentali, la cui esposizione risulti sistematica e autoconsistente in circa 60 ore di lezione mantenendo, al tempo stesso, il rigore matematico volto a favorire la maturazione scientifica dello studente e prepararlo alla lettura di testi avanzati.

A corredo della trattazione teorica vengono proposti oltre 200 esercizi, raccolti tra le prove scritte assegnate per il superamento del corso, tutti forniti di soluzione dettagliata. Il loro svolgimento costituisce una parte imprescindibile per l'acquisizione della materia.

È un piacere ringraziare Filippo Cesi per innumerevoli discussioni e suggerimenti.

Roma, gennaio 2011

Carlo Presilla

La seconda edizione presenta vari miglioramenti. Sono stati corretti numerosi errori tipografici, eliminate alcune imprecisioni/incongruenze e semplificate alcune dimostrazioni. Cruciali a questo scopo sono state le osservazioni degli studenti che hanno adottato la prima edizione del testo, ad essi va la mia gratitudine.

Sono stati aggiunti circa 50 nuovi esercizi e l'ordine di presentazione degli esercizi è stato rivisto in modo da rispecchiare quello degli argomenti teorici. Sono state introdotte figure tridimensionali per meglio visualizzare le linee di diramazione delle funzioni polidrome studiate. Ringrazio Rodolfo Guidotti per avermi segnalato un errore nella presentazione del Teorema 3.4 e avermi suggerito di approfondirne il contenuto con gli Esempi 3.5 e 3.6.

Roma, settembre 2013

Carlo Presilla

Indice

1	Numeri complessi	1
1.1	Fondamenti assiomatici	1
1.2	L'unità immaginaria	2
1.3	Moduli e coniugati	3
1.4	Disuguaglianza triangolare	3
1.5	Rappresentazione geometrica dei numeri complessi	4
1.6	Forma polare dei numeri complessi	4
1.7	Radici di numeri complessi	6
1.8	Regioni nel piano complesso	7
1.9	Il piano complesso esteso	8
	Esercizi	9
2	Spazi metrici	13
2.1	Distanza e spazi metrici	13
2.2	Insiemi aperti e insiemi chiusi	14
2.3	Spazi metrici connessi	18
2.4	Convergenza di successioni	19
2.5	Spazi metrici completi	21
2.6	Spazi metrici compatti	22
	Esercizi	24
3	Limiti e continuità	27
3.1	Limiti	27
3.2	Continuità	31
	Esercizi	36
4	Successioni e serie di funzioni	39
4.1	Successioni e serie di funzioni	39
4.2	Limiti superiore e inferiore di una successione reale	42
4.3	Serie di potenze	45
	Esercizi	48

5	Derivate e funzioni analitiche	53
5.1	Derivate di funzioni complesse	53
5.2	Equazioni di Cauchy-Riemann	56
5.3	Funzioni analitiche	58
5.4	Derivate di funzioni complesse di variabile reale	60
5.5	Trasformazioni conformi	61
	Esercizi	64
6	Funzioni elementari	67
6.1	Esponenziale	67
6.2	Logaritmo	69
6.3	Potenze con esponenti complessi	74
6.4	Esponenziali con base complessa	75
6.5	Funzioni trigonometriche	76
6.6	Funzioni iperboliche	79
6.7	Funzioni trigonometriche e iperboliche inverse	81
	Esercizi	85
7	Integrali	89
7.1	Integrali di funzioni complesse di variabile reale	89
7.2	Cammini, tracce di cammini, curve	90
7.3	Integrali di funzioni complesse lungo curve regolari a tratti	93
7.4	Teorema di Cauchy-Goursat	100
7.5	Formula integrale di Cauchy	105
	Esercizi	110
8	Serie di Taylor e Laurent	115
8.1	Serie di Taylor	115
8.2	Serie di Laurent	123
8.3	Moltiplicazione e divisione di due serie di potenze	128
	Esercizi	131
9	Residui	135
9.1	Punti singolari isolati: residui	135
9.2	Classificazione delle singolarità isolate	138
9.3	Zeri delle funzioni analitiche	140
9.4	Zeri e poli	142
9.5	Comportamento in prossimità di singolarità isolate	143
	Esercizi	145
10	Applicazioni dei residui	149
10.1	Integrali impropri: convergenza e valore principale di Cauchy	149
10.2	Integrali di funzioni trigonometriche	150
10.3	Integrali di funzioni razionali	152
10.4	Integrali di funzioni razionali e trigonometriche	155

10.5 Cammini indentati intorno a un polo semplice	160
10.6 Cammini indentati intorno a un punto di diramazione	164
10.7 Cammini coincidenti con una linea di diramazione	166
10.8 Cammini vari	168
10.9 Integrali di Bromwich: trasformata inversa di Laplace	172
Esercizi	174
11 Ulteriori proprietà delle funzioni analitiche	179
11.1 Prolungamento analitico	179
11.2 Principio del massimo modulo	185
11.3 Funzioni meromorfe	186
11.4 Funzioni armoniche	191
11.5 Metodo del punto di sella	193
Esercizi	198
Appendice A. Soluzione degli esercizi proposti	201
Esercizi del Capitolo 1	201
Esercizi del Capitolo 2	209
Esercizi del Capitolo 3	214
Esercizi del Capitolo 4	220
Esercizi del Capitolo 5	233
Esercizi del Capitolo 6	240
Esercizi del Capitolo 7	261
Esercizi del Capitolo 8	274
Esercizi del Capitolo 9	295
Esercizi del Capitolo 10	315
Esercizi del Capitolo 11	347
Riferimenti bibliografici	355
Indice	357

Numeri complessi

Sommario. Fondamenti assiomatici: definizione dei numeri complessi, loro uguaglianza, somma e prodotto. Il campo \mathbb{C} dei numeri complessi. L'unità immaginaria. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi. Moduli e coniugati. Disuguaglianza triangolare. Forma polare dei numeri complessi: funzione cis o esponenziale simbolico, formula di de Moivre. Radici di numeri complessi. Regioni nel piano complesso. Il piano complesso esteso. Punto all'infinito.

1.1 Fondamenti assiomatici

Definizione 1.1 (numeri complessi). Chiamasi \mathbb{C} , numeri complessi, l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$.

Per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ con $z = (x, y)$, il numero reale x si chiama la parte reale di z e si indica $x = \operatorname{Re} z$ mentre il numero reale y si chiama la parte immaginaria di z e si indica $y = \operatorname{Im} z$. Evidentemente si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definizione 1.2 (uguaglianza, somma e prodotto di numeri complessi). Detti z_1 e z_2 due arbitrari numeri complessi con $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, si definisce

- a) $z_1 = z_2$ se e solo se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$;
- b) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- c) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Per $y_1 = 0$ e $y_2 = 0$, la precedente definizione si riduce a quella di uguaglianza, somma e prodotto di numeri reali.

Teorema 1.3. *L'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} con la Definizione 1.2 forma un campo, cioè valgono le seguenti proprietà:*

- a) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ e $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ (*chiusura*);
- b) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (*commutativa*);

C. Presilla: *Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile*, 2^a edizione.

UNITEXT – La Matematica per il 3+2 72

DOI 10.1007/978-88-470-5501-8_1, © Springer-Verlag Italia 2014

- c) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (*associativa*);
d) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (*distributiva*);
e) $\exists! 0 \in \mathbb{C}$ tale che $z + 0 = 0 + z = z \forall z \in \mathbb{C}$ e $\exists! 1 \in \mathbb{C}$ tale che $z1 = 1z = z \forall z \in \mathbb{C}$ (*esistenza e unicità identità*). Risulta $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$;
f) $\forall z \in \mathbb{C}, \exists! -z \in \mathbb{C}$ tale che $-z + z = z + (-z) = 0$ e, se $z \neq 0$, $\exists! z^{-1} \in \mathbb{C}$ tale che $z^{-1}z = zz^{-1} = 1$ (*esistenza e unicità inverso*). Posto $z = (x, y)$, risulta $-z = (-x, -y)$ e $z^{-1} = (x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2))$.

Dimostrazione. Elementare, sfruttando la Definizione 1.2 e il fatto che \mathbb{R} è un campo. \square

L'esistenza e unicità dell'inverso rispetto alla somma e al prodotto permettono di definire nel modo solito la differenza e il rapporto di due numeri complessi z e w

$$z - w = z + (-w), \quad (1.1)$$

$$z/w = zw^{-1}, \quad \text{se } w \neq 0. \quad (1.2)$$

Definizione 1.4 (potenze intere). Detto z un arbitrario numero complesso e n un intero positivo, si definisce la potenza n -esima di z come

$$z^n = zz \dots z \text{ (} n \text{ volte)}. \quad (1.3)$$

Se $z \neq 0$, si pone poi $z^{-n} = 1/z^n$ e $z^0 = 1$.

1.2 L'unità immaginaria

Il numero complesso $i = (0, 1)$ si chiama unità immaginaria. Esso è la soluzione, in campo complesso, dell'equazione $x^2 + 1 = 0$, che non ammette soluzione in campo reale. Per la Definizione 1.2 si ha $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$. Le potenze intere di i godono della seguente proprietà di ricorrenza:

$$\begin{aligned} i &= (0, 1), & i^2 &= -1, & i^3 &= -i, & i^4 &= 1, \\ i^5 &= i, & i^6 &= -1, & i^7 &= -i, & i^8 &= 1, \\ &\vdots & & & & & \end{aligned}$$

Per la Definizione 1.2, ogni numero complesso $z = (x, y)$ può essere posto nella forma $z = x + iy$, intendendo con questa scrittura che

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0).$$

La somma e il prodotto di due numeri complessi si calcolano facilmente in termini dell'unità immaginaria applicando le usuali regole dell'algebra

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

1.3 Moduli e coniugati

Definizione 1.5 (modulo). Ad ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z = (x, y)$ e $x, y \in \mathbb{R}$ viene associato un numero reale non negativo detto il modulo di z definito

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.4)$$

Si osservi che $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$.

Definizione 1.6 (coniugato). Ad ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z = (x, y)$ e $x, y \in \mathbb{R}$ viene associato un numero complesso detto il coniugato di z definito

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy. \quad (1.5)$$

Si noti che $z\bar{z} = |z|^2$. Pertanto il modulo di un numero complesso è facilmente calcolato con la formula

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (1.6)$$

Se $z \neq 0$ si ha inoltre

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.7)$$

Si verificano immediatamente le seguenti proprietà:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (1.8)$$

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z} w, \quad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \quad (w \neq 0), \quad (1.9)$$

$$|zw| = |z||w|, \quad |z/w| = |z|/|w|, \quad (w \neq 0), \quad (1.10)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|. \quad (1.11)$$

1.4 Disuguaglianza triangolare

Per definizione si ha $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ e pertanto $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ come pure $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Da qui segue l'importante disuguaglianza:

Teorema 1.7 (disuguaglianza triangolare). *Dati due arbitrari numeri complessi z e w , si ha*

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \quad (1.12)$$

Dimostrazione. Per le proprietà di moduli e coniugati, si ha

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Prendendo la radice quadrata di entrambi i membri si giunge al risultato. \square

Il segno di uguaglianza nella (1.12) vale solo quando $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, cioè quando $\operatorname{Im}(z\bar{w}) = 0$ e, escludendo i casi banali in cui uno o entrambi i numeri z e w siano 0, $\operatorname{Re}(z\bar{w}) > 0$. Posto $z = x + iy$ e $w = u + iv$, queste due condizioni sono equivalenti a $xv = yu$ e $xu + yv > 0$.

Dalla disuguaglianza triangolare segue a sua volta che $|z + w| \geq ||z| - |w||$. Infatti, supposto $|z| \geq |w|$ si ha

$$|z| = |(z + w) + (-w)| \leq |z + w| + |-w| = |z + w| + |w|,$$

ovvero $|z + w| \geq |z| - |w| = ||z| - |w||$. Allo stesso risultato si giunge, scambiando z con w , se fosse $|w| \geq |z|$. In conclusione, dati due arbitrari numeri complessi z e w possiamo scrivere

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|. \quad (1.13)$$

1.5 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Nel piano complesso, noto anche come piano di Argand, ad ogni numero complesso $z = (x, y)$ può essere associato un vettore che congiunge l'origine $(0, 0)$ al punto (x, y) . L'interpretazione vettoriale delle operazioni di somma e differenza di numeri complessi come pure quella di modulo e coniugato sono immediate. La disuguaglianza triangolare altro non è che la nota proprietà dei triangoli nei quali la lunghezza di un lato è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due.

Per una interpretazione geometrica della moltiplicazione e del rapporto di numeri complessi si veda [4, 9]. Tali operazioni sono più facilmente espresse nella cosiddetta forma polare dei numeri complessi.

1.6 Forma polare dei numeri complessi

Nel piano complesso ogni numero $z = (x, y) \neq (0, 0)$ può anche essere rappresentato assegnando le coordinate polari (r, θ) , definite dalle relazioni $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Evidentemente si ha

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.14)$$

mentre θ è l'angolo compreso tra il semiasse reale positivo e il segmento che va da 0 a z . L'angolo θ si chiama l'argomento di z e si indica $\theta = \arg z$. L'argomento di un numero complesso è definito a meno di multipli di 2π . Si chiama argomento principale di z e si indica con $\text{Arg } z$ il valore dell'angolo θ compreso in $(-\pi, \pi]$

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi, \quad \arg z = \text{Arg } z + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.15)$$

Esprimiamo ora l'argomento principale di z in termini di x e y invertendo la relazione $\tan(\text{Arg } z) = y/x$. Osservando che la funzione \arctan è convenzionalmente una trasformazione biunivoca dell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, si ha

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \arctan(y/x) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \arctan(y/x) & x \geq 0, (x, y) \neq (0, 0) \\ \arctan(y/x) + \pi & x < 0, y \geq 0 \end{cases}. \quad (1.16)$$

Con la precedente scrittura si intende che per $x = 0$ vale $\text{Arg } z = \text{sgn}(y)\pi/2$ mentre $\text{Arg } z$ non è definito per $z = 0$.

È comodo introdurre la funzione $\text{cis}(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. Per motivi che saranno ovvi nel seguito, tale funzione viene anche indicata con il simbolo $\text{cis}(\theta) = e^{i\theta}$. Dati due numeri complessi $z_1 = r_1 \text{cis}(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 \text{cis}(\theta_2)$ il loro prodotto vale

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]. \end{aligned}$$

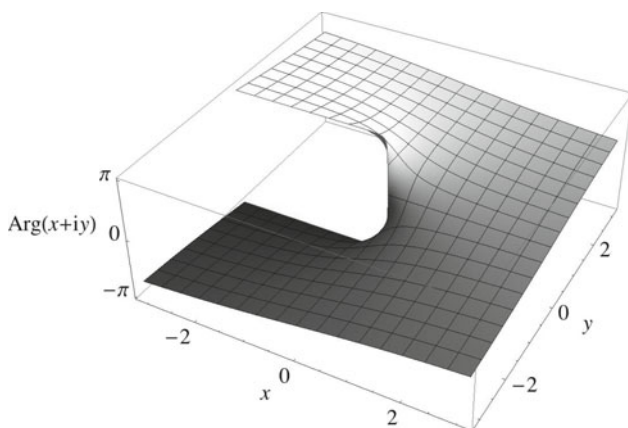


Fig. 1.1. Grafico di $\text{Arg}(x + iy)$. Si noti la discontinuità lungo il semiasse reale negativo. Nell'origine la funzione non è definita

Quindi in forma polare il prodotto è dato dalla semplice regola $r = r_1 r_2$ e $\theta = \theta_1 + \theta_2$. La regola si estende al prodotto di un numero arbitrario di fattori

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|, \\ \arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n.$$

In modo analogo, per il rapporto di due numeri complessi z_1 e $z_2 \neq 0$ si ottiene

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \\ \arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Si osservi che in generale $\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2$ come pure $\text{Arg}(z_1/z_2) \neq \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2$. Si consideri, ad esempio, $z_1 = -1$ e $z_2 = i$ per i quali si ha $\text{Arg} z_1 = \pi$, $\text{Arg} z_2 = \pi/2$ e quindi $\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 = 3\pi/2$ mentre $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(-i) = -\pi/2$.

La potenza n -esima di $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ è data da

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Per $r = 1$ si ottiene la formula di de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (1.18)$$

1.7 Radici di numeri complessi

Dato il numero complesso $z \neq 0$, si chiama radice n -esima, con $n \geq 2$ intero, ogni numero complesso w tale $w^n = z$. Posto $w = r e^{i\theta}$, per la (1.17) si deve avere $r^n = |z|$ e $n\theta = \text{Arg} z + 2\pi k$ e quindi $r = \sqrt[n]{|z|}$ e $\theta = (\text{Arg} z + 2\pi k)/n$ con $k \in \mathbb{Z}$. Delle infinite soluzioni così trovate solo n sono distinte, ad esempio quelle ottenute per $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\text{Arg} z + 2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.19)$$

Si noti infatti che per ogni $k = 0, 1, \dots, n-1$, si ha $w_k = w_{k+pn}$ con $p = \pm 1, \pm 2, \dots$. In conclusione, ogni numero complesso $z \neq 0$ ammette n radici n -esime distinte date dalla formula (1.19).

Esempio 1.8. Le radici n -esime dell'unità sono i numeri complessi

$$c_k = \text{cis}(2\pi k/n), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

che giacciono sulla circonferenza di raggio 1 equispaziati da angoli $2\pi/n$ a partire dal semiasse reale positivo. Se w è una qualsiasi radice n -esima del numero $z \neq 0$, allora le n radici n -esime distinte di z sono $w c_0 = w$, $w c_1$, $w c_2$, \dots , $w c_{n-1}$.

Esempio 1.9. L'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$, ammette la soluzione

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (1.20)$$

come è immediato verificare per sostituzione

$$\begin{aligned} a \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} + b \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + c \\ = \frac{2b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a} + \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + c \\ = 0. \end{aligned}$$

Posto $b^2 - 4ac = re^{i\theta}$, la (1.20) corrisponde alle due soluzioni, distinte se $r \neq 0$,

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{r}e^{i\theta/2}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{r}e^{i\theta/2}}{2a}. \quad (1.21)$$

Per il Teorema fondamentale dell'algebra 7.39 queste sono le uniche due soluzioni dell'equazione considerata.

1.8 Regioni nel piano complesso

Sia λ il segmento di linea retta in \mathbb{C} che congiunge i punti z_1 e z_2 . Dalla geometria si ha che λ è l'insieme dei punti di \mathbb{C} parametricamente definiti da

$$\lambda(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.22)$$

Pertanto l'insieme dei punti

$$\mu(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad -\infty < t < \infty \quad (1.23)$$

rappresenta la retta μ che passa per i punti z_1 e z_2 . Evidentemente esistono infinite altre parametrizzazioni che rappresentano la stessa retta. Un'equazione non parametrica della retta passante per z_1 e z_2 si ottiene osservando che per $z_1 \neq z_2$ si ha $t = (\mu(t) - z_1)/(z_2 - z_1)$ e poiché $t \in \mathbb{R}$ deve essere $\text{Im}((\mu(t) - z_1)/(z_2 - z_1)) = 0$. Dunque la rappresentazione non parametrica della retta per z_1 e z_2 è

$$\{\mu\} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = 0\}. \quad (1.24)$$

È possibile mostrare che gli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} < 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} > 0\} \quad (1.25)$$

racpresentano rispettivamente i semipiani a destra e a sinistra della retta orientata μ quando questa è percorsa da z_1 verso z_2 .

Sia γ la circonferenza in \mathbb{C} di raggio R centrata nel punto z_0 . Dalla geometria si ha che γ è l'insieme dei punti di \mathbb{C} definito da

$$\{\gamma\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}. \quad (1.26)$$

Una possibile rappresentazione parametrica di tale circonferenza è $\gamma(\theta) = z_0 + R \operatorname{cis}(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Gli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\} \quad (1.27)$$

racpresentano rispettivamente la porzione di \mathbb{C} interna ed esterna alla circonferenza di centro z_0 e raggio R .

1.9 Il piano complesso esteso

Conviene definire un piano complesso esteso $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ che include, oltre a \mathbb{C} , il punto all'infinito indicato con il simbolo ∞ . Tale punto all'infinito può essere visualizzato mediante la proiezione stereografica di \mathbb{C} sulla sfera di Riemann. Si consideri in \mathbb{R}^3 la sfera di centro $O = (0, 0, 0)$ e raggio 1 e si faccia coincidere \mathbb{C} con il piano $x_3 = 0$. La semiretta uscente dal punto $N = (0, 0, 1)$ e passante per il generico punto $P_z = (x, y, 0)$ intercetta sulla sfera un punto

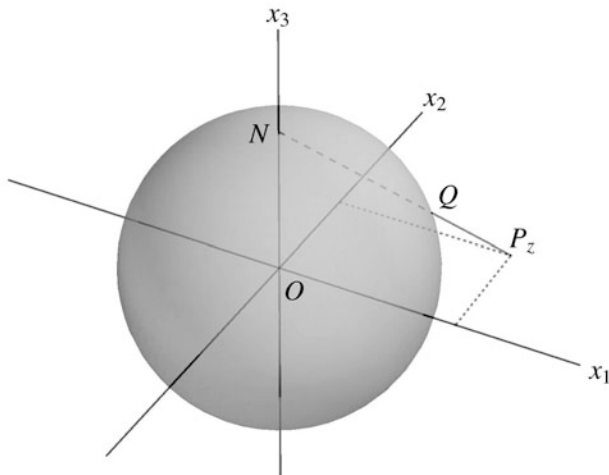


Fig. 1.2. Proiezione stereografica del piano complesso sulla sfera di Riemann. Ad ogni numero complesso $z = (x, y)$ di \mathbb{C} (punto P_z del piano $x_3 = 0$) corrisponde sulla sfera il punto $Q = (2x/(1 + r^2), 2y/(1 + r^2), (r^2 - 1)/(1 + r^2))$, dove $r^2 = x^2 + y^2$

Q chiamato la proiezione stereografica del numero complesso $z = (x, y)$. Il punto N è la proiezione stereografica del punto all'infinito.

È facile trovare le coordinate del punto Q dato z . In \mathbb{R}^3 la semiretta uscente da N e passante per P_z ha equazione parametrica $\mu(t) = N + (P_z - N)t$, con $t \geq 0$, ovvero è il sottoinsieme di \mathbb{R}^3

$$\{(xt, yt, 1 - t) \in \mathbb{R}^3 : t \geq 0\}. \quad (1.28)$$

Le coordinate del punto Q corrispondono al valore di t tale che

$$1 = (xt)^2 + (yt)^2 + (1 - t)^2. \quad (1.29)$$

Da questa si ricava $t = 2/(1 + |z|^2)$ e quindi per la (1.28) le coordinate di Q sono

$$x_1 = \frac{2 \operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{2 \operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}. \quad (1.30)$$

Viceversa, note le coordinate (x_1, x_2, x_3) di Q , il valore di z si ricava ponendo $1 - t = x_3$ nella (1.28). Dalla stessa equazione si ha $x = x_1/t$ e $y = x_2/t$, ovvero

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \quad (1.31)$$

Esercizi

1.1. Calcolare le seguenti quantità:

$$\text{a) } \operatorname{Im}(i^{37}), \quad \text{b) } \operatorname{Re}\left(\frac{2}{1 - 3i}\right), \quad \text{c) } \operatorname{Im}\left(\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3 e^{i\pi/4}\right).$$

1.2. Calcolare le seguenti quantità:

$$\text{a) } \frac{i^{101} - 3}{1 - 4i}, \quad \text{b) } \operatorname{Im} \frac{3i}{2 + 2i}, \quad \text{c) } \operatorname{Im}\left(e^{i\pi/4} \operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}\right)\right).$$

1.3. Calcolare le seguenti quantità:

$$\text{a) } \operatorname{Arg}(\operatorname{cis}(17\pi/5)), \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{19} (1 + i)^k, \quad \text{c) } \left| \frac{ie^{-5i}(1 + i)^3}{1 + 3i} \right|.$$

1.4. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re}(z^n) \geq 0$ per ogni intero positivo n . Mostrare che z è un numero reale non negativo.

1.5. Dimostrare che ogni numero complesso z di modulo unitario, ad eccezione di $z = -1$, può essere scritto nella forma

$$z = \frac{1 + it}{1 - it}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad |z| = 1, \quad z \neq -1.$$

1.6. Dimostrare che per ogni numero complesso $z \neq 1$ e per ogni intero n si ha

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

1.7. Siano n e k due interi positivi e $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = 1$. Calcolare al variare di k la somma

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} z^{jk}.$$

1.8. Supponendo che $|z| < 1$, maggiorare $|\operatorname{Im}(1 + 2\bar{z} + z^2)|$.

1.9. Determinare $a \in \mathbb{R}^+$ tale che si abbia

$$|\operatorname{Re}(i + 2\bar{z} + z^2)| < 3, \quad |z| < a.$$

1.10. Dimostrare che per ogni intero n vale

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

1.11. Dimostrare che $\forall z \in \mathbb{C}$ risulta

$$|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2} |z|.$$

1.12. Calcolare tutti i valori distinti delle seguenti radici e rappresentarli graficamente:

$$\text{a) } \sqrt[3]{-8}, \quad \text{b) } \sqrt[2]{1-i}.$$

1.13. Calcolare tutti i valori distinti delle seguenti radici e rappresentarli graficamente:

$$\text{a) } \sqrt[2]{i^3}, \quad \text{b) } \sqrt[3]{8+i}.$$

1.14. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\text{a) } z^4 + z^2 + 1 = 0, \quad \text{b) } z^3 - i = 0.$$

1.15. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^5 - (1 + i)z = 0.$$

1.16. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\text{a) } 3z + i\bar{z} = 4, \quad \text{b) } \bar{z}^4 = 1 + i.$$

1.17. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^4 - \frac{1+i}{z} = 0.$$

1.18. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\text{a) } z^2 + iz + 2 = 0, \quad \text{b) } \bar{z}^4 + \bar{z}^2 + 1 = 0.$$

1.19. Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Stabilire sotto quale condizione l'equazione

$$az + b\bar{z} + c = 0$$

ha una e una sola soluzione e determinare tale soluzione.

1.20. Calcolare il valore di $\cos(3 \arccos(1/7))$.

1.21. Calcolare il valore di $\cos(4 \arctan(3))$.

1.22. Descrivere a parole e disegnare l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\text{a) } 7 \geq |z - i + 3| > 5, \quad \text{b) } |z - i| = |z + 1|.$$

1.23. Determinare e rappresentare graficamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2.$$

1.24. Determinare e rappresentare graficamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$0 \leq \text{Arg}((z-1)^2) \leq \pi/2.$$

Spazi metrici

Sommario. Spazi metrici, distanza. Diametro di uno spazio metrico. Spazi metrici limitati, illimitati. Palle aperte, chiuse. Insiemi aperti, chiusi. Unione e intersezione di insiemi aperti o chiusi. Definizione di interno, chiusura e frontiera di un insieme e loro proprietà. Spazi metrici e insiemi connessi. Insiemi connessi in \mathbb{R} . Poligonale. Insiemi aperti connessi in \mathbb{C} . Successioni convergenti, punti limite. La chiusura di un insieme coincide con i suoi punti limite. Insiemi densi. Successioni di Cauchy. Le successioni convergenti sono di Cauchy. Una successione di Cauchy che ammette una sottosuccessione convergente è convergente. Spazi metrici e insiemi completi. Completezza di \mathbb{C} (assumendo \mathbb{R} completo). Un sottoinsieme di uno spazio metrico completo è completo se e solo se è chiuso. Spazi metrici e insiemi (sequenzialmente) compatti. Uno spazio metrico compatto è completo. Spazi metrici totalmente limitati. Uno spazio metrico totalmente limitato è limitato. Uno spazio metrico è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato. Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

2.1 Distanza e spazi metrici

Definizione 2.1 (spazio metrico). Uno spazio metrico è la coppia (S, d) , dove S è un insieme e $d : S \times S \mapsto \mathbb{R}$ una funzione, detta distanza, che per arbitrari $x, y, z \in S$ soddisfa le seguenti proprietà:

- a) $d(x, y) \geq 0$;
- b) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- c) $d(x, y) = d(y, x)$;
- d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definizione 2.2 (diametro). Sia (S, d) uno spazio metrico. Si chiama diametro di S la quantità

$$\text{diam } S = \sup_{x, y \in S} d(x, y). \quad (2.1)$$

Uno spazio metrico si dice limitato se $\text{diam } S \in \mathbb{R}$, illimitato se $\text{diam } S = \infty$.

Il diametro di uno spazio dipende dalla distanza, in particolare uno spazio può essere illimitato con una distanza e limitato con un'altra.

Esempio 2.3 (spazio metrico complesso). Se non specificato diversamente, d'ora in avanti intenderemo con spazio metrico complesso la coppia (\mathbb{C}, d) in cui \mathbb{C} è l'insieme dei numeri complessi e d la distanza euclidea

$$d(z, z') = |z - z'| = \sqrt{(\text{Re } z - \text{Re } z')^2 + (\text{Im } z - \text{Im } z')^2}, \quad z, z' \in \mathbb{C}.$$

Con tale distanza si ha $\text{diam } \mathbb{C} = \infty$. È possibile equipaggiare \mathbb{C} con altre distanze. Ad esempio, si consideri

$$d(z, z') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2} \quad (2.2)$$

pari alla distanza euclidea in \mathbb{R}^3 tra i punti $Q = (x_1, x_2, x_3)$ e $Q' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, proiezioni stereografiche di z e z' sulla sfera di Riemann. Usando il fatto che Q e Q' giacciono su una sfera di raggio unitario centrata nell'origine, si ha $d(z, z')^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3)$ e quindi per la (1.30)

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}, \quad z, z' \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Con tale distanza si ha $\text{diam } \mathbb{C} = 2$. La funzione d appena discussa può essere usata per definire lo spazio metrico complesso esteso (\mathbb{C}_∞, d) . Analogamente a quanto visto per due punti $z, z' \in \mathbb{C}$, la distanza tra $z \in \mathbb{C}$ e ∞ vale

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Definizione 2.4 (palla aperta, chiusa). Sia x un punto dello spazio metrico (S, d) e $r > 0$. Si chiamano rispettivamente palla aperta e palla chiusa di centro x e raggio r gli insiemi

$$B(x, r) = \{y \in S : d(x, y) < r\}, \quad (2.5)$$

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in S : d(x, y) \leq r\}. \quad (2.6)$$

2.2 Insiemi aperti e insiemi chiusi

Definizione 2.5 (insieme aperto). Sia (S, d) uno spazio metrico. L'insieme $G \subset S$ si dice aperto in S se $\forall x \in G \exists \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset G$.

Teorema 2.6. Una palla aperta nello spazio metrico (S, d) è un aperto in S .

Dimostrazione. Sia $B(x, r)$ con $x \in S$ e $r > 0$ una palla aperta in S . Sia y un generico punto di $B(x, r)$. Per definizione risulta $d(y, x) < r$. Mostriamo che è possibile costruire una palla aperta $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Posto $\varepsilon = r - d(y, x) > 0$, $\forall z \in B(y, \varepsilon)$, si ha $d(z, y) < \varepsilon$ da cui segue, per la proprietà triangolare, $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + (r - \varepsilon) = r$, ovvero $z \in B(x, r)$. Dall'arbitrarietà di z si conclude che $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. \square

Teorema 2.7. *Sia (S, d) uno spazio metrico. Allora*

- a) *gli insiemi S e \emptyset sono aperti in S ;*
- b) *se (G_1, G_2, \dots, G_n) è una collezione finita di aperti in S , allora $\bigcap_{k=1}^n G_k$ è aperto in S ;*
- c) *se $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ è una collezione arbitraria di aperti in S , allora $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ è aperto in S .*

Dimostrazione.

- a) Sia x un arbitrario punto di S . Per definizione di palla aperta $B(x, \varepsilon) \subset S$ con ε arbitrario. D'altro canto \emptyset non ha punti, quindi per ogni suo punto è possibile trovare una palla aperta, vuota, contenuta in \emptyset .
- b) Sia x un arbitrario punto di $\bigcap_{k=1}^n G_k$. Segue che $x \in G_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, e, poiché G_k è aperto, $\exists \varepsilon_k > 0$ tale che $B(x, \varepsilon_k) \subset G_k$. Posto $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, si ha $B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_k) \subset G_k$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$. Pertanto $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k$.
- c) Sia x un arbitrario punto di $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Segue che $\exists \alpha_0 \in I$ tale che $x \in G_{\alpha_0}$. Poiché G_{α_0} è aperto $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Pertanto $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. \square

Definizione 2.8 (insieme chiuso). Sia (S, d) uno spazio metrico. L'insieme $F \subset S$ si dice chiuso in S se il suo complemento $F^c = S \setminus F$ è aperto in S .

Teorema 2.9. *Una palla chiusa nello spazio metrico (S, d) è un chiuso in S .*

Dimostrazione. Sia $\overline{B}(x, r)$ con $x \in S$ e $r > 0$ una palla chiusa in S . Sia y un generico punto di $\overline{B}(x, r)^c$. Per definizione risulta $d(y, x) > r$. Mostriamo che è possibile costruire una palla aperta $B(y, \varepsilon) \subset \overline{B}(x, r)^c$. Posto $\varepsilon = d(y, x) - r > 0$, $\forall z \in B(y, \varepsilon)$ si ha $d(z, y) < \varepsilon$ da cui segue, per la proprietà triangolare, $r + \varepsilon = d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < \varepsilon + d(z, x)$. Questo implica $d(z, x) > r$ e quindi $z \in \overline{B}(x, r)^c$. Dall'arbitrarietà di z si conclude che $B(y, \varepsilon) \subset \overline{B}(x, r)^c$. \square

Teorema 2.10. *Sia (S, d) uno spazio metrico. Allora*

- a) *gli insiemi S e \emptyset sono chiusi in S ;*
- b) *se (F_1, F_2, \dots, F_n) è una collezione finita di chiusi in S , allora $\bigcup_{k=1}^n F_k$ è chiuso in S ;*
- c) *se $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ è una collezione arbitraria di chiusi in S , allora $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ è chiuso in S .*

Dimostrazione. Si usi la definizione di chiuso, le leggi di de Morgan $(\bigcup F)^c = \bigcap F^c$, $(\bigcap F)^c = \bigcup F^c$ e il Teorema 2.7. \square

Definizione 2.11 (parte interna, chiusura, frontiera). Sia (S, d) uno spazio metrico e A un sottoinsieme di S . Si chiamano parte interna, chiusura e frontiera di A gli insiemi rispettivamente indicati con A° , \overline{A} e ∂A e definiti come

$$A^\circ = \bigcup_{\text{aperti } G \subset A} G, \quad (2.7)$$

$$\overline{A} = \bigcap_{\text{chiusi } F \supset A} F, \quad (2.8)$$

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^c. \quad (2.9)$$

Poiché l'unione di una collezione arbitraria di aperti è un aperto e l'intersezione di una collezione arbitraria di chiusi è un chiuso, la parte interna di un sottoinsieme A di S è un aperto in S e la sua chiusura è un chiuso in S . Inoltre risulta sempre $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$. In particolare si può avere $A^\circ = \emptyset$ e $\overline{A} = S$ come nel caso $S = \mathbb{R}$ e $A = \mathbb{Q}$.

Teorema 2.12. Sia (S, d) uno spazio metrico, $A \subset S$ e $B \subset S$. Allora

- a) A è aperto in S se e solo se $A = A^\circ$;
- b) A è chiuso in S se e solo se $A = \overline{A}$;
- c) $A^\circ = (\overline{A^c})^c$;
- d) $\overline{A} = ((A^\circ)^c)^c$;
- e) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$;
- f) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;
- g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dimostrazione.

- a) Sia A aperto in S . Per definizione si ha $A^\circ \subset A$. D'altro canto A , essendo contenuto in se stesso, è uno degli insiemi aperti la cui unione definisce A° e pertanto $A \subset A^\circ$. Si conclude che $A = A^\circ$. Viceversa, si supponga che $A = A^\circ$. Poiché A° è aperto in S anche A è aperto in S .
- b) Sia A chiuso in S . Per definizione si ha $A \subset \overline{A}$. D'altro canto A , contenendo se stesso, è uno degli insiemi chiusi la cui intersezione definisce \overline{A} e pertanto $\overline{A} \subset A$. Si conclude che $A = \overline{A}$. Viceversa, si supponga che $A = \overline{A}$. Poiché \overline{A} è chiuso in S anche A è chiuso in S .
- c) Usando le definizioni di parte interna e di chiusura e le leggi di de Morgan, si ha

$$A^\circ = \bigcup_{\text{aperti } G \subset A} G = \left(\bigcap_{\text{aperti } G \subset A} G^c \right)^c = \left(\bigcap_{\text{chiusi } G^c \supset A^c} G^c \right)^c$$

$$= \left(\bigcap_{\text{chiusi } F \supset A^c} F \right)^c = (\overline{A^c})^c,$$

dove si è sfruttato il fatto che la corrispondenza tra gli insiemi aperti G contenuti in A e gli insiemi chiusi G^c contenenti A^c è biunivoca.

- d) Si ragioni in modo analogo al punto precedente. Alternativamente, si prenda il complemento della relazione precedente con la sostituzione $A \rightarrow A^c$.
- e) Segue dalla definizione di frontiera e dal punto c).
- f) Dimostriamo separatamente le due inclusioni $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ e $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$. Poiché $A \cap B \subset A$ segue $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$. Analogamente $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ e pertanto $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. D'altro canto $A^\circ \cap B^\circ$ è un aperto con la proprietà $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. Poiché $(A \cap B)^\circ$ rappresenta l'unione di tutti gli aperti contenuti in $A \cap B$, deve essere $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.
- g) Si ragioni in modo analogo al punto precedente. Alternativamente, usando l'identità $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$, le leggi di de Morgan e il risultato precedente, si ha

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= (((A \cup B)^c)^\circ)^c = ((A^c \cap B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ)^c \\ &= ((A^c)^\circ)^c \cup ((B^c)^\circ)^c = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 2.13. *Sia (S, d) uno spazio metrico, $A \subset S$ e $x \in S$. Allora*

- a) $x \in A^\circ$ se e solo se $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset A$;
- b) $x \in \overline{A}$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$;
- c) $x \in \partial A$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

Dimostrazione.

- a) Sia $x \in A^\circ$. Poiché A° è aperto in S allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset A^\circ \subset A$. Viceversa, si supponga che $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset A$. Poiché la palla $B(x, \varepsilon)$ è un aperto, dalla definizione di A° si ha $B(x, \varepsilon) \subset A^\circ$ e quindi $x \in A^\circ$.
- b) Poiché $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$, $x \in \overline{A}$ se e solo se $x \notin (A^c)^\circ$. Per il punto precedente, ciò è vero se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \not\subset A^c$, ovvero se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
- c) Per definizione $x \in \partial A = \overline{A} \cap (A^\circ)^c$ se e solo se $x \in \overline{A}$ e $x \notin A^\circ$. Per i due punti precedenti questo è vero se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ valgono entrambe le proprietà $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. \square

Un sottoinsieme $A \subset S$ nello spazio metrico (S, d) non necessariamente è aperto o chiuso. Può essere che A non sia né aperto né chiuso, oppure contemporaneamente aperto e chiuso. Inoltre, la chiusura di una palla aperta non necessariamente coincide con la corrispondente palla chiusa.

Esempio 2.14. Sia (S, d) lo spazio metrico in cui $S = S_1 \cup S_2$ con

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : d(z, 0) \leq 1\}, \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : d(z, 3) < 1\},$$

e d è la usuale distanza euclidea $d(z, w) = |z - w|$. In (S, d) la palla aperta $B(3, 2)$ e quella chiusa $\overline{B}(3, 2)$ corrispondono agli insiemi

$$\begin{aligned} B(3, 2) &= \{z \in S : d(z, 3) < 2\} = S_2, \\ \overline{B}(3, 2) &= \{z \in S : d(z, 3) \leq 2\} = S_2 \cup \{1\}. \end{aligned}$$

Evidentemente $B(3, 2)$ è un aperto in S . D'altro canto $B(3, 2)$ è anche un chiuso in S poiché il suo complemento $B(3, 2)^c = S_1$ è un aperto in S . Infatti $\forall z \in S_1$ si ha, ad esempio, $B(z, 1/2) \subset S_1$. Dunque $B(3, 2)$ è un sottoinsieme proprio di S (diverso da S e da \emptyset) che è contemporaneamente aperto e chiuso in S . È anche un esempio di palla aperta la cui chiusura, coincidente con $B(3, 2)$, è diversa dalla palla chiusa $\overline{B}(3, 2) = B(3, 2) \cup \{1\}$.

2.3 Spazi metrici connessi

Definizione 2.15 (spazio metrico connesso, sottoinsieme connesso).

Uno spazio metrico (S, d) è detto connesso se gli unici sottoinsiemi di S contemporaneamente aperti e chiusi sono \emptyset e S . Se $A \subset S$, allora A è un sottoinsieme connesso di S se lo spazio metrico (A, d) è connesso.

In base alla precedente definizione, lo spazio metrico S è non connesso se in S esistono due insiemi aperti disgiunti A e B , entrambi non vuoti, tali che $A \cup B = S$. In questo caso, infatti, $A = S \setminus B$ è anche chiuso. Lo spazio metrico dell'Esempio 2.14 è non connesso.

Teorema 2.16. *Un insieme $S \subset \mathbb{R}$ è connesso se e solo se S è un intervallo.*

Dimostrazione. Limitiamoci a mostrare che un insieme $S \subset \mathbb{R}$ connesso è necessariamente un intervallo (per la dimostrazione dell'implicazione inversa si veda [5]). Sia dunque $S \subset \mathbb{R}$ connesso. Se, per assurdo, S non fosse un intervallo, allora $\exists a, b \in S$ e $\exists t \notin S$ tali che $a < t < b$. Si ponga $A = (-\infty, t) \cap S$ e $B = (t, \infty) \cap S$. I due insiemi A e B sono aperti in S , inoltre $A \neq \emptyset$ in quanto $a \in A$, e $B \neq \emptyset$ in quanto $b \in B$. Evidentemente risulta $A \cap B = \emptyset$ e, poiché $t \notin S$, $A \cup B = S$. Si conclude con l'assurdo che S è non connesso. Pertanto S deve essere un intervallo. \square

Definizione 2.17 (poligonale). Se $z, w \in \mathbb{C}$ si indichi il segmento di linea retta da z a w come

$$[z, w] = \{z + t(w - z), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Si chiama poligonale da z a w l'insieme $P = \bigcup_{k=1}^{n-1} [z_k, z_{k+1}]$ dove $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, con $z_1 = z$, $z_n = w$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.18. *Un insieme aperto $G \subset \mathbb{C}$ è connesso se e solo se $\forall z, w \in G$ esiste una poligonale da z a w che giace interamente in G .*

Dimostrazione. Supponiamo che $\forall z, w \in G$ esista una poligonale da z a w che giace interamente in G . Se, per assurdo, G non fosse connesso allora risulterebbe $G = Z \cup W$ con Z e W aperti e chiusi, non vuoti e disgiunti. Si considerino due punti $z \in Z$ e $w \in W$ e sia P una poligonale da z a w tale che $P \subset G$. Per semplicità assumiamo che $P = [z, w]$; se P fosse composta da più intervalli si ragionerebbe in modo simile considerando quel segmento $[z_k, z_{k+1}]$ i cui estremi sono tali che $z_k \in Z$ e $z_{k+1} \in W$. Definiti $S = \{s \in [0, 1] : z + (w - z)s \in Z\}$ e $T = \{t \in [0, 1] : z + (w - z)t \in W\}$, risulta $S \cap T = \emptyset$ e $S \cup T = [0, 1]$. Inoltre S e T sono aperti in $[0, 1]$ e non vuoti in quanto $0 \in S$ e $1 \in T$. Si è così giunti ad una contraddizione con il fatto che l'intervallo $[0, 1]$ è connesso. Dobbiamo perciò ammettere che G è connesso.

Viceversa, si supponga G aperto e connesso. Sia z un generico punto di G e definiamo $W = \{w \in G : \text{esiste una poligonale } P \subset G \text{ da } z \text{ a } w\}$. Basta mostrare che W è simultaneamente aperto e chiuso in G . Infatti, se questo è vero, poiché $W \neq \emptyset$, in quanto $z \in W$, e G è connesso, deve essere $W = G$. Per mostrare che W è aperto in G si consideri un punto $w \in W$ e sia P una poligonale da z a w con $P \subset G$. Poiché G è aperto $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(w, \varepsilon) \subset G$. Per ogni $s \in B(w, \varepsilon)$ risulta $[w, s] \subset B(w, \varepsilon) \subset G$. Quindi la poligonale $P \cup [w, s]$ che connette z a s è ancora contenuta in G . Si conclude che $B(w, \varepsilon) \subset W$ e quindi W è aperto in G .

Per mostrare che W è chiuso in G proviamo che $W^c = G \setminus W$ è aperto in G . Si osservi che $\forall w \in W^c$, poiché $w \in G$ e G è aperto, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $B(w, \varepsilon) \subset G$. Necessariamente deve essere $B(w, \varepsilon) \cap W = \emptyset$, altrimenti sarebbe possibile costruire una poligonale da z a w contenuta in G . Questo vuol dire che $B(w, \varepsilon) \subset W^c$, quindi W^c è aperto in G . \square

Si osservi che il precedente teorema vale per insiemi $G \subset \mathbb{C}$ aperti e che, più precisamente, tale proprietà è sfruttata solo nella seconda parte della dimostrazione. Si consideri il caso di G non aperto costituito da due dischi disgiunti collegati da un arco non rettilineo: in base alla Definizione 2.15 G è un insieme connesso ma non tutte le coppie di punti di G sono collegabili da una poligonale interamente giacente in G .

2.4 Convergenza di successioni

Definizione 2.19 (successione convergente). Sia $(x_n)_{n=1}^\infty$, o, come più brevemente sarà spesso indicata, (x_n) , una successione nello spazio metrico (S, d) . Si dice che tale successione converge a x , e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{oppure} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, \quad (2.10)$$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $d(x, x_n) < \varepsilon \forall n \geq N$. In altre parole, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$.

Teorema 2.20. *Sia (S, d) uno spazio metrico. Un insieme $F \subset S$ è chiuso in S se e solo se per ogni successione (x_n) in F convergente a x si ha $x \in F$.*

Dimostrazione. Sia F chiuso in (S, d) . Se (x_n) è una generica successione in F convergente a x , allora per definizione ogni $x_n \in F$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $d(x, x_n) < \varepsilon \forall n \geq N$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Per il Teorema 2.13 si conclude che $x \in \overline{F}$ e quindi, essendo $F = \overline{F}$, si ha che $x \in F$. Viceversa, si supponga che per ogni successione (x_n) in F convergente a x si abbia $x \in F$. Se per assurdo F non fosse chiuso, esisterebbe $y \in \overline{F}$ tale che $y \notin F$. Poiché $y \in \overline{F}$, $\forall \varepsilon > 0 B(y, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Posto allora $\varepsilon = 1/n$ si ha che $\exists y_n \in F$ tale che $d(y_n, y) < 1/n$. Abbiamo così costruito una successione (y_n) in F che converge a $y \notin F$. Questo contraddice l'ipotesi e pertanto F deve essere chiuso. \square

Definizione 2.21 (punto limite). Sia A un sottoinsieme dello spazio metrico (S, d) . Un punto $x \in S$ si chiama punto limite (punto di aderenza) di A se esiste una successione (x_n) di elementi $x_n \in A$ che converge a x .

Indichiamo con $L(A)$ l'insieme di tutti i punti limite di A . Evidentemente $A \subset L(A)$.

Teorema 2.22. *Sia A un sottoinsieme dello spazio metrico (S, d) . Allora $\overline{A} = L(A)$.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\overline{A} \subset L(A)$ e successivamente che $L(A) \subset \overline{A}$. Sia $x \in \overline{A}$. Allora $\forall \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Scelto $\varepsilon = 1/n$ si conclude che $\exists x_n \in A$ tale che $d(x_n, x) < 1/n$, cioè la successione (x_n) di punti di A converge a x . Quindi $x \in L(A)$. Viceversa, sia $x \in L(A)$. Allora esiste una successione (x_n) di punti di A che converge a x . Pertanto $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ tale che $d(x, x_n) < \varepsilon \forall n \geq N$. Poiché ogni $x_n \in A$ si conclude che $\forall \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, cioè $x \in \overline{A}$. \square

Definizione 2.23 (insieme denso). Sia (S, d) uno spazio metrico e A e B due sottoinsiemi di S tali che $A \subset B$. L'insieme A si dice denso in B se $B \subset \overline{A}$. In altre parole, A è denso in B se $\forall x \in B$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A$ tale che $d(x, y) < \varepsilon$.

Definizione 2.24 (successione di Cauchy). Sia (S, d) uno spazio metrico e (x_n) una successione di punti $x_n \in S$. La successione è detta di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m \geq N$.

Teorema 2.25. *Ogni successione convergente è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia (x_n) una successione nello spazio metrico (S, d) convergente a $x \in S$. Ciò significa che $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon/2)$ tale che $d(x, x_n) < \varepsilon/2 \forall n \geq N$. Dalla disuguaglianza triangolare soddisfatta dalla distanza d , segue che $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \forall n, m \geq N$, cioè (x_n) è una successione di Cauchy. \square

Non necessariamente una successione di Cauchy è convergente.

Esempio 2.26. Si consideri la successione (x_n) definita da

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{s}{x_n} \right)$$

con $s > 0$ e $x_0 \neq 0$ arbitrario. Tale successione, pensata come successione in \mathbb{R} , converge a \sqrt{s} e costituisce il cosiddetto metodo babilonese per la stima della radice quadrata. Si consideri ora lo spazio metrico (\mathbb{Q}, d) con $d(x, y) = |x - y|$. Per $x_0 \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q}$, è evidente che (x_n) è una successione di Cauchy nello spazio metrico (\mathbb{Q}, d) . Se inoltre $\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$, si consideri ad esempio $s = 2$, la successione è non convergente in \mathbb{Q} .

Teorema 2.27. *Se (x_n) è una successione di Cauchy nello spazio metrico (S, d) che ammette una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente in S , allora (x_n) è convergente in S .*

Dimostrazione. Poiché la successione (x_n) è di Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \exists N'(\varepsilon/2)$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \forall n, m \geq N'$. Poiché la sottosuccessione (x_{n_k}) è convergente in S , diciamo a $x \in S$, $\forall \varepsilon > 0 \exists N''(\varepsilon/2)$ tale che $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 \forall n_k \geq N''$. Posto $N = \max(N', N'')$ e scelto $n_k \geq N$, dalla proprietà triangolare della distanza segue che $\forall n \geq N \ d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, cioè $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. \square

2.5 Spazi metrici completi

Definizione 2.28 (spazio metrico completo, sottoinsieme completo).

Uno spazio metrico (S, d) è detto completo se tutte le successioni di Cauchy in S sono convergenti in S . Se $A \subset S$, allora A è un sottoinsieme completo di S se lo spazio metrico (A, d) è completo.

Si dimostra che (\mathbb{R}, d) con d distanza euclidea è completo. Invece (\mathbb{Q}, d) non è completo. Per quanto riguarda il campo dei numeri complessi si ha:

Teorema 2.29. *(\mathbb{C}, d) con d distanza euclidea è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Assumiamo di aver già dimostrato che (\mathbb{R}, d) con d distanza euclidea è completo. Sia (z_n) con $z_n = x_n + iy_n$ una generica successione di Cauchy in \mathbb{C} . Segue che (x_n) e (y_n) sono successioni di Cauchy in \mathbb{R} , infatti basta osservare che $|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|$ e $|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$ qualunque siano gli indici n e m . Poiché \mathbb{R} è completo, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in \mathbb{R}$ e $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in \mathbb{R}$. Segue che $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x + iy \in \mathbb{C}$, cioè \mathbb{C} è completo. \square

Dalla completezza di uno spazio metrico segue un importante criterio per stabilire se un suo sottoinsieme è completo oppure no.

Teorema 2.30. *Sia (S, d) uno spazio metrico completo e $F \subset S$. Lo spazio metrico (F, d) è completo se e solo se F è chiuso in S .*

Dimostrazione. Supponiamo che (F, d) sia completo e mostriamo che F è chiuso in S . È sufficiente mostrare che per ogni successione (x_n) di punti $x_n \in F$ convergente a x si ha $x \in F$. Questo è proprio quello che capita in quanto (x_n) , essendo una successione convergente, è anche di Cauchy e (F, d) è completo. Viceversa, supponiamo che F sia chiuso in S e mostriamo che (F, d) è completo. Si consideri una generica successione di Cauchy (x_n) in F . Ovviamente questa è anche una successione di Cauchy in S che è completo. Pertanto $\exists x \in S$ tale che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Poiché F è chiuso in S deve essere $x \in F$, quindi (x_n) converge in F e (F, d) è completo. \square

La proprietà di chiusura di F in S è ovviamente una condizione necessaria affinché (F, d) sia completo. In generale non è una condizione sufficiente se lo spazio metrico (S, d) non è completo. Si consideri ad esempio lo spazio metrico (\mathbb{Q}, d) con d distanza euclidea e si prenda $F = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Si mostra immediatamente che F è chiuso in \mathbb{Q} ma (F, d) non è completo.

2.6 Spazi metrici compatti

Definizione 2.31 (spazio metrico (sequenzialmente) compatto, sottoinsieme (sequenzialmente) compatto). Uno spazio metrico (S, d) si dice sequenzialmente compatto se ogni successione in S ammette una sottosuccessione convergente in S . Se $A \subset S$, allora A è un sottoinsieme sequenzialmente compatto di S se lo spazio metrico (A, d) è sequenzialmente compatto.

Può essere mostrato che ogni spazio metrico sequenzialmente compatto è anche compatto (ogni copertura ammette una sottocopertura finita) e viceversa. Pertanto d'ora in avanti non faremo distinzione tra compattezza e sequenziale compattezza.

Corollario 2.32. *Ogni spazio metrico (sequenzialmente) compatto è completo.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema 2.27 e dalla Definizione 2.31. \square

Definizione 2.33 (spazio metrico totalmente limitato, sottoinsieme totalmente limitato). Uno spazio metrico (S, d) è detto totalmente limitato se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme finito di S , diciamo $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tale che $S = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Se $A \subset S$, allora A è un sottoinsieme totalmente limitato di S se lo spazio metrico (A, d) è totalmente limitato.

Teorema 2.34. *Uno spazio metrico (S, d) totalmente limitato è limitato.*

Dimostrazione. In base alla definizione di totale limitatezza, scelto arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e detto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'insieme finito di punti tale che $S = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$, allora $\forall x, y \in S$ è possibile trovare due indici $1 \leq j, k \leq n$ tali che $x \in B(x_j, \varepsilon)$ e $y \in B(x_k, \varepsilon)$. Pertanto

$$d(x, y) \leq d(x, x_j) + d(x_j, x_k) + d(x_k, y) \leq \varepsilon + d(x_j, x_k) + \varepsilon$$

e quindi

$$\text{diam } S = \sup_{x, y \in S} d(x, y) \leq 2\varepsilon + \max_{j, k=1, n} d(x_j, x_k) < \infty,$$

da cui si conclude che S è limitato. \square

Teorema 2.35. *Uno spazio metrico (S, d) è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo, per iniziare, che (S, d) sia compatto e mostriamo che è completo e assolutamente limitato. La completezza di (S, d) segue dal Corollario 2.32. Se per assurdo (S, d) non fosse totalmente limitato allora esisterebbe un $\varepsilon_0 > 0$ tale che per nessun insieme finito di punti $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si avrebbe $S = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_0)$. Scelto un punto arbitrario $x_1 \in S$ si ha allora $B(x_1, \varepsilon_0) \neq S$. Pertanto $\exists x_2 \in S$ tale che $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. D'altro canto si ha $B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0) \neq S$ e quindi $\exists x_3 \in S$ tale che $d(x_1, x_3) \geq \varepsilon_0$ e $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon_0$. Proseguendo in questo modo costruiamo una successione (x_n) di punti di S con la proprietà che $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$ se $i \neq j$. Tale successione non ammette alcuna sottosuccessione convergente e questo contraddice l'ipotesi che (S, d) è sequenzialmente compatto.

Viceversa, supponiamo che (S, d) sia completo e totalmente limitato e mostriamo che è sequenzialmente compatto. Sia (x_n) una generica successione di punti $x_n \in S$ e si ponga $\varepsilon_k = 2^{-k}$. Poiché (S, d) è totalmente limitato, possiamo scrivere S come l'unione di un numero finito di palle di raggio ε_1 centrate su altrettanti punti di S . Almeno una di queste palle, diciamo quella di centro y_1 , deve contenere infiniti elementi della successione (x_n) . In altre parole (x_n) ammette una sottosuccessione (x_{n_1}) i cui elementi sono tutti contenuti in $B(y_1, \varepsilon_1)$. Osservando che anche $(B(y_1, \varepsilon_1), d)$ è totalmente limitato, possiamo scriverlo come l'unione di un numero finito di palle di raggio ε_2 centrate in altrettanti punti di $B(y_1, \varepsilon_1)$. Pertanto $\exists y_2 \in B(y_1, \varepsilon_1)$ e una sottosuccessione (x_{n_2}) della successione (x_{n_1}) i cui elementi sono tutti contenuti in $B(y_2, \varepsilon_2)$. Proseguendo in questo modo costruiamo la successione (z_k) dove z_k è il primo elemento della sottosuccessione (x_{n_k}) contenuta nella palla $B(y_k, \varepsilon_k)$. Evidentemente $d(z_n, z_m) < 2^{-\min(n, m)}$, pertanto la successione (z_n) è una successione di Cauchy in S . Per la completezza di (S, d) tale successione risulta convergente in S . In conclusione, dall'arbitraria successione (x_n) di S abbiamo estratto la sottosuccessione (z_n) convergente in S , e quindi (S, d) è sequenzialmente compatto. \square

Teorema 2.36 (Heine-Borel). *Un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se K è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo, per iniziare, che $K \subset \mathbb{R}^n$ sia compatto e mostriamo che è chiuso e limitato. Per il Teorema 2.35 K è completo e totalmente limitato. Pertanto, per il Teorema 2.30 K è chiuso in \mathbb{R}^n e per il Teorema 2.34 limitato.

Viceversa, supponiamo che K sia chiuso e limitato e mostriamo che è compatto. Poiché K è limitato $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $\exists b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tali che $K \subset F = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Essendo F chiuso in \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^n completo segue che F è completo. D'altro canto F è anche totalmente limitato ($\forall \varepsilon > 0$ si consideri una quadrettatura di F in cubi n -dimensionali di lato $\leq \varepsilon$; il corrispondente numero finito di vertici può essere usato come l'insieme finito di punti $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, tale che $S = \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon)$) e quindi per il Teorema 2.35 F risulta compatto. In conclusione, K è un sottoinsieme chiuso di F compatto e quindi è esso stesso compatto. \square

I sottoinsiemi di \mathbb{C} compatti sono tutti e solo quelli chiusi e limitati. Mentre in \mathbb{R}^n limitatezza e totale limitatezza coincidono, in generale la totale limitatezza è una proprietà più forte della limitatezza. Per questo motivo il teorema di Heine-Borel non si applica a un generico spazio metrico nel quale è possibile trovare insiemi chiusi e limitati che non sono compatti.

Esercizi

2.1. Sia S un insieme arbitrario non vuoto e $d : S \times S \mapsto \mathbb{R}$ la funzione

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}.$$

Dimostrare che (S, d) è uno spazio metrico (detto spazio di punti isolati).

2.2. Sia $S = \mathbb{R}$ e si consideri la funzione $d : S \times S \mapsto \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Si dimostri che (S, d) è uno spazio metrico e si valuti il suo diametro. Suggerimento: si osservi che $g(t) = t/(1 + t)$ è monotona crescente per $t \in [0, \infty)$.

2.3. Sia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$d(z_1, z_2) = |\operatorname{Re}(z_1 - z_2)| + |\operatorname{Im}(z_1 - z_2)|,$$

dimostrare che (\mathbb{C}, d) è uno spazio metrico e, infine, disegnare la palla aperta $B(1 + i3, 1)$.

2.4. Sia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$d(z_1, z_2) = \max(|\operatorname{Re}(z_1 - z_2)|, |\operatorname{Im}(z_1 - z_2)|),$$

dimostrare che (\mathbb{C}, d) è uno spazio metrico e, infine, disegnare la palla chiusa $\overline{B}(3 + i, 2)$.

2.5. Dimostrare le seguenti affermazioni, se vere, o fornire un controesempio, se false:

- a) l'unione di una infinità numerabile di aperti è un aperto;
- b) l'intersezione di una infinità numerabile di aperti è un aperto;
- c) l'unione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso;
- d) l'intersezione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso.

2.6. Dimostrare le seguenti affermazioni, se vere, o fornire un controesempio, se false:

- a) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$;
- b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;
- c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2.7. Dimostrare la seguente affermazione, se vera, o fornire un controesempio, se falsa. Sia A un sottoinsieme dello spazio metrico (S, d) , allora $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.

2.8. Siano A e B due sottoinsiemi di uno spazio metrico (S, d) . Dimostrare che se $A \subset B$, allora $\overline{A} \subset \overline{B}$ e $A^\circ \subset B^\circ$.

2.9. Sia A un sottoinsieme di uno spazio metrico (S, d) . Dimostrare che, in generale, $\overline{A^\circ} \neq \overline{A}$ e $(\overline{A})^\circ \neq A^\circ$.

2.10. Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$. Determinare se, nello spazio metrico (\mathbb{Q}, d) con $d(x, y) = |x - y|$, l'insieme A risulta a) aperto, b) chiuso, c) totalmente limitato, d) compatto.

Limiti e continuità

Sommario. Definizione di convergenza per funzioni tra spazi metrici. Unicità del limite e caratterizzazione in termini di successioni convergenti. Limiti di funzioni composte. Il caso delle funzioni complesse: relazione con i limiti delle funzioni parte reale e immaginaria, limite della somma, del prodotto e del rapporto di due funzioni. Limiti con il punto all'infinito. Funzioni continue in un punto, funzioni continue. Una funzione è continua se e solo se la funzione inversa trasforma aperti in aperti o chiusi in chiusi. La composizione di funzioni continue è continua. Il caso delle funzioni complesse: relazione con la continuità delle funzioni parte reale e immaginaria, continuità della somma, del prodotto e del rapporto di due funzioni continue. Funzioni uniformemente continue e Lipschitz continue: mutue implicazioni. Una funzione continua trasforma compatti in compatti e connessi in connessi. Una funzione continua su un compatto a valori in \mathbb{R} assume massimo e minimo assoluti. Il modulo di una funzione continua su un compatto a valori in \mathbb{C} assume massimo e minimo assoluti. Una funzione a valori in \mathbb{C} continua e non nulla in un punto è non nulla in un intorno dello stesso punto. Una funzione continua su un compatto è uniformemente continua.

3.1 Limiti

Definizione 3.1 (limite). Siano (S, d) e (Ω, ρ) due spazi metrici e si consideri una funzione $f : S \mapsto \Omega$. Se $a \in S$ e $\omega \in \Omega$, allora $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \omega$ è equivalente a dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $f(x) \in B(\omega, \varepsilon) \forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$. In altre parole, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\rho(f(x), \omega) < \varepsilon$ quando $0 < d(x, a) < \delta$.

Si osservi che se fosse $f : D \mapsto \mathcal{Y}$ con $D \subset S$ e $\mathcal{Y} \subset \Omega$, potrebbe aversi $a \notin D$ e $\omega \notin \Omega$ ma deve risultare $a \in L(D)$ e $\omega \in L(\mathcal{Y})$. Se anche fosse $a \in D$ e $\omega \in \mathcal{Y}$ non necessariamente $f(a) = \omega$.

Teorema 3.2 (unicità del limite). Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$, $a \in S$ e $\omega \in \Omega$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \omega$ allora ω è unico.

Dimostrazione. Si supponga che esista $\omega' \in \Omega$ tale che $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \omega'$. Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta'(\varepsilon/2) > 0$ tale che $\rho(f(x), \omega') < \varepsilon/2$ quando $0 < d(x, a) < \delta'$. Poiché per ipotesi si ha anche $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \omega$, in corrispondenza allo stesso $\varepsilon \exists \delta(\varepsilon/2) > 0$ tale che $\rho(f(x), \omega) < \varepsilon/2$ quando $0 < d(x, a) < \delta$. Pertanto, se $x \neq a$ è un punto di S tale che $d(x, a) < \min(\delta, \delta')$, per la proprietà triangolare della distanza ρ si ha $\rho(\omega, \omega') \leq \rho(\omega, f(x)) + \rho(f(x), \omega') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε segue $\rho(\omega, \omega') = 0$ e quindi $\omega' = \omega$. \square

Teorema 3.3. *Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$, $a \in S$ e $\omega \in \Omega$. Allora $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \omega$ se e solo se per ogni successione (x_n) di punti $x_n \in S \setminus \{a\}$ tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \omega$.*

Dimostrazione. Si supponga che $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \omega$. Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\rho(f(x), \omega) < \varepsilon$ quando $0 < d(x, a) < \delta$. D'altro canto se (x_n) è una generica successione di punti $x_n \in S \setminus \{a\}$ tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, allora $\exists N(\delta)$ tale che $0 < d(x_n, a) < \delta$ quando $n \geq N$. Combinando le due proprietà troviamo che $\rho(f(x_n), \omega) < \varepsilon$ quando $n \geq N$, cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \omega$.

Viceversa, si supponga che per ogni successione (x_n) di punti $x_n \in S \setminus \{a\}$ tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ si abbia $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \omega$. Supponiamo, per assurdo, che sia falso che $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \omega$. In tal caso esisterebbe un $\varepsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0 \exists x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ con la proprietà $\rho(f(x), \omega) \geq \varepsilon$. Si scelga $\delta = 1/n$, e si chiami x_n il punto (uno dei punti) in $B(a, 1/n) \setminus \{a\}$ per cui $\rho(f(x_n), \omega) \geq \varepsilon$. Abbiamo così costruito una successione (x_n) in $S \setminus \{a\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ma per la quale $f(x_n)$ non converge a ω . Dobbiamo quindi ammettere che $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \omega$. \square

Teorema 3.4. *Siano $f : (S_1, d_1) \mapsto (S_2, d_2)$ e $g : (S_2, d_2) \mapsto (S_3, d_3)$ due funzioni tali che $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, con $a \in S_1$, $b \in S_2$ e $c \in S_3$. Allora $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ se e solo se è soddisfatta almeno una delle seguenti due proprietà*

- a) $\exists r > 0$ tale che $f(x) \neq b \forall x \in B(a, r) \setminus \{a\}$;
- b) $g(b) = c$.

Dimostrazione. Mostriamo, innanzitutto, che una sola delle due proprietà a) o b) è sufficiente per avere $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Si supponga che sia soddisfatta la proprietà a). Poiché $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_g(\varepsilon) > 0$ tale che $g(B(b, \delta_g) \setminus \{b\}) \subset B(c, \varepsilon)$. Poiché $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\forall \eta > 0 \exists \delta_f(\eta) > 0$ tale che $f(B(a, \delta_f) \setminus \{a\}) \subset B(b, \eta)$. Scelto $\eta = \delta_g$ e posto $\delta = \min\{\delta_f, r\}$, abbiamo $g(f(B(a, \delta) \setminus \{a\})) \subset g(B(b, \delta_g) \setminus \{b\}) \subset B(c, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario e $\delta(\varepsilon) > 0$. Si conclude che $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

Si supponga che sia soddisfatta la proprietà b). Poiché $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ e $g(b) = c$, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_g(\varepsilon) > 0$ tale che $g(B(b, \delta_g)) \subset B(c, \varepsilon)$. Poiché $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\forall \eta > 0 \exists \delta_f(\eta) > 0$ tale che $f(B(a, \delta_f) \setminus \{a\}) \subset B(b, \eta)$. Scelto $\eta = \delta_g$ e posto $\delta = \delta_f$, abbiamo $g(f(B(a, \delta) \setminus \{a\})) \subset g(B(b, \delta_g)) \subset B(c, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario e $\delta(\varepsilon) > 0$. Si conclude che $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

Viceversa, si abbia $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ e si supponga, per assurdo, che entrambe le proprietà a) e b) siano false. Se a) è falsa allora $\forall r > 0 \exists x \in B(a, r) \setminus \{a\}$ tale che $f(x) = b$. Posto $r = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, e detto x_n questo punto (uno di questi punti) concludiamo che esiste una successione (x_n) di punti $x_n \in S_1 \setminus \{a\}$ che converge ad a e tale che $f(x_n) = b$ per ogni n . Si consideri ora la successione $(g(f(x_n)))$ in S_3 . Per ogni n risulta $g(f(x_n)) = g(b)$ con $g(b) \neq c$ in quanto la proprietà b) è falsa. Pertanto la successione $(g(f(x_n)))$ non converge a c e per il Teorema 3.3 questo è in contraddizione con l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$. \square

Si osservi che se nessuna delle due proprietà a) e b) è soddisfatta, possono presentarsi due casi: il limite per $x \rightarrow a$ di $g \circ f$ esiste ma è diverso da c , oppure tale limite non esiste.

Esempio 3.5. Si considerino le funzioni $f : (\mathbb{R}, d) \mapsto (\mathbb{R}, d)$ e $g : (\mathbb{R}, d) \mapsto (\mathbb{R}, d)$, con d distanza euclidea, definite da

$$f(x) = 1, \\ g(y) = \begin{cases} 2 & y \neq 1 \\ 0 & y = 1 \end{cases}.$$

Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e $\lim_{y \rightarrow 1} g(y) = 2$ con f che non soddisfa la proprietà a) e g che non soddisfa la proprietà b). Il limite per $x \rightarrow 0$ di $g \circ f$ esiste ma vale $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$.

Esempio 3.6. Si considerino le funzioni $f : (\mathbb{R}, d) \mapsto (\mathbb{R}, d)$ e $g : (\mathbb{R}, d) \mapsto (\mathbb{R}, d)$, con d distanza euclidea, definite da

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\pi/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \\ g(y) = \begin{cases} y & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}.$$

Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$ con f che non soddisfa la proprietà a) e g che non soddisfa la proprietà b). Il limite per $x \rightarrow 0$ di $g \circ f$ non esiste in quanto

$$g(f(x)) = \begin{cases} x \sin(\pi/x) & x \in \mathbb{R} \setminus Z \\ 1 & x \in Z \end{cases},$$

dove $Z = \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots\}$ è l'insieme delle soluzioni di $f(x) = 0$.

Nel caso di funzioni complesse, alle proprietà del limite sopra derivate a partire dalla Definizione 3.1, aggiungiamo le seguenti.

Teorema 3.7. Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ e $a, w \in \mathbb{C}$. Allora

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w \\ \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w \end{cases}.$$

Dimostrazione. Elementare, sfruttando la definizione di limite e osservando che $\forall z \in G$ valgono le disuguaglianze

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} w| &= |\operatorname{Re}(f(z) - w)| \leq |f(z) - w|, \\ |\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} w| &= |\operatorname{Im}(f(z) - w)| \leq |f(z) - w|, \end{aligned}$$

e la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &= |\operatorname{Re}(f(z) - w) + i \operatorname{Im}(f(z) - w)| \\ &\leq |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} w|. \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 3.8. *Siano $f : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$, $g : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$, $a \in S$ e $w_f, w_g \in \mathbb{C}$. Se*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = w_f \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = w_g,$$

allora

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) &= w_f \pm w_g, \\ \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) &= w_f w_g, \\ \lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) &= w_f / w_g, \quad \text{se } w_g \neq 0. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Elementare, sfruttando la definizione di limite. \square

Nel piano complesso esteso la palla aperta di centro ∞ e raggio r è definita come l'insieme $B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : 1/|z| < r\}$. Di conseguenza, i limiti che coinvolgono il punto all'infinito possono essere riscritti in termini di opportuni limiti ordinari.

Teorema 3.9. *Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ e $a, w \in \mathbb{C}$. Allora*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0, \quad (3.1)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w, \quad (3.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0. \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Elementare, sfruttando la definizione di limite e quella di palla aperta di centro ∞ . \square

Esempio 3.10. Si considerino i seguenti tre limiti:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty \quad \text{poiché} \quad \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(z-1)^3} \right)^{-1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^3 = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4 \quad \text{poiché} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4z^{-2}}{(z^{-1}-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4}{(1-z)^2} = 4,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty \quad \text{poiché} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^{-2}+1}{z^{-1}-1} \right)^{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-z^2}{1+z^2} = 0.$$

3.2 Continuità

Definizione 3.11 (funzione continua). Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$. La funzione f si dice continua nel punto $a \in S$ se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ovvero se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \forall x \in B(a, \delta)$. La funzione f si dice continua se è continua in ogni punto di S , ovvero se $\forall a \in S$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a) > 0$ tale che $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ quando $d(x, a) < \delta$.

La continuità di una funzione in un punto o in tutto il dominio è regolata dalle seguenti proprietà.

Teorema 3.12. Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ e sia $a \in S$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- a) f è continua in a ;
- b) $\forall \varepsilon > 0 \ f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ contiene una palla di centro a ;
- c) se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Dimostrazione. Elementare. □

Esempio 3.13. La funzione distanza $d : S \times S \mapsto \mathbb{R}$ è continua. Basta osservare che, se (x_n) e (y_n) sono due qualsiasi successioni convergenti in S rispettivamente a x e y , allora $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$. Infatti, per la proprietà triangolare della distanza, si ha

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(x_n, y_n)| &= |d(x, y) - d(x_n, y) + d(x_n, y) - d(x_n, y_n)| \\ &\leq |d(x, y) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x_n, y_n)| \\ &\leq d(x, x_n) + d(y, y_n). \end{aligned}$$

D'altro canto $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y, y_n) = 0$ e quindi l'asserto.

Teorema 3.14. Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- a) f è continua;
- b) se Γ è aperto in Ω allora $f^{-1}(\Gamma)$ è aperto in S ;
- c) se Γ è chiuso in Ω allora $f^{-1}(\Gamma)$ è chiuso in S .

Dimostrazione. Dimostriamo nell'ordine le implicazioni a) \Rightarrow b), b) \Rightarrow c) e infine c) \Rightarrow a).

a) \Rightarrow b) Si supponga f continua. Sia $\Gamma \subset \Omega$ aperto e si consideri un punto $x \in f^{-1}(\Gamma) \subset S$. Poiché $f(x) \in \Gamma$ e Γ è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(f(x), \varepsilon) \subset$

Γ . Per il punto b) del Teorema 3.12 $\exists \delta > 0$ tale che $B(x, \delta) \subset f^{-1}(\Gamma)$. Dalla arbitrarietà di x segue che $f^{-1}(\Gamma)$ è aperto.

b) \Rightarrow c) Si supponga che ogni aperto in Ω sia trasformato da f^{-1} in un aperto in S . Se $\Gamma \subset \Omega$ è chiuso, allora $\Omega \setminus \Gamma$ è aperto e quindi anche $f^{-1}(\Omega \setminus \Gamma) = S \setminus f^{-1}(\Gamma)$ è aperto. Pertanto $f^{-1}(\Gamma)$ è chiuso.

c) \Rightarrow a) Si supponga che ogni chiuso in Ω sia trasformato da f^{-1} in un chiuso in S . Se, per assurdo, f è non continua in un qualche punto $x \in S$, allora esistono un $\varepsilon > 0$ e una successione (x_n) tali che per ogni n vale $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ mentre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Si ponga $\Gamma = \Omega \setminus B(f(x), \varepsilon)$. Per costruzione Γ è chiuso e ogni $x_n \in f^{-1}(\Gamma)$. Poiché $f^{-1}(\Gamma)$ è chiuso deve essere $x \in f^{-1}(\Gamma)$. Questo implica $\rho(f(x), f(x)) \geq \varepsilon$, che è assurdo, pertanto f deve essere continua. \square

Teorema 3.15. *Siano $f : (S_1, d_1) \mapsto (S_2, d_2)$ e $g : (S_2, d_2) \mapsto (S_3, d_3)$ continue. Allora $g \circ f : (S_1, d_1) \mapsto (S_3, d_3)$ è continua.*

Dimostrazione. Se A è aperto in (S_3, d_3) , allora $g^{-1}(A)$ è aperto in (S_2, d_2) e $f^{-1}(g^{-1}(A))$ è aperto in (S_1, d_1) . Osservando $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ e, di conseguenza, $f^{-1}(g^{-1}(x)) = (g \circ f)^{-1}(x)$, per il punto b) del Teorema 3.14 si conclude che $g \circ f$ è continua. \square

Nel caso di funzioni complesse valgono inoltre le seguenti proprietà.

Teorema 3.16. *Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$. La funzione f è continua in a se e solo se le funzioni componenti $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sono continue in $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$.*

Dimostrazione. Elementare, sfruttando la definizione di continuità e il Teorema 3.7. \square

Teorema 3.17. *Siano $f : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ e $g : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ continue. Allora le funzioni $f \pm g$ e fg sono continue. La funzione f/g è continua in ogni punto $x \in S$ tale che $g(x) \neq 0$.*

Dimostrazione. Elementare, sfruttando la definizione di continuità. \square

Ricordiamo che una funzione $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ si dice continua in S se $\forall x \in S$ e $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon, x) > 0$ tale che $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \forall y \in B(x, \delta)$. Diamo le seguenti ulteriori definizioni.

Definizione 3.18 (funzione uniformemente continua). Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$. La funzione f si dice uniformemente continua in S se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, dipendente solo da ε , tale che $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \forall x, y \in S$ con $d(x, y) < \delta$.

Definizione 3.19 (funzione Lipschitz continua). Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$. La funzione f si dice Lipschitz continua in S se $\exists M > 0$ tale che $\forall x, y \in S$ risulta $\rho(f(x), f(y)) < Md(x, y)$.

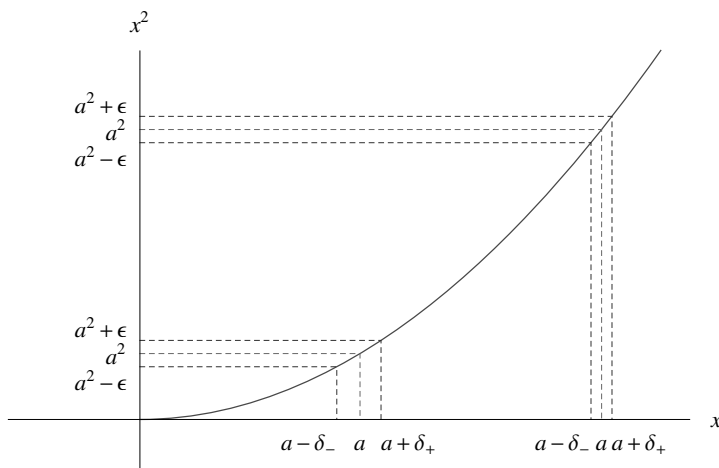


Fig. 3.1. Grafico di $f(x) = x^2$. Incrementi costanti della funzione $f(a) \pm \varepsilon$ corrispondono a incrementi della variabile $a - \delta_-$ e $a + \delta_+$ differenti a seconda del valore di a . Posto $\delta = \min(\delta_-, \delta_+)$ si ha $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Si osservi che $\delta(\varepsilon, a)$ decresce al crescere di a

È evidente che una funzione uniformemente continua è continua mentre una funzione Lipschitz continua è uniformemente continua. Il viceversa, in entrambi i casi, è in generale falso.

Esempio 3.20. La funzione $f(x) = x^2$ con $x \in [0, \infty)$ è continua ma non uniformemente continua. Infatti, fissato un numero reale $a > 0$ e scelto $\varepsilon > 0$ tale che $f(a) - \varepsilon > 0$, si indichi con $\delta(\varepsilon, a)$ il raggio della palla di centro a tale che $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Si ha

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon, a) &= \min(f^{-1}(f(a) + \varepsilon) - a, a - f^{-1}(f(a) - \varepsilon)) \\ &= \min\left(\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a, a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}\right) \\ &= \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a = 0$, risulta

$$\inf_{a \in [0, \infty)} \delta(\varepsilon, a) = 0,$$

pertanto la funzione f non è uniformemente continua in $[0, \infty)$.

Esempio 3.21. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0, \infty)$ è uniformemente continua ma non Lipschitz continua. Per dimostrare che f è uniformemente continua, si ragioni come nell'esempio precedente. Fissato un numero reale $a > 0$ e scelto $\varepsilon > 0$ tale che $f(a) - \varepsilon > 0$, si indichi con $\delta(\varepsilon, a)$ il raggio della palla

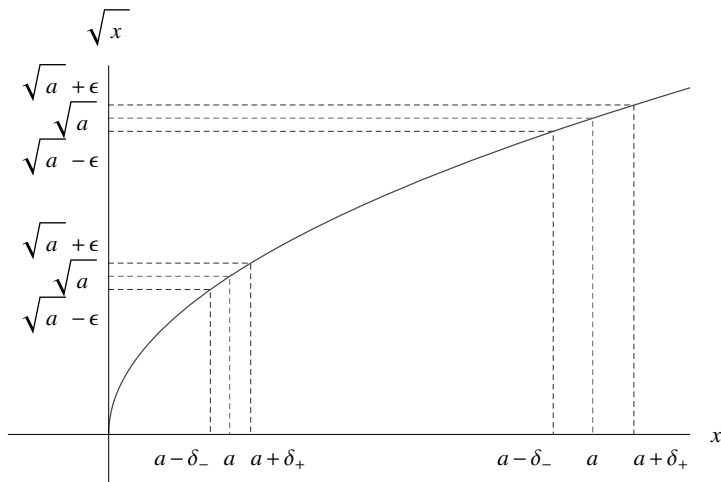


Fig. 3.2. Come nella figura precedente nel caso di $f(x) = \sqrt{x}$. Si osservi che $\delta(\epsilon, a)$ decresce al decrescere di a

di centro a tale che $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$. Si ha

$$\begin{aligned} \delta(\epsilon, a) &= \min \left(f^{-1}(f(a) + \epsilon) - a, a - f^{-1}(f(a) - \epsilon) \right) \\ &= \min \left((\sqrt{a} + \epsilon)^2 - a, a - (\sqrt{a} - \epsilon)^2 \right) \\ &= 2\epsilon\sqrt{a} - \epsilon^2 \\ &= \epsilon(\sqrt{a} + (\sqrt{a} - \epsilon)) > \epsilon\sqrt{a} > \epsilon^2, \end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che $f(a) - \epsilon > 0$, cioè $\sqrt{a} > \epsilon$. Poiché

$$\inf_{a \in [0, \infty)} \delta(\epsilon, a) \geq \epsilon^2 > 0,$$

la scelta $\delta(\epsilon) = \epsilon^2$ assicura l'uniforme continuità di f in $[0, \infty)$. D'altro canto la f non è Lipschitz continua in quanto, considerata la coppia di punti x e 0 , la disuguaglianza $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq M|x - 0|$ implica $M \geq 1/\sqrt{x}$ che non può essere soddisfatta per alcun valore della costante reale M quando $x \in (0, \infty)$.

Se f e g sono due funzioni uniformemente (Lipschitz) continue da (S, d) a \mathbb{C} , la loro somma $f+g$ è ancora una funzione uniformemente (Lipschitz) continua mentre il prodotto fg in generale no.

Esempio 3.22. La funzione $f(x) = x^{2/3}$ con $x \in [0, \infty)$ è uniformemente continua mentre $(ff)(x) = x^{4/3}$ è solo continua. Infatti, generalizzando i due esempi precedenti, si ha che una funzione del tipo $f(x) = x^\alpha$ è uniformemente continua in $[0, \infty)$ se $0 < \alpha < 1$, mentre per $\alpha > 1$ nello stesso dominio risulta solo continua.

Esempio 3.23. La funzione $f(x) = (1 + x^2)^{1/2}$ con $x \in \mathbb{R}$ è Lipschitz continua con costante $M = 1$ mentre $(ff)(x) = 1 + x^2$ è solo continua.

Teorema 3.24. Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ continua. Allora

- a) se S è compatto, $f(S)$ è un sottoinsieme compatto di Ω ;
- b) se S è connesso, $f(S)$ è un sottoinsieme connesso di Ω .

Dimostrazione.

- a) Sia (ω_n) una generica successione di punti $\omega_n \in f(S) \subset \Omega$. Per ogni ω_n $\exists x_n \in S$ tale che $\omega_n = f(x_n)$. Si consideri la successione (x_n) in S . Essendo S compatto, (x_n) ammette una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente a $x \in S$. Posto $f(x) = \omega \in f(S)$, poiché f è continua $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \omega_{n_k} = \omega$. Si conclude che $f(S)$ è sequenzialmente compatto.
- b) Sia $\Gamma \subset f(S)$ un sottoinsieme di $f(S) \subset \Omega$ non vuoto e contemporaneamente aperto e chiuso in Ω . Poiché $\Gamma \neq \emptyset$ deve anche essere $f^{-1}(\Gamma) \neq \emptyset$. Inoltre, poiché Γ è contemporaneamente aperto e chiuso in Ω e f è continua, $f^{-1}(\Gamma)$ è contemporaneamente aperto e chiuso in S . Essendo S connesso, deve essere $f^{-1}(\Gamma) = S$ e quindi $\Gamma = f(S)$. Si conclude che $f(S)$ è connesso. \square

Corollario 3.25. Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ continua e $K \subset S$. Allora

- a) se K è compatto, $f(K)$ è compatto in Ω ;
- b) se K è connesso, $f(K)$ è connesso in Ω .

Teorema 3.26. Sia $f : (S, d) \mapsto \mathbb{R}$ continua e $K \subset S$ compatto. Allora f assume in K un massimo e un minimo assoluti, cioè $\exists x_a, x_b \in K$ tali che $\forall x \in K$ si ha $f(x_a) \leq f(x) \leq f(x_b)$.

Dimostrazione. Si ponga $\alpha = \inf_{x \in K} f(x)$ e $\beta = \sup_{x \in K} f(x)$. Poiché f è continua e K compatto, il sottoinsieme $f(K) \subset \mathbb{R}$ è compatto e quindi, per il teorema di Heine-Borel, chiuso e limitato. Pertanto $\alpha, \beta \in f(K)$, cioè $\exists x_a, x_b \in K$ tali che $f(x_a) = \alpha$ e $f(x_b) = \beta$. \square

Corollario 3.27. Sia $f : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ continua e $K \subset S$ compatto. Allora $|f|$ assume in K un massimo e un minimo assoluti, cioè $\exists x_a, x_b \in K$ tali che $\forall x \in K$ si ha $|f(x_a)| \leq |f(x)| \leq |f(x_b)|$.

Dimostrazione. La funzione $|f(x)| : (S, d) \mapsto \mathbb{R}$ è continua. \square

Teorema 3.28. Sia $f : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$. Se f è continua in $a \in S$ e $f(a) \neq 0$, allora $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \neq 0 \forall x \in B(a, \delta)$.

Dimostrazione. Poiché f è continua in a , $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \forall x \in B(a, \delta)$. Si scelga $\varepsilon = |f(a)|/2$. Allora $|f(x) - f(a)| < |f(a)|/2 \forall x \in B(a, \delta)$. Se fosse $f(x) = 0$ per un qualche $x \in B(a, \delta)$ si avrebbe $|f(a)| < |f(a)|/2$. Dunque $f(x) \neq 0 \forall x \in B(a, \delta)$. \square

Teorema 3.29. Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ continua e S compatto, allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che f non risulti uniformemente continua. Allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ per almeno una coppia di punti $x, y \in S$ con distanza $d(x, y) < \delta$ si ha $\rho(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Scelto $\delta = 1/n$, questo vuol dire che $\forall n \geq 1$, $\exists x_n, y_n \in S$ tali che $d(x_n, y_n) < 1/n$ e $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Poiché S è compatto, è possibile estrarre da (x_n) una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente a un qualche punto $x \in S$. Se $\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$, allora anche $\lim_{n_k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x$. Infatti,

$$d(x, y_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) < d(x, x_{n_k}) + 1/n_k \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0.$$

Poiché f è continua, $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(x)$ e quindi

$$\rho(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \rho(f(x_{n_k}), f(x)) + \rho(f(x), f(y_{n_k})) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0$$

in contraddizione con la proprietà $\rho(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon \forall n_k \geq 1$. □

Esercizi

3.1. Determinare, se esistono, i seguenti limiti giustificando la risposta:

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{6(z^3 - 2)^2}{(z - 1)^4}, \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{101} - 1}{z - 1}, \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2 + 1)^2}{(z - i)^2}.$$

3.2. Determinare, se esistono, i seguenti limiti giustificando la risposta:

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{z^2 + 1}, \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sqrt{z}}{z}, \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - z^3 - z^2 + z}{z + 1}.$$

Si assuma $\sqrt{w} = \sqrt{|w|}e^{\frac{i}{2} \text{Arg } w}$.

3.3. Determinare, se esistono, i seguenti limiti giustificando la risposta:

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow 1} \text{Re} \frac{1 + z}{z - 3i}, \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow -3} |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \text{Arg } z}, \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^3.$$

3.4. Determinare, se esistono, i seguenti limiti giustificando la risposta:

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}, \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\sqrt{z + i} - \sqrt{z - i} \right) \sqrt{z}, \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - |z|^2}{z^2 + i}.$$

Si assuma $\sqrt{w} = \sqrt{|w|}e^{\frac{i}{2} \text{Arg } w}$.

3.5. Determinare, se esistono, i seguenti limiti giustificando la risposta:

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 - 2i}{z^2 - 2z + 2}, \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow -3} \frac{\sqrt{z}}{z}, \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow \infty} (\sqrt{z+2i} - \sqrt{z+i}).$$

Si assuma $\sqrt{w} = \sqrt{|w|}e^{\frac{i}{2} \text{Arg } w}$.

3.6. Provare che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ implica $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$. Mostrare con un esempio che il viceversa è falso se $w_0 \neq 0$. Cosa succede se $w_0 = 0$?

3.7. Studiare la convergenza delle seguenti successioni $(z_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\text{a) } z_n = \frac{i^n}{n}, \quad \text{b) } z_n = \frac{(1+i)^n}{n}, \quad \text{c) } z_n = \sqrt{n} \left(\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i} \right).$$

Si assuma $\sqrt{w} = \sqrt{|w|}e^{\frac{i}{2} \text{Arg } w}$.

3.8. Determinare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(z) = \text{Arg } z, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z}{z^3 + 27}, \quad \text{c) } f(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2} \text{Arg } z}.$$

3.9. Dimostrare che la funzione $f(z) = 1/z$ non è uniformemente continua in $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 2\}$.

3.10. Dimostrare che la funzione $f(z) = z^{-2}$ non è uniformemente continua nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 3\}$. Proporre una deformazione di D in modo tale che nel dominio deformato f risulti uniformemente continua.

3.11. Siano $f : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ e $g : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ due funzioni uniformemente continue in S . Dimostrare che $f + g : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ è uniformemente continua in S .

3.12. Siano $f : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ e $g : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ due funzioni Lipschitz continue in S . Dimostrare che $f + g : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ è Lipschitz continua in S .

Successioni e serie di funzioni

Sommario. Successioni di funzioni convergenti e convergenti uniformemente. Una successione di funzioni continue convergenti uniformemente ha come limite una funzione continua. Somme parziali di una successione di funzioni a valori in \mathbb{C} , serie di funzioni. Convergenza, convergenza uniforme e convergenza assoluta di una serie di funzioni. Una serie di funzioni assolutamente convergente è convergente. Criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme di una serie di funzioni. Limiti superiore e inferiore di una successione numerica reale. Serie di potenze. La serie geometrica. Raggio di convergenza, teorema di Abel. Criterio del rapporto.

4.1 Successioni e serie di funzioni

Sia S un insieme e (Ω, ρ) uno spazio metrico. Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_{n=1}^\infty$ con $f_n : S \mapsto (\Omega, \rho)$.

Definizione 4.1 (successione di funzioni convergente). La successione di funzioni (f_n) converge a $f : S \mapsto (\Omega, \rho)$, e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{oppure} \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x),$$

se $\forall x \in S$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x)$ intero tale che $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \forall n \geq N$.

Definizione 4.2 (successione di funzioni uniformemente convergente). La successione di funzioni (f_n) converge uniformemente a $f : S \mapsto (\Omega, \rho)$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \forall n \geq N$ e $\forall x \in S$.

Se S è equipaggiato con una distanza d vale il seguente teorema.

Teorema 4.3. Sia (f_n) una successione di funzioni continue $f_n : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ convergente uniformemente a $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$, allora f è continua.

Dimostrazione. Si prendano $x \in S$ e $\varepsilon > 0$ arbitrari. Poiché la successione (f_n) converge uniformemente a f , $\exists n$ tale che $\rho(f(y), f_n(y)) < \varepsilon/3 \forall y \in S$.

C. Presilla: *Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile*, 2^a edizione.

UNITEXT – La Matematica per il 3+2 72

DOI 10.1007/978-88-470-5501-8_4, © Springer-Verlag Italia 2014

D'altro canto, essendo f_n continua, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\rho(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon/3$ $\forall x, y \in S$ con $d(x, y) < \delta$. Per la proprietà triangolare della distanza, si ha allora

$$\begin{aligned}\rho(f(y), f(x)) &\leq \rho(f(y), f_n(y)) + \rho(f_n(y), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f(x)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,\end{aligned}$$

$\forall y \in S$ con $d(y, x) < \delta$. Dall'arbitrarietà di ε segue la continuità di f in x e dall'arbitrarietà di x la continuità di f in tutto S . \square

Può venire il dubbio che, se le funzioni $f_n : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ convergenti a $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ sono continue e S è compatto, allora la convergenza è sempre uniforme. In generale, ciò non è vero.

Esempio 4.4. Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ con

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x - 1/n| & 0 \leq x \leq 2/n \\ 0 & 2/n < x \leq 1 \end{cases}.$$

È immediato dimostrare che tale successione converge, puntualmente ma non uniformemente, a $f(x) = 0$.

Si consideri il caso speciale in cui $\Omega = \mathbb{C}$. Se (f_n) è una successione di funzioni $f_n : S \mapsto \mathbb{C}$ è possibile costruire la successione (s_n) delle funzioni somma parziale n -esima

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) : S \mapsto \mathbb{C}.$$

La successione di funzioni (s_n) è detta serie di funzioni associata alla successione di funzioni (f_n) .

Definizione 4.5 (serie di funzioni convergente). Si dice che la serie di funzioni associata alla successione di funzioni (f_n) con $f_n(x) : S \mapsto \mathbb{C}$ converge alla funzione $s(x) : S \mapsto \mathbb{C}$, e si scrive

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

se $\forall x \in S$

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Condizione necessaria affinché una serie di funzioni converga è che $\forall x \in S$ si abbia $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Infatti, se la serie di funzioni converge, $\forall x \in S$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n(x) - s_{n-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}(x) = 0.$$

Una serie di funzioni che non converge è detta divergente. In altre parole, una serie di funzioni è divergente se per qualche $x \in S$ si ha $s(x) = \infty$ oppure $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$.

Definizione 4.6 (serie di funzioni convergente uniformemente). Si dice che la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente a $s(x)$ se la successione delle somme parziali n -esime (s_n) converge uniformemente a s .

Definizione 4.7 (serie di funzioni convergente assolutamente). Si dice che la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge assolutamente se è convergente la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$.

Teorema 4.8. Sia (f_n) una successione di funzioni $f_n : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$. Se la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ è convergente assolutamente, allora tale serie è convergente.

Dimostrazione. Si ponga $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$. Per ipotesi $\exists g : (S, d) \mapsto \mathbb{R}$ tale che $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = g(x)$. In altre parole $\forall x \in S$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon, x)$ intero tale che $|g(x) - \sum_{k=1}^n |f_k(x)|| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Allora $\forall n, m \geq N$, supposto $m > n$, si ha

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Per ogni fissato $x \in S$ si ha quindi che $(s_n(x))$ è una successione di Cauchy in \mathbb{C} . Poiché \mathbb{C} è completo, $\exists s(x) \in \mathbb{C}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$. \square

Teorema 4.9 (criterio di Weierstrass). Sia (f_n) una successione di funzioni $f_n : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$. Se per ogni intero n $\exists M_n > 0$ con le proprietà $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in S$ e $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, allora la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ è convergente uniformemente.

Dimostrazione. Si ponga $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$. Per ogni coppia di interi m, n , si supponga $m > n$, e $\forall x \in S$ risulta

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^n M_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Poiché $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = M \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = M - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n M_k = 0.$$

Questo implica che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ intero tale che $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ intero tale che

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \quad (4.1)$$

$\forall m, n \geq N$ e $\forall x \in S$. In altre parole, per ogni fissato $x \in S$ la successione $(s_n(x))$ è una successione di Cauchy in \mathbb{C} . Per la completezza di \mathbb{C} tale successione è convergente. Si ponga $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$. Risulta così definita la funzione limite $s : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$. Prendendo il limite $m \rightarrow \infty$ nella (4.1), si ottiene infine che $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $|s(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon \forall n \geq N$ e $\forall x \in S$, cioè la successione di funzioni $(s_n(x))$ converge a $s(x)$ uniformemente in S . \square

4.2 Limiti superiore e inferiore di una successione reale

Definizione 4.10 (limite superiore, limite inferiore). Data una successione (a_n) , si definiscono i limiti superiore e inferiore

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad (4.2)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k. \quad (4.3)$$

Evidentemente questa definizione ha senso solo per successioni in insiemi dotati di ordinamento dove i concetti di sup e inf sono definiti. Nel seguito ci limiteremo a considerare il caso in cui $a_n \in \mathbb{R}$.

I limiti definiti nelle (4.2) e (4.3) esistono sempre. Nel caso del \limsup , posto $a_n^{(s)} = \sup_{k \geq n} a_k$, risulta che $(a_n^{(s)})$ è una successione monotona non crescente di numeri reali, $a_{n+1}^{(s)} \leq a_n^{(s)}$, oppure $a_n^{(s)} = +\infty \forall n$. Segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(s)} = a^{(s)}$ con $a^{(s)} \in \mathbb{R}$ oppure $a^{(s)} = \pm\infty$. Nel caso del \liminf , posto $a_n^{(i)} = \inf_{k \geq n} a_k$, risulta che $(a_n^{(i)})$ è una successione monotona non decrescente di numeri reali, $a_{n+1}^{(i)} \geq a_n^{(i)}$, oppure $a_n^{(i)} = -\infty \forall n$. Segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)} = a^{(i)}$ con $a^{(i)} \in \mathbb{R}$ oppure $a^{(i)} = \pm\infty$. Il significato di \limsup e \liminf è caratterizzato con precisione dal seguente:

Teorema 4.11. *Sia (a_n) una successione di numeri reali. Allora*

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a^{(s)} \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $a_n < a^{(s)} + \varepsilon \forall n \geq N$ e inoltre $a_n > a^{(s)} - \varepsilon$ per infiniti valori di n ;
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ se e solo se a_n assume valori arbitrariamente grandi per infiniti valori di n ;
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$;
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a^{(i)} \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $a_n > a^{(i)} - \varepsilon \forall n \geq N$ e inoltre $a_n < a^{(i)} + \varepsilon$ per infiniti valori di n ;
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ se e solo se a_n assume valori arbitrariamente piccoli per infiniti valori di n .

Dimostrazione. Vediamo in dettaglio i tre casi relativi al \limsup :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = a^{(s)} \in \mathbb{R}$ è equivalente a dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $|a^{(s)} - \sup_{k \geq n} a_k| < \varepsilon$, ovvero $a^{(s)} - \varepsilon < \sup_{k \geq n} a_k < a^{(s)} + \varepsilon$, $\forall n \geq N$. Questa coppia di disuguaglianze a sua volta è equivalente alle due condizioni $a_n < a^{(s)} + \varepsilon \forall n \geq N$ e $a^{(s)} - \varepsilon < a_n$ per infiniti valori di n .
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = +\infty$ è equivalente a dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $\sup_{k \geq n} a_k > 1/\varepsilon \forall n \geq N$. A sua volta ciò è equivalente a dire che a_n assume valori arbitrariamente grandi per infiniti valori di n .
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = -\infty$ è equivalente a dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $\sup_{k \geq n} a_k < -1/\varepsilon$, ovvero $a_n < -1/\varepsilon$, $\forall n \geq N$. A sua volta ciò è equivalente a dire che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Un analogo ragionamento si applica al \liminf . □

Esempio 4.12. Si considerino le seguenti successioni (a_n) di numeri reali:

- a) $a_n = n$
 $a_n^{(s)} = \sup_{k \geq n} a_k = +\infty$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(s)} = +\infty$,
 $a_n^{(i)} = \inf_{k \geq n} a_k = n$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)} = +\infty$;
- b) $a_n = 1 - 1/n$
 $a_n^{(s)} = \sup_{k \geq n} a_k = 1$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(s)} = 1$,
 $a_n^{(i)} = \inf_{k \geq n} a_k = 1 - 1/n$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)} = 1$;
- c) $a_n = 1 + 1/n$
 $a_n^{(s)} = \sup_{k \geq n} a_k = 1 + 1/n$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(s)} = 1$,
 $a_n^{(i)} = \inf_{k \geq n} a_k = 1$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)} = 1$;
- d) $a_n = -n$
 $a_n^{(s)} = \sup_{k \geq n} a_k = -n$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(s)} = -\infty$,
 $a_n^{(i)} = \inf_{k \geq n} a_k = -\infty$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)} = -\infty$;
- e) $a_n = (-1)^n$
 $a_n^{(s)} = \sup_{k \geq n} a_k = 1$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(s)} = 1$,
 $a_n^{(i)} = \inf_{k \geq n} a_k = -1$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)} = -1$.

Il precedente esempio suggerisce che quando esiste il limite ordinario della successione (a_n) allora i valori di \lim , \limsup e \liminf coincidono. Ciò è meglio precisato dai seguenti teoremi.

Teorema 4.13. *Sia (a_n) una successione di numeri reali. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n. \quad (4.4)$$

Dimostrazione. L'ovvia disuguaglianza $\inf_{k \geq n} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k$ è valida per ogni valore di n e quindi rimane valida prendendo il limite $n \rightarrow \infty$. □

Teorema 4.14. *Sia (a_n) una successione di numeri reali. Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a$.*

Dimostrazione. Se, per ipotesi, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $|a_n - a| < \varepsilon/2$, ovvero $a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2, \forall n \geq N$. Di conseguenza, $a - \varepsilon/2 < \sup_{k \geq n} a_k \leq a + \varepsilon/2$, ovvero $|\sup_{k \geq n} a_k - a| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon, \forall n \geq N$. Quindi $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Analogamente, $a - \varepsilon/2 \leq \inf_{k \geq n} a_k < a + \varepsilon/2$, ovvero $|\inf_{k \geq n} a_k - a| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon, \forall n \geq N$. Quindi $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Viceversa, si supponga che $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Ciò vuol dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists N_s(\varepsilon)$ e $\exists N_i(\varepsilon)$ interi tali che $|\sup_{k \geq n} a_k - a| < \varepsilon \forall n \geq N_s$ e $|\inf_{k \geq n} a_k - a| < \varepsilon \forall n \geq N_i$. Posto $N = \max(N_s, N_i)$, da queste relazioni segue che $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \forall n \geq N$, cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

I casi $a = \pm\infty$ seguono immediatamente dai punti c) ed e) del Teorema 4.11 e dal Teorema 4.13. \square

Teorema 4.15. *Siano (a_n) e (b_n) due successioni limitate di numeri reali. Allora*

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dimostrazione. Si osservi che $\forall k \geq n$ si ha $a_k + \inf_{k' \geq n} b_{k'} \leq a_k + b_k \leq a_k + \sup_{k' \geq n} b_{k'}$. Prendendo l'estremo inferiore di questa espressione per $k \geq n$ e osservando che $\inf_{k \geq n} (a_k + c) = \inf_{k \geq n} a_k + c$, si ha

$$\begin{aligned} \inf_{k \geq n} \left(a_k + \inf_{k' \geq n} b_{k'} \right) &= \inf_{k \geq n} a_k + \inf_{k' \geq n} b_{k'} \\ &\leq \inf_{k \geq n} (a_k + b_k) \\ &\leq \inf_{k \geq n} \left(a_k + \sup_{k' \geq n} b_{k'} \right) \\ &= \inf_{k \geq n} a_k + \sup_{k' \geq n} b_{k'}. \end{aligned}$$

Nel limite $n \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Per dimostrare le rimanenti disuguaglianze, si osservi che $\forall k \geq n$ si ha $\inf_{k' \geq n} a_{k'} + b_k \leq a_k + b_k \leq \sup_{k' \geq n} a_{k'} + b_k$. Prendendo l'estremo superiore di questa espressione per $k \geq n$ e osservando che $\sup_{k \geq n} (c + b_k) = c + \sup_{k \geq n} b_k$, si ha

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq n} \left(\inf_{k' \geq n} a_{k'} + b_k \right) &= \inf_{k' \geq n} a_{k'} + \sup_{k \geq n} b_k \\ &\leq \sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{k \geq n} \left(\sup_{k' \geq n} a_{k'} + b_k \right) \\
&= \sup_{k' \geq n} a_{k'} + \sup_{k \geq n} b_k.
\end{aligned}$$

Nel limite $n \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

□

Corollario 4.16. *Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali e sia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad (4.6)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (4.7)$$

Dimostrazione. Per il teorema precedente si ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Le relazioni (4.6) e (4.7) seguono immediatamente da queste osservando che $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. □

4.3 Serie di potenze

Definizione 4.17 (serie di potenze). Siano $z, z_0, a_n \in \mathbb{C}$ con $n \geq 0$ intero. Si chiama serie di potenze intorno a z_0 la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (4.8)$$

Esempio 4.18. Una serie notevole è la serie geometrica di ragione z

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (4.9)$$

Usando l'identità $(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$, per $z \neq 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Se $|z| < 1$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ e la serie geometrica converge a $1/(1-z)$. Tale convergenza è anche assoluta come si vede immediatamente cambiando $z \rightarrow |z|$ nel precedente ragionamento. Se invece $|z| > 1$, abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = \infty$ e quindi la serie diverge.

La serie geometrica (4.9) converge a $1/(1-z)$ uniformemente per $z \in \overline{B}(0, r)$ con $0 < r < 1$ arbitrario. Infatti, $\forall z \in \overline{B}(0, r)$ si ha

$$\left| \sum_{k=0}^n z^k - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Poiché $0 < r < 1$, $\forall \varepsilon > 0$ è possibile trovare un intero $N(\varepsilon)$ sufficientemente grande, ad esempio

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon(1-r))}{\ln r} \right\rceil - 1,$$

tale che $\forall n > N(\varepsilon)$ si abbia $r^{n+1}/(1-r) < \varepsilon$ e quindi

$$\left| \sum_{k=0}^n z^k - \frac{1}{1-z} \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in \overline{B}(0, r).$$

Si osservi che la convergenza della serie geometrica a $1/(1-z)$ non è uniforme in $B(0, 1)$. Infatti, scelto $0 < \varepsilon < 1$, per ogni intero n è possibile trovare $z \in B(0, 1)$ tale che $|\sum_{k=0}^n z^k - 1/(1-z)| = |z|^{n+1}/|1-z| > \varepsilon$.

Il risultato del precedente esempio è un archetipo dello schema di convergenza di una generica serie di potenze ed è usato nella dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 4.19 (Abel). *Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, si definisca il numero $R \in [0, \infty]$ mediante la formula di Hadamard*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (4.10)$$

Allora

- a) se $|z - z_0| < R$ la serie converge assolutamente;
- b) se $|z - z_0| > R$ la serie diverge (i termini della serie diventano illimitati);
- c) se $0 < r < R$ la serie converge uniformemente in $\overline{B}(z_0, r)$.

Dimostrazione. Per semplicità di notazione si ponga $w = z - z_0$.

- a) Escludiamo il caso banale $R = 0$ e supponiamo $0 \leq 1/R < \infty$. Se $|w| < R$, $\exists r$ tale che $|w| < r < R$. Poiché $1/r > 1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$, dalla definizione di \limsup otteniamo che $\exists N$ tale che $|a_n|^{1/n} < 1/r \quad \forall n \geq N$.

Quest'ultima disuguaglianza può essere riscritta come $|a_n| < 1/r^n$ e quindi $|a_n w^n| < (|w|/r)^n \forall n \geq N$. Poiché $|w|/r < 1$, la serie reale $\sum_{n=0}^{\infty} (|w|/r)^n$ converge e pertanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge assolutamente.

- b) Escludiamo il caso banale $R = \infty$ e supponiamo $0 < 1/R \leq \infty$. Se $|w| > R$, $\exists r$ tale che $|w| > r > R$. Poiché $1/r < 1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$, dalla definizione di \limsup otteniamo che $|a_n|^{1/n} > 1/r$ per infiniti valori di n . Quest'ultima disuguaglianza può essere riscritta come $|a_n| > 1/r^n$ e quindi $|a_n w^n| > (|w|/r)^n$ per infiniti valori di n . Poiché $|w|/r > 1$, i termini della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ diventano illimitati per $n \rightarrow \infty$.
- c) Escludiamo come al punto a) il caso banale $R = 0$ e supponiamo $0 \leq 1/R < \infty$. Se $0 < r < R$, $\exists \rho$ tale che $r < \rho < R$. Poiché $1/\rho > 1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$, dalla definizione di \limsup otteniamo che $\exists N$ tale che $|a_n|^{1/n} < 1/\rho \forall n \geq N$. Quest'ultima disuguaglianza può essere riscritta come $|a_n| < 1/\rho^n$ e quindi $\forall w \in \overline{B}(0, r)$ si ha $|a_n w^n| < (|w|/\rho)^n < (r/\rho)^n \forall n \geq N$. Poiché $r/\rho < 1$, la serie reale $\sum_{n=0}^{\infty} (r/\rho)^n$ converge e pertanto in base al criterio di Weierstrass la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge uniformemente in $\overline{B}(0, r)$. \square

Teorema 4.20 (criterio del rapporto). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza R . Allora*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (4.11)$$

se questo limite esiste.

Dimostrazione. Si supponga che esista il limite di $|a_n/a_{n+1}|$ per $n \rightarrow \infty$ e si indichi con α il suo valore. Posto $w = z - z_0$, si consideri $|w| < r < \alpha$. Per ipotesi $\exists N$ intero tale che $|a_n/a_{n+1}| > r \forall n \geq N$. Detto $A = |a_N| r^N$ e osservando che

$$\begin{aligned} |a_{N+k}| r^{N+k} &= |a_{N+k-1}| r^{N+k-1} \frac{|a_{N+k}|}{|a_{N+k-1}|} r \\ &< |a_{N+k-1}| r^{N+k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

si ha $|a_n| r^n \leq A \forall n \geq N$. Allora $|a_n w^n| = |a_n| r^n (|w|/r)^n \leq A (|w|/r)^n \forall n \geq N$. Essendo $|w| < r$ la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} (|w|/r)^n$ converge e quindi converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n w^n|$. Poiché $r < \alpha$ è arbitrario e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge assolutamente per $|w| < r$, il raggio di convergenza di tale serie deve essere $R \geq \alpha$.

Si consideri ora $|w| > r > \alpha$. Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}| = \alpha$, $\exists N$ intero tale che $|a_n/a_{n+1}| < r \forall n \geq N$. Detto $A = |a_N| r^N$ e osservando che

$$\begin{aligned} |a_{N+k}| r^{N+k} &= |a_{N+k-1}| r^{N+k-1} \frac{|a_{N+k}|}{|a_{N+k-1}|} r \\ &> |a_{N+k-1}| r^{N+k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

si ha $|a_n| r^n \geq A \quad \forall n \geq N$. Allora $|a_n w^n| = |a_n| r^n (|w|/r)^n \geq A (|w|/r)^n \quad \forall n \geq N$. Essendo $|w| > r$, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n w^n| = \infty$. Poiché $r > \alpha$ è arbitrario e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ diverge per $|w| > r$, il raggio di convergenza di tale serie deve essere $R \leq \alpha$.

In conclusione, risulta $R = \alpha$. \square

Esempio 4.21. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.12)$$

Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = 1/n!$ e il suo raggio di convergenza si calcola facilmente con il criterio del rapporto

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

La serie converge in tutto il piano complesso. Nel caso particolare $z = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Si ottiene così la formula di Eulero $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ a patto di definire la somma della serie (4.12) come l'esponenziale complesso $\exp z$.

Esercizi

4.1. Si consideri la successione di funzioni $f_n(z) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ con $f_n(z) = z^n$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che per $z \in \overline{B}(0, r)$ con $0 < r < 1$ tale successione converge uniformemente a $f(z) = 0$. Mostrare inoltre che la convergenza non è uniforme in $B(0, 1)$.

4.2. Dimostrare che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ con $a_n, b_n, A, B \in \mathbb{C}$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

4.3. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \cosh(n) z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} (n + c^n) z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} 3z^{\lfloor n \ln n \rfloor},$$

dove $c \in \mathbb{C}$ e $\lfloor x \rfloor$ con $x \in \mathbb{R}$ indica la parte intera di x .

4.4. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} i \sinh(n) z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} n^3 4^n z^n.$$

4.5. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n e^n z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!+n}, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} n^n \left(\frac{1+i}{2} \right)^{n^2} z^n.$$

4.6. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \cosh(n^2) z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(3n)!} z^n.$$

4.7. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^3} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (1+n^6) z^{n^2}.$$

4.8. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{3n} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{(1+i)^{n^2}} z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n^3}.$$

4.9. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} i^{-in} z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \log(in) z^{2n}.$$

Si ponga $\log(in) = \ln(n) + i\pi/2$ e si osservi che $i^{-in} = e^{n\pi/2}$.

4.10. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{1+n+n^2+n^3}, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 3^n z^n.$$

4.11. Dimostrare che le due serie di potenze

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^c z^n, \quad c \in \mathbb{C},$$

hanno lo stesso raggio di convergenza e determinare tale raggio nel caso in cui $a_n = e^{-n}$.

4.12. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} e^{n!} z^{n!}, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} e^n z^{n!}, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} e^{n!} z^n.$$

4.13. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \pi^n [(1 - (-1)^n)/2] z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} n^{2+i} \pi^n z^n.$$

Si ponga $n^{2+i} = n^2 e^{i \ln n}$.

4.14. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{e^{3n}} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}.$$

4.15. Sapendo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ha raggio di convergenza R_0 , determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} c_n^3 z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{3n}.$$

4.16. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} (n + c^n) z^n, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} 5^n z^{n!}.$$

4.17. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n e^{2n - \sqrt{n}} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} (\ln(1+n))^4 z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (2n)!}{(n!)^2} z^n.$$

4.18. Determinare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}.$$

Si ponga $e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}$.

4.19. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} z^n, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} c^n z^{n^2}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

4.20. Determinare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n} \right).$$

4.21. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una successione di numeri complessi $a_n \neq 0$ tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k-1}| < \infty.$$

Dimostrare che la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Cambia il risultato se $a_n \neq 0$ non sempre ma per una infinità di valori dell'indice n ?

Derivate e funzioni analitiche

Sommario. Derivate di funzioni complesse. Una funzione derivabile è continua. Formule di derivazione per la somma, il prodotto, il rapporto, la composizione di funzioni derivabili. Derivata della funzione inversa. Equazioni di Cauchy-Riemann. Condizioni sufficienti per l'esistenza della derivata. Funzioni analitiche. Punti singolari. Se f è analitica e $f' = 0$ in D aperto e connesso allora f è costante in D . Se f e \bar{f} sono analitiche in D aperto e connesso allora f è costante in D . Se f è analitica in D aperto e connesso e $|f|$ è costante in D allora f è costante in D . Derivate di funzioni complesse di variabile reale. Trasformazioni conformi. Una funzione f analitica è conforme in tutti i punti in cui $f' \neq 0$.

5.1 Derivate di funzioni complesse

Definizione 5.1 (funzione derivabile). Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto. La funzione f è derivabile in un punto $a \in G$ se esiste in \mathbb{C} il limite

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}. \quad (5.1)$$

Il valore di questo limite viene indicato con $f'(a)$ o con $df(z)/dz|_{z=a}$ e si chiama la derivata di f in a . Se f è derivabile in ogni punto di G allora f si dice derivabile in G .

Si osservi che la definizione di derivabilità in un punto assume che la funzione sia definita in tutto un intorno di tale punto. Posto $\Delta z = z - a$, si può anche scrivere

$$f'(a) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta z) - f(a)}{\Delta z}. \quad (5.2)$$

Se f è derivabile in tutto G , la derivata di f definisce una nuova funzione $f' : G \mapsto \mathbb{C}$. Se f' è derivabile in G diremo che f è derivabile due volte in G , *et cætera*.

Esempio 5.2. Si consideri $f(z) = z^2$. Tale funzione è derivabile in tutto \mathbb{C} , infatti $\forall z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

e quindi $f'(z) = 2z$.

Esempio 5.3. Si consideri $f(z) = |z|^2$. Poiché risulta

$$\frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

per $z \neq 0$ il limite $\Delta z \rightarrow 0$ di tale rapporto incrementale non esiste. Infatti con la scelta $\Delta z = (\Delta x, 0)$ per $\Delta x \rightarrow 0$ si ottiene il valore $\bar{z} + z$ mentre con la scelta $\Delta z = (0, \Delta y)$ per $\Delta y \rightarrow 0$ si ha $\bar{z} - z$ e per $z \neq 0$ tali valori non coincidono. La funzione f è invece derivabile in $z = 0$ e vale $f'(0) = 0$.

La funzione appena considerata $f(z) = |z|^2$ è un esempio di funzione continua ma non derivabile. Il viceversa è invece sempre vero.

Teorema 5.4. *Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto. Se f è derivabile in $a \in G$, allora f è continua in a .*

Dimostrazione. Usando le proprietà del limite e l'esistenza di $f'(a)$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) &= \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 5.5 (derivata di somma, prodotto, rapporto). *Siano $f : G \mapsto \mathbb{C}$ e $g : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto due funzioni derivabili in G , allora sono anche derivabili in G le funzioni $f \pm g$, fg e f/g , in quest'ultimo caso $\forall z \in G$ tale che $g(z) \neq 0$. Inoltre valgono le usuali regole di derivazione:*

- a) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$;
- b) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
- c) $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z))/g(z)^2$.

Dimostrazione. Elementare, segue dalla definizione di derivata e dalle proprietà del limite. \square

Una funzione costante $f(z) = c$ con $c \in \mathbb{C}$ ha derivata nulla $f'(z) = 0$ in tutto \mathbb{C} . Per la funzione $f(z) = z$ si ha $f'(z) = 1 \forall z \in \mathbb{C}$. Per le potenze intere $f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{Z}$, segue $f'(z) = nz^{n-1}$ supponendo $z \neq 0$ nel caso in cui $n \leq 0$.

Teorema 5.6 (derivata di funzione composta). *Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $g : F \mapsto \mathbb{C}$ con $F \subset \mathbb{C}$ aperto tale che $F \supset f(G)$. Se f è derivabile in $a \in G$ e g è derivabile in $f(a) \in F$, allora $g \circ f$ è derivabile in a e la sua derivata vale*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \quad (5.3)$$

Dimostrazione. Poiché G è aperto, $\exists r > 0$ tale che $B(a, r) \subset G$. Per dimostrare l'asserto, basta provare che, presa una qualsiasi successione (z_n) con $z_n \in B(a, r)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, il seguente limite esiste e ha il valore specificato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(g \circ f)(z_n) - (g \circ f)(a)}{z_n - a} = g'(f(a))f'(a). \quad (5.4)$$

Si supponga, per iniziare, che per ogni n risulti $f(z_n) \neq f(a)$. In questo caso possiamo scrivere

$$\frac{(g \circ f)(z_n) - (g \circ f)(a)}{z_n - a} = \frac{g(f(z_n)) - g(f(a))}{f(z_n) - f(a)} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a}. \quad (5.5)$$

Poiché f è continua in a si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$ e quindi poiché f e g sono derivabili in a e $f(a)$ rispettivamente, entrambe le frazioni del membro di destra della (5.5) hanno limite per $n \rightarrow \infty$ e il prodotto di tali limiti vale $g'(f(a))f'(a)$.

Si supponga ora che per infiniti valori dell'indice n si abbia $f(z_n) = f(a)$ e per ancora infiniti valori di n risulti $f(z_n) \neq f(a)$. La successione (z_n) è allora l'unione di due successioni (s_n) e (w_n) tali che $f(s_n) = f(a)$ e $f(w_n) \neq f(a)$ per ogni valore dei rispettivi indici n . Per dimostrare che vale la (5.4) basta mostrare che essa è vera per entrambe le successioni (s_n) e (w_n) . Innanzitutto si osservi che, poiché f è derivabile in a , risulta $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(s_n) - f(a))/(s_n - a) = 0$. Poiché $g'(f(a)) \in \mathbb{C}$, il membro di destra della (5.4) è 0. Nel caso della successione (s_n) , il membro di sinistra della (5.4) vale $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(f(s_n)) - g(f(a)))/(s_n - a) = 0$. Nel caso della successione (w_n) , per quanto già dimostrato si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(f(w_n)) - g(f(a)))/(w_n - a) = g'(f(a))f'(a) = 0$. In conclusione, la (5.4) è ancora valida con entrambi i membri pari a 0.

Infine, per le successioni (z_n) in cui $f(z_n) = f(a)$ oppure $f(z_n) \neq f(a)$ solo per un numero finito di valori di n , la dimostrazione della (5.4) segue immediatamente dai casi già considerati. \square

Teorema 5.7 (derivata di funzione inversa). *Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto. Se $f(z) = w$ è biunivoca e la sua funzione inversa $f^{-1}(w) = z$ è con-*

tinua nell'aperto $f(G)$, allora, se f è derivabile in $a \in G$ e $f'(a) \neq 0$, f^{-1} è derivabile in $w = f(a)$ e la sua derivata vale

$$\left. \frac{df^{-1}(w)}{dw} \right|_{w=f(a)} = \frac{1}{f'(a)}. \quad (5.6)$$

Dimostrazione. Poiché f è biunivoca, se $w = f(z)$ è diverso da $f(a)$ allora $z \neq a$. Pertanto il rapporto incrementale di f^{-1} intorno al punto $f(a)$ può essere scritto come

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(f(a))}{w - f(a)} = \frac{z - a}{f(z) - f(a)} = \frac{1}{(f(z) - f(a))/(z - a)}.$$

Poiché f^{-1} è continua in $f(G)$, si ha $\lim_{w \rightarrow f(a)} f^{-1}(w) = f^{-1}(f(a))$ ovvero $z \rightarrow a$ quando $w \rightarrow f(a)$. In conclusione,

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow f(a)} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(f(a))}{w - f(a)} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(f(z) - f(a))/(z - a)} \\ &= \frac{1}{f'(a)} \end{aligned}$$

esiste e vale la formula (5.6). □

5.2 Equazioni di Cauchy-Riemann

Teorema 5.8. Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto e si ponga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $z = x + iy$ e $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Se f è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, allora le funzioni u e v ammettono derivate prime parziali in (x_0, y_0) e queste soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad (5.7)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (5.8)$$

Inoltre $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.

Dimostrazione. Posto $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, si scelgano gli incrementi reali Δx e Δy sufficientemente piccoli affinché $B(z_0, |\Delta z|) \subset G$. Il corrispondente incremento di f vale

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \\ &= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] \\ &\quad + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)] \end{aligned}$$

e la derivata di f in z_0 si scrive

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z} + i \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta f}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Poiché entrambi i limiti delle parti reale e immaginaria di $\Delta f/\Delta z$ esistono, il loro valore è indipendente dal modo in cui $\Delta z \rightarrow 0$. Se $\Delta z = (\Delta x, 0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0), \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0), \end{aligned}$$

mentre per $\Delta z = (0, \Delta y)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = v_y(x_0, y_0), \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-u(x_0, y_0 + \Delta y) + u(x_0, y_0)}{\Delta y} = -u_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Si conclude che le derivate parziali rispetto a x e y di u e v esistono in (x_0, y_0) e sono legate dalle relazioni (5.7) e (5.8). Infine per la (5.9) si ha $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$. \square

Esempio 5.9. Si consideri la funzione $f(z) = z^2$. Posto $z = x + iy$ e $f = u + iv$, si ha $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$. Sappiamo che f è derivabile in tutto \mathbb{C} , dunque $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha $u_x(x, y) = v_y(x, y) = 2x$ e $u_y(x, y) = -v_x(x, y) = -2y$. Infine, $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x + i2y = 2z = f'(z)$.

Esempio 5.10. Si consideri la funzione $f(z) = |z|^2$. Si ha $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$. Pertanto $u_x(x, y) = 2x$, $u_y(x, y) = 2y$, $v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0$. Le equazioni di Cauchy-Riemann non sono soddisfatte per $(x, y) \neq (0, 0)$ e quindi $f(z)$ non è derivabile per $z \neq 0$. In $z = 0$, per quanto visto in precedenza, f è derivabile. Segue che le equazioni di Cauchy-Riemann per u e v sono soddisfatte in $(0, 0)$.

Le equazioni di Cauchy-Riemann (5.7-5.8) rappresentano una condizione necessaria, in generale non sufficiente, affinché la funzione $f(z)$ sia derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$.

Esempio 5.11. Si consideri la funzione $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z| \operatorname{Im} z|}$ intendendo per la radice il ramo positivo. Le funzioni componenti $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ e $v(x, y) = 0$ hanno in $(0, 0)$ derivate prime parziali $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = v_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 0$. Le equazioni di Cauchy-Riemann sono pertanto soddisfatte in $(0, 0)$ ma f non è derivabile in $z = 0$. Infatti il rapporto incrementale $(f(0 + \Delta z) - f(0))/\Delta z$ vale $1/(1 \pm i)$ a seconda che $\Delta z = t \pm it$ con $t > 0$.

Teorema 5.12. *Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto e si ponga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $z = x + iy$ e $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Se le funzioni u e v ammettono derivate prime parziali in G e queste sono continue in $(x_0, y_0) \in G$ e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ e $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$, allora f è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$ e risulta $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.*

Dimostrazione. Posto $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, si scelgano gli incrementi reali Δx e Δy sufficientemente piccoli affinché $B(z_0, |\Delta z|) \subset G$. Scriviamo il corrispondente incremento di f come $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ con $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$ e $\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$. Poiché u_x, u_y, v_x, v_y esistono continue in (x_0, y_0) , valgono gli sviluppi in serie di Taylor

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_u(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \\ \Delta v &= v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_v(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},\end{aligned}$$

dove $\varepsilon_u(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0$ e $\varepsilon_v(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0$. Da tali sviluppi e utilizzando le equazioni di Cauchy-Riemann, otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta f &= [u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)](\Delta x + i\Delta y) \\ &\quad + [\varepsilon_u(\Delta x, \Delta y) + i\varepsilon_v(\Delta x, \Delta y)]\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + [\varepsilon_u(\Delta x, \Delta y) + i\varepsilon_v(\Delta x, \Delta y)] \frac{|\Delta z|}{\Delta z}.$$

Poiché $|\Delta z|/|\Delta z| = 1$ e $\varepsilon_u + i\varepsilon_v \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$, il limite di $\Delta f/\Delta z$ per $\Delta z \rightarrow 0$ esiste e inoltre si ha $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$. \square

A volte è comodo esprimere la funzione f in termini delle coordinate polari r, θ anziché di quelle cartesiane x, y . Posto allora $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con $z = r \operatorname{cis}(\theta)$, è semplice dimostrare che le equazioni di Cauchy-Riemann (5.7) e (5.8) nel punto (x_0, y_0) sono equivalenti a

$$ru_r(r_0, \theta_0) = v_\theta(r_0, \theta_0), \quad (5.10)$$

$$u_\theta(r_0, \theta_0) = -rv_r(r_0, \theta_0), \quad (5.11)$$

dove (r_0, θ_0) sono le coordinate connesse a (x_0, y_0) mediante la trasformazione $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Infine risulta $f'(z_0) = (u_r(r_0, \theta_0) + iv_r(r_0, \theta_0))e^{-i\theta_0}$.

5.3 Funzioni analitiche

Definizione 5.13 (funzione analitica). Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto. La funzione f si dice analitica in G se $\exists f'(z) \forall z \in G$. Se G è chiuso, con f

analitica in G intenderemo che f è analitica in un qualche aperto contenente G . In particolare, f analitica in z_0 significa che $\exists r > 0$ tale che f è analitica in $B(z_0, r)$.

Definizione 5.14 (funzione intera). Una funzione si dice intera se è analitica in tutto \mathbb{C} .

Esempio 5.15. La funzione $f(z) = |z|^2$ non ha punti di analiticità, anche se essa è derivabile in $z = 0$.

Definizione 5.16 (punto singolare). Un punto z_0 è detto punto singolare di f se f è non analitica in z_0 ma $\forall \varepsilon > 0$ f è analitica in qualche punto di $B(z_0, \varepsilon)$.

Esempio 5.17. La funzione $f(z) = 1/z$ è analitica in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ha in $z = 0$ un punto singolare (isolato). La funzione $f(z) = \operatorname{Arg} z - i \log |z|$ è analitica in $\mathbb{C} \setminus \{z = -t, t \in [0, \infty)\}$. Ogni punto del semiasse reale negativo, origine inclusa, è un punto singolare di f .

È evidente che se f e g sono due funzioni analitiche in G , anche le funzioni $f \pm g$, fg e f/g sono analitiche in G , ad esclusione, nel caso del rapporto, dei punti $z \in G$ in cui $g(z) = 0$. Poiché le funzioni costanti e la funzione identità sono analitiche in tutto \mathbb{C} , segue che i polinomi sono funzioni intere mentre le funzioni razionali sono analitiche nel complemento dell'insieme degli zeri del denominatore.

Teorema 5.18. Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Se f è analitica in D e $f'(z) = 0 \forall z \in D$, allora f è costante in D .

Dimostrazione. Poiché $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $z = x + iy$, è derivabile in D , in D esistono le derivate prime parziali delle funzioni componenti u e v . Inoltre valendo le condizioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, ed essendo $f' = u_x + iv_x = 0$, si ha $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ in tutto D . Siano z e w due qualsiasi punti di D . Poiché $D \subset \mathbb{C}$ è aperto e connesso, tali punti possono essere congiunti da una poligonale di vertici z_1, z_2, \dots, z_n con $z_1 = z$ e $z_n = w$. Si consideri, per cominciare, il segmento $[z_1, z_2]$. Un qualsiasi punto di tale segmento ha parti reale e immaginaria parametrizzabili come

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

dove $x_1 + iy_1 = z_1$ e $x_2 + iy_2 = z_2$. La derivata totale di u in funzione del parametro t vale

$$\frac{du}{dt} = u_x(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + u_y(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} = 0,$$

pertanto

$$u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = \int_0^1 \frac{du}{dt} dt = 0.$$

Passando a considerare i successivi segmenti $[z_{k-1}, z_k]$, $k = 3, \dots, n$, si ha $u(x_k, y_k) = u(x_{k-1}, y_{k-1})$ e in conclusione $u(x_1, y_1) = u(x_n, y_n)$. Analogamente $v(x_1, y_1) = v(x_n, y_n)$ e quindi $f(z) = f(w)$. Dall'arbitrarietà di z e w segue l'asserto. \square

Teorema 5.19. *Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Se f e \bar{f} sono analitiche in D , allora f e \bar{f} sono costanti in D .*

Dimostrazione. Si ponga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $\bar{f}(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ con $z = x + iy$. Poiché f e \bar{f} sono analitiche in D , le funzioni u e v e le funzioni U e V soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann in ogni punto $(x, y) \in D$

$$\begin{aligned} u_x &= v_y & u_y &= -v_x, \\ U_x &= V_y & U_y &= -V_x. \end{aligned}$$

La seconda di queste coppie di equazioni è equivalente a

$$u_x = -v_y \quad u_y = v_x$$

in quanto, essendo $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$, si ha $U(x, y) = u(x, y)$ e $V(x, y) = -v(x, y)$. Necessariamente allora deve risultare $u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \quad \forall (x, y) \in D$ e dunque $f'(z) = 0 \quad \forall z \in D$. Essendo D aperto e connesso, per il Teorema 5.18 segue che f è costante in D . \square

Teorema 5.20. *Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Se f è analitica in D e $|f|$ è costante in D , allora f è costante in D .*

Dimostrazione. Sia $|f(z)| = c \quad \forall z \in D$. Se $c = 0$, allora $f(z) = 0 \quad \forall z \in D$. Se $c > 0$, allora $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$ e si ha $\bar{f}(z) = c^2/f(z)$. Segue che f e \bar{f} sono entrambe analitiche in D e quindi per il Teorema 5.19 costanti in D . \square

5.4 Derivate di funzioni complesse di variabile reale

È di grande utilità considerare funzioni complesse $f(t)$ di variabile reale t . Le proprietà di derivabilità di tali funzioni sono strettamente legate a quelle delle funzioni reali componenti $\operatorname{Re} f(t)$ e $\operatorname{Im} f(t)$.

Definizione 5.21. Una funzione $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, è derivabile nel punto $t \in (a, b)$ se il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

esiste ed è finito. Il valore di tale limite si indica con $f'(t)$. Se $t = a$ oppure $t = b$, la definizione viene modificata prendendo il limite destro o sinistro rispettivamente. Se f è derivabile in ogni punto di $[a, b]$ allora f si dice derivabile.

Teorema 5.22. Una funzione $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è derivabile se e solo se le funzioni componenti $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sono derivabili. Inoltre $\forall t \in [a, b]$ si ha $f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + i(\operatorname{Im} f)'(t)$.

Dimostrazione. Elementare. \square

Teorema 5.23. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è derivabile e $f'(t) = 0 \ \forall t \in [a, b]$, allora f è costante.

Dimostrazione. Poiché $f'(t) = 0 \ \forall t \in [a, b]$ allora $(\operatorname{Re} f)'(t) = (\operatorname{Im} f)'(t) = 0 \ \forall t \in [a, b]$. Segue che $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono costanti e quindi f è costante. \square

Teorema 5.24. Siano $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ e $g : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ due funzioni derivabili in $[a, b]$, allora sono derivabili in $[a, b]$ le funzioni $f \pm g$, fg e f/g , in quest'ultimo caso $\forall t \in [a, b]$ tale che $g(t) \neq 0$. Inoltre valgono le usuali regole di derivazione:

- a) $(f \pm g)'(t) = f'(t) \pm g'(t)$;
- b) $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$;
- c) $(f/g)'(t) = (f'(t)g(t) - f(t)g'(t))/g(t)^2$.

Teorema 5.25. Siano $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ e $g : [c, d] \mapsto [a, b]$ derivabili, allora $f \circ g : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ è derivabile e $\forall t \in [c, d]$ la derivata vale

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

Dimostrazione. Poiché $f(g(t)) = \operatorname{Re} f(g(t)) + i \operatorname{Im} f(g(t))$, la dimostrazione segue dall'analogo teorema per funzioni reali. \square

Non tutte le proprietà delle funzioni reali si estendono alle funzioni di variabile reale a valori complessi. Ad esempio, non è in generale valido il teorema del valore medio in base al quale, se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ è derivabile, allora $\exists c \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Si consideri, ad esempio, $f(t) = \cos(t) + i \sin(t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha $f(2\pi) - f(0) = 0$ mentre $f'(t) = -\sin(t) + i \cos(t) \neq 0 \ \forall t \in (0, 2\pi)$ in quanto in tutto questo intervallo risulta $|f'(t)| = 1$.

5.5 Trasformazioni conformi

Un cammino nel piano complesso è una funzione continua $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se $\forall t \in [a, b]$ esiste

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h},$$

intendendo che $h \rightarrow 0^+$ se $t = a$ e $h \rightarrow 0^-$ se $t = b$, e inoltre $\gamma' : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è continua, allora γ è detto cammino regolare. È evidente che, se γ è un cammino regolare e per $t = t_0$ risulta $\gamma'(t_0) \neq 0$, allora γ ha una retta tangente nel punto $z_0 = \gamma(t_0)$ il cui coefficiente angolare è $\text{Im } \gamma'(t_0) / \text{Re } \gamma'(t_0)$. In altre parole, $\arg(\gamma'(t_0))$ è, modulo 2π , l'angolo formato con l'asse reale dalla retta tangente a γ in $z_0 = \gamma(t_0)$.

Esempio 5.26. Si consideri la semicirconferenza $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Si tratta di un cammino regolare con $\gamma'(t) = ie^{it} \neq 0 \ \forall t \in [0, \pi]$ che ammette tangente in ogni suo punto. Per $0 \leq t \leq \pi$, la retta tangente a γ forma con l'asse reale un angolo dato da $\arg(\gamma'(t)) = \arg(e^{i(t+\pi/2)}) = t + \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione 5.27 (trasformazione conforme). Sia $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto. La funzione f si dice trasformazione conforme in $z_0 \in G$ se

- l'angolo formato da due cammini regolari che si intersecano in z_0 è uguale all'angolo formato dalle loro immagini tramite f nel punto di intersezione $f(z_0)$;
- esiste, finito e diverso da zero, il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}. \quad (5.12)$$

La funzione f è una trasformazione conforme in G se essa è una trasformazione conforme in ogni punto di G .

Si osservi che una trasformazione conforme preserva sia l'ampiezza che il verso dell'angolo di rotazione di un cammino. Inoltre, l'esistenza del limi-

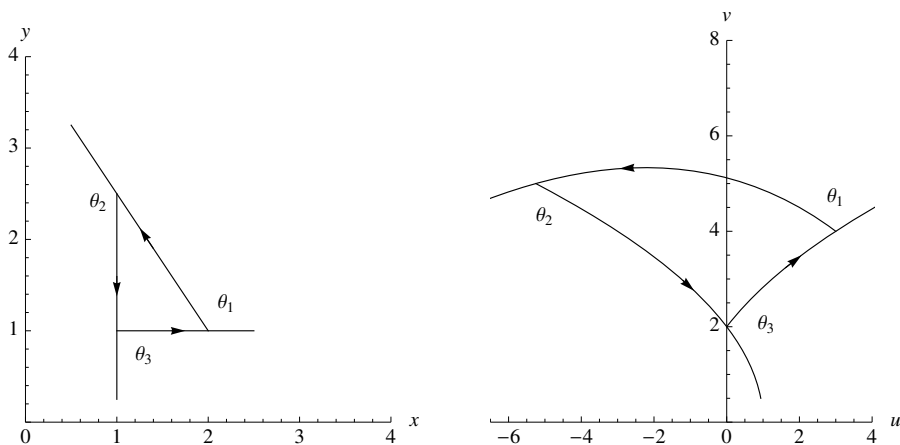


Fig. 5.1. Trasformazione conforme di tre cammini rettilinei che formano un triangolo rettangolo (sinistra) mediante la funzione $f(x+iy) = (x+iy)^2 = u(x,y) + iv(x,y)$ (destra)

te (5.12) assicura l'esistenza, per z prossimo a z_0 , di un fattore di scala $|f(z) - f(z_0)| / |z - z_0|$. Anche se angolo di rotazione e fattore di scala cambiano, in generale, al variare del punto z_0 , per motivi di continuità l'immagine tramite f di una regione piccola intorno a z_0 avrà, approssimativamente, la stessa forma della regione di partenza. Una trasformazione che mantiene l'ampiezza dell'angolo tra due cammini regolari ma non il verso di tale angolo è detta isogona o trasformazione conforme del secondo tipo.

Esempio 5.28. Si consideri la trasformazione $f(z) = \bar{z}$. I due cammini $\gamma_1(t) = t$ e $\gamma_2(t) = te^{i\pi/4}$, $0 \leq t \leq 1$, formano un angolo orientato, dal cammino 1 al cammino 2, pari a $\pi/4$. I cammini trasformati, $\sigma_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t$ e $\sigma_2(t) = f(\gamma_2(t)) = te^{-i\pi/4}$, formano invece un angolo pari a $-\pi/4$. La trasformazione è isogona non conforme.

Teorema 5.29. *Sia $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analitica in $G \subset \mathbb{C}$ aperto. Allora f è una trasformazione conforme in ogni punto $z_0 \in G$ dove $f'(z_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. Sia z_0 un punto di G tale che $f'(z_0) \neq 0$. Si osservi che f è derivabile in tutto un intorno di z_0 . Siano $\gamma_1(t)$, $a_1 \leq t \leq b_1$, e $\gamma_2(t)$, $a_2 \leq t \leq b_2$, due arbitrari cammini regolari tali che, per due opportuni valori t_1 e t_2 dei parametri, risulti $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ con $\gamma_1'(t_1) \neq 0$ e $\gamma_2'(t_2) \neq 0$. Indichiamo con $\sigma_1(t) = (f \circ \gamma_1)(t)$, $a_1 \leq t \leq b_1$, e $\sigma_2(t) = (f \circ \gamma_2)(t)$, $a_2 \leq t \leq b_2$ i cammini trasformati tramite f . Risulta $\sigma_1(t_1) = \sigma_2(t_2) = f(z_0)$, cioè i cammini trasformati si intersecano nel punto $w_0 = f(z_0)$. In questo punto σ_1 e σ_2 sono derivabili con derivata non nulla. Infatti, per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha $\sigma_1'(t_1) = f'(z_0)\gamma_1'(t_1) \neq 0$ e $\sigma_2'(t_2) = f'(z_0)\gamma_2'(t_2) \neq 0$. Pertanto esistono le rette tangenti a σ_1 e σ_2 in w_0 e tali rette formano con l'asse reale gli angoli $\arg \sigma_1'(t_1) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_1'(t_1)$ e $\arg \sigma_2'(t_2) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_2'(t_2)$. Si conclude che l'angolo orientato tra i cammini σ_1 e σ_2 che si intersecano in w_0 coincide con quello tra i cammini γ_1 e γ_2 che si intersecano in z_0 ,

$$\arg \sigma_2'(t_2) - \arg \sigma_1'(t_1) = \arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1).$$

Infine, poiché esiste $f'(z_0) \neq 0$ allora esiste anche, finito e diverso da zero,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

Si conclude che f è una trasformazione conforme in z_0 . □

Corollario 5.30. *Sia $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto. Allora f è analitica in G e $f'(z) \neq 0 \forall z \in G$ se e solo se f è conforme in G .*

Dimostrazione. La condizione necessaria segue dal teorema precedente. Per la condizione sufficiente si osservi che, se f è una trasformazione conforme in G , per la Definizione 5.27 in ogni punto $z \in G$ devono esistere $\arg f'(z)$ e $|f'(z)|$ con, necessariamente, $|f'(z)| \neq 0$. Pertanto, $\forall z \in G$ esiste $f'(z) \neq 0$. □

Esempio 5.31. Si considerino in \mathbb{R}^2 le curve di livello regolari $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e si supponga che le due curve si intersechino nel punto (x_0, y_0) . Se le funzioni u e v costituiscono le parti reale e immaginaria di una funzione complessa

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

analitica in $z_0 = x_0 + iy_0$ con $f'(z_0) \neq 0$, allora f trasforma in modo conforme le due curve di livello nelle rette $u = c_1$ e $v = c_2$. Tali rette si intersecano nel punto $f(z_0)$ formando un angolo retto. Segue che le curve di livello $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$ si intersecano in (x_0, y_0) ortogonalmente.

Le trasformazioni conformi giocano un ruolo cruciale nell'approccio geometrico alla teoria delle funzioni analitiche. Per un approfondimento si veda [1, 12].

Esercizi

5.1. Dimostrare che, se esiste il limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right),$$

con $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $z = x + iy$, allora esistono le derivate parziali $u_x(x, y)$ e $v_y(x, y)$ e si ha $u_x(x, y) = v_y(x, y)$.

5.2. Dimostrare che, se esiste il limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right),$$

con $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $z = x + iy$, allora esistono le derivate parziali $u_y(x, y)$ e $v_x(x, y)$ e si ha $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$.

5.3. Siano f e g due funzioni tali che $f(z_0) = g(z_0) = 0$, entrambe derivabili in z_0 con $g'(z_0) \neq 0$. Dimostrare che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

5.4. Mostrare che la funzione

$$f(z) = \begin{cases} z^5 / |z|^4 & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in $z = 0$ ma nello stesso punto non è derivabile.

5.5. Si consideri la funzione $f(z) = (3z^2 - \bar{z}^2)\bar{z}/2$. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità di f .

5.6. Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica in $G \subset \mathbb{C}$ aperto. Dimostrare che la funzione $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ è analitica nell'aperto $G^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in G\}$.

5.7. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(z) = x, \quad \text{b) } f(z) = e^x e^{iy}, \quad \text{c) } f(z) = x^2 - y^2 + i3xy,$$

dove $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

5.8. Determinare i punti singolari delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z^2+1}{(z-2)(z^2+2z+2)}.$$

5.9. Determinare, motivando la risposta, il dominio di analiticità delle seguenti funzioni e calcolarne la derivata prima:

$$\text{a) } f(z) = z^{-4}, \quad \text{b) } f(z) = (\cos(\ln r) + i \sin(\ln r)) e^{-\theta},$$

dove $z = re^{i\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$ e $r \geq 0$.

5.10. Determinare, motivando la risposta, il dominio di analiticità delle seguenti funzioni e calcolarne la derivata prima:

$$\text{a) } f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad \text{b) } f(z) = (\ln r)^2 - \theta^2 + i2\theta \ln r,$$

dove $z = re^{i\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$ e $r \geq 0$.

5.11. Un campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ con $F(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$ è detto irrotazionale se $U_y = V_x$ e solenoidale se $U_x = -V_y$. Mostrare che se $f : D \mapsto \mathbb{C}$ è analitica in D allora \bar{f} è irrotazionale e solenoidale in D .

5.12. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(z) = y, \quad \text{b) } f(z) = e^x e^{-iy}, \quad \text{c) } f(z) = x^2 - y^2 + i2xy,$$

dove $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

Funzioni elementari

Sommario. Esponenziale. Logaritmo: rami del logaritmo. Potenze con esponenti complessi. Esponenziali con base complessa. Funzioni trigonometriche. Funzioni iperboliche. Funzioni trigonometriche e iperboliche inverse.

6.1 Esponenziale

Definizione 6.1 (esponenziale). Dato un arbitrario $z \in \mathbb{C}$ e posto $\operatorname{Re} z = x$ e $\operatorname{Im} z = y$, si definisce esponenziale di z il numero complesso

$$\exp z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (6.1)$$

dove e^x è l'usuale esponenziale reale del numero reale x .

Con voluto abuso di notazione indicheremo $\exp z$ anche come e^z . Per $y = 0$ la Definizione 6.1 si riduce a quella dell'esponenziale reale e^x . Per $x = 0$ trova giustificazione la notazione simbolica $e^{iy} = \operatorname{cis}(y)$. Per $z = 0$ si ha $e^0 = 1$.

Teorema 6.2. Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora

$$\exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2), \quad (6.2)$$

$$\frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \exp(z_1 - z_2). \quad (6.3)$$

Dimostrazione. Si ponga $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ con $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Per la Definizione 6.1 e osservando che $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = x_1 + x_2$ e $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = y_1 + y_2$, risulta

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \exp(z_2) &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} ((\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) \\ &\quad + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) \end{aligned}$$

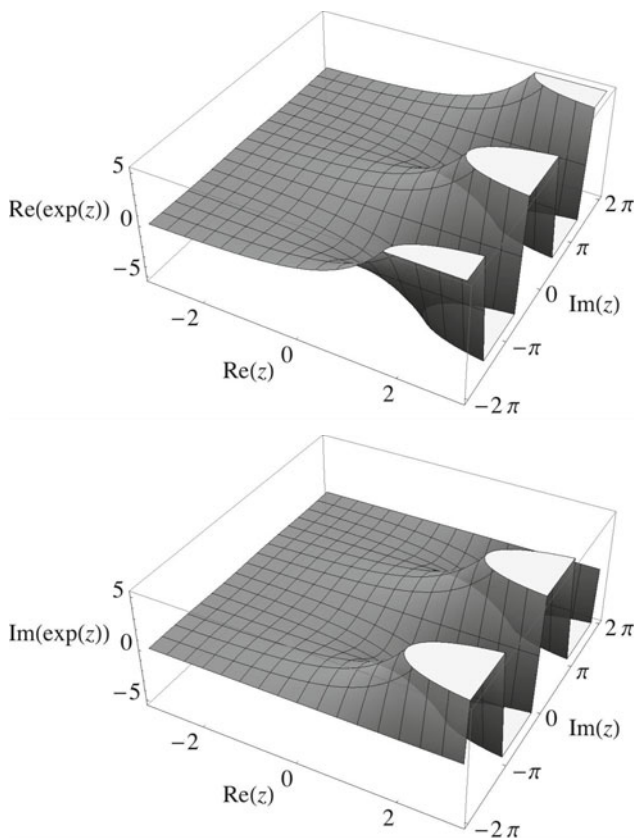


Fig. 6.1. Parte reale e parte immaginaria di $\exp(z)$

$$\begin{aligned}
 &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) \\
 &= \exp(z_1 + z_2),
 \end{aligned}$$

avendo utilizzato la corrispondente proprietà, $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, valida per l'esponenziale reale. Analogamente si ragiona per $\exp(z_1)/\exp(z_2)$. \square

Per quanto appena dimostrato si ha $1/\exp(z) = \exp(-z)$.

Teorema 6.3. *La funzione $\exp z$ è intera e $\forall z \in \mathbb{C}$ la sua derivata vale*

$$\frac{d}{dz} \exp z = \exp z. \quad (6.4)$$

Dimostrazione. Si ponga $\exp z = u(x, y) + iv(x, y)$ dove $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Risulta $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$. Per il Teorema 5.12, le cui ipotesi sono soddisfatte $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, la funzione $\exp z$ è derivabile in tutto \mathbb{C} e

la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} \exp z = u_x(x, y) + i v_x(x, y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = \exp z \quad \square$$

La forma polare di $\exp z$ si ricava immediatamente dalla definizione $e^z = e^x e^{iy}$,

$$|\exp z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad (6.5)$$

$$\arg(\exp z) = \operatorname{Im} z + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.6)$$

Dalla (6.5) segue che $\exp z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. È facile verificare che $\exp z$ è una funzione periodica di periodo $2\pi i$, cioè che $\forall z \in \mathbb{C}$ vale

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z. \quad (6.7)$$

Esempio 6.4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $\exp z = -1$. Posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ e osservando che $-1 = 1e^{i\pi}$, per le (6.5) e (6.6) si ha

$$\begin{cases} e^x = 1, \\ y + 2\pi n = \pi, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Si hanno pertanto infinite soluzioni $z = i\pi(2n + 1)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

6.2 Logaritmo

Definizione 6.5 (logaritmo). Sia $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, si definisce logaritmo di z ogni numero complesso

$$\log z = \ln |z| + i \arg z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.8)$$

dove $\ln(\cdot)$ indica l'usuale logaritmo naturale reale.

Il logaritmo complesso è una funzione polidroma: per ogni valore di z , $\log z$ assume infiniti valori le cui parti immaginarie differiscono per un numero intero di 2π . La Definizione 6.5 è equivalente a richiedere che $\log z = w$ sia un numero $w \in \mathbb{C}$ tale che $\exp w = z$, in altre parole \log è la funzione inversa di \exp . L'esclusione del punto $z = 0$ corrisponde al fatto che l'equazione $\exp w = 0$ non ammette soluzione. Coerentemente, $\ln |z|$ è ben definito nella regione $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si osservi che la composizione

$$\exp(\log(z)) = \exp(\ln |z| + i \arg z) = e^{\ln |z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i \arg z} = z \quad (6.9)$$

è una funzione univoca, mentre è polidroma la composizione inversa

$$\begin{aligned} \log(\exp(z)) &= \log(|\exp z| e^{i \arg(\exp z)}) \\ &= \ln(e^{\operatorname{Re} z}) + i(\operatorname{Im} z + 2\pi n) \\ &= z + i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Definizione 6.6 (valore principale del logaritmo). Sia $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, si definisce valore principale di $\log z$ il numero complesso

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi. \quad (6.11)$$

Esempio 6.7. Determinare $\log(-1)$. Osservando che $-1 = 1e^{i\pi}$, dalla Definizione 6.5 si hanno gli infiniti valori

$$\log(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi n) = i\pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

mentre $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$.

Esempio 6.8. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $\log z = a + ib$, dove $a, b \in \mathbb{R}$. Dalla Definizione 6.5 si ha

$$\ln |z| + i \arg z = a + ib,$$

pertanto deve risultare $|z| = e^a$ e $\arg z = b$. Si ha quindi una sola soluzione $z = e^a e^{ib} = \exp(a + ib)$. Alternativamente, per la (6.9) si ha subito

$$z = \exp(\log z) = \exp(a + ib).$$

Si osservi che l'uguaglianza $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ è in generale falsa se si assume per i tre logaritmi lo stesso valore, ad esempio quello principale. L'uguaglianza invece vale nel senso che per ogni valore di $\log(z_1 z_2)$ esiste un valore di $\log z_1$ e un valore di $\log z_2$ tali che la loro somma è uguale al valore scelto di $\log(z_1 z_2)$.

Esempio 6.9. Trovare due numeri complessi z_1 e z_2 tali che $\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) \operatorname{Log}(z_2)$. Si prenda $z_1 = z_2 = -1$. Si ha $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(1) = 0$ mentre $\operatorname{Log}(z_1) = \operatorname{Log}(z_2) = \operatorname{Log}(-1) = i\pi$.

Definizione 6.10 (ramo del logaritmo). Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso e sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $\forall z \in D$ risulti $\exp(f(z)) = z$. La funzione f è detta un ramo del logaritmo su D .

Si osservi che D non può contenere il punto $z = 0$ in quanto la funzione \exp non è mai nulla.

Teorema 6.11. Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso e sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ un ramo di $\log z$ su D . La totalità dei rami di $\log z$ su D sono le funzioni $f(z) + i2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Sia f un ramo di $\log z$ su D e sia $g : D \mapsto \mathbb{C}$ la funzione continua definita come $g(z) = f(z) + i2\pi n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Poiché $\exp(g(z)) = \exp(f(z)) = z$, anche g è un ramo di $\log z$ su D . Viceversa, se f e g sono due rami di $\log z$ su D , allora $\forall z \in D$ deve risultare $\exp(g(z) - f(z)) = \exp(g(z))/\exp(f(z)) = 1$. Segue che $g(z) - f(z) = i2\pi n$, dove n è un intero

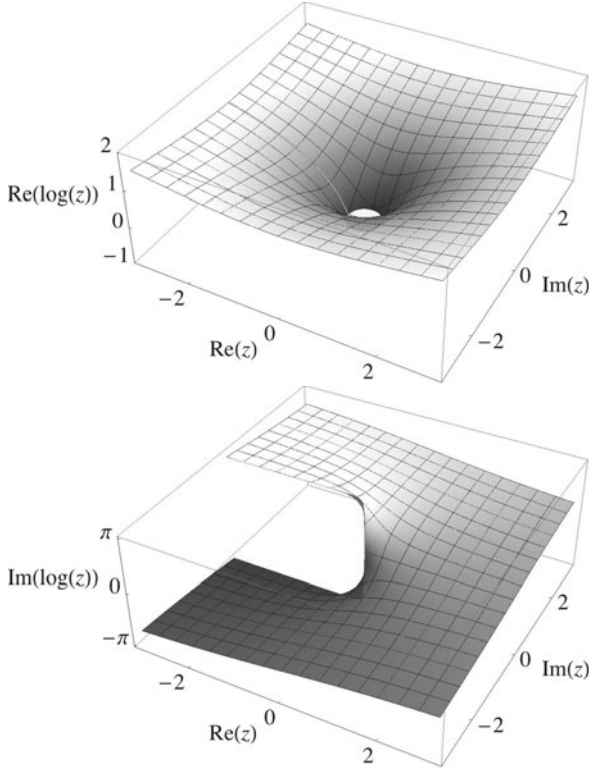


Fig. 6.2. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\log(z)$

relativo dipendente, in linea di principio, da z . Possiamo mostrare che in realtà n è lo stesso $\forall z \in D$. Si consideri la funzione $h(z) = (g(z) - f(z))/(2\pi i)$ continua in D . Poiché D è connesso, anche $h(D) \subset \mathbb{Z}$ deve essere connesso. Si conclude che esiste un unico intero $n \in \mathbb{Z}$ tale che $\forall z \in D$ risulta $g(z) = f(z) + i2\pi n$. \square

Teorema 6.12. *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso e sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ un ramo di $\log z$ su D . La funzione f è analitica in D e vale $f'(z) = 1/z$.*

Dimostrazione. Si osservi che $\forall w \in f(D) \exists z \in D$ tale che $f(z) = w$, pertanto $f(\exp(w)) = f(\exp(f(z))) = f(z) = w$, cioè f è una funzione inversa, continua, di \exp nell'aperto $f(D)$. Poiché \exp è derivabile in $f(D)$ e la sua derivata non è mai nulla, per il Teorema 5.7 anche f è derivabile in tutto D e la sua derivata vale

$$\left. \frac{d}{dz} f(z) \right|_{z=\exp(w)} = \frac{1}{\exp'(w)} = \frac{1}{\exp(w)} = \frac{1}{z}. \quad (6.12)$$

\square

Definizione 6.13 (ramo principale del logaritmo). Sia D il sottoinsieme di \mathbb{C} aperto e connesso definito da $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$. Ogni punto $z \in D$ può essere univocamente rappresentato nella forma polare $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. La funzione $f(z) = \ln r + i\theta$, continua in D e tale che $\exp(f(z)) = z$, è un ramo del logaritmo su D . Essa è detta il ramo principale del logaritmo. Il punto $z = 0$ si chiama punto di diramazione mentre il semiasse reale negativo, origine inclusa, prende il nome di linea di diramazione.

Si osservi che il dominio D del ramo principale corrisponde ad una scelta massimale, infatti non è possibile ampliare D aggiungendo un solo punto della linea di diramazione senza perdere la continuità della funzione f definita da $\exp(f(z)) = z$. Inoltre, il dominio D , ovvero la linea di diramazione che lo definisce, è una scelta naturale che corrisponde a identificare, per ogni $z \in D$, $\log z$ ramo principale con il valore principale $\text{Log } z$. Nel piano complesso $w = \log z$, l'immagine del dominio D è la striscia $\log(D) = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im } w < \pi\}$. Gli infiniti altri rami del logaritmo corrispondono alla trasformazione di D nelle strisce $-\pi + 2\pi k < \text{Im } w < \pi + 2\pi k$, con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Le frontiere di queste strisce sono i cammini $\Gamma_k(t) = \ln |\gamma(t)| + i(\text{Arg}(\gamma(t)) + 2\pi k)$, dove $\gamma(t) = -t$, $t \in [0, \infty)$, è il cammino che rappresenta la linea di diramazione. La striscia corrispondente al ramo principale ha come frontiere Γ_0 e Γ_{-1} .

Esempio 6.14. Per taluni scopi è comodo definire rami del logaritmo su domini massimali più generali. Si congiunga il punto $z = 0$ al punto $z = \infty$ mediante una linea del tutto arbitraria purché continua e mai intersecantesi e si assuma questa come linea di diramazione. Si consideri, ad esempio, il cammino mostrato in figura $\gamma(t) = (e^{-(1+t^2)/t} + t^2/1000)e^{i\alpha(t)}$ con $\alpha(t) = \pi \cos(t/5)$, $t \in [0, \infty)$. Si noti che $|\gamma(t)|$ è non monotona: si vede subito che esistono due numeri $0 < r_{\min} < r_{\max}$ tali che $|\gamma(t)| = r$ ha una sola soluzione per $r < r_{\min}$ oppure $r > r_{\max}$ e tre soluzioni per $r_{\min} < r < r_{\max}$. Analogamente a quanto visto nel caso $\gamma(t) = -t$, il dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq \gamma(t), t \in [0, \infty)\}$ è trasformato in strisce del piano complesso $w = \log z$ le cui frontiere sono $\Gamma_k(t) = \ln |\gamma(t)| + i(\text{Arg}(\gamma(t)) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. La striscia con frontiere Γ_0 e Γ_{-1} è mostrata in figura. La forma di tale striscia differisce notevolmente da quella del ramo principale del logaritmo e si riduce ad essa solo per $t \rightarrow 0$ quando $\gamma(t) \simeq -t$. Vediamo ora come è definito il corrispondente ramo del logaritmo in D . Posto $z = re^{i\theta}$, per $r > r_{\max}$ oppure $r < r_{\min}$, si ha $\log z = \ln r + i\theta$ con $\alpha(t_0) - 2\pi < \theta < \alpha(t_0)$ dove t_0 è la soluzione, unica, dell'equazione $|\gamma(t_0)| = r$. Per $r_{\min} < r < r_{\max}$, siano $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ e $\gamma(t_3)$, con $t_1 < t_2 < t_3$, le tre intersezioni della circonferenza $|z| = r$ con la linea di diramazione γ . Possiamo ancora scrivere $\log z = \ln r + i\theta$ ma ora $\alpha(t_1) - 2\pi < \theta < \alpha(t_3)$ per i punti dell'arco di circonferenza che va da $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_3)$ in senso antiorario, $\alpha(t_3) - 2\pi < \theta < \alpha(t_2) - 2\pi$ per i punti dell'arco da $\gamma(t_3)$ a $\gamma(t_2)$ e $\alpha(t_2) < \theta < \alpha(t_1)$ per i punti dell'arco da $\gamma(t_2)$ a $\gamma(t_1)$. Si osservi la discontinuità registrata nei valori di θ ogni volta che la circonferenza $|z| = r$ interseca l'asse di diramazione.

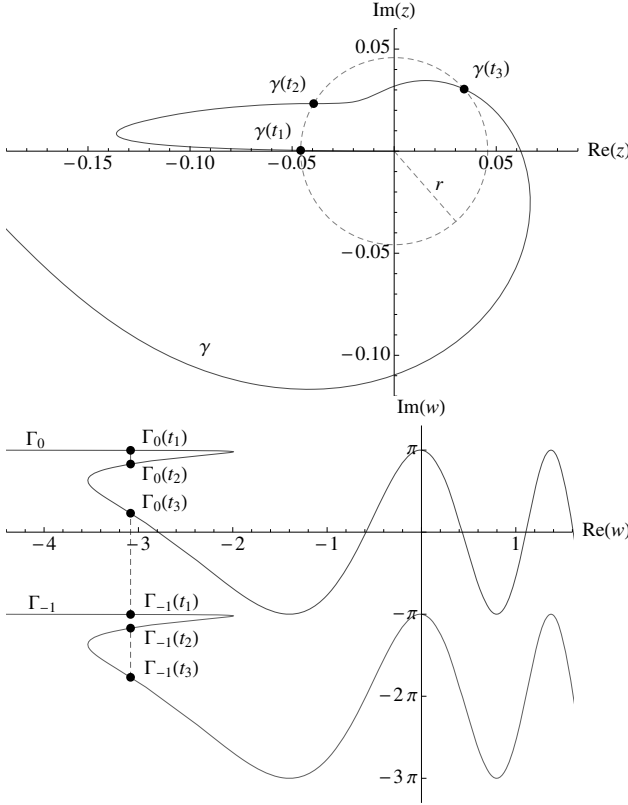


Fig. 6.3. Costruzione del ramo di $\log(z)$ associato alla linea di diramazione $\gamma(t) = (e^{-(1+t^2)/t} + t^2/1000)e^{i\alpha(t)}$ con $\alpha(t) = \pi \cos(t/5)$ e avente come frontiere $\Gamma_0(t) = \ln |\gamma(t)| + i \operatorname{Arg}(\gamma(t))$ e $\Gamma_{-1}(t) = \ln |\gamma(t)| + i(\operatorname{Arg}(\gamma(t)) - 2\pi)$

Esempio 6.15. Determinare il dominio di analiticit  del ramo principale di $\log(z^2)$. Posto $w = z^2$, in base alla Definizione 6.13 il ramo principale di $\log(w)$   una funzione analitica in tutti i punti $w \neq -t$ con $t \in [0, \infty)$. Pertanto il ramo principale di $\log(z^2)$   una funzione analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dei punti $z(t)^2 = -t$, ovvero $z(t) = \pm it$, con $t \geq 0$. In conclusione, il dominio di analiticit  di $\log(z^2)$   tutto \mathbb{C} ad eccezione dell'asse immaginario. Si osservi che se, erroneamente, si fosse scritto $\log(z^2) = 2 \log z$, si sarebbe desunto un dominio di analiticit  pari a \mathbb{C} meno il semiasse reale negativo.

6.3 Potenze con esponenti complessi

Definizione 6.16. Sia $c \in \mathbb{C}$, si definisce potenza con esponente complesso c la funzione

$$z^c = \exp(c \log z), \quad z \neq 0. \quad (6.13)$$

Tale funzione, salvo il caso di c reale e intero, è polidroma e ad essa si applicano tutte le considerazioni fatte nel caso del logaritmo. In particolare, il ramo principale di z^c è definito in termini del ramo principale di $\log z$ ed è una funzione analitica nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$. Per ogni $z \in D$ si ha inoltre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^c &= \frac{d}{dz} \exp(c \log z) = \frac{c}{z} \exp(c \log z) = c \frac{\exp(c \log z)}{\exp(\log z)} \\ &= c \exp((c-1) \log z) = cz^{c-1}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Esempio 6.17. Calcolare il valore principale di $(-i)^i$. In base alle Definizioni 6.16 e 6.6, si ha

$$(-i)^i = \exp(i \operatorname{Log}(-i)) = \exp(i(\ln 1 - i\pi/2)) = e^{\pi/2}.$$

La Definizione 6.16 si applica anche nel caso in cui c è un intero n o un numero frazionario $1/n$. Vediamo come si riottengono in questi casi i risultati già noti per le potenze intere o frazionarie. Se $c = n \in \mathbb{N}$, posto $z = re^{i\theta}$, abbiamo

$$\begin{aligned} z^n &= \exp(n \log z) \\ &= \exp(n(\ln r + i(\theta + 2\pi k))) \\ &= r^n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

La molteplicità di valori del logaritmo corrispondenti alle diverse scelte di $k \in \mathbb{Z}$ è completamente eliminata dalla successiva applicazione della funzione esponenziale: il prodotto $nk \in \mathbb{Z}$ e quindi $e^{i2\pi nk} = 1$. Si riottiene così il risultato univoco della Definizione 1.4. Inoltre, poiché per n intero risulta $e^{in\pi} = e^{-in\pi}$, il dominio di analiticità si estende a tutto \mathbb{C} in accordo con il risultato precedentemente stabilito che le potenze z^n sono funzioni intere. Per $c = 1/n$, si ha invece

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \exp((1/n) \log z) \\ &= \exp((1/n)(\ln r + i(\theta + 2\pi k))) \\ &= r^{1/n} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}. \end{aligned}$$

L'infinita molteplicità rispetto a $k \in \mathbb{Z}$ è ora solo parzialmente eliminata dalla funzione esponenziale. In accordo con la (1.19), si ottengono infatti n valori

distinti per $z^{1/n}$, ad esempio quelli relativi a $k = 0, 1, \dots, n-1$. A partire dal ramo principale del logaritmo, possiamo pertanto individuare n funzioni distinte, che chiameremo i rami di $z^{1/n}$, ciascuna delle quali ha come dominio di analiticità $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$. La funzione corrispondente a $k = 0$ è il ramo principale di $z^{1/n}$.

6.4 Esponenziali con base complessa

Definizione 6.18. Sia $c \in \mathbb{C}$, si definisce esponenziale con base complessa c ogni funzione

$$c^z = \exp(z \log c) \quad (6.15)$$

corrispondente ai possibili valori di $\log c$.

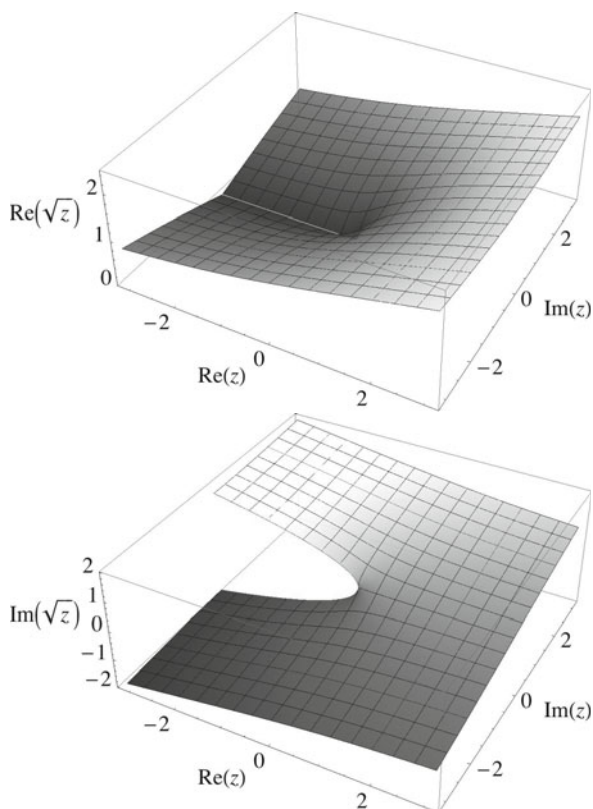


Fig. 6.4. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di \sqrt{z} . Il ramo secondario corrispondente è $-\sqrt{z}$

Per un fissato valore di $\log c$, la funzione $\exp(z \log c)$ è intera e la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} c^z = \frac{d}{dz} \exp(z \log c) = \exp(z \log c) \log c = c^z \log c. \quad (6.16)$$

Esempio 6.19. Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di z^{z^2} e il valore della sua derivata. In base alle definizioni precedenti dobbiamo porre

$$z^{z^2} = \exp(z^2 \log z)$$

il cui ramo principale corrisponde a prendere il ramo principale di $\log z$. Il dominio di analiticità di z^{z^2} è dunque tutto \mathbb{C} ad eccezione del semiasse reale negativo. In tale dominio la derivata vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^{z^2} &= \frac{d}{dz} \exp(z^2 \log z) = \exp(z^2 \log z) (2z \log z + z^2/z) \\ &= z^{z^2} (2z \log z + z). \end{aligned}$$

6.5 Funzioni trigonometriche

Definizione 6.20 (funzioni trigonometriche). Sia $z \in \mathbb{C}$, le funzioni complesse seno e coseno sono definite dalla seguente generalizzazione delle formule di Eulero:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (6.17)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (6.18)$$

In quanto combinazioni lineari di funzioni intere, $\sin z$ e $\cos z$ sono funzioni intere e le loro derivate valgono

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) = \cos z, \quad (6.19)$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} (ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\sin z. \quad (6.20)$$

Per $z = x$ con $x \in \mathbb{R}$, le (6.17) e (6.18) si riducono alle corrispondenti funzioni trigonometriche reali. Per $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$, vale la seguente connessione con le funzioni iperboliche reali:

$$\sin(iy) = i \sinh y, \quad \cos(iy) = \cosh y. \quad (6.21)$$

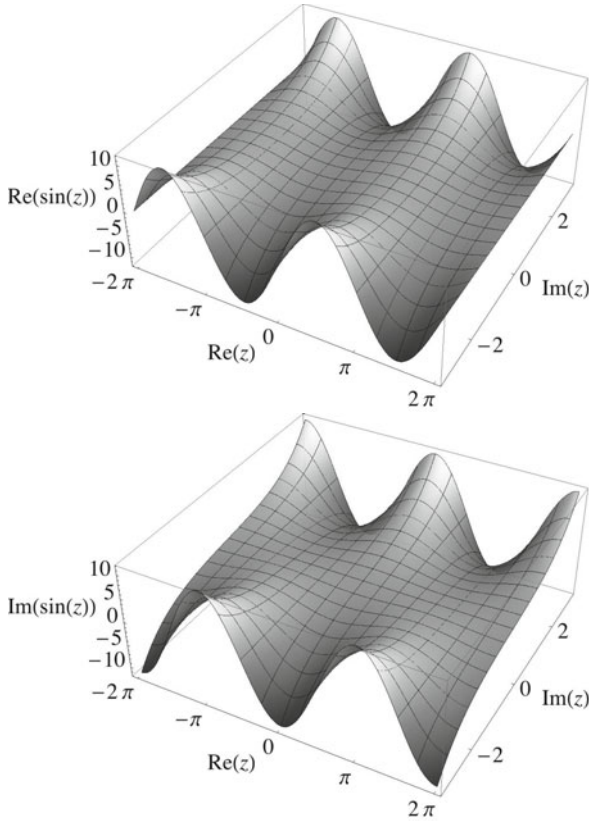


Fig. 6.5. Parte reale e parte immaginaria di $\sin(z)$

Come le corrispondenti funzioni reali, le (6.17) e (6.18) sono funzioni rispettivamente dispari e pari

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad (6.22)$$

periodiche di periodo 2π

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad (6.23)$$

antiperiodiche di periodo π

$$\sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \cos(z + \pi) = -\cos z. \quad (6.24)$$

Teorema 6.21. *Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z = x + iy$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti identità:*

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (6.25)$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2, \quad (6.26)$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \quad (6.27)$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \quad (6.28)$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad (6.29)$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad (6.30)$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y. \quad (6.31)$$

Dimostrazione. Le identità (6.25), (6.26) e (6.27) si verificano in modo elementare a partire dalla Definizione 6.20. Le (6.28) e (6.29) seguono dalle (6.26) e (6.27) ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = iy$ e usando le relazioni (6.21). Le (6.30) e (6.31) seguono dalle (6.28) e (6.29) usando l'identità trigonometrica fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e la corrispondente identità iperbolica $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$. \square

Dal valore dei moduli (6.30) e (6.31) è evidente che $\sin z$ e $\cos z$ non sono funzioni limitate in campo complesso.

Esempio 6.22. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $\cos z = 0$. Per la (6.29) l'equazione assegnata è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 0 \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases}.$$

Poiché $\cosh y \neq 0 \forall y \in \mathbb{R}$, la prima equazione del sistema si riduce a $\cos x = 0$ che fornisce $x = \pi/2 + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Per questi valori di x si ha $\sin x \neq 0$, quindi la seconda equazione si riduce a $\sinh y = 0$ la cui unica soluzione è $y = 0$. In conclusione, $\cos z = 0$ per $z = \pi/2 + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 6.23. Determinare il luogo dei punti z del piano complesso tali che $\cos z = a$, con $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$. Usando la definizione $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$, l'equazione può essere riscritta come

$$e^{2iz} - 2ae^{iz} + 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$e^{iz} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Si noti che per $|a| > 1$ il radicando di questa espressione è positivo. Se $a > 1$ le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned} iz &= \log \left(a \pm \sqrt{a^2 - 1} \right) \\ &= \ln \left(a \pm \sqrt{a^2 - 1} \right) + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ovvero

$$z = -i \ln \left(a \pm \sqrt{a^2 - 1} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e rappresentano, al variare di $a \in (1, \infty)$, gli assi immaginari passanti per $z = 2k\pi$ ad eccezione dei punti $z = 2k\pi$. Se $a < -1$ le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned} iz &= \log \left[- \left(a \pm \sqrt{a^2 - 1} \right) e^{i\pi} \right] \\ &= \ln \left(-a \mp \sqrt{a^2 - 1} \right) + i(\pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ovvero

$$z = -i \ln \left(-a \mp \sqrt{a^2 - 1} \right) + (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e rappresentano, al variare di $a \in (-\infty, -1)$, gli assi immaginari passanti per $z = (2k + 1)\pi$ ad eccezione dei punti $z = (2k + 1)\pi$.

È utile definire altre funzioni trigonometriche non fondamentali, ad esempio $\tan z = \sin z / \cos z$. Per quanto visto a proposito degli zeri di $\cos z$, la funzione $\tan z$ è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti $z = \pi/2 + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. La sua derivata vale $d \tan z / dz = 1 / \cos^2 z$.

6.6 Funzioni iperboliche

Definizione 6.24 (funzioni iperboliche). Sia $z \in \mathbb{C}$, le funzioni iperboliche complesse sono definite analogamente al caso reale

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (6.32)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (6.33)$$

In quanto combinazioni lineari di funzioni intere, $\sinh z$ e $\cosh z$ sono funzioni intere e le loro derivate valgono

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \frac{d}{dz} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \cosh z, \quad (6.34)$$

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \frac{d}{dz} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \sinh z. \quad (6.35)$$

Come le corrispondenti funzioni reali, le (6.32) e (6.33) sono funzioni rispettivamente dispari e pari

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad (6.36)$$

periodiche di periodo $2\pi i$

$$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z, \quad \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z, \quad (6.37)$$

antiperiodiche di periodo πi

$$\sinh(z + \pi i) = -\sinh z, \quad \cosh(z + \pi i) = -\cosh z. \quad (6.38)$$

Valgono le seguenti relazioni con le funzioni trigonometriche

$$\sinh z = -i \sin(iz), \quad \sinh(iz) = i \sin z, \quad (6.39)$$

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \cosh(iz) = \cos z. \quad (6.40)$$

Teorema 6.25. *Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z = x + iy$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti identità:*

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad (6.41)$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2, \quad (6.42)$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2, \quad (6.43)$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \quad (6.44)$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \quad (6.45)$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, \quad (6.46)$$

$$|\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \sin^2 y. \quad (6.47)$$

Dimostrazione. Le identità (6.41), (6.42) e (6.43) si verificano in modo elementare a partire dalla Definizione 6.24. Le (6.44) e (6.45) seguono dalle (6.42) e (6.43) ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = iy$ e usando le relazioni (6.39) e (6.40). Le (6.46) e (6.47) seguono dalle (6.44) e (6.45) usando l'identità trigonometrica fondamentale $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ e la corrispondente identità iperbolica $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. \square

Esempio 6.26. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $\cosh z = 0$. Per la (6.45) l'equazione assegnata è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \cosh x \cos y = 0 \\ \sinh x \sin y = 0 \end{cases}.$$

Poiché $\cosh x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, la prima equazione del sistema si riduce a $\cos y = 0$ che fornisce $y = \pi/2 + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Per questi valori di y si ha $\sin y \neq 0$, quindi la seconda equazione si riduce a $\sinh x = 0$ la cui unica soluzione è $x = 0$. In conclusione, $\cosh z = 0$ per $z = i(\pi/2 + \pi k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

È utile definire altre funzioni iperboliche non fondamentali, ad esempio $\tanh z = \sinh z / \cosh z$. Per quanto visto a proposito degli zeri di $\cosh z$, la

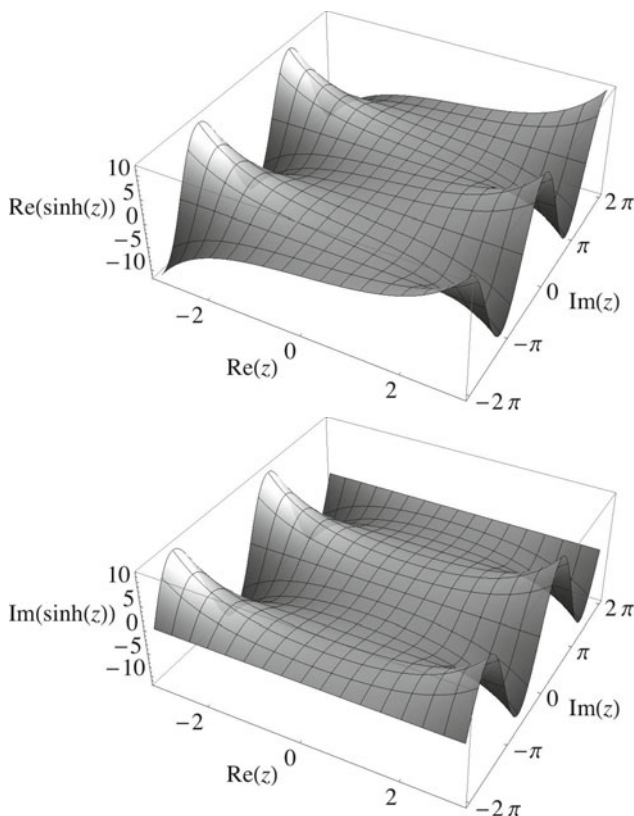


Fig. 6.6. Parte reale e parte immaginaria di $\sinh(z)$

funzione $\tanh z$ è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti $z = i(\pi/2 + n\pi)$ con $n \in \mathbb{Z}$. La sua derivata vale $d \tanh z / dz = 1 / \cosh^2 z$.

6.7 Funzioni trigonometriche e iperboliche inverse

La definizione delle funzioni trigonometriche e iperboliche inverse in campo complesso segue dalle corrispondenti funzioni trigonometriche e iperboliche introdotte in precedenza. Ad esempio, si pone $\arcsin z = w$ con $\sin w = z$. Usando la (6.17) quest'ultima equazione è equivalente a

$$(e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

la cui soluzione è $e^{iw} = iz + \sqrt{(iz)^2 + 1}$ cioè $iw = \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$. Negli altri casi si ragiona analogamente e si giunge alle seguenti espressioni.

Definizione 6.27 (funzioni trigonometriche inverse). Sia $z \in \mathbb{C}$, le funzioni trigonometriche inverse in campo complesso sono definite da

$$\arcsin z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad (6.48)$$

$$\arccos z = -i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right), \quad (6.49)$$

$$\arctan z = -\frac{i}{2} \log \left(\frac{i - z}{i + z} \right). \quad (6.50)$$

Definizione 6.28 (funzioni iperboliche inverse). Sia $z \in \mathbb{C}$, le funzioni iperboliche inverse in campo complesso sono definite da

$$\operatorname{arcsinh} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \quad (6.51)$$

$$\operatorname{arccosh} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad (6.52)$$

$$\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right). \quad (6.53)$$

Le precedenti funzioni sono tutte polidrome e per esse valgono le considerazioni svolte nel caso del logaritmo.

Esempio 6.29. Determinare il dominio di analiticità del ramo principale della funzione $\arcsin z$ e il valore della sua derivata in tale dominio. Il ramo principale di $\arcsin z$ è definito prendendo i rami principali della radice e del logaritmo che appaiono nella Definizione (6.48). Il ramo principale di $\sqrt{1 - z^2} = \exp[\frac{1}{2} \log(1 - z^2)]$ è una funzione analitica ovunque in \mathbb{C} ad eccezione dei punti z tali che $1 - z^2 = -u$ con $u \in [0, \infty)$. Tali punti,

$$z(u) = \pm \sqrt{1 + u}, \quad u \in [0, \infty),$$

rappresentano le semirette reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Il ramo principale di $\log(iz + \sqrt{1 - z^2})$ risulta non analitico nei punti che soddisfano $iz + \sqrt{1 - z^2} = -t$ con $t \in [0, \infty)$. La soluzione di questa equazione ottenuta quadrando l'espressione equivalente $\sqrt{1 - z^2} = -(t + iz)$ fornisce

$$z(t) = i \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad t \in [0, \infty),$$

che rappresenta l'intero asse immaginario. Tuttavia i punti $z(t)$ così trovati non soddisfano l'equazione di partenza in cui per la radice si considera il ramo principale. Infatti

$$\sqrt{1 - z(t)^2} = \sqrt{1 + (t^2 - 1)^2 / (4t^2)} = \sqrt{(t^2 + 1)^2 / (4t^2)} > 0,$$

mentre $-(t + iz(t)) = -(t^2 + 1)/2t < 0$. Abbiamo trovato quindi una soluzione spuria, da scartare, introdotta dall'operazione di elevazione al quadrato. In

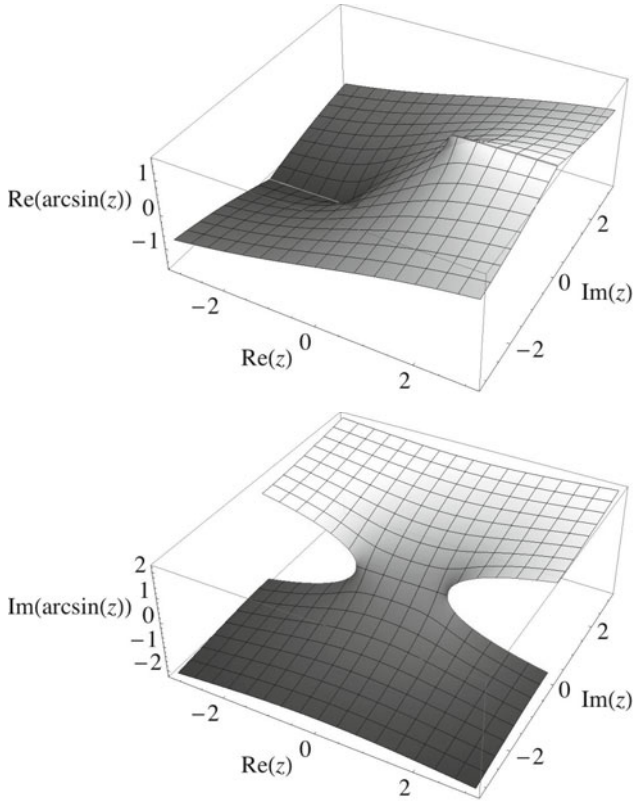


Fig. 6.7. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\arcsin(z)$

conclusione, il dominio di analiticità di $\arcsin z$ è tutto il piano complesso ad eccezione delle semirette reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Nella regione di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \arcsin z = -i \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \left(i + \frac{1}{2} \frac{-2z}{\sqrt{1 - z^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (6.54)$$

Esempio 6.30. Determinare il dominio di analiticità del ramo principale della funzione $\arctan z$ e il valore della sua derivata in tale dominio. Vediamo, innanzitutto, come è ricavata la Definizione (6.50). Posto $\arctan z = w$, si ha $\tan w = z$, cioè

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = iz.$$

Moltiplicando per e^{iw} si ottiene $e^{2iw} = (1 + iz)/(1 - iz)$ e da questa, prendendo

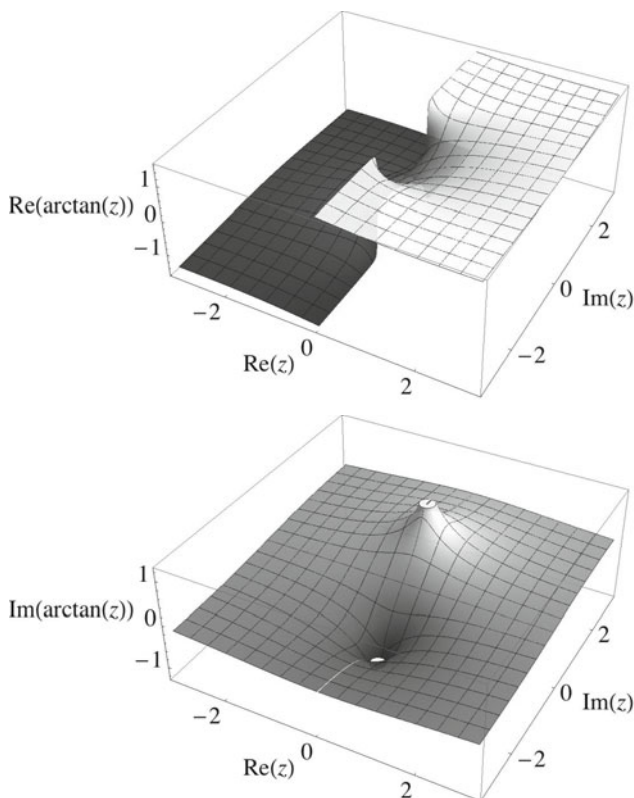


Fig. 6.8. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\arctan(z)$

il logaritmo, si giunge a

$$\arctan z = -\frac{i}{2} \log \left(\frac{i-z}{i+z} \right).$$

Il ramo principale di $\arctan z$ è definito prendendo il ramo principale del logaritmo che appare in questa espressione. Questa è una funzione analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dei punti z tali che $(i-z)/(i+z) = -t$ con $t \in [0, \infty)$,

$$z(t) = i \frac{1+t}{1-t}, \quad t \in [0, \infty).$$

Tali punti rappresentano l'intero asse immaginario ad eccezione del segmento $(-i, i)$. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \arctan z = -\frac{i}{2} \frac{1-iz}{1+iz} \frac{i(1-iz) - (1+iz)(-i)}{(1-iz)^2} = \frac{1}{1+z^2}. \quad (6.55)$$

Esercizi

6.1. Determinare parte reale e immaginaria delle seguenti espressioni:

$$\text{a) } \cosh(2 + i), \quad \text{b) } \cotan\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right).$$

6.2. Determinare il valore principale di

$$\arctan(2 + i).$$

6.3. Determinare la parte immaginaria del valore principale di

$$\arctan(1 + 2i).$$

6.4. Determinare il valore principale di

$$(4 - 4i)^{1+i}.$$

6.5. Determinare il modulo del valore principale di

$$(1 + i)^{2-i}.$$

6.6. Determinare l'argomento principale del valore principale di

$$\left(\frac{e^\pi}{\sqrt{2}} + i \frac{e^\pi}{\sqrt{2}}\right)^{i+1}.$$

6.7. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cos z = a, \quad a > 1.$$

6.8. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cosh z = \frac{1}{2}.$$

6.9. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin(z) \cos(z) = 2.$$

6.10. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cosh(z) + e^z = 2.$$

6.11. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cos(3z^2) = 0.$$

6.12. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sinh z = -i\pi.$$

6.13. Dimostrare che sono reali tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin z = a, \quad -1 \leq a \leq 1.$$

6.14. Determinare il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\cosh z = a, \quad 0 < a < 1.$$

6.15. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sinh(z) = i.$$

6.16. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$(\sin z)^2 = -4$$

e valutare i punti limite di tali soluzioni in \mathbb{C}_∞ .

6.17. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$e^{z^2} = -1.$$

6.18. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\text{a) } z^4 - i = 0, \quad \text{b) } z^i - 4 = 0.$$

6.19. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cotan(\sqrt{z}) = 0.$$

6.20. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome:

$$\text{a) } \log((2 - z)^2), \quad \text{b) } z^z.$$

6.21. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome:

$$\text{a) } z^{\sinh z}, \quad \text{b) } \log(\cos z).$$

6.22. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome:

$$\text{a) } \cosh(e^{\sinh z}), \quad \text{b) } \log(3 + z^2).$$

6.23. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome:

$$\text{a) } \exp\left(\frac{1}{1+z^2}\right), \quad \text{b) } \log(z^3).$$

6.24. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome:

$$\text{a) } (1+z^2)^z, \quad \text{b) } \frac{\sinh(\sin(z))}{z^2+9}.$$

6.25. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome, e il valore delle rispettive derivate in tale dominio:

$$\text{a) } \log(z^4), \quad \text{b) } \sin\sqrt{z}.$$

6.26. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome, e il valore delle rispettive derivate in tale dominio. Specificare quanti rami distinti possiede ogni funzione.

$$\text{a) } \sin(z^n), \quad \text{b) } \sin(z^{n/m}), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad \text{c) } \sin(z^c), \quad c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

6.27. Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di $\arccos z$ e il valore della sua derivata in tale dominio.

6.28. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome:

$$\text{a) } \sqrt{z^2-1}, \quad \text{b) } i\sqrt{1-z^2}.$$

6.29. Stabilire quanti rami distinti possiedono le seguenti funzioni e determinare il dominio di analiticità del ramo principale. Nel caso particolare $n = 17$, $m = 3$, $c = 1/\pi$, calcolarne il valore principale nel punto $z = i$.

$$\text{a) } z^n, \quad \text{b) } z^{n/m}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad \text{c) } z^c, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

6.30. Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome, e il valore delle rispettive derivate in tale dominio:

$$\text{a) } \log((\log z)^2), \quad \text{b) } e^{z^2+i}, \quad \text{c) } \frac{\sqrt{1-z}}{z^2+i}.$$

6.31. Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di

$$\sqrt{4 + z^4}.$$

6.32. Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}}.$$

6.33. Fornire un esempio di una funzione analitica che trasforma biunivocamente A in B , dove

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi/2\}, \\ B &= \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi/(2 \ln 2)\}. \end{aligned}$$

6.34. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, determinare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^{nz^2}.$$

Integrali

Sommario. Integrali di funzioni complesse di variabile reale. Cammini, cammini chiusi, cammini chiusi semplici. Cammini regolari a tratti. Traccia di un cammino. Cammini equivalenti: curve. Lunghezza di un cammino regolare a tratti e sua invarianza per riparametrizzazione. Teorema della curva di Jordan (non dimostrato). Integrali di funzioni complesse lungo cammini regolari a tratti. Invarianza dell'integrale per riparametrizzazione del cammino. Maggiorazione del modulo di un integrale: disuguaglianza di Darboux. Teorema sull'esistenza della primitiva. Primitive di funzioni polidrome e calcolo di integrali su curve chiuse. Teorema di Cauchy-Goursat per curve chiuse semplici. Curve omotope. Curve chiuse omotope a zero. Insiemi aperti semplicemente connessi. Estensione del teorema di Cauchy-Goursat a curve chiuse in domini semplicemente connessi. Una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso ammette primitiva. Principio di deformazione dei cammini. Formula integrale di Cauchy per una funzione analitica. Esistenza e formula integrale di Cauchy per le derivate di ogni ordine delle funzioni analitiche. La derivata di ogni ordine di una funzione analitica è analitica. Teorema di Morera. Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra: decomposizione di un polinomio.

7.1 Integrali di funzioni complesse di variabile reale

Come introduzione all'integrazione di funzioni complesse di variabile complessa, in questa sezione estendiamo la definizione e le proprietà dell'integrale di funzioni reali alle funzioni complesse $f(t)$ di variabile reale t .

Definizione 7.1. Sia $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ una funzione continua, l'integrale di f tra a e b è il numero complesso

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt. \quad (7.1)$$

Definizione 7.2. Siano $f, F : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$. Se $F'(t) = f(t) \forall t \in [a, b]$, allora F è una primitiva di f in $[a, b]$.

Teorema 7.3 (teorema fondamentale del calcolo). Ogni funzione $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ continua ha una primitiva e due qualsiasi primitive differiscono per una costante. Se F è una primitiva di f allora

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (7.2)$$

Dimostrazione. Le funzioni reali $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono continue e quindi ammettono primitiva. Se U e V sono due primitive tali che $U' = \operatorname{Re} f$ e $V' = \operatorname{Im} f$, allora $F = U + iV$ è una primitiva di f in quanto $F' = f$. L'equazione (7.2) segue immediatamente. \square

Teorema 7.4. Sia $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ continua. Allora vale la disuguaglianza

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt. \quad (7.3)$$

Dimostrazione. Posto $\int_a^b f(t) dt = re^{i\theta}$ con r e θ reali, si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt \\ &= \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(t)| dt, \end{aligned}$$

dove si è usato $\operatorname{Re} z \leq |z|$ valida $\forall z \in \mathbb{C}$. \square

La Definizione (7.1), il teorema fondamentale del calcolo e la disuguaglianza (7.3) si estendono immediatamente a funzioni $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ continue a tratti.

7.2 Cammini, tracce di cammini, curve

Si vuole ora introdurre l'integrale di una funzione complessa $f(z)$ di variabile complessa z lungo una curva in \mathbb{C} dotata di sufficiente regolarità. Il significato di questa frase è chiarito dalle seguenti definizioni in parte anticipate al momento di introdurre le trasformazioni conformi.

Definizione 7.5 (cammino). Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si chiama cammino nel piano complesso una funzione continua $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$. Un cammino è detto semplice se γ è iniettiva in $[a, b]$, cioè se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ per $t_1 \neq t_2$ con $t_1, t_2 \in [a, b]$. Un cammino è detto chiuso se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Un cammino è detto chiuso semplice se è chiuso e γ è iniettiva in (a, b) .

Se $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è un cammino, allora l'insieme $\{\gamma(t) : a \leq t \leq b\} \subset \mathbb{C}$ è chiamato la traccia di γ e indicato con il simbolo $\{\gamma\}$. Si noti che la traccia di un cammino è sempre un sottoinsieme compatto di \mathbb{C} in quanto immagine del compatto $[a, b]$ tramite la funzione continua γ . Cammini diversi possono avere la stessa traccia. Si consideri ad esempio $\gamma_1(t) = e^{it}$ e $\gamma_2(t) = e^{2it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Per entrambi questi cammini la traccia è la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

Definizione 7.6 (cammino regolare, regolare a tratti). Chiamasi cammino regolare una funzione $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ derivabile con derivata prima continua. Il cammino γ si dice regolare a tratti se esiste una partizione dell'intervallo $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, tale che γ è regolare in ogni sottointervallo $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Nel caso di un cammino regolare (regolare a tratti)

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{((\operatorname{Re} \gamma)'(t))^2 + ((\operatorname{Im} \gamma)'(t))^2}$$

è una funzione continua (continua a tratti) e quindi integrabile tra a e b . L'integrale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (7.4)$$

rappresenta la lunghezza del cammino γ .

Definizione 7.7 (cammini equivalenti, curva). Siano $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ e $\eta : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ due cammini. Il cammino η si dice equivalente a γ se esiste una funzione $\varphi : [c, d] \mapsto [a, b]$ continua, strettamente crescente e con $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$, tale che $\eta = \gamma \circ \varphi$. La funzione φ si chiama riparametrizzazione del cammino. Una curva è una classe di equivalenza di cammini. La traccia di una curva è la traccia di uno qualsiasi dei cammini membri della classe. Una curva è regolare (regolare a tratti) se e solo se almeno uno dei cammini membri della classe è regolare (regolare a tratti).

D'ora in avanti non faremo distinzione tra curva e cammino appartenente alla classe di equivalenza che definisce la curva in quanto tutti i risultati che otterremo non dipendono dal cammino scelto a rappresentare la curva. Ad esempio, la lunghezza di una curva regolare è invariante per riparametrizzazione del cammino. Siano $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ e $\eta : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ due cammini equivalenti e $\varphi : [c, d] \mapsto [a, b]$ il cambio di parametro. Osservando che φ è derivabile

quasi ovunque¹ in $[c, d]$, quasi ovunque in $[c, d]$ si ha $\eta'(u) = \gamma'(\varphi(u))\varphi'(u)$. Posto allora $t = \varphi(u)$, poiché nei punti in cui la derivata di φ esiste vale $\varphi'(u) = |\varphi'(u)|$, si ottiene

$$\int_c^d |\eta'(u)| du = \int_c^d |\gamma'(\varphi(u))| \varphi'(u) du = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (7.5)$$

Esempio 7.8. Il cammino $\gamma(t) = t^3 + i|t|^3$ con $-1 \leq t \leq 1$ è regolare. Per $t < 0$ si ha $\gamma'(t) = 3t^2 - i3t^2$, mentre per $t > 0$ vale $\gamma'(t) = 3t^2 + i3t^2$. È facile mostrare usando direttamente la definizione di derivata che $\gamma'(0) = 0$. Quindi γ' esiste ed è continua in tutto l'intervallo $[-1, 1]$. La lunghezza della curva associata è

$$L_\gamma = \int_{-1}^1 \sqrt{9t^4 + 9t^4} dt = 2 \int_0^1 3\sqrt{2}t^2 dt = 2\sqrt{2}.$$

Posto $t^3 = x$, nel piano x, y l'equazione della curva associata al cammino considerato è $y(x) = |x|$. Tramite la funzione $\varphi(u) = \operatorname{sgn}(u)|u|^{1/3}$ con $-1 \leq u \leq 1$ possiamo riparametrizzare la curva $y(x) = |x|$ nel cammino $\eta(u) = (\operatorname{sgn}(u)|u|^{1/3})^3 + i|\operatorname{sgn}(u)|u|^{1/3}|^3 = u + i|u|$. Si noti che η non ha derivata in $u = 0$ mentre $\eta'(u)$ esiste continua per $u \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, pertanto η è un cammino regolare a tratti. La curva si dice comunque regolare in quanto un membro della classe di equivalenza che la definisce, il cammino γ appena studiato, è regolare.

Esempio 7.9. Il cammino $\gamma(t) = t + it^3 \sin(\pi/t)$ con $0 < t \leq 1$ e $\gamma(0) = 0$ è regolare. Infatti per $t \in (0, 1]$ si ha subito $\gamma'(t) = 1 + i[3t^2 \sin(\pi/t) - \pi t \cos(\pi/t)]$, mentre applicando la definizione di derivata troviamo $\gamma'(0) = 1$. Pertanto γ' esiste ed è continua in tutto l'intervallo $[0, 1]$. Il cammino interseca l'asse reale

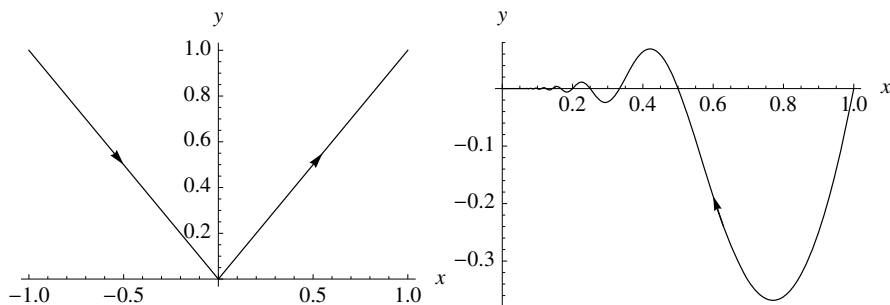


Fig. 7.1. Curve regolari $y(x) = |x|$ con $-1 \leq x \leq 1$ (sinistra) e $y(x) = x^3 \sin(\pi/x)$ con $0 \leq x \leq 1$ (destra)

¹ L'insieme dei punti dove la derivata non esiste ha misura di Lebesgue nulla.

infinite volte nei punti $x_k = k^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, e la sua lunghezza è

$$L_\gamma = \int_0^1 \sqrt{1 + [3t^2 \sin(\pi/t) - \pi t \cos(\pi/t)]^2} dt \simeq 1.50793.$$

Nel piano x, y la curva associata ha equazione $y(x) = x^3 \sin(\pi/x)$.

Teorema 7.10 (della curva di Jordan). *Sia γ una curva chiusa semplice (curva di Jordan) in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{C} . Il complemento della traccia di γ è l'unione di due distinti insiemi aperti e connessi: uno limitato, la parte interna $\text{Int}(\gamma)$, e uno illimitato, la parte esterna $\text{Ext}(\gamma)$. Inoltre la traccia di γ è la frontiera di ciascuno di questi due insiemi.*

$$\{\gamma\}^c = \text{Int}(\gamma) \cup \text{Ext}(\gamma),$$

$$\text{diam Int}(\gamma) < \infty, \quad \text{diam Ext}(\gamma) = \infty, \quad \partial \text{Int}(\gamma) = \partial \text{Ext}(\gamma) = \{\gamma\}.$$

Per una dimostrazione del teorema della curva di Jordan si veda [14].

Definizione 7.11 (curva chiusa semplice orientata positivamente). Una curva chiusa semplice γ in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{C} si dice orientata positivamente se, percorrendola, la parte interna di γ rimane a sinistra.

7.3 Integrali di funzioni complesse lungo curve regolari a tratti

Se $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è un cammino regolare a tratti la cui traccia $\{\gamma\} \subset D \subset \mathbb{C}$ e $f : D \mapsto \mathbb{C}$ è una funzione continua, allora $(f \circ \gamma)\gamma' : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è una funzione continua a tratti. È quindi ben posta la seguente definizione:

Definizione 7.12 (integrale lungo una curva regolare a tratti). Sia $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un cammino regolare a tratti e $f : D \mapsto \mathbb{C}$ una funzione continua in $D \supset \{\gamma\}$, allora l'integrale di f lungo γ è il numero complesso

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (7.6)$$

In realtà, per l'esistenza dell'integrale (7.6) è sufficiente che f sia definita e continua sulla traccia di γ a meno di un numero finito di punti. Anche in questo caso, infatti, $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ risulta continua a tratti in $[a, b]$. È immediato verificare che il risultato dell'integrale (7.6) è invariante per riparametrizzazione del cammino. Pertanto l'indice γ nel simbolo di integrale sta a indicare la curva classe di equivalenza a cui lo specifico cammino γ appartiene. Infine, se la curva γ viene suddivisa in due curve γ_1 e γ_2 , indicheremo simbolicamente

la suddivisione con $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ e si avrà

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (7.7)$$

Esempio 7.13. Calcoliamo l'integrale della funzione $f(z) = \bar{z}$ lungo il cammino $\gamma(t) = 2e^{it}$ con $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. In base alla definizione, si ha

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-it} 2e^{it} i dt = 4\pi i.$$

Esempio 7.14. Si consideri la funzione $f(z) = |z|^2$ continua in \mathbb{C} e se ne calcoli l'integrale lungo l'arco di circonferenza centrata nell'origine che va da 1 a i , lungo il segmento $[1, i]$ e lungo la poligonale $[1, 1+i, i]$. Posto $\gamma_1(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi/2$, l'integrale lungo l'arco di circonferenza vale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} |z|^2 dz &= \int_0^{\pi/2} |\gamma_1(t)|^2 \gamma_1'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} |e^{it}|^2 i e^{it} dt = e^{it} \Big|_0^{\pi/2} = -1 + i. \end{aligned}$$

Il segmento $[1, i]$ è rappresentato dal cammino $\gamma_2(t) = 1 + (i-1)t$ con $0 \leq t \leq 1$, per cui

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} |z|^2 dz &= \int_0^1 |\gamma_2(t)|^2 \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_0^1 |1 + (i-1)t|^2 (i-1) dt \\ &= (i-1) \int_0^1 ((1-t)^2 + t^2) dt = \frac{2}{3}(i-1). \end{aligned}$$

Infine rappresentiamo la poligonale $[1, 1+i, i]$ mediante i due cammini $\gamma_3(t) = 1 + it$ e $\gamma_4(t) = 1 + i - t$ con $0 \leq t \leq 1$ per i quali risulta

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} |z|^2 dz &= \int_0^1 |\gamma_3(t)|^2 \gamma_3'(t) dt \\ &= \int_0^1 |1 + it|^2 i dt = i \int_0^1 (1 + t^2) dt = i \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = i \frac{4}{3}, \\ \int_{\gamma_4} |z|^2 dz &= \int_0^1 |\gamma_4(t)|^2 \gamma_4'(t) dt \\ &= \int_0^1 |1 + i - t|^2 (-1) dt = - \int_0^1 ((1-t)^2 + 1) dt = -\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\gamma_3+\gamma_4} |z|^2 dz = \int_{\gamma_3} |z|^2 dz + \int_{\gamma_4} |z|^2 dz = \frac{4}{3}(-1+i).$$

Questo esempio mostra che l'integrale di una funzione f lungo curve differenti che pure congiungono lo stesso punto iniziale z_a allo stesso punto finale z_b assume, in generale, valori diversi. Se dovesse capitare che l'integrale di f lungo curve da z_a a z_b è indipendente dal tipo di curva considerata, allora useremo la notazione

$$\int_{z_a}^{z_b} f(z) dz$$

per indicare l'integrale lungo una qualsiasi di queste curve da z_a a z_b .

Se $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è un cammino, indichiamo con $-\gamma$ lo stesso cammino percorso in verso opposto. Evidentemente una parametrizzazione di $-\gamma$ è $\gamma(-t)$ con $-b \leq t \leq -a$. Se $w \in \mathbb{C}$, il cammino $\gamma+w$ ha traccia ottenuta traslando di w la traccia di γ . Le seguenti proprietà dell'integrale seguono immediatamente dalla Definizione 7.6.

Teorema 7.15. *Sia $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un cammino regolare a tratti, f e g due funzioni continue su $\{\gamma\}$ e $w \in \mathbb{C}$ una costante, allora*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} w f(z) dz &= w \int_{\gamma} f(z) dz, \\ \int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz &= \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz, \\ \int_{-\gamma} f(z) dz &= - \int_{\gamma} f(z) dz, \\ \int_{\gamma+w} f(z) dz &= \int_{\gamma} f(z+w) dz. \end{aligned}$$

Teorema 7.16 (disuguaglianza di Darboux). *Sia $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un cammino regolare a tratti di lunghezza L_{γ} e f una funzione continua su $\{\gamma\}$, allora*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L_{\gamma} \sup_{z \in \{\gamma\}} |f(z)|. \quad (7.8)$$

Dimostrazione. Usando la definizione di integrale e la disuguaglianza (7.3) si ha

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \\
&\leq \sup_{z \in \{\gamma\}} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\
&= L_\gamma \sup_{z \in \{\gamma\}} |f(z)|.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Si noti che essendo $f(\gamma(t))$ continua per $t \in [a, b]$, $|f(\gamma(t))|$ assume un massimo assoluto in $[a, b]$, cioè esiste $t_0 \in [a, b]$ tale che $\sup_{z \in \{\gamma\}} |f(z)| = \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| = |f(\gamma(t_0))|$. \square

Esempio 7.17. Proviamo che, se $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq \pi/2$, allora

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

La curva di integrazione ha lunghezza $L_\gamma = \pi$ e il modulo della funzione integranda per $z \in \{\gamma\}$ può essere maggiorato da

$$\left| \frac{1}{z^2 - 1} \right| = \frac{1}{|z^2 - 1|} \leq \frac{1}{||z^2| - 1|} = \frac{1}{4 - 1}.$$

Il risultato segue immediatamente usando la disuguaglianza di Darboux.

Esempio 7.18. Proviamo che, se $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq \pi$, allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz = 0,$$

dove, posto $z = re^{i\theta}$, si assume

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad r \geq 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

La lunghezza del cammino di integrazione γ_R è $L_{\gamma_R} = \pi R$, mentre il modulo della funzione integranda per $z \in \{\gamma_R\}$ è maggiorabile da

$$\left| \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} \right| = \frac{\sqrt{R}}{|z^2 + 1|} \leq \frac{\sqrt{R}}{||z|^2 - 1|} = \frac{\sqrt{R}}{R^2 - 1}.$$

Per la disuguaglianza di Darboux si ha allora

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \pi R \frac{\sqrt{R}}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

che implica $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \sqrt{z}/(z^2 + 1) dz = 0$.

Definizione 7.19 (primitiva). Siano $f : D \mapsto \mathbb{C}$ e $F : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Se $F'(z) = f(z) \forall z \in D$, allora F è una primitiva di f in D .

Teorema 7.20 (esistenza della primitiva). Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ continua in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

- a) f ha primitiva in D ;
- b) $\forall z_1, z_2 \in D$ e per ogni curva γ regolare a tratti contenuta in D congiungente z_1 a z_2 $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$;
- c) per ogni curva chiusa γ regolare a tratti contenuta in D $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Dimostrazione. Proveremo nell'ordine le implicazioni a) \Rightarrow b), b) \Rightarrow a), b) \Rightarrow c) e c) \Rightarrow b).

a) \Rightarrow b) Per ipotesi $\exists F : D \mapsto \mathbb{C}$ tale che $F'(z) = f(z) \forall z \in D$. Fissati due arbitrari punti $z_1, z_2 \in D$, si supponga per cominciare che esista un cammino regolare $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ tale che $\gamma(a) = z_1$ e $\gamma(b) = z_2$. L'integrale di f lungo γ vale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(z_2) - F(z_1), \end{aligned}$$

cioè dipende solo dai punti z_1 e z_2 . Analogamente si ragiona se γ è regolare a tratti. Si osservi che tale cammino esiste in quanto D è connesso.

b) \Rightarrow a) Scelto un punto $z_0 \in D$, ogni punto $z \in D$ può essere connesso a z_0 da una poligonale. Ha quindi senso parlare di un integrale di f lungo una curva regolare a tratti che va da z_0 a z ed è tutta contenuta in D . Poiché tale integrale è, per ipotesi, indipendente dalla curva considerata ma dipende solo da z_0 e z , definiamo

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw. \quad (7.10)$$

Poiché D è aperto $\exists \delta_1(z) > 0$ tale che $B(z, \delta_1) \subset D$. Scelto allora Δz tale che $|\Delta z| < \delta_1$, per le proprietà dell'integrale si ha

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(w)dw - \int_{z_0}^z f(w)dw = \int_z^{z+\Delta z} f(w)dw.$$

La curva che va da z a $z + \Delta z$ è arbitraria. Si scelga per essa il segmento corrispondente al cammino $\gamma(t) = z + t\Delta z$ con $0 \leq t \leq 1$. Poiché

$$\int_z^{z+\Delta z} dw = \int_0^1 \gamma'(t)dt = \int_0^1 \Delta z dt = \Delta z,$$

possiamo scrivere

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(w) - f(z)) dw.$$

Essendo f continua in z , $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ se $|w - z| < \delta_2$. Pertanto, se $|\Delta z| < \min(\delta_1, \delta_2)$, utilizzando la disuguaglianza di Darboux otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} (f(w) - f(z)) dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} |\Delta z| \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

In conclusione, esiste il limite di $(F(z + \Delta z) - F(z))/\Delta z$ per $\Delta z \rightarrow 0$, cioè F è derivabile in z , e si ha $F'(z) = f(z)$.

b) \Rightarrow c) Sia γ una arbitraria curva chiusa regolare a tratti con $\{\gamma\} \subset D$. Siano z_1 e z_2 due punti non coincidenti della traccia di γ . In questo modo si individuano due curve, γ_1 e γ_2 , che congiungono entrambe z_1 a z_2 e sono tali che $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$. Per ipotesi gli integrali di f lungo γ_1 e γ_2 hanno lo stesso valore e quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

c) \Rightarrow b) Si ripercorra a ritroso il ragionamento del punto precedente. \square

Si noti la differenza tra il teorema appena dimostrato e il Teorema fondamentale del calcolo 7.3 per funzioni di variabile reale a valori complessi. Infatti, la continuità di $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso non è sufficiente per concludere che esiste una sua primitiva in D . Nell'Esempio 7.14 abbiamo visto che per la funzione $f(z) = |z|^2$ continua in \mathbb{C} , integrali lungo cammini diversi, che congiungono i punti 1 e i , hanno valori diversi. Per il teorema precedente concludiamo che $f(z) = |z|^2$ non ammette una primitiva in \mathbb{C} .

Esempio 7.21. Calcoliamo gli integrali del tipo

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz, \quad f_n(z) = z^{-n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

con γ cammino chiuso semplice regolare a tratti tale che $0 \notin \{\gamma\}$.

Per $n = 2, 3, \dots$, la funzione f_n è continua in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aperto e connesso e in D ammette la primitiva $F_n(z) = -z^{-(n-1)}/(n-1)$. Di conseguenza è nullo l'integrale di f_n lungo un qualsiasi cammino γ tale che $0 \notin \{\gamma\}$, sia nel caso in cui $0 \in \text{Int}(\gamma)$ sia in quello in cui $0 \in \text{Ext}(\gamma)$.

Per $n = 1$, la funzione $f_1(z) = 1/z$ è ancora continua in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma in D non ammette primitiva. Infatti, la primitiva di f_1 non può che essere

un qualche ramo di $F_1(z) = \log z$ e tale primitiva esiste solo nel dominio di analiticità \tilde{D} del logaritmo. D'altro canto ogni dominio massimale di analiticità del logaritmo è contenuto strettamente in D . Se $0 \in \text{Ext}(\gamma)$, è possibile scegliere \tilde{D} in modo tale $\{\gamma\} \subset \tilde{D}$. In questo caso si ottiene $\int_{\gamma} z^{-1} dz = 0$. Se invece $0 \in \text{Int}(\gamma)$, l'integrale è non nullo e può essere calcolato nel modo seguente. Scegliamo un ramo del logaritmo la cui linea di diramazione σ abbia un unico punto di intersezione con γ . Sia tale punto $u_0 e^{i\alpha}$. Parametizziamo il cammino $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ in modo tale che $\gamma(a) = \gamma(b) = u_0 e^{i\alpha}$. Definiamo poi un nuovo cammino $\gamma_{\varepsilon} : [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \mapsto \mathbb{C}$ con $\varepsilon > 0$ tale che $\gamma_{\varepsilon}(t) = \gamma(t)$ $\forall t \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{z} dz.$$

Per ogni punto $z \in \tilde{D} = \mathbb{C} \setminus \{\sigma\}$ il corrispondente ramo del logaritmo ammette derivata e risulta $d \log z / dz = z^{-1}$. Pertanto in \tilde{D} la funzione $\log z$ è una primitiva di z^{-1} e poiché la traccia di γ_{ε} è contenuta in \tilde{D} , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{z} dz &= \log(\gamma_{\varepsilon}(b - \varepsilon)) - \log(\gamma_{\varepsilon}(a + \varepsilon)) \\ &= \log(\gamma(b - \varepsilon)) - \log(\gamma(a + \varepsilon)). \end{aligned}$$

In base alla definizione di $\log z$ risulta

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(\gamma(a + \varepsilon)) &= \ln u_0 + i\alpha, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(\gamma(b - \varepsilon)) &= \ln u_0 + i(\alpha + 2\pi), \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = (\ln u_0 + i(\alpha + 2\pi)) - (\ln u_0 + i\alpha) = 2\pi i.$$

Nel caso di un cammino γ chiuso ma non semplice si ragiona in modo analogo considerando γ come somma di cammini chiusi semplici.

Esempio 7.22. Si calcoli l'integrale della funzione di $z = re^{i\theta}$ definita da

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad r \geq 0, \quad \alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

lungo un cammino $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ chiuso semplice regolare a tratti che contiene al suo interno il punto $z = 0$ e interseca la semiretta $\sigma(u) = ue^{i\alpha}$, $u \in [0, \infty)$, nel punto $u_0 e^{i\alpha}$. La funzione integranda è analitica in $D = \mathbb{C} \setminus \{\sigma\}$ e in D ammette come primitiva il ramo di $\frac{2}{3} z^{3/2}$ che ha σ come linea di diramazione. Parametrizzato il cammino γ in modo tale che $\gamma(a) = \gamma(b) = u_0 e^{i\alpha}$ e definito $\gamma_{\varepsilon} : [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \mapsto \mathbb{C}$ con $\varepsilon > 0$ e $\gamma_{\varepsilon}(t) = \gamma(t)$ $\forall t \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, si ha

$$\int_{\gamma} \sqrt{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \sqrt{z} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{3} z^{3/2} \bigg|_{z=\gamma_\varepsilon(a+\varepsilon)}^{z=\gamma_\varepsilon(b-\varepsilon)} \\
&= \frac{2}{3} u_0^{3/2} e^{i3(\alpha+2\pi)/2} - \frac{2}{3} u_0^{3/2} e^{i3\alpha/2} \\
&= -\frac{4}{3} u_0^{3/2} e^{i3\alpha/2}.
\end{aligned}$$

7.4 Teorema di Cauchy-Goursat

Lemma 7.23. *Sia f analitica su e all'interno di γ curva chiusa semplice regolare a tratti. Per ogni $\varepsilon > 0$ la regione chiusa $\overline{\text{Int}(\gamma)} = \text{Int}(\gamma) \cup \{\gamma\}$ può essere ricoperta con un numero finito N di quadrati chiusi Q_j , $j = 1, 2, \dots, N$, tali che per ciascuno di questi vale la proprietà*

$$\begin{aligned}
&\exists z_j \in Q_j \cap \overline{\text{Int}(\gamma)} : \\
&\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in Q_j \cap \overline{\text{Int}(\gamma)} \setminus \{z_j\}. \quad (7.11)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che l'enunciato sia falso. Allora è possibile trovare un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni copertura finita esiste almeno un quadrato in cui la (7.11) è falsa. Si consideri inizialmente una copertura con N_0 quadrati $Q_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, N_0$, di lato d e si infittisca ripetutamente tale copertura suddividendo via via ogni quadrato in quattro quadrati di lato $d/2$, $d/4$, \dots . Alla n -esima suddivisione la copertura sarà costituita da N_n quadrati $Q_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, N_n$, di lato $d/2^n$. L'ipotesi è dunque che per ogni suddivisione di ordine n la (7.11) è falsa in almeno uno dei $Q_k^{(n)}$. Si ponga

$$A_n = \bigcup_{k: (7.11) \text{ falsa}} Q_k^{(n)} \cap \overline{\text{Int}(\gamma)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si ha $A_n \supset A_{n+1}$ in quanto, evidentemente, se la (7.11) è falsa per un quadrato di ordine $n+1$, la stessa proprietà è falsa anche per il quadrato di ordine n che lo contiene. Poiché per ipotesi $A_n \neq \emptyset \forall n$, si scelga un punto $w_n \in A_n$ e si consideri la successione $(w_n)_{n=0}^\infty$. Poiché $w_n \in \overline{\text{Int}(\gamma)}$ e $\overline{\text{Int}(\gamma)}$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{C} quindi compatto, è possibile estrarre da (w_n) una sottosuccessione (w_{n_j}) convergente. Sia w il corrispondente punto limite; si ha $w \in \overline{\text{Int}(\gamma)}$ in quanto $\overline{\text{Int}(\gamma)}$ è chiuso. Poiché $f(z)$ è analitica in $\overline{\text{Int}(\gamma)}$, e quindi in w , è possibile trovare un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in B(w, \delta) \setminus \{w\}.$$

Si consideri allora una copertura di ordine n_0 tale che $\sqrt{2}d/2^{n_0} < \delta$. Il punto

limite w appartiene a ciascuno degli A_n . Infatti A_n è chiuso e gli elementi della sottosuccessione (w_{n_j}) convergente a w appartengono tutti, a partire da un n_j abbastanza grande, ad A_n . In particolare, quindi, $\exists k_0$ tale che $w \in Q_{k_0}^{(n_0)} \cap \overline{\text{Int}(\gamma)} \subset A_{n_0}$. Si giunge così alla contraddizione

$$\begin{aligned} \exists w \in Q_{k_0}^{(n_0)} \cap \overline{\text{Int}(\gamma)} : \\ \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in Q_{k_0}^{(n_0)} \cap \overline{\text{Int}(\gamma)} \setminus \{w\}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 7.24 (Cauchy-Goursat). *Sia f analitica su e all'interno di γ curva chiusa semplice regolare a tratti. Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (7.12)$$

Dimostrazione. In virtù del Lemma 7.23, $\forall \varepsilon > 0$ è possibile trovare una copertura finita di $\overline{\text{Int}(\gamma)}$, la regione chiusa delimitata da $\{\gamma\}$, in quadrati Q_j , $j = 1, 2, \dots, N$, tali che per ciascuno di questi $\exists z_j \in Q_j \cap \overline{\text{Int}(\gamma)}$ e una funzione associata $\delta_j(z)$ definita da

$$\delta_j(z) = \begin{cases} (f(z) - f(z_j))/(z - z_j) - f'(z_j) & z \neq z_j \\ 0 & z = z_j \end{cases},$$

che è continua e gode della proprietà $|\delta_j(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in Q_j \cap \overline{\text{Int}(\gamma)}$. Sia γ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, il cammino orientato positivamente definito dal perimetro di $Q_j \cap \overline{\text{Int}(\gamma)}$. Usando l'identità $f(z) = f(z_j) + f'(z_j)(z - z_j) + \delta_j(z)(z - z_j)$, per ciascun cammino γ_j si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} f(z) dz &= (f(z_j) - z_j f'(z_j)) \int_{\gamma_j} dz + f'(z_j) \int_{\gamma_j} z dz \\ &\quad + \int_{\gamma_j} \delta_j(z)(z - z_j) dz. \end{aligned}$$

Risulta $\int_{\gamma_j} dz = 0$ e $\int_{\gamma_j} z dz = 0$ in quanto le funzioni integrande hanno rispettivamente primitive z e $z^2/2$ e il cammino γ_j è chiuso. Pertanto

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{\gamma_j} \delta_j(z)(z - z_j) dz. \quad (7.13)$$

Sommando tutti gli integrali di f lungo i cammini γ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

e quindi, per la (7.13) e utilizzando le disuguaglianze triangolare e di Darboux,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \delta_j(z)(z - z_j) dz \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left| \int_{\gamma_j} \delta_j(z)(z - z_j) dz \right| \\ &< \sum_{j=1}^N \varepsilon \sqrt{2} d(4d + L_j), \end{aligned}$$

dove d è il lato dei quadrati Q_j , e L_j la lunghezza di $\{\gamma_j\} \cap \{\gamma\}$. Sia $L = \sum_{j=1}^N L_j$ la lunghezza del cammino γ . Poiché γ è regolare a tratti, L è finito. Inoltre, per il teorema della curva di Jordan, deve esistere un quadrato di lato D finito che contiene γ . Segue che $\sum_{j=1}^N d^2 < D^2$ e $\sum_{j=1}^N dL_j < D \sum_{j=1}^N L_j < DL$. In conclusione,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon \sqrt{2} D(4D + L)$$

e dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto. \square

Nel teorema di Cauchy-Goursat appena dimostrato è cruciale che la curva chiusa sia semplice. Solo in questo caso, infatti, ha senso parlare di parte interna della curva γ e quindi di analiticità di f in tale regione. Se $f: G \mapsto \mathbb{C}$ è una funzione analitica in $G \subset \mathbb{C}$, possiamo domandarci sotto quali condizioni per G è nullo l'integrale di f lungo una qualsiasi curva chiusa γ contenuta in G . Questa proprietà può risultare falsa per domini del tipo $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, come mostrato nel caso della funzione $f(z) = 1/z$ considerata nell'Esempio 7.21.

Definizione 7.25 (curve omotope). Siano γ_0 e γ_1 due curve in $G \subset \mathbb{C}$ rappresentate dai cammini $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \mapsto G$. Si dice che γ_0 è omotopa a γ_1 in G , e si scrive $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in G , se esiste una funzione continua $\Gamma: [a, b] \times [0, 1] \mapsto G$ tale che $\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s)$ e $\Gamma(s, 1) = \gamma_1(s) \forall s \in [a, b]$. Se le due curve γ_0 e γ_1 hanno gli stessi punti estremi $z_a = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $z_b = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, imponiamo anche che $\Gamma(a, t) = z_a$ e $\Gamma(b, t) = z_b \forall t \in [0, 1]$. In particolare, se γ_0 e γ_1 sono curve chiuse, allora $\Gamma(a, t) = \Gamma(b, t) \forall t \in [0, 1]$.

Si osservi che $\gamma_t: [a, b] \mapsto G$ definita da $\gamma_t(s) = \Gamma(s, t)$ rappresenta una curva in G che al variare di t da 0 a 1 si deforma con continuità da γ_0 a γ_1 . L'omotopia (per brevità, se non genera confusione, ometteremo di specificare il dominio G) è una relazione di equivalenza. Ogni curva è omotopa a se stessa. Se $\gamma_0 \sim \gamma_1$ e $\gamma_1 \sim \gamma_2$ allora $\gamma_0 \sim \gamma_2$.

Definizione 7.26 (curve chiuse omotope a zero). Sia γ una curva chiusa in $G \subset \mathbb{C}$. Si dice che γ è omotopa a zero, e si scrive $\gamma \sim 0$, se γ è omotopa a una curva costante in G , cioè a un punto di G .

Una curva chiusa omotopa a zero in G è deformabile con continuità a un qualche punto di G . Ad esempio, in $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ogni cammino γ chiuso semplice tale che $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$ non è omotopo a zero in quanto non esiste alcun punto di G a cui γ possa deformarsi con continuità. Se invece $z_0 \in \text{Ext}(\gamma)$ allora evidentemente $\gamma \sim 0$.

Definizione 7.27 (insieme semplicemente connesso). Un insieme aperto $G \subset \mathbb{C}$ si dice semplicemente connesso se G è connesso e ogni curva chiusa contenuta in G è omotopa a zero. Un insieme connesso non semplicemente connesso si dice molteplicemente connesso.

Una palla aperta, tutto \mathbb{C} , il dominio di analiticità del ramo principale di $\log z$ sono insiemi semplicemente connessi, invece il dominio di analiticità di $1/z$ è molteplicemente connesso.

Se G è semplicemente connesso, ogni curva chiusa γ contenuta in G può essere deformata con continuità a un qualsiasi punto di G . Infatti, detto z un arbitrario punto di G , ogni curva chiusa γ contenuta in G è deformabile con continuità a un punto $w \in G$. Poiché G è aperto e connesso, esiste una poligonale contenuta in G che connette i punti z e w e tale poligonale è deformabile con continuità al suo estremo z .

Teorema 7.28. *Sia $G \subset \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso. Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (7.14)$$

per ogni funzione $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica in G e per ogni curva chiusa γ regolare a tratti contenuta in G .

Dimostrazione. Se γ è una curva chiusa semplice, $\forall z \in \text{Int}(\gamma)$ deve essere $z \in G$. Infatti se z non appartenesse a G risulterebbe γ non omotopo a zero, in contraddizione con l'ipotesi che G è semplicemente connesso. Quindi ogni funzione f analitica in G è analitica su e all'interno di γ e si applica il Teorema 7.24. Se γ è una curva chiusa che si autointerseca $n - 1$ volte, allora $\gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k$, dove γ_k , $k = 1, \dots, n$, sono n curve chiuse semplici. Poiché $\gamma \sim 0$, deve anche essere $\gamma_k \sim 0$ per ogni indice k . Segue che ogni punto interno a γ_k è contenuto in G e il teorema di Cauchy-Goursat si applica a ciascuna curva γ_k . Si conclude

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 0 = 0. \quad (7.15)$$

La proprietà rimane valida anche per $n \rightarrow \infty$. □

Corollario 7.29. *Sia f analitica in $G \subset \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso, allora f ammette primitiva in G .*

Poiché \mathbb{C} è aperto e semplicemente connesso, le funzioni intere ammettono primitiva in \mathbb{C} . Il ramo principale di $\log z$ ammette primitiva nel suo dominio di analiticità aperto e semplicemente connesso $\{z \in \mathbb{C} : z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$ e la primitiva è $-z + z \log z$. Si noti che il Corollario 7.29 fornisce una condizione solo sufficiente affinché una funzione ammetta primitiva. La funzione $1/z^2$ analitica in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, aperto ma non semplicemente connesso, ammette tuttavia in tale dominio la primitiva $-1/z$.

Sfruttando la definizione di omotopia dei cammini, il Teorema 7.28 può essere enunciato nelle seguenti forme equivalenti.

Teorema 7.30. *Sia f analitica in $G \subset \mathbb{C}$ aperto e sia γ una curva chiusa regolare a tratti contenuta in G omotopa a zero, allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (7.16)$$

Teorema 7.31. *Sia f analitica in $G \subset \mathbb{C}$ aperto e siano γ_1 e γ_2 due curve aperte regolari a tratti contenute in G omotope con estremi coincidenti, allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (7.17)$$

Infine è di grande utilità nelle applicazioni il seguente risultato.

Teorema 7.32 (principio di deformazione dei cammini). *Siano γ e γ_1 due curve chiuse semplici regolari a tratti orientate positivamente con $\{\gamma_1\} \subset \text{Int}(\gamma)$. Se f è analitica su γ , γ_1 e nella regione tra esse compresa, allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad (7.18)$$

Dimostrazione. Si congiunga un punto di γ a un punto di γ_1 mediante una curva λ aperta regolare a tratti contenuta nella regione tra γ e γ_1 e si consideri la curva chiusa $\eta = \gamma + \lambda + (-\gamma_1) + (-\lambda)$. La traccia di tale curva costituisce la frontiera di un insieme aperto semplicemente connesso G in cui f è analitica. Per il Teorema 7.28 l'integrale di f lungo una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti contenuta in G è nullo. Si consideri allora una curva chiusa η_ε regolare a tratti contenuta in G omotopa a η e tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_\varepsilon = \eta$. Si ha

$$\int_{\eta} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\eta_\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = 0.$$

D'altro canto

$$\int_{\eta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\lambda} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\lambda} f(z) dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Combinando i due risultati segue l'asserto. \square

Il principio di deformazione dei cammini si generalizza facilmente a un numero arbitrario di curve chiuse semplici orientate positivamente, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, tutte contenute in γ e che non si intersecano tra loro. In questo caso

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz. \quad (7.19)$$

7.5 Formula integrale di Cauchy

Teorema 7.33 (formula integrale di Cauchy). *Sia f analitica su e all'interno di γ curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente. Allora $\forall z \in \text{Int}(\gamma)$ si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (7.20)$$

Dimostrazione. Si consideri il cammino $\gamma_{\rho}(\theta) = z + \rho e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e ρ sufficientemente piccolo affinché la circonferenza γ_{ρ} sia interna a γ . Poiché $f(w)/(w - z)$ è una funzione di w analitica su γ , su γ_{ρ} e nella regione compresa tra γ e γ_{ρ} , per il principio di deformazione dei cammini si ha

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Da questa, e usando $\int_{\gamma_{\rho}} (w - z)^{-1} dw = 2\pi i$, segue

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - 2\pi i f(z) = \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw.$$

Poiché f è analitica e quindi continua in z , $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ se $|w - z| < \delta$. Scelto allora $\rho < \delta$, per la disuguaglianza di Darboux si ha

$$\left| \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \right| < 2\pi \rho \frac{\varepsilon}{\rho} = 2\pi \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\int_{\gamma_{\rho}} (f(w) - f(z))/(w - z) dw = 0$ e quindi l'asserto. \square

Teorema 7.34 (derivate delle funzioni analitiche). *Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitica in $D \subset \mathbb{C}$ aperto, allora f ha derivate di ogni ordine in D e $\forall z \in D$ la derivata n -esima di f in z può essere calcolata come*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.21)$$

dove γ è una qualsiasi curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente tale che $z \in \text{Int}(\gamma)$ e $\overline{\text{Int}(\gamma)} \subset D$.

Dimostrazione. Si ragioni per induzione. Per $n = 0$ la (7.21) si riduce alla formula integrale di Cauchy del Teorema 7.33. Si supponga allora che la (7.21) valga per un intero non negativo $n - 1$ e mostriamo che essa è valida anche per l'intero n . Scelti un arbitrario punto $z \in D$ e un'arbitraria curva γ chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente e tale che $z \in \text{Int}(\gamma)$ e $\overline{\text{Int}(\gamma)} \subset D$, calcoliamo direttamente $f^{(n)}(z)$ come

$$f^{(n)}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z + \Delta z) - f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}.$$

Per l'ipotesi fatta e utilizzando il principio di deformazioni dei cammini, abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{f^{(n-1)}(z + \Delta z) - f^{(n-1)}(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i \Delta z} \int_{\gamma} f(w) \left(\frac{1}{(w-z-\Delta z)^n} - \frac{1}{(w-z)^n} \right) dw \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i \Delta z} \int_{\gamma_{\rho}} f(w) \frac{(w-z)^n - (w-z-\Delta z)^n}{(w-z-\Delta z)^n (w-z)^n} dw \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} f(w) \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (w-z)^{n-1-k} (w-z-\Delta z)^k}{(w-z-\Delta z)^n (w-z)^n} dw, \quad (7.22) \end{aligned}$$

dove γ_{ρ} è la circonferenza $|w-z| = \rho$ orientata come γ e di raggio ρ sufficientemente piccolo per cui $\{\gamma_{\rho}\} \subset \text{Int}(\gamma)$. Poiché siamo interessati a valutare il limite $\Delta z \rightarrow 0$, senza perdita di generalità si è assunto $z + \Delta z \in \text{Int}(\gamma)$ e $|\Delta z| < \rho$. Infine, nell'ultima linea della (7.22) si è fatto uso dell'identità $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$. Ricorrendo ancora al principio di deformazione dei cammini, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{f^{(n-1)}(z + \Delta z) - f^{(n-1)}(z)}{\Delta z} - \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} f(w) h(w) dw, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$h(w) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} [(w-z)^{n-k}(w-z-\Delta z)^k - (w-z-\Delta z)^n]}{(w-z-\Delta z)^n(w-z)^{n+1}}.$$

Per la disuguaglianza di Darboux, abbiamo allora

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f^{(n-1)}(z+\Delta z) - f^{(n-1)}(z)}{\Delta z} - \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \right| \\ & \leq \frac{(n-1)!}{2\pi} 2\pi\rho M(\rho) \frac{\rho^{n-1} |\Delta z| [2^n(n+1) - n^2 - n - 1]}{(\rho - |\Delta z|)^n \rho^{n+1}}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

dove $M(\rho) = \sup_{w \in \{\gamma_\rho\}} |f(w)|$ e si è utilizzata la disuguaglianza

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{n-1} [(w-z)^{n-k}(w-z-\Delta z)^k - (w-z-\Delta z)^n] \right| \\ & = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (w-z)^{n-j} \Delta z^j - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (w-z)^{n-j} \Delta z^j \right] \right| \\ & = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[(n-k)(w-z)^{n-1} \Delta z \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} (w-z)^{n-j} \Delta z^j - \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} (w-z)^{n-j} \Delta z^j \right] \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[(n-k) |(w-z)^{n-1} \Delta z| \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} |(w-z)^{n-j} \Delta z^j| + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} |(w-z)^{n-j} \Delta z^j| \right] \\ & < \rho^{n-1} |\Delta z| \sum_{k=0}^{n-1} [(n-k) + (2^k - 1 - k) + (2^n - 1 - n)] \\ & = \rho^{n-1} |\Delta z| [2^n(n+1) - n^2 - n - 1] \end{aligned}$$

valida per $|\Delta z| < |w-z| = \rho$. L'asserto segue immediatamente osservando che il membro di destra della (7.23) si annulla per $\Delta z \rightarrow 0$. \square

Corollario 7.35. *Sia f analitica in $D \subset \mathbb{C}$ aperto, allora sono analitiche in D anche le sue derivate di ogni ordine $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$*

Teorema 7.36 (Morera). *Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ continua in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Se per ogni curva chiusa γ regolare a tratti contenuta in D risulta $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, allora f è analitica in D .*

Dimostrazione. Per il Teorema 7.20 f ammette in D una primitiva F . Poiché $F'(z) = f(z) \forall z \in D$, la funzione F è analitica in D e per il Teorema 7.35 anche F' , cioè f , è analitica in D . \square

Si osservi che se f è analitica in D aperto e connesso non è in generale vero che $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ per ogni curva chiusa γ contenuta in D , si ricordi l'Esempio 7.21 con $f(z) = z^{-1}$ e $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Invece, in base al Teorema 7.28, l'integrale è sempre nullo se si aggiunge l'ipotesi che D sia semplicemente connesso.

La formula integrale di Cauchy è di importanza centrale nella teoria delle funzioni analitiche. Alcune prime rilevanti applicazioni sono riportate di seguito.

Teorema 7.37 (disuguaglianze di Cauchy). *Sia f analitica in $B(z_0, R)$ e risulti $|f(z)| \leq M \forall z \in B(z_0, R)$. Allora*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{R^n} M, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.24)$$

Dimostrazione. Detta γ_r la circonferenza di centro z_0 e raggio r , ad ogni ordine n e per ogni $r < R$ il Teorema 7.34 ci permette di scrivere

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

e quindi, utilizzando la disuguaglianza di Darboux,

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq 2\pi r \frac{n!}{2\pi} \frac{\sup_{w \in \{\gamma_r\}} |f(w)|}{r^{n+1}} \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Poiché $r < R$ è arbitrario, l'asserto segue prendendo il limite $r \rightarrow R^-$. \square

Teorema 7.38 (Liouville). *Sia f intera e limitata in \mathbb{C} , allora f è costante in \mathbb{C} .*

Dimostrazione. Poiché, per ipotesi, la funzione f è analitica in tutto il piano complesso, $\forall z \in \mathbb{C}$ vale la formula integrale di Cauchy

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw,$$

dove γ_R è una circonferenza orientata positivamente, centrata in z e di raggio R arbitrario. D'altro canto, poiché f è limitata in \mathbb{C} , $\exists M > 0$ tale che $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$. Si ottiene allora, per la disuguaglianza di Darboux,

$$|f'(z)| \leq 2\pi R \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R}.$$

Dall'arbitrarietà di R segue che $f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Per il Teorema 5.18 f è costante in \mathbb{C} . \square

Teorema 7.39 (teorema fondamentale dell'algebra). Sia $P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ con $z, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora esiste almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_0) = 0$.

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che $P_n(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Segue che la funzione $f(z) = 1/P_n(z)$ è intera. Tale funzione è anche limitata. Infatti $\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \infty$ in quanto non è possibile limitare $|P_n(z)|$ con alcuna costante finita. Segue che $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ cioè $\exists R > 0$ tale che $|f(z)| < 1$ se $|z| > R$. D'altro canto $|f(z)|$ è una funzione continua e dunque limitata nel compatto $|z| \leq R$. Essendo f analitica e limitata in \mathbb{C} , per il teorema di Liouville si giunge all'assurdo che essa è costante in \mathbb{C} . Deve quindi esistere almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_0) = 0$. \square

Una conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra è che il polinomio P_n può essere riscritto come

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad (7.25)$$

dove z_1, z_2, \dots, z_n sono n costanti complesse non necessariamente distinte. Infatti, per il Teorema 7.39, $\exists z_1 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_1) = 0$. Osservando che per ogni k intero

$$z^k - z_1^k = (z - z_1)(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + z^{k-3}z_1^2 + \dots + zz_1^{k-2} + z_1^{k-1}),$$

si ha

$$\begin{aligned} P_n(z) &= P_n(z) - P_n(z_1) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k z^k - \sum_{k=1}^n a_k z_1^k \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (z^k - z_1^k) \\ &= (z - z_1) P_{n-1}(z), \end{aligned}$$

dove $P_{n-1}(z)$ è il polinomio di grado $n - 1$ definito da

$$P_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} z_1^j = \sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} \sum_{j=0}^m z^{m-j} z_1^j.$$

Iterando il ragionamento si giunge a scrivere $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)P_0$, dove P_0 è una costante, necessariamente uguale al coefficiente a_n di z^n del polinomio P_n . I numeri complessi z_1, z_2, \dots, z_n si chiamano le radici del polinomio P_n . Un polinomio di grado n può avere al più n radici distinte.

Esercizi

7.1. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz,$$

dove γ è il cammino di integrazione, percorso in verso antiorario, costituito dalla semicirconferenza $|z| = 2$ con $\text{Im } z > 0$ e dal segmento dell'asse reale compreso tra $z = -2$ e $z = 2$.

7.2. Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = (z - \bar{z})^2$ lungo il cammino γ rappresentato dal perimetro del triangolo di vertici $z_1 = (0, 0)$, $z_2 = (1, 0)$, $z_3 = (0, 1)$, percorso in verso antiorario.

7.3. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} (z^2 - \bar{z}^2) dz,$$

dove γ è il cammino rettilineo che va da $z = 1$ a $z = i$.

7.4. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\bar{z}} dz,$$

dove γ è il cammino chiuso, percorso in verso antiorario, formato dal segmento γ_1 congiungente i punti $\pm 1 - i$ e dall'arco di circonferenza $\gamma_2(t) = \sqrt{2}e^{it}$, $-\pi/4 \leq t \leq 5\pi/4$.

7.5. Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \text{Im } z - \text{Re } z - i3(\text{Re } z)^2$ lungo le curve γ_1 , γ_2 e γ_3 , costituite rispettivamente dai segmenti $[0, i]$, $[i, 1 + i]$ e $[0, 1 + i]$.

7.6. Detto γ il perimetro del quadrato di vertici $1, i, -1, -i$, dimostrare che

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{z^2} dz \right| \leq 8\sqrt{2}.$$

7.7. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, dimostrare che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} z^{-3/2} \log z dz = 0.$$

7.8. Supponendo $f(z)$ continua per $\text{Re } z \geq 0$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, dimostrare che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{az} f(z) dz = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a < 0,$$

dove $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

7.9. Sia $a \neq 0$ reale arbitrario. Calcolare l'integrale del ramo principale di $f(z) = z^{a-1}$ lungo la circonferenza orientata positivamente $|z| = R$, con $R > 0$ arbitrario. Si determini infine il limite $a \rightarrow 0$ del risultato trovato.

7.10. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} z^{-1} \log z \, dz,$$

dove $\gamma(\theta) = \exp(i\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e per il logaritmo viene scelto il ramo $\log z = \ln r + i\theta$, dove $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$.

7.11. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} z^{3/2} \, dz,$$

dove $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $R > 0$.

7.12. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} z^{4/3} \, dz,$$

dove $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $R > 0$.

7.13. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} z^z (1 + \log z) \, dz,$$

dove γ è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario.

7.14. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{\cos \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \, dz,$$

dove γ è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario.

7.15. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{\log z}{z^2} \, dz,$$

dove γ è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario.

7.16. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} z \log z dz,$$

dove γ è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario.

7.17. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{2\sqrt{z} \cos^2(\sqrt{z})} dz,$$

dove γ è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario con $R \neq ((2n+1)\pi/2)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

7.18. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} z^{1/3} dz,$$

dove γ è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario.

7.19. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} z^{3/2} dz,$$

dove γ è il perimetro, orientato positivamente, del quadrato di vertici $L - iL$, $L + iL$, $-L + iL$, $-L - iL$, con $L > 0$.

7.20. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^{q-1} dz,$$

dove γ è una curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente passante per il punto $z_0 - R$, con $R > 0$, e tale $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$. Si consideri $q \neq 0$ reale arbitrario.

7.21. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\log z)}{z} dz,$$

dove γ è il cammino, percorso in verso antiorario, costituito dal perimetro del triangolo di vertici b e $-a \pm ib$, con a e b reali positivi.

7.22. Fornire un esempio di una funzione f analitica in $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ che non ammette una primitiva in A .

7.23. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz,$$

nei seguenti casi in cui γ è un cammino di integrazione chiuso orientato positivamente tale che:

- a) contiene il punto $z = 0$ ma non contiene il punto $z = 1$;
- b) contiene il punto $z = 1$ ma non contiene il punto $z = 0$;
- c) contiene entrambi i punti $z = 0$ e $z = 1$.

7.24. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 1} dz,$$

dove γ è l'esagono regolare, inscritto nella circonferenza di raggio $a > 1$ e di centro $z = a$, avente due lati paralleli all'asse reale e percorso in verso antiorario.

7.25. Sia $f(z)$ analitica su e dentro il cammino chiuso semplice γ e sia z_0 un punto non appartenente a $\{\gamma\}$. Dimostrare che

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz.$$

7.26. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{\log(z + 2\pi)}{(z - i\pi)^3} dz,$$

dove γ è la circonferenza $|z| = 4$ percorsa in verso antiorario.

7.27. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 \sqrt{3+z}} dz,$$

dove γ è il cammino, percorso in verso antiorario, costituito dal perimetro del quadrato di vertici $1, i, -1, -i$.

7.28. Sia f una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione della singolarità isolata, di natura non specificata, in $z = 2 + 2i$ e sia γ la circonferenza $|z - 3| = 2$ orientata positivamente. Calcolare i seguenti integrali, esprimendo il risultato, se necessario, in termini dei valori assunti da f e dalle

sue derivate in punti opportuni. Qualora le informazioni non fossero sufficienti a valutare l'integrale, dire che questo è non calcolabile.

$$\text{a) } \int_{\gamma} \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z+i)^2} dz, \quad \text{b) } \int_{\gamma} \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z-1)^2} dz, \quad \text{c) } \int_{\gamma} \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z-4)^2} dz.$$

7.29. Sia f una funzione intera con la proprietà $\exists M > 0$ tale che $\forall z \in \mathbb{C}$ si ha $|f(z)| \leq M + \sqrt{|z|}$. Cosa è possibile affermare su f ?

7.30. Sia $f(z)$ intera. Dimostrare che se $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $u(z) = \operatorname{Re}(f(z)) \leq c$ $\forall z \in \mathbb{C}$, allora $u(z)$ è costante in \mathbb{C} .

7.31. Sia f una funzione analitica in \mathbb{C} ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate nei punti z_1, z_2, \dots, z_n , tutti distinti dall'origine. Sia $R = \min_{k=1, \dots, n} |z_k| > 0$. Stimare R sapendo che $f^{(4)}(0) = 1 - i$ e $|f(z)| \leq 5|z|^3$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Serie di Taylor e Laurent

Sommario. Sviluppo in serie di Taylor intorno al punto z_0 di funzioni analitiche in una palla centrata in z_0 . Integrale lungo una curva di una serie di potenze moltiplicata per una funzione continua. La somma di una serie di potenze è una funzione analitica all'interno del cerchio di convergenza. Derivata di una serie di potenze. Unicità dell'espansione in serie di Taylor. Esempi notevoli di sviluppi in serie di Taylor. Definizione di anello. Sviluppo in serie di Laurent intorno al punto z_0 di funzioni analitiche in un anello centrato in z_0 . Integrale lungo una curva di una serie di potenze generalizzata moltiplicata per una funzione continua. La somma di una serie di potenze generalizzata è una funzione analitica all'interno dell'anello di convergenza. Derivata di una serie di potenze generalizzata. Unicità dell'espansione in serie di Laurent. Esempi notevoli di sviluppi in serie di Laurent. Moltiplicazione e divisione di serie di potenze.

8.1 Serie di Taylor

Teorema 8.1 (sviluppo in serie di Taylor). *Sia f analitica in $B(z_0, R)$, allora $\forall z \in B(z_0, R)$ vale lo sviluppo in serie di Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (8.1)$$

Dimostrazione. Scelto arbitrariamente $z \in B(z_0, R)$ e posto $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ e $|z - z_0| < r < R$, per la formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} dw.$$

Usando l'identità

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w} \frac{1}{1-z/w} \\ &= \frac{1}{w} \frac{1-(z/w)^n}{1-z/w} + \frac{1}{w} \frac{(z/w)^n}{1-z/w} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{w^{k+1}} + \frac{z^n}{(w-z)w^n}\end{aligned}$$

valida per z e w arbitrari con $z \neq w$, possiamo riscrivere $f(z)$ come

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(z-z_0)^n}{[(w-z_0)-(z-z_0)](w-z_0)^n} \right) dw \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw \\ &\quad + \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{[(w-z_0)-(z-z_0)](w-z_0)^n} dw \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k + \rho_n(z),\end{aligned}\tag{8.2}$$

dove si è utilizzata la formula integrale di Cauchy

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw$$

e si è posto

$$\rho_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{[(w-z_0)-(z-z_0)](w-z_0)^n} dw.$$

Per concludere è sufficiente mostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(z) = 0$ perché allora in questo limite la (8.2) riproduce lo sviluppo di Taylor desiderato. Posto $M = \sup_{w \in \{\gamma\}} |f(w)|$, dalla disuguaglianza di Darboux otteniamo

$$|\rho_n(z)| \leq \frac{|z-z_0|^n}{2\pi} 2\pi r \frac{M}{(r-|z-z_0|)r^n} = \frac{M(|z-z_0|/r)^n}{1-|z-z_0|/r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

in quanto $|z-z_0| < r$.

□

Nel caso particolare $z_0 = 0$, lo sviluppo in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (8.3)$$

viene spesso indicato con il nome di sviluppo in serie di Maclaurin.

Teorema 8.2 (integrale di una serie di potenze). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z)$ all'interno del cerchio di convergenza di centro z_0 e raggio R . Se γ è una curva regolare a tratti contenuta in $B(z_0, R)$ e g una funzione continua su $\{\gamma\}$, allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} g(z)(z-z_0)^n dz = \int_{\gamma} g(z)f(z) dz. \quad (8.4)$$

Dimostrazione. Si noti che g e f sono funzioni continue su $\{\gamma\}$. La funzione g lo è per ipotesi. Invece f , in quanto somma di una serie di potenze con raggio di convergenza R , è (uniformemente) continua in $\overline{B}(z_0, r)$ con $r < R$ arbitrario. Poiché γ è contenuta in $B(z_0, R)$, $\exists r < R$ tale che $\{\gamma\} \subset \overline{B}(z_0, r)$ e quindi f è continua su $\{\gamma\}$. L'integrale lungo γ del prodotto gf pertanto esiste. Inoltre, $\forall z \in B(z_0, R)$ vale

$$g(z)f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k g(z)(z-z_0)^k + g(z)\rho_n(z), \quad (8.5)$$

dove $\rho_n(z)$ è il resto n -esimo della serie convergente a f

$$\rho_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

Dalla (8.5) segue che $g\rho_n$ è una funzione continua in $B(z_0, R)$ e quindi integrabile lungo γ . Possiamo dunque scrivere

$$\int_{\gamma} g(z)f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{\gamma} g(z)(z-z_0)^k dz + \int_{\gamma} g(z)\rho_n(z) dz.$$

Sia M il massimo valore di $|g(z)|$ su $\{\gamma\}$ e L la lunghezza di γ . Poiché la serie di potenze considerata converge uniformemente a f in $\overline{B}(z_0, r) \supset \{\gamma\}$, $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ tale che $|\rho_n(z)| < \varepsilon \forall z \in \{\gamma\}$ e $\forall n > N$. Dalla disuguaglianza di Darboux otteniamo

$$\left| \int_{\gamma} g(z)\rho_n(z) dz \right| < LM\varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Poiché tale relazione vale per ε arbitrariamente piccolo purché N sia sufficien-

temente grande, segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} g(z) \rho_n(z) dz = 0$$

e quindi l'asserto. \square

Corollario 8.3 (analiticità di una serie di potenze). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ all'interno del cerchio di convergenza di centro z_0 e raggio R , allora f è analitica in $B(z_0, R)$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 8.2 con la scelta $g(z) = 1$ e γ arbitraria curva chiusa regolare a tratti contenuta in $B(z_0, R)$, si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0.$$

Per il Teorema di Morera (7.36) segue che f è analitica in $B(z_0, R)$. \square

Corollario 8.4 (derivata di una serie di potenze). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ all'interno del cerchio di convergenza di centro z_0 e raggio R , allora $\forall z \in B(z_0, R)$ si ha $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$.*

Dimostrazione. Fissato arbitrariamente $z \in B(z_0, R)$, dal Teorema 8.2 con la scelta $g(w) = 1/(2\pi i(w - z)^2)$ e γ curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente tale che $\{\gamma\} \subset B(z_0, R)$ e $z \in \text{Int}(\gamma)$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(w - z_0)^n}{(w - z)^2} dw. \quad (8.6)$$

Per il Corollario 8.3 la funzione f è analitica in $B(z_0, R)$ e pure analitiche sono all'interno di tale palla le funzioni $(w - z_0)^n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$. Poiché $\{\gamma\} \subset B(z_0, R)$ e $z \in \text{Int}(\gamma)$, per la formula integrale di Cauchy 7.34 si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw &= f'(z), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(w - z_0)^n}{(w - z)^2} dw &= n(z - z_0)^{n-1}. \end{aligned}$$

Inserendo questi risultati nella (8.6) segue l'asserto. \square

Corollario 8.5 (unicità dello sviluppo in serie di Taylor). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ all'interno del cerchio di convergenza di centro z_0 e raggio R , allora questa è l'espansione in serie di Taylor di f intorno a z_0 , cioè $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, $n = 0, 1, 2, \dots$*

Dimostrazione. Fissato arbitrariamente l'indice $n = 0, 1, 2, \dots$, dal Teorema 8.2 con la scelta $g(z) = 1/(2\pi i(z - z_0)^{n+1})$ e γ curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente tale che $\{\gamma\} \subset B(z_0, R)$ e $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^{k-n-1} dz. \quad (8.7)$$

Per il Corollario 8.3 la funzione f è analitica in $B(z_0, R)$ e poiché $\{\gamma\} \subset B(z_0, R)$ e $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$, per la formula integrale di Cauchy 7.34 si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Gli integrali che compaiono nel membro di destra della (8.7) valgono

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^{k-n-1} dz = \delta_{k-n-1, -1} = \delta_{k, n}.$$

Segue allora $f^{(n)}(z_0)/n! = a_n$. □

Esempio 8.6. Si determini lo sviluppo in serie di Maclaurin di $f(z) = e^z$. La funzione è intera e per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $f^{(n)}(z) = e^z$ e quindi $f^{(n)}(0) = 1$. Pertanto

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots, \quad |z| < \infty. \end{aligned}$$

Esempio 8.7. Si determini lo sviluppo in serie di Maclaurin di $f(z) = \sin z$. La funzione è intera e ricordando che $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ dal precedente risultato si ha

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{i^n z^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ &= z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad |z| < \infty. \end{aligned}$$

Esempio 8.8. Si determini lo sviluppo in serie di Maclaurin di $f(z) = \cos z$. La funzione è intera e ricordando che $\cos z = d \sin z / dz$ dal precedente risultato

si ha

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{6!} + \dots, \quad |z| < \infty.\end{aligned}$$

Esempio 8.9. Si determini lo sviluppo in serie di Maclaurin di $f(z) = \cosh z$. La funzione è intera e ricordando che $\cosh z = \cos(iz)$ dal precedente risultato si ha

$$\begin{aligned}\cosh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (iz)^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \\ &= 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{6!} + \dots, \quad |z| < \infty.\end{aligned}$$

Esempio 8.10. Si determini lo sviluppo in serie di Maclaurin di $f(z) = \sinh z$. La funzione è intera e ricordando che $\sinh z = d \cosh z / dz$ dal precedente risultato si ha

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} z^{2k-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad |z| < \infty.\end{aligned}$$

Esempio 8.11. Abbiamo già studiato la convergenza della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1. \quad (8.8)$$

Posto $f(z) = 1/(1-z)$, per l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor dalla (8.8) ricaviamo $f^{(n)}(0) = n!$. Con le trasformazioni $z \rightarrow -z$ e $z \rightarrow 1-z$, dalla (8.8) ricaviamo anche

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

Esempio 8.12. Si determini lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z) = 1/z^2$ intorno al punto $z_0 \neq 0$. Osservando che

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + (z - z_0)/z_0} \\ &= \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n, \quad \left| \frac{z - z_0}{z_0} \right| < 1, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= -\frac{d}{dz} \frac{1}{z} \\ &= -\frac{1}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{z_0} \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{z_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^k, \quad |z - z_0| < |z_0|. \end{aligned}$$

Esempio 8.13. Si determini lo sviluppo in serie di Taylor del ramo principale di $f(z) = \log z$ intorno a $z_0 \neq -t$ con $0 \leq t < \infty$. Il più grande cerchio di centro z_0 contenuto nel dominio di analiticità del ramo principale di $\log z$ ha raggio $|\operatorname{Im} z_0|$ se $\operatorname{Re} z_0 < 0$ e $|z_0|$ se $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$. All'interno di tale cerchio si ha

$$\begin{aligned} \log z - \log z_0 &= \int_{z_0}^z \frac{1}{w} dw \\ &= \int_{z_0}^z \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{w - z_0}{z_0} \right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{w - z_0}{z_0} \right)^{n+1} \Big|_{w=z_0}^{w=z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \log z &= \log z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k z_0^k} (z - z_0)^k \\ &= \log z_0 + \frac{1}{z_0} (z - z_0) - \frac{1}{2z_0^2} (z - z_0)^2 + \frac{1}{3z_0^3} (z - z_0)^3 + \dots \quad (8.9) \end{aligned}$$

Consideriamo ora la serie di potenze (8.9) e domandiamoci a quale funzione analitica corrisponde la sua somma all'interno del cerchio di convergenza della

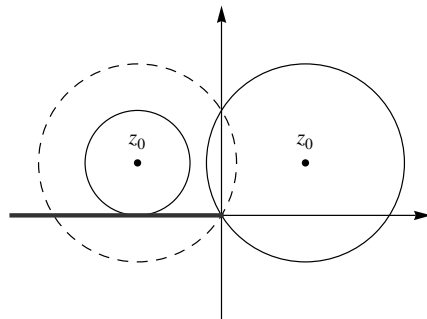


Fig. 8.1. Cerchio di convergenza per lo sviluppo in serie di Taylor intorno a z_0 del ramo principale di $\log z$ nei casi $\operatorname{Re} z_0 < 0$ e $\operatorname{Re} z_0 > 0$

serie. Calcoliamo innanzitutto il raggio di convergenza. Usando il criterio del rapporto si ha

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k z_0^{k+1}} \right| \left| \frac{(k+1) z_0^{k+2}}{(-1)^k} \right| = |z_0|.$$

Dunque la somma della serie (8.9) è una funzione analitica in $B(z_0, |z_0|)$. Tale funzione non può essere il ramo principale di $\log z$ nel caso in cui $\operatorname{Re} z_0 < 0$. Essa sarà uno dei rami di $\log z$ la cui linea di diramazione non attraversa la palla $B(z_0, |z_0|)$. Se invece $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$ il ramo principale di $\log z$ è uno dei possibili rami che rappresentano la somma della serie (8.9). Tutti i rami ammessi a rappresentare la somma della serie (8.9) hanno lo stesso valore all'interno del cerchio di convergenza.

Esempio 8.14. Si determini lo sviluppo in serie di Taylor del ramo principale di $f(z) = \sqrt{z}$ intorno a $z_0 = 1$. La funzione considerata ha linea di diramazione coincidente con il semiasse reale negativo ed è analitica nel cerchio $|z - 1| < 1$ dove è sviluppabile in serie di Taylor. Osservando che

$$\begin{aligned} f^{(0)}(z) &= z^{1/2}, \\ f^{(1)}(z) &= \frac{1}{2} z^{1/2-1}, \\ f^{(2)}(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) z^{1/2-2}, \\ f^{(3)}(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) z^{1/2-3}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) z^{1/2-n}, \end{aligned}$$

e quindi

$$f^{(n)}(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)_n n!,$$

si conclude

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (z-1)^n \\ &= 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{8}(z-1)^2 + \frac{1}{16}(z-1)^3 - \frac{5}{128}(z-1)^4 + \dots \end{aligned}$$

Il precedente risultato si estende immediatamente alla serie binomiale

$$\begin{aligned} (1+z)^c &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} z^n \\ &= 1 + cz + \frac{c(c-1)}{2} z^2 + \frac{c(c-1)(c-2)}{6} z^3 + \dots, \end{aligned}$$

convergente per $|z| < 1$ con $c \in \mathbb{C}$.

8.2 Serie di Laurent

Definizione 8.15 (anello). Siano $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, si chiama anello di centro z_0 e raggi R_1, R_2 l'insieme

$$A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}. \quad (8.10)$$

Un anello è un insieme non semplicemente connesso. Per $R_1 = 0$ si usa anche la notazione $\dot{B}(z_0, R_2) = A(z_0, 0, R_2)$, detta palla puntata. Il dominio di analiticità di $1/(z - z_0)$ è l'anello $A(z_0, 0, \infty)$.

Teorema 8.16 (sviluppo in serie di Laurent). *Sia f analitica nell'anello $A(z_0, R_1, R_2)$, allora $\forall z \in A(z_0, R_1, R_2)$ vale lo sviluppo in serie di Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (8.11)$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.12)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) (z - z_0)^{n-1} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.13)$$

o, equivalentemente,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8.14)$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8.15)$$

con γ arbitraria curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente tale che $\{\gamma\} \subset A(z_0, R_1, R_2)$ e $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$.

Dimostrazione. Scelti arbitrariamente $z \in A(z_0, R_1, R_2)$ e γ curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente con $\{\gamma\} \subset A(z_0, R_1, R_2)$ e $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$, si considerino due cammini circolari γ_1 e γ_2 orientati positivamente, di centro z_0 e raggi r_1 e r_2 , tali che $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ e $\{\gamma\} \subset A(z_0, r_1, r_2)$. Si consideri infine un cammino circolare γ_3 orientato positivamente di centro z e raggio r sufficientemente piccolo così che $\{\gamma_3\} \subset A(z_0, r_1, r_2)$. Poiché $f(w)/(w - z)$ è una funzione di w analitica su γ_2 , γ_1 e γ_3 e nella regione tra essi compresa, per il principio di deformazione dei cammini si ha

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Per la (7.20) l'integrale su γ_3 vale $2\pi i f(z)$ e quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z - z_0) - (w - z_0)} dw. \end{aligned}$$

Usando le identità

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w} \frac{1}{1 - z/w} \\ &= \frac{1}{w} \frac{1 - (z/w)^n}{1 - z/w} + \frac{1}{w} \frac{(z/w)^n}{1 - z/w} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{w^{k+1}} + \frac{z^n}{(w - z)w^n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - w} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w^k}{z^{k+1}} + \frac{w^n}{(z - w)z^n} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{w^{j-1}}{z^j} + \frac{w^n}{(z - w)z^n}, \end{aligned}$$

valide per z e w arbitrari con $z \neq w$, possiamo riscrivere $f(z)$ come

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (z - z_0)^k + \rho_n(z) + \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + \sigma_n(z), \quad (8.16)$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \rho_n(z) &= \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{[(w - z_0) - (z - z_0)](w - z_0)^n} dw, \\ b_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w - z_0)^{j-1} dw, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \sigma_n(z) &= \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^n} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)(w - z_0)^n}{[(w - z_0) - (z - z_0)]} dw. \end{aligned}$$

Si osservi che, per il principio di deformazione dei cammini, gli integrali su γ_2 e γ_1 che compaiono nelle espressioni di a_k e b_j possono essere equivalentemente valutati entrambi su γ . Per concludere è sufficiente mostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(z) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(z) = 0$ perché allora in questo limite la (8.16) riproduce lo sviluppo in serie di Laurent desiderato. Posto $M_2 = \sup_{w \in \{\gamma_2\}} |f(w)|$, dalla disuguaglianza di Darboux si ottiene

$$|\rho_n(z)| \leq \frac{|z - z_0|^n}{2\pi} \frac{2\pi r_2}{(r_2 - |z - z_0|)r_2^n} \frac{M_2}{1 - |z - z_0|/r_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

in quanto $|z - z_0| < r_2$. Analogamente, posto $M_1 = \sup_{w \in \{\gamma_1\}} |f(w)|$, si ha

$$|\sigma_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi |z - z_0|^n} \frac{2\pi r_1}{|z - z_0| - r_1} \frac{M_1 r_1^n}{|z - z_0|/r_1 - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

in quanto $r_1 < |z - z_0|$. □

Si osservi che la convergenza di una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f(z), \quad (8.17)$$

che converremo di chiamare serie di potenze generalizzata, è equivalente, per definizione, alla convergenza simultanea delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f_a(z), \quad a_n = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = f_b(z), \quad b_n = c_{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.19)$$

con $f_a(z) + f_b(z) = f(z)$. La serie di potenze (8.18) è convergente all'interno del cerchio di centro z_0 e raggio R_2 dato da

$$\frac{1}{R_2} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}. \quad (8.20)$$

D'altro canto la (8.19) con la posizione $w = 1/(z - z_0)$ diventa la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$ convergente per $|w| < 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{-n}|^{1/n}$. Pertanto la serie (8.19) converge all'esterno del cerchio di centro z_0 e raggio

$$R_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{-n}|^{1/n}. \quad (8.21)$$

In conclusione, si ha la convergenza simultanea delle (8.18) e (8.19), quindi della serie (8.17), nell'anello $A(z_0, R_1, R_2)$.

Teorema 8.17 (integrale di una serie di potenze generalizzata). *Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = f(z)$ all'interno dell'anello di centro z_0 e raggi R_1, R_2 . Se γ è una curva regolare a tratti contenuta in $A(z_0, R_1, R_2)$ e g una funzione continua su $\{\gamma\}$, allora*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma} g(z)(z - z_0)^n dz = \int_{\gamma} g(z)f(z)dz. \quad (8.22)$$

Dimostrazione. Per ciascuna delle due serie di potenze (8.18) e (8.19) vale l'analogo Teorema 8.2 con la curva γ contenuta nei rispettivi domini di convergenza e g continua su $\{\gamma\}$. Pertanto, se $\{\gamma\} \subset A(z_0, R_1, R_2)$ e g è continua su $\{\gamma\}$, simultaneamente si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} g(z)(z - z_0)^n dz &= \int_{\gamma} g(z)f_a(z)dz, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz &= \int_{\gamma} g(z)f_b(z)dz, \end{aligned}$$

e quindi l'asserto. \square

Dal Teorema 8.17 seguono poi i seguenti tre corollari in modo analogo a quanto visto nel caso della serie di Taylor.

Corollario 8.18 (analiticità di una serie di potenze generalizzata). *Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = f(z)$ all'interno dell'anello di centro z_0 e raggi R_1, R_2 , allora f è analitica in $A(z_0, R_1, R_2)$.*

Corollario 8.19 (derivata di una serie di potenze generalizzata). *Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = f(z)$ all'interno dell'anello di centro z_0 e raggi R_1, R_2 , allora $\forall z \in A(z_0, R_1, R_2)$ si ha $f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n n(z - z_0)^{n-1}$.*

Corollario 8.20 (unicità dello sviluppo in serie di Laurent). *Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = f(z)$ all'interno dell'anello di centro z_0 e raggi R_1, R_2 , allora questa è l'espansione in serie di Laurent di f intorno a z_0 , cioè $c_n = (1/2\pi i) \int_{\gamma} [f(z)/(z-z_0)^{n+1}] dz$, $n \in \mathbb{Z}$, con γ arbitraria curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente, tale che $\{\gamma\} \subset A(z_0, R_1, R_2)$ e $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$.*

Esempio 8.21. Si determini lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z) = \exp(1/z)$ nell'anello $0 < |z| < \infty$. Ricordando lo sviluppo in serie di Maclaurin di $\exp(w)$, valido $\forall w \in \mathbb{C}$ cioè per $|w| < \infty$, con il cambio di variabile $w = 1/z$ si ottiene

$$\exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Esempio 8.22. Si determini lo sviluppo in serie intorno a $z_0 = 0$ di

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

La funzione f è analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dei punti $z = 1$ e $z = 2$. Pertanto è possibile sviluppare f intorno a $z_0 = 0$ in serie di Taylor per $|z| < 1$ e in serie di Laurent per $1 < |z| < 2$ e $2 < |z| < \infty$. Se $|z| < 1$, osservando che $|z/2| < 1$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 1)z^n. \end{aligned}$$

Se $1 < |z| < 2$, osservando che $|1/z| < 1$ e $|z/2| < 1$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (1/z)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}. \end{aligned}$$

Se $2 < |z| < \infty$, osservando che $|1/z| < 1$ e $|2/z| < 1$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (1/z)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (2/z)^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{k+1}}{z^k}.
\end{aligned}$$

8.3 Moltiplicazione e divisione di due serie di potenze

Teorema 8.23 (prodotto di due serie di potenze). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ per $z \in B(z_0, R_1)$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n = g(z)$ per $z \in B(z_0, R_2)$. Allora, posto $R = \min(R_1, R_2)$, $\forall z \in B(z_0, R)$ si ha

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (8.23)$$

Dimostrazione. Le funzioni f e g in quanto somma di serie di potenze sono analitiche rispettivamente in $B(z_0, R_1)$ e $B(z_0, R_2)$. Inoltre per l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor si ha $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ e $b_n = g^{(n)}(z_0)/n!$ per $n = 0, 1, 2, \dots$. Pertanto, posto $R = \min(R_1, R_2)$, fg è analitica in $B(z_0, R)$ e in tale palle vale lo sviluppo in serie di Taylor

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

con

$$c_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dz^n} f(z)g(z) \right|_{z=z_0}.$$

Utilizzando la regola di Leibniz per la derivata di ordine n del prodotto di f per g , si conclude

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(z_0) g^{(n-k)}(z_0) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.
\end{aligned} \quad \square$$

Teorema 8.24 (rapporto di due serie di potenze). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ per $z \in B(z_0, R_1)$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n = g(z) \neq 0$ per $z \in$

$B(z_0, R_2)$. Allora, posto $R = \min(R_1, R_2)$, $\forall z \in B(z_0, R)$ si ha

$$f(z)/g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z - z_0)^n, \quad d_n = \left(a_n - \sum_{k=0}^{n-1} d_k b_{n-k} \right) \frac{1}{b_0}. \quad (8.24)$$

Dimostrazione. Le funzioni f e g in quanto somma di serie di potenze sono analitiche rispettivamente in $B(z_0, R_1)$ e $B(z_0, R_2)$. Inoltre $g(z) \neq 0 \forall z \in B(z_0, R_2)$. Pertanto, posto $R = \min(R_1, R_2)$, f/g è analitica in $B(z_0, R)$ e in tale palla vale lo sviluppo in serie di potenze

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z - z_0)^n.$$

Per determinare i coefficienti d_n , si osservi che $(f/g)g = f$. In base al Teorema 8.23 si ha allora

$$\sum_{k=0}^n d_k b_{n-k} = a_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ovvero

$$d_n = \left(a_n - \sum_{k=0}^{n-1} d_k b_{n-k} \right) \frac{1}{b_0}.$$

Tali coefficienti vanno risolti iterativamente. Per $n = 0$ si ha $d_0 = a_0/b_0$. Calcolato d_0 , per $n = 1$ si ha $d_1 = (a_1 - d_0 b_1)/b_0$. Calcolati d_0 e d_1 , per $n = 2$ si ha $d_2 = (a_2 - d_1 b_1 - d_0 b_2)/b_0$, e così via. \square

Esempio 8.25. Si determinino i primi termini dello sviluppo in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ di $f(z) = e^z/(1+z)$. La funzione f è analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione del punto $z = -1$. Pertanto f è sviluppabile in serie di Maclaurin per $|z| < 1$. Usando lo sviluppo in serie di Maclaurin di e^z e la serie geometrica, essendo entrambe le serie convergenti per $|z| < 1$, nella stessa palla si ha

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{1+z} &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \dots \right) \\ &\quad \times (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots) \\ &= 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{3}{8}z^4 - \frac{11}{30}z^5 + \dots \end{aligned}$$

Esempio 8.26. Si determinino i primi termini dello sviluppo in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$ di $f(z) = 1/\sin z$. La funzione f è analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dei punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto f è sviluppabile in serie di Laurent nell'anello $0 < |z| < \pi$. Usando lo sviluppo in serie di Maclaurin di

$\sin z$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots} \\
 &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots \right)} \\
 &= \frac{1}{z} \left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots \right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots \right)^3 + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{z} \left[1 + \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^4}{3!3!} + \frac{z^6}{7!} - \frac{2z^6}{3!5!} + \frac{z^6}{3!3!} + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \dots,
 \end{aligned}$$

dove si è usato

$$\frac{1}{1 - h(z)} = 1 + h(z) + h(z)^2 + h(z)^3 + \dots,$$

valida per $|h(z)| < 1$. Tale condizione è certamente soddisfatta per $|z|$ sufficientemente piccolo se, come nel nostro caso, $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = 0$. Per il teorema di unicità, quella appena trovata è l'espansione in serie di Laurent di $f(z)$ nell'anello $0 < |z| < \pi$. Allo stesso risultato si giunge applicando direttamente il Teorema 8.24. Posto

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \frac{1}{\sin z/z},$$

poiché $\sin z/z$ si annulla per $z = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, ma non per $z = 0$ dove per continuità la funzione viene assunta valere 1, nel cerchio $|z| < \pi$ il rapporto $1/(\sin z/z)$ può essere calcolato come il rapporto di due serie, quella a numeratore avente coefficienti $a_0 = 1$ e $a_k = 0$ per $k \geq 1$, e quella a denominatore per la quale $b_0 = 1$, $b_2 = -1/6$, $b_4 = 1/120$, \dots mentre $b_k = 0$ per k dispari. Dalla (8.24) si ha

$$\begin{aligned}
 d_0 &= a_0/b_0 = 1, \\
 d_1 &= (a_1 - d_0 b_1)/b_0 = 0, \\
 d_2 &= (a_2 - d_0 b_2 - d_1 b_1)/b_0 = \frac{1}{6}, \\
 d_3 &= (a_3 - d_0 b_3 - d_1 b_2 - d_2 b_1)/b_0 = 0, \\
 d_4 &= (a_4 - d_0 b_4 - d_1 b_3 - d_2 b_2 - d_3 b_1)/b_0 = \frac{7}{360}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{\sin z/z} = 1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \dots$$

Esercizi

8.1. Sviluppare in serie di Maclaurin la funzione

$$f(z) = \frac{1}{az + b}, \quad a, b \neq 0,$$

e determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

8.2. Sviluppare in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \int_0^z e^{w^2} dw$$

e determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

8.3. Assumendo per il logaritmo il ramo principale, determinare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \log \frac{1+z}{1-z}$$

e quindi svilupparla in serie di Taylor intorno a $z = 0$.

8.4. Sviluppare in serie di Taylor di centro $z_0 = 3$ il ramo principale di $\log z$ e determinare il raggio di convergenza di tale serie.

8.5. Assumendo per il logaritmo il ramo principale, determinare la regione di analiticità della funzione

$$f(z) = (z+1) \log(1+z^2)$$

e quindi svilupparla in serie di Taylor intorno a $z = 0$. Determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

8.6. Sviluppare in serie di Taylor di centro $z_0 = -1$ il ramo principale di $\log(z^2)$ e determinare il raggio di convergenza di tale serie.

8.7. Sviluppare in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = e^z \sin z.$$

8.8. Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di $\log(z^2)$ e il suo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 1$.

8.9. Sviluppare in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 0$ la funzione $e^{iz} \sinh z$.

8.10. Sviluppare in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 0$ la funzione $\arctan z$ e determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

8.11. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = i$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

specificando il dominio anulare di validità della serie così ottenuta.

8.12. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$ nelle due regioni anulari $0 < |z| < 1$ e $1 < |z| < \infty$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z(1 - z))^2}.$$

8.13. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$, in entrambe le regioni anulari $0 < |z| < 2$ e $2 < |z| < \infty$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 2z^2}.$$

8.14. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$, in entrambe le regioni anulari $0 < |z| < \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} < |z| < \infty$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 2z}.$$

8.15. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = i$, in entrambe le regioni anulari $0 < |z - i| < 2$ e $2 < |z - i| < \infty$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}.$$

8.16. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$ nella regione anulare $0 < |z| < 1$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z + z^3}.$$

8.17. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$, in entrambe le regioni anulari $0 < |z| < 2$ e $2 < |z| < \infty$, la funzione

$$f(z) = \frac{3 + z}{z^3 + 2z^2}.$$

8.18. Sviluppare in serie di Laurent nell'anello $0 < |z - 1| < 1$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)^2(z - 2)^2}.$$

8.19. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z = 0$ la funzione

$$f(z) = \frac{2z}{z^2(1+z^2)^2}$$

nelle due regioni anulari $0 < |z| < 1$ e $1 < |z| < \infty$.

8.20. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z = i$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z + z^3}$$

nelle due regioni anulari $0 < |z - i| < 1$ e $2 < |z - i| < \infty$.

8.21. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, determinare il valore del seguente limite giustificando la risposta:

$$\lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)^{1/z^2}.$$

8.22. Determinare i primi tre termini non nulli dello sviluppo in serie di $\tan z$ nei due casi a) intorno a $z_0 = 0$ e b) intorno a $z_0 = \pi/2$.

8.23. Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z = 0$ fino all'ordine z^1 compreso la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}.$$

8.24. Determinare la derivata quarta in $z = 0$ della funzione $f(z) = 1/\cos z$.

8.25. Determinare, ad ogni ordine, la serie di potenze definita dal rapporto

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \right)^{-1}$$

e calcolarne il raggio di convergenza.

8.26. I polinomi di Legendre $P_n(x)$, con $x \in [-1, 1]$, possono essere definiti come i coefficienti dello sviluppo in serie

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Determinare P_1 , P_2 e P_3 .

8.27. Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$ di

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin(z^2)(e^z - 1)}.$$

8.28. Sviluppare in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ la funzione di Fresnel

$$S(z) = \int_0^z \sin(\pi w^2/2) dw.$$

Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di $1/S(z)$ nell'anello $0 < |z| < \infty$ fino ai termini $O(z^0)$ inclusi.

8.29. Determinare fino all'ordine z^6 compreso lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ del ramo principale della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}}.$$

Residui

Sommario. Singularità e singularità isolate. Residuo di una funzione in una singularità isolata. Teorema dei residui. Teorema dei residui con il residuo all'infinito. Classificazione delle singularità isolate: singularità eliminabili, poli di ordine m , singularità essenziali. Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto singolare isolato di una funzione analitica sia un polo di ordine m e formula per il corrispondente residuo. Zeri di ordine m delle funzioni analitiche. Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione analitica abbia uno zero di ordine m . Teorema di identità. Gli zeri delle funzioni analitiche non costanti sono isolati e di ordine finito. Condizione sufficiente affinché una funzione del tipo $f(z) = p(z)/q(z)$ abbia un polo di ordine m e formula per il corrispondente residuo. Comportamento di una funzione analitica in prossimità delle singularità isolate. Lemma di Riemann. Teorema di Casorati-Weierstrass.

9.1 Punti singolari isolati: residui

In tutto questo capitolo, se non diversamente specificato, intenderemo con f una funzione $f : G \mapsto \mathbb{C}$ con $G \subset \mathbb{C}$ aperto.

Definizione 9.1 (punto singolare). Un punto z_0 è detto punto singolare di f se f è non analitica in z_0 ma $\forall \varepsilon > 0 \exists z \in B(z_0, \varepsilon)$ tale che f è analitica in z .

Definizione 9.2 (punto singolare isolato). Un punto singolare z_0 di f è detto isolato se $\exists r > 0$ tale che f è analitica in $A(z_0, 0, r)$. In altre parole, z_0 è un punto singolare isolato di f se $\exists r > 0$ tale che f è analitica in $A(z_0, 0, r)$ ma non in $B(z_0, r)$.

Definizione 9.3 (residuo). Sia z_0 un punto singolare isolato di f , allora $\exists r > 0$ tale che $\forall z \in A(z_0, 0, r)$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \quad (9.1)$$

C. Presilla: *Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile*, 2^a edizione.

UNITEXT – La Matematica per il 3+2 72

DOI 10.1007/978-88-470-5501-8_9, © Springer-Verlag Italia 2014

Il coefficiente b_1 si chiama residuo di $f(z)$ in z_0 e si scrive

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1. \quad (9.2)$$

Teorema 9.4 (dei residui). *Sia γ una curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente. Se f è una funzione analitica su e all'interno di γ ad eccezione di un numero finito di punti singolari (isolati) $z_k \in \operatorname{Int}(\gamma)$, $k = 1, \dots, n$, allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (9.3)$$

Dimostrazione. Siano γ_k , $k = 1, \dots, n$, n circonferenze orientate positivamente di centro z_k e di raggio sufficientemente piccolo affinché esse siano tutte interne a γ e a due a due disgiunte. Poiché f è analitica su γ , sulle circonferenze γ_k e nella regione moltiplicemente connessa compresa tra queste curve, per il principio di deformazione dei cammini si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

D'altro canto, dalla definizione di residuo risulta

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

e quindi l'asserto. □

Teorema 9.5 (del residuo all'infinito). *Sia γ una curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente. Se f è una funzione analitica su e all'esterno di γ , allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right). \quad (9.4)$$

Dimostrazione. Per il teorema della curva di Jordan, $\exists R < \infty$ tale che $\{\gamma\} \subset B(0, R)$. La funzione f è analitica in $A(0, R, \infty)$ e pertanto in tale regione anulare vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9.5)$$

Il cammino γ_0 è un arbitrario cammino chiuso semplice regolare a tratti orientato positivamente tale che $\{\gamma_0\} \subset A(0, R, \infty)$ e $0 \in \operatorname{Int}(\gamma_0)$. Per γ_0 possiamo quindi scegliere la circonferenza $|z| = R_0$ con $R_0 > R$. Poiché f è analitica su γ , su γ_0 e nella regione compresa tra γ e γ_0 , per il principio di deformazione

dei cammini si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (9.6)$$

Stabiliamo ora il ruolo del coefficiente c_{-1} . Poiché f ammette lo sviluppo (9.5) per $R < |z| < \infty$, ponendo $z = 1/w$ per $0 < |w| < 1/R$ si ha

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{w}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{w^{n+2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k-2} w^k.$$

Da questa segue

$$\operatorname{Res}_{w=0} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = c_{-1}. \quad (9.7)$$

Pertanto il coefficiente c_{-1} è il residuo in $z = 0$ della funzione $f(1/z)/z^2$, non certo di $f(z)$ che potrebbe anche essere analitica in $z = 0$. \square

Esempio 9.6. Si determini il valore dell'integrale di $\sin(z^{-1})$ lungo la circonferenza $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. La funzione $\sin(z^{-1})$ è analitica su e dentro γ ad eccezione della singolarità isolata in $z = 0$. Per $0 < |z| < \infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned} \sin(z^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)} \\ &= z^{-1} - \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{5!} z^{-5} - \frac{1}{7!} z^{-7} + \dots, \end{aligned}$$

da cui risulta

$$\operatorname{Res}_{z=0} \sin(z^{-1}) = 1$$

e quindi per il Teorema 9.4

$$\int_{\gamma} \sin(z^{-1}) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \sin(z^{-1}) = 2\pi i.$$

Esempio 9.7. Si determini il valore dell'integrale di $1/\sin(z^{-1})$ lungo la circonferenza $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. La funzione $1/\sin(z^{-1})$ è analitica ovunque ad eccezione delle singolarità isolate nei punti $z_n = (n\pi)^{-1}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, e della singolarità non isolata in $z = 0$. Dunque la funzione $1/\sin(z^{-1})$ è analitica sul cammino chiuso γ e al suo esterno, e per il Teorema 9.5 si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z^{-1})} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin(z)}.$$

Tale residuo può essere calcolato considerando che per $0 < |z| < \infty$ vale lo

sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sin(z)} &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots} \\
 &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)} \\
 &= \frac{1}{z^3} \left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots \right] \\
 &= z^{-3} + \frac{1}{3!} z^{-1} + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) z + \dots
 \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z^{-1})} dz = 2\pi i \frac{1}{3!} = \frac{\pi}{3} i.$$

9.2 Classificazione delle singolarità isolate

Definizione 9.8 (polo di ordine m , singolarità eliminabile, singolarità essenziale). Sia z_0 un punto singolare isolato di f , allora $\exists r > 0$ tale che $\forall z \in A(z_0, 0, r)$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}. \quad (9.8)$$

A seconda del numero di termini effettivamente presenti nella serie con potenze negative (spesso indicata come parte principale o parte singolare di f), si dice che z_0 è:

- a) un polo di ordine m se $b_m \neq 0$ e $b_k = 0 \ \forall k > m$;
- b) una singolarità eliminabile se $b_k = 0 \ \forall k \geq 1$ (polo di ordine 0);
- c) una singolarità essenziale se $b_k \neq 0$ per infiniti valori dell'indice k (polo di ordine infinito).

Esempio 9.9. La funzione $z^{-4} \sinh z$ ha un polo di ordine 3 nel punto singolare isolato $z_0 = 0$. Infatti per $z \in A(0, 0, \infty)$ si ha

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \dots$$

Esempio 9.10. La funzione $(1 - \cos z)/z^2$ ha una singolarità isolata in $z_0 = 0$ che risulta eliminabile. Infatti per $z \in A(0, 0, \infty)$ si ha

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots$$

Il nome, singolarità eliminabile, segue dal fatto che in effetti è possibile definire una funzione $f(z)$ associata a quella data

$$f(z) = \begin{cases} (1 - \cos z)/z^2 & z \neq 0 \\ 1/2 & z = 0 \end{cases}$$

che risulta analitica anche in z_0 .

Esempio 9.11. La funzione $\exp(1/z)$ ha una singolarità essenziale nel punto singolare isolato $z_0 = 0$. Infatti per $z \in A(0, 0, \infty)$ si ha

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}.$$

Teorema 9.12. Sia z_0 un punto singolare isolato di f . Il punto z_0 è un polo di ordine $m > 0$ se e solo se $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ con g analitica in z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Inoltre

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Dimostrazione. Sia $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ con g analitica in z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Poiché g è analitica in z_0 , $\exists r > 0$ tale che g è analitica in $B(z_0, r)$ e in tale palla vale lo sviluppo in serie di Taylor

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Pertanto, $\forall z \in A(z_0, 0, r)$ si ha

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}.$$

Da questa espressione, essendo $g(z_0) \neq 0$, si conclude che z_0 è un polo di ordine m e inoltre $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$.

Viceversa, si supponga che z_0 sia un polo di ordine m per f . Allora $\exists r > 0$ tale che f è analitica in $A(z_0, 0, r)$ e in tale anello vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{(z - z_0)^k},$$

con $b_m \neq 0$. Posto

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^m f(z) & z \in A(z_0, 0, r) \\ b_m & z = z_0 \end{cases},$$

$\forall z \in B(z_0, r)$ si ha

$$g(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k+m}.$$

In quanto somma di una serie di potenze, g è analitica in $B(z_0, r)$ e quindi analitica in z_0 . Inoltre $g(z_0) = b_m \neq 0$. Infine, per l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor si ha $b_1 = g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$. \square

9.3 Zeri delle funzioni analitiche

Definizione 9.13 (zero di ordine m). Sia f analitica in z_0 . Il punto z_0 è detto zero di ordine m di f se $f^{(k)}(z_0) = 0$ per $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Teorema 9.14. Sia f analitica in z_0 . Il punto z_0 è uno zero di ordine m di f se e solo se $f(z) = g(z)(z - z_0)^m$ con g analitica in z_0 e $g(z_0) \neq 0$.

Dimostrazione. Sia $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z)$ analitica e non nulla in z_0 . Poiché g è analitica in z_0 , $\exists r > 0$ tale che g è analitica in $B(z_0, r)$ e in tale palla vale lo sviluppo in serie di Taylor

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Allora $\forall z \in B(z_0, r)$ si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k+m}.$$

Dall'unicità dello sviluppo in serie di Taylor di f segue che

$$f^{(k)}(z_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad f^{(m)}(z_0) = m! g(z_0) \neq 0,$$

cioè z_0 è uno zero di ordine m di $f(z)$.

Viceversa, si supponga che z_0 sia uno zero di ordine m di f , ovvero che

$$f^{(k)}(z_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Poiché f è analitica in z_0 , $\exists r > 0$ tale che f è analitica in $B(z_0, r)$ e in tale palla vale lo sviluppo in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = (z - z_0)^m g(z),$$

dove

$$g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{m-k}.$$

La funzione g , in quanto somma di una serie di potenze convergente in $B(z_0, r)$, è analitica in z_0 . Inoltre $g(z_0) = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$. \square

Teorema 9.15. *Sia f analitica in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- a) f è identicamente nulla in D ;
- b) $\exists z_0 \in D$ tale che $f^{(k)}(z_0) = 0 \ \forall k \geq 0$;
- c) l'insieme $Z = \{z \in D : f(z) = 0\}$ ha un punto limite in D .

Dimostrazione. Le implicazioni a) \Rightarrow b) e b) \Rightarrow c) sono ovvie. Mostriamo le implicazioni inverse.

c) \Rightarrow b) Sia $z_0 \in D$ un punto limite di Z . Poiché f è continua deve essere $f(z_0) = 0$. Se z_0 è uno zero di f di ordine m finito, allora $f(z) = g(z)(z - z_0)^m$ con g analitica in z_0 e $g(z_0) \neq 0$. D'altro canto, poiché g è continua e non nulla in z_0 , per il Teorema 3.28 $\exists \delta > 0$ tale che $g(z) \neq 0 \ \forall z \in B(z_0, \delta)$. Pertanto, $f(z) \neq 0$ per $0 < |z - z_0| < \delta$ in contraddizione con il fatto che z_0 è un punto limite di Z . Dobbiamo perciò concludere che $f^{(k)}(z_0) = 0 \ \forall k \geq 0$.

b) \Rightarrow a) Sia $A = \{z \in D : f^{(k)}(z) = 0 \ \forall k \geq 0\}$. Per ipotesi $A \neq \emptyset$. Basta allora mostrare che A è contemporaneamente aperto e chiuso in D , per concludere, essendo D connesso, che $A = D$ e quindi f identicamente nulla in D . Mostriamo che $\bar{A} \subset A$ e quindi che A è chiuso. Si consideri un arbitrario $z \in \bar{A}$ e sia (z_j) una successione di punti $z_j \in A$ convergenti a z . Poiché $f^{(k)}$ è, per ogni k , una funzione continua, segue che $f^{(k)}(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{(k)}(z_j) = 0$. Pertanto $z \in A$. Per dimostrare che A è aperto in D , si consideri un arbitrario punto $z \in A$. Poiché $z \in D$ e D è aperto, $\exists r > 0$ tale che $B(z, r) \subset D$. Allora $\forall w \in B(z, r)$ si ha $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z)^n = 0$ in quanto per ogni n risulta $a_n = f^{(n)}(z)/n! = 0$. Derivando k volte, con k arbitrario, la stessa serie segue $f^{(k)}(w) = 0$, pertanto $w \in A$. Si conclude che $B(z, r) \subset A$ e quindi A è aperto. \square

Corollario 9.16 (teorema di identità). *Siano f e g analitiche in D aperto e connesso. Allora $f = g$ in D se e solo se l'insieme $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ ha un punto limite in D .*

Dimostrazione. Segue dal Teorema 9.15 applicato alla funzione $h = f - g$. \square

Corollario 9.17 (zeri delle funzioni analitiche non costanti). *Sia f analitica e non costante in D aperto e connesso. Allora ogni zero di f in D è isolato e di ordine finito.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in D$ tale che $f(z_0) = 0$. Poiché f è non costante in D , essa è non identicamente nulla in D . Per il Teorema 9.15 segue che l'insieme

Z degli zeri di f in D non ha punti limite, quindi z_0 è isolato, cioè $\exists \delta > 0$ tale che $f(z) \neq 0$ per $0 < |z - z_0| < \delta$. Inoltre, per lo stesso teorema deve esistere un intero $m \geq 1$ tale che $f^{(k)}(z_0) = 0$ per $0 \leq k < m$ mentre $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Di conseguenza z_0 è uno zero di ordine m . \square

Esempio 9.18. Si considerino le funzioni $f(z) = \log(z^2)$ e $g(z) = 2\log(z)$, intendendo in entrambi i casi per \log il ramo principale del logaritmo. Tali funzioni sono analitiche rispettivamente in $D_f = \{z \in \mathbb{C} : z \neq it, t \in (-\infty, +\infty)\}$ e $D_g = \{z \in \mathbb{C} : z \neq t, t \in (-\infty, 0]\}$. Si ponga $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset D_f \cap D_g$. Si noti che D è aperto e connesso e f e g sono analitiche in D . In ogni punto $x > 0$ del semiasse reale positivo risulta $\log(x^2) = \ln(x^2) = 2\ln(x) = 2\log(x)$. Per il Teorema di identità 9.16 concludiamo che

$$\log(z^2) = 2\log(z), \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Questo risultato non vale nei quadranti terzo ($\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0$) e quarto ($\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z < 0$) dove risulta rispettivamente $\log(z^2) - 2\log(z) = \mp 2\pi i$.

9.4 Zeri e poli

Teorema 9.19. *Sia $f(z) = p(z)/q(z)$ con p e q funzioni analitiche in z_0 . Se $p(z_0) \neq 0$ e q ha uno zero di ordine m in z_0 , allora f ha un polo di ordine m in z_0 .*

Dimostrazione. Poiché q ha uno zero di ordine m in z_0 e gli zeri di ordine finito sono isolati, $\exists \delta > 0$ tale che $q(z) \neq 0 \forall z \in A(z_0, 0, \delta)$. Pertanto $f(z) = p(z)/q(z)$ ha una singolarità isolata in z_0 . Inoltre, poiché $q(z) = g(z)(z - z_0)^m$ con g analitica in z_0 e $g(z_0) \neq 0$, si ha

$$f(z) = \frac{p(z)}{g(z)(z - z_0)^m} = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m},$$

dove $h(z) = p(z)/g(z)$ è analitica e non nulla in z_0 . Per il Teorema 9.12 si conclude che z_0 è un polo di ordine m per f . \square

Dal risultato del precedente teorema, si potrebbe, in linea di principio, calcolare anche il residuo di f in z_0 mediante la formula

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{h^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Tuttavia ciò è possibile solo se si conosce la funzione g che definisce $h = p/g$. Nel caso particolare $m = 1$ si ha il seguente semplice risultato.

Teorema 9.20. Sia $f(z) = p(z)/q(z)$ con p e q funzioni analitiche in z_0 . Se $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$, allora f ha un polo semplice in z_0 e

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (9.9)$$

Dimostrazione. Per ipotesi q ha uno zero semplice in z_0 e quindi $q(z) = g(z)(z - z_0)$ con g analitica in z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Per il Teorema 9.19 f ha un polo semplice in z_0 e quindi $f(z) = h(z)/(z - z_0)$ con h analitica in z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Da quest'ultima espressione e osservando che $h(z) = p(z)/g(z)$, segue

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = h(z_0) = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}.$$

Derivando $q(z) = g(z)(z - z_0)$ si ottiene $q'(z) = g'(z)(z - z_0) + g(z)$, che valutata in z_0 fornisce $q'(z_0) = g(z_0)$ e quindi l'asserto. \square

Esempio 9.21. Si calcoli il residuo di $f(z) = z/(z^4 + 4)$ in $z_0 = 1 + i$. Posto $f(z) = p(z)/q(z)$ con $p(z) = z$ e $q(z) = z^4 + 4$, si ha che p e q sono analitiche in z_0 con $p(z_0) = z_0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) = 4z_0^3$. Per il Teorema 9.20, si ha quindi

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{z}{z^4 + 4} = \frac{z_0}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0^2} = \frac{1}{8e^{i\pi/2}} = -\frac{i}{8}.$$

9.5 Comportamento in prossimità di singolarità isolate

Il comportamento di una funzione analitica in prossimità di un punto singolare isolato è stabilito dai seguenti teoremi.

Teorema 9.22. Sia z_0 un polo di f , allora

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty. \quad (9.10)$$

Dimostrazione. Assumendo che il polo sia di ordine m , per il Teorema 9.12 si ha $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ con g analitica in z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Pertanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^m}{g(z)} = \frac{0}{g(z_0)} = 0,$$

da cui, usando il Teorema 3.9, segue l'asserto. \square

Teorema 9.23. Sia z_0 una singolarità eliminabile di f , allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che f è analitica e limitata in $A(z_0, 0, \varepsilon)$.

Dimostrazione. Poiché z_0 è una singolarità eliminabile di f , $\exists r > 0$ tale che f è analitica in $A(z_0, 0, r)$ e in tale dominio vale lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Si definisca $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ per $z \in B(z_0, r)$. Si ha $g(z) = f(z)$ per $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Scelto $0 < \varepsilon < r$, la funzione g è analitica, quindi continua, nel compatto $\overline{B}(z_0, \varepsilon)$. Segue che g è limitata in $\overline{B}(z_0, \varepsilon)$ e pertanto f è limitata in $A(z_0, 0, \varepsilon)$. \square

Lemma 9.24 (Riemann). *Sia f analitica e limitata in $A(z_0, 0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Se f è non analitica in z_0 allora essa ha in z_0 una singolarità eliminabile.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia non analitica in z_0 . Poiché f è analitica in $A(z_0, 0, \varepsilon)$, in tale dominio vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

I coefficienti della parte principale di questa serie possono essere calcolati con la formula

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) (z - z_0)^{n-1} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

dove γ è la circonferenza orientata positivamente $|z - z_0| = \rho$ con $\rho < \varepsilon$ arbitrario. Poiché f è limitata in $A(z_0, 0, \varepsilon)$, cioè $\exists M > 0$ tale che $|f(z)| \leq M$ per $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, si ha

$$|b_n| \leq \frac{1}{2\pi} M \rho^{n-1} 2\pi \rho = M \rho^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Per l'arbitrarietà di ρ deve essere $b_n = 0 \ \forall n \geq 1$. Si conclude che z_0 è una singolarità eliminabile di f . \square

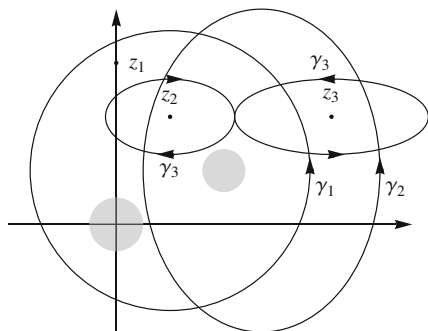
Teorema 9.25 (Casorati-Weierstrass). *Sia z_0 una singolarità essenziale di f , allora $\forall \delta > 0$ l'insieme $f(A(z_0, 0, \delta))$ è denso in \mathbb{C} .*

Dimostrazione. Sia f analitica in $A(z_0, 0, r)$ con $r > 0$. Dobbiamo mostrare che $\forall \delta > 0$, purché $\delta < r$, risulta $f(A(z_0, 0, \delta)) = \mathbb{C}$. In altre parole, dati un arbitrario $w \in \mathbb{C}$ e un arbitrario $\varepsilon > 0$, dobbiamo mostrare che per δ arbitrario, con $r > \delta > 0$, è possibile trovare un punto $z \in A(z_0, 0, \delta)$ tale che $|f(z) - w| < \varepsilon$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che questo non sia possibile. Assumiamo quindi che esistano $w \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$ tali che $|f(z) - w| \geq \varepsilon \ \forall z \in A(z_0, 0, \delta)$ per un qualche δ , con $r > \delta > 0$. Posto $g(z) = 1/(f(z) - w)$, si ha che g è analitica e limitata in $A(z_0, 0, \delta)$. Per il Lemma 9.24, z_0 è una singolarità eliminabile di g . Definiamo allora $g(z_0)$ in modo tale che g sia analitica in z_0 . Se $g(z_0) \neq 0$, segue che $f(z) = w + 1/g(z)$ diventa analitica in z_0 se si

definisce $f(z_0) = w + 1/g(z_0)$. In altre parole z_0 è una singolarità eliminabile di f . Se $g(z_0) = 0$, segue che g , non essendo identicamente nulla per $|z - z_0| < \delta$, ha in z_0 uno zero di ordine $m < \infty$. Di conseguenza, $f(z) = w - 1/g(z)$ ha in z_0 un polo di ordine m . In entrambi i casi si ha una contraddizione con l'ipotesi che z_0 è una singolarità essenziale di f . \square

Esercizi

9.1. Una funzione f è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione delle singolarità isolate in z_1 , z_2 e z_3 e dei dischi indicati in figura, all'interno dei quali non si hanno informazioni circa il comportamento di f . Esprimere l'integrale di f lungo le curve γ_1 , γ_2 e γ_3 in termini di opportuni residui. Qualora le informazioni non fossero sufficienti a valutare l'integrale, dire che questo è non calcolabile.



9.2. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z-2)} dz,$$

dove γ è la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine e percorsa in verso antiorario.

9.3. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z dz}{(z-2)(z^2+1)}, \quad \gamma(t) = 1 + i + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

9.4. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 dz}{e^{\pi z} + 1}, \quad \gamma(t) = 1 + 2i + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

9.5. Sia γ_n il perimetro del quadrato di vertici $(-1-i)a_n$, $(1-i)a_n$, $(1+i)a_n$ e $(-1+i)a_n$, con $a_n = (n+1/2)\pi$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} dz = 0.$$

Calcolare quindi lo stesso integrale per n generico in termini di opportuni residui. Infine, determinare la serie che si ottiene per $n \rightarrow \infty$ e la sua somma.

9.6. Classificare tutte le singolarità isolate delle seguenti funzioni e calcolarne i corrispondenti residui:

$$\text{a) } \cos\left(\frac{1}{z-2}\right), \quad \text{b) } z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right).$$

9.7. Determinare la natura della singolarità isolata in $z = 0$ della seguente funzione e calcolarne il corrispondente residuo:

$$f(z) = \frac{1}{(e^z - 1) \sin z}.$$

9.8. Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, determinare, fino all'ordine z^4 compreso, lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \log(\cos z).$$

Classificare la natura della singolarità di $f(z)$ in $z = 0$.

9.9. Ciascuna delle seguenti funzioni (si consideri il ramo principale per quelle polidrome) ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{z}}{z}, \quad \text{b) } \frac{z}{1 - \cos z}, \quad \text{c) } (z^3 + 3) \exp(z^{-1}).$$

9.10. Determinare la natura della singolarità isolata in $z = 0$ della seguente funzione e calcolarne il corrispondente residuo:

$$f(z) = \frac{e^z \sin z}{z(1 - \cos z)}.$$

9.11. Determinare la natura della singolarità isolata in $z = 3$ delle seguenti funzioni e calcolarne il corrispondente residuo:

$$\text{a) } z \sin\left(\frac{1}{z-3}\right), \quad \text{b) } \frac{z}{(z-3) \sin(z-3)}.$$

9.12. Ciascuna delle seguenti funzioni (si consideri il ramo principale per quelle polidrome) ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso,

calcolare il corrispondente residuo:

$$\text{a) } \log(z^2), \quad \text{b) } z^3 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \text{c) } \frac{1}{z^4 \sinh z}.$$

9.13. Ciascuna delle seguenti funzioni (si consideri il ramo principale per quelle polidrome) ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo:

$$\text{a) } \frac{1}{1 - \cos z}, \quad \text{b) } \frac{\sqrt{z}}{z^2}, \quad \text{c) } z \exp(z^{-2}).$$

9.14. Ciascuna delle seguenti funzioni (si consideri il ramo principale per quelle polidrome) ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo:

$$\text{a) } \frac{3+z}{z^3+2z^2}, \quad \text{b) } z \log z, \quad \text{c) } \frac{1}{\log(1+z)}.$$

9.15. Classificare tutte le singolarità isolate delle seguenti funzioni e calcolarne i corrispondenti residui:

$$\text{a) } z \cos(z^{-1}), \quad \text{b) } z^{-1} \cos(z).$$

9.16. Ciascuna delle seguenti funzioni (si consideri il ramo principale per quelle polidrome) ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo:

$$\text{a) } \tan \frac{1}{z}, \quad \text{b) } z^n \sin \frac{1}{z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{c) } \sqrt{1 + \frac{1}{z}}.$$

9.17. Si determini la natura della singolarità in $z = 0$ delle seguenti funzioni (si consideri il ramo principale per quelle polidrome) e, se il caso, il valore del corrispondente residuo:

$$\text{a) } \frac{\exp(\sin z)}{z^2}, \quad \text{b) } \frac{\sin z}{\log(\cos z)}.$$

9.18. Si supponga che $f(z)$ abbia un polo semplice in z_0 e $g(z)$ sia analitica in z_0 . Dimostrare che

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)g(z) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z).$$

9.19. Determinare la natura di tutte le singolarità isolate della seguente funzione e calcolarne il corrispondente residuo:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z}.$$

9.20. Determinare la natura di tutte le singolarità isolate della seguente funzione e calcolarne il corrispondente residuo:

$$f(z) = z^3 \cos \left(\frac{1}{z-2} \right).$$

9.21. Determinare la natura di tutte le singolarità isolate della seguente funzione e calcolarne il corrispondente residuo:

$$f(z) = \frac{\log(1+z)}{z \sin z}.$$

Si assuma per il logaritmo il ramo principale.

9.22. Calcolare il residuo in $z = 0$ delle funzioni

$$f_n(z) = \frac{z^{-n}}{(z-1)^2(z-2)}, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Determinare una funzione $g(z)$, polidroma ma analitica in $z = 0$, tale che $f_2(z)g(z)$ abbia un polo doppio in $z = 0$ con residuo nullo.

9.23. Determinare il residuo in $z = -2$ della funzione

$$f(z) = \frac{(z+2)^4}{z-3} \sin \left(\frac{1}{z+2} \right).$$

9.24. Supponendo che $f(z)$ e $p(z)$ siano analitiche in z_0 e che $f(z)$ abbia uno zero di ordine m in z_0 , determinare

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} p(z) \right].$$

9.25. Supponendo che $f(z) = 1/q(z)^2$ con $q(z)$ analitica in z_0 e con $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$, dimostrare che f ha un polo di ordine 2 in z_0 e vale

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^3}.$$

9.26. Si supponga che la funzione $f(z)$ abbia un polo di ordine m in z_0 . Dimostrare che

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)).$$

9.27. Si supponga dimostrata l'identità $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{R}$. Provare che l'identità è valida $\forall z \in \mathbb{C}$.

Applicazioni dei residui

Sommario. Integrali impropri: convergenza e valore principale di Cauchy. Integrali di funzioni trigonometriche. Integrali di funzioni razionali. Integrali di funzioni razionali moltiplicate per una funzione trigonometrica. Lemma di Jordan. Cammini di integrazione di forma rettangolare. Cammini indentati intorno a un polo semplice. Cammini indentati intorno a un punto di diramazione. Cammini coincidenti con una linea di diramazione. Cammini vari. Integrali di Bromwich: trasformata inversa di Laplace.

10.1 Integrali impropri: convergenza e valore principale di Cauchy

La teoria dei residui ha moltissime applicazioni, un classico esempio è il calcolo di integrali reali, propri o impropri, mediante l'uso del Teorema 9.4. Nel seguito illustreremo diversi schemi di soluzione a seconda delle diverse classi di integrali considerati. Iniziamo richiamando le seguenti definizioni valide per funzioni di variabile reale a valori reali o complessi.

Definizione 10.1 (integrale improprio). Si definisce integrale improprio un integrale in cui o l'intervallo di integrazione diverge o la funzione integranda presenta una divergenza. L'integrale in questi casi è definito da un limite come specificato di seguito:

$$\begin{aligned}\int_a^\infty f(x)dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx, \\ \int_{-\infty}^b f(x)dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^b f(x)dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)dx,\end{aligned}$$

C. Presilla: *Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile*, 2^a edizione.

UNITEXT – La Matematica per il 3+2 72

DOI 10.1007/978-88-470-5501-8_10, © Springer-Verlag Italia 2014

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_a^{b-r} f(x)dx, & \lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| &= \infty, \\
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{a+r}^b f(x)dx, & \lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| &= \infty, \\
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{r_1, r_2 \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-r_1} f(x)dx + \int_{c+r_2}^b f(x)dx \right), & \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| &= \infty,
\end{aligned}$$

dove $a < c < b$. Un integrale improprio si dice convergente se il limite che lo definisce esiste e il risultato è un numero finito (reale o complesso).

Definizione 10.2 (valore principale di Cauchy). Si chiama valore principale di Cauchy di un integrale definito tra $-\infty$ e $+\infty$, o di un integrale su un intervallo finito in un punto interno al quale il modulo della funzione integranda presenta una divergenza, il limite

$$\begin{aligned}
\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx, \\
\text{PV} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-r} f(x)dx + \int_{c+r}^b f(x)dx \right), & \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| &= \infty,
\end{aligned}$$

dove $a < c < b$. Un integrale improprio si dice convergente secondo il valore principale di Cauchy se il limite sopra specificato esiste ed è finito.

Ovviamente se un integrale improprio è convergente allora esso è convergente anche secondo il valore principale di Cauchy. Il viceversa in generale è falso. Si consideri, ad esempio,

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = 0, \quad \text{PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0,$$

i cui corrispondenti integrali impropri non sono convergenti.

10.2 Integrali di funzioni trigonometriche

Teorema 10.3. Sia $f(\cos \theta, \sin \theta)$ una funzione razionale di $\cos \theta$ e $\sin \theta$ integrabile per $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Allora l'integrale di f tra 0 e 2π è equivalente all'integrale complesso

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{\gamma} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}, \quad (10.1)$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine, di raggio unitario e orientata positivamente.

Dimostrazione. Scelta per la circonferenza γ la rappresentazione parametrica $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e utilizzando le formule di Eulero $\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ e $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$, si ha

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \frac{1}{ie^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta)^{-1}}{2}, \frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta)^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{i\gamma(\theta)} \gamma'(\theta) d\theta \\ &= \int_{\gamma} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}, \end{aligned}$$

che è la formula (10.1). □

Esempio 10.4. Si mostri che

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad -1 < a < 1.$$

L'integrale è equivalente a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = \int_{\gamma} \frac{1}{1 + a \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{ia} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 2z/a + 1} dz,$$

dove $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. L'equazione $z^2 + 2z/a + 1 = 0$ ha due soluzioni reali distinte $z_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{1 - a^2})/a$ che giacciono una all'esterno della circonferenza γ , $|z_-| > 1$, e l'altra al suo interno, $|z_+| < 1$, come si evince osservando che $z_+ z_- = 1$. Pertanto la funzione complessa da integrare lungo γ è analitica su γ e al suo interno ad eccezione del polo semplice in z_+ . Per il teorema dei residui

$$\begin{aligned} \frac{2}{ia} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1} dz &= \frac{2}{ia} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_+} \frac{1}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1} \\ &= \frac{4\pi}{a} \operatorname{Res}_{z=z_+} \frac{1/(z - z_-)}{z - z_+} \\ &= \frac{4\pi}{a} \frac{1}{z_+ - z_-} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}. \end{aligned}$$

10.3 Integrali di funzioni razionali

Teorema 10.5. *Siano $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ due polinomi reali di grado n e m . Se $m \geq n + 2$ e $Q_m(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \quad (10.2)$$

dove z_k sono gli zeri di $Q_m(z)$ contenuti nel semipiano complesso $\operatorname{Im} z > 0$.

Dimostrazione. L'integrale improprio in questione esiste e dunque coincide con il corrispondente valore principale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \operatorname{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx.$$

Quest'ultimo può essere valutato integrando la funzione razionale complessa $P_n(z)/Q_m(z)$ lungo la curva chiusa semplice orientata positivamente $\gamma = \lambda + \gamma_R$ rappresentata dai cammini

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= x, & -R \leq x \leq R, \\ \gamma_R(t) &= Re^{it}, & 0 \leq t \leq \pi. \end{aligned}$$

Supposto R sufficientemente grande così che tutti gli zeri con parte immaginaria positiva di $Q_m(z)$ sono contenuti all'interno di γ , per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\lambda + \gamma_R} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz = \int_{\lambda} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz + \int_{\gamma_R} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}.$$

L'asserto segue immediatamente prendendo il limite $R \rightarrow \infty$ di questa espressione e osservando che

$$\int_{\lambda} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{P_n(\lambda(x))}{Q_m(\lambda(x))} \lambda'(x) dx = \int_{-R}^R \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx,$$

mentre

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz = 0.$$

Per dimostrare quest'ultimo limite si ragiona come segue. Sia $P_n(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_0$ e $Q_m(z) = q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \dots + q_0$ con $p_n \neq 0$ e

$q_m \neq 0$, allora

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{zP_n(z)}{Q_m(z)} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{zz^n}{z^m} \frac{p_n + p_{n-1}z^{-1} + \cdots + p_0z^{-n}}{q_m + q_{m-1}z^{-1} + \cdots + q_0z^{-m}} \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{n+1}}{z^m} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p_n + p_{n-1}z^{-1} + \cdots + p_0z^{-n}}{q_m + q_{m-1}z^{-1} + \cdots + q_0z^{-m}} \\
 &= 0 \frac{p_n}{q_m} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

in quanto $m \geq n + 2$. Pertanto, $\forall \varepsilon > 0$ è possibile trovare un $R > 0$ sufficientemente grande tale che $|zP_n(z)/Q_m(z)| < \varepsilon/\pi$ se $|z| \geq R$ e quindi, in particolare, $|P_n(z)/Q_m(z)| < \varepsilon/(\pi R)$ se $|z| = R$. Scelto il raggio R di γ_R in questo modo, dalla disuguaglianza di Darboux si ha

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz \right| \leq \pi R \sup_{z \in \{\gamma_R\}} \left| \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \right| < \pi R \frac{\varepsilon}{\pi R} = \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\int_{\gamma_R} P_n(z)/Q_m(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$. □

Si osservi che essendo i coefficienti del polinomio Q_m reali, si ha $Q_m(\bar{z}) = \overline{Q_m(z)}$ e quindi gli zeri di $Q_m(z)$ sono coppie complesse coniugate z_k e \bar{z}_k . La condizione $Q_m(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ non può quindi essere soddisfatta se m è dispari: in questo caso, infatti, almeno uno zero di $Q_m(z)$ deve coincidere con il suo complesso coniugato, cioè deve essere reale. Ovviamente anche se m è pari potrebbero esserci zeri reali, in questo caso di ordine pari.

Nella dimostrazione precedente l'integrale di $P_n(z)/Q_m(z)$ può essere valutato anche lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda + \gamma_R$, dove $\gamma_R(t) = Re^{-it}$ con $0 \leq t \leq \pi$. Si osservi che questo cammino è orientato negativamente e pertanto l'applicazione del teorema dei residui fornisce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = -2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=\bar{z}_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}. \quad (10.3)$$

Questo risultato tuttavia coincide con la formula (10.2). Si ha infatti

$$\operatorname{Res}_{z=\bar{z}_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \overline{\operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}}$$

e quindi, osservando che il valore dell'integrale improprio è reale, si conclude che

$$\begin{aligned}
 -2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=\bar{z}_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} &= 2\pi \sum_k \operatorname{Im} \operatorname{Res}_{z=\bar{z}_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \\
 &= -2\pi \sum_k \operatorname{Im} \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}
 \end{aligned}$$

$$= 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}.$$

Nel caso $m = n + 1$ e sempre assumendo $Q_m(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, l'integrale di $P_n(x)/Q_m(x)$ su \mathbb{R} esiste nel senso di valore principale di Cauchy e può essere valutato mediante la formula

$$\begin{aligned} \operatorname{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-R}^R \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \cos(ax) dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \cos(ax) dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \cos(ax) dx. \end{aligned} \quad (10.4)$$

La convergenza dell'integrale improprio all'ultimo membro e il calcolo del suo valore sono discussi nella sezione successiva.

Esempio 10.6. Si mostri che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx = -\frac{\pi}{5}.$$

Si consideri la funzione $f(z) = z/((z^2 + 1)(z^2 + 2z + 2))$. Questa ha poli

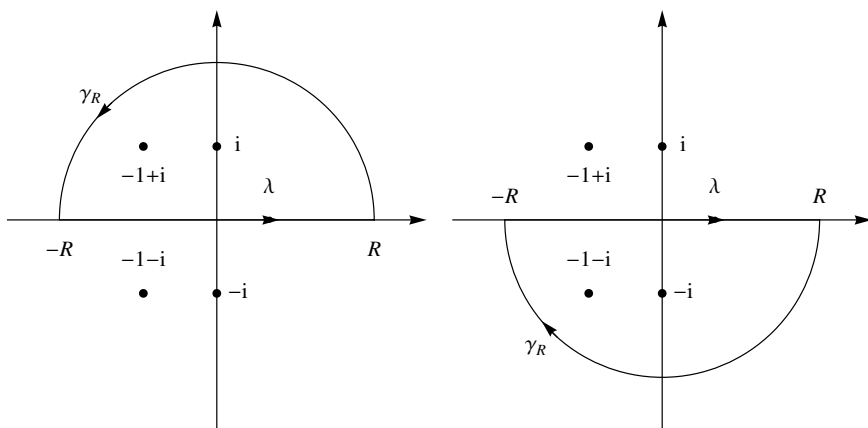


Fig. 10.1. Differenti cammini chiusi $\gamma = \lambda + \gamma_R$ utilizzati per integrare la funzione razionale $f(z) = z/((z^2 + 1)(z^2 + 2z + 1))$

semplici in $z = \pm i$ e $z = -1 + \sqrt{1-2} = -1 \pm i$ con residui

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=\pm i} f(z) &= \frac{z}{(z - (\mp i))(z^2 + 2z + 2)} \Big|_{z=\pm i} = \frac{\pm i}{\pm 2i(-1 \pm 2i + 2)} = \frac{1 \mp 2i}{10}, \\ \operatorname{Res}_{z=-1\pm i} f(z) &= \frac{z}{(z^2 + 1)(z - (-1 \mp i))} \Big|_{z=-1\pm i} = \frac{-1 \pm i}{(1 \mp 2i)(\pm 2i)} = \frac{-1 \pm 3i}{10}.\end{aligned}$$

Applicando la formula (10.2) o quella (10.3) si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx &= \pm 2\pi i \left(\frac{1 \mp 2i}{10} + \frac{-1 \pm 3i}{10} \right) \\ &= \pm 2\pi i \frac{\pm i}{10} \\ &= -\frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

10.4 Integrali di funzioni razionali e trigonometriche

In questa sezione prenderemo in considerazione integrali impropri del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos(ax) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin(ax) dx,$$

dove $R(x)$ è una funzione razionale e a una costante reale.

Lemma 10.7 (lemma di Jordan). *Sia f analitica in $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ e si consideri il cammino semicircolare $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, con $R > R_0$ così che $\{\gamma_R\} \subset A$. Se $\exists M_R > 0$ tale che $|f(z)| \leq M_R$ $\forall z \in \{\gamma_R\}$ e inoltre $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$, allora*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 0, \quad a > 0. \quad (10.5)$$

Dimostrazione. Il modulo dell'integrale su γ_R può essere maggiorato come segue

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} \right| d\theta \\ &\leq M_R R \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta \\ &= 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta.\end{aligned} \quad (10.6)$$

Si osservi che per $\theta \in [0, \pi/2]$ si ha $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$. Di conseguenza, essendo $aR > 0$, vale la disuguaglianza di Jordan

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-aR 2\theta/\pi} d\theta \\ &= \frac{e^{-2aR\theta/\pi}}{-2aR/\pi} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2aR} (1 - e^{-aR}). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Usando la disuguaglianza (10.7), la maggiorazione (10.6) permette di concludere

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi M_R}{a} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

da cui l'asserto. \square

Teorema 10.8. *Siano $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ due polinomi reali di grado n e m . Se $m \geq n+1$ e $Q_m(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, allora $\forall a > 0$ si ha*

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz}, \quad (10.8)$$

dove z_k sono gli zeri di $Q_m(z)$ contenuti nel semipiano complesso $\text{Im } z > 0$.

Dimostrazione. Si ragioni come nel caso della formula (10.2). L'unica differenza è che l'integrale su γ_R di $P_n(z)e^{iaz}/Q_m(z)$ si annulla nel limite $R \rightarrow \infty$ in virtù del lemma di Jordan. \square

Utilizzando un differente cammino di integrazione nel piano complesso, è possibile ridimostrare la formula (10.8) unitamente alla convergenza dell'integrale improprio nel senso ordinario.

Teorema 10.9. *Siano $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ due polinomi reali di grado n e m . Se $m \geq n+1$ e $Q_m(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, allora $\forall a > 0$ si ha*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz}, \quad (10.9)$$

dove z_k sono gli zeri di $Q_m(z)$ contenuti nel semipiano complesso $\text{Im } z > 0$.

Dimostrazione. Si integri la funzione $P_n(z)e^{iaz}/Q_m(z)$ lungo il perimetro del quadrato $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ rappresentato dai quattro cammini rettilinei

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= x, & -R_1 \leq x \leq R_2, \\ \lambda_2(y) &= R_2 + iy, & 0 \leq y \leq R_1 + R_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3(x) &= x + i(R_1 + R_2), & R_2 \geq x \geq -R_1, \\ \lambda_4(y) &= -R_1 + iy, & R_1 + R_2 \geq y \geq 0.\end{aligned}$$

Supposti $R_1, R_2 > 0$ sufficientemente grandi così che tutti gli zeri con parte immaginaria positiva di $Q_m(z)$ sono contenuti all'interno di γ , il teorema dei residui fornisce

$$\int_{\gamma} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\lambda_j} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz}.$$

Per gli integrali lungo i singoli cammini che compongono γ si ha

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz &= \int_{-R_1}^{R_2} \frac{P_n(\lambda_1(x))}{Q_m(\lambda_1(x))} e^{ia\lambda_1(x)} \lambda_1'(x) dx \\ &= \int_{-R_1}^{R_2} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{iax} dx, \\ \int_{\lambda_2} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz &= \int_0^{R_1+R_2} \frac{P_n(\lambda_2(y))}{Q_m(\lambda_2(y))} e^{ia\lambda_2(y)} \lambda_2'(y) dy \\ &= \int_0^{R_1+R_2} \frac{P_n(R_2 + iy)}{Q_m(R_2 + iy)} e^{iaR_2} e^{-ay} i dy, \\ \int_{\lambda_3} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz &= \int_{R_2}^{-R_1} \frac{P_n(\lambda_3(x))}{Q_m(\lambda_3(x))} e^{ia\lambda_3(x)} \lambda_3'(x) dx \\ &= \int_{R_2}^{-R_1} \frac{P_n(x + i(R_1 + R_2))}{Q_m(x + i(R_1 + R_2))} e^{iax} e^{-a(R_1+R_2)} dx, \\ \int_{\lambda_4} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz &= \int_{R_1+R_2}^0 \frac{P_n(\lambda_4(y))}{Q_m(\lambda_4(y))} e^{ia\lambda_4(y)} \lambda_4'(y) dy \\ &= \int_{R_1+R_2}^0 \frac{P_n(-R_1 + iy)}{Q_m(-R_1 + iy)} e^{-iaR_1} e^{-ay} i dy.\end{aligned}$$

Poiché $m \geq n + 1$, risulta $P_n(z)/Q_m(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ e quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists R(\varepsilon) > 0$ tale che $|P_n(z)/Q_m(z)| < \varepsilon a$ se $|z| \geq R$. Scelti allora $R_1, R_2 > R$, i moduli degli integrali su λ_j , con $j = 2, 3, 4$, possono essere maggiorati come segue:

$$\begin{aligned}\left| \int_{\lambda_2} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz \right| &\leq \int_0^{R_1+R_2} \left| \frac{P_n(R_2 + iy)}{Q_m(R_2 + iy)} e^{iaR_2} e^{-ay} i \right| dy \\ &< \int_0^{R_1+R_2} \varepsilon a e^{-ay} dy \\ &= \varepsilon \left(1 - e^{-a(R_1+R_2)} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\lambda_3} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz \right| &\leq \int_{-R_1}^{R_2} \left| \frac{P_n(x + i(R_1 + R_2))}{Q_m(x + i(R_1 + R_2))} e^{iax} e^{-a(R_1 + R_2)} \right| dx \\
&< \int_{-R_1}^{R_2} \varepsilon a e^{-a(R_1 + R_2)} dx \\
&= \varepsilon a(R_1 + R_2) e^{-a(R_1 + R_2)}, \\
\left| \int_{\lambda_4} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} dz \right| &\leq \int_0^{R_1 + R_2} \left| \frac{P_n(-R_1 + iy)}{Q_m(-R_1 + iy)} e^{-iaR_1} e^{-ay} i \right| dy \\
&< \int_0^{R_1 + R_2} \varepsilon a e^{-ay} dy \\
&= \varepsilon \left(1 - e^{-a(R_1 + R_2)} \right).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che questi integrali convergono a 0 per $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ e quindi esiste il limite

$$\lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz}. \quad \square$$

Cambiando a in $-a$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{-iax} dx &= \overline{2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz}} \\
&= -2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} \\
&= -2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{-iaz}. \tag{10.10}
\end{aligned}$$

Tale formula può essere ottenuta anche direttamente integrando la funzione complessa $f(z) = P_n(z)e^{-iaz}/Q_m(z)$, con $a > 0$, lungo il perimetro del quadrato di vertici $-R_1$, R_2 , $R_2 - i(R_1 + R_2)$, $-R_1 - i(R_1 + R_2)$ che è orientato negativamente e contiene gli zeri \bar{z}_k di $Q_m(z)$ giacenti nel semipiano complesso inferiore.

Esempio 10.10. Si mostri che

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^2 + 4x + 5} dx &= \frac{\pi}{e} (\sin 2 - \cos 2), \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin x}{x^2 + 4x + 5} dx &= \frac{\pi}{e} (\sin 2 + \cos 2).
\end{aligned}$$

Si consideri la funzione $f(z) = (z+1)e^{iz}/(z^2+4z+5)$. Questa ha poli semplici

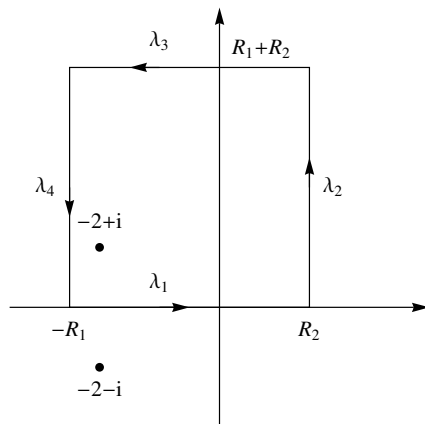


Fig. 10.2. Cammino chiuso quadrato $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ utilizzato per integrare la funzione $f(z) = (z+1)e^{iz}/((z^2+4z+5))$

in $z = -2 + \sqrt{4-5} = -2 \pm i$ e il residuo nel polo contenuto nel semipiano $\text{Im } z > 0$ vale

$$\text{Res}_{z=-2+i} f(z) = \frac{(z+1)e^{iz}}{z - (-2-i)} \Big|_{z=-2+i} = \frac{(-1+i)e^{-2i-1}}{2i} = \frac{(1+i)e^{-2i}}{2e}.$$

Prendendo la parte reale della formula (10.9) si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^2+4x+5} dx &= -2\pi \text{Im} \frac{(1+i)(\cos 2 - i \sin 2)}{2e} \\ &= \frac{\pi}{e} (\sin 2 - \cos 2). \end{aligned}$$

Prendendo la parte immaginaria della stessa formula segue invece

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin x}{x^2+4x+5} dx &= 2\pi \text{Re} \frac{(1+i)(\cos 2 - i \sin 2)}{2e} \\ &= \frac{\pi}{e} (\sin 2 + \cos 2). \end{aligned}$$

Esempio 10.11. Si mostri che

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)}{x^2+4x+5} dx = -\pi.$$

Si consideri la funzione $f(z) = (z+1)e^{iaz}/((z^2+4z+5))$ con $a > 0$. Dall'esempio

precedente segue immediatamente

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos(ax)}{x^2+4x+5} dx &= -2\pi \operatorname{Im} \frac{(1+i)(\cos(2a) - i\sin(2a))}{2e^a} \\ &= \frac{\pi}{e^a} (\sin(2a) - \cos(2a))\end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)}{x^2+4x+5} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos(ax)}{x^2+4x+5} dx = -\pi.$$

10.5 Cammini indentati intorno a un polo semplice

Lemma 10.12. *Se f ha un polo semplice in z_0 e γ_r^\pm sono le due semicirconferenze definite da $\gamma_r^\pm(\theta) = z_0 + re^{\pm i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq 0$, allora*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r^\pm} f(z) dz = \pm \pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z). \quad (10.11)$$

Dimostrazione. Poiché f ha un polo semplice in z_0 , allora $\exists R > 0$ tale che, per $0 < |z - z_0| < R$, si ha

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + g(z),$$

con g analitica nella palla $B(z_0, R)$. Per ogni $r < R$ si ha quindi

$$\int_{\gamma_r^\pm} f(z) dz = b_1 \int_{\gamma_r^\pm} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_r^\pm} g(z) dz = \pm \pi i b_1 + \int_{\gamma_r^\pm} g(z) dz.$$

Il primo termine indipendente da r è proprio $\pm \pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$, mentre il secondo si annulla nel limite $r \rightarrow 0$. Infatti, scelto $r_0 < R$, la funzione $|g|$ è continua in $\overline{B}(z_0, r_0)$ e quindi $\exists M > 0$ tale che $|g(z)| \leq M \forall z \in \overline{B}(z_0, r_0)$. Segue che $\forall r \leq r_0$ vale la disuguaglianza

$$\left| \int_{\gamma_r^\pm} g(z) dz \right| \leq \pi r M$$

e quindi $\int_{\gamma_r^\pm} g(z) dz \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. □

Il lemma precedente permette di estendere le formule (10.2) e (10.9) al caso in cui il polinomio a denominatore $Q_m(x)$ abbia degli zeri reali semplici. È evidente che gli integrali reali convergono in questo caso solo nel senso del valore principale di Cauchy.

Teorema 10.13. *Siano $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ due polinomi reali di grado n e m . Se $m \geq n + 2$ e $Q_m(x)$ ha zeri reali x_j solo di ordine 1, allora*

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} + \pi i \sum_j \text{Res}_{z=x_j} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \quad (10.12)$$

dove z_k sono gli zeri di $Q_m(z)$ contenuti nel semipiano complesso $\text{Im } z > 0$.

Dimostrazione. Si deformi il cammino $\gamma = \lambda + \gamma_R$ utilizzato nella dimostrazione della formula (10.2) aggirando con delle semicirconfereze $\gamma_{r_j}^{\pm}$ ciascuno dei poli reali semplici x_j . Si prendano infine i limiti $r_j \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$. \square

Teorema 10.14. *Siano $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ due polinomi reali di grado n e m . Se $m \geq n + 1$ e $Q_m(x)$ ha zeri reali x_j solo di ordine 1, allora $\forall a > 0$ si ha*

$$\begin{aligned} \text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{iax} dx &= 2\pi i \sum_k \text{Res}_{z=z_k} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz} \\ &+ \pi i \sum_j \text{Res}_{z=x_j} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

dove z_k sono gli zeri di $Q_m(z)$ contenuti nel semipiano complesso $\text{Im } z > 0$.

Dimostrazione. Si deformi il cammino $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ utilizzato nella dimostrazione della formula (10.9) aggirando con delle semicirconfereze $\gamma_{r_j}^{\pm}$ ciascuno dei poli reali semplici x_j . Si prendano infine i limiti $r_j \rightarrow 0$ e $R_1, R_2 \rightarrow \infty$. \square

Esempio 10.15. Si mostri che

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 - 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

La funzione razionale $f(z) = p(z)/q(z)$, con $p(z) = z$ e $q(z) = z^3 - 1$, ha poli semplici nei punti $z_k = \sqrt[3]{1} = e^{i2\pi k/3}$, $k = 0, 1, 2$, uno dei quali, $z_0 = 1$, è reale. I residui di f nei poli giacenti nel semipiano complesso superiore, asse reale compreso, valgono

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{3}, \\ \text{Res}_{z=z_1} f(z) &= \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{e^{i2\pi/3}}{3e^{i4\pi/3}} = \frac{1}{3 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6}, \end{aligned}$$

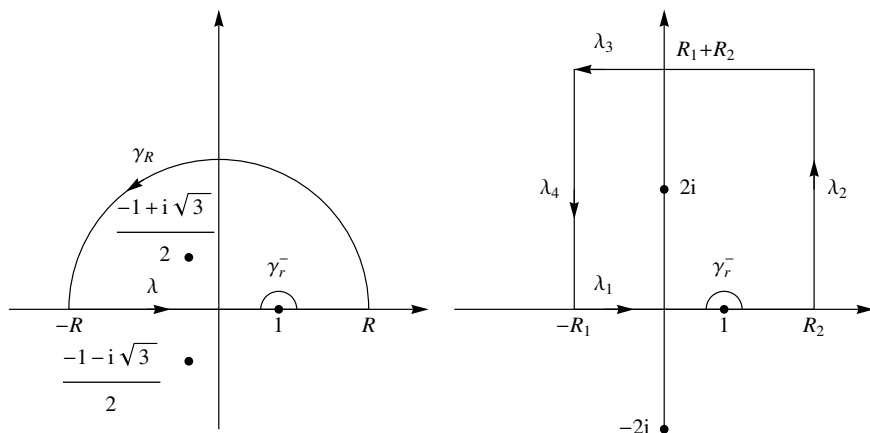


Fig. 10.3. Indentazione dei cammini chiusi $\gamma = \lambda + \gamma_R$ (sinistra) e $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ (destra) utilizzati per integrare rispettivamente le funzioni $f(z) = z/(z^3 - 1)$ e $f(z) = e^{iz}/((z-1)(z^2+4))$

pertanto

$$\begin{aligned}
 \text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 - 1} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \\
 &= 2\pi i \left(-\frac{1}{6} - i \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \pi i \frac{1}{3} \\
 &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

Esempio 10.16. Si mostri che

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{5} \left(\cos 1 - \frac{1}{e^2} \right).$$

La funzione $f(z) = e^{iz}/q(z)$, con $q(z) = (z-1)(z^2+4)$, ha poli semplici nei punti 1 e $\pm 2i$. I residui di f nei poli giacenti nel semipiano complesso superiore, asse reale compreso, valgono

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}_{z=1} f(z) &= \left. \frac{e^{iz}}{z^2+4} \right|_{z=1} = \frac{\cos 1 + i \sin 1}{5}, \\
 \operatorname{Res}_{z=2i} f(z) &= \left. \frac{e^{iz}}{(z-1)(z+2i)} \right|_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{-8-4i} = \frac{-2+i}{20e^2},
 \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} \text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx &= \text{Im} \left(2\pi i \text{Res}_{z=2i} f(z) + \pi i \text{Res}_{z=1} f(z) \right) \\ &= 2\pi \frac{-2}{20e^2} + \pi \frac{\cos 1}{5} \\ &= \frac{\pi}{5} \left(\cos 1 - \frac{1}{e^2} \right). \end{aligned}$$

Esempio 10.17. Si mostri che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si osservi innanzitutto che per la parità della funzione integranda e poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{\sin x}{x} dx + \int_r^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right). \end{aligned}$$

Per la (10.13) esiste il valore principale dell'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ di e^{ix}/x , dunque esiste l'integrale tra 0 e ∞ di $\sin x/x$. Per trovarne il valore, si osservi che la funzione complessa $f(z) = e^{iz}/z$ è analitica ovunque ad eccezione del polo semplice in $z = 0$, dove ha residuo

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = e^{iz} \Big|_{z=0} = 1.$$

Pertanto

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\pi i \text{Res}_{z=0} f(z) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

10.6 Cammini indentati intorno a un punto di diramazione

Esempio 10.18. Si mostri che

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a}, \quad a > 0.$$

Si ponga $f(z) = (\log z)/(z^2 + a^2)$ assumendo per il logaritmo quel ramo la cui linea di diramazione coincide con il semiasse immaginario negativo,

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

e si integri f lungo il cammino chiuso orientato positivamente $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= x, & r \leq x \leq R, \\ \gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \lambda_2(x) &= xe^{i\pi}, & R \geq x \geq r, \\ \gamma_r(\theta) &= re^{i\theta}, & \pi \geq \theta \geq 0. \end{aligned}$$

Poiché f è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = ia$,

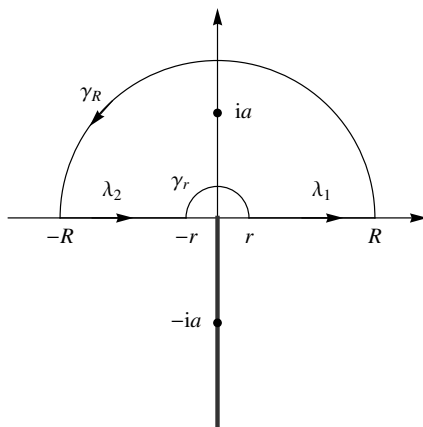


Fig. 10.4. Cammino chiuso indentato $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$ utilizzato per integrare la funzione $f(z) = \log z/(z^2 + a^2)$ con $a > 0$

avendo assunto $r < a < R$, si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} f(z) \\
 &= 2\pi i \frac{\log(ae^{i\pi/2})}{ia + ia} \\
 &= \frac{\pi}{a} \left(\ln a + i\frac{\pi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Per gli integrali lungo i singoli cammini che compongono γ risulta

$$\begin{aligned}
 \int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_r^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx, \\
 \int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} iR e^{i\theta} d\theta, \\
 \int_{\lambda_2} f(z) dz &= \int_R^r \frac{\ln x + i\pi}{x^2 e^{i2\pi} + a^2} e^{i\pi} dx \\
 &= \int_r^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_r^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx, \\
 \int_{\gamma_r} f(z) dz &= \int_\pi^0 \frac{\ln r + i\theta}{r^2 e^{2i\theta} + a^2} i r e^{i\theta} d\theta.
 \end{aligned}$$

Gli integrali su γ_R e γ_r tendono a 0 rispettivamente per $R \rightarrow \infty$ e per $r \rightarrow 0$. Infatti, utilizzando la disuguaglianza di Darboux, si ha

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \pi R \frac{\ln R + \pi}{R^2 - a^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\
 \left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| &\leq \pi r \frac{\ln r + \pi}{a^2 - r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

Pertanto nel limite $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ risulta

$$2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{a} + i\frac{\pi^2}{2a},$$

da cui, prendendo la parte reale e quella immaginaria, si conclude

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a}, \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a}.$$

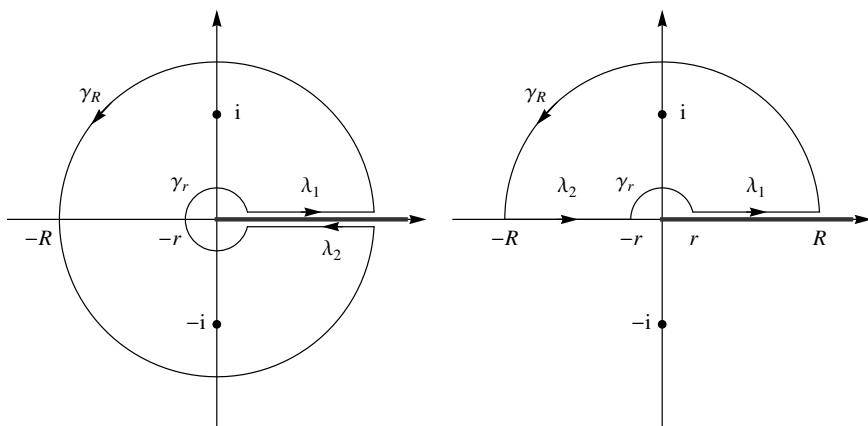


Fig. 10.5. Differenti cammini chiusi $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$ utilizzati per integrare la funzione polidroma $f(z) = z^a / (z^2 + 1)$ con $-1 < a < 1$

10.7 Cammini coincidenti con una linea di diramazione

Esempio 10.19. Si mostri che

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi/2}{\cos(\pi a/2)}, \quad -1 < a < 1.$$

Si ponga $f(z) = z^a / (z^2 + 1) = e^{a \log z} / (z^2 + 1)$, assumendo per il logaritmo quel ramo la cui linea di diramazione coincide con il semiasse reale positivo

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

La funzione f è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale positivo e dei due poli semplici in $z = \pm i$ dove ha residui

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \left. \frac{e^{a \log z}}{z + i} \right|_{z=i} = \frac{e^{a(\ln 1 + i\pi/2)}}{i + i} = \frac{e^{i\pi a/2}}{2i}, \\ \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) &= \left. \frac{e^{a \log z}}{z - i} \right|_{z=-i} = \frac{e^{a(\ln 1 + i3\pi/2)}}{-i - i} = \frac{e^{i3\pi a/2}}{-2i}. \end{aligned}$$

Si integri f lungo il cammino chiuso orientato positivamente $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= x + i0, & r \leq x \leq R, \\ \gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \lambda_2(x) &= x - i0, & R \geq x \geq r, \\ \gamma_r(\theta) &= re^{i\theta}, & 2\pi \geq \theta \geq 0. \end{aligned}$$

Come al solito, $x \pm i0$ sta a indicare $x \pm i\varepsilon$ con ε infinitesimo positivo così che in rappresentazione polare $x + i0 = xe^{i\varepsilon}$ mentre $x - i0 = xe^{i(2\pi-\varepsilon)}$. Per $r < 1 < R$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) \right) \\ &= \pi \left(e^{i\pi a/2} - e^{i3\pi a/2} \right). \end{aligned}$$

Per gli integrali lungo i singoli cammini che compongono γ risulta

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_r^R \frac{e^{a(\ln x + i0)}}{(xe^{i0})^2 + 1} e^{i0} dx = \int_r^R \frac{e^{a \ln x}}{x^2 + 1} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_R^r \frac{e^{a(\ln x + i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2 + 1} e^{i2\pi} dx = -e^{i2\pi a} \int_r^R \frac{e^{a \ln x}}{x^2 + 1} dx, \\ \left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &\leq \frac{e^{a \ln R}}{R^2 - 1} 2\pi R = \frac{2\pi R^{a+1}}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad a + 1 < 2, \\ \left| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right| &\leq \frac{e^{a \ln r}}{1 - r^2} 2\pi r = \frac{2\pi r^{a+1}}{1 - r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad a + 1 > 0. \end{aligned}$$

Pertanto, per $-1 < a < 1$ nel limite $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ si conclude

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^a}{x^2 + 1} dx &= \frac{\pi (e^{i\pi a/2} - e^{i3\pi a/2})}{1 - e^{i2\pi a}} \\ &= \frac{\pi e^{i\pi a} (e^{-i\pi a/2} - e^{i\pi a/2})}{e^{i\pi a} (e^{-i\pi a} - e^{i\pi a})} \\ &= \frac{\pi \sin(\pi a/2)}{\sin(\pi a)} \\ &= \frac{\pi/2}{\cos(\pi a/2)}. \end{aligned}$$

Allo stesso risultato, ma evitando il calcolo di uno dei due residui, si giunge integrando f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= x + i0, & r \leq x \leq R, \\ \gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \lambda_2(x) &= xe^{i\pi}, & R \geq x \geq r, \\ \gamma_r(\theta) &= re^{i\theta}, & \pi \geq \theta \geq 0. \end{aligned}$$

In questo caso, sempre assumendo $r < 1 < R$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) \\ &= \pi e^{i\pi a/2},\end{aligned}$$

mentre per gli integrali lungo i singoli cammini si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_r^R \frac{e^{a(\ln x + i0)}}{(xe^{i0})^2 + 1} e^{i0} dx = \int_r^R \frac{e^{a \ln x}}{x^2 + 1} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_R^r \frac{e^{a(\ln x + i\pi)}}{(xe^{i\pi})^2 + 1} e^{i\pi} dx = e^{i\pi a} \int_r^R \frac{e^{a \ln x}}{x^2 + 1} dx, \\ \left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &\leq \frac{e^{a \ln R}}{R^2 - 1} \pi R = \frac{\pi R^{a+1}}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad a + 1 < 2, \\ \left| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right| &\leq \frac{e^{a \ln r}}{1 - r^2} \pi r = \frac{\pi r^{a+1}}{1 - r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad a + 1 > 0.\end{aligned}$$

Per $-1 < a < 1$, nel limite $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ si conclude ancora

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2 + 1} dx &= \frac{\pi e^{i\pi a/2}}{1 + e^{i\pi a}} \\ &= \frac{\pi/2}{\cos(\pi a/2)}.\end{aligned}$$

Si osservi che questo secondo tipo di cammino di integrazione può essere utilizzato in virtù della parità della funzione a denominatore che assume lo stesso valore, $x^2 + 1$, sia su $\lambda_2(x)$ che su $\lambda_1(x)$.

10.8 Cammini vari

Altri integrali reali, non appartenenti alle classi descritte finora, possono essere valutati integrando un'opportuna funzione complessa lungo un opportuno cammino in \mathbb{C} e ancora sfruttando il teorema dei residui. Non sempre è possibile teorizzare in modo generale come devono essere scelte queste opportune funzioni e, soprattutto, questi opportuni cammini. Di seguito si riportano alcuni esempi notevoli.

Esempio 10.20. Si mostri che

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

La funzione $f(z) = z/(z^3 + 1)$ ha poli semplici in $z_k = e^{i(\pi+2\pi k)/3}$, $k = 0, 1, 2$. Detto $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2$ il cammino di integrazione chiuso definito da

$$\begin{aligned}\lambda_1(x) &= x, & 0 \leq x \leq R, \\ \gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi/3, \\ \lambda_2(x) &= xe^{i\frac{2}{3}\pi}, & R \geq x \geq 0,\end{aligned}$$

poiché f è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = z_0$, per $R > 1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \\ &= 2\pi i \frac{z_0}{3z_0^2} \\ &= \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}$$

Gli integrali lungo i singoli cammini che compongono γ valgono

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_0^R \frac{x}{x^3 + 1} dx, \\ \int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{Re^{i\theta}}{R^3 e^{3i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_R^0 \frac{xe^{i\frac{2}{3}\pi}}{x^3 e^{i2\pi} + 1} e^{i\frac{2}{3}\pi} dx = -e^{i\frac{4}{3}\pi} \int_0^R \frac{x}{x^3 + 1} dx.\end{aligned}$$

Pertanto nel limite $R \rightarrow \infty$ risulta

$$\left(1 - e^{i\frac{4}{3}\pi}\right) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx = \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

e, in conclusione,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx &= \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{4}{3}\pi}} \\ &= \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{2}{3}\pi}}{e^{-i\frac{2}{3}\pi} - e^{i\frac{2}{3}\pi}} \\ &= \frac{\pi/3}{\sin(2\pi/3)} \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

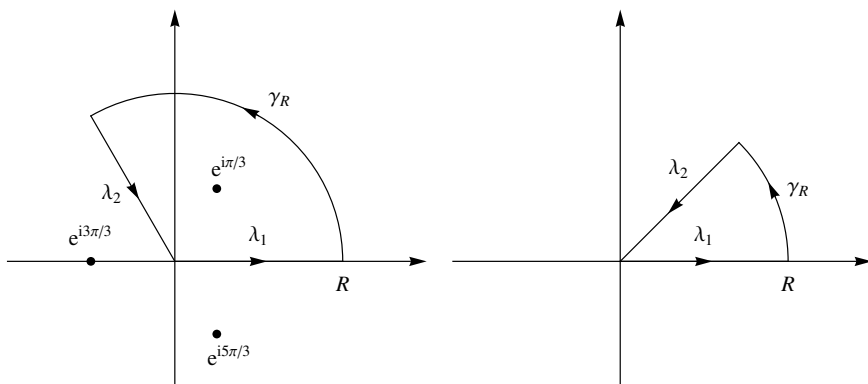


Fig. 10.6. Cammini chiusi $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2$ utilizzati per integrare rispettivamente le funzioni $f(z) = z/(z^3 + 1)$ (sinistra) e $f(z) = e^{iz^2}$ (destra)

Esempio 10.21 (integrali di Fresnel). Si mostri che

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Si integri la funzione $f(z) = e^{iz^2}$, analitica in tutto \mathbb{C} , lungo il cammino chiuso semplice orientato positivamente $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2$, dove

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= x, & 0 \leq x \leq R, \\ \gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi/4, \\ \lambda_2(r) &= re^{i\pi/4}, & R \geq r \geq 0. \end{aligned}$$

Poiché f è analitica su e dentro γ , si ha

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz = 0.$$

Gli integrali lungo i cammini λ_1 e λ_2 valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z) dz = \int_0^R e^{ix^2} dx,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z) dz = \int_R^0 e^{ir^2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))} e^{i\pi/4} dr = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr.$$

Per l'integrale lungo γ_R , usando la disuguaglianza di Jordan si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \int_0^{\pi/4} \left| e^{iR^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))} iRe^{i\theta} \right| d\theta \\ &= \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 2\varphi/\pi} d\varphi \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{1 - e^{-R^2}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Pertanto, nel limite $R \rightarrow \infty$ si conclude

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{ix^2} dx &= \int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx \\
&= e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Esempio 10.22. Si mostri che

$$\int_0^\infty x \cos(x^4) dx = \int_0^\infty x \sin(x^4) dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Si integri la funzione $f(z) = ze^{iz^4}$, analitica in tutto \mathbb{C} , lungo il cammino chiuso semplice orientato positivamente $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2$, dove

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x) &= x, & 0 \leq x \leq R, \\
\gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi/8, \\
\lambda_2(r) &= re^{i\pi/8}, & R \geq r \geq 0.
\end{aligned}$$

Poiché f è analitica su e dentro γ , si ha

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz = 0.$$

Gli integrali lungo i cammini λ_1 e λ_2 valgono

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_0^R x e^{ix^4} dx, \\
\int_{\lambda_2} f(z) dz &= \int_R^0 r e^{i\pi/8} e^{ir^4(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))} e^{i\pi/8} dr \\
&= -e^{i\pi/4} \int_0^R r e^{-r^4} dr \\
&= -\frac{e^{i\pi/4}}{2} \int_0^R e^{-u^2} du.
\end{aligned}$$

Per l'integrale lungo γ_R , usando la disuguaglianza di Jordan, si ha

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \int_0^{\pi/8} \left| R e^{i\theta} e^{iR^4(\cos(4\theta) + i\sin(4\theta))} i R e^{i\theta} \right| d\theta, \\
 &= \frac{R^2}{4} \int_0^{\pi/2} e^{-R^4 \sin \varphi} d\varphi \\
 &\leq \frac{R^2}{4} \int_0^{\pi/2} e^{-R^4 2\varphi/\pi} d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{8} \frac{1 - e^{-R^4}}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Pertanto, nel limite $R \rightarrow \infty$ si conclude

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x e^{ix^4} dx &= \int_0^\infty x \cos(x^4) dx + i \int_0^\infty x \sin(x^4) dx \\
 &= \frac{e^{i\pi/4}}{2} \int_0^\infty e^{-u^2} du \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{4}.
 \end{aligned}$$

10.9 Integrali di Bromwich: trasformata inversa di Laplace

Definizione 10.23. Sia $g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione di un insieme finito di punti singolari isolati z_k , $k = 1, \dots, N$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\max_k \operatorname{Re} z_k < x_0$. Posto $\lambda_{y_0}(y) = x_0 + iy$ con $-y_0 \leq y \leq y_0$ e $y_0 > 0$, si chiama integrale di Bromwich, ammesso che il limite indicato esista,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y_0 \rightarrow \infty} \int_{\lambda_{y_0}} e^{zt} g(z) dz, \quad t > 0. \quad (10.14)$$

Si può mostrare che, sotto opportune condizioni di regolarità, $g(z)$ è la trasformata di Laplace di $f(t)$

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt. \quad (10.15)$$

In altre parole la (10.14) rappresenta una formula di inversione per $g(z)$.

L'integrale di Bromwich può essere spesso valutato mediante il teorema dei residui. Ad esempio, si consideri il cammino chiuso orientato positivamente $\eta_{y_0} = \lambda_{y_0} + \gamma_{y_0}$, dove $\gamma_{y_0}(\theta) = x_0 + y_0 e^{i\theta}$ con $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$. Scelto y_0 sufficientemente grande in modo tale che tutte le singolarità di g giacciono

all'interno di γ_{y_0} , si ha

$$\int_{\gamma_{y_0}} e^{zt} g(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} (e^{zt} g(z)) - \int_{\gamma_{y_0}} e^{zt} g(z) dz.$$

Utilizzando la disuguaglianza (7.3), per l'integrale su γ_{y_0} si ottiene la stima

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{y_0}} e^{zt} g(z) dz \right| &\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |e^{x_0 t + y_0 t \cos \theta + i y_0 t \sin \theta} g(x_0 + y_0 e^{i\theta}) i y_0 e^{i\theta}| d\theta \\ &\leq e^{x_0 t} M_{y_0} y_0 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{y_0 t \cos \theta} d\theta \\ &= e^{x_0 t} M_{y_0} y_0 \int_0^\pi e^{-y_0 t \sin \varphi} d\varphi \\ &\leq e^{x_0 t} M_{y_0} y_0 \frac{\pi}{y_0 t}, \end{aligned}$$

dove si è posto $M_{y_0} = \sup_{z \in \{\gamma_{y_0}\}} |g(z)|$ e si è fatto uso della disuguaglianza di Jordan. Se g è tale che $\lim_{y_0 \rightarrow \infty} M_{y_0} = 0$, allora vale la formula

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} (e^{zt} g(z)), \quad t > 0. \quad (10.16)$$

Nel caso in cui le singolarità di g siano un'infinità numerabile, la sommatoria in (10.16) è sostituita dalla corrispondente serie. Tale espressione è però, in generale, solo formale, nel senso che occorre verificare che la $f(t)$ così trovata ammette come trasformata di Laplace proprio la $g(z)$ di partenza.

La valutazione della formula (10.16) è facilitata dalla seguente osservazione. Se $g(z)$ ha in z_k un polo di ordine m , allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall z \in A(z_k, 0, \varepsilon)$ si ha

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_k)^j + \frac{b_1}{z - z_k} + \frac{b_2}{(z - z_k)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_k)^m}.$$

D'altro canto la funzione e^{zt} è intera e $\forall z \in \mathbb{C}$ vale

$$e^{zt} = e^{z_k t} e^{(z - z_k)t} = e^{z_k t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (z - z_k)^j.$$

Moltiplicando le due serie, dall'espressione del coefficiente di $(z - z_k)^{-1}$ si ricava

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} (e^{zt} g(z)) = e^{z_k t} \left(b_1 + \frac{b_2 t}{1!} + \frac{b_3 t^2}{2!} + \cdots + \frac{b_m t^{m-1}}{(m-1)!} \right). \quad (10.17)$$

Esempio 10.24. Si determini la funzione $f(t)$ la cui trasformata di Laplace è $g(z) = z/(z - z_1)^2$. Scelto $x_0 > \operatorname{Re} z_1$ e posto $\gamma_{y_0}(\theta) = x_0 + y_0 e^{i\theta}$ con

$\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ e $y_0 > 0$, per $z \in \{\gamma_{y_0}\}$ si ha

$$|g(z)| = \frac{|z|}{|z - z_1|^2} \leq \frac{|x_0| + y_0}{||z| - |z_1||^2} \leq \frac{|x_0| + y_0}{(y_0 - |x_0| - |z_1|)^2} \xrightarrow{y_0 \rightarrow \infty} 0.$$

È possibile quindi applicare la formula (10.16), che nel presente caso fornisce

$$f(t) = \operatorname{Res}_{z=z_1} (e^{zt} g(z)), \quad t > 0.$$

La funzione $g(z)$ ha in z_1 un polo doppio e nell'anello $0 < |z - z_1| < \infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$g(z) = \frac{z - z_1 + z_1}{(z - z_1)^2} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{z_1}{(z - z_1)^2}.$$

Utilizzando la (10.17) si conclude

$$f(t) = e^{z_1 t} (1 + z_1 t), \quad t > 0.$$

È facile verificare che

$$\int_0^\infty e^{-zt} e^{z_1 t} (1 + z_1 t) dt = \frac{z}{(z - z_1)^2}, \quad \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_1.$$

Esercizi

10.1. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2}, \quad a > b > 0.$$

10.2. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta.$$

10.3. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta}, \quad a > 1.$$

10.4. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{2\pi} (\sin \theta)^{2n} d\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10.5. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}, \quad a > 1.$$

10.6. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}.$$

10.7. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(\exp(\cos \theta + i \sin \theta)) d\theta.$$

10.8. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta.$$

10.9. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

10.10. Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx.$$

10.11. Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx.$$

10.12. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 16)^2} dx.$$

10.13. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

10.14. Calcolare il valore principale di Cauchy dell'integrale reale

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{(x - b)^2 + c^2} dx, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

10.15. Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{(x - b)^2 + c^2} dx, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

10.16. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx.$$

10.17. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Suggerimento: si considerino separatamente i casi $\omega > 0$ e $\omega < 0$.**10.18.** Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

10.19. Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 6x + 10} dx.$$

10.20. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx.$$

10.21. Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x) + 3}{x^2 + 1} dx.$$

10.22. Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x) + 7}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

10.23. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx.$$

10.24. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx.$$

10.25. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx.$$

10.26. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x^2 + 1)} dx.$$

10.27. Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{a+1}} dx, \quad 0 < a < 2.$$

Suggerimento: si esegua, per cominciare, un'integrazione per parti.

10.28. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} dx.$$

10.29. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x}(x^2-2x+2)} dx.$$

10.30. Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{(1+x^2)^2} dx, \quad -2 < a < 2.$$

10.31. Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx, \quad -1 < a < 1.$$

Suggerimento: si consideri il cammino di integrazione rettangolare di vertici $\pm R$ e $\pm R + i\pi$.

10.32. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n+1}} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

10.33. Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Suggerimento: si consideri il cammino di integrazione rettangolare di vertici $\pm R$ e $\pm R + i\pi$.

10.34. Dimostrare la convergenza e calcolare il valore dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty e^{-wx^2} dx, \quad w \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} w > 0.$$

Si ricordi che $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.

10.35. Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{2\pi} \log(a + a^{-1} - 2\cos\theta) d\theta, \quad a > 1.$$

10.36. Calcolare l'integrale di Bromwich

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\lambda_R} e^{zt} \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)} dz, \quad z_0 \neq z_1 \in \mathbb{C}, \quad t > 0,$$

dove $\lambda_R(y) = a + iy$, $-R \leq y \leq R$, con $a > \max(\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Re} z_1)$.

Ulteriori proprietà delle funzioni analitiche

Sommario. Prolungamento analitico. Prolungamento alla Borel e alla Weierstrass. Principio di riflessione di Schwarz. Prolungamento lungo un cammino, teorema di monodromia. Principio del massimo (minimo) modulo. Funzioni meromorfe. Il numero di zeri e di poli di una funzione meromorfa all'interno di una regione limitata è finito. Integrale lungo una curva chiusa semplice di una funzione meromorfa moltiplicata per una analitica: principio generalizzato dell'argomento. Indice di una curva chiusa. Principio dell'argomento. Formula della funzione inversa. Formula di Abel-Plana. Teorema di Rouché. Determinazione del numero di zeri di una funzione analitica all'interno di una regione assegnata. Funzioni armoniche e armoniche coniugate. La funzione $f = u + iv$ è analitica se e solo se v è armonica coniugata a u . Esistenza della funzione armonica coniugata e sua determinazione. Metodo di Laplace e metodo del punto di sella.

11.1 Prolungamento analitico

Siano D_1 e D_2 con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ due sottoinsiemi aperti e connessi di \mathbb{C} . Sia f_1 una funzione analitica in D_1 . Se esiste una funzione f_2 analitica in D_2 tale che $f_2(z) = f_1(z) \forall z \in D_1 \cap D_2$, allora f_2 si chiama il prolungamento analitico di f_1 da D_1 a D_2 . Non è detto che tale prolungamento analitico esista, tuttavia, se esiste, per il Teorema di identità 9.16 esso è unico.

Esempio 11.1. Si considerino le funzioni analitiche $f_1 : D_1 \mapsto \mathbb{C}$ e $f_2 : D_2 \mapsto \mathbb{C}$ definite da

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad D_1 = B(0, 1),$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z}, \quad D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}.$$

Come sappiamo $f_2(z) = f_1(z) \forall z \in D_1 \cap D_2$, perciò f_2 è il prolungamento

C. Presilla: *Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile*, 2^a edizione.

UNITEXT – La Matematica per il 3+2 72

DOI 10.1007/978-88-470-5501-8_11, © Springer-Verlag Italia 2014

analitico di f_1 da D_1 a D_2 . Si osservi che

$$f_2(z) = \int_0^\infty e^{-t} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} (zt)^k dt = \int_0^\infty e^{-(1-z)t} dt,$$

l'integrale essendo convergente per $\operatorname{Re} z < 1$.

Esempio 11.2 (prolungamento alla Borel). L'esempio precedente ammette la seguente generalizzazione. Sia $f_1 : D_1 \mapsto \mathbb{C}$ la funzione analitica

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k, \quad D_1 = B(0, R), \quad \frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}.$$

Si ponga poi

$$f_2(z) = \int_0^\infty e^{-t} h(zt) dt, \quad h(zt) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k!} (zt)^k.$$

Si osservi che, nel caso non banale $R > 0$, il raggio di convergenza della serie avente come somma $h(zt)$ è infinito. Per $|z| < R$ si ha $f_2(z) = f_1(z)$ in quanto

$$\int_0^\infty e^{-t} \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k!} (zt)^k dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k!} \int_0^\infty e^{-t} (zt)^k dt = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k,$$

quindi f_2 è il prolungamento analitico di f_1 da D_1 a quella regione, da determinare nota la successione (a_k) , in cui l'integrale che definisce f_2 risulta convergente.

Esempio 11.3. Si consideri nuovamente la funzione analitica $f_1 : D_1 \mapsto \mathbb{C}$

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k, \quad D_1 = B(0, 1).$$

Scelto $z_1 \in D_1$, con $z_1 \neq 0$, definiamo una nuova funzione analitica $f_2 : D_2 \mapsto \mathbb{C}$ come somma della serie di potenze di centro z_1

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n (z - z_1)^n, \quad D_2 = B(z_1, R), \quad \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}.$$

In z_1 la funzione f_1 è analitica, quindi per il Teorema di unicità 8.5 la serie appena scritta è lo sviluppo in serie di Taylor di f_1 di centro z_1 , e i coefficienti c_n sono calcolabili come

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f_1(z) \Big|_{z=z_1} \\ &= \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{n!} k(k-1) \dots (k-n+1) z_1^{k-n} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} z_1^j.$$

Utilizzando la relazione

$$\binom{n+j}{n} = \binom{n+j}{j} = (-1)^j \binom{-n-1}{j}$$

e lo sviluppo notevole

$$(1+w)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} w^j, \quad a \in \mathbb{C}, \quad |w| < 1,$$

otteniamo $c_n = (1 - z_1)^{-n-1}$. In conclusione risulta

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - z_1)^{n+1}} (z - z_1)^n,$$

che ha raggio di convergenza $R = |1 - z_1|$. Ovviamente a questo risultato si poteva giungere direttamente ammettendo di conoscere la somma della serie che definisce f_1

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_1 - (z-z_1)} = \frac{1}{1-z_1} \frac{1}{1 - \frac{z-z_1}{1-z_1}}.$$

Si osservi che, escluso il caso in cui z_1 appartiene all'intervallo reale $(0, 1)$, il dominio D_2 rappresenta sempre un'estensione di D_1 nella direzione di z_1 . Si conclude che f_2 è il prolungamento analitico di f_1 da D_1 a D_2 .

Esempio 11.4 (prolungamento alla Weierstrass). Sia f una funzione analitica in D aperto e connesso, e supponiamo di conoscere lo sviluppo in serie di Taylor di tale funzione in un intorno di un punto $z_0 \in D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r_0).$$

Il valore di $f(z)$ in un generico punto $z \in D$ può essere ottenuto con un procedimento, noto come prolungamento analitico alla Weierstrass, che generalizza l'esempio precedente. Si congiunga z_0 a z mediante una poligonale P . Detta $\delta > 0$ la minima distanza di P dalla frontiera di D , si individui una successione finita di punti z_0, z_1, \dots, z_m , con $z_m = z$, appartenenti a P e tali che $|z_k - z_{k-1}| < \delta$, $k = 1, \dots, m$. Nella palla $B(z_k, r_k)$, dove r_k è la distanza di z_k da ∂D , la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (z - z_k)^n, \quad z \in B(z_k, r_k),$$

e, poiché $r_k \in B(z_{k-1}, r_{k-1})$, i coefficienti $c_n^{(k)}$ sono calcolabili come

$$\begin{aligned} c_n^{(k)} &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(k-1)} (z - z_{k-1})^j \Big|_{z=z_k} \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} \binom{j}{n} c_j^{(k-1)} (z_k - z_{k-1})^{j-n}. \end{aligned}$$

Iterando il procedimento da $k = 1$ fino a $k = m$, è possibile, in linea di principio, determinare $f(z) = c_0^{(m)}$.

I metodi discussi negli esempi precedenti permettono di effettuare un prolungamento analitico tra due domini aperti e connessi, D_1 e D_2 , aventi intersezione non nulla. È possibile considerare anche il prolungamento analitico tra due domini aperti e connessi, D_1 e D_2 , che siano adiacenti, cioè tali che $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ma con le curve di Jordan ∂D_1 e ∂D_2 aventi come intersezione una qualche curva aperta. Sia γ tale curva privata dei suoi punti estremi. Nel caso di domini adiacenti diremo che (f_1, D_1) è prolungabile analiticamente a (f_2, D_2) se esiste una funzione analitica $f : D \mapsto \mathbb{C}$, con $D = D_1 \cup D_2 \cup \{\gamma\}$ aperto e connesso, tale che $f(z) = f_1(z) \forall z \in D_1$ e $f(z) = f_2(z) \forall z \in D_2$. È evidente che dati due domini D_1 e D_2 con intersezione non nulla possiamo sempre introdurre due domini adiacenti \tilde{D}_1 e \tilde{D}_2 le cui frontiere hanno in comune una curva aperta privata degli estremi γ in modo tale che $D_1 \cup D_2 = \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \{\gamma\}$. Il viceversa è pure vero. Segue allora che il prolungamento analitico attraverso domini con intersezione non nulla è equivalente a quello attraverso domini adiacenti.

Per effettuare un prolungamento analitico nel caso di domini adiacenti può risultare utile il metodo di riflessione di Schwarz.

Teorema 11.5 (principio di riflessione di Schwarz). *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, connesso e simmetrico rispetto all'asse reale, cioè coincidente con $D^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in D\}$. Posto $D_{\pm} = \{z \in D : \text{Im } z \gtrless 0\}$ e $D_0 = \{z \in D : \text{Im } z = 0\}$, sia $f : D_+ \cup D_0 \mapsto \mathbb{C}$ continua in $D_+ \cup D_0$, analitica in D_+ e reale su D_0 . Allora, la funzione*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D_+ \cup D_0 \\ f(\bar{z}) & z \in D_- \end{cases}$$

è analitica in D , ovvero, g è il prolungamento analitico di f da D_+ a D .

Dimostrazione. Si osservi innanzitutto che, essendo D aperto, connesso e simmetrico rispetto all'asse reale, D_0 deve contenere almeno un intervallo aperto dell'asse reale. È facile verificare che g è continua in D_0 e quindi in D . Mostriamo allora che è nullo l'integrale di g lungo un'arbitraria curva chiusa regolare a tratti contenuta in D e, per il teorema di Morera, potremo concludere che g è analitica in D . Sia dunque $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un cammino chiuso regolare a

tratti tale che $\{\gamma\} \subset D$. Sono possibili vari casi. Se $\{\gamma\} \subset D_+$, l'integrale di g lungo γ è nullo in quanto $g(z) = f(z) \forall z \in D_+$ e f è analitica in D_+ . Se $\{\gamma\} \subset D_-$, l'integrale di g lungo γ può essere ricondotto all'integrale di f lungo il cammino $\overline{\gamma(t)}$, $a \leq t \leq b$, contenuto in D_+

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_a^b \overline{f(\overline{\gamma(t)})} \gamma'(t) dt = \int_a^b \overline{f(\overline{\gamma(t)})} \overline{\gamma'(t)} dt = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(z)} dz,$$

quindi anche questo integrale è nullo. I casi in cui $\{\gamma\} \subset D_+ \cup D_0$ oppure $\{\gamma\} \subset D_- \cup D_0$ si trattano in modo analogo considerando una procedura limite a partire da un cammino γ_ε omotopo a γ , con $\{\gamma_\varepsilon\} \subset D_+$ oppure $\{\gamma_\varepsilon\} \subset D_-$ e tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon = \gamma$. Rimane da considerare la situazione in cui $\{\gamma\}$ ha intersezione non vuota sia con D_+ che con D_- . In questo caso possiamo scrivere

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma_+} g(z) dz + \int_{\gamma_-} g(z) dz,$$

dove γ_{\pm} sono due cammini chiusi formati unendo le porzioni di γ contenute in D_{\pm} con uno o più segmenti di D_0 . Poiché $\{\gamma_{\pm}\} \subset D_{\pm} \cup D_0$, per quanto detto prima, ciascuno dei due integrali su γ_{\pm} è nullo e quindi è nullo l'integrale di g lungo γ . \square

Nel Teorema 11.5 si è supposto che il dominio D nel piano z abbia un asse di simmetria λ coincidente con l'asse reale. Si è anche supposto che per $z \in \{\lambda\}$ la funzione f assuma valori appartenenti a un asse Λ del piano $w = f(z)$ coincidente con l'asse reale. La funzione g è stata poi costruita assegnando al punto z^* simmetrico di z rispetto a λ il valore w^* simmetrico di $w = f(z)$ rispetto a Λ . Applicando le trasformazioni lineari $z' = az + b$ e $w' = cw + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, è quindi possibile estendere il principio di riflessione di Schwarz ad assi di simmetria λ e Λ del tutto generici. Il caso in cui λ e Λ sono archi di circonferenze può essere trattato in modo simile, per i dettagli si veda [7, 11].

Ritorniamo, per finire, al prolungamento analitico alla Weierstrass. Senza entrare nei dettagli, si intuisce che è possibile definire un prolungamento analitico lungo un cammino γ che non sia necessariamente una poligonale. Sia allora γ un cammino di punti estremi z_1 e z_2 e supponiamo che f sia analitica in un intorno di z_1 . Non abbiamo teoremi che stabiliscano sotto quali condizioni f è prolungabile lungo γ fino a z_2 . Se ciò è possibile, il Teorema di identità 9.16 ci assicura che la f così ottenuta è unica. Cosa succede se prolunghiamo analiticamente f da z_1 a z_2 , ammesso che sia possibile, lungo un cammino η differente? In generale, il risultato $f(z_2)$ dipenderà dal cammino scelto per effettuare il prolungamento.

Esempio 11.6. Si prolunghi il ramo principale di $\log z$ da $z_1 = 1$ a $z_2 = 2$ lungo i cammini $\gamma(t) = 1+t$ e $\eta(t) = (1+t)e^{i2\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$. Il ramo principale di $\log z$ è la funzione $f_1 : D_1 \mapsto \mathbb{C}$ analitica in $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -u, 0 \leq u < \infty\}$

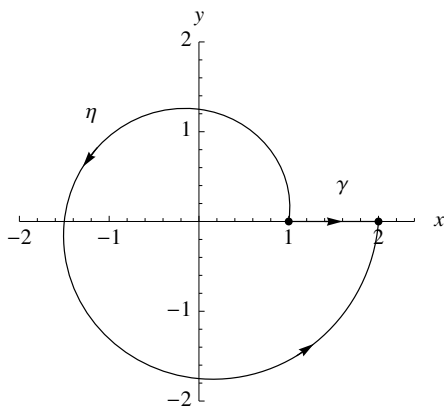


Fig. 11.1. Cammini γ e η con punti estremi coincidenti $z_1 = 1$ e $z_2 = 2$ lungo i quali viene prolungato analiticamente il ramo principale di $\log z$

definita da

$$f_1(z) = \ln r + i\theta, \quad z = e^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Il cammino γ è interno al dominio D_1 pertanto il prolungamento analitico lungo γ fornisce $\log 2 = f_1(2) = \ln 2$. Si consideri ora

$$f_2(z) = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \pi/2 < \theta < 5\pi/2.$$

La funzione $f_2 : D_2 \mapsto \mathbb{C}$, analitica in $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : z \neq iu, 0 \leq u < \infty\}$, ha la proprietà $f_2(z) = f_1(z)$ per ogni z tale che $\operatorname{Re} z < 0$ e $\operatorname{Im} z > 0$. Essa è quindi il prolungamento analitico di $\log z$ da D_1 a D_2 lungo η . In questo caso si ha $\log 2 = f_2(2) = \ln 2 + i2\pi$.

Nell'esempio appena illustrato, il ramo principale del logaritmo viene esteso al dominio non semplicemente connesso $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ all'interno del quale i cammini non equivalenti γ e η risultano non omotopi. Condizioni sufficienti affinché il prolungamento analitico risulti monodromo sono individuate dal seguente teorema.

Teorema 11.7 (teorema di monodromia). *Sia $f : B(z_1, r) \mapsto \mathbb{C}$, $r > 0$, una funzione analitica in un intorno di z_1 . Se G è un insieme aperto semplicemente connesso che contiene $B(z_1, r)$ ed è possibile prolungare analiticamente f lungo ogni cammino che collega z_1 ad un generico punto $z_2 \in G$, allora esiste una funzione analitica $g : G \mapsto \mathbb{C}$ tale che $g(z) = f(z) \forall z \in B(z_1, r)$.*

Per una definizione precisa di prolungamento analitico lungo un cammino e la dimostrazione del teorema di monodromia si veda [5, 8].

11.2 Principio del massimo modulo

Teorema 11.8 (principio del massimo modulo). *Sia f analitica e non costante in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Allora $|f|$ non ha massimo in D , cioè non esiste un punto $z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)| \forall z \in D$.*

Dimostrazione. Si ragiona per assurdo e si supponga che $\exists z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)| \forall z \in D$. Poiché D è aperto, $\exists r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subset D$. Sia $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ un cammino circolare di centro z_0 orientato positivamente di raggio $\rho < r$. Per la formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt. \quad (11.1)$$

La formula (11.1) è nota come teorema del valore medio di Gauss. Prendendo il modulo di entrambi i membri della (11.1) e usando la disuguaglianza (7.3), si ottiene

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + \rho e^{it})| \\ &\leq |f(z_0)|, \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it})|) dt = 0.$$

Essendo la funzione integranda non negativa, dal valore di questo integrale segue che $|f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z_0)| \forall t \in [0, 2\pi]$. D'altro canto $\rho < r$ è arbitrario e quindi $|f(z)| = |f(z_0)| \forall z \in B(z_0, r)$. Per il Teorema 5.20 si conclude che $f(z) = f(z_0) \forall z \in B(z_0, r)$ e per il Teorema di identità 9.16 si giunge alla contraddizione che $f(z) = f(z_0) \forall z \in D$. \square

Corollario 11.9. *Sia f continua in $D \subset \mathbb{C}$ chiuso e limitato, e inoltre analitica e non costante in D° . Allora il massimo di $|f|$ in D è assunto su ∂D .*

Dimostrazione. Innanzitutto poiché D è compatto, $|f|$ ha massimo in D , cioè $\exists z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)| \forall z \in D$. Se fosse $z_0 \in D^\circ$, poiché $\exists r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subset D^\circ$, si avrebbe una contraddizione del Teorema 11.8, ovvero $|f(z)|$ avrebbe massimo nell'aperto connesso $B(z_0, r)$ dove f è analitica e non costante. Si deve pertanto concludere che $z_0 \in \partial D$. \square

Teorema 11.10 (principio del minimo modulo). *Sia f analitica e non costante in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Allora $|f|$ non ha minimo in $D \setminus D_0$, dove $D_0 = \{z \in D : f(z) = 0\}$.*

Dimostrazione. Si osservi che $D \setminus D_0$ è ancora aperto e connesso. La funzione $g(z) = 1/f(z)$ è analitica e non costante in $D \setminus D_0$ e quindi, per il Teorema 11.8, $|g|$ non ha massimo in $D \setminus D_0$. Ciò è equivalente a dire che $|f|$ non ha minimo in $D \setminus D_0$. \square

Corollario 11.11. *Sia f continua in $D \subset \mathbb{C}$ chiuso e limitato, e inoltre analitica, non costante e mai nulla in D° . Allora il minimo di $|f|$ in D è assunto su ∂D .*

Corollario 11.12. *Sia f continua in $D \subset \mathbb{C}$ chiuso e limitato, e inoltre analitica e non costante in D° . Allora il massimo e il minimo di $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ in D sono assunti su ∂D .*

Dimostrazione. Si ponga $g(z) = e^{f(z)}$. Poiché g è continua in D , analitica e non costante in D° e mai nulla, per i Corollari 11.9 e 11.11 il massimo e il minimo in D di $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$ sono assunti su ∂D . Per la monotonia dell'esponenziale reale, lo stesso è vero per la funzione $\operatorname{Re} f$. Nel caso di $\operatorname{Im} f$ vale una identica dimostrazione ponendo $g(z) = e^{if(z)}$. \square

Esempio 11.13. Si determini il massimo di $|\sin z|$ per $z \in D = \{z = x + iy, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Si osservi innanzitutto che $|\sin z|$ è continua e D è compatto, dunque $|\sin z|$ ha massimo in D . Poiché $\sin z$ è analitica e non costante in D , per il teorema del massimo modulo $|\sin z|$ non può assumere il massimo in D° . Il massimo di $|\sin z|$ va pertanto cercato su ∂D . Si ha

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \frac{e^{-i(x-iy)} - e^{+i(x-iy)}}{-2i} \\ &= \frac{e^{-2y} - e^{i2x} - e^{-i2x} + e^{2y}}{4} \\ &= \frac{-e^{i2x} - e^{-i2x} + 2}{4} + \frac{e^{-2y} + e^{2y} - 2}{4} \\ &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 \\ &= \sin^2 x + \sinh^2 y. \end{aligned}$$

Sui lati $y = \pm 1$ il massimo di $|\sin z|$ è assunto per $x = \pm 1$ e vale $(\sin^2 1 + \sinh^2 1)^{1/2}$. Sui lati $x = \pm 1$ il massimo di $|\sin z|$ è assunto per $y = \pm 1$ e vale $(\sin^2 1 + \sinh^2 1)^{1/2}$. In conclusione, $|\sin z|$ assume il valore massimo $(\sin^2 1 + \sinh^2 1)^{1/2}$ nei quattro vertici $z = \pm 1 \pm i$.

11.3 Funzioni meromorfe

Definizione 11.14 (funzione meromorfa). Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. La funzione f si dice meromorfa in D se f è analitica in D ad eccezione di poli.

Teorema 11.15. *Sia f meromorfa all'interno di γ curva chiusa semplice e sia inoltre f analitica e non nulla su γ . Allora il numero di poli e di zeri di f interni a γ è finito.*

Dimostrazione. Per il teorema della curva di Jordan, $\text{Int}(\gamma)$ è un insieme limitato. Si supponga, per assurdo, che il numero di poli (zeri) di f interni a γ , quindi contenuti in $\overline{\text{Int}(\gamma)}$, sia infinito. Sia $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ la successione di questi poli (zeri). Poiché $\overline{\text{Int}(\gamma)}$ è chiuso e limitato in \mathbb{C} , per il teorema di Heine-Borel tale insieme è compatto, ovvero sequenzialmente compatto, e pertanto è possibile estrarre da (z_k) una sottosuccessione convergente in $\overline{\text{Int}(\gamma)}$. Questo è in contraddizione con il fatto che i poli (gli zeri) sono punti isolati.

Teorema 11.16 (principio generalizzato dell'argomento). *Sia f meromorfa all'interno di γ curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente e sia inoltre f analitica e non nulla su γ . Se g è analitica su e all'interno di γ , allora*

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k g(a_k) - \sum_{k=1}^n \beta_k g(b_k) \right), \quad (11.2)$$

dove $a_k, k = 1, \dots, m$, e $b_k, k = 1, \dots, n$, sono gli zeri e i poli di f interni a γ di ordine rispettivamente α_k e β_k .

Dimostrazione. Per il teorema dei residui, si ha

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}_{z=z_k} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)},$$

dove z_k sono i punti singolari isolati di gf'/f interni a γ . Mostriamo che tali punti sono poli semplici corrispondenti agli zeri e ai poli di f . Se f ha in a uno zero di ordine α , allora $f(z) = h(z)(z-a)^\alpha$ con h analitica e non nulla in a . Pertanto

$$\begin{aligned} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z) \frac{h'(z)(z-a)^\alpha + h(z)\alpha(z-a)^{\alpha-1}}{h(z)(z-a)^\alpha} \\ &= \frac{g(z)h'(z)}{h(z)} + \frac{\alpha}{z-a} g(z). \end{aligned}$$

Poiché g e gh'/h sono analitiche in a , la funzione gf'/f ha un polo semplice in a con

$$\text{Res}_{z=a} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha g(a).$$

Se f ha in b un polo di ordine β , allora $f(z) = h(z)(z-b)^{-\beta}$ con h analitica

e non nulla in b . Pertanto

$$\begin{aligned} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z) \frac{h'(z)(z-b)^{-\beta} - h(z)\beta(z-b)^{-\beta-1}}{h(z)(z-b)^{-\beta}} \\ &= \frac{g(z)h'(z)}{h(z)} - \frac{\beta}{z-b}g(z). \end{aligned}$$

Poiché g e gh'/h sono analitiche in b , la funzione gf'/f ha un polo semplice in b con

$$\operatorname{Res}_{z=b} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = -\beta g(b).$$

□

Definizione 11.17 (indice di una curva chiusa). Chiamasi indice, o numero di avvolgimenti, di una curva chiusa γ rispetto ad un punto $z_0 \notin \{\gamma\}$ l'intero relativo

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}. \quad (11.3)$$

Si consideri per iniziare il caso di una curva γ chiusa semplice. Se $z_0 \in \operatorname{Ext}(\gamma)$ si ha $n(\gamma, z_0) = 0$. Se $z_0 \in \operatorname{Int}(\gamma)$, allora $n(\gamma, z_0) = \pm 1$ a seconda se γ è orientata positivamente (+1) oppure negativamente (-1). Nel caso di una curva γ chiusa ma non semplice si ragiona in modo analogo considerando γ come somma di curve chiuse semplici. Si conclude, in accordo con la definizione, che $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$. Per una dimostrazione formale che $n(\gamma, z_0)$ è un intero relativo si veda [5].

Teorema 11.18 (principio dell'argomento). *Sia f meromorfa all'interno di γ curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente e sia inoltre f analitica e non nulla su γ . Allora*

$$n(f \circ \gamma, 0) = Z - P, \quad (11.4)$$

dove Z e P sono il numero di zeri e di poli di f , contandone la molteplicità, interni a γ .

Dimostrazione. Dal Teorema 11.16 con la scelta $g(z) = 1$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P. \quad (11.5)$$

D'altro canto, se $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è un cammino che rappresenta la curva γ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{(f \circ \gamma)(t)} (f \circ \gamma)'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z-0} \\
&= n(f \circ \gamma, 0).
\end{aligned}$$

Uguagliando le due precedenti espressioni segue l'asserto. \square

Esempio 11.19. Si consideri $f(z) = z^2$ e sia $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. All'interno della circonferenza γ la funzione f ha $Z = 2$ zeri e $P = 0$ poli. D'altro canto $(f \circ \gamma)(t) = R^2 e^{2it}$ e quindi

$$\begin{aligned}
n(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z-0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(f \circ \gamma)(t)} (f \circ \gamma)'(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2iR^2 e^{2it}}{R^2 e^{2it}} dt \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Esempio 11.20. Si consideri $f(z) = z^{-2}$ e sia $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. All'interno della circonferenza γ la funzione f ha $Z = 0$ zeri e $P = 2$ poli. D'altro canto $(f \circ \gamma)(t) = R^{-2} e^{-2it}$ e quindi

$$\begin{aligned}
n(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z-0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(f \circ \gamma)(t)} (f \circ \gamma)'(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-2iR^{-2} e^{-2it}}{R^{-2} e^{-2it}} dt \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Teorema 11.21 (formula della funzione inversa). *Sia f analitica in $\overline{B}(z_0, R)$ e biunivoca in $B(z_0, R)$. Allora, detta γ la circonferenza $|z - z_0| = R$ orientata positivamente, $f^{-1}(w)$ è definita $\forall w \in f(B(z_0, R))$ dalla formula*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz. \quad (11.6)$$

Dimostrazione. Segue dal Teorema 11.16 con la scelta $g(z) = z$. Infatti $\forall w \in f(B(z_0, R))$ la funzione $f(z) - w$ è analitica su γ e al suo interno, ha un unico zero semplice $z = f^{-1}(w) \in \text{Int}(\gamma)$ e non si annulla per $z \in \{\gamma\}$. Essendo anche $g(z) = z$ analitica su e all'interno di γ , possiamo applicare la formula (11.2) e ottenere

$$\int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = 2\pi i f^{-1}(w). \quad \square$$

Teorema 11.22 (formula di Abel-Plana). *Sia $f(z)$ analitica $\forall z \in \mathbb{C}$, allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}f(0) + i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (11.7)$$

Dimostrazione. Segue dal Teorema 11.16 con un'opportuna scelta di $g(z)$ e del cammino γ . \square

Teorema 11.23 (Rouché). *Siano f e g analitiche in $\overline{\text{Int}(\gamma)}$ con γ curva chiusa semplice regolare a tratti e inoltre risulti $|f(z)| > |g(z)| \forall z \in \{\gamma\}$. Allora f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri, contandone la molteplicità, all'interno di γ .*

Dimostrazione. Si ponga $h = f + g$. Le funzioni f e h non si annullano mai su γ , infatti $\forall z \in \{\gamma\}$ si ha $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ e $|h(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$. Inoltre f e h sono analitiche in $\text{Int}(\gamma)$. Per il principio dell'argomento, il numero di zeri, contandone la molteplicità, di f e h all'interno di γ è quindi pari a

$$Z_f = n(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (11.8)$$

$$Z_h = n(h \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz. \quad (11.9)$$

Osservando che

$$\frac{h'}{h} = \frac{(f(1 + g/f))'}{f(1 + g/f)} = \frac{f'}{f} + \frac{(1 + g/f)'}{1 + g/f},$$

dalla (11.9) si ha $Z_h = Z_f + n((1 + g/f) \circ \gamma, 0)$. Poiché, per ipotesi, si ha $|(1 + g(z)/f(z)) - 1| < 1 \forall z \in \{\gamma\}$, risulta che il cammino $(1 + g/f) \circ \gamma$ è contenuto all'interno del cerchio di centro 1 e raggio 1. Ne segue che $z = 0$ è un punto esterno al cammino $(1 + g/f) \circ \gamma$ e quindi $n((1 + g/f) \circ \gamma, 0) = 0$. Si conclude che $Z_f = Z_h$. \square

Esempio 11.24. Determinare il numero di soluzioni, contandone la molteplicità, dell'equazione $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ contenute nella regione $1 \leq |z| < 2$. Troviamo, per cominciare, il numero di zeri dell'equazione nella regione $|z| < 2$. Posto $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = f + g$, si scelgano f e g in modo tale che $|f(z)| > |g(z)|$ per $|z| = 2$. Una possibile scelta è $f(z) = 2z^5$ e $g(z) = -6z^2 + z + 1$; infatti per $|z| = 2$ si ha $|f(z)| = 2^6 = 64$ e $|g(z)| \leq 6 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 27$. Le funzioni f e g sono intere, quindi il teorema di Rouché è applicabile e fornisce $Z_{f+g} = Z_f = 5$ in $|z| < 2$, in quanto in tale regione f ha un unico zero in $z = 0$ con molteplicità 5. Si consideri ora la regione $|z| < 1$. La decomposizione $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = f + g$ deve essere fatta in modo tale che $|f(z)| > |g(z)|$ per $|z| = 1$. Ponendo $f(z) = 2z^5 - 6z^2$ e $g(z) = z + 1$, per

$|z| = 1$ si ha $|f(z)| \geq |2|z|^5 - 6|z|^2| = 6 - 2 = 4$ e $|g(z)| \leq |z| + 1 = 2$. Poiché $f(z) = z^2(2z^3 - 6)$ ha uno zero doppio in $z = 0$ mentre le radici di $2z^3 - 6 = 0$ hanno modulo $3^{1/3} > 1$, si ha $Z_{f+g} = Z_f = 2$ per $|z| < 1$. In conclusione, l'equazione $f + g = 0$ ha $5 - 2 = 3$ soluzioni nella regione $1 \leq |z| < 2$.

Esempio 11.25. Mostrare che $az^n = e^z$ con $a \in \mathbb{C}$ e $|a| > e$ ha n soluzioni nella regione $|z| < 1$. Si ponga $f(z) = az^n$ e $g(z) = -e^z$. Le funzioni f e g sono analitiche per $|z| \leq 1$ e si ha $|f(z)| > |g(z)|$ per $|z| = 1$. Per il teorema di Rouché $Z_{f+g} = Z_f$ nella regione $|z| < 1$. Evidentemente $Z_f = n$.

Esempio 11.26. Mostrare che $P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$, con $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, n$, e $a_n \neq 0$, ha, contandone la molteplicità, n zeri in \mathbb{C} . Il risultato è già noto dal teorema fondamentale dell'algebra, possiamo ridimostrarlo usando il $g(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1}$. Poiché f e g sono intere e teorema di Rouché. Si ponga $f(z) = a_nz^n$ e per $|z| = R$ con R sufficientemente grande si ha $|f(z)| > |g(z)|$, dal Teorema 11.23 segue che $Z_{f+g} = Z_f$ nella regione $|z| < R$. Evidentemente $Z_f = n$, pertanto P_n ha n zeri in \mathbb{C} .

11.4 Funzioni armoniche

Definizione 11.27 (funzione armonica). Sia $h(x, y) : D \mapsto \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto. La funzione h si dice armonica in D se $\forall (x, y) \in D$ essa ha derivate seconde continue e soddisfa l'equazione di Laplace

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0. \quad (11.10)$$

Definizione 11.28 (funzione armonica coniugata). Siano $u(x, y) : D \mapsto \mathbb{R}$ e $v(x, y) : D \mapsto \mathbb{R}$ due funzioni armoniche in $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto. Si dice che v è armonica coniugata a u in D se $\forall (x, y) \in D$ valgono le condizioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$.

Teorema 11.29. Sia $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ aperto. La funzione f è analitica in D se e solo se v è armonica coniugata a u in D .

Dimostrazione. Sia f analitica in D . Allora le funzioni componenti u e v sono infinitamente derivabili in D e in tale dominio valgono le condizioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Inoltre u è armonica in D in quanto in D risulta $u_{xx} = \partial_x v_y = \partial_y v_x = -u_{yy}$. Analogamente, $v_{xx} = \partial_x (-u_y) = \partial_y (-u_x) = -v_{yy}$, cioè v è armonica in D . Si conclude che v è armonica coniugata a u in D .

Viceversa, sia v armonica coniugata a u in D . Allora u e v , in quanto armoniche, hanno derivate seconde continue in D e inoltre in D soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Per il Teorema 5.12 segue che $f'(x+iy) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$ esiste $\forall (x, y) \in D$, cioè f è analitica in D . \square

Teorema 11.30 (esistenza della funzione armonica coniugata). *Sia $u : D \mapsto \mathbb{R}$ armonica in $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto e semplicemente connesso. Allora u ammette in D una e una sola armonica coniugata definita, a meno di un'arbitraria costante reale, da*

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_s(s, t) dt - u_t(s, t) ds), \quad (11.11)$$

dove l'integrale di linea è valutato lungo un qualsiasi cammino contenuto in D che va da un arbitrario punto fisso $(x_0, y_0) \in D$ al generico punto $(x, y) \in D$. A meno di un'arbitraria costante complessa, la funzione

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (11.12)$$

è l'unica funzione analitica su D la cui parte reale è, a meno di un'arbitraria costante reale, $u(x, y)$.

Dimostrazione. Si ponga $g(x + iy) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$. Poiché u è armonica in D , $\forall (x, y) \in D$ esiste $g'(x + iy) = u_{xx}(x, y) - iu_{xy}(x, y)$, cioè g è analitica in D . Inoltre D è aperto e semplicemente connesso, quindi g ammette primitiva in D . Sia $f(x + iy)$ tale primitiva. A meno di una costante complessa $f(x + iy)$ è univocamente definita $\forall (x, y) \in D$ dall'integrale lungo un arbitrario cammino contenuto in D che connette un punto fisso (x_0, y_0) di D a (x, y)

$$f(x + iy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_s(s, t) - iu_t(s, t))(ds + idt). \quad (11.13)$$

Il punto (x_0, y_0) è arbitrario e la sua scelta corrisponde alla scelta della costante a meno della quale $f(x + iy)$ risulta univoca. A meno di una costante reale, la parte reale di $f(x + iy)$ è $u(x, y)$

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_s(s, t) ds + u_t(s, t) dt) = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

Sempre a meno di una costante reale, la funzione $v(x, y)$ armonica coniugata a $u(x, y)$ in D è la parte immaginaria di f

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_s(s, t) dt - u_t(s, t) ds).$$

□

Nel caso in cui il dominio della funzione u sia $D = B(0, R)$ con $0 < R \leq \infty$, quindi in particolare nel caso $D = \mathbb{C}$, possiamo scegliere il punto fisso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e il cammino costituito dall'unione del segmento che congiunge $(0, 0)$ a $(x, 0)$ e di quello che va da $(x, 0)$ a (x, y) . L'espressione (11.11) allora si semplifica in

$$v(x, y) = - \int_0^x u_y(s, 0) ds + \int_0^y u_x(x, t) dt. \quad (11.14)$$

Nel caso in cui D sia molteplicemente connesso, l'integrale che compare nella (11.13) assume in generale valori diversi per diverse scelte del cammino da (x_0, y_0) a (x, y) e pertanto $f(x+iy)$ come pure $v(x, y)$ sono funzioni polidrome.

Per alcuni esempi di applicazione della teoria delle funzioni armoniche si veda [3].

11.5 Metodo del punto di sella

Si consideri la funzione $I(\lambda) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ definita mediante l'integrale

$$I(\lambda) = \int_{\gamma} e^{\lambda f(z)} g(z) dz, \quad (11.15)$$

dove $f, g : D \mapsto \mathbb{C}$ sono analitiche in $D \subset \mathbb{C}$ e γ è una curva regolare a tratti contenuta in D . Senza perdita di generalità possiamo assumere λ reale e positivo. Altrimenti, basterà porre $\exp(\lambda f(z)) = \exp(|\lambda| \tilde{f}(z))$ con $\tilde{f}(z) = f(z) \exp(i \arg \lambda)$. Siamo interessati a valutare il comportamento asintotico di $I(\lambda)$ per $\lambda \rightarrow \infty$.

Per capire l'idea sottostante al metodo che andiamo a esporre, cominciamo con il considerare il caso in cui f e g sono funzioni reali infinitamente derivabili e il cammino γ è l'intervallo reale $[a, b]$:

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda f(t)} g(t) dt. \quad (11.16)$$

Si supponga che $f(t)$ abbia un unico massimo in $t_0 \in (a, b)$. L'espansione in serie di Taylor di f intorno al punto t_0 è quindi

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0) (t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3),$$

dove $f''(t_0) < 0$. Inserendo questo sviluppo nella (11.16) e sviluppando anche $g(t)$ in serie di Taylor intorno a t_0 , con il cambio di variabile $\sqrt{\lambda |f''(t_0)|} (t - t_0) = u$ otteniamo

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b e^{\lambda(f(t_0) - \frac{1}{2}|f''(t_0)|(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3))} (g(t_0) + O(t-t_0)) dt \\ &= \frac{e^{\lambda f(t_0)} g(t_0)}{\sqrt{\lambda |f''(t_0)|}} \int_{-(t_0-a)\sqrt{\lambda |f''(t_0)|}}^{(b-t_0)\sqrt{\lambda |f''(t_0)|}} e^{-\frac{1}{2}u^2 + O((u/\sqrt{\lambda |f''(t_0)|})^3)} \\ &\quad \times \left(1 + O(u/\sqrt{\lambda |f''(t_0)|})\right) du. \end{aligned}$$

Per semplicità, si assume $g(t_0) \neq 0$. Approssimando l'integrale che compare in questa espressione con $\sqrt{2\pi}$, il suo valore asintotico per $\lambda \rightarrow \infty$, otteniamo

$$I(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(t_0)|}} e^{\lambda f(t_0)} g(t_0).$$

Questa è una stima euristica di $I(\lambda)$ in cui \simeq sta a sottolineare che non abbiamo controllo dell'errore commesso. Una valutazione rigorosa può essere ottenuta ripartendo dall'espressione (11.16) ed eseguendo il cambio di variabile $f(t_0) - f(t) = u$ separatamente nei due intervalli $[a, t_0]$ e $(t_0, b]$ dove, per ipotesi, $f(t)$ è strettamente monotona:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^{t_0} e^{\lambda f(t)} g(t) dt + \int_{t_0}^b e^{\lambda f(t)} g(t) dt \\ &= e^{\lambda f(t_0)} \left(- \int_0^{f(t_0)-f(a)} e^{-\lambda u} G_-(u) du + \int_0^{f(t_0)-f(b)} e^{-\lambda u} G_+(u) du \right). \end{aligned}$$

Per comodità sono state introdotte le due nuove funzioni

$$G_{\pm}(u) = \left. \frac{g(t)}{f'(t)} \right|_{t=f_{\pm}^{-1}(f(t_0)-u)}$$

definite in termini di f_{\pm}^{-1} , i due rami monotoni della funzione inversa di f che danno rispettivamente $f_{-}^{-1}(f(t_0) - u) < t_0$ e $f_{+}^{-1}(f(t_0) - u) > t_0$ per $u > 0$. Le funzioni $G_{\pm}(u)$ hanno una divergenza per $u \rightarrow 0^+$ il cui andamento in termini di u può essere stimato come segue. Si sviluppi il rapporto $g(t)/f'(t)$ in potenze di $t - t_0$:

$$\begin{aligned} \frac{g(t)}{f'(t)} &= \frac{g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}g''(t_0)(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3)}{f''(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f'''(t_0)(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3)} \\ &= \frac{\frac{g(t_0)}{f''(t_0)}(t - t_0)^{-1} + \frac{g'(t_0)}{f''(t_0)} + \frac{g''(t_0)}{2f''(t_0)}(t - t_0) + O((t - t_0)^2)}{1 + \frac{f'''(t_0)}{2f''(t_0)}(t - t_0) + O((t - t_0)^2)} \\ &= \frac{g(t_0)}{f''(t_0)}(t - t_0)^{-1} + \left(\frac{g'(t_0)}{f''(t_0)} - \frac{g(t_0)f'''(t_0)}{2(f''(t_0))^2} \right) + O(t - t_0). \end{aligned}$$

A meno di termini $O((t - t_0)^3)$ si ha $u = f(t_0) - f(t) = \frac{1}{2}|f''(t_0)|(t - t_0)^2$ e quindi $t - t_0 = \pm\sqrt{2u/|f''(t_0)|}$, dove il segno \pm dipende dal ramo di f_{\pm}^{-1} usato per l'inversione $t(u)$. Inserendo questo risultato nel precedente sviluppo, si ha

$$G_{\pm}(u) = \mp \frac{g(t_0)}{\sqrt{2|f''(t_0)|}} u^{-1/2} + \left(\frac{g'(t_0)}{f''(t_0)} - \frac{g(t_0)f'''(t_0)}{2(f''(t_0))^2} \right) + O(u^{1/2}).$$

Per il lemma di Watson [2], integrando termine a termine l'espansione di $G_{\pm}(u)$, otteniamo, per $\lambda \rightarrow \infty$, l'espansione dei due integrali in cui è stato scomposto $I(\lambda)$:

$$\begin{aligned} &\int_0^{f(t_0)-f(a)} e^{-\lambda u} G_-(u) du \\ &= - \frac{g(t_0)}{\sqrt{2|f''(t_0)|}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \left(\frac{g'(t_0)}{f''(t_0)} - \frac{g(t_0)f'''(t_0)}{2(f''(t_0))^2} \right) \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-3/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{f(t_0)-f(b)} e^{-\lambda u} G_+(u) du \\ &= + \frac{g(t_0)}{\sqrt{2|f''(t_0)|}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \left(\frac{g'(t_0)}{f''(t_0)} - \frac{g(t_0)f'''(t_0)}{2(f''(t_0))^2} \right) \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-3/2}). \end{aligned}$$

In conclusione,

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|f''(t_0)|}} e^{\lambda f(t_0)} g(t_0) + O(\lambda^{-3/2} e^{\lambda f(t_0)}). \quad (11.17)$$

Il metodo illustrato, noto come metodo di Laplace, si estende facilmente a funzioni f che presentino più massimi in (a, b) . In tal caso, il comportamento asintotico per $\lambda \rightarrow \infty$ di $I(\lambda)$ è dato da una somma di termini tipo (11.17) corrispondenti ai massimi di f . Nel caso di un massimo realizzato in un punto di frontiera, $t_0 = a$ o $t_0 = b$, in base a quanto visto in precedenza, vale la formula leggermente diversa

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda|f''(t_0)|}} e^{\lambda f(t_0)} g(t_0) + O(\lambda^{-1} e^{\lambda f(t_0)}). \quad (11.18)$$

Esempio 11.31. Si ricavi l'approssimazione di Stirling del fattoriale di n per n grande

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}.$$

Il fattoriale è definibile in termini dell'integrale reale

$$n! = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx.$$

Con il cambio di variabile $x = nt$, si ha

$$n! = \int_0^\infty e^{-nt} (nt)^n n dt = n^{n+1} \int_0^\infty e^{n(\ln t - t)} dt.$$

Posto $\lambda = n$, $f(t) = \ln t - t$ e $g(t) = 1$, poiché $f'(t_0) = 0$ ha soluzione $t_0 = 1 \in (0, \infty)$, per $n \rightarrow \infty$ possiamo applicare la formula (11.17). Osservando che $f(t_0) = -1$ e $f''(t_0) = -1$, si ottiene

$$n! \simeq n^{n+1} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} e^{-n}.$$

Torniamo alla determinazione del comportamento asintotico per $\lambda \rightarrow \infty$ della funzione complessa (11.15). Per motivi che saranno chiari tra un momento, il metodo è ora detto del punto di sella o della discesa più ripida. Sia $\gamma(t) : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un cammino che rappresenta la curva γ . Allora

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_\gamma e^{\lambda f(z)} g(z) dz \\ &= \int_a^b e^{\lambda f(\gamma(t))} g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \end{aligned}$$

Se $\operatorname{Re} f(\gamma(t))$ avesse un massimo in $t_0 \in (a, b)$ e, a meno di termini $O((t-t_0)^3)$, risultasse $\operatorname{Im} f(\gamma(t)) = \operatorname{Im} f(\gamma(t_0))$, potremmo stimare $I(\lambda)$ per λ grande applicando il metodo di Laplace. Questa eventualità, tuttavia, non può capitare per una generica curva γ . Sia infatti $z_0 = \gamma(t_0)$ con z_0 punto critico semplice di f , cioè sia $f'(z_0) = 0$ e $f''(z_0) \neq 0$ (queste condizioni devono essere necessariamente soddisfatte se vogliamo avere $(\operatorname{Re} f(\gamma(t_0)))' = (\operatorname{Im} f(\gamma(t_0)))' = 0$ e $(\operatorname{Re} f(\gamma(t_0)))'' > 0$). Il punto z_0 non può essere un massimo locale per la funzione $\operatorname{Re} f(z)$. Tale affermazione segue dal fatto che f è analitica in z_0 dunque $\exists \varepsilon > 0$ tale che f è analitica in $B(z_0, \varepsilon)$. Per il principio del massimo modulo, $\operatorname{Re} f$ assume valore massimo (e minimo) sulla frontiera di tale palla non al suo interno. Il punto critico z_0 è invece un punto di sella per $\operatorname{Re} f(z)$. La dimostrazione è immediata. Poiché f è sviluppabile in serie di Taylor in $B(z_0, \varepsilon)$, posto $z = z_0 + re^{i\theta}$ e $f''(z_0) = |f''(z_0)| e^{i \operatorname{Arg} f''(z_0)}$, per $z \in B(z_0, \varepsilon)$ si ha

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} |f''(z_0)| r^2 \operatorname{cis}(2\theta + \operatorname{Arg} f''(z_0)) + O((z - z_0)^3).$$

Quando $2\theta + \operatorname{Arg} f''(z_0) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a meno di termini $O((z - z_0)^3)$, la parte immaginaria di $f(z)$ è costante mentre la parte reale ha una variazione del secondo ordine che è massima in modulo e di segno positivo o negativo. Si considerino allora i due cammini mutuamente ortogonali

$$\begin{aligned} \gamma_+(t) &= z_0 + (t - t_0) e^{-i\frac{1}{2} \operatorname{Arg} f''(z_0)}, & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon, \\ \gamma_-(t) &= z_0 + (t - t_0) e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arg} f''(z_0))}, & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon, \end{aligned}$$

corrispondenti, rispettivamente, agli angoli θ ottenuti per k pari o dispari. Questi sono i cammini di più ripida salita (γ_+) e più ripida discesa (γ_-) per

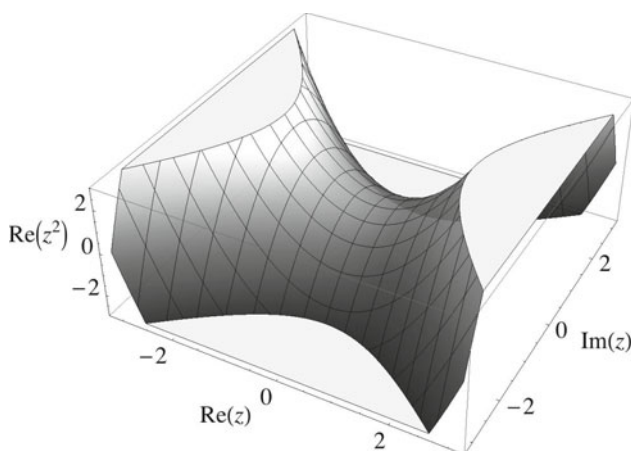


Fig. 11.2. Grafico della funzione $\operatorname{Re}(z^2)$ intorno al punto critico semplice $z = 0$

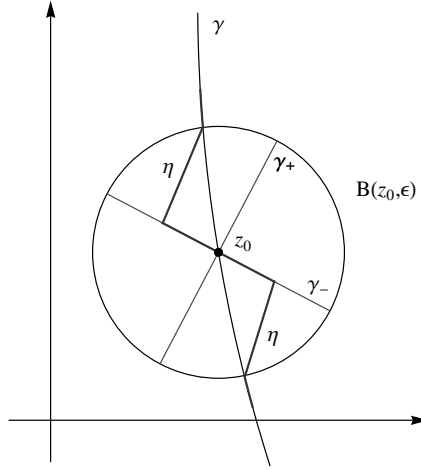


Fig. 11.3. Deformazione del cammino γ nel cammino η coincidente in un intorno di z_0 , punto critico semplice di f , con il cammino γ_- lungo il quale $\operatorname{Re} f(z)$ realizza la discesa più ripida e $\operatorname{Im} f(z)$ è stazionaria

$\operatorname{Re} f(z)$ e di stazionarietà per $\operatorname{Im} f(z)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f(\gamma_{\pm}(t)) &= \operatorname{Re} f(z_0) \pm \frac{1}{2} |f''(z_0)| (t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3), \\ \operatorname{Im} f(\gamma_{\pm}(t)) &= \operatorname{Im} f(z_0) + O((t - t_0)^3).\end{aligned}$$

La curva γ in generale non coincide in un intorno di z_0 con γ_- . Tuttavia, grazie all'analiticità di f e g possiamo deformare γ in un cammino η con questa proprietà senza cambiare il valore dell'integrale che definisce $I(\lambda)$. Sia allora $\eta(t) : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un cammino continuo a tratti che coincide con $\gamma_-(t)$ per $t \in [t_0 - \varepsilon/2, t_0 + \varepsilon/2]$, si raccorda con γ sulla frontiera della palla $B(z_0, \varepsilon)$ e infine coincide con γ al di fuori di $B(z_0, \varepsilon)$. Per il principio di deformazione dei cammini, otteniamo

$$\begin{aligned}I(\lambda) &= \int_{\gamma} e^{\lambda f(z)} g(z) dz \\ &= \int_a^{t_0 - \varepsilon/2} e^{\lambda f(\eta(t))} g(\eta(t)) \eta'(t) dt \\ &\quad + \int_{t_0 - \varepsilon/2}^{t_0 + \varepsilon/2} e^{\lambda f(\gamma_-(t))} g(\gamma_-(t)) \gamma'_-(t) dt \\ &\quad + \int_{t_0 + \varepsilon/2}^b e^{\lambda f(\eta(t))} g(\eta(t)) \eta'(t) dt.\end{aligned}$$

Il metodo di Laplace è ora applicabile. Per λ grande il contributo dominante a $I(\lambda)$ viene dal solo integrale contenente il punto t_0 . Osservando che $\gamma'_-(t_0) = \exp(i(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arg} f''(z_0)))$, si conclude che per $\lambda \rightarrow \infty$

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}} e^{\lambda f(z_0)} g(z_0) e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arg} f''(z_0))} + O(\lambda^{-3/2} e^{\lambda f(t_0)}). \quad (11.19)$$

Nel caso in cui sulla curva γ si abbiano più punti critici semplici di f , il comportamento asintotico per $\lambda \rightarrow \infty$ di $I(\lambda)$ è dato da una somma di termini tipo (11.19). La formula (11.19) può essere estesa, si veda [2], a punti critici di ordine superiore a quello qui considerato, cioè a punti che sono zeri non semplici di f' .

Esercizi

11.1. Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ definita da

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx^2} dx$$

e sia $g : E \mapsto \mathbb{C}$ con $E = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$ definita da

$$g(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}}, \quad \sqrt{z} = |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2} \operatorname{Arg} z}.$$

Dimostrare che g è il prolungamento analitico di f da D ad E .

11.2. Determinare la posizione e il valore del massimo di $|\sinh z|$ nella regione $R = \{z = x + iy : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \pi\}$.

11.3. Determinare il numero di radici, contandone la molteplicità, dell'equazione $z^4 - 5z + 1 = 0$ contenute nella regione $1 \leq |z| < 2$.

11.4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $az^n = \sin z$ contenute nella parte interna del quadrato $Q = \{z = x + iy : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Si consideri n intero e $a \in \mathbb{C}$ con $|a| > e$.

11.5. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $z^8 + 4z^5 - z^2 + 1 = 0$ contenute nella regione $|z| < 1$.

11.6. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $z^8 + 4z^3 - z^2 + 1 = 0$ contenute nella regione $1 \leq |z| < \sqrt{2}$.

11.7. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $az^n = \cos z$ contenute nella parte interna del quadrato $Q = \{z = x + iy : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Si consideri n intero e $a \in \mathbb{C}$ con $|a| > e$.

11.8. Determinare la funzione $v(x, y)$ armonica coniugata alla funzione

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + x$$

nella regione $0 \leq |x + iy| < \infty$.

11.9. Determinare la funzione $v(x, y)$ armonica coniugata alla funzione

$$u(x, y) = x + \sin(x^2 - y^2) \cosh(2xy)$$

nell'intero piano xy .

11.10. Dimostrare che la funzione $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 3x^2y + y^3$$

è armonica in \mathbb{R}^2 . Determinare la funzione $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ armonica coniugata a $u(x, y)$ in \mathbb{R}^2 .

11.11. Dimostrare che la funzione $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y} \cos x$$

è armonica in \mathbb{R}^2 . Determinare la funzione $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ armonica coniugata a $u(x, y)$ in \mathbb{R}^2 .

11.12. La funzione $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

è armonica in \mathbb{R}^2 . Determinare la funzione $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ armonica coniugata a $u(x, y)$ in \mathbb{R}^2 .

11.13. Determinare la funzione $v(x, y)$ armonica coniugata alla funzione

$$u(x, y) = \sin(x^2 - y^2) \cosh(2xy)$$

nell'intero piano xy .

11.14. Sia $u : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione armonica tale che $u(z) \geq 3$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare che u è costante.

11.15. Stabilire in quale dominio la funzione

$$u(x, y) = \ln((x-1)^2 + y^2)$$

è armonica e determinare la funzione $v(x, y)$ armonica coniugata a $u(x, y)$.

Appendice A

Soluzione degli esercizi proposti

Esercizi del Capitolo 1

1.1.

a)

$$\operatorname{Im}(i^{37}) = \operatorname{Im}(i^{1+4 \times 9}) = \operatorname{Im}(i \cdot 1^9) = 1.$$

b)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2}{1-3i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{1-3i} \frac{1+3i}{1+3i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2+6i}{1+9}\right) = \frac{1}{5}.$$

c)

$$\operatorname{Im}\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \operatorname{Im}\left(\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = -8 \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = -4\sqrt{2}.$$

1.2.

a)

$$\begin{aligned} \frac{i^{101} - 3}{1 - 4i} &= \frac{i^{4 \cdot 25 + 1} - 3}{1 - 4i} = \frac{i - 3}{1 - 4i} = \frac{(i - 3)(1 + 4i)}{(1 - 4i)(1 + 4i)} \\ &= \frac{i - 4 - 3 - 12i}{1 + 16} = -\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i. \end{aligned}$$

b)

$$\operatorname{Im} \frac{3i}{2+2i} = \operatorname{Im} \frac{3i(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \operatorname{Im} \frac{6i+6}{4+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

c)

$$\operatorname{Im}\left(e^{i\pi/4} \operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}\right)\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\pi/4} \operatorname{Re}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

C. Presilla: *Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile*, 2^a edizione.

UNITEXT – La Matematica per il 3+2 72

DOI 10.1007/978-88-470-5501-8_A, © Springer-Verlag Italia 2014

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Im} \left(\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\cos^2 \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

1.3.

a) Poiché $17\pi/5 = 4\pi - 3\pi/5$ con $-3\pi/5 \in (-\pi, \pi]$, si ha

$$\operatorname{Arg}(\operatorname{cis}(17\pi/5)) = -3\pi/5.$$

b) Osservando che per $z \neq 1$ vale $1 + z + z^2 + \dots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{19} (1+i)^k &= -1 + \sum_{k=0}^{19} (1+i)^k \\
&= -1 + \frac{1 - (1+i)^{20}}{1 - (1+i)} \\
&= -1 + \frac{1 - (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{20}}{-i} \\
&= -1 + \frac{1 - 2^{10}e^{i5\pi}}{-i} \\
&= -1 + i(1 + 2^{10}) \\
&= -1 + i1025.
\end{aligned}$$

c) Applicando ripetutamente $|zw| = |z||w|$, si ha

$$\begin{aligned}
\left| \frac{ie^{-5i}(1+i)^3}{1+3i} \right| &= \frac{|i| |e^{-5i}| |1+i|^3}{|1+3i|} \\
&= \frac{2^{3/2}}{\sqrt{10}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

1.4. Usando la rappresentazione polare

$$z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

si ottiene immediatamente che la disuguaglianza $\operatorname{Re}(z^n) = \operatorname{Re}(r^n e^{in\theta}) \geq 0$ è equivalente a $\cos(n\theta) \geq 0$, cioè

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq n\theta \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

che, dividendo per n , fornisce

$$\frac{2\pi k - \pi/2}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi k + \pi/2}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dall'arbitrarietà di n risulta $\theta = 0$, cioè $z = r$ reale non negativo.

1.5. Si ponga $z = e^{i\theta}$ con $-\pi < \theta < \pi$ in modo tale che $|z| = 1$ e $z \neq -1$. Vale l'identità

$$z = \frac{z(\bar{z} + 1)}{\bar{z} + 1} = \frac{1 + z}{1 + \bar{z}} = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} = \frac{1 + i \sin \theta / (1 + \cos \theta)}{1 - i \sin \theta / (1 + \cos \theta)}.$$

Posto $t = \sin \theta / (1 + \cos \theta)$, al variare di θ in $(-\pi, \pi)$ si ha $t \in (-\infty, +\infty)$ e quindi l'asserto.

1.6. Si svolga il prodotto

$$\begin{aligned} (1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z) &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \\ &\quad - (z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1}) \\ &= 1 - z^{n+1} \end{aligned}$$

osservando che si cancellano tutte le potenze di z ad eccezione di quelle di grado 0 e $n + 1$. A partire da questa uguaglianza, valida per ogni intero n e per ogni numero complesso z , nel caso in cui $z \neq 1$ è possibile dividere entrambi i membri per $1 - z$ e ottenere

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

1.7. Si ponga $w = z^k$. Se $k = np$ con $p = 1, 2, 3, \dots$, allora $w = 1$ e quindi

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} w^j = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n.$$

Se invece k non è un multiplo intero di n allora $w \neq 1$ e quindi

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} w^j = \frac{1 - w^n}{1 - w} = \frac{1 - 1}{1 - w} = 0.$$

In conclusione

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} z^{jk} = \begin{cases} n & k = np, \quad p = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

1.8.

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(1 + 2\bar{z} + z^2)| &= |\operatorname{Im}(2\bar{z} + z^2)| \\ &\leq |2\bar{z} + z^2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |2\bar{z}| + |z^2| \\
&= 2|z| + |z|^2 \\
&< 2 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

1.9. Risulta

$$|\operatorname{Re}(i + 2\bar{z} + z^2)| = |\operatorname{Re}(2\bar{z} + z^2)| \leq |2\bar{z} + z^2| \leq |2\bar{z}| + |z^2| = 2|z| + |z|^2.$$

Dunque, per avere $|\operatorname{Re}(i + 2\bar{z} + z^2)| < 3$ è sufficiente che sia

$$2|z| + |z|^2 < 3.$$

Questa disuguaglianza è soddisfatta per $-3 < |z| < 1$, pertanto $a = 1$.

1.10. Per $n = 2$ la relazione è la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\
&= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2,
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $\forall w \in \mathbb{C}$ si ha $|\operatorname{Re} w| \leq |w|$. Ragioniamo ora per induzione. Si supponga la relazione valida con $n - 1$ termini

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{n-1}|$$

e dimostriamo che essa è valida anche aggiungendo un ulteriore termine z_n . Posto $z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = w$ e utilizzando la disuguaglianza triangolare risulta

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} + z_n| &= |w + z_n| \\
&\leq |w| + |z_n| \\
&\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{n-1}| + |z_n|.
\end{aligned}$$

1.11. Evidentemente per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale la disuguaglianza

$$(|\operatorname{Re} z| - |\operatorname{Im} z|)^2 \geq 0,$$

ovvero, svolgendo il quadrato,

$$|\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 \geq 2|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|.$$

Sommando a entrambi i membri di questa disuguaglianza la quantità $|z|^2 =$

$|\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$ si giunge a

$$2|z|^2 \geq |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 + 2|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|,$$

da cui, prendendo la radice, si conclude

$$|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|.$$

1.12.

a)

$$\sqrt[3]{-8} = \left(8e^{i(\pi+2n\pi)}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{8} \exp\left(i\frac{\pi}{3} + i\frac{2n\pi}{3}\right), \quad n = 0, 1, 2,$$

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$w_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

b)

$$\sqrt[4]{1-i} = \left(\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)}\right)^{1/2} = \sqrt[4]{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{8} + in\pi\right), \quad n = 0, 1,$$

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right).$$

1.13.

a)

$$\sqrt[2]{i^3} = \sqrt[2]{-i} = \left(e^{i(\frac{3\pi}{2}+2\pi k)}\right)^{1/2} = e^{i(\frac{3\pi}{4}+\pi k)}, \quad k = 0, 1,$$

$$w_0 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$w_1 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\sqrt[3]{8+i} = \left(\sqrt[6]{64+1} e^{i(\theta+2\pi k)}\right)^{1/3} = \sqrt[6]{65} e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi k}{3})}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$w_0 = \sqrt[6]{65} e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[6]{65} \left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[6]{65} e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[6]{65} \left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[6]{65} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt[6]{65} \left(\cos \frac{\theta + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 4\pi}{3} \right),$$

dove $\theta = \arctan \frac{1}{8} \simeq \frac{1}{8} + O\left(\left(\frac{1}{8}\right)^3\right)$.

1.14.

a) Posto $w = z^2$, l'equazione da risolvere è equivalente a

$$w^2 + w + 1 = 0,$$

che ha soluzioni

$$w_{\pm} = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si prendano poi le due radici distinte dell'equazione $z = \sqrt{w_{\pm}}$

$$z_{k\pm} = \sqrt{-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{e^{i(\pi \mp \pi/3)}} = e^{i(\pi \mp \pi/3 + 2\pi k)/2}, \quad k = 0, 1.$$

In conclusione, l'equazione assegnata ha quattro soluzioni distinte:

$$\begin{aligned} z_{0\pm} &= e^{i(\pi/2 \mp \pi/6)} = i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mp i \frac{1}{2} \right) = \pm \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_{1\pm} &= e^{i(\pi/2 \mp \pi/6 + \pi)} = -i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mp i \frac{1}{2} \right) = \mp \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

b) Le soluzioni distinte dell'equazione assegnata sono

$$z_k = \sqrt[3]{1} = \left(e^{i(\pi/2)} \right)^{1/3} = e^{i(\pi/2 + 2\pi k)/3}, \quad k = 0, 1, 2,$$

cioè esplicitamente

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}, \\ z_1 &= e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}, \\ z_2 &= e^{i3\pi/2} = -i. \end{aligned}$$

1.15. Riscritta l'equazione nella forma

$$z(z^4 - (1+i)) = 0,$$

è evidente che essa è risolta da $z = 0$ e

$$z = (1+i)^{1/4} = \left(\sqrt{2} e^{i\pi/4} \right)^{1/4} = 2^{1/8} e^{i(\pi/4 + 2\pi k)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

In conclusione si hanno le 5 soluzioni

$$0, \quad 2^{1/8}e^{i\pi/16}, \quad 2^{1/8}e^{i9\pi/16}, \quad 2^{1/8}e^{i17\pi/16}, \quad 2^{1/8}e^{i25\pi/16}.$$

1.16.

- a) L'equazione da risolvere e la sua complessa coniugata costituiscono un sistema lineare nelle incognite z e \bar{z} :

$$\begin{cases} 3z + i\bar{z} = 4 \\ -iz + 3\bar{z} = 4 \end{cases}.$$

Tale sistema ammette l'unica soluzione

$$z = \frac{12 - 4i}{9 + i^2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}.$$

- b) L'equazione assegnata è equivalente alla sua complessa coniugata

$$z^4 = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4},$$

che ammette le 4 soluzioni distinte

$$z_k = \sqrt[4]{2} e^{i(-\pi/4 + 2\pi k)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

1.17. Per $z \neq 0$ l'equazione data è equivalente a

$$z^5 = 1 + i$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} z &= (1 + i)^{1/5} \\ &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{1/5} \\ &= 2^{1/10}e^{i(\pi/4 + 2\pi k)/5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

L'equazione di partenza, dunque, ammette le cinque soluzioni

$$\sqrt[10]{2}e^{i\pi/20}, \quad \sqrt[10]{2}e^{i9\pi/20}, \quad \sqrt[10]{2}e^{i17\pi/20}, \quad \sqrt[10]{2}e^{i25\pi/20}, \quad \sqrt[10]{2}e^{i33\pi/20}.$$

1.18.

- a) L'equazione ha due soluzioni distinte:

$$z = \frac{-i + \sqrt{-1 - 8}}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2} = -2i, i.$$

- b) Posto $w = \bar{z}^2$, l'equazione da risolvere è equivalente a

$$w^2 + w + 1 = 0,$$

che ha soluzioni

$$w_{\pm} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si prendano poi le due radici distinte dell'equazione $z = \sqrt{w_{\pm}}$

$$\begin{aligned} z_{k\pm} &= \overline{\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2}} \\ &= \overline{(e^{\pm i2\pi/3})^{1/2}} = \overline{e^{(\pm i2\pi/3 + i2\pi k)/2}} = e^{\mp i\pi/3 - i\pi k}, \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

In conclusione, l'equazione assegnata ha quattro soluzioni distinte:

$$\begin{aligned} z_{0\pm} &= e^{\mp i\pi/3} = \frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_{1\pm} &= e^{\mp i\pi/3 - i\pi} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

1.19. L'equazione proposta e la sua complessa coniugata formano il sistema lineare di equazioni

$$\begin{cases} az + b\bar{z} = -c \\ \bar{b}z + \overline{a}\bar{z} = -\bar{c} \end{cases}$$

nelle incognite z e \bar{z} . Il sistema ammette una e una sola soluzione se il determinante associato è non nullo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \overline{a} \end{vmatrix} = |a|^2 - |b|^2 \neq 0.$$

In tal caso, usando la regola di Cramer la soluzione è

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -\bar{c} & \overline{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \overline{a} \end{vmatrix}} = \frac{b\bar{c} - \bar{a}c}{|a|^2 - |b|^2}.$$

1.20. Posto $\theta = \arccos(1/7)$, dalla formula di de Moivre si ha

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

e quindi

$$\cos 3\theta = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta.$$

Usando $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ e $\cos \theta = 1/7$ si ottiene

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 4 \frac{1}{7^3} - 3 \frac{1}{7} = -\frac{143}{343}.$$

1.21. Posto $\theta = \arctan(3)$, dalla formula di de Moivre si ha

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos(4\theta) + i \sin(4\theta)$$

e quindi

$$\cos(4\theta) = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^4) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta.$$

Usando $\cos^2\theta = 1 - \tan^2\theta \cos^2\theta$, per $\tan\theta = 3$ si ha

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{10}, \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{9}{10}.$$

In conclusione

$$\cos(4 \arctan(3)) = \frac{1}{100} - 6 \frac{1}{10} \frac{9}{10} + \frac{81}{100} = \frac{7}{25}.$$

1.22.

- a) L'insieme dei punti la cui distanza da $z_0 = -3 + i$ è minore o uguale a 7 e maggiore di 5, ovvero la regione anulare di raggio interno 5 e raggio esterno 7 centrata in z_0 , inclusa la circonferenza esterna, esclusa quella interna.
- b) L'insieme dei punti la cui distanza da $z_1 = i$ è uguale alla distanza da $z_2 = -1$, ovvero la retta bisettrice dei quadranti secondo e quarto.

1.23. La disuguaglianza proposta è equivalente a

$$|z - 3| < 2|z + 3|,$$

ovvero, posto $z = x + iy$,

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} < 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}.$$

Quadrando e semplificando si ha

$$x^2 + y^2 + 10x + 9 > 0,$$

ovvero $(x+5)^2 + y^2 > 16$, che riscritta come $|z+5| > 4$ rappresenta l'insieme dei punti esterni alla circonferenza di raggio 4 centrata in $z = -5$.

1.24. Posto $w = (z-1)^2$, nel piano $(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$ la regione $0 \leq \operatorname{Arg} w \leq \pi/2$ coincide con il primo quadrante. Poiché la funzione $f(z) = z^2$ trasforma settori circolari di ampiezza θ in settori circolari di ampiezza 2θ , mentre la funzione $f(z) = z - 1$ trasla i domini di una unità nella direzione dell'asse reale negativo, la regione nella quale $0 \leq \operatorname{Arg}((z-1)^2) \leq \pi/2$ è

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z = 1 + re^{i\theta}, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

Esercizi del Capitolo 2

2.1. Occorre dimostrare che d soddisfa tutte le proprietà di una distanza. Le proprietà

$$d(x, y) \geq 0,$$

$$\begin{aligned}d(x, y) &= 0 \text{ se e solo se } x = y, \\d(x, y) &= d(y, x),\end{aligned}$$

con $x, y \in S$ arbitrari, sono verificate per definizione. Per verificare la disuguaglianza triangolare

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

con $x, y, z \in S$ arbitrari, basta analizzare i seguenti cinque casi possibili:

$$\begin{aligned}x = y, x = z, y = z : & \quad 0 \leq 0 + 0 = 0, \\x = y, x \neq z, y \neq z : & \quad 0 \leq 1 + 1 = 2, \\x \neq y, x = z, y \neq z : & \quad 1 \leq 0 + 1 = 1, \\x \neq y, x \neq z, y = z : & \quad 1 \leq 1 + 0 = 1, \\x \neq y, x \neq z, y \neq z : & \quad 1 \leq 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

2.2. Occorre verificare che d soddisfa tutte le proprietà di una distanza. Dalle proprietà del modulo segue immediatamente che $\forall x, y \in S$

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0, \\d(x, y) &= 0 \text{ se e solo se } x = y, \\d(x, y) &= d(y, x).\end{aligned}$$

Per verificare la proprietà triangolare si osservi che la funzione $g(t) = t/(1+t)$ è monotona crescente per $t \in [0, \infty)$, infatti in tale intervallo risulta $g'(t) = 1/(1+t)^2 > 0$. D'altro canto per la disuguaglianza triangolare del modulo si ha $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Pertanto $\forall x, y, z \in S$ risulta

$$\begin{aligned}d(x, y) &= g(|x - y|) \\&\leq g(|x - z| + |z - y|) \\&= \frac{|x - z| + |z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \\&= \frac{|x - z|}{1 + |x - z| + |z - y|} + \frac{|z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \\&\leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|} \\&= d(x, z) + d(z, y).\end{aligned}$$

Con questa distanza il diametro di $S = \mathbb{R}$ è finito, infatti

$$\text{diam } S = \sup_{x, y \in S} \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{1 + t} = 1.$$

2.3. Per dimostrare che (\mathbb{C}, d) è uno spazio metrico occorre mostrare che d è una distanza, ovvero che $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sono soddisfatte le proprietà

- a) $d(z_1, z_2) \geq 0$;
- b) $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$;
- c) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;
- d) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

La prima proprietà è vera in quanto il valore assoluto di un numero reale è sempre non negativo. La seconda segue dal fatto che $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $|\operatorname{Re}(z_1 - z_2)| = |\operatorname{Im}(z_1 - z_2)| = 0$ che a sua volta è vera se e solo se $z_1 = z_2$. La terza discende dal fatto che $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. Per quanto riguarda la proprietà triangolare si ha

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= |\operatorname{Re}(z_1 - z_2)| + |\operatorname{Im}(z_1 - z_2)| \\ &\leq |\operatorname{Re}(z_1 - z_3)| + |\operatorname{Re}(z_3 - z_2)| + |\operatorname{Im}(z_1 - z_3)| + |\operatorname{Im}(z_3 - z_2)| \\ &= (|\operatorname{Re}(z_1 - z_3)| + |\operatorname{Im}(z_1 - z_3)|) + (|\operatorname{Re}(z_3 - z_2)| + |\operatorname{Im}(z_3 - z_2)|) \\ &= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2), \end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$. Per definizione si ha

$$\begin{aligned} B(1 + i3, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : d(z, 1 + i3) < 1\} \\ &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x - 1| + |y - 3| < 1\}. \end{aligned}$$

La precedente disuguaglianza è soddisfatta dai punti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$-1 + |x - 1| < y - 3 < 1 - |x - 1|.$$

Per $x > 1$ deve essere $x - 2 < y - 3 < 2 - x$ cioè $1 + x < y < 5 - x$. Per $x < 1$ deve essere $-x < y - 3 < x$ cioè $3 - x < y < 3 + x$. È facile verificare che tali punti corrispondono al quadrato, bordo escluso, di vertici $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 4)$ e $(0, 3)$.

2.4. Per dimostrare che (\mathbb{C}, d) è uno spazio metrico occorre mostrare che d è una distanza, ovvero che $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sono soddisfatte le proprietà

- a) $d(z_1, z_2) \geq 0$;
- b) $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$;
- c) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;
- d) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

La prima proprietà è vera in quanto il valore assoluto di un numero reale è sempre non negativo. La seconda segue dal fatto che $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $|\operatorname{Re}(z_1 - z_2)| = |\operatorname{Im}(z_1 - z_2)| = 0$ che a sua volta è vera se e solo se $z_1 = z_2$. La terza discende dal fatto che $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. Per

quanto riguarda la proprietà triangolare si ha

$$\begin{aligned}
 d(z_1, z_2) &= \max(|\operatorname{Re}(z_1 - z_2)|, |\operatorname{Im}(z_1 - z_2)|) \\
 &\leq \max(|\operatorname{Re}(z_1 - z_3)| + |\operatorname{Re}(z_3 - z_2)|, |\operatorname{Im}(z_1 - z_3)| + |\operatorname{Im}(z_3 - z_2)|) \\
 &\leq \max(|\operatorname{Re}(z_1 - z_3)|, |\operatorname{Im}(z_1 - z_3)|) \\
 &\quad + \max(|\operatorname{Re}(z_3 - z_2)|, |\operatorname{Im}(z_3 - z_2)|) \\
 &= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2),
 \end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$. Per definizione si ha

$$\begin{aligned}
 \overline{B}(3 + i, 2) &= \{z \in \mathbb{C} : d(z, 3 + i) \leq 2\} \\
 &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \max(|x - 3|, |y - 1|) \leq 2\}.
 \end{aligned}$$

La precedente disuguaglianza è soddisfatta dai punti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $|y - 1| \leq |x - 3| \leq 2$ oppure $|x - 3| \leq |y - 1| \leq 2$. È facile verificare che tali punti corrispondono al quadrato, bordo compreso, ottenuto dall'intersezione delle strisce $|x - 3| \leq 2$ e $|y - 1| \leq 2$, cioè il quadrato di vertici $(1, -1)$, $(5, -1)$, $(5, 3)$ e $(1, 3)$.

2.5.

- Vero. Sia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una infinità numerabile di insiemi aperti e si consideri un generico punto $x \in \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Deve allora esistere almeno un k_0 tale che $x \in A_{k_0}$. Poiché A_{k_0} è aperto per definizione, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset A_{k_0} \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ da cui segue l'asserto.
- Falso. Si consideri in \mathbb{C} l'infinità numerabile di aperti $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ dove $A_k = B(0, 1 + 1/k)$. Evidentemente si ha $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{B}(0, 1)$ che è un chiuso.
- Falso. Si consideri in \mathbb{C} l'infinità numerabile di chiusi $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ dove $A_k = \overline{B}(0, 1 - 1/k)$. Evidentemente si ha $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = B(0, 1)$ che è un aperto.
- Vero. Sia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una infinità numerabile di insiemi chiusi. Per le leggi di de Morgan

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k)^c.$$

In virtù del punto a) il complemento dell'intersezione degli A_k è un aperto e quindi la loro intersezione è un chiuso.

2.6.

- Falso. Si considerino in \mathbb{R} i due insiemi chiusi $A = [0, 1]$ e $B = [1, 2]$. La parte interna della loro unione è $(A \cup B)^\circ = (0, 2)$. D'altro canto si ha $A^\circ = (0, 1)$ e $B^\circ = (1, 2)$ e quindi $A^\circ \cup B^\circ = (0, 2) \setminus \{1\}$.
- Vero. Dimostriamo separatamente le due inclusioni $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ e $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$. Poiché $A \cap B \subset A$ segue $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$. Analogamente $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ e pertanto $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. D'altro canto $A^\circ \cap B^\circ$ è

un aperto con la proprietà $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. Poiché $(A \cap B)^\circ$ rappresenta l'unione di tutti gli aperti contenuti in $A \cap B$, deve essere $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

c) Vero. Infatti usando l'identità $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$ e le leggi di de Morgan si ha

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= (((A \cup B)^c)^\circ)^c = ((A^c \cap B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ)^c \\ &= ((A^c)^\circ)^c \cup ((B^c)^\circ)^c = \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$

d) Falso. Si considerino in \mathbb{R} i due insiemi aperti $A = (0, 1)$ e $B = (1, 2)$. La chiusura della loro intersezione è $\overline{A \cap B} = \emptyset$. D'altro canto si ha $\overline{A} = [0, 1]$ e $\overline{B} = [1, 2]$ e quindi $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

2.7. L'affermazione è vera. Per dimostrarlo facciamo vedere che $\text{diam } A \leq \text{diam } \overline{A}$ e $\text{diam } A \geq \text{diam } \overline{A}$. La prima disuguaglianza segue banalmente dalla definizione di diametro e dal fatto che $A \subset \overline{A}$. Per la seconda, si considerino due arbitrari punti $x, y \in \overline{A}$. Poiché \overline{A} coincide con l'insieme dei punti limite di A , esistono due successioni (x_n) e (y_n) in A convergenti rispettivamente a x e y . Segue che $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $d(x_n, x) < \varepsilon$ e $d(y_n, y) < \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Sia $n \geq N$, per la disuguaglianza triangolare della distanza si ha

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) < \varepsilon + d(x_n, y_n) + \varepsilon,$$

e quindi

$$\text{diam } A = \sup_{w, z \in A} d(w, z) \geq d(x_n, y_n) > d(x, y) - 2\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di $x, y \in \overline{A}$ segue $\text{diam } A \geq \text{diam } \overline{A} - 2\varepsilon$ e dall'arbitrarietà di ε segue $\text{diam } A \geq \text{diam } \overline{A}$.

2.8. Mostriamo che $\overline{A} \subset \overline{B}$. Per definizione

$$\overline{A} = \bigcap_{\text{chiusi } F \supset A} F, \quad \overline{B} = \bigcap_{\text{chiusi } F \supset B} F.$$

Quindi \overline{B} è un chiuso tale che $\overline{B} \supset B \supset A$. In altre parole, \overline{B} è uno dei chiusi F contenente A la cui intersezione forma \overline{A} . Necessariamente allora $\overline{B} \supset \overline{A}$.

Mostriamo che $A^\circ \subset B^\circ$. Per definizione

$$A^\circ = \bigcup_{\text{aperti } G \subset A} G, \quad B^\circ = \bigcup_{\text{aperti } G \subset B} G.$$

Quindi A° è un aperto tale che $A^\circ \subset A \subset B$. In altre parole, A° è uno degli aperti G contenuti in B la cui unione forma B° . Necessariamente allora $A^\circ \subset B^\circ$.

2.9. Poiché $A^\circ \subset A$, è sempre vero che $\overline{A^\circ} \subset \overline{A}$. L'inclusione inversa in generale è falsa. Si consideri lo spazio metrico (\mathbb{R}, d) con d metrica euclidea e si

prenda $A = \{1\}$. Risulta

$$\overline{A} = A, \quad A^\circ = (\overline{A^c})^c = \emptyset,$$

quindi $\overline{A} = \{1\}$ non è contenuto in $\overline{A^\circ} = \emptyset$.

Poiché $A \subset \overline{A}$, è sempre vero che $A^\circ \subset (\overline{A})^\circ$. L'inclusione inversa in generale è falsa. Si consideri lo spazio metrico (\mathbb{R}, d) con d metrica euclidea e si prenda $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Risulta

$$A^\circ = A, \quad \overline{A} = ((A^c)^\circ)^c = \mathbb{R},$$

quindi $(\overline{A})^\circ = \mathbb{R}$ non è contenuto in $A^\circ = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.10.

- A è aperto in (\mathbb{Q}, d) . Infatti $\forall x \in A$, posto $r = \max(|x - \sqrt{2}|, |x - \sqrt{3}|)$, si consideri la palla aperta $B(x, r/2) = \{y \in \mathbb{Q} : d(x, y) < r/2\}$. Evidentemente risulta $B(x, r/2) \subset A$.
- A è chiuso in (\mathbb{Q}, d) . Infatti, poiché $\sqrt{2}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ il complementare di A è $A^c = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{3}\}$. Evidentemente A^c è aperto in (\mathbb{Q}, d) in quanto unione di due insiemi aperti in (\mathbb{Q}, d) .
- A è totalmente limitato. Si consideri infatti lo spazio metrico (A, d) e sia $\varepsilon > 0$ un arbitrario numero reale. Si considerino poi gli n intervalli reali $[y_k, y_{k+1}]$ dove $y_k = \sqrt{2} + k\varepsilon$ con $k = 1, 2, \dots, n$ e $n = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/\varepsilon$. Detto x_k un qualsiasi numero razionale tale che $x_k \in (y_k, y_{k+1})$, e posto $B(x_k, \varepsilon) = \{x \in A : d(x, x_k) < \varepsilon\}$ risulta $A = \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$.
- A non è compatto. Questo segue immediatamente dal fatto che A non è completo. Si consideri infatti il cosiddetto metodo babilonese per calcolare le radici quadrate mediante una successione di numeri razionali. Esplicitamente si consideri la successione monotona decrescente $(x_k)_{k=0}^\infty$ definita ricorsivamente da $x_{k+1} = (x_k + 2/x_k)/2$ con $x_0 = 1$. Tale successione è una successione di Cauchy in A che converge a $\sqrt{2} \notin A$.

Esercizi del Capitolo 3

3.1.

- Si ha

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{6(z^3 - 2)^2}{(z - 1)^4} = \infty,$$

infatti

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{6\left(\left(\frac{1}{z}\right)^3 - 2\right)^2}{\left(\frac{1}{z} - 1\right)^4}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{z} - 1\right)^4}{6\left(\left(\frac{1}{z}\right)^3 - 2\right)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2(1 - z)^4}{6(1 - 2z^3)^2} = 0.$$

- b) Sfruttando l'identità $1 + z + z^2 + \dots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$ con $z \neq 1$, si ha

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{101} - 1}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 + z + z^2 + \dots + z^{100}) = 101.$$

- c) Osservando che $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ si ha

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2 + 1)^2}{(z - i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)^2 (z + i)^2}{(z - i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} (z + i)^2 = -4.$$

3.2.

- a) Risulta

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{z^2 + 1} = \infty.$$

Infatti, posto $f(z) = z/(z^2 + 1)$, per la continuità dei polinomi, si ha

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{i^2 + 1}{i} = 0.$$

- b) Per la continuità della funzione \sqrt{z} quando $-\pi < \text{Arg } z < \pi$ e della funzione identità in \mathbb{C} , risulta

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{\sqrt{z}}{z} = \frac{\sqrt{i}}{i} = \frac{e^{i\pi/4}}{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- c) Per la continuità dei polinomi si ha

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - z^3 - z^2 + z}{z + 1} = \frac{1 - (-i) - (-1) + i}{i + 1} = 2.$$

3.3.

- a) Per la continuità delle funzioni razionali e poiché il limite della parte reale è uguale alla parte reale del limite, risulta

$$\lim_{z \rightarrow 1} \text{Re} \left(\frac{1 + z}{z - 3i} \right) = \text{Re} \left(\frac{1 + 1}{1 - 3i} \right) = \text{Re} \left(\frac{2(1 + 3i)}{1 + 9} \right) = \frac{1}{5}.$$

- b) Il limite non esiste. Infatti, posto $z = 3e^{i\theta}$, il punto $z = -3$ può essere raggiunto per $\theta \rightarrow \pi$ e $\theta \rightarrow -\pi$. Nei due casi si ha

$$\lim_{z \rightarrow -3} |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2} \text{Arg } z} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} 3^{1/2} e^{i\theta/2} = i\sqrt{3},$$

$$\lim_{z \rightarrow -3} |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2} \text{Arg } z} = \lim_{\theta \rightarrow -\pi} 3^{1/2} e^{i\theta/2} = -i\sqrt{3}.$$

- c) Il limite non esiste. Infatti, posto $z = x$, con $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} \right)^3 = 1.$$

Posto invece $z = x + ix$, con $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + ix}{x - ix} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x + ix)^2}{2x^2} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{i}{x} \right)^3 = \infty.$$

3.4.

a) Il limite non esiste. Infatti se si pone $z = x + ix$ si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 + 2ix^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2i}{2} = i,$$

mentre per $z = x - ix$ si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 - 2ix^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2i}{2} = -i.$$

b) Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{z+i} + \sqrt{z-i}$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\sqrt{z+i} - \sqrt{z-i} \right) \sqrt{z} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2i\sqrt{z}}{\sqrt{z+i} + \sqrt{z-i}} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2i}{\sqrt{1+i/z} + \sqrt{1-i/z}} \\ &= i, \end{aligned}$$

avendo utilizzato $\lim_{z \rightarrow \infty} c/z = \lim_{z \rightarrow 0} cz = 0$ e la continuità delle funzioni razionali e di \sqrt{z} .

c) Si ha

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - |z|^2}{z^2 + i} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1 - |w^{-1}|^2}{w^{-2} + i} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w^2 - (w/|w|)^2}{1 + iw^2}$$

e quindi tale limite non esiste in quanto non esiste $\lim_{w \rightarrow 0} (w/|w|)^2$ come dimostrato al punto a).

3.5.

a) Osservando che $z^2 - 2i = 0$ ha soluzioni $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1+i$ e $z = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = -1-i$, mentre $z^2 - 2z + 2 = 0$ ha soluzioni $z = 1+i$ e $z = 1-i$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 - 2i}{z^2 - 2z + 2} &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{(z - 1 - i)(z + 1 + i)}{(z - 1 - i)(z - 1 + i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z + 1 + i}{z - 1 + i} \\ &= \frac{1 + i + 1 + i}{1 + i - 1 + i} \\ &= 1 - i. \end{aligned}$$

b) Il limite non esiste. Infatti per $z = 3e^{i(\pi-\varepsilon)}$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3e^{i(\pi-\varepsilon)}}}{3e^{i(\pi-\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}e^{i(\pi-\varepsilon)/2}}{3e^{i(\pi-\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/2} = -\frac{i}{\sqrt{3}},$$

invece per $z = 3e^{-i(\pi-\varepsilon)}$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3e^{-i(\pi-\varepsilon)}}}{3e^{-i(\pi-\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}e^{-i(\pi-\varepsilon)/2}}{3e^{-i(\pi-\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

c) Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{z+2i} + \sqrt{z+i}$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} (\sqrt{z+2i} - \sqrt{z+i}) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z+2i) - (z+i)}{\sqrt{z+2i} + \sqrt{z+i}} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i}{\sqrt{z+2i} + \sqrt{z+i}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.6. Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ per $0 < |z - z_0| < \delta$. Dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0|$$

per ogni valore di z . Segue immediatamente $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$.

Per mostrare che l'implicazione inversa è falsa, si consideri ad esempio

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i \operatorname{Arg}(z)/2}.$$

Per ogni $z_0 = -t$ con $t > 0$ si ha $\lim_{z \rightarrow -t} |f(z)| = \sqrt{t}$ mentre $\lim_{z \rightarrow -t} f(z)$ non esiste. Si noti che l'esempio non funziona per $z_0 = 0$, cioè $w_0 = 0$. Infatti per una generica funzione f , la proprietà $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$, per la relazione $||f(z)| - 0| = |f(z) - 0|$, implica $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$.

3.7.

a) Poiché $|z_n| = 1/n$ risulta immediatamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n} = 0.$$

b) Poiché $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ si ha

$$|z_n| = \left| \frac{(1+i)^n}{n} \right| = \left| \frac{2^{n/2}}{n} e^{in\pi/4} \right| = \frac{2^{n/2}}{n}.$$

Si osservi che $n/2^{n/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0,$$

ovvero $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

c) Moltiplicando e dividendo z_n per $\sqrt{n+2i} + \sqrt{n+i}$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i\sqrt{n}}{\sqrt{n+2i} + \sqrt{n+i}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{\sqrt{1+2i/n} + \sqrt{1+i/n}} \\ &= \frac{i}{2}.\end{aligned}$$

3.8.

- a) Posto $z = x + iy$, la funzione $\text{Arg } z$ è definita dall'equazione (1.16) nei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ad eccezione del punto $(x, y) = (0, 0)$. Tale funzione presenta una discontinuità di ampiezza 2π nei punti $(x, 0)$ con $x < 0$. Infatti per $x < 0$ si ha $\text{Arg}(x + i0) = \pi$ mentre $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Arg}(x - \varepsilon + i0) = -\pi$. In tutti i punti fuori dal semiasse reale negativo, $\text{Arg } z$ è continua in quanto composizione di funzioni continue.
- b) In quanto funzione razionale, $f(z)$ è continua ovunque in \mathbb{C} ad eccezione degli zeri del polinomio a denominatore. Questi sono le soluzioni di $z^3 + 27 = 0$ ovvero i numeri

$$z_k = (-27)^{1/3} = (27e^{i\pi})^{1/3} = 3e^{i(\pi+2\pi k)/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Si osservi che $z_0 = 3$, $z_1 = -3/2 + i3\sqrt{3}/2$ e $z_2 = -3/2 - i3\sqrt{3}/2$.

- c) Tale funzione risulta non continua nei punti per cui $\text{Arg } z = \pi$, cioè lungo l'asse reale negativo origine esclusa. Infatti, posto $z = -r$ con $r > 0$, si consideri la circonferenza $\gamma(t) = re^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$ passante per il punto $z = \gamma(\pi) = \gamma(-\pi)$. Si ha $f(\gamma(t)) = \sqrt{r}e^{it/2}$ e quindi

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \pi} f(\gamma(t)) &= \sqrt{r}e^{i\pi/2} = i\sqrt{r}, \\ \lim_{t \rightarrow -\pi} f(\gamma(t)) &= \sqrt{r}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{r}.\end{aligned}$$

Ciò basta per concludere che non esiste $\lim_{w \rightarrow z} f(w)$ e quindi f non è continua in z . Nel punto $z = 0$, dove risulta $f(0) = 0$, la funzione è invece continua in quanto

$$|f(w) - f(0)| = \sqrt{|w|} \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0.$$

Anche nel resto dei punti di \mathbb{C} , f risulta continua in quanto composizione di funzioni continue nello stesso dominio.

3.9. Se $f(z)$ fosse uniformemente continua in A , $\forall \varepsilon > 0$ esisterebbe $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall z, w \in A$ con $|z - w| < \delta$ allora $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Mostriamo che esistono coppie di punti $z, w \in A$ per i quali tale proprietà è falsa. Si fissi un $\varepsilon > 0$ e si scelgano z e w reali positivi nella forma $z = \delta$ e $w = \delta/(1 + 2\varepsilon)$ con $0 < \delta \leq 2$ arbitrario. Risulta

$$|z - w| = \delta - \frac{\delta}{1 + 2\varepsilon} = \delta \frac{2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} < \delta,$$

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right| = \frac{1+2\varepsilon}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{2\varepsilon}{\delta} \geq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di δ segue l'asserto.

3.10. In quanto funzione razionale con denominatore mai nullo, f è continua in D . Per dimostrare che f non è uniformemente continua in D facciamo vedere che, scelto $\varepsilon > 0$, esistono coppie di punti $z, w \in D$ distanti tra loro arbitrariamente poco e le cui immagini $f(z), f(w)$ hanno distanza maggiore o uguale a ε . Si considerino due punti del tipo $z = x$ e $w = x + \delta$ con $x \in (0, 3]$ e $\delta > 0$. Determiniamo $\delta(x, \varepsilon)$ in modo tale che

$$|f(z) - f(w)| = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+\delta)^2} = \frac{\delta^2 + 2x\delta}{x^2(\delta^2 + 2x\delta + x^2)} = \varepsilon.$$

Questa condizione è equivalente a

$$(1 - \varepsilon x^2)\delta^2 + 2x(1 - \varepsilon x^2)\delta - \varepsilon x^4 = 0,$$

la cui soluzione positiva è

$$\delta(x, \varepsilon) = x \left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon x^2}{1 - \varepsilon x^2}} - 1 \right).$$

Nel ricavare tale soluzione abbiamo ammesso che ε sia sufficientemente piccolo per cui $1 - \varepsilon x^2 > 0 \forall x \in (0, 3]$, ovvero si è assunto $\varepsilon < 1/9$. Poiché

$$\inf_{x \in (0, 3]} \delta(x, \varepsilon) = 0,$$

segue che $\forall \delta > 0 \exists z, w \in D$ con $|z - w| < \delta$ e $|f(z) - f(w)| \geq \varepsilon$.

Si consideri il dominio $D_r = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq 3\}$ con $0 < r < 3$. La funzione f è continua in D_r e D_r , in quanto sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{C} , è un sottoinsieme compatto di \mathbb{C} . Segue che f è uniformemente continua in D_r .

3.11. Per ipotesi, scelto arbitrariamente $\varepsilon > 0$ esistono $\delta_f(\varepsilon) > 0$ e $\delta_g(\varepsilon) > 0$ tali che

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &< \frac{\varepsilon}{2}, & \forall x, y \in S, & \quad d(x, y) \leq \delta_f, \\ |g(x) - g(y)| &< \frac{\varepsilon}{2}, & \forall x, y \in S, & \quad d(x, y) \leq \delta_g. \end{aligned}$$

Da queste e usando la disuguaglianza triangolare, per la funzione somma $f + g : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$, si ottiene

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &= |(f(x) - f(y)) + (g(y) - g(y))| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, & \forall x, y \in S, & \quad d(x, y) \leq \delta, \end{aligned}$$

dove $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_f(\varepsilon), \delta_g(\varepsilon))$. Quindi $f + g$ è uniformemente continua in S .

3.12. Per ipotesi esistono due reali positivi M_f e M_g tali che

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq M_f d(x, y), & \forall x, y \in S, \\ |g(x) - g(y)| &\leq M_g d(x, y), & \forall x, y \in S. \end{aligned}$$

Da queste e usando la disuguaglianza triangolare, per la funzione somma $f + g : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$, si ottiene

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &= |(f(x) - f(y)) + (g(y) - g(y))| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &= (M_f + M_g)d(x, y), & \forall x, y \in S, \end{aligned}$$

cioè $f + g$ è Lipschitz continua in S .

Esercizi del Capitolo 4

4.1. Per ogni $z \in \overline{B}(0, r)$ si ha

$$|f_n(z) - f(z)| = |z^n - 0| = |z|^n \leq r^n.$$

Poiché $0 < r < 1$, $\forall \varepsilon > 0$ è possibile trovare un intero $N(\varepsilon)$, ad esempio

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln r} \right\rceil,$$

tale che $\forall n > N(\varepsilon)$ si ha $r^n < \varepsilon$ e quindi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in \overline{B}(0, r)$, che è la definizione di uniforme convergenza di (f_n) a f in $\overline{B}(0, r)$.

D'altro canto (f_n) non converge uniformemente a f in $B(0, 1)$ poiché, scelto $0 < \varepsilon < 1$, per ogni intero n è possibile trovare un punto $z \in B(0, 1)$, basta prendere $\varepsilon^{1/n} < |z| < 1$, tale che $|f_n(z) - f(z)| > \varepsilon$.

4.2. Per ipotesi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k = B.$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esistono degli interi $N_a(\varepsilon)$ e $N_b(\varepsilon)$ tali che

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k - A \right| &< \frac{\varepsilon}{2}, & \forall n > N_a, \\ \left| \sum_{k=0}^n b_k - B \right| &< \frac{\varepsilon}{2}, & \forall n > N_b. \end{aligned}$$

Posto allora $N = \max(N_a, N_b)$, $\forall n > N$ si ha

$$\left| \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) - (A + B) \right| \leq \left| \sum_{k=0}^n a_k - A \right| + \left| \sum_{k=0}^n b_k - B \right| < \varepsilon.$$

Questo implica, come richiesto, che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = A + B.$$

4.3.

a) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = \cosh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$$

e si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e^{-n} + e^n}{e^{-(n+1)} + e^{n+1}} = \frac{e^{-2n} + 1}{e^{-2n-1} + e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}.$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/e$.

b) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = n + c^n$, inoltre

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{|n + c^n|}{|n + 1 + c^{n+1}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & |c| \leq 1 \\ |c|^{-1} & |c| > 1 \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \begin{cases} 1 & |c| \leq 1 \\ |c|^{-1} & |c| > 1 \end{cases}.$$

c) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = \begin{cases} 3 & n = \lfloor k \ln k \rfloor, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: \lfloor k \ln k \rfloor \geq m} \left\{ 3^{1/\lfloor k \ln k \rfloor} \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} 3^{1/\lfloor k_m \ln k_m \rfloor} \\ &= 1, \end{aligned}$$

dove k_m è il più piccolo intero k tale che $\lfloor k \ln k \rfloor \geq m$. In conclusione, $R = 1$.

4.4.

a) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = 2^n/n^3$ e si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2^n}{n^3} \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 1/2$.

b) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = i \sinh n = \frac{e^{-n} - e^n}{2i}$$

e si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{|e^{-n} - e^n|}{|e^{-(n+1)} - e^{n+1}|} = \frac{|e^{-2n} - 1|}{|e^{-2n-1} - e|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}.$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 1/e$.

c) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = n^3 4^n$ e si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^3 4^n}{(n+1)^3 4^{n+1}} = \frac{1}{4(1+1/n)^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}.$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 1/4$.

4.5.

a) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = ne^n$ e si ha

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n}{(n+1)e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}.$$

Quindi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{e}.$$

b) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = k! + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

cioè $R = 1$.

c) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = n^n \left(\frac{1+i}{2} \right)^{n^2}$$

e si ha

$$|a_n|^{1/n} = n \left| \frac{1+i}{2} \right|^n = \frac{n}{2^{n/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quindi $R = \infty$.

4.6.

a) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = \cosh(n^2) = \frac{e^{-n^2} + e^{n^2}}{2}$$

e si ha

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \frac{e^{-n^2} + e^{n^2}}{e^{-(n+1)^2} + e^{(n+1)^2}} \\ &= \frac{e^{-2n^2} + 1}{e^{-2n^2-2n-1} + e^{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 0$.

b) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = \frac{n^{3n}}{(3n)!}$$

e si ha

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \frac{n^{3n}}{(3n)!} \frac{(3(n+1))!}{(n+1)^{3(n+1)}} \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \frac{n^{3n}}{(n+1)^{3n}} \\ &= \frac{27(n+1) \left(n + \frac{2}{3}\right) \left(n + \frac{1}{3}\right)}{(n+1)^3} \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{27}{e^3}. \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 27/e^3$.

4.7.

a) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = 3^n/(n+1)^3$. Inoltre

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{3^n}{(n+1)^3} \frac{(n+2)^3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3}.$$

b) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} 1 + n^6 & n = k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: k^2 \geq m} \left\{ (1 + k^{12})^{1/k^2} \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + k_m^{12})^{1/k_m^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

dove k_m è il più piccolo intero k tale che $k^2 \geq m$. In conclusione, $R = 1$.

4.8.

a) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = n^3 e^{3n}$. Inoltre

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \frac{e^{3n}}{e^{3(n+1)}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \frac{1}{e^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^3}.$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{e^3}.$$

b) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = \left(\frac{\ln n}{(1+i)^n} \right)^n.$$

Inoltre

$$|a_n|^{1/n} = \frac{\ln n}{|1+i|^n} = \frac{\ln n}{2^{n/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

e quindi

$$R = \infty.$$

c) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & n = k^3, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$R^{-1} = \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} = \lim_{m \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

cioè $R = 1$.

4.9.

a) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} \frac{(3n+4)!}{(3n+3)! + 4^{n+1}} \\ &= \frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)[1 + 4^n/(3n)!]}{(3n+3)(3n+2)(3n+1) + 4^{n+1}/(3n)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \end{aligned}$$

avendo usato $\ln n! \simeq n \ln n - n$. Si ha quindi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1.$$

b) Il coefficiente n -esimo della serie è

$$a_n = i^{-in} = e^{-in \log i} = e^{-in(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{n\pi/2}.$$

Osservando che $|a_n|^{1/n} = e^{\pi/2}$, si conclude che

$$R = e^{-\pi/2}.$$

c) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} \log(in/2) & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}.$$

Osservando che $|\log(in/2)| = \sqrt{(\ln(n/2))^2 + \pi^2/4}$ e ricordando che $(\ln k)^{1/k}$ per $k \rightarrow \infty$ decresce monotonamente a 1, si ha

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m, \ n \text{ pari}} \left\{ \left(\sqrt{(\ln(n/2))^2 + \pi^2/4} \right)^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(\ln(n_m/2))^2 + \pi^2/4} \right)^{1/n_m} \\ &= 1, \end{aligned}$$

avendo posto $n_m = m$ se m è pari e $n_m = m + 1$ se m è dispari. In conclusione, $R = 1$.

4.10.

a) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & n = 1 + k + k^2 + k^3, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$R^{-1} = \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} = \lim_{m \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

cioè $R = 1$.

b) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = n^2 3^n$ e si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/3$.

4.11. Il raggio di convergenza R della serie b) è

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n n^c|^{1/n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(|a_n|^{1/n} |n^c|^{1/n} \right). \end{aligned}$$

Poiché esiste ed è positivo il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n^c|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n^c n^{\bar{c}}} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\operatorname{Re} c/n} = 1,$$

per le proprietà del \limsup si ha

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} |n^c|^{1/n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}, \end{aligned}$$

che è l'inverso del raggio di convergenza della serie a). Nel caso in cui $a_n = e^{-n}$ si ha

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n/n} = e^{-1},$$

cioè $R = e$.

4.12.

a) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} e^{k!} & n = k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 R^{-1} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: k! \geq m} \left\{ |e^{k!}|^{1/k!} \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} e \\
 &= e.
 \end{aligned}$$

In conclusione, $R = 1/e$.

- b) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} e^k & n = k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 R^{-1} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: k! \geq m} \left\{ |e^k|^{1/k!} \right\} \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

avendo usato il fatto che la successione $(e^{k/k!})$ è monotona decrescente per $k \geq 1$ e tende a 1 per $k \rightarrow \infty$. In conclusione, $R = 1$.

- c) La serie è già scritta in forma canonica e il suo coefficiente n -esimo è

$$a_n = e^{n!}.$$

Poiché

$$|a_n|^{1/n} = e^{n!/n} = e^{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

si ha $R = 0$.

4.13.

- a) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} n^2 \pi^n & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

e quindi

$$R^{-1} = \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m: \text{ } n \text{ pari}} \left\{ n^{2/n} \pi \right\} \\
&= \pi \lim_{m \rightarrow \infty} n_m^{2/n_m} \\
&= \pi,
\end{aligned}$$

dove $n_m = m$ se m è dispari e $n_m = m + 1$ se m è pari. In conclusione, $R = 1/\pi$.

- b) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = n^{2+i} \pi^n = n^2 \pi^n e^{i \ln n}$ e si ha

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n^2 \pi^n}{(n+1)^2 \pi^{n+1}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi}.$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/\pi$.

4.14.

- a) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = n^3 e^{-3n}$. Inoltre

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \frac{e^{3(n+1)}}{e^{3n}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 e^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^3.$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = e^3.$$

- b) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k/k & n = k(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
R^{-1} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: k(k+1) \geq m} \left\{ \left(\frac{1}{k} \right)^{1/(k(k+1))} \right\} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

In conclusione, $R = 1$.

4.15.

a) Per ipotesi sappiamo che $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 1/R_0$, pertanto

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n^3|^{1/n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \left\{ \left(|c_k|^{1/k} \right)^3 \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \left\{ |c_k|^{1/k} \right\} \right)^3 \\
 &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \left\{ |c_k|^{1/k} \right\} \right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{R_0} \right)^3.
 \end{aligned}$$

In conclusione, $R = R_0^3$.

b) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} c_k & n = 3k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: 3k \geq m} \left\{ |c_k|^{1/(3k)} \right\} \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{k \geq j} \left\{ \left(|c_k|^{1/k} \right)^{1/3} \right\} \\
 &= \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{k \geq j} \left\{ |c_k|^{1/k} \right\} \right)^{1/3} \\
 &= \left(\frac{1}{R_0} \right)^{1/3}.
 \end{aligned}$$

In conclusione, $R = R_0^{1/3}$. Alternativamente si ponga $w = z^3$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ ha raggio di convergenza R_0 nel piano w e $R = R_0^{1/3}$ nel piano $z = w^{1/3}$.

4.16.

a) Il coefficiente n -esimo della serie assegnata è $a_n = n + c^n$ e si ha

$$|a_n|^{1/n} = |n + c^n|^{1/n} = \begin{cases} n^{1/n} |1 + c^n/n|^{1/n} & |c| \leq 1 \\ |c| |1 + n/c^n|^{1/n} & |c| > 1 \end{cases}.$$

Osservando che $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$, si ha

$$|a_n|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & |c| \leq 1 \\ |c| & |c| > 1 \end{cases}$$

e quindi il raggio di convergenza vale

$$R = \begin{cases} 1 & |c| \leq 1 \\ 1/|c| & |c| > 1 \end{cases}.$$

b) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} 5^k & n = k!, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la formula di Hadamard fornisce

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} |a_n|^{1/n} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: k! \geq m} 5^{k/k!} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} 5^{1/(k_m - 1)!} \\ &= 5^0, \end{aligned}$$

essendo k_m il più piccolo intero k tale che $k! \geq m$. In conclusione $R = 1$.

4.17.

a) $R = e^{-2}$. Infatti, posto $a_n = ne^{2n - \sqrt{n}}$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{ne^{2n - \sqrt{n}}}{(n+1)e^{2(n+1) - \sqrt{n+1}}} \\ &= e^{-2} \frac{1}{1 + 1/n} e^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2}. \end{aligned}$$

b) $R = 1$. Infatti, posto $a_n = [\ln(1+n)]^4$, si ha

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left[\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} \right]^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

c) $R = 1/4$. Infatti, posto $a_n = n^2(2n)!/(n!)^2$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{n^2(2n)!}{n!n!} \frac{(n+1)!(n+1)!}{(n+1)^2(2n+2)!} \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+10)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4.18. Osservando che $e^{nz} = (e^z)^n$ si riconosce che la serie considerata è una serie geometrica di ragione e^z . La serie quindi converge quando $|e^z| < 1$. Posto $z = x + iy$, la precedente disuguaglianza è equivalente a $e^x < 1$, cioè $x < 0$. In conclusione, la serie considerata converge $\forall z \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} z < 0$.

4.19.

a) Il coefficiente n -esimo della serie è $a_n = c^{n^2}$ e si ha

$$|a_n|^{1/n} = \left| c^{n^2} \right|^{1/n} = |c|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & |c| < 1 \\ 1 & |c| = 1 \\ \infty & |c| > 1 \end{cases}.$$

Pertanto il raggio di convergenza vale

$$R = \begin{cases} \infty & |c| < 1 \\ 1 & |c| = 1 \\ 0 & |c| > 1 \end{cases}.$$

b) Il coefficiente n -esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} c^k & n = k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la formula di Hadamard fornisce

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} |a_n|^{1/n} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: k^2 \geq m} |c^k|^{1/k^2} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k: k^2 \geq m} |c|^{1/k} \\ &= |c|^0. \end{aligned}$$

Escludendo il caso banale $c = 0$, si ha sempre $R = 1$.

4.20. La convergenza della serie proposta è equivalente alla convergenza simultanea delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{z^n}.$$

La prima ha somma $\exp(z)$ e raggio di convergenza infinito. La seconda, con la posizione $w = 1/z$, è la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 w^n$$

che ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Tale serie quindi converge per $|w| < 1$, ovvero per $|z| > 1$. Si conclude che la serie proposta converge per $1 < |z| < \infty$.

4.21. Risulta

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n + a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{1 + b_n},$$

dove

$$b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}.$$

Si osservi che b_n è una frazione il cui numeratore coincide con il termine $n+1$ -esimo della serie $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$. Tale serie è assolutamente convergente e quindi convergente, pertanto il suo termine n -esimo tende a 0 per $n \rightarrow \infty$. Il denominatore di b_n ,

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}),$$

ammette limite per $n \rightarrow \infty$ sempre in virtù della convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$. Concludiamo che $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e quindi esiste e vale 1 il limite

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$$

che rappresenta il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Nel procedimento appena esposto abbiamo fatto uso della proprietà $a_n \neq 0$ per ogni intero n . È possibile ottenere lo stesso risultato anche nell'ipotesi più debole che $a_n \neq 0$ per un numero infinito di valori di n . Se $a_n = 0$ per un numero finito di interi n non cambia nulla. Se invece per una infinità di interi n risulta $a_n = 0$ e per un'altra infinità si ha $a_n \neq 0$, detti $m(n)$ quegli interi per cui $a_{m(n)} \neq 0$, si ha ancora

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{m(n)}|^{1/n} = 1,$$

in quanto, per ipotesi, esiste in \mathbb{C} il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m(n)} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}).$$

Esercizi del Capitolo 5

5.1. Per l'esistenza del limite in ipotesi, posto $\Delta z = (\Delta x, 0)$ con $\Delta x \in \mathbb{R}$, deve esistere

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} \right) \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \\ = u_x(x, y). \end{aligned}$$

Analogamente, posto $\Delta z = (0, \Delta y)$ con $\Delta y \in \mathbb{R}$, deve esistere

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} \right) \\ = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \\ = v_y(x, y). \end{aligned}$$

Per l'unicità del limite segue $u_x(x, y) = v_y(x, y)$.

5.2. Per l'esistenza del limite in ipotesi, posto $\Delta z = (\Delta x, 0)$ con $\Delta x \in \mathbb{R}$, deve esistere

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} \right) \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ = v_x(x, y). \end{aligned}$$

Analogamente, posto $\Delta z = (0, \Delta y)$ con $\Delta y \in \mathbb{R}$, deve esistere

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} \right) \\ = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-u(x, y + \Delta y) + u(x, y)}{\Delta y} \\ = -u_y(x, y). \end{aligned}$$

Per l'unicità del limite segue $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$.

5.3. Poiché $f(z_0) = g(z_0) = 0$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} \\ &= \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},\end{aligned}$$

avendo usato le proprietà

$$\begin{aligned}\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= f'(z_0), \\ \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} &= g'(z_0) \neq 0.\end{aligned}$$

5.4. Posto $z = re^{i\theta}$ risulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(re^{i\theta}) - f(0)}{re^{i\theta} - 0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{re^{i5\theta}}{re^{i\theta}} = e^{i4\theta}.$$

Poiché questo limite assume valori diversi per valori diversi di θ concludiamo che non esiste $f'(0)$. D'altro canto, posto $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}u_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5/|x|^4}{x} = 1, \\ u_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} f(iy)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0, \\ v_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \\ v_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0, y) - v(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} f(iy)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^5/|y|^4}{y} = 1.\end{aligned}$$

Pertanto $u_x(0, 0) = v_y(0, 0)$ e $u_y(0, 0) = -v_x(0, 0)$.

5.5. In quanto composizione di funzioni continue in tutto \mathbb{C} , f è continua in tutto \mathbb{C} . Per studiare la derivabilità, si osservi che, posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x + iy) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2y),$$

pertanto $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = x^3 + 3xy^2$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = y^3 +$

$3x^2y$. Le funzioni u e v sono derivabili in tutto \mathbb{R}^2 con derivate

$$\begin{aligned}u_x(x, y) &= 3x^2 + 3y^2, & u_y(x, y) &= 6xy, \\v_x(x, y) &= 6xy, & v_y(x, y) &= 3y^2 + 3x^2,\end{aligned}$$

continue in tutto \mathbb{R}^2 . Le equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, sono quindi

$$\begin{aligned}3x^2 + 3y^2 &= 3x^2 + 3y^2, \\6xy &= -6xy.\end{aligned}$$

La prima equazione è sempre soddisfatta, la seconda solo se $x = 0$ oppure $y = 0$. Segue che f è derivabile solo nei punti degli assi coordinati. In nessuno di tali punti però la f è analitica. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ la palla $B(z, \varepsilon)$, con z reale o immaginario puro, contiene punti w tali che $\operatorname{Re} w \neq 0$ e $\operatorname{Im} w \neq 0$ in cui la f è non derivabile.

5.6. Dimostriamo che f^* è derivabile in ogni punto z di G^* . Poiché G^* è aperto, $\forall z \in G^* \exists \delta(z) > 0$ tale che $B(z, \delta) \subset G^*$. Allora $\forall w \in B(z, \delta)$ possiamo scrivere il rapporto incrementale di f^* relativamente al punto z come

$$\frac{f^*(w) - f^*(z)}{w - z} = \frac{\overline{f(\overline{w})} - \overline{f(\overline{z})}}{\overline{w - z}} = \overline{\left(\frac{f(\overline{w}) - f(\overline{z})}{\overline{w} - \overline{z}} \right)}.$$

D'altro canto, poiché $z \in G^*$ e $B(z, \delta) \subset G^*$, risulta $\overline{z} \in G$ e $B(\overline{z}, \delta) \subset G$. Per l'analiticità di f in G deve allora esistere il limite

$$\lim_{\overline{w} \rightarrow \overline{z}} \frac{f(\overline{w}) - f(\overline{z})}{\overline{w} - \overline{z}} = f'(\overline{z}).$$

Possiamo pertanto concludere che esiste il limite

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f^*(w) - f^*(z)}{w - z} = \overline{f'(\overline{z})}.$$

5.7.

- a) In quanto parte reale di una funzione continua in \mathbb{C} , f è continua in \mathbb{C} . Per studiare la derivabilità si osservi che $\forall z \in \mathbb{C}$ risulta

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\operatorname{Re}(z + \Delta z) - \operatorname{Re} z}{\Delta z} = \frac{\operatorname{Re} \Delta z}{\Delta z},$$

il cui limite $\Delta z \rightarrow 0$ non esiste, assumendo valori diversi quando, ad esempio, $\operatorname{Re} \Delta z = 0$ oppure $\operatorname{Im} \Delta z = 0$. Pertanto f non è mai derivabile e il suo dominio di analiticità è vuoto.

- b) La funzione è continua in tutto \mathbb{C} in quanto le sue componenti reale e immaginaria,

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy) = e^x \cos y, \\v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy) = e^x \sin y,\end{aligned}$$

sono continue in \mathbb{R}^2 . Tali componenti sono anche derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned}u_x(x, y) &= e^x \cos y, & u_y(x, y) &= -e^x \sin y, \\v_x(x, y) &= e^x \sin y, & v_y(x, y) &= e^x \cos y,\end{aligned}$$

che soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y),$$

in ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pertanto f è derivabile in tutto \mathbb{C} e quindi intera.

- c) La funzione è continua in tutto \mathbb{C} in quanto le sue componenti reale e immaginaria,

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy) = x^2 - y^2, \\v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy) = 3xy,\end{aligned}$$

sono continue in \mathbb{R}^2 . Tali componenti sono anche derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned}u_x(x, y) &= 2x, & u_y(x, y) &= -2y, \\v_x(x, y) &= 3y, & v_y(x, y) &= 3x.\end{aligned}$$

Le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte solo per $x = y = 0$. Pertanto $f(z)$ è derivabile solo nel punto $z = 0$. Segue che il dominio di analiticità di f è vuoto.

5.8. In entrambi i casi a) e b) abbiamo funzioni razionali, quindi analitiche in \mathbb{C} ad eccezione delle singolarità corrispondenti agli zeri del denominatore.

- a) Il denominatore si annulla in $z = 0$ e quando $z^2 + 1 = 0$. Questa equazione ha soluzioni

$$z = \sqrt{-1} = \pm i.$$

- b) Il denominatore si annulla in $z = 2$ e quando $z^2 + 2z + 2 = 0$. Questa equazione di secondo grado ha soluzioni

$$z = -1 + \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i.$$

5.9.

a) Posto $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, si ha

$$u(r, \theta) = r^{-4} \cos(4\theta), \quad v(r, \theta) = -r^{-4} \sin(4\theta).$$

Innanzitutto si osservi che per $r = 0$, cioè $z = 0$, f non è definita né sarebbe possibile definirla in modo da risultare continua. In tale punto quindi f non è derivabile. Per $r > 0$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= -4r^{-5} \cos(4\theta), & u_\theta(r, \theta) &= -4r^{-4} \sin(4\theta), \\ v_r(r, \theta) &= 4r^{-5} \sin(4\theta), & v_\theta(r, \theta) &= -4r^{-4} \cos(4\theta), \end{aligned}$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Pertanto $f(z)$ è derivabile per $z \neq 0$ e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r, \theta) + iv_r(r, \theta)) e^{-i\theta} \\ &= -4r^{-5} (\cos(-4\theta) + i \sin(-4\theta)) e^{-i\theta} \\ &= -4z^{-5}. \end{aligned}$$

Il dominio di analiticità di f è $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Posto $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, si ha

$$u(r, \theta) = \cos(\ln r) e^{-\theta}, \quad v(r, \theta) = \sin(\ln r) e^{-\theta}.$$

Innanzitutto si osservi che per $r = 0$, cioè $z = 0$, f non è definita né sarebbe possibile definirla in modo da risultare continua. In tale punto quindi f non è derivabile. Si osservi poi che per ogni $r > 0$ si ha $u(r, \pi) \neq \lim_{\theta \rightarrow -\pi} u(r, \theta)$ come pure $v(r, \pi) \neq \lim_{\theta \rightarrow -\pi} v(r, \theta)$, pertanto lungo il semiasse reale negativo, origine esclusa, f risulta non continua e quindi non derivabile. Per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \sin(\ln r) e^{-\theta}, & u_\theta(r, \theta) &= -\cos(\ln r) e^{-\theta}, \\ v_r(r, \theta) &= \frac{1}{r} \cos(\ln r) e^{-\theta}, & v_\theta(r, \theta) &= -\sin(\ln r) e^{-\theta}, \end{aligned}$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Nello stesso dominio $f(z)$ risulta quindi derivabile e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r, \theta) + iv_r(r, \theta)) e^{-i\theta} \\ &= \frac{1}{r} (-\sin(\ln r) e^{-\theta} + i \cos(\ln r) e^{-\theta}) e^{-i\theta} \\ &= \frac{i}{z} f(z), \end{aligned}$$

in accordo con il fatto che $f(z) = e^{i \log z} = z^i$. Il dominio di analiticità di f è $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$.

5.10.

a) Posto $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, si ha

$$u(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2), \quad v(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2).$$

Si osservi che per ogni $r > 0$ si ha $v(r, \pi) \neq \lim_{\theta \rightarrow -\pi} v(r, \theta)$, pertanto lungo il semiasse reale negativo, origine esclusa, f risulta non continua e quindi non derivabile. In $z = 0$ f è continua ma non derivabile, come risulta facilmente dalle rispettive definizioni. Per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos(\theta/2), & u_\theta(r, \theta) &= -\frac{\sqrt{r}}{2} \sin(\theta/2), \\ v_r(r, \theta) &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin(\theta/2), & v_\theta(r, \theta) &= \frac{\sqrt{r}}{2} \cos(\theta/2), \end{aligned}$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Nello stesso dominio $f(z)$ risulta quindi derivabile e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r, \theta) + iv_r(r, \theta)) e^{-i\theta} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}} (\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)) e^{-i\theta} \\ &= \frac{1}{2f(z)}. \end{aligned}$$

Il dominio di analiticità di f è $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$.

b) Posto $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, si ha

$$u(r, \theta) = (\ln r)^2 - \theta^2, \quad v(r, \theta) = 2\theta \ln r.$$

Innanzitutto si osservi che per $r = 0$, cioè $z = 0$, f non è definita né sarebbe possibile definirla in modo da risultare continua. In tale punto quindi f non è derivabile. Si osservi poi che per ogni $r > 0$ si ha $v(r, \pi) \neq \lim_{\theta \rightarrow -\pi} v(r, \theta)$, pertanto lungo il semiasse reale negativo, origine esclusa, f risulta non continua e quindi non derivabile. Per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \frac{2}{r} \ln r, & u_\theta(r, \theta) &= -2\theta, \\ v_r(r, \theta) &= \frac{2\theta}{r}, & v_\theta(r, \theta) &= 2 \ln r, \end{aligned}$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Nello

stesso dominio $f(z)$ risulta quindi derivabile e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r, \theta) + i v_r(r, \theta)) e^{-i\theta} \\ &= \left(\frac{2}{r} \ln r + i \frac{2\theta}{r} \right) e^{-i\theta} \\ &= \frac{2}{z} g(z), \quad g(z) = \ln r + i\theta. \end{aligned}$$

in accordo con il fatto che $f(z) = g(z)^2 = (\log z)^2$. Il dominio di analiticità di f è $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$.

5.11. Posto $z = x + iy$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, poiché f è analitica in D , in D sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. D'altro canto posto $\bar{f}(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \overline{u(x, y) + iv(x, y)}$, deve essere $U = u$ e $V = -v$. Pertanto $U_x = -V_y$ e $U_y = V_x \forall z \in D$, cioè \bar{f} è irrotazionale e solenoidale in D .

5.12.

- a) La funzione è continua in tutto \mathbb{C} in quanto le sue componenti reale e immaginaria,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy) = y, \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy) = 0, \end{aligned}$$

sono continue in \mathbb{R}^2 . Tali componenti sono anche derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 0, & u_y(x, y) &= 1, \\ v_x(x, y) &= 0, & v_y(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

ma non soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann in alcun punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pertanto f non è mai derivabile e il suo dominio di analiticità è vuoto.

- b) La funzione è continua in tutto \mathbb{C} in quanto le sue componenti reale e immaginaria,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy) = e^x \cos y, \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy) = -e^x \sin y, \end{aligned}$$

sono continue in \mathbb{R}^2 . Tali componenti sono anche derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos y, & u_y(x, y) &= -e^x \sin y, \\ v_x(x, y) &= -e^x \sin y, & v_y(x, y) &= -e^x \cos y, \end{aligned}$$

ma non soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann in alcun punto $(x, y) \in$

\mathbb{R}^2 . Infatti, essendo $e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, risulta $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ e $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ solo se $\sin y = \cos y = 0$, che non può mai verificarsi. Pertanto f non è mai derivabile e il suo dominio di analiticità è vuoto.

- c) La funzione è continua in tutto \mathbb{C} in quanto le sue componenti reale e immaginaria,

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy) = x^2 - y^2, \\v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy) = 2xy,\end{aligned}$$

sono continue in \mathbb{R}^2 . Tali componenti sono anche derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned}u_x(x, y) &= 2x, & u_y(x, y) &= -2y, \\v_x(x, y) &= 2y, & v_y(x, y) &= 2x.\end{aligned}$$

Le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pertanto $f(z)$ è derivabile in tutto \mathbb{C} e \mathbb{C} è il suo dominio di analiticità (f è intera).

Esercizi del Capitolo 6

6.1.

- a) Usando la definizione di $\cosh z$ si ha

$$\begin{aligned}\cosh(2 + i) &= \frac{e^{2+i} + e^{-2-i}}{2} \\&= \frac{e^2(\cos 1 + i \sin 1) + e^{-2}(\cos 1 - i \sin 1)}{2} \\&= \cosh 2 \cos 1 + i \sinh 2 \sin 1.\end{aligned}$$

- b) Usando $\cotan z = \cos z / \sin z$ e la definizione di $\cos z$ e $\sin z$, si ha

$$\begin{aligned}\cotan\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4} + \ln 2} + e^{-i\frac{\pi}{4} - \ln 2}}{2} \frac{2i}{e^{i\frac{\pi}{4} + \ln 2} - e^{-i\frac{\pi}{4} - \ln 2}} \\&= i \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)} \\&= i \frac{\frac{5}{2\sqrt{2}} + i\frac{3}{2\sqrt{2}}}{\frac{3}{2\sqrt{2}} + i\frac{5}{2\sqrt{2}}} \\&= \frac{-3 + 5i}{3 + 5i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-3 + 5i)(3 - 5i)}{9 + 25} \\
&= \frac{8}{17} + i\frac{15}{17}.
\end{aligned}$$

6.2. Posto $w = \arctan z$, si ha $\tan w = z$ ovvero

$$iz = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}},$$

che risolta rispetto a e^{2iw} fornisce

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

e quindi

$$w = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\arctan(2 + i) &= \frac{i}{2} \log \frac{i + 2 + i}{i - 2 - i} \\
&= \frac{i}{2} \log(-1 - i) \\
&= \frac{i}{2} \log\left(\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}\right) \\
&= \frac{i}{2} \left(\ln \sqrt{2} - i\frac{3}{4}\pi\right) \\
&= \frac{3}{8}\pi + \frac{i}{4} \ln 2.
\end{aligned}$$

6.3. Posto $w = \arctan z$, si ha $\tan w = z$ ovvero

$$iz = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}},$$

che risolta rispetto a e^{2iw} fornisce

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

e quindi

$$w = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\arctan(1 + 2i) &= -\frac{i}{2} \log \frac{1 + i - 2}{1 - i + 2} \\
&= -\frac{i}{2} \log \frac{-2 + i}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{2} \log \left(\frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\varphi} \right) \\
&= -\frac{i}{2} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{5}} + i\varphi \right) \\
&= \frac{\varphi}{2} + \frac{i}{4} \ln 5,
\end{aligned}$$

dove φ è definito da $\cos \varphi = -2/\sqrt{5}$ e $\sin \varphi = 1/\sqrt{5}$. In conclusione

$$\operatorname{Im}(\arctan(1 + 2i)) = \frac{1}{4} \ln 5.$$

6.4. Usando $z^w = \exp(w \operatorname{Log} z)$ e $\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ con $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, si ha

$$\begin{aligned}
(4 - 4i)^{1+i} &= \exp[(1+i) \operatorname{Log}(4 - 4i)] \\
&= \exp[(1+i) (\ln |4 - 4i| + i \operatorname{Arg}(4 - 4i))] \\
&= \exp \left[(1+i) \left(\ln \sqrt{32} - i \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
&= \exp \left[\left(\ln \sqrt{32} + \frac{\pi}{4} \right) + i \left(\ln \sqrt{32} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
&= \sqrt{32} e^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos \left(\ln \sqrt{32} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\ln \sqrt{32} - \frac{\pi}{4} \right) \right].
\end{aligned}$$

6.5. Usando $z^w = \exp(w \operatorname{Log} z)$ e $\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ con $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, si ha

$$\begin{aligned}
(1+i)^{2-i} &= \exp[(2-i) \operatorname{Log}(1+i)] \\
&= \exp \left[(2-i) \operatorname{Log} \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] \\
&= \exp \left[(2-i) \left(\frac{1}{2} \log 2 + i \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
&= \exp \left[\ln 2 + \frac{\pi}{4} + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \right]
\end{aligned}$$

e quindi

$$|(1+i)^{2-i}| = \exp \left(\ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) = 2e^{\frac{\pi}{4}}.$$

6.6. Usando $z^w = \exp(w \operatorname{Log} z)$ con il valore principale del logaritmo definito da $\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$, dove $|z| > 0$ e $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^\pi}{\sqrt{2}} + i \frac{e^\pi}{\sqrt{2}} \right)^{i+1} &= \exp \left[(i+1) \operatorname{Log} \left(\frac{e^\pi}{\sqrt{2}} + i \frac{e^\pi}{\sqrt{2}} \right) \right] \\
&= \exp \left[(i+1) \operatorname{Log} \left(e^\pi e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] \\
&= \exp \left[(i+1) \left(\ln e^\pi + i \frac{\pi}{4} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[(i+1) \left(\pi + i \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
&= \exp \left[\pi - \frac{\pi}{4} + i \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
&= e^{\frac{3\pi}{4} + i \frac{5\pi}{4}}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{e^{\pi}}{\sqrt{2}} + i \frac{e^{\pi}}{\sqrt{2}} \right)^{i+1} = -\frac{3\pi}{4}.$$

6.7. Posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2} (e^{ix-y} + e^{-ix+y}) \\
&= \frac{1}{2} ((\cos x + i \sin x)e^{-y} + (\cos x - i \sin x)e^y) \\
&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.
\end{aligned}$$

Occorre dunque risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = a \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases}.$$

La soluzione $y = 0$ della seconda equazione è incompatibile con la prima equazione. La soluzione $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, della seconda equazione sostituita nella prima fornisce

$$(-1)^k \cosh y = a.$$

Questa equazione ammette soluzione solo per k pari e con y che soddisfa $\cosh y = a$, ovvero

$$e^{2y} - 2ae^y + 1 = 0,$$

che fornisce

$$e^y = a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned}
z_k &= 2\pi k + i \ln \left(a \pm \sqrt{a^2 - 1} \right) \\
&= 2\pi k \pm i \ln \left(a + \sqrt{a^2 - 1} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

6.8. L'equazione da risolvere è

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2},$$

cioè

$$(e^z)^2 - e^z + 1 = 0,$$

che fornisce

$$e^z = \frac{1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i \frac{\pi}{3}} = e^{\pm i \frac{\pi}{3} + i 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$z_k = i\pi \left(2k \pm \frac{1}{3} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6.9. Usando $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ e $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ e posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione da risolvere è

$$e^{i(2x+i2y)} - e^{-i(2x+i2y)} = 8i.$$

Da questa, prendendo la parte reale e quella immaginaria, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \cos(2x) \sinh(2y) = 0 \\ \sin(2x) \cosh(2y) = 4 \end{cases}.$$

La soluzione $y = 0$ della prima equazione non è compatibile con la seconda equazione. Deve perciò essere $\cos(2x) = 0$ ovvero $2x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Questa soluzione è compatibile con la seconda equazione solo per n pari. In questo caso la seconda equazione fornisce $\cosh(2y) = 4$ ovvero

$$(e^{2y})^2 - 8e^{2y} + 1 = 0,$$

che risolta fornisce

$$e^{2y} = 4 \pm \sqrt{15}.$$

In conclusione

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{2} \ln(4 \pm \sqrt{15}) = \pm \frac{1}{2} \ln(4 + \sqrt{15}) \end{cases}.$$

Alternativamente, si risolva $\sin(2z) = 4$. Posto $w = e^{i2z}$ si ha

$$w^2 - 8iw - 1 = 0,$$

che fornisce

$$e^{i2z} = i(4 \pm \sqrt{15}).$$

Prendendo il logaritmo, riotteniamo

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i} \left[\ln(4 \pm \sqrt{15}) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right] \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) \pm \frac{i}{2} \ln(4 + \sqrt{15}), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

6.10. Si ha

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} + e^z = 2,$$

ovvero

$$3(e^z)^2 - 4e^z + 1 = 0,$$

che ha soluzioni

$$e^z = \frac{2 \pm 1}{3}.$$

Dalla soluzione $e^z = 1$ si ha

$$z = \log 1 = i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dalla soluzione $e^z = 1/3$ si ottiene invece

$$z = \log \frac{1}{3} = -\ln 3 + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6.11. Posto $w = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 0$$

sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 0 \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases},$$

ovvero $y = 0$ e $x = \pm(2k+1)\pi/2$, con $k \in \mathbb{N}$. Pertanto $\cos(3z^2) = 0$ ha soluzioni

$$3z^2 = \pm \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k \in \mathbb{N},$$

cioè

$$z = \sqrt{\pm \frac{\pi}{6}(2k+1)} = \begin{cases} \pm \sqrt{(2k+1)\pi/6} \\ \pm i \sqrt{(2k+1)\pi/6} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

6.12. Si ha

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i\pi,$$

ovvero

$$e^{2z} + 2i\pi e^z - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$e^z = -i \left(\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 1} \right).$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione $\sinh z = -i\pi$ sono

$$\begin{aligned} z &= \log \left(-i \left(\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 1} \right) \right) \\ &= \ln \left(\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 1} \right) + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

6.13. Si ha

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = a,$$

ovvero

$$e^{2iz} - 2iae^{iz} - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$e^{iz} = ia \pm \sqrt{1 - a^2}.$$

Si noti che per $-1 \leq a \leq 1$ il radicando è non negativo. Pertanto le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned} iz &= \log \left(ia \pm \sqrt{1 - a^2} \right) \\ &= \ln \sqrt{a^2 + (1 - a^2)} + i \left(\arcsin \left(\frac{a}{a^2 + (1 - a^2)} \right) + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ovvero

$$z = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6.14. Si ha

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = a,$$

ovvero

$$e^{2z} - 2ae^z + 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$e^z = a \pm i\sqrt{1 - a^2}.$$

Le soluzioni cercate sono pertanto

$$\begin{aligned} z &= \log \left(a \pm i\sqrt{1 - a^2} \right) \\ &= \ln \sqrt{a^2 + (1 - a^2)} + i(\arccos a + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

dove $\arccos a$ indica il valore principale compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. In conclusione si ha

$$z = i(\arccos a + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

che per $a \in (0, 1)$ corrisponde a $z = iy$ con $-\pi/2 + 2\pi k < y < \pi/2 + 2\pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$. Alternativamente, si ponga $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. L'equazione da risolvere è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \cosh x \cos y = a \\ \sinh x \sin y = 0 \end{cases}.$$

La soluzione $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, della seconda equazione è incompatibile con la prima equazione. La soluzione $x = 0$ della seconda equazione sostituita nella prima equazione fornisce

$$\cos y = a,$$

che per $a \in (0, 1)$ ha soluzione $y = \arccos a \in (-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.15. L'equazione da risolvere è

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i,$$

ovvero

$$(e^z)^2 - 2ie^z - 1 = 0,$$

che fornisce

$$e^z = i + \sqrt{i^2 + 1} = i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$z_k = i\pi \frac{4k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6.16. L'equazione assegnata

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 = -4$$

è equivalente a

$$e^{iz} - e^{-iz} = \sqrt{-4(2i)^2} = \pm 4,$$

ovvero

$$e^{2iz} \pm 4e^{iz} - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono $e^{iz} = \pm 2 \pm \sqrt{5}$. Di queste quattro soluzioni, tutte reali, due sono positive

$$e^{iz} = \sqrt{5} \pm 2 = (\sqrt{5} \pm 2)e^{i0},$$

mentre le altre due sono negative

$$e^{iz} = -\sqrt{5} \mp 2 = (\sqrt{5} \pm 2)e^{i\pi}.$$

Prendendo il logaritmo, nei due casi si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} iz &= \log(\sqrt{5} \pm 2) = \ln(\sqrt{5} \pm 2) + i2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ iz &= \log(-\sqrt{5} \mp 2) = \ln(\sqrt{5} \pm 2) + i(\pi + 2\pi k), & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$z_k = \pi k - i \ln(\sqrt{5} \pm 2), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si tratta di punti isolati che giacciono sulle rette $y = -\ln(\sqrt{5} + 2) < 0$ e $y = -\ln(\sqrt{5} - 2) > 0$ parallele all'asse reale. Il loro unico punto limite è il punto all'infinito.

6.17. Prendendo il logaritmo di entrambi i membri dell'equazione si ha

$$z^2 = \log(-1) = \log(1 e^{i\pi}) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = (2k + 1)i\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Estraendo la radice quadrata di questa espressione, per $k \geq 0$ segue

$$z = \sqrt{(2k + 1)\pi e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{(2k + 1)\pi} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2})}, \quad n = 0, 1,$$

mentre per $k < 0$ si ha

$$z = \sqrt{|2k + 1|\pi e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt{|2k + 1|\pi} e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2})}, \quad n = 0, 1.$$

Ponendo $k = -m - 1$, con $m = 0, 1, 2, \dots$, è possibile riscrivere il secondo sistema di soluzioni come

$$z = \sqrt{(2m + 1)\pi} e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2})}, \quad n = 0, 1.$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$z_{1,k}^{\pm} = \pm(1 + i)\sqrt{\frac{2k + 1}{2}} \pi, \quad z_{2,k}^{\pm} = \pm(1 - i)\sqrt{\frac{2k + 1}{2}} \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

6.18.

a) Usando la formula (1.19) si ha

$$z = \sqrt[4]{i} = \left(e^{i(\pi/2)}\right)^{1/4} = e^{i(\pi/2+2\pi k)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

che corrisponde alle 4 soluzioni

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\pi/8}, \\ z_1 &= e^{i5\pi/8}, \\ z_2 &= e^{i9\pi/8} = e^{-i7\pi/8}, \\ z_3 &= e^{i13\pi/8} = e^{-i3\pi/8}. \end{aligned}$$

b) Usando $z^w = \exp(w \log z)$, si ha

$$\begin{aligned} z &= 4^{1/i} \\ &= 4^{-i} \\ &= \exp[-i \log(4e^{i0})] \\ &= \exp[-i(\ln 4 + i2\pi k)] \\ &= e^{2\pi k} e^{-i \ln 4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

6.19. Poiché $\cotan z = \cos z / \sin z$, l'equazione proposta equivale a

$$\cos(\sqrt{z}) = 0.$$

Posto $w = \sqrt{z}$, si ha

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 0,$$

ovvero

$$(e^{iw})^2 = -1,$$

che fornisce

$$iw = \log(\pm i) = \log\left(1e^{\pm i\pi/2}\right) = \ln 1 + i(\pm\pi/2 + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In conclusione, si ha

$$\sqrt{z} = (2n+1)\pi/2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

pertanto le radici cercate sono

$$z = ((2n+1)\pi/2)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6.20.

a) Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti z che soddisfano

$$(2-z)^2 = -t, \quad t \geq 0,$$

ovvero nei punti $z(t) = 2 \pm i\sqrt{t}$, $t \geq 0$, cioè lungo l'asse $\operatorname{Re} z = 2$.

b) La funzione z^z è definita da

$$z^z = \exp(z \log z).$$

Poiché la funzione esponenziale è analitica ovunque, il dominio di analiticità del ramo principale di z^z coincide con quello del ramo principale di $\log z$, ovvero l'intero piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine.

6.21.

- a) La funzione
- $z^{\sinh z}$
- è definita da

$$z^{\sinh z} = \exp(\sinh z \log z).$$

Poiché la composizione di funzioni analitiche è analitica e le funzioni \exp e \sinh sono intere, il ramo principale di $z^{\sinh z}$ è una funzione analitica nel dominio in cui lo è il ramo principale di $\log z$, ovvero nell'intero piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine.

- b) Ragionando come al punto a), il dominio di analiticità di
- $\log(\cos z)$
- coincide con tutto il piano complesso ad eccezione dei punti
- z
- che soddisfano

$$\cos z = -t, \quad t \geq 0.$$

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, questa condizione equivale a

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = -t, & t \geq 0 \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione del sistema è soddisfatta quando $\sin x = 0$ oppure $\sinh y = 0$. Nel primo caso $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Le soluzioni con k pari sono incompatibili con la prima equazione mentre per k dispari tale equazione si riduce a $\cosh y = t$, con $t \geq 0$. Si ha dunque

$$z = (2k+1)\pi + iy, \quad -\infty < y < \infty, \quad k \in \mathbb{Z},$$

che sono gli assi immaginari $\operatorname{Re} z = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. L'altra soluzione $\sinh y = 0$, cioè $y = 0$, sostituita nella prima equazione da $x = \arccos(-t)$, con $t \geq 0$. Si ha dunque

$$z = x, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6.22.

- a) Le funzioni
- $\cosh z$
- ,
- e^z
- e
- $\sinh z$
- sono intere e la composizione di funzioni intere è intera. Dunque

$$\cosh(e^{\sinh z})$$

è analitica nell'intero piano complesso.

- b) Il ramo principale di
- $\log z$
- è una funzione analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti
- z
- che soddisfano

$$3 + z^2 = -t, \quad t \geq 0,$$

ovvero dei punti

$$z(t) = \sqrt{-3-t} = \pm i\sqrt{3+t}, \quad t \geq 0.$$

6.23.

- a) Osservando che la funzione $\exp z$ è intera e la funzione razionale $1/(1+z^2)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti singolari $z = \pm i$, per la derivabilità delle funzioni composte, la funzione $\exp(1/(1+z^2))$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti $z = \pm i$.
- b) Il ramo principale della funzione $\log z$ è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Pertanto il ramo principale della funzione $\log(z^3)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti z tali che

$$z^3 = -t, \quad t \geq 0,$$

cioè

$$z(t) = (-t)^{1/3} = \sqrt[3]{t}e^{i(\pi+2\pi k)/3}, \quad k = 0, 1, 2, \quad t \geq 0,$$

ovvero nell'origine e lungo i tre semiasse uscenti dall'origine agli angoli $\pm\pi/3$ e π .

6.24.

- a) Osservando che

$$(1+z^2)^z = \exp(z \log(1+z^2)),$$

poiché la funzione $\exp z$ è intera e il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa, la funzione $(1+z^2)^z$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti z tali che

$$1+z^2 = -t, \quad t \geq 0,$$

cioè

$$z(t) = (-1-t)^{1/2} = \pm i\sqrt{1+t}, \quad t \geq 0,$$

che sono tutti i punti dell'asse immaginario ad eccezione dell'intervallo $(-1, 1)$ dello stesso asse.

- b) Osservando che le funzioni $\sinh z$ e $\sin z$ sono intere e la funzione razionale $1/(z^2+9)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti singolari $z = \pm 3i$, per la derivabilità delle funzioni composte, la funzione $\sinh(\sin(z))/(z^2+9)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti $z = \pm 3i$.

6.25.

- a) Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Pertanto la funzione in esame è analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dei punti tali che

$$z^4 = -t, \quad t \in [0, \infty),$$

ovvero

$$z(t) = (te^{i\pi})^{1/4} = t^{1/4}e^{i(\pi+2\pi k)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

che rappresentano rispettivamente le bisettrici dei quadranti 1, 2, 3, 4. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \log(z^4) = \frac{4}{z}.$$

- b) La funzione $\sin z$ è intera mentre il ramo principale di $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2} \log z)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Pertanto la funzione in esame è analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin \sqrt{z} = \frac{\cos \sqrt{z}}{2\sqrt{z}}.$$

6.26.

- a) La funzione $\sin(z^n)$ è intera essendo composizione di funzioni intere. In ogni punto $z \in \mathbb{C}$ la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin(z^n) = \cos(z^n) n z^{n-1}.$$

- b) Se n è multiplo di m si ricade nel caso a). Altrimenti la funzione $\sin(z^{n/m}) = \sin(\exp((n/m) \log z))$ è polidroma con m rami distinti. Il ramo principale, corrispondente al ramo principale di $\log z$, è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin(z^{n/m}) = \cos(z^{n/m}) (n/m) z^{n/m-1}.$$

- c) La funzione $\sin(z^c) = \sin(\exp(c \log z))$ è polidroma con infiniti rami distinti. Il ramo principale, corrispondente al ramo principale di $\log z$, è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin(z^c) = \cos(z^c) c z^{c-1}.$$

6.27. Posto $\arccos z = w$, si ha $z = \cos w = (e^{iw} + e^{-iw})/2$ ovvero

$$(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$

la cui soluzione è convenzionalmente scritta come $e^{iw} = z + i\sqrt{1-z^2}$. Con tale scelta infatti, assumendo per la radice il ramo principale, questa soluzione, e quindi la funzione $\arccos z$, risultano sviluppabili in serie di Taylor intorno a

$z = 0$ (vedi Esercizio 6.28). Con la scelta $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$, questo sarebbe possibile solo per il ramo secondario della radice. In conclusione,

$$\arccos z = -i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right).$$

Il ramo principale di tale funzione è definito prendendo i rami principali della radice e del logaritmo. Il ramo principale di $\sqrt{1 - z^2} = \exp(\frac{1}{2} \log(1 - z^2))$ è una funzione analitica ovunque in \mathbb{C} ad eccezione dei punti z tali che $1 - z^2 = -u$ con $u \in [0, \infty)$. Tali punti

$$z(u) = \pm\sqrt{1 + u}, \quad u \in [0, \infty),$$

rappresentano le semirette reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Il ramo principale di $\log(z + i\sqrt{1 - z^2})$ risulta non analitico nei punti che soddisfano $z + i\sqrt{1 - z^2} = -t$ con $t \in [0, \infty)$. La soluzione di questa equazione ottenuta quadrando l'espressione equivalente $i\sqrt{1 - z^2} = -(t + z)$ fornisce

$$z(t) = -\frac{1 + t^2}{2t}, \quad t \in (0, \infty),$$

che rappresenta la semiretta reale $(-\infty, -1]$ percorsa due volte, una volta per $t \in (0, 1]$ e una volta per $t \in [1, \infty)$. Si osservi che solo i punti $z(t)$ ottenuti per $t \in [1, \infty)$ effettivamente soddisfano l'equazione di partenza in cui per la radice si considera il ramo principale. Infatti $i\sqrt{1 - z(t)^2} = i\sqrt{-(t^2 - 1)^2/(4t^2)} = i^2 \sqrt{(t^2 - 1)^2/(4t^2)} \leq 0 \quad \forall t \in (0, \infty)$, mentre $-(t + z(t)) = (1 - t^2)/2t \leq 0$ solo per $t \in [1, \infty)$. In conclusione, il dominio di analiticità di $\arccos z$ è tutto il piano complesso ad eccezione delle semirette reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Nella regione di analiticità la derivata vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \arccos z &= -i \frac{1}{z + i\sqrt{1 - z^2}} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{-2z}{\sqrt{1 - z^2}} \right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{z^2 - 1}}. \end{aligned}$$

6.28.

- a) Il ramo principale di $\sqrt{z^2 - 1} = \exp[\frac{1}{2} \log(z^2 - 1)]$ è una funzione analitica ovunque in \mathbb{C} ad eccezione dei punti z tali che $z^2 - 1 = -u$ con $u \in [0, \infty)$. In funzione del parametro u tali punti sono dati da

$$\begin{aligned} z(u) &= \pm\sqrt{1 - u}, & u \in [0, 1], \\ z(u) &= \pm i\sqrt{u - 1}, & u \in [1, \infty), \end{aligned}$$

e rappresentano il segmento reale $[-1, 1]$ e l'intero asse immaginario.

- b) Il ramo principale di $i\sqrt{1 - z^2} = i \exp[\frac{1}{2} \log(1 - z^2)]$ è una funzione analitica ovunque in \mathbb{C} ad eccezione dei punti z tali che $1 - z^2 = -u$ con $u \in [0, \infty)$.

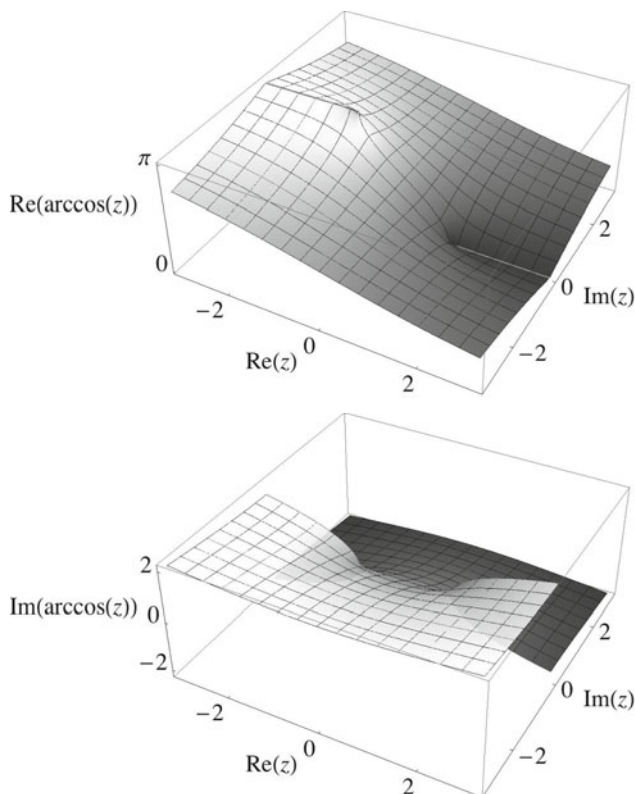


Fig. A.1. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\arccos(z)$

In funzione del parametro u tali punti sono dati da

$$z(u) = \pm\sqrt{1+u}, \quad u \in [0, \infty),$$

e rappresentano le semirette reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$.

6.29.

- a) La funzione z^n è monodroma e intera essendo il prodotto di n funzioni intere. Per $n = 17$, in $z = i$ essa vale

$$i^{17} = i^{16}i = (i^2)^8i = (-1)^8i = i.$$

- b) Se n è multiplo di m si ricade nel caso (a). Altrimenti la funzione $z^{n/m} = \exp((n/m) \log z)$ è polidroma con m rami distinti. Il ramo principale, corrispondente al ramo principale di $\log z$, è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa.

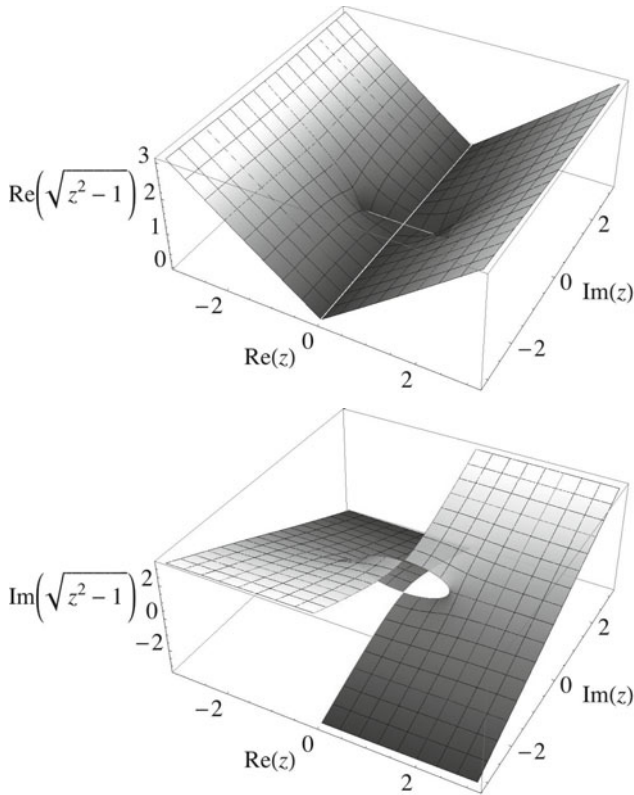


Fig. A.2. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\sqrt{z^2 - 1}$

Per $n = 17$ e $m = 3$, in $z = i$ essa vale

$$\begin{aligned} i^{17/3} &= e^{(17/3) \log i} = e^{(17/3)(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{17\pi i/6} = e^{12\pi i/6} e^{5\pi i/6} \\ &= \cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

- c) La funzione $z^c = \exp(c \log z)$ è polidroma con infiniti rami distinti. Il ramo principale, corrispondente al ramo principale di $\log z$, è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Per $c = 1/\pi$, in $z = i$ essa vale

$$i^{1/\pi} = e^{(1/\pi) \log i} = e^{(1/\pi)i\pi/2} = e^{i/2} = \cos(1/2) + i \sin(1/2).$$

6.30.

- a) Il ramo principale del logaritmo è una funzione analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione del semiasse reale negativo origine inclusa. Pertanto la funzione considerata è analitica in \mathbb{C} ad eccezione dei punti $z(t) = -t$ con $t \in [0, \infty)$

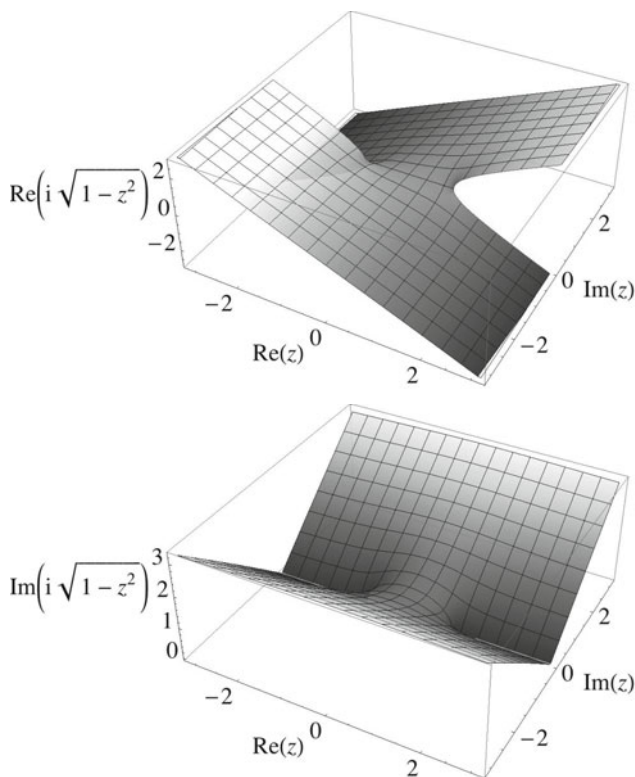


Fig. A.3. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $i\sqrt{1-z^2}$

e di quelli del tipo

$$(\log z(u))^2 = -u, \quad u \in [0, \infty),$$

ovvero

$$z(u) = e^{\log z(u)} = e^{\pm i\sqrt{u}}, \quad u \in [0, \infty).$$

Pertanto il dominio di analiticità è $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1, z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$. Per $z \in D$ la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \log((\log z)^2) = \frac{1}{(\log z)^2} \frac{2}{z} \log z = \frac{2}{z \log z}.$$

- b) La funzione è intera in quanto composizione di funzioni intere. La derivata vale

$$\frac{d}{dz} e^{z^2+i} = 2ze^{z^2+i}.$$

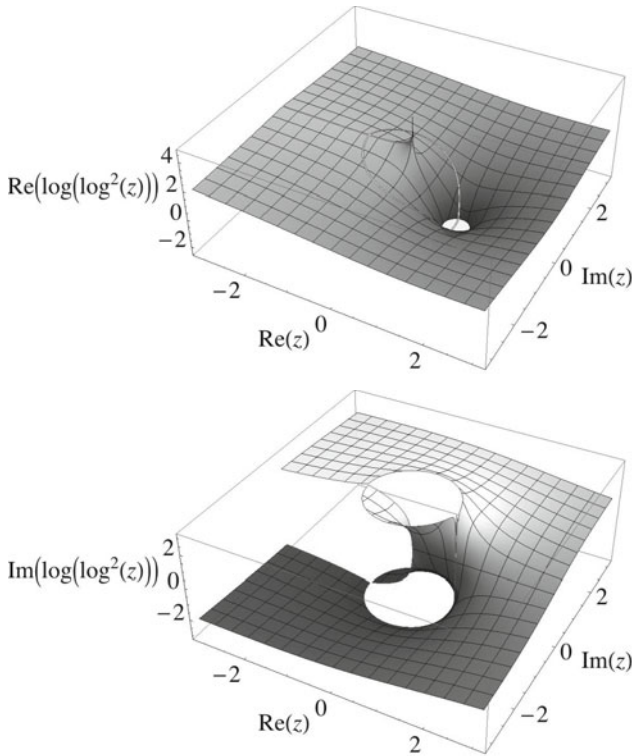


Fig. A.4. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\log(\log^2(z))$

- c) Il ramo principale della funzione considerata è analitico in $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq e^{-i\pi/4}, z \neq e^{i3\pi/4}, z \neq 1+t, t \in [0, \infty)\}$ in quanto

$$\sqrt{1-z} = e^{\frac{1}{2} \log(1-z)}$$

e $z^2 + i = 0$ ha soluzioni $z = e^{-i\pi/4}$ e $z = e^{i3\pi/4}$. In D la derivata vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{\sqrt{1-z}}{z^2 + i} &= \frac{-\frac{1}{2}(1-z)^{-1/2}(z^2 + i) - (1-z)^{1/2}2z}{(z^2 + i)^2} \\ &= \frac{-i - 4z + 3z^2}{2\sqrt{1-z}(z^2 + i)^2}. \end{aligned}$$

6.31. Si ha

$$f(z) = \sqrt{4 + z^4} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(4 + z^4)\right),$$

dove per il logaritmo si intende il ramo principale. Tale funzione è analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dei punti della linea di diramazione di $\log(4 + z^4)$

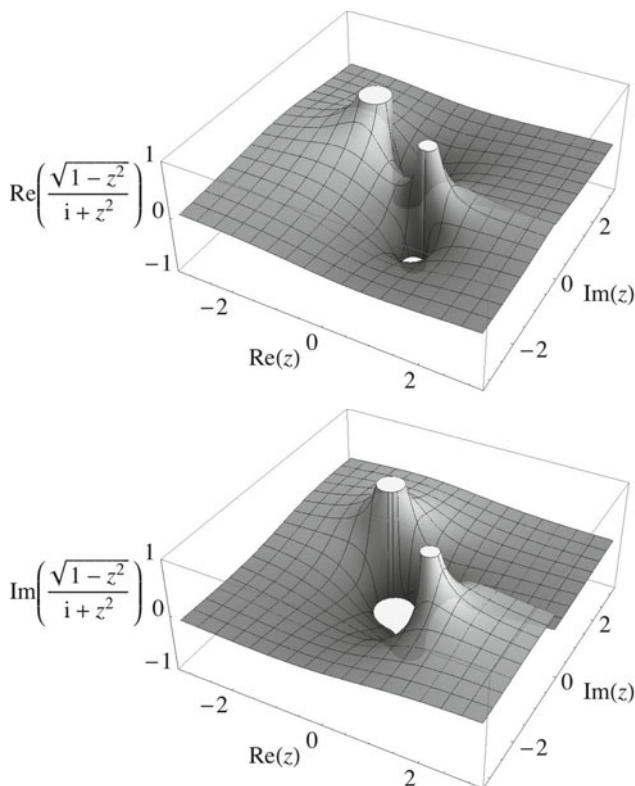


Fig. A.5. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\sqrt{1-z}/(z^2+i)$

determinata dall'equazione

$$4 + z^4 = -t, \quad t \in [0, \infty).$$

Tali punti sono

$$\begin{aligned} z(t) &= (-4 - t)^{1/4} \\ &= ((4 + t)e^{i\pi})^{1/4} \\ &= (4 + t)^{1/4} e^{i(\pi+2k\pi)/4}, \quad t \in [0, \infty), \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Si tratta delle semirette che bisecano i quattro quadranti a partire dalla distanza $\sqrt{2}$ dall'origine.

6.32. Le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono intere, pertanto i punti di non analiticità di f sono tutti e solo quelli determinati dal ramo principale della radice

$$\sqrt{\cos z} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(\cos z)\right).$$

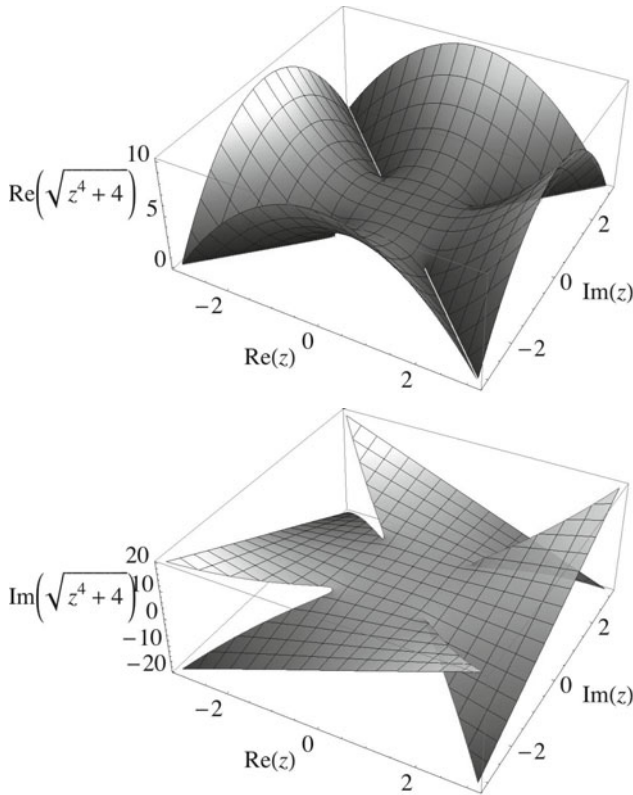


Fig. A.6. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\sqrt{4 + z^4}$

La linea di diramazione del ramo principale di $\log(\cos z)$ è determinata dall'equazione

$$\cos z = -t, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Per $0 \leq t \leq 1$ tale equazione ammette, come nel caso reale, la soluzione

$$z(t) = \arccos(-t) + 2\pi k, \quad t \in [0, 1], \quad k \in \mathbb{Z},$$

che rappresenta i segmenti dell'asse reale $[\pi/2 + 2\pi k, 3\pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. Per $t > 1$ l'equazione risulta equivalente a

$$(e^{iz})^2 + 2te^{iz} + 1 = 0,$$

la cui soluzione è

$$e^{iz} = -t \pm \sqrt{t^2 - 1}.$$

Osservando che il membro di destra di quest'ultima espressione è reale nega-

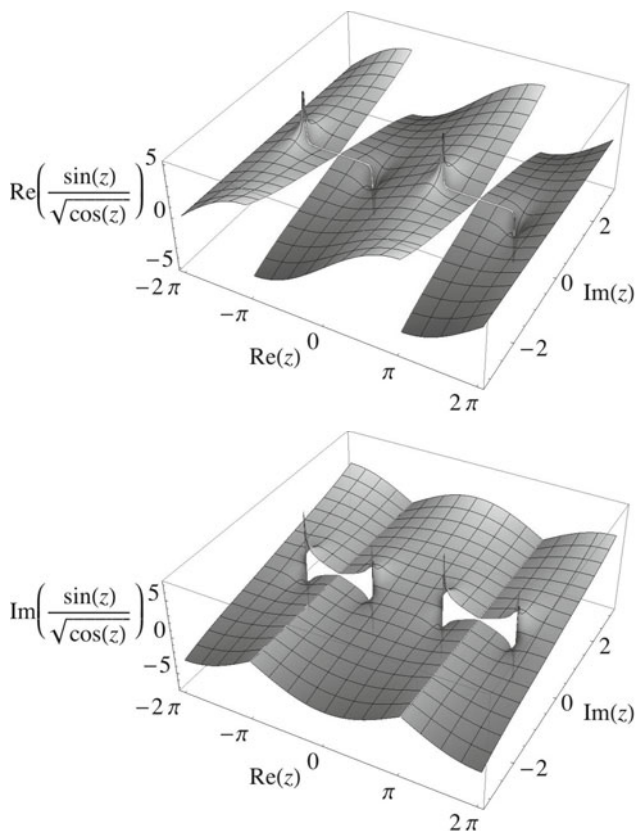


Fig. A.7. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\sin(z)/\sqrt{\cos(z)}$

tivo per ogni $t > 1$, si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= -i \log \left[\left(t \mp \sqrt{t^2 - 1} \right) e^{i\pi} \right] \\ &= (2k + 1)\pi - i \ln \left(t \mp \sqrt{t^2 - 1} \right), \quad t \in (1, \infty), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tali punti rappresentano gli assi immaginari passanti per $z = (2k + 1)\pi$.

6.33. Il ramo principale di

$$f(z) = 1 + \frac{\log z}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln |z| + i \operatorname{Arg} z}{\ln 2}$$

trasforma biunivocamente A in B . Infatti f è analitica in A e posto $z = re^{i\theta}$ per $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$, si ha $1 \leq \operatorname{Re} f \leq 2$ e $0 \leq \operatorname{Im} f \leq \pi/(2 \ln 2)$.

6.34. Poiché

$$i^{nz^2} = e^{nz^2 \log i} = \left(e^{z^2 \log i} \right)^n,$$

si riconosce che la serie considerata è una serie geometrica di ragione $e^{z^2 \log i}$. Essa quindi converge quando $|e^{z^2 \log i}| < 1$. Posto $w = z^2$ e usando il ramo principale del logaritmo, la precedente disuguaglianza fornisce

$$\left| e^{w(\ln|i| + i \operatorname{Arg} i)} \right| = e^{-(\pi/2) \operatorname{Im} w} < 1.$$

Deve quindi essere $\operatorname{Im} w > 0$, ovvero $0 < \operatorname{Arg} w < \pi$. Poiché $w = z^2$ trasforma settori angolari in settori angolari di estensione doppia, la serie risulta convergente quando $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$ oppure $-\pi < \operatorname{Arg} z < -\pi/2$.

Esercizi del Capitolo 7**7.1.** Si ha

$$\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz = \int_{\gamma_1} \frac{z}{\bar{z}} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z}{\bar{z}} dz,$$

dove $\gamma_1(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ e $\gamma_2(t) = t$, $-2 \leq t \leq 2$. In base alla definizione di integrale

$$\int_{\gamma_1} \frac{z}{\bar{z}} dz = \int_0^\pi \frac{2e^{it}}{2e^{-it}} i 2e^{it} dt = \int_0^\pi 2ie^{i3t} dt = -\frac{4}{3},$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{z}{\bar{z}} dz = \int_{-2}^2 \frac{t}{t} 1 dt = \int_{-2}^2 dt = 4.$$

In conclusione

$$\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}.$$

7.2. Si ponga $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ dove $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = 1 - t + it$ e $\gamma_3(t) = i(1 - t)$, con $0 \leq t \leq 1$. Osservando che $f(z) = -4(\operatorname{Im} z)^2$ e usando la definizione di integrale su cammino, si ha

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^1 0 \cdot 1 dt = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^1 -4t^2(-1 + i) dt = 4(1 - i) \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} - i\frac{4}{3},$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_0^1 -4(1-t)^2(-i)dt = -i\frac{4}{3}(1-t)^3 \Big|_0^1 = i\frac{4}{3}.$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

7.3. La funzione integranda è

$$f(z) = z^2 - \bar{z}^2 = 2i \operatorname{Im} z^2$$

e il cammino di integrazione può essere parametrizzato come $\gamma(t) = 1 - t + it$, $0 \leq t \leq 1$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^1 2i \operatorname{Im} ((1-t+it)^2) (-1+i)dt \\ &= \int_0^1 2i2(1-t)t(-1+i)dt \\ &= 4i(-1+i) \int_0^1 (t-t^2)dt \\ &= (-4+4i) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

7.4. Posto $\gamma = \lambda + \gamma_R$ dove $\lambda(t) = t - i$, $-1 \leq t \leq 1$ e $\gamma_R(t) = \sqrt{2}e^{it}$, $-\pi/4 \leq t \leq 5\pi/4$, si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\bar{z}}dz = \int_{\lambda} \frac{1}{\bar{z}}dz + \int_{\gamma_R} \frac{1}{\bar{z}}dz.$$

In base alla definizione di integrale si ha

$$\begin{aligned} \int_{\lambda} \frac{1}{\bar{z}}dz &= \int_{-1}^1 \frac{1}{t+i}dt = \log(1+i) - \log(-1+i) = -i\frac{\pi}{2}, \\ \int_{\gamma_R} \frac{1}{\bar{z}}dz &= \int_{-\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}e^{-it}} i\sqrt{2}e^{it}dt = \frac{1}{2}e^{i5\pi/2} - \frac{1}{2}e^{-i\pi/2} = i. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\bar{z}} dz = i(1 - \frac{\pi}{2}).$$

7.5. Le curve in questione possono essere parametrizzate da: $\gamma_1(y) = iy$, $0 \leq y \leq 1$, $\gamma_2(x) = x + i$, $0 \leq x \leq 1$ e $\gamma_3(t) = t + it$, $0 \leq t \leq 1$. Pertanto

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma_1(y)) \gamma_1'(y) dy = \int_0^1 y i dy = i/2,$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma_2(x)) \gamma_2'(x) dx = \int_0^1 (1 - x - i3x^2) i dx = 1/2 - i,$$

e quindi

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 1/2 - i/2,$$

mentre

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma_3(t)) \gamma_3'(t) dt = \int_0^1 (t - t - i3t^2)(1 + i) dt = 1 - i.$$

7.6. Il cammino quadrato γ ha lati di lunghezza $d = \sqrt{2}$. Ogni punto di γ dista dall'origine non meno del raggio r della circonferenza inscritta in γ e non più del raggio R della circonferenza in cui γ è iscritto. Tali raggi valgono $r = d/2 = 1/\sqrt{2}$ e $R = 1$. Pertanto

$$\left| \frac{\sqrt{z}}{z^2} \right| = \frac{|z|^{1/2}}{|z|^2} \leq \frac{R^{1/2}}{r^2} = 2, \quad \forall z \in \{\gamma\}.$$

Usando la disuguaglianza di Darboux, abbiamo

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M L,$$

dove M è una costante tale che $|f(z)| \leq M \forall z \in \{\gamma\}$ e L è la lunghezza del cammino γ . Possiamo quindi porre $M = 2$ e $L = 4\sqrt{2}$ e ottenere

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{z^2} dz \right| \leq 8\sqrt{2}.$$

7.7. Posto $z = re^{i\theta}$ la funzione integranda è

$$z^{-3/2} \log z = r^{-\frac{3}{2}} e^{-i\frac{3}{2}\theta} (\ln r + i\theta), \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Poiché sulla circonferenza $|z| = R$ si ha $r = R$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$, il modulo della funzione integranda può essere maggiorato come segue:

$$\left| R^{-\frac{3}{2}} e^{-i\frac{3}{2}\theta} (\ln R + i\theta) \right| = R^{-\frac{3}{2}} |\ln R + i\theta| \leq R^{-\frac{3}{2}} (\ln R + \pi).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=R} z^{-3/2} \log z \, dz \right| &\leq 2\pi R R^{-\frac{3}{2}} (\ln R + \pi) \\ &= 2\pi \frac{\ln R + \pi}{\sqrt{R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

7.8. La continuità di $e^{az}f(z)$ per $\operatorname{Re} z \geq 0$ assicura l'esistenza dell'integrale di tale funzione su γ_R . Per ipotesi, $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(z)| < \varepsilon$ quando $|1/z| < \delta$. Allora per $R > \delta^{-1}$ si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} e^{az} f(z) \, dz \right| &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{a\gamma_R(\theta)} f(\gamma_R(\theta)) \gamma_R'(\theta) \right| \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{aR \cos \theta} |f(\gamma_R(\theta))| R \, d\theta \\ &< 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{aR \cos \theta} \, d\theta \\ &= 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{aR \sin \varphi} \, d\varphi \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ &\leq 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-|a|R 2\varphi/\pi} \, d\varphi \\ &= 2\varepsilon R \frac{\pi}{2|a|R} \left(1 - e^{-|a|R} \right) \\ &< \frac{\pi\varepsilon}{|a|}, \end{aligned}$$

avendo usato il fatto che per $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ si ha $\sin \varphi \geq 2\varphi/\pi$ e quindi $\exp(aR \sin \varphi) = \exp(-|a|R \sin \varphi) \leq \exp(-|a|R 2\varphi/\pi)$. Dall'arbitrarietà di ε segue che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{az} f(z) \, dz = 0.$$

7.9. Il ramo principale di $f(z) = e^{(a-1)\log z}$, definito da $\log z = \ln r + i\theta$, dove $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, è una funzione analitica in $\{z \in \mathbb{C}, z \neq -t, t \in [0, \infty)\}$. Scelta per γ la rappresentazione parametrica $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq \pi$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^{a-1} \, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-1)\log \gamma(\theta)} \gamma'(\theta) \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-1)(\ln R + i\theta)} iR e^{i\theta} \, d\theta \\ &= iR e^{(a-1)\ln R} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ia\theta} \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= iR^a \frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{ia} \\
&= 2\pi i R^a \frac{\sin(\pi a)}{\pi a}.
\end{aligned}$$

Si osservi che l'integrale si annulla quando a assume valori interi positivi o negativi escluso lo zero. Come dovevamo aspettarci, per $a \rightarrow 0$ si ha

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\gamma} z^{a-1} dz = 2\pi i = \int_{\gamma} z^{-1} dz.$$

Alternativamente, l'integrale può essere calcolato osservando che per $a \neq 0$ la funzione z^{a-1} ha primitiva $a^{-1}z^a$.

7.10. La funzione $z^{-1} \log z$ è continua su $\{\gamma\}$ ad eccezione del punto $z = 1$ corrispondente alla linea di diramazione scelta per il logaritmo. L'integrale in questione dunque esiste e il suo valore è dato da

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} z^{-1} \log z dz &= \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} (\ln 1 + i\theta) e^{i\theta} i d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} i^2 \theta d\theta \\
&= -2\pi^2.
\end{aligned}$$

Alternativamente, si osservi che ad eccezione dei punti della linea di diramazione

$$z^{-1} \log z = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \log^2 z \right).$$

Posto allora $\gamma_{\varepsilon}(\theta) = \exp(i\theta)$, $\varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} z^{-1} \log z dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} z^{-1} \log z dz \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \log^2 z \Big|_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} (i^2(2\pi - \varepsilon)^2 - i^2\varepsilon^2) \\
&= -2\pi^2.
\end{aligned}$$

7.11. Posto $z = re^{i\theta}$, la funzione integranda è definita da

$$z^{3/2} = r^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3}{2}\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ tale funzione è analitica sul cammino $\gamma_{\varepsilon}(\theta) = Re^{i\theta}$, $-\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$, e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{2}{5}z^{5/2}$. Si ha

allora

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} z^{3/2} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} z^{3/2} dz \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{5} z^{5/2} \Big|_{z=R e^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{z=R e^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{5} R^{5/2} \left(e^{i\frac{5}{2}(\pi-\varepsilon)} - e^{i\frac{5}{2}(-\pi+\varepsilon)} \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \frac{4}{5} R^{5/2} \cos \left(\frac{5}{2} \varepsilon \right) \\
 &= i \frac{4}{5} R^{5/2}.
 \end{aligned}$$

7.12. Si osservi che il ramo principale di $z^{4/3}$ è una funzione analitica sul cammino $\gamma_{R,\varepsilon}(\theta) = R e^{i\theta}$, $-\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{3}{7} z^{7/3}$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_R} z^{4/3} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} z^{4/3} dz \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{7} z^{7/3} \Big|_{z=R e^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{z=R e^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{7} R^{7/3} \left(e^{i\frac{7}{3}(\pi-\varepsilon)} - e^{i\frac{7}{3}(-\pi+\varepsilon)} \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{7} R^{7/3} 2i \sin \left[\frac{7}{3} (\pi - \varepsilon) \right] \\
 &= \frac{3}{7} R^{7/3} 2i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \\
 &= i \frac{3\sqrt{3}}{7} R^{7/3}.
 \end{aligned}$$

7.13. Posto $z = r e^{i\theta}$, il ramo principale di $F(z) = z^z$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} z^z = \frac{d}{dz} e^{z \log z} = e^{z \log z} (\log z + 1).$$

Posto $\gamma_{R,\varepsilon}(\varphi) = R e^{i\varphi}$, $-(\pi - \varepsilon) \leq \varphi \leq \pi + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, per $z \in \{\gamma_{R,\varepsilon}\}$ la funzione $F(z)$ è una primitiva della funzione integranda $f(z) = z^z(1 + \log z)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_R} z^z (1 + \log z) dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} z^z (1 + \log z) dz \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z^z \Big|_{z=R e^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{z=R e^{i(\pi-\varepsilon)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(e^{Re^{i(\pi-\varepsilon)}[\ln R + i(\pi-\varepsilon)]} - e^{Re^{-i(\pi-\varepsilon)}[\ln R - i(\pi-\varepsilon)]} \right) \\
&= e^{-R(\ln R + i\pi)} - e^{-R(\ln R - i\pi)} \\
&= -2ie^{-R \ln R} \sin(\pi R) \\
&= -\frac{2i \sin(\pi R)}{R^R}.
\end{aligned}$$

7.14. Posto $z = re^{i\theta}$, il ramo principale di $F(z) = 2 \sin(z^{1/2}) = 2 \sin(r^{1/2} e^{i\theta/2})$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} 2 \sin(z^{1/2}) = \cos(z^{1/2}) z^{-1/2}.$$

Posto $\gamma_\varepsilon(\varphi) = Re^{i\varphi}$, $-(\pi-\varepsilon) \leq \varphi \leq \pi-\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, per $z \in \{\gamma_\varepsilon\}$ la funzione $F(z)$ è una primitiva della funzione integranda $\cos \sqrt{z}/\sqrt{z}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{\cos \sqrt{z}}{\sqrt{z}} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\cos \sqrt{z}}{\sqrt{z}} dz \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \sin(z^{1/2}) \Big|_{z=Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 \sin(R^{1/2} e^{i(\pi-\varepsilon)/2}) - 2 \sin(R^{1/2} e^{-i(\pi-\varepsilon)/2}) \right) \\
&= 2 \sin(i\sqrt{R}) - 2 \sin(-i\sqrt{R}) \\
&= 4 \sin(i\sqrt{R}) \\
&= 4i \sinh \sqrt{R}.
\end{aligned}$$

7.15. La funzione integranda

$$\frac{\log z}{z^2} = \frac{\ln r + i\theta}{r^2 e^{i2\theta}}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

è continua su tutto γ_R ad eccezione del punto $z = -R$. Conviene parametrizzare il cammino di integrazione come $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} \frac{\log z}{z^2} dz &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta \\
&= i \frac{\ln R}{R} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-i\theta} d\theta - \frac{1}{R} \int_{-\pi}^{+\pi} \theta e^{-i\theta} d\theta \\
&= i \frac{\ln R}{R} \frac{e^{-i\theta}}{-i} \Big|_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{R} e^{-i\theta} (1 + i\theta) \Big|_{-\pi}^{+\pi} \\
&= -\frac{\ln R}{R} (e^{-i\pi} - e^{i\pi}) - \frac{1}{R} (e^{-i\pi} (1 + i\pi) - e^{i\pi} (1 - i\pi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 - \frac{1}{R}(-1 - i\pi + 1 - i\pi) \\
&= \frac{2\pi i}{R}.
\end{aligned}$$

Alternativamente, si osservi che per $z \in \{\gamma_{R,\varepsilon}\}$ dove $\gamma_{R,\varepsilon}(\theta) = Re^{i\theta}$, con $-(\pi - \varepsilon) \leq \theta \leq (\pi - \varepsilon)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario, la funzione $z^{-2} \log z$ ammette la primitiva $z^{-1}(-1 - \log z)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} \frac{\log z}{z^2} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\log z}{z^2} dz \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{-1 - \log z}{z} \right|_{Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \frac{-1 - (\ln R + i\pi)}{-R} - \frac{-1 - (\ln R - i\pi)}{-R} \\
&= \frac{2\pi i}{R}.
\end{aligned}$$

7.16. La funzione integranda

$$z \log z = re^{i\theta} (\ln r + i\theta), \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

è continua su tutto γ_R ad eccezione del punto $z = -R$. Conviene parametrizzare il cammino di integrazione come $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Dalla definizione di integrale segue

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} z \log z dz &= \int_{-\pi}^{+\pi} Re^{i\theta} (\ln R + i\theta) Re^{i\theta} i d\theta \\
&= iR^2 \ln R \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2i\theta} d\theta - R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \theta e^{2i\theta} d\theta \\
&= iR^2 \ln R \left. \frac{e^{2i\theta}}{2i} \right|_{-\pi}^{+\pi} - R^2 e^{2i\theta} \left(\frac{1}{4} - \frac{i\theta}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{+\pi} \\
&= 0 - R^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{i\pi}{2} - \frac{1}{4} - \frac{i\pi}{2} \right) \\
&= i\pi R^2.
\end{aligned}$$

Alternativamente, si osservi che per $z \in \{\gamma_{R,\varepsilon}\}$ dove $\gamma_{R,\varepsilon}(\theta) = Re^{i\theta}$, con $-(\pi - \varepsilon) \leq \theta \leq (\pi - \varepsilon)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario, la funzione $z \log z$ ammette la primitiva $z^2(-1 + 2 \log z)/4$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} z \log z dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} z \log z dz \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{z^2}{4} (-1 + 2 \log z) \right|_{Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{Re^{i(\pi-\varepsilon)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R^2}{4}(-1 + 2(\ln R + i\pi)) - \frac{R^2}{4}(-1 + 2(\ln R - i\pi)) \\
&= i\pi R^2.
\end{aligned}$$

7.17. Posto $z = re^{i\theta}$, il ramo principale di $F(z) = \tan(z^{1/2})$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ ad eccezione delle singolarità isolate nei punti $z = ((2n+1)\pi/2)^2$. Nel dominio di analiticità, la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} \tan(z^{1/2}) = \frac{1}{2z^{1/2} \cos^2(z^{1/2})}.$$

Posto $\gamma_\varepsilon(\varphi) = Re^{i\varphi}$, con $-(\pi - \varepsilon) \leq \varphi \leq \pi - \varepsilon$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario, per $z \in \{\gamma_\varepsilon\}$ la funzione $F(z)$ è una primitiva della funzione integranda $1/(2\sqrt{z} \cos^2(\sqrt{z}))$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{1}{2\sqrt{z} \cos^2(\sqrt{z})} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\sqrt{z} \cos^2(\sqrt{z})} dz \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tan(z^{1/2}) \Big|_{z=Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\tan(R^{1/2}e^{i(\pi-\varepsilon)/2}) - \tan(R^{1/2}e^{-i(\pi-\varepsilon)/2}) \right) \\
&= \tan(i\sqrt{R}) - \tan(-i\sqrt{R}) \\
&= 2 \tan(i\sqrt{R}) \\
&= 2i \tanh(\sqrt{R}).
\end{aligned}$$

7.18. Si osservi che il ramo principale di $z^{1/3} = \exp[(1/3) \log z]$ è una funzione analitica sul cammino $\gamma_{R,\varepsilon}(\theta) = Re^{i\theta}$, con $-\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario, e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{3}{4}z^{4/3}$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} z^{1/3} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} z^{1/3} dz \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4} z^{4/3} \Big|_{z=Re^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4} R^{4/3} \left(e^{i\frac{4}{3}(\pi-\varepsilon)} - e^{i\frac{4}{3}(-\pi+\varepsilon)} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4} R^{4/3} 2i \sin \left(\frac{4}{3} (\pi - \varepsilon) \right) \\
&= \frac{3}{4} R^{4/3} 2i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \\
&= -i \frac{3\sqrt{3}}{4} R^{4/3}.
\end{aligned}$$

7.19. Posto $z = re^{i\theta}$, la funzione integranda è definita da

$$z^{3/2} = r^{3/2} e^{i\frac{3}{2}\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Tale funzione è analitica su ogni cammino $\gamma_\varepsilon = \gamma - [-L + i\varepsilon, -L - i\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario, e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{2}{5}z^{5/2}$. Posto $\varphi(\varepsilon) = \arctan(\varepsilon/L)$, si ha allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^{3/2} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} z^{3/2} dz \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{5} z^{5/2} \Big|_{z=Le^{i(-\pi+\varphi(\varepsilon))}}^{z=Le^{i(\pi-\varphi(\varepsilon))}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{5} L^{5/2} \left(e^{i\frac{5}{2}(\pi-\varphi(\varepsilon))} - e^{i\frac{5}{2}(-\pi+\varphi(\varepsilon))} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \frac{4}{5} L^{5/2} \cos\left(\frac{5}{2}\varphi(\varepsilon)\right) \\ &= i \frac{4}{5} L^{5/2}. \end{aligned}$$

7.20. Il ramo principale della funzione integranda

$$(z - z_0)^{q-1} = e^{(q-1)\log(z-z_0)}$$

è una funzione analitica in $D = \mathbb{C} \setminus \sigma$ dove $\sigma = \{z(u) = z_0 - u, u \in [0, \infty)\}$ è la linea di diramazione del ramo principale di $\log(z - z_0)$ che interseca la curva γ nel punto $z_0 - R$. Parametrizzato il cammino $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ in modo tale che $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0 - R$, definiamo un nuovo cammino $\gamma_\varepsilon : [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \mapsto \mathbb{C}$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, tale che $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) \forall t \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Evidentemente si ha

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^{q-1} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} (z - z_0)^{q-1} dz.$$

La traccia di γ_ε è contenuta in D e in D il ramo principale della funzione integranda ammette come primitiva il ramo principale di $q^{-1}(z - z_0)^q$

$$\frac{d}{dz} \frac{e^{q\log(z-z_0)}}{q} = e^{(q-1)\log(z-z_0)}.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} (z - z_0)^{q-1} dz &= \frac{e^{q\log(\gamma_\varepsilon(b-\varepsilon)-z_0)}}{q} - \frac{e^{q\log(\gamma_\varepsilon(a+\varepsilon)-z_0)}}{q} \\ &= \frac{e^{q\log(\gamma(b-\varepsilon)-z_0)}}{q} - \frac{e^{q\log(\gamma(a+\varepsilon)-z_0)}}{q}. \end{aligned}$$

Prendendo il limite $\varepsilon \rightarrow 0$ concludiamo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (z - z_0)^{q-1} dz &= \frac{e^{q \log(Re^{i\pi})}}{q} - \frac{e^{q \log(Re^{-i\pi})}}{q} \\ &= \frac{e^{q \ln R}}{q} (e^{i\pi q} - e^{-i\pi q}) \\ &= 2i \frac{\sin(\pi q)}{q} R^q.\end{aligned}$$

7.21. Posto $z = re^{i\theta}$, il ramo principale di $\sin(\log z) = \sin(\ln r + i\theta)$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin(\log z) = \frac{\cos(\log z)}{z}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{\cos(\log z)}{z} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin(\log z) \Big|_{z=-a-i\varepsilon}^{z=-a+i\varepsilon} \\ &= \sin(\ln a + i\pi) - \sin(\ln a - i\pi) \\ &= \sin(\ln a) \cos(i\pi) - \cos(\ln a) \sin(i\pi) \\ &\quad - (\sin(\ln a) \cos(i\pi) - \cos(\ln a) \sin(i\pi)) \\ &= 2i \cos(\ln a) \sinh(\pi).\end{aligned}$$

7.22. La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

ammette come primitiva uno qualsiasi dei rami di $F(z) = \log(z-1) + \log(z-2)$ nel dominio di analiticità del ramo considerato. In nessun caso tale dominio di analiticità copre l'intero anello A .

7.23.

- a) La funzione $e^z/(1-z)^3$ è analitica ovunque all'interno e sul cammino γ . Dalla formula integrale di Cauchy si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz &= \int_{\gamma} \frac{e^z/(1-z)^3}{z-0} dz \\ &= 2\pi i \left. \frac{e^z}{(1-z)^3} \right|_{z=0} \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

- b) La funzione e^z/z è analitica ovunque all'interno e sul cammino γ . Dalla formula integrale di Cauchy per la derivata seconda si ha

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = - \int_{\gamma} \frac{e^z/z}{(z-1)^3} dz$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{z} \right) \Big|_{z=1} \\
&= -\pi i \left(\frac{e^z}{z} - 2\frac{e^z}{z^2} + 2\frac{e^z}{z^3} \right) \Big|_{z=1} \\
&= -\pi i e.
\end{aligned}$$

- c) Si consideri una linea che congiungendo due punti del cammino γ individui due cammini chiusi γ_0 e γ_1 , contenenti nel loro interno rispettivamente i punti $z = 0$ e $z = 1$. Percorrendo γ_0 e γ_1 in verso positivo, per quanto detto ai punti a) e b), si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz &= \int_{\gamma_0} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz + \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz \\
&= 2\pi i \left(1 - \frac{e}{2} \right).
\end{aligned}$$

7.24. Il polinomio a denominatore della funzione integranda può essere fattorizzato come

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i).$$

Dalla formula integrale di Cauchy si ha quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 1} dz &= \int_{\gamma} \frac{z/((z+1)(z^2+1))}{z-1} dz \\
&= 2\pi i \frac{z}{(z+1)(z^2+1)} \Big|_{z=1} \\
&= \frac{\pi i}{2}.
\end{aligned}$$

7.25. Se z_0 è interno a γ , allora valgono le formule integrali di Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z_0), \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f'(z_0),$$

da cui l'asserto. Se z_0 è esterno a γ , allora le funzioni

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^2}, \quad \frac{f'(z)}{z - z_0}$$

sono analitiche su e dentro γ , e per il teorema di Cauchy-Goursat

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = 0, \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

e quindi vale ancora l'uguaglianza tra i due integrali.

7.26. Il ramo principale di $\log(z + 2\pi)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti

$$z(t) = -2\pi - t, \quad t \in [0, \infty).$$

Pertanto, $\log(z + 2\pi)$ è analitica sulla circonferenza γ e al suo interno. Poiché $i\pi$ è un punto interno a γ , per la rappresentazione integrale di Cauchy si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{\log(z + 2\pi)}{(z - i\pi)^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2}{dz^2} \log(z + 2\pi) \right|_{z=i\pi} \\ &= \pi i \left. \frac{-1}{(z + 2\pi)^2} \right|_{z=i\pi} \\ &= -\frac{4 + 3i}{25\pi}.\end{aligned}$$

7.27. Il ramo principale di

$$f(z) = e^z(3 + z)^{-1/2} = \exp\left(z - \frac{1}{2}\log(3 + z)\right)$$

è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti

$$z(t) = -3 - t, \quad t \in [0, \infty).$$

Pertanto $f(z)$ è analitica su e dentro il cammino γ . Per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2\sqrt{3+z}} dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz \\ &= \frac{2\pi i}{1!} f'(0) \\ &= 2\pi i \left(1 - \frac{1}{2(3+z)}\right) \exp\left(z - \frac{1}{2}\log(3+z)\right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{5\pi i}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

7.28. Si assuma, come al solito, per \sqrt{z} il ramo principale avente linea di diramazione coincidente con il semiasse reale negativo e si osservi che $|2 + 2i - 3| = \sqrt{5} > 2$, ovvero che il punto $z = 2 + 2i$ è esterno a γ .

a) Poiché la funzione integranda è analitica su e dentro γ , risulta

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z+i)^2} dz = 0.$$

b) Poiché la funzione integranda ha una singolarità su γ , l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z-1)^2} dz$$

non è calcolabile.

c) La funzione $g(z) = f(z)\sqrt{z}$ è analitica su e dentro γ e $z = 4$ è interno a γ . Quindi utilizzando la formula integrale di Cauchy si ottiene

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z-4)^2} dz = 2\pi i g'(4) = 2\pi i(f(4)/4 + 2f'(4)).$$

7.29. Risulta f costante. Infatti dalla formula integrale di Cauchy e dall'ipotesi su $|f|$ segue che per $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|w-z|=R} \frac{|f(w)|}{|w-z|^2} dw \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{M + \sqrt{R+|z|}}{R^2}, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato $|w| = |w-z+z| \leq |w-z| + |z|$ e quindi $|f(w)| \leq M + \sqrt{R+|z|}$ per $w \in \{\gamma\}$. Poiché R può essere preso arbitrariamente grande in quanto f è intera, si conclude che $f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Poiché f è analitica con derivata prima nulla in \mathbb{C} segue che essa è costante in \mathbb{C} .

7.30. Si ponga $g(z) = \exp(f(z))$. La funzione g è intera. Essa è anche limitata in \mathbb{C} in quanto $\forall z \in \mathbb{C}$ risulta

$$|g(z)| = e^{u(z)} \leq e^c.$$

Per il teorema di Liouville, $g(z)$ è quindi costante in \mathbb{C} . Si conclude che anche $u(z) = \ln |g(z)|$ è costante in \mathbb{C} .

7.31. Poiché f è analitica in $B(0, R)$, dalle disuguaglianze di Cauchy si ha

$$\left| f^{(4)}(0) \right| \leq \frac{4!M}{R^4}, \quad M = \sup_{|z| \leq R} |f(z)|.$$

D'altro canto per le proprietà di f si ha $|f^{(4)}(0)| = \sqrt{2}$ e

$$M = \sup_{|z| \leq R} |f(z)| \leq \sup_{|z| \leq R} 5|z|^3 = 5R^3.$$

Combinando queste relazioni si ottiene

$$\sqrt{2} \leq \frac{24 \cdot 5R^3}{R^4},$$

cioè $R \leq 60\sqrt{2}$.

Esercizi del Capitolo 8

8.1. Si osservi che $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione del punto $z = -b/a$. Pertanto $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ per $|z| < |b/a|$. Poiché

$$\begin{aligned} f^{(1)}(z) &= -a(az+b)^{-2}, \\ f^{(2)}(z) &= +2a^2(az+b)^{-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{(3)}(z) &= -6a^3(az+b)^{-4}, \\
 f^{(4)}(z) &= +24a^4(az+b)^{-5}, \\
 &\vdots \\
 f^{(n)}(z) &= (-1)^n n! a^n (az+b)^{-(n+1)},
 \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{az+b} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n n!}{n! b^{n+1}} z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n.
 \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza è anche calcolabile come

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a^n/b^{n+1}|}{|a^{n+1}/b^{n+2}|} = \frac{|b|}{|a|}.$$

Alternativamente, utilizzando il risultato notevole valido per la serie geometrica, si ha

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b} \frac{1}{1+az/b} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (az/b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n,$$

che converge per $|az/b| < 1$, cioè per $|z| < |b|/|a|$.

8.2. Posto $g(z) = \exp(z^2)$ e cambiando $z \rightarrow z^2$ nello sviluppo in serie di Taylor di $\exp(z)$, per $|z| < \infty$ si ha

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}.$$

Dal teorema sull'integrazione delle serie di potenze si ottiene

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \int_0^z g(w) dw \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^z w^{2n} dw \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{w^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^z \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}.
 \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza della serie ottenuta è infinito come quello della serie che rappresenta g .

8.3. Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti z che soddisfano

$$\frac{1+z}{1-z} = -t, \quad t \in [0, \infty),$$

ovvero

$$z(t) = \frac{1+t}{t-1}, \quad t \in [0, \infty),$$

che rappresentano i semiassi reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Per determinare lo sviluppo di Taylor intorno a $z = 0$, tale sviluppo esiste all'interno della circonferenza centrata nell'origine e di raggio 1, si osservi che

$$\frac{d}{dz} \log \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{1-z^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \log \frac{1+z}{1-z} &= \log \frac{1+z}{1-z} - \log \frac{1+0}{1-0} \\ &= \int_0^z \frac{d}{dw} \left(\log \frac{1+w}{1-w} \right) dw \\ &= \int_0^z 2 \sum_{n=0}^{\infty} w^{2n} dw \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

8.4. Il ramo principale di $\log z$

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

è una funzione analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione del semiasse reale negativo origine compresa. È evidente che il massimo cerchio di centro $z_0 = 3$ in cui $\log z$ è analitica ha raggio 3. Detto z un qualsiasi punto tale che $|z - 3| < 3$, si ha

$$\begin{aligned} \log z - \log 3 &= \int_3^z \frac{ds}{s} \\ &= \int_3^z \frac{ds}{3 \left(1 + \frac{s-3}{3} \right)} \\ &= \int_3^z \frac{ds}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{s-3}{3} \right)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} \int_3^z ds (s-3)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)3^{k+1}} (z-3)^{k+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} (z-3)^n.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\log z &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} (z-3)^n \\
&= \ln 3 + \frac{z-3}{3} - \frac{(z-3)^2}{18} + \frac{(z-3)^3}{81} + \dots
\end{aligned}$$

Una verifica diretta conferma che il raggio di convergenza della serie è $R = 3$. Infatti, detto a_n il coefficiente n -esimo della serie, si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3.$$

8.5. Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano

$$1 + z^2 = -t, \quad t \geq 0,$$

ovvero

$$z(t) = \pm i\sqrt{1+t}, \quad t \geq 0.$$

Lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z = 0$ esiste all'interno del massimo cerchio di analiticità centrato nell'origine: questo ha raggio 1. Utilizzando lo sviluppo notevole, valido per $|z| < 1$,

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n,$$

si ha

$$\begin{aligned}
(z+1) \log(1+z^2) &= (z+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^2 + z^3 - \frac{z^4}{2} - \frac{z^5}{2} + \frac{z^6}{3} + \frac{z^7}{3} - \frac{z^8}{4} - \frac{z^9}{4} + \dots \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,
\end{aligned}$$

dove

$$a_k = \begin{cases} (2(-1)^{k/2+1})/k, & k \text{ pari} \\ (2(-1)^{(k-1)/2+1})/(k-1), & k \text{ dispari} \end{cases}.$$

Come già osservato, il raggio di convergenza di questa serie è

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1.$$

8.6. Il ramo principale di $\log z$

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

è analitico in tutto \mathbb{C} ad eccezione del semiasse reale negativo origine compresa. Pertanto la funzione $\log(z^2)$ è analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dell'intero asse immaginario. Il massimo cerchio di centro $z_0 = -1$ all'interno del quale $\log(z^2)$ è analitica ha raggio 1. Detto z un qualsiasi punto tale che $|z + 1| < 1$ e osservando che $d \log(z^2)/dz = 2z^{-1}$, si ha

$$\begin{aligned}
\log(z^2) - \log((-1)^2) &= \int_{-1}^z \frac{2}{w} dw \\
&= -2 \int_{-1}^z \frac{1}{1 - (w + 1)} dw \\
&= -2 \int_{-1}^z \sum_{k=0}^{\infty} (w + 1)^k dw \\
&= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-1}^z (w + 1)^k dw \\
&= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^{k+1}}{k + 1} \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (z + 1)^n.
\end{aligned}$$

Osservando che $\log((-1)^2) = 0$, si conclude

$$\begin{aligned}
\log(z^2) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (z + 1)^n \\
&= -2(z + 1) - (z + 1)^2 - \frac{2}{3}(z + 1)^3 - \frac{2}{4}(z + 1)^4 + \dots
\end{aligned}$$

Una verifica diretta conferma che il raggio di convergenza di questa serie di potenze è $R = 1$. Infatti, detto a_n il coefficiente n -esimo della serie, si ha

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{2}{n} \frac{n+1}{2} \right| = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

8.7. Ricordando lo sviluppo notevole

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

si ha

$$\begin{aligned} e^z \sin z &= e^z \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n - (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n}{2in!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin(n\pi/4)}{n!} z^n \\ &= z + z^2 + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} - \frac{z^6}{90} - \frac{z^7}{630} + \dots \end{aligned}$$

8.8. Il ramo principale di $\log(z^2)$ è una funzione analitica in tutti i punti del piano complesso ad eccezione di quelli per cui $z^2 = -t$ con $t \in [0, +\infty)$, che sono i punti $z(t) = \pm it$ con $t \in [0, +\infty)$, cioè l'intero asse immaginario. Osservando che per $|z-1| < 1$ vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log(z^2) &= \frac{2}{z} \\ &= 2 \frac{1}{1 + (z-1)} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \log(z^2) - \log(1^2) &= \int_1^z \frac{d \log(w^2)}{dw} dw \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_1^z (w-1)^k dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\log(z^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

che ha raggio di convergenza $R = 1$. Alternativamente, si osservi che nella regione aperta e connessa $\operatorname{Re} z > 0$ i rami principali delle funzioni $\log z$ e $\log(z^2)$ sono entrambi funzioni analitiche. Inoltre si ha $\log(z^2) = 2 \log(z)$ quando, ad esempio, $z \in [1, 2]$. Pertanto per il Teorema di identità 9.16 in tutta la regione $\operatorname{Re} z > 0$ deve risultare

$$\log(z^2) = 2 \log(z).$$

Utilizzando lo sviluppo notevole

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1,$$

si conclude che

$$\log(z^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

8.9. Ricordando lo sviluppo notevole

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

si ha

$$\begin{aligned}
e^{iz} \sinh z &= e^{iz} \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{(1+i)z} - e^{(-1+i)z} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1+i)^n}{n!} z^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n - (\sqrt{2}e^{i3\pi/4})^n}{2n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2-1} [\cos(n\pi/4) + i \sin(n\pi/4)] (1-i)^n}{n!} z^n
\end{aligned}$$

$$= z + iz^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} - \frac{iz^6}{90} + \frac{z^7}{630} + \dots$$

8.10. Poiché risulta

$$\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n, \quad |z| < 1,$$

integrando termine a termine si ha

$$\arctan z = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

Il raggio di convergenza di questa serie è evidentemente $R = 1$. Allo stesso risultato si giunge con la formula di Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n},$$

dove

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}/n & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

è il coefficiente della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

8.11. Poiché $(z^2 + 1)^2 = (z - i)^2(z + i)^2$, la funzione $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti $z = \pm i$. Nella regione $0 < |z - i| < 2$ vale la rappresentazione

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - i)^n,$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2 + 1)^{-2}}{(z - i)^{n+1}} dz,$$

dove γ è un arbitrario cammino di integrazione chiuso semplice regolare a tratti orientato positivamente che contiene al suo interno $z_0 = i$ ed è contenuto in $A(i, 0, 2)$. Posto $g(z) = (z + i)^{-2}$, per il teorema di Cauchy-Goursat e dalla formula integrale di Cauchy, si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - i)^{n+3}} dz = \begin{cases} 0 & n \leq -3 \\ g^{(n+2)}(i)/(n+2)! & n \geq -2 \end{cases}.$$

Osservando che

$$\begin{aligned} g^{(1)}(z) &= -2(z+i)^{-3}, \\ g^{(2)}(z) &= +6(z+i)^{-4}, \\ g^{(3)}(z) &= -24(z+i)^{-5}, \\ &\vdots \\ g^{(n)}(z) &= (-1)^n(n+1)!(z+i)^{-(n+2)}, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+1)^2} &= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}(n+3)!(2i)^{-(n+4)}}{(n+2)!} (z-i)^n \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{i^n(n+3)}{2^{(n+4)}} (z-i)^n \\ &= -\frac{1}{4}(z-i)^{-2} - \frac{i}{4}(z-i)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+3)}{2^{(n+4)}} (z-i)^n. \end{aligned}$$

È possibile sviluppare $f(z)$ in serie di Laurent anche nella regione $2 < |z-i| < \infty$. Anziché seguire un procedimento analogo al precedente si osservi che

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z-i)^2(z-i+2i)^2} \\ &= \frac{1}{(z-i)^4} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2i}{z-i}\right)\right]^2} \\ &= \frac{-1}{(z-i)^4} \frac{d}{dw} \frac{1}{1+w}, \end{aligned}$$

dove $w = 2i/(z-i)$. Per $|w| < 1$, cioè $|z-i| > 2$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{-1}{(z-i)^4} \frac{d}{dw} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \\ &= \frac{-1}{(z-i)^4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{2i}{z-i}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \frac{(2i)^{n-1}}{(z-i)^{n+3}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) (2i)^k (z-i)^{-(k+4)}. \end{aligned}$$

8.12. Per $0 < |z| < 1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} \\
 &= \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-3} \\
 &= \sum_{n=-2}^{\infty} (n+3) z^n \\
 &= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 3 + 4z + 5z^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Per $1 < |z| < \infty$, ponendo $w = z^{-1}$ e notando che $|w| < 1$, si ha

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{w^4}{(1+w)^2} \\
 &= w^4 \frac{d}{dw} \frac{1}{1-w} \\
 &= w^4 \frac{d}{dw} \sum_{k=0}^{\infty} w^k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} k w^{k+3} \\
 &= \sum_{n=4}^{\infty} (n-3) z^{-n} \\
 &= \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^6} + \frac{4}{z^7} + \frac{5}{z^8} + \dots
 \end{aligned}$$

8.13. Per $0 < |z| < 2$ possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{1}{2z^2} \frac{1}{1+z/2}.$$

Posto $w = z/2$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w| < 1,$$

si ha

$$\frac{1}{z^3 + 2z^2} = \frac{1}{2z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n-2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2^2} \frac{1}{z} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} z + \frac{1}{2^5} z^2 + \dots
\end{aligned}$$

Per $2 < |z| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + 2/z}.$$

Posto ora $w = 2/z$ nella regione anulare considerata si ha $|w| < 1$ e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3 + 2z^2} &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-n-3} \\
&= \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \frac{2^2}{z^5} - \frac{2^3}{z^6} + \frac{2^4}{z^7} - \frac{2^5}{z^8} + \dots
\end{aligned}$$

8.14. Per $0 < |z| < \sqrt{2}$ possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{1}{2z} \frac{1}{1 + z^2/2}.$$

Posto $w = z^2/2$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3 + 2z} &= \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^2}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2)^{n+1}} z^{2n-1} \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{z}{4} + \frac{z^3}{8} - \frac{z^5}{16} + \frac{z^7}{32} + \dots
\end{aligned}$$

Per $\sqrt{2} < |z| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + 2/z^2}.$$

Posto ora $w = 2/z^2$ nella regione anulare considerata si ha $|w| < 1$ e quindi

$$\frac{1}{z^3 + 2z} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z^2}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-2n-3} \\
&= \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^5} + \frac{4}{z^7} - \frac{8}{z^9} + \frac{16}{z^{11}} - \frac{32}{z^{13}} + \dots
\end{aligned}$$

8.15. Per $0 < |z - i| < 2$ possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)(z-i+2i)} = \frac{1}{2i(z-i)} \frac{1}{1+(z-i)/(2i)}$$

Posto $w = (z-i)/(2i)$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{2i(z-i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-1} \\
&= -\frac{i}{2} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2^2} + \frac{i}{2^3} (z-i) - \frac{1}{2^4} (z-i)^2 - \frac{i}{2^5} (z-i)^3 + \dots
\end{aligned}$$

Per $2 < |z-i| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)(z-i+2i)} = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{1+2i/(z-i)}.$$

Posto ora $w = 2i/(z-i)$, nella regione anulare considerata si ha $|w| < 1$ e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{(z-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2i}{z-i} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2i)^n (z-i)^{-n-2} \\
&= \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{2i}{(z-i)^3} - \frac{2^2}{(z-i)^4} + \frac{2^3 i}{(z-i)^5} + \frac{2^4}{(z-i)^6} + \dots
\end{aligned}$$

8.16. Per $0 < |z| < 1$ possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1+z^2},$$

e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+z^3} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} \\ &= \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots \end{aligned}$$

8.17. Per $0 < |z| < 2$ possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{3+z}{2z^2} \frac{1}{1+z/2}.$$

Posto $w = z/2$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{3+z}{z^3+2z^2} &= \left(\frac{3}{2z^2} + \frac{1}{2z} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{2^{n+1}} z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{2^{n+1}} z^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} z^{n-2} \\ &= \frac{3}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n-2} \\ &= \frac{3}{2z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{8} - \frac{z}{16} + \frac{z^2}{32} + \dots \end{aligned}$$

Per $2 < |z| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{3+z}{z^3} \frac{1}{1+2/z}.$$

Posto ora $w = 2/z$, nella regione anulare considerata si ha $|w| < 1$ e quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{3+z}{z^3+2z^2} &= \left(\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n 2^n z^{-n-3} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-n-2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n 2^n z^{-n-3} + \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{n+1} z^{-n-3} \\
 &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-n-3} \\
 &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \frac{4}{z^5} - \frac{8}{z^6} + \frac{16}{z^7} - \frac{32}{z^8} + \dots
 \end{aligned}$$

8.18. Ricordando lo sviluppo in serie notevole

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k, \quad |w| < 1,$$

per $0 < |z-1| < 1$ si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(z-1)^2(z-2)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \frac{d}{dz} \frac{-1}{z-2} \\
 &= \frac{1}{(z-1)^2} \frac{d}{dz} \frac{1}{1-(z-1)} \\
 &= \frac{1}{(z-1)^2} \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \\
 &= \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(z-1)^{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} k(z-1)^{k-3} \\
 &= \sum_{n=-2}^{\infty} (n+3)(z-1)^n \\
 &= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + 3 + 4(z-1) + 5(z-1)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

8.19. Nella regione $0 < |z| < 1$, essendo $|z^2| < 1$, si ha

$$\frac{2z}{z^2(1+z^2)^2} = -\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \frac{1}{1+z^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2k z^{2k-3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2(n+1) z^{2n-1} \\
&= \frac{2}{z} - 4z + 6z^3 - 8z^5 + O(z^7).
\end{aligned}$$

Nella regione $1 < |z| < \infty$, essendo $|1/z^2| < 1$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{2z}{z^2(1+z^2)^2} &= -\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \\
&= -\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2) z^{-2k-5} \\
&= \frac{2}{z^5} - \frac{4}{z^7} + \frac{6}{z^9} - \frac{8}{z^{11}} + O(z^{-13}).
\end{aligned}$$

8.20. Per $0 < |z-i| < 1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-i)(z+i)} \\
&= \frac{1}{z-i} \frac{1}{i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{i}} \frac{1}{2i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \\
&= \frac{1}{z-i} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} - \frac{2}{1+\frac{z-i}{i}} \right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+z^3} &= \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{2^n i^n} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{i^n} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(2^{-(n+1)} - 1 \right) (z-i)^{n-1} \\
&= -\frac{1}{2(z-i)} - \frac{3}{4}i + \frac{7}{8}(z-i) + \frac{15}{16}i(z-i)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Per $2 < |z-i| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)(z+i)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(z-i)^3} \frac{1}{1 + \frac{i}{z-i}} \frac{1}{1 + \frac{2i}{z-i}} \\
&= \frac{1}{(z-i)^3} \left(\frac{2}{1 + \frac{2i}{z-i}} - \frac{1}{1 + \frac{i}{z-i}} \right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+z^3} &= \frac{1}{(z-i)^3} \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n i^n}{(z-i)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{(z-i)^n} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^n \left(2^{(n+1)} - 1 \right) (z-i)^{-n-3} \\
&= \frac{1}{(z-i)^3} - \frac{3i}{(z-i)^4} - \frac{7}{(z-i)^5} + \frac{15i}{(z-i)^6} + \dots
\end{aligned}$$

8.21. Usando gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \infty,$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z| < 1,$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
(\cos z)^{1/z^2} &= \exp \left(\frac{1}{z^2} \log(\cos z) \right) \\
&= \exp \left(\frac{1}{z^2} \log \left(1 + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right) \right) \\
&= \exp \left(\frac{1}{z^2} \left(\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right)^2 + \dots \right) \right) \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{12} z^2 - \frac{1}{45} z^4 + \dots \right).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)^{1/z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \exp \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{12} z^2 - \frac{1}{45} z^4 + \dots \right) \\
&= e^{-1/2}.
\end{aligned}$$

8.22.

a) Ricordando gli sviluppi in serie di Maclaurin

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

validi $\forall z \in \mathbb{C}$, per $|z| < \pi/2$ si ha $\cos z \neq 0$ e quindi in tale regione $\tan z$ è analitica e sviluppabile in serie di Taylor con centro in $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots} \\ &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) \frac{1}{1 + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)} \\ &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) \left[1 - \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)^2 \dots \right] \\ &= z + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \right) z^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} - \frac{1}{3!2!} + \left(\frac{1}{2!} \right)^2 \right) z^5 + \dots \\ &= z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots \end{aligned}$$

b) La funzione $\tan z$ è analitica nella regione anulare $0 < |z - \pi/2| < \pi$ con centro in $z_0 = \pi/2$ e in tale regione è sviluppabile in serie di Laurent. Posto $z = w + \pi/2$ si ha

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(w + \pi/2) = \cos w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{2k}, \\ \cos z &= \cos(w + \pi/2) = -\sin w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} w^{2k+1}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \dots}{-w + \frac{w^3}{3!} - \frac{w^5}{5!} + \frac{w^7}{7!} + \dots} \\ &= -\frac{1}{w} \left(1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \dots \right) \frac{1}{1 + \left(-\frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \dots \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{w} + \frac{w}{2!} - \frac{w^3}{4!} + \dots \right) \left[1 - \left(-\frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
&= -\frac{1}{w} + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) w + \left(-\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{5!} - \left(\frac{1}{3!} \right)^2 \right) w^3 + \dots \\
&= -\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} + \frac{z - \frac{\pi}{2}}{3} + \frac{(z - \frac{\pi}{2})^3}{45} + \dots
\end{aligned}$$

8.23. Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2 \sinh z} &= \frac{1}{z^2 \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right)} \\
&= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)} \\
&= \frac{1}{z^3} \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
&= \frac{1}{z^3} \left[1 - \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \left(\frac{z^2}{3!} \right)^2 + \dots \right] \\
&= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{7z}{360} + \dots
\end{aligned}$$

8.24. La funzione $f(z)$ è analitica per $|z| < \pi/2$ e in tale regione è sviluppabile in serie di Maclaurin

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

D'altro canto, utilizzando lo sviluppo notevole di $\cos z$ intorno a $z = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \dots} \\
&= 1 - \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots \right) + \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots \right)^2 + \dots
\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)z^4 + \dots$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor, deve essere

$$f^{(4)}(0) = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) 4! = 5.$$

8.25. Nella comune regione di convergenza e supponendo che la somma della serie a denominatore non si annulli, il rapporto di due serie di potenze è ancora una serie di potenze data da

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad d_n = \left(a_n - \sum_{k=0}^{n-1} d_k b_{n-k}\right) \frac{1}{b_0}.$$

Nel caso considerato in cui $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, l'equazione iterativa per i coefficienti d_n fornisce

$$d_0 = 1,$$

$$d_1 = 1 - d_0 2^1 = 1 - 2 = -1,$$

$$d_2 = 1 - d_0 2^2 - d_1 2^1 = 1 - 4 + 2 = -1,$$

$$d_3 = 1 - d_0 2^3 - d_1 2^2 - d_2 2^1 = 1 - 8 + 4 + 2 = -1,$$

$$\vdots$$

$$d_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^{n-k} = -2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = -2^n + \frac{1-2^n}{1-2} = -1, \quad n > 1.$$

Il raggio di convergenza R è dato dalla formula di Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |d_n|^{1/n} = 1.$$

Alternativamente, si osservi che per $|z| < 1$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$, mentre per $|z| < 1/2$ vale $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = 1/(1-2z)$. Pertanto

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n} = 1 - z \frac{1}{1-z} = 1 - z \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Tale sviluppo è valido per $|z| < 1$ e coincide con il risultato trovato in precedenza.

Si noti che il teorema sul rapporto di due serie di potenze assicura la convergenza della serie risultante all'interno del cerchio di raggio $R_{\text{th}} = \min\{R_1, R_2\}$, dove R_1 e R_2 sono i raggi di convergenza delle serie a numeratore e denominatore (supposte di medesimo centro). In generale, si avrà $R_{\text{th}} \leq R$ essendo

R l'effettivo raggio di convergenza. Nel presente esempio $R_1 = 1$, $R_2 = 1/2$ e $R_{\text{th}} = 1/2 < R = 1$.

8.26. Osservando che

$$\frac{d^n}{dw^n}(1-w)^{-1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right) (1-w)^{-1/2-n},$$

per $|w| < 1$ il ramo principale di $(1-w)^{-1/2}$ ammette lo sviluppo in serie di Taylor

$$(1-w)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2} + n - 1}{n} w^n,$$

dove il coefficiente binomiale è definito da

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}.$$

Posto $w = 2xz - z^2$, per $|z|$ sufficientemente piccolo si ha $|w| < 1$ e quindi è possibile usare il precedente sviluppo per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} &= 1 + \frac{1}{2}(2xz - z^2) + \frac{3}{8}(2xz - z^2)^2 + \frac{5}{16}(2xz - z^2)^3 + \dots \\ &= 1 + xz + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2\right)z^2 + \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3\right)z^3 + \dots \end{aligned}$$

Da questa si ricava

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2, \\ P_3(x) &= -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3. \end{aligned}$$

8.27. Ricordando gli sviluppi notevoli di $\cos z$, $\sin z$, e^z e $1/(1 \pm z)$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots}{\left(z^2 - \frac{z^6}{6} + \frac{z^{10}}{120} + \dots\right) \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots - 1\right)} \\ &= \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots}{z^3 \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots \right) \left[1 - \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
&= \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{z}{2} - \frac{5z^2}{12} + \dots \right) \\
&= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^2} - \frac{5}{12z} + O(z^0).
\end{aligned}$$

8.28. Posto $g(w) = \sin(\pi w^2/2)$ dallo sviluppo in serie di Taylor di $\sin(z)$, valido per $|z| < \infty$, cambiando $z \rightarrow \pi w^2/2$ si ha

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi w^2/2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!} w^{4n+2}.$$

Dal teorema sull'integrazione delle serie di potenze si ottiene

$$\begin{aligned}
S(z) &= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!} w^{4n+2} dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!} \int_0^z w^{4n+2} dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!} \frac{w^{4n+3}}{4n+3} \Big|_0^z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(4n+3) 2^{2n+1} (2n+1)!} z^{4n+3} \\
&= \frac{\pi}{6} z^3 - \frac{\pi^3}{336} z^7 + O(z^{11}).
\end{aligned}$$

Il raggio di convergenza della serie ottenuta è infinito come quello della serie che rappresenta g . La funzione $S(z)$ è intera e ha uno zero in $z = 0$. Pertanto $1/S(z)$ è sviluppabile in serie di Laurent in $A(0, 0, \infty)$ dove risulta

$$\frac{1}{S(z)} = \frac{1}{\frac{\pi}{6} z^3 + O(z^7)} = \frac{1}{\frac{\pi}{6} z^3} \frac{1}{1 + O(z^4)} = \frac{6}{\pi z^3} + O(z).$$

8.29. Si osservi innanzitutto che f è analitica in un intorno di $z_0 = 0$, precisamente nella palla $B(0, \pi/2)$ come visto nell'esercizio precedente, e in tale intorno risulta

$$f(z) = -2 \frac{d}{dz} \sqrt{\cos z}.$$

Pertanto è sufficiente determinare lo sviluppo in serie di Taylor con centro in $z_0 = 0$ del ramo principale di $\sqrt{\cos z}$. Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\begin{aligned}\cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, & |z| < \infty, \\ \sqrt{1+z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k, & |z| < 1,\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos z} &= \sqrt{1 + (\cos z - 1)} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{16} \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right)^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2!} z^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{4!} - \frac{1}{8} \frac{1}{(2!)^2} \right) z^4 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{6!} + \frac{1}{8} \frac{2}{2!4!} - \frac{1}{16} \frac{1}{(2!)^3} \right) z^6 + O(z^8) \\ &= 1 - \frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{96} z^4 - \frac{19}{5760} z^6 + O(z^8).\end{aligned}$$

Tale sviluppo è valido all'interno del massimo disco centrato in $z_0 = 0$ e tale che per ogni z al suo interno risulti $\operatorname{Re}(\cos z - 1) > -1$. Questa condizione equivale a $|z| < \pi/2$ e possiamo concludere

$$\frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}} = z + \frac{1}{12} z^3 + \frac{19}{480} z^5 + O(z^7), \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Esercizi del Capitolo 9

9.1. Per calcolare l'integrale su γ_1 si consideri un cammino γ_4 omotopo a γ_1 che contiene al suo interno sia z_1 che z_3 . L'integrale di f lungo γ_4 si calcola con il residuo all'infinito in quanto f è analitica su γ_4 e al suo esterno. Per il principio di deformazione dei cammini segue immediatamente

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) - \operatorname{Res}_{z=z_3} f(z) \right).$$

La funzione f è non analitica all'esterno di γ_2 . All'interno di questa curva non sappiamo se f ha solo singolarità isolate. Pertanto risulta

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz \text{ non calcolabile.}$$

La curva γ_3 è non semplice. La si scomponga nella somma di due curve chiuse semplici su e all'interno delle quali f è analitica ad eccezione delle singolarità isolate z_2 e z_3 , rispettivamente. Facendo attenzione a come sono orientate le due curve chiuse semplici, si ha

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_3} f(z) - \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) \right).$$

9.2. La funzione $1/\sin(z^{-2})$ è analitica ovunque ad eccezione delle singolarità isolate nei punti

$$z_{n,k} = \frac{e^{i\pi k}}{\sqrt{n\pi}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 1,$$

e della singolarità non isolata in $z = 0$. Dunque la funzione $1/\sin(z^{-2})$ è analitica sul cammino chiuso γ e al suo esterno. Per il teorema del residuo all'infinito si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z^{-2})} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin(z^2)}.$$

Tale residuo può essere calcolato considerando che per $0 < |z| < \infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sin(z^2)} &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \frac{z^{14}}{7!} + \dots} \\ &= \frac{1}{z^4} \frac{1}{1 - \left(\frac{z^4}{3!} - \frac{z^8}{5!} + \dots\right)} \\ &= \frac{1}{z^4} \left[1 + \left(\frac{z^4}{3!} - \frac{z^8}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^4}{3!} - \frac{z^8}{5!} + \dots\right)^2 + \dots \right] \\ &= z^{-4} + \frac{1}{3!} + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) z^4 + O(z^8). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin(z^2)} = 0$$

e, in conclusione,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z^{-2})} dz = 0.$$

9.3. Posto $f(z) = z/((z-2)(z^2+1))$, f ha 3 poli semplici in $z = 2$ e $z = \pm i$. I poli in $z = 2$ e $z = i$ sono interni alla circonferenza γ mentre quello in $z = -i$ esterno, pertanto

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{z \, dz}{(z-2)(z^2+1)} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=2} f(z) + \operatorname{Res}_{z=i} f(z) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{2}{5} + \frac{i}{2i(i-2)} \right) \\ &= \frac{\pi}{5} (1 + 2i).\end{aligned}$$

9.4. Si osservi che il cammino di integrazione è la circonferenza di raggio 2, centrata nel punto $1 + 2i$ e orientata positivamente. La funzione integranda ha poli semplici in corrispondenza degli zeri semplici di $e^{\pi z} + 1$. Tali zeri sono $z_k = i(1 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Osservando che z_0 e z_1 sono interni al cammino di integrazione mentre tutti gli altri z_k sono esterni, per il teorema dei residui si conclude

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{z^2}{e^{\pi z} + 1} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{z^2}{e^{\pi z} + 1} + \operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{z^2}{e^{\pi z} + 1} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{z_0^2}{\pi e^{\pi z_0}} + \frac{z_1^2}{\pi e^{\pi z_1}} \right) \\ &= 20i.\end{aligned}$$

9.5. È sufficiente mostrare che il modulo dell'integrale tende a 0 per $n \rightarrow \infty$. Per la disuguaglianza di Darboux

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} dz \right| \leq L_{\gamma_n} \sup_{z \in \{\gamma_n\}} \left| \frac{1}{z^2 \sin z} \right|,$$

dove $L_{\gamma_n} = 8a_n$ è la lunghezza di γ_n . Per $z \in \{\gamma_n\}$ evidentemente risulta $|z|^2 \geq a_n^2$. Inoltre, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}|\sin(x + iy)|^2 &= |\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)|^2 \\ &= |\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y|^2 \\ &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \sinh^2 y.\end{aligned}$$

Pertanto, lungo i due lati del quadrato γ_n in cui $x = \pm a_n$ e $-a_n \leq y \leq a_n$ risulta $|\sin z|^2 \geq \sin^2 a_n = 1$ mentre lungo gli altri due lati in cui $-a_n \leq x \leq a_n$ e $y = \pm a_n$ si ha $|\sin z|^2 \geq \sinh^2 a_n$. Ne segue che per $z \in \{\gamma_n\}$ $|\sin z| \geq \min(1, \sinh a_n) = 1$. Possiamo quindi concludere che

$$\sup_{z \in \{\gamma_n\}} \left| \frac{1}{z^2 \sin z} \right| \leq \frac{1}{a_n^2}$$

che comporta

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} dz \right| \leq 8a_n \frac{1}{a_n^2} = \frac{8}{\pi(n+1/2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Per n generico l'integrale può essere valutato con il teorema dei residui. La funzione integranda è analitica su γ_n e al suo interno ad eccezione dei poli semplici nei punti $z_k = k\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ e del polo di ordine 3 nel punto $z_0 = 0$. Osservando che ogni z_k è uno zero semplice di $\sin z$, risulta

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{z_k^{-2}}{\cos z_k} = \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n.$$

Per calcolare il residuo in $z_0 = 0$ si osservi che per $z \in A(0, 0, \pi)$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 \sin z} &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right)} \\ &= \frac{1}{z^3} \left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6} \frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + O(z^3), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}.$$

Per il Teorema (9.4) concludiamo

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z^2 \sin z} = 2\pi i \left(\frac{1}{6} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} \right).$$

Dai due risultati precedenti segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} = -\frac{1}{12}.$$

9.6.

a) La funzione ha un'unica singolarità isolata in $z = 2$. Ricordando che

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!}, \quad |w| < \infty,$$

posto $w = 1/(z-2)$, per $0 < |z-2| < \infty$ si ha

$$\cos \left(\frac{1}{z-2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! (z-2)^{2n}}.$$

Da questa espressione segue che la singolarità è essenziale e

$$\operatorname{Res}_{z=2} \cos \left(\frac{1}{z-2} \right) = 0.$$

- b) Anche in questo caso la funzione ha un'unica singolarità isolata in $z = 2$.
Per $0 < |z - 2| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned} z^3 \cos \left(\frac{1}{z-2} \right) &= (z-2+2)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}} \\ &= ((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{2(z-2)^2} + \frac{1}{24(z-2)^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{120(z-2)^6} + \dots \right). \end{aligned}$$

Da questa espressione segue che la singolarità è essenziale e

$$\operatorname{Res}_{z=2} z^3 \cos \left(\frac{1}{z-2} \right) = \frac{1}{24} - \frac{12}{2} = -\frac{143}{24}.$$

9.7. Espandendo in serie di Taylor le funzioni esponenziale e seno, si ha

$$f(z) = \frac{1}{\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots\right) \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots\right)} = \frac{g(z)}{z^2}$$

con

$$g(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots\right) \left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \dots\right)}$$

analitica e non nulla in $z = 0$. La funzione $f(z)$ ha dunque un polo doppio in $z = 0$ e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= g'(0) \\ &= - \frac{\frac{1}{2} + \frac{z}{3} + \dots}{\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots\right)^2 \left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \dots\right)} \\ &\quad - \frac{-\frac{z}{3} + \frac{z^3}{30} + \dots}{\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots\right) \left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \dots\right)^2} \Bigg|_{z=0} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

9.8. Si osservi che $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione della singolarità isolata in $z = 0$ e del semiasse di diramazione $[\pi/2, \infty)$. Usando gli sviluppi di

Taylor notevoli

$$\begin{aligned}\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, & |z| < \infty, \\ \log(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, & |z| < 1,\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} \log(\cos z) &= \frac{1}{z^2} \log \left[1 + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{z^2} \left[\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{12} z^2 - \frac{1}{45} z^4 + \dots\end{aligned}$$

Lo sviluppo così trovato è uno sviluppo di Laurent valido nella regione $0 < |z| < \pi/2$. La funzione $f(z)$ presenta una singolarità eliminabile in $z = 0$. La funzione

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq 0 \\ -1/2 & z = 0 \end{cases}$$

risulta analitica per $|z| < \pi/2$. Lo sviluppo in serie di Laurent sopra trovato per $f(z)$ coincide con lo sviluppo in serie di Taylor per $g(z)$.

9.9.

a) Indipendentemente dal ramo scelto, la funzione polidroma

$$\frac{\sqrt{z}}{z} = z^{-1/2} = e^{-\frac{1}{2} \log z}$$

ha in $z = 0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione). Non esiste pertanto una regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

b) La funzione $1 - \cos z$ è intera e in $z = 0$ ha uno zero doppio isolato:

$$\begin{aligned}1 - \cos z &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ &= \frac{z^2}{2!} \left(1 - \frac{2!}{4!} z^2 + \frac{2!}{6!} z^4 + \dots \right).\end{aligned}$$

Pertanto la funzione $z/(1 - \cos z)$ ha in $z = 0$ un polo semplice. In una opportuna regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{z}{1 - \cos z} &= \frac{2!}{z} \frac{1}{1 + \left(-\frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \dots\right)} \\ &= \frac{2!}{z} \left[1 - \left(-\frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \dots\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \dots\right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{2!}{z} + \frac{(2!)^2}{4!}z + O(z^3). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z}{1 - \cos z} = 2.$$

c) In questo caso per $0 < |z| < \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned} (z^3 + 3)e^{1/z} &= (z^3 + 3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k+3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{k!} z^{-k} \\ &= z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+3)!} + \frac{3}{n!} \right) z^{-n}. \end{aligned}$$

Quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale di $(z^3 + 3)e^{1/z}$ e si ha

$$\operatorname{Res}_{z=0} (z^3 + 3)e^{1/z} = \frac{1}{(1+3)!} + \frac{3}{1!} = \frac{1}{24} + 3 = \frac{73}{24}.$$

9.10. Espandendo in serie di Maclaurin le funzioni esponenziale, seno e coseno, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)}{z \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots\right)} \\ &= \frac{2}{z^3} \frac{z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots}{1 - \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{z^3} \left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots \right) \left[1 + \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
&= \frac{2}{z^3} \left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{12}z^2 + \frac{7}{720}z^4 + \dots \right) \\
&= \frac{2}{z^3} \left(z + z^2 + \frac{5}{12}z^3 + \frac{1}{12}z^4 - \frac{1}{720}z^5 + \dots \right) \\
&= \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{5}{6} + \frac{z}{6} - \frac{z^2}{360} + \dots
\end{aligned}$$

Pertanto $f(z)$ ha in $z = 0$ un polo di ordine 2 con

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2.$$

9.11.

a) Utilizzando lo sviluppo notevole $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ si ha

$$\begin{aligned}
z \sin \left(\frac{1}{z-3} \right) &= ((z-3) + 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-3)^{2n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-3)^{2n}} \\
&\quad + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-3)^{2n+1}} \\
&= 1 + \frac{3}{z-3} - \frac{1}{3!(z-3)^2} - \frac{3}{3!(z-3)^3} + \dots
\end{aligned}$$

Si tratta dunque di una singolarità isolata essenziale con

$$\operatorname{Res}_{z=3} z \sin \left(\frac{1}{z-3} \right) = 3.$$

b) In questo caso

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z-3)\sin(z-3)} &= \frac{z}{(z-3) \left((z-3) - \frac{(z-3)^3}{6} + \frac{(z-3)^5}{120} + \dots \right)} \\
&= \frac{(z-3) + 3}{(z-3)^2 \left[1 - \left(\frac{(z-3)^2}{6} - \frac{(z-3)^4}{120} + \dots \right) \right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(z-3)+3}{(z-3)^2} \left[1 + \left(\frac{(z-3)^2}{6} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{(z-3)^2}{6} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
&= \frac{3}{(z-3)^2} + \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(z-3) + \dots
\end{aligned}$$

La singolarità isolata in $z = 3$ è in questo caso un polo doppio e

$$\operatorname{Res}_{z=3} \frac{z}{(z-3)\sin(z-3)} = 1.$$

9.12.

- a) Scelto un generico ramo del logaritmo del tipo (quello principale corrisponde a $\varphi = -\pi$)

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \varphi < \theta < \varphi + 2\pi,$$

la funzione $\log(z^2)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti del tipo $z = \pm\sqrt{t}e^{i\varphi/2}$ con $t \geq 0$. Pertanto, tale funzione ha in $z = 0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione) e non esiste una regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

- b) Ricordando che

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n}, \quad |w| < \infty,$$

posto $w = z^{-2}$, per $0 < |z| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned}
z^3 \cos(z^{-2}) &= z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-4n} \\
&= z^3 \left(1 - \frac{z^{-4}}{2!} + \frac{z^{-8}}{4!} - \frac{z^{-12}}{6!} + \dots \right) \\
&= z^3 - \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^5} - \frac{1}{6!} \frac{1}{z^9} + \dots
\end{aligned}$$

Pertanto la funzione $z^3 \cos(z^{-2})$ ha in $z = 0$ una singolarità essenziale e

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^3 \cos(z^{-2}) = -\frac{1}{2}.$$

c) In questo caso per $0 < |z| < \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z^4 \sinh z} &= \frac{1}{z^4} \frac{1}{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots} \\
 &= \frac{1}{z^5} \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots\right)} \\
 &= \frac{1}{z^5} \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots\right)^3 + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{z^5} \left[1 - \frac{1}{3!} z^2 + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) z^4 \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{1}{7!} + \frac{2}{3!5!} - \frac{1}{(3!)^3}\right) z^6 + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{6} \frac{1}{z^3} + \frac{7}{360} \frac{1}{z} - \frac{31}{15120} z + \dots
 \end{aligned}$$

Pertanto, $z = 0$ è un polo di ordine 5 di $1/(z^4 \sinh z)$ e si ha

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^4 \sinh z} = \frac{7}{360}.$$

9.13.

a) La funzione $1 - \cos z$ è intera e in $z = 0$ ha uno zero doppio isolato:

$$\begin{aligned}
 1 - \cos z &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\
 &= \frac{z^2}{2!} \left(1 - \frac{2!}{4!} z^2 + \frac{2!}{6!} z^4 + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Pertanto la funzione $1/(1 - \cos z)$ ha in $z = 0$ un polo doppio. Nella regione anulare $0 < |z| < \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - \cos z} &= \frac{2!}{z^2} \frac{1}{1 + \left(-\frac{2!}{4!} z^2 + \frac{2!}{6!} z^4 + \dots\right)} \\
 &= \frac{2!}{z^2} \left[1 - \left(-\frac{2!}{4!} z^2 + \frac{2!}{6!} z^4 + \dots\right) \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \left(-\frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \dots \right)^2 + \dots \Bigg]$$

$$= \frac{2!}{z^2} + \frac{(2!)^2}{4!} + O(z^2)$$

e quindi

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{1 - \cos z} = 0.$$

b) Indipendentemente dal ramo scelto, la funzione polidroma

$$\frac{\sqrt{z}}{z^2} = z^{-3/2} = e^{-\frac{3}{2} \log z}$$

ha in $z = 0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione). Non esiste pertanto una regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

c) In questo caso per $0 < |z| < \infty$ abbiamo

$$ze^{1/z^2} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z^2} \right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-2k+1}$$

$$= z + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{6z^5} + \dots$$

Quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale di ze^{1/z^2} e si ha

$$\operatorname{Res}_{z=0} ze^{1/z^2} = 1.$$

9.14.

a) La funzione può essere riscritta come

$$\frac{3+z}{z^3+2z^2} = \frac{g(z)}{z^2},$$

con $g(z) = (3+z)/(2+z)$ analitica e non nulla in $z = 0$. Pertanto la funzione considerata ha in $z = 0$ un polo doppio e

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{3+z}{z^3+2z^2} = \frac{g'(0)}{1!} = -\frac{1}{4}.$$

b) Indipendentemente dal ramo scelto, la funzione polidroma

$$z \log z$$

ha in $z = 0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione). Non esiste pertanto una regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

c) Utilizzando lo sviluppo notevole

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log(1+z)} &= \frac{1}{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \left(-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots\right)} \\ &= \frac{1}{z} \left[1 - \left(-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots\right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{12} + \frac{z^2}{24} + \dots \end{aligned}$$

Pertanto la funzione considerata ha in $z = 0$ un polo semplice e

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{\log(1+z)} = 1.$$

9.15.

a) La funzione ha un'unica singolarità isolata in $z = 0$. Ricordando lo sviluppo notevole

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!}, \quad |w| < \infty,$$

posto $w = 1/z$, per $0 < |z| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned} z \cos(z^{-1}) &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}} \\ &= z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \frac{1}{6!z^5} + \dots \end{aligned}$$

Da questa espressione segue che la singolarità è essenziale e

$$\operatorname{Res}_{z=0} z \cos(z^{-1}) = -\frac{1}{2}.$$

- b) Anche in questo caso la funzione ha un'unica singolarità isolata in $z = 0$. Per $0 < |z| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned} z^{-1} \cos(z) &= z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Da questa espressione segue che la singolarità è un polo semplice e

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^{-1} \cos(z) = 1.$$

9.16.

- a) La funzione $\tan(1/z)$ ha come punti singolari $z = 0$ e

$$z_n = \pm \frac{2}{\pi(2n+1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

soluzioni di $\cos(1/z) = 0$. Pertanto $z = 0$ è un punto singolare non isolato. Si noti che la funzione è sviluppabile in serie di Laurent nell'anello $2/\pi < |z| < \infty$, ma il coefficiente di $1/z$ di questo sviluppo non è il residuo della funzione in $z = 0$.

- b) Ricordando lo sviluppo notevole $\sin w = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w^{2k+1} / ((2k+1)!)$ valido per $|w| < \infty$, e posto $w = 1/z$, per $0 < |z| < \infty$ si ha

$$z^n \sin \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k-n+1}}.$$

La singolarità in $z = 0$ è pertanto essenziale e si ha

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^n \sin \frac{1}{z} = \begin{cases} (-1)^{n/2} / (n+1)! & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}.$$

- c) La funzione

$$\sqrt{1 + \frac{1}{z}} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(1 + 1/z)\right)$$

ha una singolarità in $z = 0$ e una linea di diramazione corrispondente ai punti $1 + 1/z = -t$, ovvero $z(t) = -1/(1+t)$, con $t \in [0, \infty)$. Pertanto la funzione considerata è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del

segmento reale $[-1, 0]$. Il punto $z = 0$ è una singolarità non isolata. Si noti che la funzione è sviluppabile in serie di Laurent nell'anello $1 < |z| < \infty$:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{z^k} = 1 + \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + \frac{1}{16z^3} + \dots$$

ma il coefficiente di $1/z$ di questo sviluppo non è il residuo della funzione in $z = 0$.

9.17.

a) Ricordando gli sviluppi notevoli di $\exp z$ e $\sin z$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\sin z)}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \right)^k \\ &= \frac{1}{z^2} \left[1 + \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) z + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

Pertanto la singolarità è un polo doppio e

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\exp(\sin z)}{z^2} = 1.$$

b) Ricordando gli sviluppi notevoli di $\log(1+z)$, $\cos z$ e $\sin z$, e osservando che $\log(\cos z)$ è analitica in un intorno di $z = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \log(\cos z) &= \log(1 + (\cos z - 1)) \\ &= \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots \right)^2 + \dots \\ &= -\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} - \frac{z^6}{45} + \dots \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{\log(\cos z)} &= \frac{z - \frac{z^3}{6} + \dots}{-\frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{2z^4}{45} \dots \right)} \\ &= -\frac{2}{z^2} \left(z - \frac{z^3}{6} + \dots \right) \left[1 - \left(\frac{z^2}{6} + \frac{2z^4}{45} + \dots \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{z} + \frac{2z}{3} + \dots$$

Pertanto la singolarità è un polo semplice e

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{\log(\cos z)} = -2.$$

In dettaglio, la funzione $\log(\cos z)$ è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti $z(t)$ tali che $\cos(z(t)) = -t$ con $t \in [0, \infty)$. Posto $w(t) = \exp(iz(t))$, si ha

$$w(t) = \begin{cases} -t \pm i\sqrt{1-t^2} & t \in [0, 1) \\ -t \pm \sqrt{t^2-1} & t \in [1, \infty) \end{cases}.$$

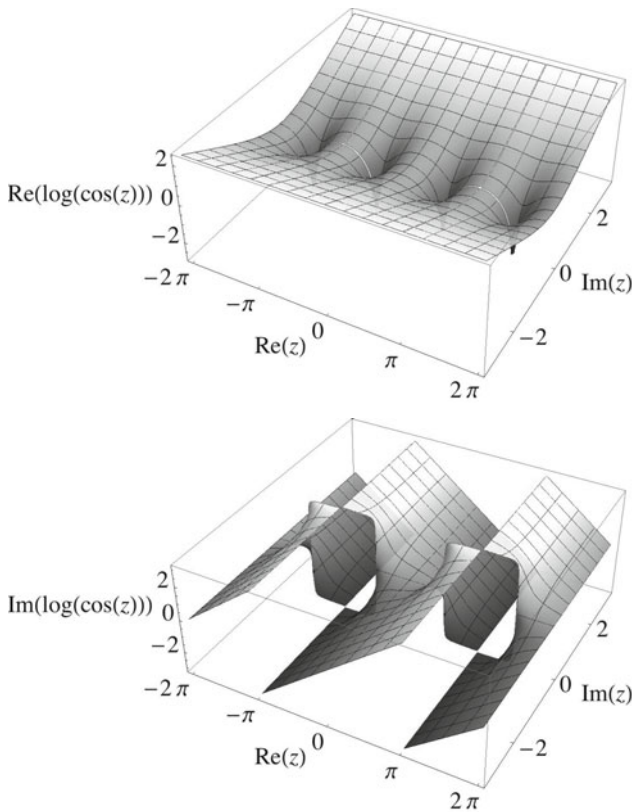


Fig. A.8. Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\log(\cos(z))$

Per $t \in [0, 1)$, si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= -i \log \left(-t \pm i\sqrt{1-t^2} \right) \\ &= -i \left(\ln \sqrt{t^2 + (1-t^2)} + i(\varphi(t) + 2k\pi) \right) \\ &= \varphi(t) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

dove $\pi/2 \leq \varphi(t) \leq 3\pi/2$ ($\cos \varphi$ negativo e $\sin \varphi$ positivo o negativo), cioè i segmenti dell'asse reale $[(2k+1/2)\pi, (2k+3/2)\pi]$ con $k \in \mathbb{Z}$. Per $t \in [1, \infty)$, si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= -i \log \left(-t \pm \sqrt{t^2 - 1} \right) \\ &= -i \left(\ln \left(t \mp \sqrt{t^2 - 1} \right) + i(\pi + 2k\pi) \right) \\ &= (2k+1)\pi - i \ln \left(t \mp \sqrt{t^2 - 1} \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

che rappresentano gli assi immaginari passanti per $z = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

9.18. Si osservi innanzitutto che si può scrivere $f(z) = h(z)/(z - z_0)$ con h analitica e non nulla in z_0 . Pertanto

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = h(z_0).$$

Inoltre si osservi che fg è analitica in un anello $0 < |z - z_0| < r$ e ivi sviluppabile in serie di Laurent. Detta γ una curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente, contenuta in $A(z_0, 0, r)$ e contenente z_0 al suo interno, il residuo di fg in z_0 è per definizione

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)g(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)g(z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(z)g(z)}{z - z_0} dz \\ &= h(z_0)g(z_0), \end{aligned}$$

avendo calcolato l'integrale mediante la formula di Cauchy in quanto hg è una funzione analitica su e dentro il cammino di integrazione γ . Combinando i due risultati si ottiene l'asserto.

9.19. Si osservi che $\sin z = 0$ nei punti $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Per $n \neq 0$, $z^2 \sin z$ ha uno zero semplice in z_n , inoltre e^{z_n} è diverso da zero. Quindi f ha in z_n un polo semplice con

$$\operatorname{Res}_{z=z_n} f(z) = \left. \frac{e^z}{2z \sin z + z^2 \cos z} \right|_{z=z_n} = (-1)^n \frac{e^{n\pi}}{n^2 \pi^2}.$$

In $z_0 = 0$, $z^2 \sin z$ ha uno zero triplo, inoltre $e^{z_0} \neq 0$. Pertanto f ha in z_0 un polo di ordine 3. Il corrispondente residuo si trova sviluppando f in serie di Laurent nella regione $0 \leq |z| \leq \pi$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots}{z^2(z - \frac{z^3}{6} + \dots)} \\ &= \frac{1}{z^3} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots \right) \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{3z} + \dots, \end{aligned}$$

da cui si conclude che

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{2}{3}.$$

9.20. La funzione ha un unico punto singolare isolato in $z = 2$. Usando lo sviluppo notevole

$$\cos w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{2k}, \quad |w| < \infty,$$

posto $w = 1/(z - 2)$, nella regione anulare $0 < |z - 2| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= ((z - 2) + 2)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(z - 2)^{2k}} \\ &= ((z - 2)^3 + 6(z - 2)^2 + 12(z - 2) + 8) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(z - 2)^{2k}}. \end{aligned}$$

Da questa espressione risulta che la singolarità è essenziale e

$$\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \frac{(-1)^2}{4!} + 12 \frac{(-1)^1}{2!} = \frac{1}{24} - 6 = -\frac{143}{24}.$$

9.21. Il ramo principale di $\log(1 + z)$ è una funzione analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione del semiasse reale $\{z = -1 - t, t \in [0, \infty)\}$. Il denominatore di $f(z)$ si annulla nei punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto f ha singolarità isolate nei punti $z = k\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$. Consideriamo prima il punto singolare $z = 0$. Nell'anello $0 < |z| < 1$, f è sviluppabile in serie di Laurent e i primi termini di tale sviluppo sono

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots}{z(z - \frac{z^3}{3!} + \dots)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z} \frac{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \dots} \\
&= \frac{1}{z} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots \right) \left(1 + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \dots
\end{aligned}$$

Da questo si deduce che $z = 0$ è un polo semplice e

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1.$$

Per quanto riguarda i punti singolari $z = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, si osservi che in un intorno di questi punti possiamo porre $f(z) = p(z)/q(z)$ con $p(z) = z^{-1} \log(1+z)$ e $q(z) = \sin z$. Le funzioni p e q sono analitiche in $z = k\pi$, inoltre $p(k\pi) = (k\pi)^{-1} \ln(1+k\pi) \neq 0$, $q(k\pi) = 0$ e $q'(k\pi) = (-1)^k$. Si conclude che $z = k\pi$ è un polo semplice e

$$\operatorname{Res}_{z=k\pi} f(z) = \frac{p(k\pi)}{q'(k\pi)} = (-1)^k \frac{\ln(1+k\pi)}{k\pi}, \quad k = 1, 2, \dots$$

9.22. Per $n \geq 1$ intero, la funzione $f_n(z)$ ha un polo semplice in $z = 2$, doppio in $z = 1$, di ordine n in $z = 0$ ed è altrove analitica. Nella regione $0 < |z| < 1$ essa è sviluppabile in serie di Laurent e, ricordando il risultato notevole della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
f_n(z) &= \frac{1}{z^n} \left(\frac{1}{1-z} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} \right) \\
&= -\frac{1}{2z^n} (1+z+z^2+z^3+\dots)^2 \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots \right) \\
&= -\frac{1}{2z^n} (1+2z+3z^2+4z^3+\dots) \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots \right) \\
&= -\frac{1}{2z^n} \left(1 + \frac{5}{2}z + \frac{17}{4}z^2 + \frac{49}{8}z^3 + \dots \right) \\
&= -\frac{1}{2} z^{-n} - \frac{5}{4} z^{1-n} - \frac{17}{8} z^{2-n} - \frac{49}{16} z^{3-n} + O(z^{4-n}).
\end{aligned}$$

Da questa espressione segue immediatamente

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=0} f_1(z) &= -\frac{1}{2}, & \operatorname{Res}_{z=0} f_2(z) &= -\frac{5}{4}, \\
\operatorname{Res}_{z=0} f_3(z) &= -\frac{17}{8}, & \operatorname{Res}_{z=0} f_4(z) &= -\frac{49}{16}.
\end{aligned}$$

Se $g(z)$ è analitica in $z = 0$, essa è sviluppabile in serie di potenze intorno a

$z = 0$, cioè $\exists r > 0$ tale che $\forall z \in B(0, r)$ si ha

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Allora, per $0 < |z| < \min(1, r)$ risulta

$$\begin{aligned} f_2(z)g(z) &= \left(-\frac{1}{2z^2} - \frac{5}{4z} - \frac{17}{8} - \frac{49}{16}z + \dots \right) (a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots) \\ &= -\frac{a_0}{2} \frac{1}{z^2} + \left(-\frac{5}{4}a_0 - \frac{1}{2}a_1 \right) \frac{1}{z} + O(z^0). \end{aligned}$$

Si ha un polo doppio se $a_0 \neq 0$ e un residuo nullo se $a_1/a_0 = -5/2$. La funzione poldroma $g(z) = (1+z)^{-5/2}$ risponde ai requisiti richiesti.

9.23. La funzione $f(z)$ presenta una singolarità essenziale in $z = -2$ ed un polo semplice in $z = 3$, altrove è analitica. Nell'anello $A(-2, 0, 5)$ è sviluppabile in serie di Laurent. Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad |z| < \infty,$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1,$$

per $0 < |(z+2)/3| < 1$ si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{z+2}{5}} (z+2)^4 \sin \left(\frac{1}{z+2} \right) \\ &= -\frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} (z+2)^{k+4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Al residuo di $f(z)$ in $z = -2$ contribuiscono tutti i termini ottenuti dal precedente prodotto fra serie per i quali $k+4-(2n+1) = -1$, cioè $n = k/2 + 2$. Questa relazione può essere soddisfatta solo per k pari. Posto $k = 2j$, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-2} f(z) &= -\frac{1}{5} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2j}} \frac{(-1)^{j+2}}{(2j+5)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{5^{2j+1} (2j+5)!} \\ &= -\frac{1}{600} + \frac{1}{630000} + \dots \end{aligned}$$

9.24. Per ipotesi, per $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ possiamo scrivere

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

con $g(z)$ analitica e non nulla in z_0 . Derivando questa relazione si ha

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} p(z) &= \left(\frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) p(z) \\ &= \left(\frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Essendo $g'(z)/g(z)$ analitica in z_0 , segue immediatamente che

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} p(z) \right] = m p(z_0).$$

9.25. Per ipotesi $\exists \varepsilon > 0$ tale che per $|z - z_0| < \varepsilon$ vale lo sviluppo in serie di Taylor

$$\begin{aligned} q(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \\ &= (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0) h(z). \end{aligned}$$

La funzione $h(z)$ in quanto somma di una serie di potenze è analitica in z_0 . In z_0 essa risulta anche non nulla. Infatti derivando $q(z) = (z - z_0)h(z)$ rispetto a z si ha

$$q'(z) = h(z) + (z - z_0)h'(z) \quad \Rightarrow \quad h(z_0) = q'(z_0).$$

Derivando ancora si ottiene

$$q''(z) = 2h'(z) + (z - z_0)h''(z) \quad \Rightarrow \quad 2h'(z_0) = q''(z_0).$$

Posto

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2}, \quad g(z) = h(z)^{-2},$$

per le proprietà di h , la funzione g risulta analitica e non nulla in z_0 . Quindi

$f(z)$ ha un polo di ordine 2 in z_0 con

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = g'(z_0) = -\frac{2h'(z_0)}{h(z_0)^3} = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^3}.$$

9.26. Poiché $f(z)$ ha un polo di ordine m in z_0 , esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m},$$

con $b_m \neq 0$. Pertanto

$$\begin{aligned} (z - z_0)^m f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m} \\ &\quad + b_1 (z - z_0)^{m-1} + b_2 (z - z_0)^{m-2} + \cdots + b_m. \end{aligned}$$

Derivando questa espressione, membro a membro, $m - 1$ volte rispetto a z , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k + m)(k + m - 1) \cdots (k + 2)(z - z_0)^{k+1} \\ &\quad + b_1(m - 1)(m - 2) \cdots 1, \end{aligned}$$

da cui, dividendo per $(m - 1)!$ e prendendo il limite $z \rightarrow z_0$, segue

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m - 1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) = b_1.$$

9.27. Si ponga $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$. Si tratta di una funzione $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ analitica in \mathbb{C} . Poiché $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$ e \mathbb{C} è aperto e connesso, per il Teorema 9.15 f è identicamente nulla in \mathbb{C} .

Esercizi del Capitolo 10

10.1. Ponendo $e^{i\theta} = z$, si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} = \int_{|z|=1} f(z) dz,$$

dove

$$f(z) = \frac{-4iz}{(bz^2 + 2az + b)^2}$$

e la circonferenza $|z| = 1$ è orientata positivamente. Poiché le radici di $bz^2 + 2az + b = 0$ sono i numeri reali

$$z_{\pm} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1},$$

con $z_- < -1$ e $-1 < z_+ < 0$ (si osservi che $z_+z_- = 1$), la funzione $f(z)$ ha all'interno della circonferenza $|z| = 1$ una singolarità isolata in $z = z_+$. Tale singolarità è un polo doppio in quanto

$$f(z) = \frac{-4iz}{b^2(z - z_-)^2(z - z_+)^2} = \frac{g(z)}{(z - z_+)^2},$$

con

$$g(z) = \frac{-4iz}{b^2(z - z_-)^2}$$

analitica e non nulla in z_+ . Il corrispondente residuo vale

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_+} f(z) &= g'(z_+) \\ &= \frac{-4i}{b^2} \frac{(z_+ - z_-) - 2z_+}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= \frac{-ia}{(a^2 - b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_+} f(z) \\ &= \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

10.2. Ponendo $e^{i\theta} = z$, si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \int_{\gamma} \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} \frac{(z^2 + 1)^2}{4iz^3} dz,$$

dove $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La funzione da integrare

$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4iz^3}$$

è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo di ordine 3 in $z = 0$. Per il teorema dei residui

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \frac{g''(0)}{2!},$$

dove $g(z) = (z^2 + 1)^2 / 4i$. Poiché $g''(z) = (3z^2 + 1) / i$ si conclude

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = 2\pi i \frac{g''(0)}{2!} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

10.3. Ponendo $e^{i\theta} = z$ si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

dove $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e $f(z) = -i/(z^2 + 2az + 1)$. La funzione f ha due poli semplici in $z_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Si osservi che $|z_-| > 1$ e, poiché $z_+ z_- = 1$, $|z_+| < 1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino γ mentre quello in z_- è esterno, e per il teorema dei residui si conclude

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_+} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{-i}{z - z_-} \right|_{z=z_+} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

10.4. Posto $z = e^{i\theta}$ e detto γ il cammino chiuso $|z| = 1$ percorso in verso antiorario, si ha

$$\int_0^{2\pi} (\sin \theta)^{2n} d\theta = \int_{\gamma} \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^{2n}}{i(-1)^n 2^{2n} z^{2n+1}} dz.$$

La funzione integranda è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo di ordine $2n + 1$ in $z = 0$. Usando l'espansione del binomio di Newton

$$(z^2 - 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} (z^2)^k (-1)^{2n-k},$$

otteniamo lo sviluppo in serie di Laurent di $(z^2 - 1)^{2n}/z^{2n+1}$ per $0 < |z| < \infty$:

$$\frac{(z^2 - 1)^{2n}}{z^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^{2n-k} (2n)!}{k! (2n-k)!} z^{2k+1-2n}.$$

Il termine $k = n$ di tale sviluppo, proporzionale a z^{-1} , fornisce

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z^2 - 1)^{2n}}{z^{2n+1}} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n! n!}.$$

Per il teorema dei residui concludiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\sin \theta)^{2n} d\theta &= \frac{1}{i(-1)^n 2^{2n}} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z^2 - 1)^{2n}}{z^{2n+1}} \\ &= \frac{\pi (2n)!}{2^{2n-1} (n!)^2}. \end{aligned}$$

10.5. Ponendo $e^{i\theta} = z$ si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \int_\gamma f(z) dz,$$

dove $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e

$$f(z) = \frac{-2iz}{(z^2 + 2az + 1)^2}.$$

La funzione f ha due poli doppi in $z_\pm = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Si osservi che $|z_-| > 1$ e, poiché $z_+ z_- = 1$, $|z_+| < 1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino γ mentre quello in z_- è esterno. Il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_+} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{d}{dz} \frac{-2iz}{(z - z_-)^2} \right|_{z=z_+} \\ &= 2\pi i \frac{2i(z_+ + z_-)}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

10.6. Ponendo $e^{i\theta} = z$ si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \int_\gamma f(z) dz,$$

dove $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e

$$f(z) = \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}.$$

La funzione f ha due poli semplici in $z_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3}$. Si osservi che $|z_-| > 1$ e, poiché $z_+ z_- = 1$, $|z_+| < 1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino γ mentre quello in z_- è esterno. Dal teorema dei residui si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_+} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{-2i}{z - z_-} \right|_{z=z_+} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

10.7. Posto $z = e^{i\theta}$ e quindi $dz = ie^{i\theta} d\theta$, si ha

$$\int_0^{2\pi} \sin(\exp(\cos \theta + i \sin \theta)) d\theta = \int_{\gamma} \sin(\exp(z)) \frac{dz}{iz},$$

dove $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La funzione integranda $\sin(\exp(z))$ è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = 0$. Per il teorema dei residui si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sin(\exp(z)) \frac{dz}{iz} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin(\exp(z))}{iz} \\ &= 2\pi i \frac{\sin(\exp(0))}{i} \\ &= 2\pi \sin(1). \end{aligned}$$

10.8. L'integrale proposto è equivalente all'integrale della funzione complessa $e^{iz}/(iz)$ lungo il cammino $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\gamma(\theta)} \frac{\gamma'(\theta)}{i\gamma(\theta)} d\theta = \int_{\gamma} \frac{e^z}{iz} dz.$$

Quest'ultimo integrale si valuta immediatamente con il teorema dei residui:

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{iz} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{iz} = 2\pi i \frac{e^0}{i} = 2\pi.$$

10.9. Si osservi, per iniziare, che l'integrale improprio esiste e si ha

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx.$$

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

è analitica ovunque ad eccezione dei due poli doppi in $z = \pm i$. L'integrale di f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$, dove $\lambda_R(x) = x$, $-R \leq x \leq R$ e $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, vale quindi, per $R > 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+1)^2} dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) \\ &= 2\pi i g'(i) \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

avendo utilizzato per il calcolo del residuo la decomposizione $f(z) = g(z)/(z-i)^2$ con $g(z) = 1/(z+i)^2$ analitica e non nulla in $z = i$. Poiché

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

prendendo il limite $R \rightarrow \infty$ dell'integrale su γ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

10.10. La funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} = \frac{z}{(z-z_+)^2(z-z_-)^2}$$

è analitica ovunque ad eccezione dei due poli doppi in $z_{\pm} = -2 \pm 3i$. L'integrale di f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$, dove $\lambda_R(x) = x$, $-R \leq x \leq R$,

e $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, per il teorema dei residui vale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_+} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - z_-)^2} \right|_{z=z_+} \\ &= 2\pi i \frac{-z_+ - z_-}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= -\frac{\pi}{27}. \end{aligned}$$

Poiché per $z \in \{\gamma_R\}$ e R grande risulta $|f(z)| \leq R/(R^2 - 4R - 13)^2$, segue

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R^2}{(R^2 - 4R - 13)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Prendendo il limite $R \rightarrow \infty$ dell'integrale su γ si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx = \text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx = -\frac{\pi}{27}.$$

10.11. La funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} = \frac{z^2}{(z - i)(z + i)(z - 3i)(z + 3i)}$$

è analitica ovunque ad eccezione dei quattro poli semplici in $\pm i$ e $\pm 3i$. L'integrale di f sul cammino chiuso $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$, dove $\lambda_R(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, e $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, vale quindi, per $R > 3$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=3i} f(z) \right) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{16i} + \frac{3}{16i} \right) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

prendendo il limite $R \rightarrow \infty$ dell'integrale su γ , si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{4}.$$

10.12. La funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+16)^2}$$

ha poli doppi in $z = \pm 4i$. Detto $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$ il cammino di integrazione chiuso definito da $\lambda_R(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, e $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, poiché f è, per $R > 4$, analitica su e dentro γ ad eccezione del polo doppio in $z = 4i$, il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\lambda_R} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=4i} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{g'(z)}{1!} \right|_{z=4i} \\ &= \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

dove $g(z) = z^2/(z+4i)^2$. Per gli integrali sui cammini che compongono γ si ha

$$\int_{\lambda_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+16)^2} dx,$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \frac{R^2}{(R^2-16)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Pertanto nel limite $R \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+16)^2} dx = \frac{\pi}{8}.$$

Per la parità della funzione integranda si conclude

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+16)^2} dx = \frac{\pi}{16}.$$

10.13. Poiché la funzione integranda è pari,

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+b^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+b^2} dx.$$

Posto $f(z) = z/(z^2 + b^2)$ e detto $\gamma = \lambda + \gamma_R$ il cammino chiuso di integrazione con $\lambda(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, e $\gamma_R(\theta) = R \exp(i\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, per $R > b$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) e^{iaz} dz &= \int_{\lambda} f(z) e^{iaz} dz + \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \\ &= \int_{-R}^R \frac{x e^{iax}}{x^2 + b^2} dx + \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ib} [f(z) e^{iaz}] \\ &= 2\pi i \left. \frac{z e^{iaz}}{z + ib} \right|_{z=ib} \\ &= \pi i e^{-ab}. \end{aligned}$$

Per $z \in \{\gamma_R\}$, risulta $|f(z)| \leq R/(R^2 - b^2)$ infinitesimo per $R \rightarrow \infty$ e quindi per il lemma di Jordan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

In conclusione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + b^2} dx = \pi i e^{-ab},$$

da cui, prendendo la parte immaginaria,

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

10.14. Posto $f(z) = z/((z - b)^2 + c^2)$ e detto $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$ il cammino di integrazione chiuso con $\lambda_R(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, e $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, per $R > \sqrt{b^2 + c^2}$ la funzione $f(z) e^{iaz}$ è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = b + ic$. Per il teorema dei residui si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) e^{iaz} dz &= \int_{\lambda_R} f(z) e^{iaz} dz + \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \\ &= \int_{-R}^R \frac{x e^{iax}}{(x - b)^2 + c^2} dx + \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=b+ic} f(z) e^{iaz} \\ &= \frac{\pi}{c} e^{-ac} (b + ic) e^{iab}. \end{aligned}$$

Per $z \in \{\gamma_R\}$, risulta $|f(z)| \leq R/((R - b)^2 - c^2)$ infinitesimo per $R \rightarrow \infty$ e

quindi per il lemma di Jordan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

Il limite $R \rightarrow \infty$ dell'integrale su γ in conclusione fornisce

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x e^{iax}}{(x-b)^2 + c^2} dx = \frac{\pi}{c} e^{-ac} (b + ic) e^{iab},$$

da cui, prendendo la parte immaginaria,

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{(x-b)^2 + c^2} dx = \frac{\pi}{c} e^{-ac} (b \sin(ab) + c \cos(ab)).$$

10.15. Posto $f(z) = ze^{iz}/((z-b)^2 + c^2)$ e detto γ il perimetro, orientato positivamente, del quadrato di vertici $-R_1, R_2, R_2 + i(R_1 + R_2), -R_1 + i(R_1 + R_2)$, per $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ sufficientemente grandi la funzione $f(z)$ è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = b + ic$. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=b+ic} \frac{ze^{iaz}/(z-(b-ic))}{z-(b+ic)} \\ &= 2\pi i \left. \frac{ze^{iaz}}{z-(b-ic)} \right|_{z=b+ic} \\ &= \frac{\pi}{c} e^{-ac} (b + ic) e^{iab}. \end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\lambda_k} f(z) dz,$$

dove $\lambda_1(x) = x, -R_1 \leq x \leq R_2$, $\lambda_2(y) = R_2 + iy, 0 \leq y \leq R_1 + R_2$, $\lambda_3(x) = x + i(R_1 + R_2), R_2 \geq x \geq -R_1$, e $\lambda_4(y) = -R_1 + iy, R_1 + R_2 \geq y \geq 0$. Gli integrali lungo i cammini che compongono γ valgono

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_{-R_1}^{R_2} \frac{x e^{iax}}{(x-b)^2 + c^2} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z) dz &= \int_0^{R_1+R_2} \frac{y e^{iaR_2-ay}}{(R_2 + iy - b)^2 + c^2} i dy \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\lambda_3} f(z) dz &= \int_{R_2}^{-R_1} \frac{x e^{iax-a(R_1+R_2)}}{(x + i(R_1 + R_2) - b)^2 + c^2} dx \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

$$\int_{\lambda_4} f(z) dz = \int_{R_1+R_2}^0 \frac{ye^{-iaR_1-ay}}{(-R_1+iy-b)^2+c^2} idy \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0.$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{(x-b)^2+c^2} dx = \frac{\pi}{c} e^{-ac} (b+ic) e^{iab}.$$

Prendendo la parte reale e quella immaginaria di questa espressione si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{(x-b)^2+c^2} dx &= \frac{\pi}{c} e^{-ac} (b \cos(ab) - c \sin(ab)), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{(x-b)^2+c^2} dx &= \frac{\pi}{c} e^{-ac} (b \sin(ab) + c \cos(ab)). \end{aligned}$$

10.16. Posto $f(z) = e^{iz}/(z(z^2+1))$ e detto $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_\rho$ il cammino chiuso di integrazione, dove $\lambda_1(x) = x$, $\rho \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\lambda_2(x) = -x$, $R \geq x \geq \rho$, e $\gamma_\rho(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\pi \geq \theta \geq 0$, poiché f è, per $R > 1$ e $\rho < 1$, analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = i$, il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\gamma_\rho} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{e^{iz}}{z(z+i)} \right|_{z=i} \\ &= -i\pi e^{-1}. \end{aligned}$$

Per gli integrali sui cammini che compongono γ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_{\rho}^R \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z) dz &= \int_R^{\rho} \frac{e^{-ix}}{x(x^2+1)} dx = - \int_{\rho}^R \frac{e^{-ix}}{x(x^2+1)} dx, \\ \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \frac{\pi R}{R(R^2-1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Per valutare l'integrale su γ_ρ si osservi che, avendo f un polo semplice in $z = 0$, per $0 < |z| < 1$ possiamo porre $f(z) = g(z) + z^{-1} \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$ con $g(z)$

analitica in $|z| < 1$. Inoltre

$$\left| \int_{\gamma_\rho} g(z) dz \right| \leq \pi \rho \sup_{z \in \{\gamma_\rho\}} |g(z)| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$$

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = -i\pi,$$

e quindi

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} -i\pi \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -i\pi \left. \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \right|_{z=0} = -i\pi.$$

In conclusione, nel limite $\rho \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ si ha

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x(x^2 + 1)} dx - i\pi = -i\pi e^{-1},$$

ovvero

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1}).$$

10.17. Posto $f(z) = e^{-i\omega z} / (z^2 + a^2)$ e detti $\gamma_\pm = \lambda_R + \gamma_{R\pm}$ i cammini chiusi di integrazione con $\lambda_R(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, $\gamma_{R\pm}(\theta) = R e^{\pm i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, si osservi che per $R \rightarrow \infty$ la funzione $f(z)$ si annulla su $\{\gamma_{R+}\}$ se $\omega < 0$ e su $\{\gamma_{R-}\}$ se $\omega > 0$. Inoltre f è analitica su e dentro γ_\pm ad eccezione del polo semplice in $z = \pm ia$. Dal teorema dei residui, per $\omega < 0$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} f(z) dz &= \int_{\lambda_R} f(z) dz + \int_{\gamma_{R+}} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{e^{-i\omega z}}{z + ia} \right|_{z=ia} \\ &= \pi \frac{e^{\omega a}}{a}, \end{aligned}$$

mentre per $\omega > 0$ otteniamo (si noti il segno negativo dovuto all'orientamento negativo di γ_-)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-} f(z) dz &= \int_{\lambda_R} f(z) dz + \int_{\gamma_{R-}} f(z) dz \\ &= -2\pi i \operatorname{Res}_{z=-ia} f(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\pi i \left. \frac{e^{-i\omega z}}{z - ia} \right|_{z=-ia} \\
&= \pi \frac{e^{-\omega a}}{a}.
\end{aligned}$$

Gli integrali sui cammini che compongono γ_{\pm} valgono

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_R} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + a^2} dx, \\
\int_{\gamma_{R\pm}} f(z) dz &= \int_0^{\pi} \frac{e^{-i\omega R(\cos \theta \pm i \sin \theta)}}{R^2 e^{\pm i 2\theta} + a^2} (\pm i R e^{\pm i \theta}) d\theta,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\left| \int_{\gamma_{R\pm}} f(z) dz \right| \leq \pi \frac{R}{R^2 - a^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

In conclusione, nel limite $R \rightarrow \infty$ per ogni valore di ω , compreso il caso banale $\omega = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}.$$

10.18. Si osservi, per iniziare, che l'integrale improprio esiste e si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Posto $f(z) = z/(z^2 + 2z + 5)$ e detto $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$ il cammino di integrazione chiuso con $\lambda_R(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, e $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, per $R > \sqrt{5}$ la funzione $f(z)e^{i\pi z}$ è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = -1 + 2i$. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) e^{i\pi z} dz &= \int_{\lambda_R} f(z) e^{i\pi z} dz + \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\pi z} dz \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+2i} f(z) e^{i\pi z} \\
&= \frac{\pi}{2} (1 - 2i) e^{-2\pi}.
\end{aligned}$$

Per $z \in \{\gamma_R\}$, risulta $|f(z)| \leq R/(R^2 - 2R - 5)$ infinitesimo per $R \rightarrow \infty$ e quindi per il lemma di Jordan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\pi z} dz = 0.$$

Inoltre

$$\int_{\lambda_R} f(z) e^{i\pi z} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{x e^{i\pi x}}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Pertanto, nel limite $R \rightarrow \infty$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\cos(\pi x) + i \sin(\pi x))}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{\pi}{2} (1 - 2i) e^{-2\pi},$$

da cui, prendendo la parte immaginaria,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx = -\pi e^{-2\pi}.$$

10.19. Si integri la funzione $f(z) = e^{iz}/(z^2 - 6z + 10)$ lungo il cammino $\gamma = \lambda + \gamma_R$, dove $\lambda(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, e $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Poiché f ha due poli semplici in $3 \pm i$, per $R > \sqrt{10}$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\lambda} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=3+i} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{e^{iz}}{z - (3-i)} \right|_{z=3+i} \\ &= \frac{\pi e^{3i}}{e}. \end{aligned}$$

Prendendo la parte immaginaria di questa uguaglianza e osservando che

$$\begin{aligned} \int_{\lambda} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 6x + 10} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 6x + 10} \\ \int_{\gamma_R} f(z) dz &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 - 6x + 10} = \frac{\pi \sin 3}{e}.$$

10.20. Detto I il valore dell'integrale in questione, per la formula (10.9) si ha

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 1} dx \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{z e^{iz}}{z^4 + 1} + \operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{z e^{iz}}{z^4 + 1} \right) \right],
\end{aligned}$$

dove $z_k = e^{i(\pi+2\pi k)/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, sono le 4 radici distinte di $(-1)^{1/4}$. Nei poli semplici z_0 e z_1 , i residui valgono

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{z e^{iz}}{z^4 + 1} &= \frac{z_0 e^{iz_0}}{4z_0^3} = \frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i} (\cos(1/\sqrt{2}) + i \sin(1/\sqrt{2})), \\
\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{z e^{iz}}{z^4 + 1} &= \frac{z_1 e^{iz_0}}{4z_1^3} = -\frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i} (\cos(1/\sqrt{2}) - i \sin(1/\sqrt{2})).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i} \left(\cos(1/\sqrt{2}) + i \sin(1/\sqrt{2}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos(1/\sqrt{2}) + i \sin(1/\sqrt{2}) \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \sin(1/\sqrt{2}) e^{-1/\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

10.21. Si consideri la funzione complessa $f(z) = (ze^{iz} + 3)/(z^2 + 1)$ che ha poli semplici in $z = \pm i$ e la si integri lungo il perimetro γ , orientato positivamente, del quadrato di vertici $-R_1$, R_2 , $R_2 + i(R_1 + R_2)$, $-R_1 + i(R_1 + R_2)$, con $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ e $R_1 + R_2 > 1$. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) \\
&= 2\pi i \frac{ie^{-1} + 3}{2i} \\
&= \pi(3 + i/e).
\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\lambda_k} f(z) dz,$$

dove $\lambda_1(x) = x$, $-R_1 \leq x \leq R_2$, $\lambda_2(y) = R_2 + iy$, $0 \leq y \leq R_1 + R_2$, $\lambda_3(x) = x + i(R_1 + R_2)$, $R_2 \geq x \geq -R_1$, e $\lambda_4(y) = -R_1 + iy$, $R_1 + R_2 \geq y \geq 0$.

Gli integrali lungo i cammini che compongono γ valgono

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_{-R_1}^{R_2} \frac{xe^{ix} + 3}{x^2 + 1} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_0^{R_1+R_2} \frac{ye^{iR_2-y} + 3}{(R_2 + iy)^2 + 1} idy \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\lambda_3} f(z)dz &= \int_{R_2}^{-R_1} \frac{xe^{ix-(R_1+R_2)} + 3}{(x + i(R_1 + R_2))^2 + 1} dx \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\lambda_4} f(z)dz &= \int_{R_1+R_2}^0 \frac{ye^{-iR_1-y} + 3}{(-R_1 + iy)^2 + 1} idy \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} + 3}{x^2 + 1} dx = \pi(3 + i/e).$$

Prendendo la parte reale e quella immaginaria di questa espressione e osservando che $x \cos(x)/(x^2 + 1)$ è una funzione dispari, si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x) + 3}{x^2 + 1} dx = \pi(3 + 1/e).$$

10.22. Si consideri la funzione complessa $f(z) = (ze^{iz} + 7)/(z^2 + 1)^2$ che ha due poli doppi in $z = \pm i$ e la si integri lungo il perimetro γ , orientato positivamente, del quadrato di vertici $-R_1, R_2, R_2 + i(R_1 + R_2), -R_1 + i(R_1 + R_2)$, con $R_1 > 0, R_2 > 0$ e $R_1 + R_2 > 1$. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{d}{dz} \frac{ze^{iz} + 7}{(z + i)^2} \right|_{z=i} \\ &= 2\pi i \left. \frac{(e^{iz} + i ze^{iz})(z + i)^2 - (ze^{iz} + 7)2(z + i)}{(z + i)^4} \right|_{z=i} \\ &= 2\pi i \frac{-4i(7 + ie^{-1})}{16} \\ &= \frac{\pi}{2}(7 + ie^{-1}).\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\lambda_k} f(z)dz,$$

dove $\lambda_1(x) = x$, $-R_1 \leq x \leq R_2$, $\lambda_2(y) = R_2 + iy$, $0 \leq y \leq R_1 + R_2$, $\lambda_3(x) = x + i(R_1 + R_2)$, $R_2 \geq x \geq -R_1$, e $\lambda_4(y) = -R_1 + iy$, $R_1 + R_2 \geq y \geq 0$. Gli integrali lungo i cammini che compongono γ valgono

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_{-R_1}^{R_2} \frac{xe^{ix} + 7}{(x^2 + 1)^2} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_0^{R_1+R_2} \frac{ye^{iR_2-y} + 7}{((R_2 + iy)^2 + 1)^2} idy \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\lambda_3} f(z)dz &= \int_{R_2}^{-R_1} \frac{xe^{ix-(R_1+R_2)} + 7}{((x + i(R_1 + R_2))^2 + 1)^2} dx \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\lambda_4} f(z)dz &= \int_{R_1+R_2}^0 \frac{ye^{-iR_1-y} + 7}{((-R_1 + iy)^2 + 1)^2} idy \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} + 7}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}(7 + ie^{-1}).$$

Prendendo la parte reale e quella immaginaria di questa espressione si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(x) + 7}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}7, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{(x^2 + 1)^2} dx &= \frac{\pi}{2}e^{-1},\end{aligned}$$

da cui si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x) + 7}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}(7 + e^{-1}).$$

10.23. Posto $f(z) = (\log z)/(z^2 + 1) = (\log z)/((z + i)(z - i))$, dove

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

e detto $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_\rho$ il cammino chiuso di integrazione con $\lambda_1(x) = x$, $\rho \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\lambda_2(x) = xe^{i\pi}$, $R \geq x \geq \rho$, e $\gamma_\rho(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\pi \geq \theta \geq 0$, poiché f è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = i$, per $R > 1$ e $\rho < 1$ il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz + \int_{\gamma_\rho} f(z)dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i \frac{\log(1e^{i\pi/2})}{i+i} \\
&= i \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Per gli integrali sui cammini che compongono γ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{x^2+1} dx, \\
\int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_R^{\rho} \frac{\ln x + i\pi}{x^2+1} e^{i\pi} dx = \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{x^2+1} dx + i\pi \int_{\rho}^R \frac{1}{x^2+1} dx, \\
\int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^{\pi} \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iR e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\
\int_{\gamma_{\rho}} f(z)dz &= \int_{\pi}^0 \frac{\ln \rho + i\theta}{\rho^2 e^{2i\theta} + 1} i\rho e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Quindi nel limite $\rho \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ otteniamo

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx + i\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = i \frac{\pi^2}{2},$$

da cui, prendendo la parte reale e quella immaginaria, si conclude

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0, \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

10.24. Scelta la funzione

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{\frac{1}{2} \log z}}{z^2+1}, \\
\log z &= \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2},
\end{aligned}$$

e detto $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_{\rho}$ il cammino di integrazione chiuso, dove $\lambda_1(x) = x$, $\rho \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\lambda_2(x) = xe^{i\pi}$, $R \geq x \geq \rho$, e $\gamma_{\rho}(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\pi \geq \theta \geq 0$, poiché f è, per $R > 1$ e $\rho < 1$, analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = i$, il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz + \int_{\gamma_{\rho}} f(z)dz \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})}}{i + i} \\
&= \pi e^{i\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Per gli integrali sui cammini che compongono γ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_{\rho}^R \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx, \\
\int_{\lambda_2} f(z) dz &= \int_R^{\rho} \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln x + i\pi)}}{x^2 + 1} e^{i\pi} dx = i \int_{\rho}^R \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx, \\
\int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln R + i\theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} i R e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\
\int_{\gamma_{\rho}} f(z) dz &= \int_{\pi}^0 \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln \rho + i\theta)}}{\rho^2 e^{2i\theta} + 1} i \rho e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Pertanto nel limite $\rho \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ otteniamo

$$(1 + i) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \pi \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1 + i)$$

e quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

10.25. Posto

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2 + 4},$$

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

e detto $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_{\rho}$ il cammino chiuso di integrazione, dove $\lambda_1(x) = x$, $\rho \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\lambda_2(x) = x e^{i\pi}$, $R \geq x \geq \rho$, e $\gamma_{\rho}(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\pi \geq \theta \geq 0$, poiché f è, per $R > 2$ e $\rho < 2$, analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = 2i$, il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\gamma_{\rho}} f(z) dz \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=2i} f(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i \frac{\log(2e^{i\pi/2})}{2i + 2i} \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2} \right).
\end{aligned}$$

Per gli integrali sui cammini che compongono γ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx, \\
\int_{\lambda_2} f(z) dz &= \int_R^{\rho} \frac{\ln x + i\pi}{x^2 + 4} e^{i\pi} dx = \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx + i\pi \int_{\rho}^R \frac{1}{x^2 + 4} dx, \\
\int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_0^{\pi} \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta} + 4} iR e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\
\int_{\gamma_{\rho}} f(z) dz &= \int_{\pi}^0 \frac{\ln \rho + i\theta}{\rho^2 e^{2i\theta} + 4} i\rho e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Pertanto nel limite $\rho \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ otteniamo

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx + i\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{2} \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2} \right),$$

da cui, prendendo la parte reale e quella immaginaria, si conclude

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4} \ln 2, \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4}.$$

10.26. Si ponga

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z^a}{z^2 + 1} = \frac{e^{a \log z}}{z^2 + 1}, \\
\log z &= \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,
\end{aligned}$$

con $a = -1/3$. Il seguente svolgimento è valido per ogni $-1 < a < 1$. Nel dominio specificato f è analitica ovunque ad eccezione dei due poli semplici in $z = \pm i$ dove ha residui

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \left. \frac{e^{a \log z}}{z + i} \right|_{z=i} = \frac{e^{a(\ln 1 + i\pi/2)}}{i + i} = \frac{e^{i\pi a/2}}{2i}, \\
\operatorname{Res}_{z=-i} f(z) &= \left. \frac{e^{a \log z}}{z - i} \right|_{z=-i} = \frac{e^{a(\ln 1 + i3\pi/2)}}{-i - i} = \frac{e^{i3\pi a/2}}{-2i}.
\end{aligned}$$

L'integrale di f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_{\rho}$, dove $\lambda_1(x) = x + i0$, $\rho \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\lambda_2(x) = x - i0$, $R \geq x \geq \rho$, e

$\gamma_\rho(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $2\pi \geq \theta \geq 0$, vale quindi, per $R > 1$ e $\rho < 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\gamma_\rho} f(z) dz \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) \right) \\ &= \pi \left(e^{i\pi a/2} - e^{i3\pi a/2} \right). \end{aligned}$$

Gli integrali lungo i singoli cammini che compongono γ valgono

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_{\rho}^R \frac{e^{a(\ln x + i0)}}{(xe^{i0})^2 + 1} e^{i0} dx = \int_{\rho}^R \frac{e^{a \ln x}}{x^2 + 1} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z) dz &= \int_R^{\rho} \frac{e^{a(\ln x + i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2 + 1} e^{i2\pi} dx = -e^{i2\pi a} \int_{\rho}^R \frac{e^{a \ln x}}{x^2 + 1} dx, \\ \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \frac{e^{a \ln R}}{R^2 - 1} 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad a < 1, \\ \left| \int_{\gamma_\rho} f(z) dz \right| &\leq \frac{e^{a \ln \rho}}{1 - \rho^2} 2\pi \rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0, \quad a > -1. \end{aligned}$$

In conclusione, prendendo i limiti $R \rightarrow \infty$ e $\rho \rightarrow 0$, per $-1 < a < 1$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^a}{x^2 + 1} dx &= \frac{\pi (e^{i\pi a/2} - e^{i3\pi a/2})}{1 - e^{i2\pi a}} \\ &= \frac{\pi e^{i\pi a} (e^{-i\pi a/2} - e^{i\pi a/2})}{e^{i\pi a} (e^{-i\pi a} - e^{i\pi a})} \\ &= \frac{\pi \sin(\pi a/2)}{\sin(\pi a)} \\ &= \frac{\pi/2}{\cos(\pi a/2)}. \end{aligned}$$

10.27. Integrando per parti si ha

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{a+1}} dx = \frac{2}{a} \int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{1+x^2} dx.$$

Posto $f(z) = e^{(1-a)\log z}/(1+z^2)$, avendo assunto per il logaritmo il ramo

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

si osservi che f ha poli semplici in $z = \pm i$ e una linea di diramazione coincidente con il semiasse reale positivo. Si integri f lungo il cammino chiuso

$\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove $\lambda_1(x) = x + i0$, $r \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\lambda_2(x) = xe^{i\pi}$, $R \geq x \geq r$, e $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$, $\pi \geq \theta \geq 0$. Per $R > 1$ e $r < 1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) \\ &= \pi e^{i(1-a)\pi/2}.\end{aligned}$$

Gli integrali sui cammini che compongono γ valgono

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_r^R \frac{e^{(1-a)(\ln x + i0)}}{(xe^{i0})^2 + 1} e^{i0} dx = \int_r^R \frac{e^{(1-a)\ln x}}{x^2 + 1} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_R^r \frac{e^{(1-a)(\ln x + i\pi)}}{(xe^{i\pi})^2 + 1} e^{i\pi} dx = e^{i(1-a)\pi} \int_r^R \frac{e^{(1-a)\ln x}}{x^2 + 1} dx, \\ \left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &\leq \frac{e^{(1-a)\ln R}}{R^2 - 1} \pi R = \frac{\pi R^{2-a}}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad a > 0, \\ \left| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right| &\leq \frac{e^{(1-a)\ln r}}{1 - r^2} \pi r = \frac{\pi r^{2-a}}{1 - r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad a < 2.\end{aligned}$$

Prendendo i limiti $R \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$, per $0 < a < 2$ si conclude

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{x^2 + 1} dx &= \frac{\pi e^{i(1-a)\pi/2}}{1 + e^{i(1-a)\pi}} \\ &= \frac{\pi i}{e^{ia\pi/2} - e^{-ia\pi/2}} \\ &= \frac{\pi/2}{\sin(\pi a/2)}\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{a+1}} dx = \frac{\pi/a}{\sin(\pi a/2)}, \quad 0 < a < 2.$$

10.28. Si ponga $f(z) = z^{\frac{2}{3}}/(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4) = e^{\frac{2}{3}\log z}/(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$, assumendo per il logaritmo quel ramo la cui linea di diramazione coincide con il semiasse reale positivo:

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

La funzione f è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale positivo e

dei due poli semplici in $z = -\sqrt{3} \pm i$ dove ha residui

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-\sqrt{3}+i} f(z) &= \left. \frac{e^{\frac{2}{3} \log z}}{z + \sqrt{3} + i} \right|_{z=-\sqrt{3}+i} = \frac{e^{\frac{2}{3} \ln 2 + i \frac{5}{9} \pi}}{2i}, \\ \operatorname{Res}_{z=-\sqrt{3}-i} f(z) &= \left. \frac{e^{\frac{2}{3} \log z}}{z + \sqrt{3} - i} \right|_{z=-\sqrt{3}-i} = \frac{e^{\frac{2}{3} \ln 2 + i \frac{7}{9} \pi}}{-2i}. \end{aligned}$$

Si integri la f lungo il cammino chiuso orientato positivamente $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove $\lambda_1(x) = x + i0$, $r \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\lambda_2(x) = x - i0$, $R \geq x \geq r$, e $\gamma_r(\theta) = r e^{i\theta}$, $2\pi \geq \theta \geq 0$. Come al solito, $x \pm i0$ sta a indicare $x \pm i\varepsilon$ con ε infinitesimo positivo così che in rappresentazione polare $x + i0 = x e^{i\varepsilon}$ mentre $x - i0 = x e^{i(2\pi-\varepsilon)}$. Per $r < 2 < R$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=-\sqrt{3}+i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-\sqrt{3}-i} f(z) \right) \\ &= \pi e^{\frac{2}{3} \ln 2} \left(e^{i \frac{5}{9} \pi} - e^{i \frac{7}{9} \pi} \right). \end{aligned}$$

Per gli integrali lungo i cammini che compongono γ risulta

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3}(\ln x + i0)}}{(x e^{i0})^2 + 2\sqrt{3}(x e^{i0}) + 4} e^{i0} dx \\ &= \int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3} \ln x}}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z) dz &= \int_R^r \frac{e^{\frac{2}{3}(\ln x + i2\pi)}}{(x e^{i2\pi})^2 + 2\sqrt{3}(x e^{i2\pi}) + 4} e^{i2\pi} dx \\ &= -e^{i \frac{4}{3} \pi} \int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3} \ln x}}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} dx, \\ \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\lesssim \frac{e^{\frac{2}{3} \ln R}}{R^2} R = \frac{R^{\frac{4}{3}}}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\ \left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| &\lesssim \frac{e^{\frac{2}{3} \ln r}}{1} r = r^{\frac{4}{3}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Pertanto, nel limite $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} dx &= \pi e^{\frac{2}{3} \ln 2} \frac{e^{i\frac{5}{9}\pi} - e^{i\frac{7}{9}\pi}}{1 - e^{i\frac{4}{3}\pi}} \\
 &= \pi 2^{\frac{2}{3}} \frac{e^{i\frac{5}{9}\pi} e^{-i\frac{1}{9}\pi} - e^{i\frac{7}{9}\pi} e^{-i\frac{1}{9}\pi}}{e^{i\frac{2}{3}\pi} - e^{-i\frac{2}{3}\pi}} \\
 &= \pi 2^{\frac{2}{3}} \frac{\sin(\pi/9)}{\sin(2\pi/3)} \\
 &= \pi 2^{\frac{5}{3}} \sin(\pi/9).
 \end{aligned}$$

10.29. Si ponga

$$f(z) = \frac{(z+1)e^{-\frac{1}{2}\log z}}{z^2 - 2z + 2},$$

assumendo per il logaritmo il ramo

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

La funzione f è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale positivo e dei due poli semplici in $z = 1 \pm i$ dove ha residui

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}_{z=1+i} f(z) &= \left. \frac{(z+1)e^{-\frac{1}{2}\log z}}{z-1+i} \right|_{z=1+i} = \frac{2+i}{2i} e^{-\frac{1}{2}(\ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4})}, \\
 \operatorname{Res}_{z=1-i} f(z) &= \left. \frac{(z+1)e^{-\frac{1}{2}\log z}}{z-1-i} \right|_{z=1-i} = \frac{2-i}{-2i} e^{-\frac{1}{2}(\ln \sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4})}.
 \end{aligned}$$

Si integri f lungo il cammino chiuso orientato positivamente $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove $\lambda_1(x) = x + i0$, $r \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\lambda_2(x) = x - i0$, $R \geq x \geq r$, e $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$, $2\pi \geq \theta \geq 0$. Per $r < \sqrt{2} < R$, dal teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}
 \int_\gamma f(z) dz &= \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz \\
 &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1+i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1-i} f(z) \right) \\
 &= 2\pi i \left(\frac{2+i}{2i} 2^{-1/4} e^{-i\frac{\pi}{8}} - \frac{2-i}{2i} 2^{-1/4} e^{-i\frac{7\pi}{8}} \right) \\
 &= \pi 2^{-1/4} \left((2+i)e^{-i\frac{\pi}{8}} + (2-i)e^{i\frac{\pi}{8}} \right) \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt[4]{2}} \left(2 \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right).
 \end{aligned}$$

Nel limite $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ gli integrali su γ_r e γ_R si annullano,

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \frac{R+1}{\sqrt{R}(R^2+2R+2)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \pi r \frac{1-r}{\sqrt{r}(2-2r-r^2)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

mentre quelli su λ_1 e λ_2 tendono entrambi all'integrale reale da calcolare:

$$\int_{\lambda_1} f(z) dz = \int_r^R \frac{(xe^{i0} + 1)e^{-\frac{1}{2}(\ln x + i0)}}{(xe^{i0})^2 - 2xe^{i0} + 2} e^{i0} dx = \int_r^R \frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x^2 - 2x + 2)} dx,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z) dz = \int_R^r \frac{(xe^{i2\pi} + 1)e^{-\frac{1}{2}(\ln x + i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2 - 2xe^{i2\pi} + 2} e^{i2\pi} dx = \int_r^R \frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

In conclusione

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x}(x^2 - 2x + 2)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(2 \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right).$$

10.30. Posto $f(z) = e^{(1-a)\log z} / (1+z^2)^2$, avendo assunto per il logaritmo il ramo

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

si osservi che f ha poli doppi in $z = \pm i$ e una linea di diramazione coincidente con il semiasse reale positivo. Si integri f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove $\lambda_1(x) = x + i0$, $r \leq x \leq R$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\lambda_2(x) = xe^{i\pi}$, $R \geq x \geq r$, e $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$, $\pi \geq \theta \geq 0$. Per $R > 1$ e $r < 1$ si ha

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) dz &= \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{(1-a)\log z} / (z+i)^2}{(z-i)^2} \\ &= 2\pi i \left. \frac{d}{dz} \frac{e^{(1-a)\log z}}{(z+i)^2} \right|_{z=i} \\ &= \frac{ia\pi}{2} e^{-ia\pi/2}. \end{aligned}$$

Gli integrali sui cammini che compongono γ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z) dz = \int_r^R \frac{e^{(1-a)(\ln x + i0)}}{((xe^{i0})^2 + 1)^2} e^{i0} dx = \int_r^R \frac{e^{(1-a)\ln x}}{(x^2 + 1)^2} dx,$$

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_R^r \frac{e^{(1-a)(\ln x + i\pi)}}{((xe^{i\pi})^2 + 1)^2} e^{i\pi} dx = -e^{-ia\pi} \int_r^R \frac{e^{(1-a)\ln x}}{(x^2 + 1)^2} dx, \\ \left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &\leq \frac{e^{(1-a)\ln R}}{(R^2 - 1)^2} \pi R = \frac{\pi R^{2-a}}{(R^2 - 1)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad a > -2, \\ \left| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right| &\leq \frac{e^{(1-a)\ln r}}{(1 - r^2)^2} \pi r = \frac{\pi r^{2-a}}{(1 - r^2)^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad a < 2.\end{aligned}$$

Prendendo i limiti $R \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$, per $-2 < a < 2$ si conclude

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{(x^2 + 1)^2} dx &= \frac{ia\pi}{2} \frac{e^{-ia\pi/2}}{1 - e^{-ia\pi}} \\ &= \frac{a\pi}{4} \frac{2i}{e^{ia\pi/2} - e^{-ia\pi/2}} \\ &= \frac{a\pi/4}{\sin(a\pi/2)}.\end{aligned}$$

10.31. Posto $f(z) = e^{az}/\cosh z$ e detto $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ il cammino chiuso di integrazione, dove $\lambda_1(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, $\lambda_2(y) = R + iy$, $0 \leq y \leq \pi$, $\lambda_3(x) = x + i\pi$, $R \geq x \geq -R$, e $\lambda_4(y) = -R + iy$, $\pi \geq y \geq 0$, poiché f è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = i\pi/2$, il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{k=1}^4 \int_{\lambda_k} f(z)dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} f(z) \\ &= 2\pi i \left. \frac{e^{az}}{\sinh z} \right|_{z=i\pi/2} \\ &= 2\pi e^{ia\pi/2}.\end{aligned}$$

Per gli integrali lungo i cammini λ_k , $k = 1, 2, 3, 4$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx, \\ \int_{\lambda_3} f(z)dz &= \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = e^{ia\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx,\end{aligned}$$

avendo usato la proprietà di antiperiodicità $\cosh(x + i\pi) = -\cosh x$,

$$\left| \int_{\lambda_2} f(z)dz \right| \leq \pi \frac{e^{aR}}{\frac{1}{2}(e^R - 1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad a < 1,$$

$$\left| \int_{\lambda_4} f(z) dz \right| \leq \pi \frac{e^{-aR}}{\frac{1}{2}(e^R - 1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad a > -1.$$

In conclusione, nel limite $R \rightarrow \infty$ per $-1 < a < 1$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx = \frac{2\pi e^{ia\pi/2}}{1 + e^{ia\pi}} = \frac{\pi}{\cos(a\pi/2)}.$$

10.32. Si consideri $f(z) = 1/(1 + z^{2n+1})$ analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dei $2n + 1$ poli semplici nei punti

$$z_k = e^{i\pi/(2n+1) + i2\pi k/(2n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Detto $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ il cammino chiuso di integrazione, dove $\lambda_1(x) = x$, $0 \leq x \leq R$, $\lambda_2(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi/(2n+1)$, $\lambda_3(x) = xe^{i2\pi/(2n+1)}$, $R \geq x \geq 0$, la funzione f è, per $R > 1$, analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = z_0$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{k=1}^3 \int_{\lambda_k} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \\ &= 2\pi i \frac{1}{(2n+1)z_0^{2n}}. \end{aligned}$$

Per gli integrali lungo i cammini che compongono γ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_0^R \frac{1}{1 + x^{2n+1}} dx, \\ \left| \int_{\lambda_2} f(z) dz \right| &\leq \frac{2\pi R}{2n+1} \frac{1}{R^{2n+1} - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\lambda_3} f(z) dz &= -e^{i2\pi/(2n+1)} \int_0^R \frac{1}{1 + x^{2n+1}} dx. \end{aligned}$$

In conclusione, nel limite $R \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^{2n+1}} dx &= \frac{2\pi i/(2n+1)}{e^{i2n\pi/(2n+1)}} \frac{1}{1 - e^{i2\pi/(2n+1)}} \\ &= \frac{2\pi i/(2n+1)}{e^{i2n\pi/(2n+1)}} \frac{1}{[e^{-i\pi/(2n+1)} - e^{i\pi/(2n+1)}] e^{i\pi/(2n+1)}} \\ &= \frac{\pi/(2n+1)}{\sin[\pi/(2n+1)]}. \end{aligned}$$

10.33. Si ponga $f(z) = e^{iz}/(e^z + e^{-z})$ e si consideri il cammino chiuso $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, dove $\lambda_1(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, $\lambda_2(y) = R + iy$, $0 \leq y \leq \pi$, $\lambda_3(x) = x + i\pi$, $R \geq x \geq -R$, e $\lambda_4(y) = -R + iy$, $\pi \geq y \geq 0$. Poiché $f(z) = p(z)/q(z)$ con $p(z) = e^{iz}$ e $q(z) = e^z + e^{-z}$ è una funzione analitica in tutto \mathbb{C} ad eccezione dei poli semplici corrispondenti agli zeri semplici di $q(z)$, che sono i punti $z = \pm i\pi/2 + i2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, il teorema dei residui fornisce, per ogni $R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} f(z) \\ &= 2\pi i \frac{p(i\pi/2)}{q'(i\pi/2)} \\ &= \pi e^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\lambda_3} f(z) dz + \int_{\lambda_4} f(z) dz,$$

con

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx, \\ \int_{\lambda_3} f(z) dz &= \int_R^{-R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} + e^{-(x+i\pi)}} dx = e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Darboux

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lambda_2} f(z) dz \right| &\leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\ \left| \int_{\lambda_4} f(z) dz \right| &\leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

quindi nel limite $R \rightarrow \infty$ si ha

$$(1 + e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx = \pi e^{-\pi/2},$$

da cui, prendendo la parte reale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi/2}{\cosh(\pi/2)}.$$

10.34. Posto $w = |w|e^{i\alpha}$, poiché $\operatorname{Re} w > 0$ deve essere $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Si integri la funzione $f(z) = e^{-wz^2}$, analitica in tutto \mathbb{C} , lungo il cammino chiuso semplice $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2$, dove

$$\begin{aligned}\lambda_1(x) &= x, & 0 \leq x \leq R, \\ \gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq -\alpha/2 \text{ se } \alpha < 0, & \quad 0 \geq \theta \geq -\alpha/2 \text{ se } \alpha > 0, \\ \lambda_2(r) &= re^{-i\alpha/2}, & R \geq r \geq 0.\end{aligned}$$

Si noti che il cammino è orientato positivamente se $\alpha < 0$ e negativamente se $\alpha > 0$ mentre per $\alpha = 0$, cioè quando $\operatorname{Im} w = 0$, l'integrale in esame è noto e vale $\sqrt{\pi}/(2\sqrt{w})$. Poiché f è analitica su e dentro γ , risulta

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz = 0.$$

Gli integrali lungo i cammini λ_1 e λ_2 valgono

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1} f(z)dz &= \int_0^R e^{-wx^2} dx, \\ \int_{\lambda_2} f(z)dz &= \int_R^0 e^{-|w|e^{i\alpha}(re^{-i\alpha/2})^2} e^{-i\alpha/2} dr \\ &= -|w|^{-1/2} e^{-i\alpha/2} \int_0^{R|w|^{1/2}} e^{-u^2} du =,\end{aligned}$$

dove si è posto $u = |w|^{1/2} r$. Usando la disuguaglianza di Jordan, per l'integrale lungo γ_R si ha

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| &\leq -\operatorname{sgn}(\alpha) \int_0^{-\alpha/2} \left| e^{-|w|e^{i\alpha}R^2e^{i2\theta}} iRe^{i\theta} \right| d\theta \\ &= \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{R}{2} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} e^{-|w|R^2 \sin \varphi} d\varphi \quad \text{dove } \varphi = \pi/2 - \alpha - 2\theta \\ &\leq \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{R}{2} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} e^{-|w|R^2 2\varphi/\pi} d\varphi \\ &= \frac{\pi e^{-|w|R^2} \operatorname{sgn}(\alpha) (e^{(1-2\alpha/\pi)} - 1)}{4|w|R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Nel limite $R \rightarrow \infty$ si conclude che $\forall w \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} w > 0$ vale

$$\int_0^\infty e^{-wx^2} dx = |w|^{-1/2} e^{-i\alpha/2} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{w}},$$

dove $\sqrt{w} = |w|^{1/2} e^{i\alpha/2}$.

10.35. Ponendo $e^{i\theta} = z$, si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{2\pi} \log(a + a^{-1} - 2 \cos \theta) d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} \log(a + a^{-1} - z - z^{-1}) dz,$$

dove $|z| = 1$ è la circonferenza di centro 0, raggio 1, orientata in verso positivo. Scelto per il logaritmo il ramo principale

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \quad |z| > 0, \quad -\pi < \arg z < \pi,$$

la funzione integranda

$$f(z) = \frac{1}{iz} \log(a + a^{-1} - z - z^{-1})$$

è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del punto $z = 0$ e dei punti $z(t)$ tali che

$$a + a^{-1} - z(t) - z(t)^{-1} = -t, \quad t \geq 0,$$

ovvero

$$z(t)^2 - (a + a^{-1} + t)z(t) + 1 = 0,$$

che ha soluzioni

$$z_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \left((a + a^{-1} + t) \pm \sqrt{(a + a^{-1} + t)^2 - 4} \right).$$

Per $t \in [0, \infty)$, la soluzione $z_+(t)$ descrive la semiretta reale da a a $+\infty$, mentre $z_-(t)$ il segmento da a^{-1} a 0. Si consideri il cammino chiuso $\sigma = \gamma + \lambda_1 + \lambda_2 + \gamma_\varepsilon + \lambda_3 + \lambda_4$, dove

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= e^{i\theta}, & \varepsilon^2 \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon^2, \\ \lambda_1(x) &= x - i\varepsilon^2, & 1 \geq x \geq a^{-1}, \\ \lambda_2(x) &= x - i\varepsilon^2, & a^{-1} \geq x \geq \varepsilon, \\ \gamma_\varepsilon(\theta) &= \varepsilon e^{i\theta}, & 2\pi - \varepsilon \geq \theta \geq \varepsilon, \\ \lambda_3(x) &= x + i\varepsilon^2, & \varepsilon \leq x \leq a^{-1}, \\ \lambda_4(x) &= x + i\varepsilon^2, & a^{-1} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione f è analitica su σ e al suo interno, pertanto

$$\begin{aligned} \int_\sigma f(z) dz &= \int_\gamma f(z) dz + \sum_{k=1}^4 \int_{\lambda_k} f(z) dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

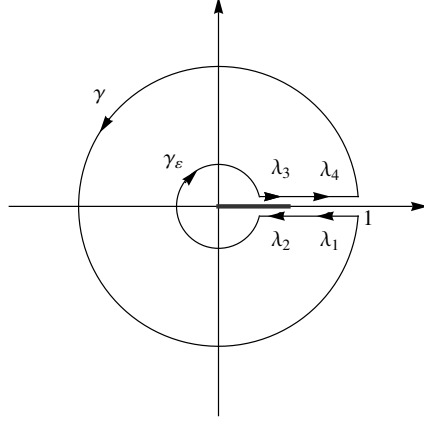


Fig. A.9. Cammino chiuso $\sigma = \gamma + \lambda_1 + \lambda_2 + \gamma_\varepsilon + \lambda_3 + \lambda_4$, utilizzato per integrare la funzione $f(z) = (iz)^{-1} \log(a + a^{-1} - z - z^{-1})$, con $a > 1$, lungo la circonferenza $|z| = 1$ orientata positivamente

Poiché f è analitica sul segmento dell'asse reale $(a^{-1}, 1]$ e per $\varepsilon \rightarrow 0$ risulta $\lambda_1 = -\lambda_4$, si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\lambda_4} f(z) dz \right) = 0.$$

Sul segmento $[\varepsilon, a^{-1}]$ in corrispondenza della linea di diramazione si ha invece

$$\int_{\lambda_2} f(z) dz = \int_{a^{-1}}^{\varepsilon} \frac{1}{ix} \log(t(x)e^{-i\pi}) dx = \int_{a^{-1}}^{\varepsilon} \frac{1}{ix} (\ln(t(x)) - i\pi) dx,$$

$$\int_{\lambda_3} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^{a^{-1}} \frac{1}{ix} \log(t(x)e^{i\pi}) dx = \int_{\varepsilon}^{a^{-1}} \frac{1}{ix} (\ln(t(x)) + i\pi) dx,$$

dove $t(x) = x + x^{-1} - a - a^{-1}$. La somma di questi due integrali fornisce

$$\int_{\lambda_2} f(z) dz + \int_{\lambda_3} f(z) dz = 2 \int_{\varepsilon}^{a^{-1}} \frac{\pi}{x} dx = -2\pi \ln a - 2\pi \ln \varepsilon.$$

Infine, sul cammino γ_ε per ε infinitesimo possiamo porre $a + a^{-1} - z - z^{-1} \simeq -z^{-1}$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{iz} \log(-z^{-1}) dz \\ &= \int_{2\pi}^0 \frac{1}{i\varepsilon^{i\theta}} \log(\varepsilon^{-1} e^{-i(\theta-\pi)}) \varepsilon^{i\theta} i d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{2\pi}^0 (\ln(\varepsilon^{-1}) - i(\theta - \pi)) d\theta \\
&= \theta \ln(\varepsilon^{-1}) - i \left(\frac{\theta^2}{2} - \pi\theta \right) \Big|_{2\pi}^0 \\
&= 2\pi \ln \varepsilon.
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} f(z) dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\lambda_2} f(z) dz - \int_{\lambda_3} f(z) dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi \ln a + 2\pi \ln \varepsilon - 2\pi \ln \varepsilon) \\
&= 2\pi \ln a.
\end{aligned}$$

10.36. Si ponga $f(z) = (z - z_0)^{-1}(z - z_1)^{-1}$. Detto $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$ il cammino chiuso con λ_R dato e $\gamma_R(\theta) = a + Re^{i\theta}$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$, per $z_0 \neq z_1$ la funzione $f(z)e^{zt}$ è analitica su e dentro γ ad eccezione dei poli semplici in $z = z_0$ e $z = z_1$. Per il teorema dei residui

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} e^{zt} f(z) dz &= \int_{\lambda_R} e^{zt} f(z) dz + \int_{\gamma_R} e^{zt} f(z) dz \\
&= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_0} e^{zt} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_1} e^{zt} f(z) \right).
\end{aligned}$$

Si osservi che per $0 < |z - z_0| < |z_0 - z_1|$ si ha

$$\begin{aligned}
e^{zt} f(z) &= \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{z_0 - z_1} \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0 - z_1}} e^{z_0 t} e^{(z - z_0)t} \\
&= \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{z_0 - z_1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z - z_0}{z_0 - z_1} \right)^k e^{z_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((z - z_0)t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} e^{zt} f(z) = \frac{e^{z_0 t}}{z_0 - z_1}.$$

Scambiando z_0 con z_1 otteniamo

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} e^{zt} f(z) = \frac{e^{z_1 t}}{z_1 - z_0}.$$

Usando la disuguaglianza di Darboux e quella di Jordan, l'integrale su γ_R può

essere maggiorato come segue:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_R} e^{zt} f(z) dz \right| &\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{(a+R \cos \theta)t}}{(R + |z_0|)(R + |z_1|)} R d\theta \\
 &= \frac{Re^{at}}{(R + |z_0|)(R + |z_1|)} \int_0^\pi e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi \\
 &\leq \frac{Re^{at}}{(R + |z_0|)(R + |z_1|)} \frac{\pi}{Rt}
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{zt} f(z) dz = 0.$$

In conclusione,

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\lambda_R} e^{zt} \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)} dz = \frac{e^{z_0 t} - e^{z_1 t}}{z_0 - z_1}.$$

Esercizi del Capitolo 11

11.1. Si osservi che g è una funzione analitica in E . Per quanto visto nell'Esercizio 10.34, si ha $g(z) = f(z) \forall z \in D \subset E$. Pertanto g è il prolungamento analitico di f da D ad E .

11.2. Poiché $f(z) = \sinh z$ è continua in R , chiuso e limitato, ed è analitica e non costante nel suo interno, per il teorema del massimo modulo $|f(z)|$ ha massimo sulla frontiera di R . Ricordando che

$$|\sinh(z)|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

e osservando che $\sinh^2 x$ è monotona crescente e $\sin^2 y$ ha massimi per $y = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, il massimo di $|f(z)|$ in R viene raggiunto nel punto $z = 3 + i\pi/2$ e vale

$$|\sinh(3 + i\pi/2)| = \sqrt{\sinh^2 3 + 1} = \cosh 3.$$

11.3. Si ponga $z^4 - 5z + 1 = f(z) + g(z)$, con

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -5z + 1, \\
 g(z) &= z^4.
 \end{aligned}$$

Per $|z| = 1$ si ha

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq ||-5z| - |1|| = 4, \\ |g(z)| &= |z^4| = 1,\end{aligned}$$

cioè $|f(z)| > |g(z)|$. Poiché $f(z)$ ha uno zero semplice in $z = 1/5$, per il teorema di Rouché anche $f(z) + g(z)$ ha uno zero in $|z| < 1$. Sempre con le stesse funzioni f e g , per $|z| = 2$ si ha

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq |-5z| + |1| = 11, \\ |g(z)| &= |z^4| = 16,\end{aligned}$$

cioè $|g(z)| > |f(z)|$. Poiché $g(z)$ ha uno zero con molteplicità 4 in $z = 0$, per il teorema di Rouché $g(z) + f(z)$ ha 4 zeri in $|z| < 2$. Si conclude che nella regione $1 \leq |z| < 2$, l'equazione $z^4 - 5z + 1 = 0$ ha 3 soluzioni.

11.4. Si ponga $f(z) = az^n$ e $g(z) = -\sin z$. Entrambe queste funzioni sono analitiche in Q . Inoltre $|f(z)| > |g(z)|$ per $z \in \partial Q$. Infatti, per z sulla frontiera del quadrato Q si ha $|z| \geq 1$ e quindi

$$|az^n|^2 = |a|^2 \left(|z|^2\right)^n \geq |a|^2 > e^2.$$

D'altro canto per $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$ risulta

$$|-\sin(x + iy)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y) \leq 1 + \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2 < 1 + \frac{e^2}{4} < e^2.$$

Pertanto, per il teorema di Rouché la funzione $f(z) + g(z)$ ha in Q° lo stesso numero di zeri, contando la molteplicità, della funzione $f(z)$, che ne ha evidentemente n (un solo zero ma di molteplicità n in $z = 0$). In conclusione, l'equazione $az^n = \sin z$ ha n soluzioni per $z \in Q^\circ$.

11.5. Si ponga $f(z) = 4z^5$ e $g(z) = z^8 - z^2 + 1$. Sulla frontiera della regione $|z| < 1$, cioè per $|z| = 1$, si ha

$$\begin{aligned}|f(z)| &= 4, \\ |g(z)| &= |z^8 - z^2 + 1| \leq |z^8| + |-z^2| + |1| = 3,\end{aligned}$$

pertanto $|f(z)| > |g(z)|$ per $|z| = 1$. Per il teorema di Rouché, f e $f + g$ hanno allora lo stesso numero di zeri nella regione $|z| < 1$. Poiché $f(z)$ ha uno zero di ordine 5 in $z = 0$, l'equazione considerata ha 5 soluzioni in $|z| < 1$.

11.6. Per rispondere al quesito determiniamo separatamente il numero di zeri dell'equazione assegnata nelle regioni $|z| < 1$ e $|z| < \sqrt{2}$.

Nella regione $|z| < 1$ si ponga $f(z) = 4z^3$ e $g(z) = z^8 - z^2 + 1$. Sulla frontiera di questa regione, cioè per $|z| = 1$, si ha

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |4z^3| = 4, \\ |g(z)| &= |z^8 - z^2 + 1| \leq |z^8| + |-z^2| + |1| = 3,\end{aligned}$$

pertanto $|f(z)| > |g(z)|$ per $|z| = 1$. Per il teorema di Rouché, f e $f + g$ hanno allora lo stesso numero di zeri nella regione $|z| < 1$. Poiché $f(z)$ ha uno zero di ordine 3 in $z = 0$, l'equazione assegnata ha 3 zeri in $|z| < 1$.

Nella regione $|z| < \sqrt{2}$ si ponga $f(z) = z^4 + 4z^3$ e $g(z) = -z^2 + 1$. Sulla frontiera di questa regione, cioè per $|z| = \sqrt{2}$, si ha

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |z^4 + 4z^3| \geq ||z^4| - |4z^3|| = |16 - 8\sqrt{2}| = 8(2 - \sqrt{2}) > 4, \\ |g(z)| &= |-z^2 + 1| \leq |-z^2| + |1| = 2 + 1 = 3,\end{aligned}$$

pertanto $|f(z)| > |g(z)|$ per $|z| = \sqrt{2}$. Per il teorema di Rouché, f e $f + g$ hanno allora lo stesso numero di zeri nella regione $|z| < \sqrt{2}$. Poiché $f(z)$ ha uno zero di ordine 3 in $z = 0$ e 5 zeri semplici corrispondenti alle 5 radici distinte di $(-4)^{1/5}$, l'equazione assegnata ha 8 zeri in $|z| < \sqrt{2}$.

Si conclude che $z^8 + 4z^3 - z^2 + 1 = 0$ ha $8 - 3 = 5$ soluzioni nella regione $1 \leq |z| < \sqrt{2}$.

11.7. Si ponga $f(z) = az^n$ e $g(z) = -\cos z$. Entrambe queste funzioni sono analitiche in Q . Inoltre $|f(z)| > |g(z)|$ per $z \in \partial Q$. Infatti, per z sulla frontiera del quadrato Q si ha $|z| \geq 1$ e quindi

$$|az^n|^2 = |a|^2 (|z|^2)^n \geq |a|^2 > e^2.$$

D'altro canto per $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$ risulta

$$|-\cos(x + iy)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y) \leq 1 + \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2 < 1 + \frac{e^2}{4} < e^2.$$

Pertanto, per il teorema di Rouché la funzione $f(z) + g(z)$ ha in Q° lo stesso numero di zeri, contando la molteplicità, della funzione $f(z)$, che ne ha evidentemente n (un solo zero ma di molteplicità n in $z = 0$). In conclusione, l'equazione $az^n = \cos z$ ha n soluzioni per $z \in Q^\circ$.

11.8. Nella regione considerata, v è armonica coniugata a u se e solo se $f = u + iv$ è analitica. Devono pertanto essere soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Dalla seconda si ha

$$v_x(x, y) = -u_y(x, y) = 2y,$$

da cui, integrando rispetto a x , si ricava.

$$v(x, y) = 2xy + \phi(y).$$

Dalla prima segue allora

$$v_y(x, y) = 2x + \phi'(y) = u_x(x, y) = 2x + 1,$$

cioè $\phi'(y) = 1$, che risolta dà

$$\phi(y) = y + \text{costante}.$$

In conclusione, a meno di una costante, risulta

$$v(x, y) = 2xy + y.$$

Si noti che

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = z^2 + z,$$

dove $z = x + iy$, è intera.

11.9. Nella regione considerata, v è armonica coniugata a u se e solo se $f = u + iv$ è analitica. Devono pertanto essere soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Dalla seconda si ha

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= -u_y(x, y) \\ &= 2y \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) - 2x \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) \\ &= \frac{d}{dx} (\cos(x^2 - y^2) \sinh(2xy)), \end{aligned}$$

che risolta dà

$$v(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \sinh(2xy) + \phi(y).$$

Dalla prima segue allora

$$\begin{aligned} v_y(x, y) &= 2y \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) + 2x \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) + \phi'(y) \\ &= u_x(x, y) \\ &= 1 + 2x \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) + 2y \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy), \end{aligned}$$

ovvero $\phi'(y) = 1$, che risolta dà

$$\phi(y) = y + \text{costante}.$$

In conclusione, a meno di una costante, si ha

$$v(x, y) = y + \cos(x^2 - y^2) \sinh(2xy).$$

Si noti che

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = z + \sin(z^2),$$

dove $z = x + iy$, è intera.

11.10. Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x - 2y - 6xy, & u_{xx}(x, y) &= 2 - 6y, \\ u_y(x, y) &= -2y - 2x - 3x^2 + 3y^2, & u_{yy}(x, y) &= -2 + 6y, \end{aligned}$$

e dunque $u_{xx} + u_{yy} = 0$, quindi u è armonica in \mathbb{R}^2 . La funzione v è armonica coniugata a u in \mathbb{R}^2 se e solo se la funzione $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in \mathbb{C} . Dalla prima delle equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, si ha

$$2x - 2y - 6xy = v_y,$$

che integrata rispetto a y fornisce

$$v(x, y) = 2xy - y^2 - 3xy^2 + \phi(x).$$

Imponendo la seconda equazione di Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x$, si ha

$$-2y - 2x - 3x^2 + 3y^2 = 2y - 3y^2 + \phi'(x),$$

che integrata rispetto a x fornisce

$$\phi(x) = x^2 + x^3 + \text{costante}.$$

In conclusione, a meno di una costante,

$$v(x, y) = 2xy - y^2 + x^2 - 3xy^2 + x^3.$$

Posto $z = x + iy$, si ha

$$u(x, y) + iv(x, y) = (1 + i)z^2 + iz^3 = f(z),$$

con $f(z)$ analitica in \mathbb{C} .

11.11. Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x - e^{-y} \sin x, & u_{xx}(x, y) &= 2 - e^{-y} \cos x, \\ u_y(x, y) &= -2y - e^{-y} \cos x, & u_{yy}(x, y) &= -2 + e^{-y} \cos x, \end{aligned}$$

e dunque $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$, quindi u è armonica in \mathbb{R}^2 . La funzione v è armonica coniugata a u in \mathbb{R}^2 se e solo se la funzione $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in \mathbb{C} . Dalla prima delle equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, si ha

$$2x - e^{-y} \sin x = v_y,$$

che integrata rispetto a y fornisce

$$v(x, y) = 2xy + e^{-y} \sin x + \phi(x).$$

Imponendo la seconda equazione di Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x$, si ha

$$2y + e^{-y} \cos x = 2y + e^{-y} \cos x + \phi'(x),$$

cioè $\phi'(x) = 0$, che integrata rispetto a x fornisce

$$\phi(x) = \text{costante}.$$

In conclusione, a meno di una costante,

$$v(x, y) = 2xy + e^{-y} \sin x.$$

Posto $z = x + iy$, si ha

$$u(x, y) + iv(x, y) = z^2 + e^{iz} = f(z),$$

con $f(z)$ analitica in \mathbb{C} .

11.12. La funzione v è armonica coniugata a u in \mathbb{R}^2 se e solo se la funzione $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in \mathbb{C} . Osservando che

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

e dunque

$$e^{iz^2} = e^{-2xy} (\cos(x^2 - y^2) + i \sin(x^2 - y^2)),$$

si ricava

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad f(z) = -ie^{iz^2},$$

con $f(z)$ intera. Pertanto, a meno di un'arbitraria costante,

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = -e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2).$$

11.13. Nella regione considerata, v è armonica coniugata a u se e solo se $f = u + iv$ è analitica. Devono pertanto essere soddisfatte le equazioni di

Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Dalla seconda si ha

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= -u_y(x, y) \\ &= 2y \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) - 2x \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) \\ &= \frac{d}{dx} (\cos(x^2 - y^2) \sinh(2xy)), \end{aligned}$$

che risulta dà

$$v(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \sinh(2xy) + \phi(y).$$

Dalla prima segue allora

$$\begin{aligned} v_y(x, y) &= 2y \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) + 2x \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) + \phi'(y) \\ &= u_x(x, y) \\ &= 2x \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) + 2y \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy), \end{aligned}$$

ovvero

$$\phi'(y) = 0,$$

che risulta dà

$$\phi(y) = \text{costante}$$

In conclusione, a meno di una costante,

$$v(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \sinh(2xy).$$

Si noti che

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \sin(z^2),$$

dove $z = x + iy$, è intera.

11.14. Sia $v : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione armonica coniugata a u . La funzione $f = u + iv$ è analitica in \mathbb{C} . Allora anche la funzione $g = \exp(-f)$ è intera. Inoltre, poiché $|\exp(-f)| = \exp(-u)$ e $u \geq 3$, la funzione g è anche limitata in \mathbb{C} . Per il teorema di Liouville essa è pertanto costante in \mathbb{C} . Si conclude che anche $u = -\ln |g|$ è costante in \mathbb{C} .

11.15. La funzione $u(x, y)$ ha derivate seconde in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ e in tale dominio risulta

$$u_x(x, y) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}, \quad u_{xx}(x, y) = \frac{-2(x-1)^2 + 2y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2},$$

$$u_y(x, y) = \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}, \quad u_{yy}(x, y) = \frac{2(x-1)^2 - 2y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2},$$

da cui si vede che $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Posto $z = x + iy$, si riconosce immediatamente che

$$\ln((x-1)^2 + y^2) = \operatorname{Re}(2 \log(z-1)),$$

dove \log è uno qualsiasi dei rami del logaritmo. Si noti che, in accordo con il fatto che D non è un dominio semplicemente connesso, la funzione f tale che $\operatorname{Re} f = u$ risulta polidroma. Inoltre f è analitica solo in un sottoinsieme di D . Scelto per f il ramo principale, il dominio di analiticità è $\mathbb{C} \setminus \{(-t, 0), t \in [0, \infty)\}$. L'armonica coniugata a u è la funzione

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \operatorname{Im}(2 \log(z-1)) \\ &= 2 \operatorname{Arg}(z-1) \\ &= \begin{cases} 2(\arctan(y/(x-1)) - \pi) & x < 1, y < 0 \\ 2 \arctan(y/(x-1)) & x \geq 1, (x, y) \neq (1, 0) \\ 2(\arctan(y/(x-1)) + \pi) & x < 1, y \geq 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Ahlfors, L.V.: Complex Analysis. McGraw-Hill, New York (1979)
- [2] Bleistein, N., Handelsman, R.A.: Asymptotic Expansions of Integrals. Dover, New York (1986)
- [3] Brown, J.W., Churchill, R.V.: Complex Variables and Applications. McGraw-Hill, New York (2003)
- [4] Caratheodory, C.: Theory of Functions of a Complex Variable. Chelsea, New York (1954)
- [5] Conway, J.B.: Functions of One Complex Variable. Springer, New York (1978)
- [6] Lang, S.: Complex Analysis. Springer, New York (1999)
- [7] Markushevich, A.I.: Theory of Functions of a Complex Variable. Second Edition (3 vol. set). Chelsea, New York (1977)
- [8] Narasimhan, R.: Complex Analysis in One Variable. Springer, New York (2001)
- [9] Needham, T.: Visual Complex Analysis. Oxford University Press, London (1998)
- [10] Rossetti, C.: Metodi Matematici della Fisica. Levrotto & Bella, Torino (2000)
- [11] Silverman, R.A.: Introductory Complex Analysis. Dover, New York (1984)
- [12] Spiegel, M.R.: Schaum's Outline Series: Theory and Problems of Complex Variables. McGraw-Hill, New York (1964)
- [13] Titchmarsh, E.C.: The Theory of Functions. Oxford University Press, London (1939)
- [14] Tverberg, H.: A proof of the Jordan curve theorem. Bulletin of the London Mathematical Society 12(1), 34 (1980)

Indice

- Abel, teorema di, 46
- Abel-Plana, formula di, 190
- anello, 123
- argomento, 5
 - principale, 5
- Borel, prolungamento analitico alla, 180
- Bromwich, integrale di, 172
- cammini equivalenti, 91
- cammino, 91
 - chiuso, 91
 - , lunghezza di un, 91
 - regolare, 91
 - regolare a tratti, 91
 - semplice, 91
 - , traccia di un, 91
- Casorati-Weierstrass, teorema di, 144
- Cauchy
 - , disuguaglianze di, 108
 - , formula integrale di, 105, 106
 - , valore principale di, 150
- Cauchy-Goursat, teorema di, 101
- Cauchy-Riemann, equazioni di, 56, 58
- chiusura, 16
- circonferenze in \mathbb{C} , 8
- cis, 5
- coniugato, 3
- criterio del rapporto, 47
- curva, 91
 - chiusa semplice orientata positivamente, 93
 - chiusa omotopa a zero, 102
 - di Jordan, 93
 - omotopa, 102
 - regolare, 91
 - regolare a tratti, 91
 - , traccia di una, 91
- Darboux, disuguaglianza di, 95
- de Moivre, formula di, 6
- derivata, 53
 - di funzione composta, 55
 - di funzione inversa, 56
 - di somma, prodotto, rapporto, 54
- diametro, 13
- discesa più ripida, metodo della, 195
- distanza, 13
 - euclidea, 14
- disuguaglianza triangolare, 3
- esponenziale, 67
 - con base complessa, 75
 - simbolico, 5
- Eulero, formula di, 48
- frontiera, 16
- funzione
 - analitica, 59
 - analitica identicamente nulla, 141
 - armonica, 191
 - armonica coniugata, 191
 - armonica coniugata, esistenza della, 192
 - continua, 31
 - derivabile, 53

- intera, 59
- inversa, formula della, 189
- Lipschitz continua, 32
- meromorfa, 186
- uniformemente continua, 32
- funzioni
 - iperboliche, 79
 - iperboliche inverse, 82
 - trigonometriche, 76
 - trigonometriche inverse, 82
- Gauss, teorema del valore medio di, 185
- Hadamard, formula di, 46
- Heine-Borel, teorema di, 24
- indice di una curva chiusa, 188
- insieme
 - aperto, 14
 - chiuso, 15
 - compatto, 22
 - completo, 21
 - connesso, 18
 - denso, 20
 - limitato, 14
 - molteplicemente connesso, 103
 - dei punti limite, 20
 - semplicemente connesso, 103
 - sequenzialmente compatto, 22
 - totalmente limitato, 22
- integrale, 93
 - di funzione complessa di variabile reale, 89
 - improprio, 149
 - lungo una curva regolare a tratti, 93
 - reale di funzioni razionali, 152
 - reale di funzioni razionali moltiplicate per una funzione trigonometrica, 156
 - reale di funzioni trigonometriche, 150
- Jordan
 - , curva di, 93
 - , disuguaglianza di, 156
 - , lemma di, 155
 - , teorema della curva di, 93
- Laplace
 - , metodo di, 195
 - , trasformata inversa di, 172
- Laurent
 - , sviluppo in serie di, 123
 - , unicità dello sviluppo in serie di, 127
- limite, 27
 - inferiore, 42
 - con punto all'infinito, 30
 - superiore, 42
 - , unicità del, 27
- Liouville, teorema di, 108
- logaritmo, 69
 - , ramo del, 70
 - , ramo principale del, 72
 - , valore principale del, 70
- Maclaurin, sviluppo in serie di, 117
- modulo, 3
- Morera, teorema di, 107
- numeri complessi
 - , campo dei, 1
 - , definizione dei, 1
 - , differenza di, 2
 - , forma polare dei, 4
 - , prodotto di, 1, 2
 - , rapporto di, 2
 - , rappresentazione geometrica dei, 4
 - , reciproco di, 3
 - , somma di, 1, 2
 - , uguaglianza di, 1
- palla
 - aperta, 14
 - chiusa, 14
 - puntata, 123
- parte interna, 16
- piano complesso esteso, 8
- poligonale, 18
- polo di ordine m , 138
- potenza
 - con esponente complesso, 74
 - intera, 6
- primitiva, 90, 97
 - , teorema sull'esistenza della, 97
- principio
 - dell'argomento, 188

- del massimo modulo, 185
- del minimo modulo, 185
- di deformazione dei cammini, 104
- prolungamento analitico, 179
- punto
 - all'infinito, 8
 - limite, 20
 - di sella, metodo del, 193, 195
 - singolare, 59, 135
 - singolare isolato, 135
- radice n -esima, 6
- raggio di convergenza, 46
- residuo, 136
 - all'infinito, teorema del, 136
 - in un polo di ordine m , 139, 142
- rette in \mathbb{C} , 7
- Riemann
 - , lemma di, 144
 - , sfera di, 8
- Rouché, teorema di, 190
- Schwarz, principio di riflessione di, 182
- segmenti in \mathbb{C} , 7
- serie di funzioni, 40
 - convergente, 40
 - convergente assolutamente, 41
 - convergente uniformemente, 41
 - divergente, 41
- serie di potenze, 45
 - , analiticità di una, 118
 - , derivata di una, 118
 - generalizzata, analiticità di una, 126
 - generalizzata, derivata di una, 126
 - generalizzata, integrale di una, 126
 - , integrale di una, 117
 - , prodotto di due, 128
 - , rapporto di due, 129
- serie esponenziale, 48
- serie geometrica, 45
- singularità
 - eliminabile, 138
 - essenziale, 138
- spazio metrico, 13
 - compatto, 22
 - completo, 21
 - connesso, 18
 - limitato, 14
 - sequenzialmente compatto, 22
 - totalmente limitato, 22
- Stirling, approssimazione di, 195
- successione, 19
 - di Cauchy, 20
 - convergente, 19
 - di funzioni, 39
 - di funzioni convergente, 39
 - di funzioni uniformemente convergente, 39
- Taylor
 - , sviluppo in serie di, 115
 - , unicità dello sviluppo in serie di, 118
- teorema
 - dei residui, 136
 - di identità, 141
 - di monodromia, 184
 - fondamentale dell'algebra, 109
 - fondamentale del calcolo, 90
- trasformazione
 - conforme, 62
 - isogona, 63
- unità immaginaria, 2
- Weierstrass
 - , criterio di, 41
 - , prolungamento analitico alla, 181
- zero di ordine m , 140

Collana Unitext – La Matematica per il 3+2

A cura di:

A. Quarteroni (Editor-in-Chief)

L. Ambrosio

P. Biscari

C. Ciliberto

G. van der Geer

G. Rinaldi

W.J. Runggaldier

Editor in Springer:

F. Bonadei

francesca.bonadei@springer.com

Volumi pubblicati. A partire dal 2004, i volumi della serie sono contrassegnati da un numero di identificazione. I volumi indicati in grigio si riferiscono a edizioni non più in commercio.

A. Bernasconi, B. Codenotti

Introduzione alla complessità computazionale

1998, X+260 pp, ISBN 88-470-0020-3

A. Bernasconi, B. Codenotti, G. Resta

Metodi matematici in complessità computazionale

1999, X+364 pp, ISBN 88-470-0060-2

E. Salinelli, F. Tomarelli

Modelli dinamici discreti

2002, XII+354 pp, ISBN 88-470-0187-0

S. Bosch

Algebra

2003, VIII+380 pp, ISBN 88-470-0221-4

S. Graffi, M. Degli Esposti

Fisica matematica discreta

2003, X+248 pp, ISBN 88-470-0212-5

S. Margarita, E. Salinelli
MultiMath – Matematica Multimediale per l'Università
2004, XX+270 pp, ISBN 88-470-0228-1

A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri
Matematica numerica (2a Ed.)
2000, XIV+448 pp, ISBN 88-470-0077-7
2002, 2004 ristampa riveduta e corretta
(1a edizione 1998, ISBN 88-470-0010-6)

13. A. Quarteroni, F. Saleri
Introduzione al Calcolo Scientifico (2a Ed.)
2004, X+262 pp, ISBN 88-470-0256-7
(1a edizione 2002, ISBN 88-470-0149-8)

14. S. Salsa
Equazioni a derivate parziali - Metodi, modelli e applicazioni
2004, XII+426 pp, ISBN 88-470-0259-1

15. G. Riccardi
Calcolo differenziale ed integrale
2004, XII+314 pp, ISBN 88-470-0285-0

16. M. Impedovo
Matematica generale con il calcolatore
2005, X+526 pp, ISBN 88-470-0258-3

17. L. Formaggia, F. Saleri, A. Veneziani
Applicazioni ed esercizi di modellistica numerica
per problemi differenziali
2005, VIII+396 pp, ISBN 88-470-0257-5

18. S. Salsa, G. Verzini
Equazioni a derivate parziali – Complementi ed esercizi
2005, VIII+406 pp, ISBN 88-470-0260-5
2007, ristampa con modifiche

19. C. Canuto, A. Tabacco
Analisi Matematica I (2a Ed.)
2005, XII+448 pp, ISBN 88-470-0337-7
(1a edizione, 2003, XII+376 pp, ISBN 88-470-0220-6)

20. F. Biagini, M. Campanino
Elementi di Probabilità e Statistica
2006, XII+236 pp, ISBN 88-470-0330-X
21. S. Leonesi, C. Toffalori
Numeri e Crittografia
2006, VIII+178 pp, ISBN 88-470-0331-8
22. A. Quarteroni, F. Saleri
Introduzione al Calcolo Scientifico (3a Ed.)
2006, X+306 pp, ISBN 88-470-0480-2
23. S. Leonesi, C. Toffalori
Un invito all'Algebra
2006, XVII+432 pp, ISBN 88-470-0313-X
24. W.M. Baldoni, C. Ciliberto, G.M. Piacentini Cattaneo
Aritmetica, Crittografia e Codici
2006, XVI+518 pp, ISBN 88-470-0455-1
25. A. Quarteroni
Modellistica numerica per problemi differenziali (3a Ed.)
2006, XIV+452 pp, ISBN 88-470-0493-4
(1a edizione 2000, ISBN 88-470-0108-0)
(2a edizione 2003, ISBN 88-470-0203-6)
26. M. Abate, F. Tovena
Curve e superfici
2006, XIV+394 pp, ISBN 88-470-0535-3
27. L. Giuzzi
Codici correttori
2006, XVI+402 pp, ISBN 88-470-0539-6
28. L. Robbiano
Algebra lineare
2007, XVI+210 pp, ISBN 88-470-0446-2
29. E. Rosazza Gianin, C. Sgarra
Esercizi di finanza matematica
2007, X+184 pp, ISBN 978-88-470-0610-2

30. A. Machì
Gruppi – Una introduzione a idee e metodi della Teoria dei Gruppi
2007, XII+350 pp, ISBN 978-88-470-0622-5
2010, ristampa con modifiche
31. Y. Biollay, A. Chaabouni, J. Stubbe
Matematica si parte!
A cura di A. Quarteroni
2007, XII+196 pp, ISBN 978-88-470-0675-1
32. M. Manetti
Topologia
2008, XII+298 pp, ISBN 978-88-470-0756-7
33. A. Pascucci
Calcolo stocastico per la finanza
2008, XVI+518 pp, ISBN 978-88-470-0600-3
34. A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri
Matematica numerica (3a Ed.)
2008, XVI+510 pp, ISBN 978-88-470-0782-6
35. P. Cannarsa, T. D'Aprile
Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale
2008, XII+268 pp, ISBN 978-88-470-0701-7
36. A. Quarteroni, F. Saleri
Calcolo scientifico (4a Ed.)
2008, XIV+358 pp, ISBN 978-88-470-0837-3
37. C. Canuto, A. Tabacco
Analisi Matematica I (3a Ed.)
2008, XIV+452 pp, ISBN 978-88-470-0871-3
38. S. Gabelli
Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
2008, XVI+410 pp, ISBN 978-88-470-0618-8
39. A. Quarteroni
Modellistica numerica per problemi differenziali (4a Ed.)
2008, XVI+560 pp, ISBN 978-88-470-0841-0
40. C. Canuto, A. Tabacco
Analisi Matematica II
2008, XVI+536 pp, ISBN 978-88-470-0873-1
2010, ristampa con modifiche

41. E. Salinelli, F. Tomarelli
Modelli Dinamici Discreti (2a Ed.)
2009, XIV+382 pp, ISBN 978-88-470-1075-8
42. S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino
Invito alle equazioni a derivate parziali
2009, XIV+440 pp, ISBN 978-88-470-1179-3
43. S. Dulli, S. Furini, E. Peron
Data mining
2009, XIV+178 pp, ISBN 978-88-470-1162-5
44. A. Pascucci, W.J. Runggaldier
Finanza Matematica
2009, X+264 pp, ISBN 978-88-470-1441-1
45. S. Salsa
Equazioni a derivate parziali – Metodi, modelli e applicazioni (2a Ed.)
2010, XVI+614 pp, ISBN 978-88-470-1645-3
46. C. D’Angelo, A. Quarteroni
Matematica Numerica – Esercizi, Laboratori e Progetti
2010, VIII+374 pp, ISBN 978-88-470-1639-2
47. V. Moretti
Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica – Operatori in spazi di Hilbert
2010, XVI+704 pp, ISBN 978-88-470-1610-1
48. C. Parenti, A. Parmeggiani
Algebra lineare ed equazioni differenziali ordinarie
2010, VIII+208 pp, ISBN 978-88-470-1787-0
49. B. Korte, J. Vygen
Ottimizzazione Combinatoria. Teoria e Algoritmi
2010, XVI+662 pp, ISBN 978-88-470-1522-7
50. D. Mundici
Logica: Metodo Breve
2011, XII+126 pp, ISBN 978-88-470-1883-9
51. E. Fortuna, R. Frigerio, R. Pardini
Geometria proiettiva. Problemi risolti e richiami di teoria
2011, VIII+274 pp, ISBN 978-88-470-1746-7

- 52. C. Presilla
Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile
2011, XII+324 pp, ISBN 978-88-470-1829-7
- 53. L. Grippo, M. Sciandrone
Metodi di ottimizzazione non vincolata
2011, XIV+614 pp, ISBN 978-88-470-1793-1
- 54. M. Abate, F. Tovena
Geometria Differenziale
2011, XIV+466 pp, ISBN 978-88-470-1919-5
- 55. M. Abate, F. Tovena
Curves and Surfaces
2011, XIV+390 pp, ISBN 978-88-470-1940-9
- 56. A. Ambrosetti
Appunti sulle equazioni differenziali ordinarie
2011, X+114 pp, ISBN 978-88-470-2393-2
- 57. L. Formaggia, F. Saleri, A. Veneziani
Solving Numerical PDEs: Problems, Applications, Exercises
2011, X+434 pp, ISBN 978-88-470-2411-3
- 58. A. Machì
Groups. An Introduction to Ideas and Methods of the Theory of Groups
2011, XIV+372 pp, ISBN 978-88-470-2420-5
- 59. A. Pascucci, W.J. Runggaldier
Financial Mathematics. Theory and Problems for Multi-period Models
2011, X+288 pp, ISBN 978-88-470-2537-0
- 60. D. Mundici
Logic: a Brief Course
2012, XII+124 pp, ISBN 978-88-470-2360-4
- 61. A. Machì
Algebra for Symbolic Computation
2012, VIII+174 pp, ISBN 978-88-470-2396-3
- 62. A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio
Calcolo Scientifico (5a ed.)
2012, XVIII+450 pp, ISBN 978-88-470-2744-2

63. A. Quarteroni
Modellistica Numerica per Problemi Differenziali (5a ed.)
2012, XVIII+628 pp, ISBN 978-88-470-2747-3
64. V. Moretti
Spectral Theory and Quantum Mechanics
With an Introduction to the Algebraic Formulation
2013, XVI+728 pp, ISBN 978-88-470-2834-0
65. S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino
A Primer on PDEs. Models, Methods, Simulations
2013, XIV+482 pp, ISBN 978-88-470-2861-6
66. V.I. Arnold
Real Algebraic Geometry
2013, X+110 pp, ISBN 978-3-642-36242-2
67. F. Caravenna, P. Dai Pra
Probabilità. Un'introduzione attraverso modelli e applicazioni
2013, X+396 pp, ISBN 978-88-470-2594-3
68. A. de Luca, F. D'Alessandro
Teoria degli Automi Finiti
2013, XII+316 pp, ISBN 978-88-470-5473-8
69. P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, M. Vianello
Meccanica Razionale
2013, XII+352 pp, ISBN 978-88-470-5696-3
70. E. Rosazza Gianin, C. Sgarra
Mathematical Finance: Theory Review and Exercises.
From Binomial Model to Risk Measures
2013, X+278pp, ISBN 978-3-319-01356-5
71. E. Salinelli, F. Tomarelli
Modelli Dinamici Discreti
2014, XVI+394pp, ISBN 978-88-470-5503-2
72. C. Presilla
Elementi di Analisi Complessa. Funzioni di una variabile
2014, XII+360pp, ISBN 978-88-470-5500-1

La versione online dei libri pubblicati nella serie è disponibile su SpringerLink. Per ulteriori informazioni, visitare il sito:
<http://www.springer.com/series/5418>