Esercizi difficili sul calcolo delle probabilità

1. ***Calcolare la probabilità che estratte a caso ed assieme tre carte da un mazzo di 40, fra di esse vi sia un solo asso, di qualunque seme.***

Le parole *a caso* vogliono significare che chi estrae non è in grado di “sentire” se una terna è diversa da un’altra, ossia sono tutte equiprobabili[1]. Il numero dei casi possibili è quello dei “gruppi non ordinati” (combinazioni) di tre carte che si possono costruire con 40 carte diverse, dato dal coefficiente binomiale $\binom{40}{3}$. Il numero dei casi favorevoli, visto che non si richiede *dove* sia l’asso rispetto alle altre due carte estratte (*ed assieme* questo significa), è invece dato dal numero delle possibili scelte dell’asso per il numero delle possibili coppie di carte, che non siano assi, che l’accompagnano. L’asso può essere scelto in 4 modi (nel calcolo combinatorio diremmo che abbiamo $\binom{4}{1}$ possibili gruppi di 1 elemento scelto fra 4 elementi), mentre le altre due carte possono essere scelte in $\binom{36}{2}$ modi diversi (è infatti il numero dei gruppi di due elementi che posso costruire a partire da 36-4 oggetti differenti). Quindi:

$$P_1 = \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{2}}{\binom{40}{3}} = \binom{4}{1}\binom{36}{2}\binom{40}{3}^{-1} = \frac{\frac{4!}{1!3!}\,\frac{36!}{2!34!}}{\frac{40!}{3!37!}} = 12\frac{36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38} = 0.2550607... > \frac{1}{4}$$

La maggiorazione ad ¼ è per dare un’idea immediata della probabilità ottenuta, poco superiore. Si farà così quando avrà senso.

2. ***Calcolare la probabilità che estratte a caso ed assieme tre carte da un mazzo di 40, fra di esse vi siano due soli assi, di qualunque seme.***

Il problema è una variante automatica del precedente. Il numero dei casi possibili è sempre quello dei “gruppi non ordinati” (combinazioni) di tre carte che si possono costruire con 40 carte diverse, dato dal coefficiente binomiale $\binom{40}{3}$. Il numero dei casi favorevoli, visto che non si richiede *dove* siano gli assi rispetto all’atra carta estratta (*ed assieme* questo significa), è invece dato dal numero delle possibili scelte dei due assi per il numero delle possibili scelte per la carta rimanente, che non si vuole sia un asso. Questa carta può essere scelta in 36 modi (nel calcolo combinatorio diremmo che abbiamo $\binom{36}{1}$ possibili gruppi di 1 elemento scelto fra 36), mentre i due assi possono essere scelti in $\binom{4}{2}$ modi diversi (è infatti il numero dei gruppi di due elementi che posso costruire a partire da 4 oggetti differenti). Quindi:

$$P_2 = \binom{4}{2}\binom{36}{1}\binom{40}{3}^{-1} = \frac{\frac{4!}{2!2!}\,\frac{36!}{1!35!}}{\frac{40!}{3!37!}} = \frac{36\cdot 36}{40\cdot 39\cdot 38} = 0.0218623... > \frac{1}{46}$$

3. ***Calcolare la probabilità che estratte a caso ed assieme tre carte da un mazzo di 40, siano tre assi, di qualunque seme.***

Il problema è a questo punto automaticamente risolto. Il numero dei casi possibili è $\binom{40}{3}$. Il numero dei casi favorevoli pari al numero delle possibili scelte dei tre assi, ossia $\binom{4}{3}$. Quindi:

$$P_3 = \binom{40}{3}^{-1}\binom{4}{3} = \frac{\frac{4!}{3!}}{\frac{40!}{3!37!}} = \frac{4!}{40\cdot 39\cdot 38} = 0.00040485829... = \frac{1}{2470}$$

---

[1] Uno dei trucchi più famosi è realizzare assi con cartoncini di dimensioni leggermente diverse da quelle delle altre carte. In tal caso, questo problema non potrebbe essere risolto così.

4. ***Si generalizzino i precedenti problemi ad un qualunque mazzo di carte (52, 40, 36 carte, senza jolly), ad un qualunque numero di carte estratte, ad un qualunque (fra 1 e 4 però) numero di assi.***

Il lettore stanco potrà saltare direttamente al prossimo: questo esercizio è di fatto un approfondimento teorico. Confrontando le espressioni ottenute nei problemi 1, 2 e 3, si nota immediatamente una apparente "asimmetria":

$$P_1=\binom{4}{1}\binom{36}{2}\binom{40}{3}^{-1}\quad P_2=\binom{4}{2}\binom{36}{1}\binom{40}{3}^{-1}\quad P_3=\binom{4}{3}\binom{40}{3}^{-1}$$

in P_3 manca un coefficiente binomiale: si è "violata" una "regola" stabilita nei problemi 1 e 2. Ebbene, scelti i tre assi, ad essi si potrebbe abbinare *un numero 0 di altre carte*, che non siano assi, senza che nulla cambi. Queste carte da abbinare a gruppi di zero elementi possono essere scelte, formalmente, in $\binom{36}{0}=1$ modi: *certo! C'è un unico modo di non fare una cosa.* Infatti questo è esattamente il fattore che manca in P_3:

$$P_1=\binom{4}{1}\binom{36}{2}\binom{40}{3}^{-1}\quad P_2=\binom{4}{2}\binom{36}{1}\binom{40}{3}^{-1}\quad P_1=P_2=\binom{4}{3}\binom{36}{0}\binom{40}{3}^{-1}$$

Siamo quindi autorizzati a scrivere le tre probabilità con un'unica formula, dipendente dal numero *i* di assi che vogliamo ottenere, dal tipo di mazzo (36 carte) e dal numero di carte che estraiamo per volta (3):

$$P_i(40,3)=\binom{4}{i}\binom{36}{3-i}\binom{40}{3}^{-1}$$

Ebbene, è immediato, adesso, generalizzare il problema. Sia *N* il numero di carte, *k* il numero di carte estratte per volta, *i* il numero di assi che si vogliono ottenere: in tutti i mazzi ci sono 4 semi, 4 assi, quindi:

$$numero.carte=40\to N\quad estratte=3\to k\quad non.assi=36=40-4\to N-4$$

quindi:

$$P_i(N,k)=\binom{4}{i}\binom{N-4}{k-i}\binom{N}{k}^{-1}\quad \begin{matrix}0\le i\le 4\\ k\le N/2\end{matrix}$$

Come "verifica", riprendiamo il problema 2 su un mazzo di 52 carte estratte a gruppi di 4: ***Calcolare la probabilità che estratte a caso ed assieme 4 carte da un mazzo di 52, fra di esse vi siano 2 soli assi, di qualunque seme.*** Si ragioni come come fatto nel problema 2. Il numero dei casi possibili è quello dei "gruppi non ordinati" (combinazioni) di 4 carte che si possono costruire con 52 carte diverse, dato dal coefficiente binomiale $\binom{52}{4}$. Il numero dei casi favorevoli, visto che non si richiede *dove* siano gli assi rispetto alle altre due carte estratte, è invece dato dal numero delle possibili scelte dei due assi per il numero delle possibili scelte delle due carte rimanenti, che non si vuole siano assi. Queste carte possono essere scelte in $\binom{48}{2}$ modi (possibili gruppi di 2 elementi scelti fra 52-4), mentre i due assi possono essere scelti in $\binom{4}{2}$ modi diversi (numero dei gruppi di due elementi che posso costruire a partire da 4 oggetti differenti). Quindi:

$$P_2(52,4)=\binom{4}{2}\binom{48}{2}\binom{52}{4}^{-1}=\frac{\frac{4!}{2!2!}\,\frac{48!}{2!46!}}{\frac{52!}{4!48!}}=24\cdot 3\frac{48\cdot 47}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}=0.0249990538>\frac{1}{40}$$

La formula generalizzata darebbe d'altra parte la stessa identica cosa:

$$P_i(N,k)=\binom{4}{i}\binom{N-4}{k-i}\binom{N}{k}^{-1}=P_2(52,4)=\binom{4}{2}\binom{52-4}{4-2}\binom{52}{4}^{-1}=\binom{4}{2}\binom{48}{2}\binom{52}{4}^{-1}$$

bel risultato. Una nota molto importante: questa formula sottolinea la potenza del calcolo combinatorio ma anche la sua "pericolosità": usato meccanicamente, senza farsi troppe domande, può portare ad errori considerevoli. Bisogna sempre capire cosa si sta facendo, specialmente nei problemi di probabilità, in cui si deve stare molto attenti: si è arrivati alla formula scritta solo dopo aver risolto i problemi precedenti, solo dopo aver mostrato strategie *di base* per la soluzione dei problemi. Un caso particolare ed interessante in cui si troverà quanto ora sottolineato. La probabilità di dividere un mazzo in due parti in ognuna delle quali ci siano due assi si troverà con *i =2* e *k = N/2. Se però si sostituissero questi dati nella formula generale, i calcoli sarebbero complicati!* Fissiamo allora i dati, e usiamo lo stesso la formula: il mazzo sia di 52 carte:

$$\{i=2\quad k=26\}\Rightarrow\left\{P_2(52,26)=\binom{4}{2}\binom{52-4}{26-2}\binom{52}{26}^{-1}=6\frac{\frac{48!}{24!24!}}{\frac{52!}{26!26!}}=6\frac{48!}{24!24!}\,\frac{26!26}{52!}=6\frac{26\cdot 25\cdot 26\cdot 25}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}=0.3901560...>\frac{100}{256}\right\}$$

5. ***Calcolare la probabilità che estratte a caso una dopo l'altra tre carte da un mazzo di 40, solo la prima sia un asso, di qualunque seme. Una volta estratte le carte non vengono reinserite nel mazzo.***

Le parole *a caso* vogliono significare che chi estrae non è in grado di "sentire" le carte, ossia sono tutte equiprobabili. Il problema si risolve semplicemente ricordando il teorema della probabilità dell'intersezione di eventi non indipendenti:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

la probabilità che accadano sia A che B è pari al prodotto della probabilità di uno dei due per la probabilità che l'altro accada *se e solo se il primo è sicuramente accaduto.* Nel caso, questo si applica in tal modo: estratta la prima carta, che si vuole sia un asso, la seconda, che non si vuole sia un asso, potrà essere scelta in 39-3 (tre sono gli assi rimasti) modi diversi. Ma non si sta risolvendo il problema con calcoli combinatorii… Si rifletta allora che la probabilità di *non avere* un asso alla seconda estrazione è facilmente esprimibile in funzione della probabilità di estrarre un secondo asso, che sarebbe, una volta estratto il primo, pari a 3/39:

$$P_{10}\left(asso \cap \overline{asso}\right) = P(asso)P\left(\overline{asso}\middle|asso\right) = \frac{4}{40}\left(1-\frac{3}{39}\right)$$

(con la barretta si indica l'evento contrario) e finora le carte estratte sono due. Estraendo la terza, che non si vuole sia un asso:

$$P_{100} = P_{10}\cdot\left(1-\frac{3}{38}\right) = \frac{4}{40}\left(1-\frac{3}{39}\right)\left(1-\frac{3}{38}\right) = 4\frac{36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38} = 0.085020...$$

Un'osservazione interessante: *questa probabilità è diversa da quella calcolata nel primo esercizio, P_1*. La ragione di ciò è semplice: *si è imposto che l'asso sia la prima carta estratta, ossia si è imposto un ordine di estrazione. Questo, prendendo assieme tre carte, come nel problema 1, non lo si può imporre! Chiaramente, imporre un ordine implica rendere "più speciale", quindi meno probabile, l'evento. E infatti $P_{100} < P_1$.*

6. ***Calcolare la probabilità che estratte a caso una dopo l'altra tre carte da un mazzo di 40, fra di esse si abbia un asso, di qualunque seme. Una volta estratte le carte non vengono reinserite nel mazzo.***

Questo problema altro non è che il primo, scritto e risolto in altra forma: si estraggono infatti tre carte una dopo l'altra, si vuole un solo asso, ma non si impone la sua posizione nella terna. Si mostra ora quindi una soluzione del primo problema che non necessita del calcolo combinatorio. I casi sono tre: o l'asso viene estratto come prima carta, evento la cui probabilità è stata calcolata nell'esercizio precedente, o viene estratto come seconda o come terza. Le probabilità di questi due ultimi eventi, ragionando come fatto per P_{100} , saranno rispettivamente:

$$P_{010} = \left(1-\frac{4}{40}\right)\frac{4}{39}\left(1-\frac{3}{38}\right) = \frac{36}{40}\frac{4}{39}\frac{35}{38} = 4\frac{36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38} = 0.085020...$$

$$P_{001} = \left(1-\frac{4}{40}\right)\left(1-\frac{4}{39}\right)\frac{4}{38} = \frac{36}{40}\frac{35}{39}\frac{4}{38} = 4\frac{36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38} = 0.085020...$$

ed il lettore, rileggendo l'esercizio 7, dovrebbe non avere dubbi su questo. *Si scopre così che le tre probabilità P_{100} , P_{010}, P_{001} sono uguali!* Questo non può stupire, tuttavia: *i tre ordini sono eventi indipendenti.* Ora, il teorema della probabilità dell'unione di eventi indipendenti ci dice che:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

e quindi non stupirà neanche che:

$$P_{100} + P_{010} + P_{001} = 4\frac{36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38} + 4\frac{36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38} + 4\frac{36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38} = 12\frac{36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38} = P_1 = 0.2550607... > \frac{1}{4}$$

ossia quel che, gia' detto, si poteva già dedurre dalla logica ed ora dai calcoli: questo problema è esattamente il primo problema affrontato, risolto però senza dover ricorrere al calcolo combinatorio. Si vuole sottolineare che si sarebbe potuto risolvere il problema 5 mediante il calcolo combinatorio, considerando le *disposizioni* (in cui conta l'ordine) invece che le *combinazioni,* ma si è ritenuto sarebbe stato meno "efficace" per la comprensione del problema. Resta il fatto che qualunque strategia di soluzione si intraprenda, "combinatoria" (analitica) o "probabilistica" (sintetica), questa non può influenzare il risultato.

7. ***Calcolare la probabilità che estratte a caso una dopo l'altra tre carte da un mazzo di 40, le sole prime due siano assi, di qualunque seme. Una volta estratte le carte non vengono reinserite nel mazzo.***

Variante del problema 5, di immediata soluzione:

$$P_{110} = \frac{4}{40}\frac{3}{39}\left(1-\frac{2}{38}\right) = 12\frac{36}{40\cdot 39\cdot 38} = 0.00728744... > \frac{1}{137}$$

8. ***Calcolare la probabilità che estratte a caso una dopo l'altra tre carte da un mazzo di 40, fra di esse vi siano due assi, di qualunque seme. Una volta estratte le carte non vengono reinserite nel mazzo.***

Il lettore è pregato di non annoiarsi: se ha seguito e compreso la logica finora portata avanti dovrebbe capire subito dove si sta arrivando: si tratta di una variante del problema 2. Le probabilità dei casi possibili non trattati (asso, altro, asso, oppure altro, asso, asso, il caso asso, asso, altro si è trattato nel problema 7) sono:

$$P_{101}=\frac{4}{40}\left(1-\frac{3}{39}\right)\frac{3}{38}=\frac{4}{40}\frac{36}{39}\frac{3}{38}=12\frac{36}{40\cdot 39\cdot 38}=P_{011}=\left(1-\frac{4}{40}\right)\frac{4}{39}\frac{3}{38}=\frac{36}{40}\frac{4}{39}\frac{3}{38}=12\frac{36}{40\cdot 39\cdot 38}=P_{110}$$

Analogamente a quanto visto nel problema 6:

$$P_{110}+P_{101}+P_{011}=P_2=\binom{4}{2}\binom{36}{1}\binom{40}{3}^{-1}=\frac{36\cdot 36}{40\cdot 39\cdot 38}=0.0218623...>\frac{1}{46}$$

9. *Calcolare la probabilità che estratte a caso una dopo l'altra tre carte da un mazzo di 40, siano tre assi, di qualunque seme. Una volta estratte le carte non vengono reinserite nel mazzo.*

Sembrerà noioso, ma questo problema è invece interessante. Procedendo come finora fatto dal problema 5 a questo, si calcola *l'unica disposizione possibile*, se non si distingue il seme degli assi:

$$P_{111}=\frac{4}{40}\frac{3}{39}\frac{2}{38}$$

è immediato osservare che:

$$P_{111}=P_3=\binom{40}{3}^{-1}\binom{4}{3}=\frac{4!}{40\cdot 39\cdot 38}=0.00040485829...=\frac{1}{2470}$$

gia' calcolata! Quando un problema combinatorio non può dipendere dall'ordine, perché, si ripete, non si distingue fra i semi degli assi (potrebbero anche essere di un colore solo…), l'equivalenza fra il punto di vista combinatorio e quello probabilistico è di pressoché immediata osservazione.

10. *Calcolare la probabilità che giocando in 4 a poker[2] con un mazzo da 52 uno solo dei giocatori abbia un poker di K servito.*

Il problema sembrerebbe ancora una variante del primo, con i K al posto degli assi: calcolare la probabilità che estraendo 5 carte, in esse ci siano 4 K (poker). Ma non è così: estratte le prime cinque, fra cui si potrebbe non aver avuto alcun poker di K (gli altri non si considerano), il problema si riapre per le seconde cinque, le quali non sono però estratte da un mazzo di 52, ma di 52-5. Si può quindi procedere iterativamente, tenendo conto del fatto, ancora, che non si è richiesto a quale dei giocatori sia servito il poker, ossia, non si è imposto un "ordine" alle estrazioni. I casi sono quindi: solo al primo giocatore viene servito l'unico poker che si osserverà, quello di K:

$$P_{1000}=\frac{\binom{4}{4}\binom{52-4}{1}}{\binom{52}{5}}\frac{\binom{4}{0}\binom{52-5}{5}}{\binom{47}{5}}\frac{\binom{4}{0}\binom{52-10}{5}}{\binom{42}{5}}\frac{\binom{4}{0}\binom{52-15}{5}}{\binom{37}{5}}=\frac{\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$

il perché delle sottrazioni è ovvio: estratto il poker nelle prime 4 carte, la quinta potrà essere scelta in 52-4 modi; il secondo giocatore riceverà poi 5 carte scelte fra le 52-5 carte rimaste. È corretto che appaiano 1 a moltiplicare: una volta estratto l'unico poker di K, la probabilità che non sia estratto è 1. Con calcoli analoghi, si avrà che le probabilità che il poker di K sia servito solo al secondo, al terzo e al quarto giocatore sono rispettivamente:

$$P_{0100}=\left(1-\binom{4}{4}\binom{48}{1}\binom{52}{5}^{-1}\right)\binom{43}{1}\binom{47}{5}^{-1}\qquad P_{0010}=\left(1-\binom{4}{4}\binom{48}{1}\binom{52}{5}^{-1}\right)\left(1-\binom{4}{4}\binom{43}{1}\binom{47}{5}^{-1}\right)\binom{38}{1}\binom{42}{5}$$

$$P_{0001}=\left(1-\binom{4}{4}\binom{48}{1}\binom{52}{5}^{-1}\right)\left(1-\binom{4}{4}\binom{43}{1}\binom{47}{5}^{-1}\right)\left(1-\binom{38}{1}\binom{42}{5}^{-1}\right)\binom{33}{1}\binom{37}{5}^{-1}$$

passando all'evento inverso (probabilità che non esca il poker di K). I coefficienti binomiali 4 su 4, essendo 1, sono stati omessi. Numericamente:

$$P_{1000}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}=\frac{1}{54145}=1.84689\ ...\cdot 10^{-5}$$

$$P_{0100}=\frac{54144}{54145}\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}=\frac{54144}{54145}\frac{1}{35673}=2.80318\ ...\cdot 10^{-5}$$

$$P_{0010}=\frac{54144}{54145}\frac{35672}{35673}\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{42\cdot 41\cdot 40\cdot 39}=\frac{54144}{54145}\frac{35672}{35673}\frac{1}{22386}=4.4668699\ ...\cdot 10^{-5}$$

$$P_{0001}=\frac{54144}{54145}\frac{35672}{35673}\frac{22385}{22386}\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{37\cdot 36\cdot 35\cdot 34}=\frac{54144}{54145}\frac{35672}{35673}\frac{22385}{22386}\frac{1}{13209}=7.5699\ ...\cdot 10^{-5}$$

risultato coerente: mano a mano che i giocatori aumentano, l'ultimo che riceve carte ha sempre maggiori probabilità di ottenere l'unico poker di K che si considera (gli altri poker, si ricorda, non si considerano)[3]. Il problema è a tal punto risolto: la probabilità che giocando in 4 *uno qualunque dei giocatori* abbia un poker di K servito è:

[2] Bisogna innanzi tutto stabilire di cosa si sta parlando. Il gioco del "poker" ha molte varianti, ma tutte con le stesse regole: la cosiddetta *originale* (J. Gelli, "Giochi e passatempi", Hoepli 1959) si gioca con 52 carte; altre varianti, nate per ragioni "probabilistiche" che saranno chiare in seguito, si giocano con 32 carte: 7,8,9,10,J,Q,K, asso di ogni seme. I giocatori sono sempre e solo 4. Ad ogni giocatore vengono date 5 carte. Ci si riferirà nella maggior parte dei casi al poker *originale*.

$$P_{1000} + P_{0100} + P_{0010} + P_{0001} = \frac{1}{54145}\left(1+\frac{54144}{35673}\left(1+\frac{35672}{22386}\left(1+\frac{22385}{13209}\right)\right)\right) = 1.668\ldots\cdot 10^{-4}$$

Si noti che nelle espressioni delle probabilità P compare di fatto la formula prima dimostrata:

$$P_i(N,k) = \binom{4}{i}\binom{N-4}{k-i}\binom{N}{k}^{-1} \quad \begin{array}{l} 0 \le i \le 4 \\ k \le N/2 \end{array}$$

dove *k=5, i=4, ma varia ovviamente N mano a mano che i giocatori vengono serviti.*

11. Calcolare la probabilità che giocando in 4 a poker con un mazzo da 52 uno solo dei giocatori abbia un poker servito.

L'unica variante rispetto al precedente problema è che non si vuole il solo particolare poker di K, ma un solo poker di qualunque tipo. In un mazzo da 52 ci sono quindi 13 possibili scelte: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K, e la probabilità cercata è di conseguenza:

$$13\left(P_{1000} + P_{0100} + P_{0010} + P_{0001}\right) = \frac{13}{54145}\left(1+\frac{54144}{35673}\left(1+\frac{35672}{22386}\left(1+\frac{22385}{13209}\right)\right)\right)$$

12. Calcolare la probabilità che giocando a poker in quattro con un mazzo da 52 i soli primi due giocatori che ricevono le carte abbiano ciascuno un poker servito, uno di K ed uno di assi.

Appena il primo giocatore ha il suo poker, le altre carte non possono più scegliersi indipendentemente da questa informazione, ma neanche dall'informazione che il secondo giocatore ha il suo poker ! Per giunta, non si è detto che il primo giocatore ha il poker di K ed il secondo di assi o viceversa! Quindi:

$$P_{1100} = 2\frac{\binom{4}{4}\binom{52-4-4'}{1}}{\binom{52}{5}}\frac{\binom{4'}{4'}\binom{52-5-4'}{1}}{\binom{47}{5}}\frac{\binom{4}{0}\binom{52-5-5}{5}}{\binom{42}{5}}\frac{\binom{4}{0}\binom{52-5-5-5}{5}}{\binom{37}{5}} = 2\frac{\binom{4}{4}\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}\frac{\binom{4}{4}\binom{43}{1}}{\binom{47}{5}}$$

dove il 2 è il numero dei modi in cui possono distribuirsi i due poker fra i due giocatori, e nei coefficienti binomiali si è tenuto conto del fatto che se sia il primo che il secondo giocatore ha un poker, la quinta carta del primo non può essere una delle carte del poker del secondo, e quindi può essere scelta non in 52-4 modi, ma in 52-8 modi (il 4' sta ad indicare proprio le quattro carte del secondo poker). Analogamente, la quinta carta del secondo sarà scelta fra 43 (52-5-4) possibili.

$$P_{1100} = 2\frac{1\cdot 44}{\binom{52}{5}}\frac{1\cdot 43}{\binom{47}{5}} = 2\frac{44\cdot 47!}{52!}5!\frac{43!}{47!}5! = 2\frac{44!\,(5!)^2}{52!} = \frac{1}{1053553410} = 9.49168\ldots\cdot 10^{-10}$$

13. Calcolare la probabilità che giocando a poker in quattro, con un mazzo da 52, i soli primi due giocatori che ricevono le carte abbiano ciascuno un poker servito. I giocatori siano amici onesti, ossia i poker siano di carte differenti.

I poker non sono specificati! Vanno quindi considerate tutte le possibili coppie di 13 elementi. Inoltre, resta il fatto che i due poker possono distribuirsi in due modi diversi fra i due giocatori. Quindi:

$$P_{1100} = 2\binom{13}{2}\frac{\binom{4}{4}\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}\frac{\binom{4}{4}\binom{43}{1}}{\binom{47}{5}} = 2\binom{13}{2}\frac{1}{1053553410} = \frac{2}{13507095} = 1.48070\ldots\cdot 10^{-7}$$

14. Calcolare la probabilità che giocando a poker in quattro, con un mazzo da 52, i vari giocatori abbiano più poker serviti. I giocatori siano amici onesti, ossia i poker siano di carte differenti.

Basta analizzare tutti i casi possibili, ricordando che appena uno o più giocatori hanno dei poker, le altre carte non possono più scegliersi indipendentemente da questa informazione. Casi già visti: solo il primo giocatore abbia un poker:

$$P_{1000} = 13\cdot\binom{4}{4}\binom{48}{1}\binom{52}{5}^{-1}$$

I poker che compaiono siano due, al primo ed al secondo giocatore, altro caso già visto:

---

[3] Pensando al poker con 32 carte, questa può leggersi , volendo, come una delle ragioni per cui a poker si fa a turno a dare le carte e perché il numero dei giocatori deve essere limitato: se si giocasse in 6, numero massimo possibile con 32 carte, l'ultimo giocatore avrebbe una probabilità molto superiore del primo di ricevere un poker di K servito (calcolarla…). Si sta però escludendo la possibilità che altri poker, compreso quello di assi, escano…

$$P_{1100}=2\binom{13}{2}\binom{4}{4}\binom{44}{1}\binom{52}{5}^{-1}\binom{4}{4}\binom{43}{1}\binom{47}{5}^{-1}$$

I poker che compaiono siano due, *al primo ed al terzo giocatore*. In tal caso, conviene procedere passo per passo. Decidiamo di considerare due particolari poker, ad esempio, di Q e di J. Il primo giocatore ha un poker, diciamo quello di Q: le sue 5 carte sono quindi costituite da 4 Q, che si possono scegliere in $\binom{4}{4}=1$ modi differenti, ed una quinta carta che, tenendo conto che il terzo giocatore avrà un poker di J, potrà essere scelta in $\binom{52-4-4'}{1}=52-4-4'$ modi diversi, dove 4' è il numero dei J. Il secondo giocatore, che non avrà un poker, o meglio che potrà scegliere il suo poker in un solo modo, ossia non avendolo, cioè in $\binom{4}{0}=1$ modi, avrà semplicemente 5 carte fra le rimanenti 52-5-4' possibili, perché i 4' J che costituiscono il poker del terzo giocatore non sono accessibili, e le prime 5 sono state date al primo giocatore. Il terzo giocatore avrà qualcosa di simile al primo: i 4' J del suo poker, da scegliersi in un modo solo, ed una quinta carta fra le rimanenti 52-5-5-4'. Il quarto giocatore potrà solo scegliere 5 carte fra le 52-5-5-5 rimanenti.

$$P_{Q0J0}=\binom{4}{4}\binom{52-4-4'}{1}\binom{52}{5}^{-1}\binom{4}{0}\binom{52-5-4'}{5}\binom{47}{5}^{-1}\binom{4}{4}\binom{52-5-5}{1}\binom{42}{5}^{-1}\binom{4}{0}\binom{52-5-5-5}{1}\binom{37}{5}^{-1}$$

Si noti: *a pedice si è deciso come i poker si distribuiscono sui due giocatori!* Se ciò non si volesse considerare, ossia si volesse la probabilità che i due particolari poker di J e Q vadano al primo ed al secondo giocatore, ma non necessariamente in quest'ordine, si dovrebbe considerare un fattore 2 (come nel problema 12). Se poi non si volessero specificare quali poker compaiono, si dovrebbe ricorrere al coefficiente binomiale come nell'esercizio 13: la probabilità quindi che il primo ed il terzo giocatore abbiano un qualunque tipo di poker servito è:

$$P_{1010}=2\binom{13}{2}\binom{4}{4}\binom{44}{1}\binom{52}{5}^{-1}\binom{4}{0}\binom{43}{5}\binom{47}{5}^{-1}\binom{4}{4}\binom{42}{1}\binom{42}{5}^{-1}\binom{4}{0}\binom{37}{1}\binom{37}{5}^{-1}$$

La generalizzazione al caso in cui i poker siano *j* (fra 0 e 4), di qualunque tipo, distribuiti in qualunque modo fra *j determinati* giocatori, è immediata: si scelgano ad esempio 3 poker, al primo, al terzo ed al quarto giocatore. Con ragionamenti ormai fatti più volte:

$$P_{1011}=3!\binom{13}{3}\binom{4}{4}\binom{52-4-4'-4''}{1}\binom{52}{5}^{-1}\binom{4}{0}\binom{52-5-4'-4''}{5}\binom{47}{5}^{-1}\binom{4'}{4'}\binom{52-5-5-4''}{1}\binom{42}{5}^{-1}\binom{4''}{4''}\binom{52-5-5-5-4''}{1}\binom{37}{5}^{-1}$$

15. ***Generalizzare i problemi 10 e 11 ai casi di tris e coppia.***

16. ***Calcolare la probabilità che giocando in 4 a poker con un mazzo da 52, due dei giocatori abbiano ciascuno una coppia di numeri uguali servite.***

17. ***Calcolare la probabilità che giocando in 4 a poker con un mazzo da 52, due dei giocatori abbiano ciascuno una coppia di numeri diversi servita.***

18. ***Calcolare la probabilità che giocando in 4 a poker con un mazzo da 52, un giocatore abbia un poker, un altro un tris, un altro una coppia e voi niente.***

19. ***Un ex-amico, avendo fatto l'esercizio precedente, odia perdere a poker, quindi bara. Ma bara male, e sostituisce solo uno dei 4 K con un quinto asso. I suoi ex-amici decidono di smascherarlo giocando con lui un'ultima volta. Calcolare la probabilità che ci riescano mostrando le proprie carte appena sono servite.***