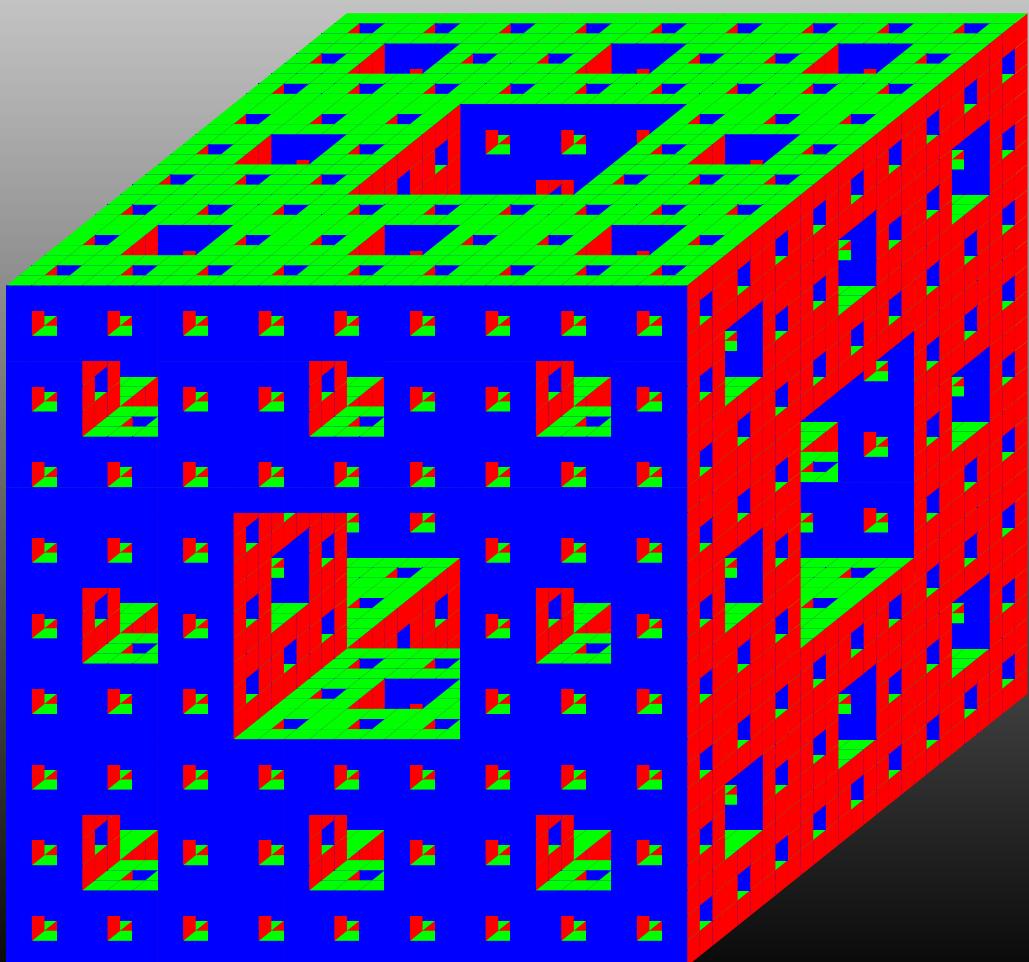


Maurizio Cailotto

G&Te



Menger Cube

Geometria & Topologia elementari

Avvertenza. Questo testo è stato distribuito nel corso dell'anno accademico 2013/14 per i corsi di Geometria 2 parte B (capitoli *I,II,III,IV*) e Topologia (capitoli *III,V,VI,VII*) del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Padova. Il contenuto è essenzialmente uno scheletro del contenuto dei corsi (programma dettagliato; i paragrafi segnati con \boxtimes non fanno parte del programma, i paragrafi del cap. *III* segnati con \top fanno parte del programma di topologia). Per la parte di Geometria Differenziale si sono consultati i testi di Do Carmo, Klingenberg, Spivak. Per la parte di Topologia Generale e Algebrica si sono consultati i testi di Hatcher, Massey, Kosniowski, Willard, Steen-Seebach e molti altri (per esempio gli appunti manoscritti di T.Valent).

Copyright. Tutti i diritti di questo testo sono riservati all'autore (incluse le eventuali edizioni parziali precedenti). Non ne è consentito alcun uso a scopi commerciali. Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o su supporto elettronico portatile ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data e fonte originale e la presente nota di copyright.

*Note *TEX*niche.* Il testo è stato scritto in PlainTeX, e i disegni (eventualmente) presenti sono stati sviluppati in METAPOST. Siano ringraziati DEK e JDH.

febbraio 2016



Indice

Capitolo I. Geometria differenziale delle curve	1
0. Introduzione.	1
1. Teoria Locale.	1
0. Preliminari: Formule utili.	1
1. Curve regolari.	3
2. Riferimenti ed equazioni di Frenet (curvatura).	4
3. Teorema fondamentale delle curve.	8
2. \boxtimes Cenni a risultati globali.	10
3. Esempi.	11
Capitolo II. Geometria differenziale delle superficie	23
0. Introduzione.	23
1. Teoria Locale.	24
1. Superficie regolari.	24
2. Prima forma fondamentale.	26
3. Mappe di Gauss e di Weingarten.	29
4. Seconda forma fondamentale.	30
5. Curvature.	31
6. Curve sulle superficie.	33
7. \boxtimes Derivate covarianti, simboli di Christoffel.	37
8. Geodetiche.	38
2. \boxtimes Equazioni e teorema fondamentali delle superficie.	39
1. Equazioni strutturali delle superficie.	39
2. Teorema fondamentale delle superficie.	40
3. Teorema Eggregium di Gauss.	41
4. \boxtimes Teorema di Gauss-Bonnet.	42
5. Esempi.	45
Capitolo III. Topologia Generale	69
0. Introduzione.	69
1. Spazi topologici e funzioni continue.	69
1. Topologie.	69
2. Strutture topologiche.	72
3. Funzioni continue.	75
4. Proprietà di numerabilità.	77
5. Proprietà di separazione.	77
6. (pseudo)metriche e topologie (pseudo)metrizzabili.	80
7. Famiglie di (pseudo)metriche e topologie uniformizzabili.	82
2. Connessione.	84
3. Compattezza.	87
4. \boxtimes Completezza.	90
5. Operazioni sugli spazi topologici.	92
1. Somme e prodotti.	92
2. Quozienti e sottospazi.	93
3. \sqcap Somme amalgamate e prodotti fibrati.	94
4. \sqcap Coni semplici, suspensioni.	95
5. \sqcap Coni (join).	95
6. \sqcap Coni mappanti e cilindri mappanti.	95

6. Fattoria topologica.	96
1. Esempi domestici.	96
2. Sfere, palle, tori, spazi proiettivi e lenticolari.	97
3. τ Gruppi topologici e azioni topologiche.	98
4. τ Complessi cellulari.	99
7. Zoo topologico.	101
1. Insieme di Cantor.	101
2. Scalinata del diavolo.	102
3. Curva di Peano.	102
4. Tappeto di Sierpinski e polvere di Cantor.	103
8. Tavole riassuntive.	105
Capitolo IV. Topologia delle superficie reali compatte	107
0. Introduzione.	107
1. Definizioni ed esempi.	107
2. Triangolazioni e Caratteristica di Eulero-Poincaré.	110
3. Genere e classificazione.	112
Capitolo V. Omotopia e tipo d'omotopia	115
1. Omotopia.	115
1. Coppie, spazi puntati.	115
2. Omotopia tra funzioni.	116
3. Nullomotopia, spazi contraibili.	116
4. Composizioni. Equivalenze omotopiche	117
5. Omotopie relative.	117
2. Retrazioni e retratti.	117
1. Retrazioni.	117
2. Retratti di deformazione.	117
3. Applicazioni.	118
1. Esempi.	118
2. Caso delle sfere.	118
3. Applicazioni ai complessi cellulari.	119
4. Gioco.	119
Capitolo VI. Gruppo Fondamentale	121
1. Gruppo Fondamentale.	121
1. Definizione, funtorialità e invarianza omotopica..	121
2. Spazi semplicemente connessi.	122
3. Gruppo Fondamentale del circolo.	122
2. Teorema di Seifert-Van Kampen.	123
0. Preliminari sui gruppi.	123
1. Enunciati.	124
3. Applicazioni.	125
1. Gruppi Fondamentali di gruppi topologici.	125
2. Applicazione alle superficie reali compatte.	126
3. Applicazione ai complessi cellulari.	126
4. Applicazione ai grafi.	127
5. Applicazione a link e nodi.	127
Capitolo VII. Rivestimenti	131
1. Spazi incubi, fibrati, rivestimenti.	131
1. Spazi incubi, fibrati.	131
2. Rivestimenti.	131
2. Proprietà di rialzamento.	132

1. Cammini e omotopie.	132
2. Monodromia.	133
3. Funzioni.	133
3. Gruppi fondamentali e rivestimenti.	134
1. Gruppi fondamentali dei rivestimenti.	134
2. Rivestimenti universali.	134
3. Corrispondenza di Galois tra rivestimenti e gruppi fondamentali.	135
4. Teoria di Galois dei rivestimenti.	136
1. Automorfismi di rivestimenti.	136
2. Relazioni con i gruppi fondamentali.	136
3. Teoremi fondamentali.	137
4. Analogia Galois algebrico - Galois topologico.	137
5. Applicazioni.	138
1. Applicazione alle varietà reali.	138
2. Applicazione ai gruppi topologici.	138
3. Applicazione alle superficie reali compatte.	138
4. Applicazione ai complessi cellulari.	139
5. Applicazione ai grafi.	139
Appendice A. Problemi di Topologia	143
1. Problemi di topologia generale.	143
2. Problemi su omotopia e gruppo fondamentale.	144
3. Problemi sui complessi cellulari.	145
4. Problemi sui grafi.	146
Appendice B. Temi d'esame: Geometria Differenziale	147
1. Anno accademico 2012/13.	147
2. Anno accademico 2013/14.	148
3. Anno accademico 2014/15.	149
4. Anno accademico 2015/16.	150
Appendice C. Temi d'esame: Topologia Generale	155
1. Anno accademico 2012/13.	155
2. Anno accademico 2013/14.	157
3. Anno accademico 2014/15.	159
4. Anno accademico 2015/16.	162
Appendice D. Temi d'esame: Topologia	167
1. Anno accademico 2011/12.	167
2. Anno accademico 2012/13.	170
3. Anno accademico 2013/14.	173
4. Anno accademico 2014/15.	177

Capitolo I

Geometria differenziale delle curve

0. Introduzione.

In questo capitolo presenteremo velocemente la teoria locale delle curve differenziabili immerse in \mathbb{R}^n (di solito $n = 2, 3$), usando strumenti noti dai corsi di Analisi e Geometria del primo anno (calcolo, differenziale e integrale, in una variabile e algebra lineare, essenzialmente), mettendo l'accento sulle nozioni geometriche (curvatura, torsione, riferimenti mobili sulle curve ed equazioni corrispondenti), e su come esse caratterizzano le curve in generale, e alcune classi di curve in particolare.

In linea di principio vi possono essere due atteggiamenti per studiare le curve: come immagini di funzioni di una variabile (curve parametrizzate, almeno localmente; nel piano è equivalente studiare localmente gli zeri di funzioni delle variabili), oppure come spazi topologici (con la topologia indotta dall'ambiente) localmente omeomorfi ad aperti di \mathbb{R} . Anche chiedendo l'iniettività della parametrizzazione i due atteggiamenti non sono equivalenti: per esempio si possono avere ottime curve parametrizzate:



in cui non tutti i punti hanno intorni omeomorfi ad intervalli aperti di \mathbb{R} . Per semplicità useremo il primo atteggiamento (curve parametrizzate), e senza nemmeno chiedere l'iniettività della parametrizzazione (permettendo quindi l'esistenza di "punti singolari"), ma insistendo invece sulla "regolarità" in ogni punto (della parametrizzazione), ovvero sulla proprietà di avere per ogni valore del parametro sufficienti derivate non nulle.

Non studieremo invece, per questioni di tempo, proprietà globali delle curve, cioè proprietà che dipendono dalla curva nel suo complesso, e non solo dalla forma locale vicino ad ogni punto. Abbiamo aggiunto una lista, a titolo di esempio, di proprietà globali, di cui in generale le dimostrazioni non sono né immediate né facilissime.

Gli esempi, classici e di grande importanza, fanno parte integrante delle conoscenze da acquisire, e conviene studiarne i vari aspetti man mano che vengono introdotti, anche se nelle note gli esempi sono accumulati in una sezione finale.

1. Teoria Locale.

1.0. Preliminari: Formule utili.

Ricordiamo per comodità alcune formule riguardanti le funzioni vettoriali e le loro derivazioni: lettere come α, β sono (funzioni) scalari, lettere come u, v, w, γ sono (funzioni) vettori(ali):

1.0.1. Regole di Leibniz:

$$\begin{aligned} (\alpha v)' &= \alpha' v + \alpha v', \\ (v \cdot w)' &= v' \cdot w + v \cdot w', \\ (v \times w)' &= v' \times w + v \times w' \quad (\text{in } \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

1.0.2. Derivata del modulo (derivando $\|v\|^2 = v \cdot v$):

$$\begin{aligned}\|v\|' &= \sqrt{v \cdot v'} = \frac{v \cdot v'}{\|v\|} \\ \left(\frac{1}{\|v\|}\right)' &= -\frac{v \cdot v'}{\|v\|^3}\end{aligned}$$

(un vettore di modulo costante è ortogonale al proprio derivato, e viceversa).

1.0.3. Derivata del versore:

$$\frac{v'}{\|v\|} = \frac{v'\|v\| - v\|v\|'}{\|v\|^2} = \frac{v'(v \cdot v) - v(v \cdot v')}{\|v\|^3} = \frac{v \times (v' \times v)}{\|v\|^3}$$

(l'ultima uguaglianza in \mathbb{R}^3). Scrivere una formula per derivare il versore di un prodotto vettore.

1.0.4. Derivata di determinanti e tracce:

$$\det(A)' = \sum_i \det(A'_i) \quad \text{e} \quad \text{tr}(A)' = \text{tr}(A')$$

dove A'_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i -esima con la sua derivata.

Per completezza ricordiamo anche che dalla uguaglianza $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ (oppure $\text{tr}(A^c A) = n \det(A)$), o anche dagli sviluppi di Laplace, possiamo ricavare le formule di Jacobi

$$\det(A)' = \det(A) \text{tr}(A^{-1} A') \quad (\text{oppure } \det(A)' = \text{tr}(A^c A')).$$

1.0.5. Derivata del prodotto: $(AB)' = A'B + AB'$, derivata dell'inversa: $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$, derivata della potenza: $(A^n)' = \sum_{i+j=n-1} A^i A' A^j$.

Se A e A' commutano tra loro, allora $(A^n)' = nA^{n-1}A'$, $(e^A)' = A'e^A$ e $(\log A)' = A^{-1}A'$.

Se H è matrice ortogonale, allora la derivata si scrive $H' = HA$ con $A^t = -A$ (cioè A è antisimmetrica: basta derivare l'uguaglianza $H^t H = \mathbb{I}$).

1.0.6. Formule di composizione: se $v = v(t)$ è vettore dipendente da un parametro t (reale in un intervallo), e $t = t(s)$ un diffeomorfismo (tra intervalli reali), allora indichiamo con $\tilde{v} = \tilde{v}(s) = v(t(s))$ la composizione. Usiamo l'apice per indicare la derivata rispetto al parametro della funzione: quindi $v' = \frac{d}{dt}v$, mentre $\tilde{v}' = \frac{d}{ds}\tilde{v}$. Tramite le formule di derivazione di funzioni composte otteniamo allora:

$$\begin{aligned}\tilde{v}' &= v' \frac{dt}{ds} \\ \tilde{v}'' &= v'' \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + v' \frac{d^2t}{ds^2} \\ \tilde{v}''' &= v''' \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 + 3v'' \frac{d^2t}{ds^2} \frac{dt}{ds} + v' \frac{d^3t}{ds^3}\end{aligned}$$

e in generale la derivata n -esima $\tilde{v}^{(n)}$ è una combinazione di termini $v^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) moltiplicati per opportuni coefficienti e combinazioni di derivate iterate di t ; il primo termine è $v^{(n)} \left(\frac{dt}{ds} \right)^n$, e l'ultimo $v' \frac{d^n t}{ds^n}$. Provare per $n = 4, 5$.

1.0.7. Formule relative al prodotto vettore di \mathbb{R}^3 (già usate):

$$\begin{aligned}(u_1 \times u_2) \cdot (v_1 \times v_2) &= \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} & \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \\ u \times (v \times w) &= (u \cdot w)v - (u \cdot v)w & v \times (v \times w) &= (v \cdot w)v - \|v\|^2 w \\ (u_1 \times u_2) \times (v_1 \times v_2) &= |u_1 \ u_2 \ v_2| v_1 - |u_1 \ u_2 \ v_1| v_2 = -|v_1 \ v_2 \ u_2| u_1 + |v_1 \ v_2 \ u_1| u_2 & w \times (v \times w) &= \|w\|^2 v - (w \cdot v)w\end{aligned}$$

(da dimostrare se non sono note; per la terza si osserva che dev'essere $\alpha v + \beta w$, e facendo $\cdot u$ si annulla, facendo $\cdot v$ si può usare la prima formula).

1.1. Curve regolari.

1.1.1. DEFINIZIONI (CURVE PARAMETRIZZATE). Una curva parametrizzata (di data classe) è una applicazione continua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (di data classe) ove I è un intervallo reale; di solito useremo la variabile $t \in I$, e scriveremo $\gamma(t)$. Si dice regolare se in ogni punto si ha $\gamma'(t) \neq 0$, e la retta $\gamma(t) + \langle \gamma'(t) \rangle$ si dice la retta tangente in $\gamma(t)$. Il modulo $\|\gamma'(t)\|$ nella metrica usuale di \mathbb{R}^n si dice velocità della parametrizzazione della curva al tempo t (o nel punto $\gamma(t)$).

1.1.1.1. Si dicono singolari i punti in cui una curva non è regolare.

1.1.1.2. Quasi sempre confonderemo la curva con la sua immagine. In effetti l'immagine determina la curva solo a meno di riparametrizzazioni (composizione di γ con un omeomorfismo $t = t(s) : J \rightarrow I$, J un altro intervallo reale). Essendo le riparametrizzazioni una relazione di equivalenza, possiamo definire le curve come le classi di equivalenza a meno di riparametrizzazioni delle curve parametriche.

1.1.1.3. Si dicono curve piane quelle con $n = 2$ o comunque contenute in un piano, curve spaziali quelle con $n = 3$ o comunque contenute in uno spazio di dimensione 3.

1.1.2. DEFINIZIONI (LUNGHEZZA D'ARCO, PARAMETRIZZAZIONE CANONICA). Data una curva, definiamo la lunghezza d'arco, a partire dal punto $\gamma(t_0)$, come

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du = \int_{t_0}^t \sqrt{\gamma'_1(u)^2 + \cdots + \gamma'_n(u)^2} du$$

(si tratta della usuale lunghezza della curva da $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$ come ben noto dai corsi di Analisi). Si osservi che

$$s'(t) = \frac{d}{dt} s(t) = \|\gamma'(t)\|$$

(onde il nome di velocità).

Se la curva è regolare, la lunghezza d'arco è un diffeomorfismo; detta $t = t(s)$ l'inversa, la riparametrizzazione $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ si dice parametrizzazione canonica o parametrizzazione in lunghezza d'arco, ed è una curva regolare percorsa con velocità unitaria, cioè $\tilde{\gamma}'(s)$ è un versore (vettore di lunghezza unitaria): infatti

$$\text{da } \frac{ds}{dt} = \|\gamma'\|, \text{ abbiamo che } \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\gamma'\|}, \text{ da cui } \tilde{\gamma}' = \frac{d}{ds}(\tilde{\gamma}) = \frac{d}{dt}(\gamma) \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$$

(solita stenografia sulle variabili mute e sulle composizioni: esplicitare

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{d}{ds}\gamma(t(s)) = \frac{d}{dt}\gamma(t(s)) \frac{dt}{ds} = \gamma'(t(s)) \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|}$$

per esercizio; useremo sempre questi piccoli abusi).

1.1.2.1. Chiaramente $s(t_0) = 0$, e spostare il punto iniziale da t_0 a t_1 cambia la lunghezza d'arco per una costante (quale?).

1.1.2.2. Di solito, il tentativo di scrivere una parametrizzazione canonica si urta a due difficoltà: intanto si incontrano spesso integrali non elementari (cioè che non ammettono primitive con funzioni elementari), e poi invertire $s(t)$ in $t(s)$ può essere antipatico.

Tuttavia sarà sempre utile dare le definizioni nel caso di curve in parametrizzazione d'arco, salvo poi vedere come calcolare gli enti definiti usando una parametrizzazione qualsiasi.

1.1.3. DEFINIZIONI (REGOLARITÀ, SPAZI OSCULATORI). Una curva $\gamma(t)$ di classe k si dice k -regolare se $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)$ sono linearmente indipendenti in ogni punto. In tal caso sono definiti gli spazi osculatori a γ in t come $V_i(t) = \gamma(t) + \langle \gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t) \rangle$ per $i \leq k$.

1.1.3.1. La definizione non dipende dalla parametrizzazione della curva.

1.1.3.2. Gli spazi osculatori hanno il significato geometrico di identificare istante per istante i sottospazi lineari in cui la curva sta “evolvendo”; per esempio il primo spazio osculatore è la retta tangente, il secondo spazio osculatore è il piano contenente la retta tangente e la direzione dell'accelerazione (della parametrizzazione, ma il piano dipende solo dalla curva).

1.1.3.3. Se una curva k -regolare è contenuta in un sottospazio di dimensione k , allora quel sottospazio è il suo k -esimo spazio osculatore in ogni punto, e viceversa.

1.1.3.4. PIANI E CERCHI OSCULATORI. La retta tangente in un punto P può essere vista come il limite $P_1 \vee P_2$ quando P_1, P_2 tendono a P sulla curva.

Similmente, per curve biregolari, in cui abbiamo definito il piano osculatore, possiamo caratterizzare il cerchio osculatore come il limite dei cerchi (nel piano osculatore) passanti per P_1, P_2, P_3 quando essi tendono a P sulla curva; oppure come limite dei cerchi (nel piano osculatore) tangenti alla tangente in P alla curva e passanti per P_1 che tende a P sulla curva.

Racconteremo la storia dei cerchi osculatori in modo più algebrico: nel piano osculatore possiamo approssimare la curva alla Taylor con una parabola, e il cerchio osculatore sarà l'unico cerchio del fascio iperosculatore alla parabola nel punto.

1.2. Riferimenti ed equazioni di Frenet (curvature).

1.2.1. DEFINIZIONE (RIFERIMENTO MOBILE). Un riferimento mobile (ev. ortonormale) di \mathbb{R}^n è una curva in $GL_n(\mathbb{R})$ (ev. $SO_n(\mathbb{R})$) di data classe; quindi si tratta del dato di n funzioni vettoriali $v_1(t), \dots, v_n(t)$ della classe decisa che siano una base (ev. ortonormale) per ogni t .

1.2.1.1. Detta $V(t)$ la matrice delle colonne dei $v_i(t)$ di un riferimento mobile ortonormale, quindi $V(t)^t V(t) = \mathbb{I}_n$ (matrice identica, per ogni t), e considerata la derivata $V'(t) = V(t)A(t)$ risulta subito che $A(t) = -A(t)^t$ (antisimmetrica), derivando l'identità precedente: $V'(t)^t V(t) + V(t)^t V'(t) = A(t)^t + A(t) = \mathbb{O}_n$

1.2.2. DEFINIZIONE (RIFERIMENTO DI FRENET). Diremo che una curva ammette un riferimento di Frenet se esiste un riferimento mobile ortonormale $e_i(t)$ tale che la sua bandiera coincida con quella degli spazi osculatori della curva; significa che per ogni i abbiamo l'uguaglianza di spazi vettoriali $\langle e_1(t), \dots, e_i(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t) \rangle$.

1.2.2.1. Non è detto che le curve ammettano riferimenti di Frenet, e se li ammettono non è detto che siano unici. Per esempio, usando la funzione $\varphi(t) = e^{-t^{-2}}$ (di classe infinita, ma si annulla in zero con tutte le sue derivate), la curva nello spazio data dal grafico di φ nel piano (x, y) per $t < 0$ e nel piano (x, z) per $t > 0$ non ammette riferimenti di Frenet; se invece inseriamo un tratto di ascisse nel punto di attacco otteniamo una curva che ammette infiniti riferimenti di Frenet.

1.2.2.2. Se una curva è $(n-1)$ -regolare, allora ammette un unico riferimento di Frenet, che si ottiene ortonormalizzando alla Gram-Schmidt il riferimento mobile $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$ e aggiungendo il cross-product dei precedenti moltiplicato per $(-1)^{n-1}$ come ultimo vettore (il segno serve per rispettare l'orientamento dello spazio; il cross-product è proporzionale al vettore delle coordinate plückeriane dell'iperpiano generato dai vettori precedenti).

Si osservi che ad ogni curva $(n-1)$ -regolare abbiamo associato un riferimento mobile $\Gamma(t)$ usando le derivate (e completando con il cross-product), e un riferimento mobile ortonormale $E(t)$ ortonormalizzando $\Gamma(t)$ alla Gram-Schmidt. In particolare abbiamo $E(t) = \Gamma(t)T(t)$ con $T(t)$ matrice invertibile triangolare superiore con i termini diagonali positivi.

1.2.3. SISTEMA DI FRENET. Se una curva è $(n-1)$ -regolare, $e_1(t), \dots, e_n(t)$ il riferimento di Frenet, allora abbiamo

$$(e'_1(t), \dots, e'_n(t)) = (e_1(t), \dots, e_n(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\omega_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti, detta $E(t)' = E(t)K(t)$, abbiamo $K(t)$ antisimmetrica perché $E(t)$ ortonormale; inoltre derivando $E(t) = \Gamma(t)T(t)$ abbiamo

$$E'(t) = \Gamma'(t)T(t) + \Gamma(t)T'(t) = \Gamma(t)ST(t) + \Gamma(t)T'(t) = E(t)T^{-1}(t)(ST(t) + T'(t))$$

dove S è matrice avente elementi non nulli solo l'ultima colonna e gli elementi sottodiagonali (tutti questi uguali a 1). In particolare $K(t) = T^{-1}(t)(ST(t) + T'(t))$ è nulla sotto la sottodiagonale. Essendo antisimmetrica, concludiamo che è della forma detta.

Inoltre, possiamo verificare che $\omega_i(t) > 0$ per $i < n - 1$ (sfruttando l'osservazione del punto precedente).

1.2.3.1. Si verifica facilmente che il sistema di Frenet è invariante per isometrie di \mathbb{R}^n , e che una riparametrizzazione lo cambia per una funzione scalare (la derivata della riparametrizzazione).

1.2.3.2. DEFINIZIONE (CURVATURE). Definiamo le curvature di una curva $(n - 1)$ -regolare come i coefficienti κ_i del sistema di Frenet per la parametrizzazione canonica. Data una parametrizzazione qualsiasi,abbiamo che $\kappa_i = \omega_i / \|\gamma'\|$.

1.2.3.3. SIGNIFICATI GEOMETRICI DELLE CURVATURE. La curvatura κ_i indica la velocità di variazione dello spazio osculatore i -esimo in quel punto: $\kappa_1 = 0$ solo per i tratti di retta, $\kappa_2 = 0$ solo per tratti di curve piane, ecc. Ovvvero κ_1 dice quanto varia la retta tangente (curvatura), κ_2 quanto varia il piano osculatore (torsione), ecc.

1.2.3.4. CURVATURA E TORSIONE. Poniamoci ora principalmente nel caso di curve piane e spaziali, ed esplicitiamo le prime due curvature, che prendono il nome di (prima) curvatura $\kappa_1 = \kappa$ e torsione $\kappa_2 = \tau$. Osserviamo subito che nel caso di curve piane la curvatura non è necessariamente positiva (in generale l'ultima curvatura κ_{n-1} non è necessariamente positiva).

1.2.4. (PRIMA) CURVATURA. Per una curva in parametrizzazione canonica possiamo definire la (prima) curvatura come il modulo del vettore accelerazione, cioè porre

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$$

e studiarne già le prime proprietà caratteristiche: invariante per riparametrizzazione, nulla sui tratti di retta, inversa del raggio sui tratti di circonferenza. Queste proprietà essenzialmente caratterizzano la curvatura come scalare positivo.

Siccome trovare una parametrizzazione canonica non è pratico, conviene cercare formule che diano la curvatura con una parametrizzazione qualsiasi; si tratta allora di derivare con attenzione:

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d}{ds} \frac{1}{\|\gamma'\|} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\|\gamma'\|} \frac{dt}{ds} = -\frac{\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^2} \frac{1}{\|\gamma'\|} = -\frac{\gamma' \cdot \gamma''}{\|\gamma'\|^4}$$

la derivata in t di $\|\gamma'\| = (\gamma' \cdot \gamma')^{1/2}$ essendo $\gamma' \cdot \gamma'' / \|\gamma'\|$ (giusto per allenamento, verificare che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\gamma\| &= \|\gamma'\|' = \frac{\gamma \cdot \gamma'}{\|\gamma\|}, & \frac{d}{ds} \|\tilde{\gamma}\| &= \|\tilde{\gamma}\|' = \frac{\gamma \cdot \gamma'}{\|\gamma\| \|\gamma'\|} \\ \frac{d}{dt} \|\gamma'\| &= \|\gamma'\|' = \frac{\gamma' \cdot \gamma''}{\|\gamma'\|}, & \frac{d}{ds} \|\gamma'\| &= \frac{\gamma' \cdot \gamma''}{\|\gamma'\|^2}, & \frac{d}{ds} \|\tilde{\gamma}'\| &= 0 \end{aligned}$$

esplicitando tutto), poi

$$\tilde{\gamma}''(s) = \frac{d}{ds} \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{d}{dt} \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'' \|\gamma'\| - \gamma'(\gamma' \cdot \gamma'') / \|\gamma'\|}{\|\gamma'\|^2} \frac{1}{\|\gamma'\|} = \frac{\gamma''(\gamma' \cdot \gamma') - \gamma'(\gamma' \cdot \gamma'')}{\|\gamma'\|^4}$$

(stenografia: γ è sempre derivato in t e calcolato in $t(s)$; si osservi una certa analogia del numeratore con Gram-Schmidt).

Nel caso speciale $n = 3$ usando il prodotto vettore $\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma') = \gamma''(\gamma' \cdot \gamma') - \gamma'(\gamma' \cdot \gamma'')$ si riscrive

$$\tilde{\gamma}''(s) = \frac{\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')}{\|\gamma'\|^4}.$$

Passando ai moduli, abbiamo in generale

$$\kappa = \frac{\|\gamma''(\gamma' \cdot \gamma') - \gamma'(\gamma' \cdot \gamma'')\|}{\|\gamma'\|^4}$$

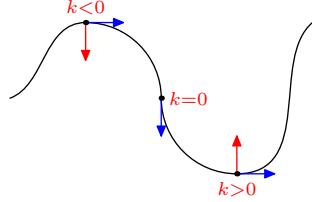
che in dimensione 3 si semplifica in

$$\kappa = \frac{\|\gamma'' \times \gamma'\|}{\|\gamma'\|^3}$$

e in dimensione 2 con $\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ diventa

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

(basta aggiungere una terza coordinata nulla e fare il conto, tenendo conto dell'orientazione corretta per il riferimento di Frenet). La prima curvatura nel piano misura quanto velocemente cambia la direzione del versore tangente (derivando un versore si ottiene un vettore ortogonale: da $\|\gamma'\| = \gamma' \cdot \gamma' = 1$ si deriva $\gamma' \cdot \gamma'' = 0$, e nel piano la direzione è fissata, ortogonale al versore), e quindi la norma del derivato del versore dà l'informazione sulla variazione (a meno del segno). Che cosa dice il segno? Essenzialmente dice se i vettori γ' , γ'' sono o meno equiorientati con la base di riferimento;



Infine, in ogni punto di una curva biregolare (basta regolare nel piano) possiamo trovare il cerchio osculatore usando come raggio l'inverso della curvatura, e come centro $\gamma + n/\kappa$. Verificare cosa succede nel piano spostando il punto nell'origine, la tangente nelle ascisse, e scrivendo localmente la curva come grafico $y = \frac{a}{2}x^2 + \dots$.

1.2.4.1. PROBLEMA. Si osservi che se t è punto in cui $\|\gamma(t)\|$ ha un massimo locale, allora $|\kappa(t)|\|\gamma(t)\| > 1$ (e $\gamma(t)$ è ortogonale a $\gamma'(t)$), cioè il modulo della curvatura in quel punto dev'essere maggiore dell'inverso del valore di $\|\gamma(t)\|$ (per stare dentro al disco con quel raggio). Se invece se t è punto di minimo locale per $\|\gamma(t)\|$ non si può concludere nulla (a parte l'ortogonalità).

1.2.5. TORSIONE (SECONDA CURVATURA). Per curve biregolari $\gamma(s)$ (parametrizzazione canonica) nello spazio, oltre al versore tangente t definito da γ' , abbiamo il versore normale n di direzione definita da γ'' , e possiamo considerare il versore binormale b definito dal prodotto vettore $t \times n$; quindi abbiamo un riferimento ortonormale mobile con la curva (Frenet), e possiamo verificare facilmente le equazioni di Frenet

$$(t' \quad n' \quad b') = (t \quad n \quad b) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

con $\kappa(s) > 0$ (curvatura); $\tau(s)$ si dice torsione della curva in t , definita quindi da

$$\tau(s) = -b' \cdot n = b \cdot n' = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma''\|^2}$$

e segnala quanto velocemente varia in s il piano osculatore della curva.

Usando una parametrizzazione qualsiasi, calcolando le derivazioni composte

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}''\| &= \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \\ \tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}'' &= \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma'\|^3} \\ \tilde{\gamma}''' &= \frac{d}{ds} \tilde{\gamma}'' = \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}'' \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma''}{\|\gamma'\|^2} - \frac{\gamma'(\gamma' \cdot \gamma'')}{\|\gamma'\|^4} \right) \frac{1}{\|\gamma'\|} = \frac{\gamma'''}{\|\gamma'\|^3} + (\star) \gamma'' + (\star) \gamma' . \end{aligned}$$

la torsione si calcola tramite

$$\tau = \frac{(\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}'') \cdot \tilde{\gamma}'''}{\|\tilde{\gamma}''\|^2} = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$$

e il riferimento ortonormale mobile si può scrivere usando

$$t = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad n = b \times t, \quad b = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} .$$

1.2.5.1. PROBLEMA. Si scriva una formula per la torsione, almeno nel caso di parametro d'arco, in dimensione n qualsiasi.

Si mostri che è sempre possibile valutare l'ultima curvatura κ_{n-1} a partire dai $\gamma^{(i)}$ in parametrizzazione qualsiasi tramite l'espressione

$$\kappa_{n-1} = \frac{\sqrt{\det(\gamma^{(i)} \cdot \gamma^{(j)})_{i,j < n-1}}}{\|\gamma'\|} \frac{\det(\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n)})}{\|\text{cross}(\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n-1)})\|^2}$$

(generalizza κ nel piano, e τ nello spazio). Si cominci osservando che il penultimo vettore di Frenet si può ottenere (a parte la norma) usando il cross-product dell'ultimo e dei precedenti...

1.2.6. RIASSUNTO. Conviene farsi una tabellina delle formule in parametro d'arco e in parametro qualsiasi, con i calcoli di passaggio:

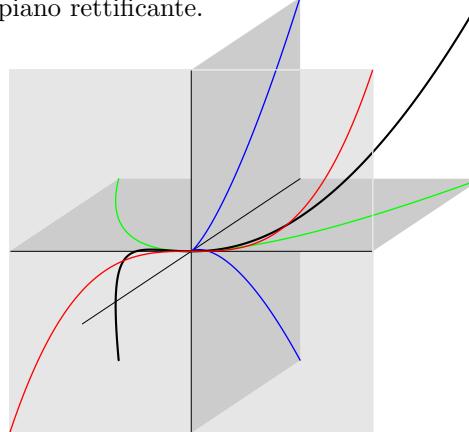
$$\begin{array}{lll}
 t = \gamma' & \tilde{\gamma}' = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} & t = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \\
 n = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|} & \tilde{\gamma}'' = \frac{\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')}{\|\gamma'\|^4} & n = b \times t \\
 b = t \times n & \|\tilde{\gamma}''\| = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} & b = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \\
 \kappa = \|\gamma''\| & \tilde{\gamma}''' \in \frac{\gamma'''}{\|\gamma'\|^3} + \langle \gamma', \gamma'' \rangle & \kappa = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \\
 \tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma''\|^2} & \tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}'' = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma'\|^3} & \tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}
 \end{array}$$

(questo nello spazio; nel piano? in generale?). È un esercizio esprimere la torsione in parametro d'arco per curve in dimensione $n > 3$.

1.2.7. FORMA NORMALE. Nello spazio, le tre direzioni di Frenet t, n, b in un punto P identificano tre piani che sono detti: osculatore $\langle t, n \rangle$, normale $\langle n, b \rangle$, rettificante $\langle t, b \rangle$. Scrivendo lo sviluppo di Taylor con P l'origine, Frenet il riferimento canonico, abbiamo

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{3!}\gamma'''(0) + \dots = \begin{pmatrix} s + o(s^2) \\ \frac{\kappa}{2}s^2 + o(s^2) \\ \frac{\kappa\tau}{6}s^3 + o(s^3) \end{pmatrix}$$

da cui si vede che γ proietta una parabola sul piano osculatore, una cubica con cuspide nel piano normale, una cubica con flesso nel piano rettificante.



Di solito (e in generale per curve biregolari in \mathbb{R}^n) nel piano osculatore si preferisce parlare del cerchio osculatore, che è l'unico cerchio del fascio osculatore di coniche della parabola approssimante e della sua tangente in quel punto (il centro del cerchio sta sull'asse della parabola, distanza doppia del fuoco, e il suo raggio è l'inverso della curvatura).

In generale, usando le formule di Frenet, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \gamma' &= t \\
 \gamma'' &= \kappa n \\
 \gamma''' &= -\kappa^2 t + \kappa' n + \kappa \tau b \\
 \gamma'''' &= -3\kappa\kappa' t + (\kappa'' - \kappa\tau^2 - \kappa^3)n + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')b
 \end{aligned}$$

ecc..

1.2.8. CASI PARTICOLARI E NOTEVOLI.

1.2.8.1. NEL PIANO.

- Un caso particolare di curva piana si ottiene usando il grafico di una funzione $y = f(x)$ in coordinate cartesiane. Esplicitare in tal caso le costruzioni precedenti: si ha

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}, \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(t) \end{pmatrix},$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{1 + f'(u)^2} du,$$

$$\kappa(t) = f''(t)/\sqrt{1 + f'(t)^2}^3.$$

- Un altro caso particolare di curva piana si ottiene usando il grafico di una funzione $\varrho(\vartheta)$ in coordinate polari. Esplicitando le costruzioni precedenti si ha:

$$\gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} \varrho(\vartheta) \cos(\vartheta) \\ \varrho(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \gamma'(\vartheta) = \begin{pmatrix} \varrho'(\vartheta) \cos(\vartheta) - \varrho(\vartheta) \sin(\vartheta) \\ \varrho'(\vartheta) \sin(\vartheta) + \varrho(\vartheta) \cos(\vartheta) \end{pmatrix},$$

$$\gamma''(\vartheta) = \begin{pmatrix} \varrho''(\vartheta) \cos(\vartheta) - 2\varrho'(\vartheta) \sin(\vartheta) - \varrho(\vartheta) \cos(\vartheta) \\ \varrho''(\vartheta) \sin(\vartheta) + 2\varrho'(\vartheta) \cos(\vartheta) - \varrho(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{pmatrix},$$

$$s(\vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{\varrho(u)^2 + \varrho'(u)^2} du,$$

$$\kappa(\vartheta) = (2\varrho'(\vartheta)^2 - \varrho(\vartheta)\varrho''(\vartheta) + \varrho(\vartheta)^2)/\sqrt{\varrho(\vartheta)^2 + \varrho'(\vartheta)^2}^3.$$

1.2.8.2. NELLO SPAZIO.

- Esplicitare il caso di curve definite tramite grafo di una funzione reale a valori nel piano. Si ha:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}, \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g''(t) \end{pmatrix}, \gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{pmatrix} f'g'' - f''g' \\ -g'' \\ f'' \end{pmatrix}, \gamma'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g''' \\ f''' \end{pmatrix},$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{1 + f'(u)^2 + g'(u)^2} du,$$

$$\kappa(t) = \sqrt{(1 + f'^2 + g'^2)(f''^2 + g''^2) - (f'f'' + g'g'')^2}/\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}^3,$$

$$\tau(t) = (f''g''' - f'''g'')/((f'g'' - f''g')^2 + g''^2 + f''^2).$$

- Similmente, esplicitare il caso di curve definite con coordinate sferiche.
- Similmente, esplicitare il caso di curve definite con coordinate cilindriche.

1.2.8.3. PROBLEMA. Supponiamo di avere una curva nello spazio. Mostrare che è una retta sse tutte le tangenti passano per un fissato punto; è piana sse tutti i piani osculatori passano per un fissato punto; è sferica sse tutti i piani normali passano per un fissato punto.

1.2.8.4. PROBLEMA. Cosa si può dire di una curva nello spazio per cui tutte le rette normali passano per un punto (sse cerchio); e tutte le rette binormali passano per un punto (esistono?)?

1.2.8.5. PROBLEMA. Come si caratterizzano le curve per cui tutti i piani rettificanti passano per un punto (τ/κ è proporzionale a s , parametro naturale)?

1.2.8.6. PROBLEMA. Cosa dire di curve nello spazio per cui t sia costante, oppure n sia costante (rette), oppure b sia costante (piane)?

1.2.8.7. PROBLEMA. Cosa si può dire di una curva di cui conosciamo $t(s)$, oppure $n(s)$, oppure $b(s)$?

1.2.8.8. CASI NOTEVOLI. Vi sono alcuni casi interessanti di facile caratterizzazione:

- (1) la curvatura è nulla sse si tratta di rette (questo vale in \mathbb{R}^n in generale);
 - (2) se la curvatura non si annulla mai: la torsione è nulla sse la curva è piana (questo vale in \mathbb{R}^3);
 - (3) torsione nulla e curvatura costante non nulla caratterizzano le circonferenze;
 - (4) torsione nulla e curvatura proporzionale a s caratterizzano le spirali di Cornu;
 - (5) torsione nulla e curvatura inversamente proporzionale a s caratterizzano le spirali logaritmiche;
 - (6) torsione e curvatura costanti non nulli caratterizzano le eliche circolari;
 - (7) torsione e curvatura non nulli con rapporto costante caratterizzano le eliche;
 - (8) le curve sferiche sono caratterizzate dalla relazione $\frac{\tau}{\kappa} = (\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2})'$.
- (Si vedano gli esempi; per alcune caratterizzazioni serve il teorema fondamentale.)

1.3. Teorema fondamentale delle curve.

1.3.1. Il teorema fondamentale delle curve identifica gli invarianti fondamentali che determinano una curva (sufficientemente regolare) a meno di isometrie dello spazio. Discuteremo anche alcuni casi ulteriori.

1.3.2. TEOREMA. Siano date le funzioni differenziabili $\kappa_i(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ per $i = 1, \dots, n-1$, positive per $i < n-1$. Allora esiste una unica curva $(n-1)$ -regolare a meno di isometrie di \mathbb{R}^n che ha quelle funzioni come curvature.

1.3.2.1. Per prima cosa dimostriamo l'esistenza: supponiamo che $0 \in I$, consideriamo il sistema di Frenet $E' = EA$ imponendo le condizioni iniziali $E(0) = \mathbb{I}_n$; esiste allora una unica soluzione $E(t)$ al sistema di Frenet, e questa soluzione dà un riferimento ortogonale mobile. La curva definita dalla primitiva della prima colonna è la soluzione cercata: chiaramente ha le colonne di E come riferimento di Frenet, e quindi le entrate di A come curvature.

1.3.2.2. Per dimostrare l'unicità a meno di isometrie, si considerino due curve γ_1, γ_2 aventi le proprietà richieste. Troviamo l'isometria R dello spazio con la proprietà che $R\gamma_2(0) = \gamma_1(0)$ e $RE_2(0) = E_1(0)$ (cioè sposta il punto iniziale e il riferimento di Frenet iniziale di γ_2 in quelli di γ_1 ; si può fare con una isometria perché di tratta si riferimenti ortonormali). Ma allora γ_1 e $R\gamma_2$ soddisfano alle stesse condizioni iniziali per lo stesso sistema di Frenet, e quindi per l'unicità delle soluzioni dei sistemi differenziali ordinari esse coincidono.

1.3.3. CURVE PIANE. Nel caso di curve piane, vi è solo la prima curvatura $\kappa(t)$, si tratta di risolvere il sistema differenziale

$$\begin{aligned} t &= \gamma' \\ t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t \end{aligned}$$

quindi si può esplicitare tutto calcolando

$$t = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix} \quad \vartheta(t)' = \kappa(t), \quad \vartheta(t) = \int_0^t \kappa(u) du,$$

e la curva cercata diventa

$$\gamma(s) = \left(\begin{array}{c} \int_0^s \cos(\vartheta(u)) du \\ \int_0^s \sin(\vartheta(u)) du \end{array} \right)$$

come si può subito verificare. Questa costruzione esplicita può essere usata per analizzare i casi facili di curve particolari (curvatura nulla, costante, proporzionale, ev. inversamente, al parametro d'arco, ecc.).

Si osservi anche per esercizio che, detto $t = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$ il versore tangente alla curva (in parametro d'arco), risulta che $\kappa = \vartheta'$ (cioè la curvatura piana è la derivata dell'angolo formato dal vettore tangente con l'asse delle ascisse).

1.3.4. CURVE SPAZIALI. Nel caso dello spazio abbiamo solo i primi due dati, curvatura $\kappa(t)$ e torsione $\tau(t)$; tuttavia risolvere il sistema differenziale

$$\begin{aligned} t &= \gamma' \\ t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t + \tau b \\ b' &= -\tau n \end{aligned}$$

non si fa esplicitamente in generale. Le formule suggeriscono però un procedimento grafico di approssimazione del grafico della curva nel modo seguente: per piccoli intervalli δ_s del parametro, partendo da dati iniziali γ_0, t_0, n_0, b_0 (per esempio origine e base canonica), si procede per induzione:

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1} &= \gamma_i + \delta_s t_i \\ t_{i+1} &= t_i + \delta_s \kappa_i n_i \\ n_{i+1} &= \delta_s (-\kappa_i t_i + \tau_i b_i) \\ b_{i+1} &= -\delta_s \tau_i n_i \end{aligned}$$

eventualmente diminuendo la propagazione degli errori rinormalizzando alla Gram-Schmidt ad ogni passo...

1.3.5. DISCUSSIONI DEI CASI CON CURVATURE NON POSITIVE. Si noti che nel piano non si pongono limiti al segno della curvatura, mentre nello spazio si chiede che la curvatura sia positiva; avere soluzioni per il sistema differenziale si può fare senza, ma il teorema fondamentale no: il punto è che esso fornisce una curva con un riferimento mobile di Frenet ad ogni istante, e l'esistenza ed

unicità di questo dato complessivo (riferimento ortonormale mobile) possono mancare se si annulla la curvatura. Negli esempi consideriamo la funzione $\varphi(x) = e^{-t^{-2}}$, famosa per essere indefinitamente differenziabile nello zero, ma ivi nulla con tutte le sue derivate (quindi non analitica).

- (0) Il grafico della funzione $\varphi(t)$ non è una curva regolare, ma ammette riferimento di Frenet;
- (1) la curva piana definita da

$$\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \quad \text{per } t \leq 0, \quad \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix} \quad \text{per } t \geq 0,$$

non è regolare e non ammette alcun riferimento di Frenet;

- (2) la curva spaziale definita da

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per } t \leq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \quad \text{per } t \geq 0,$$

non ammette alcun riferimento di Frenet a causa del punto origine, in cui il versore tangente esiste continuo, ma il normale cambia in modo repentino; si noti che la curva ha torsione nulla, ma non è piana perché approfitta del punto di curvatura nulla per cambiare piano;

- (3) la curva spaziale definita da

$$\begin{pmatrix} t+1 \\ \varphi(t+1) \end{pmatrix} \quad \text{per } t \leq -1, \quad \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per } -1 \leq t \leq 1, \quad \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per } t \geq 1,$$

ammette infiniti riferimenti di Frenet (non è 2-regolare): si può usare il tratto rettilineo per rollare, non in modo unico, il riferimento entrante in quello uscente.

1.3.6. PROBLEMA. Data una curva regolare γ , trovare le curve che hanno uguali curvature, tranne l'ultima che sia l'opposto di quella data. Nel piano si tratta di trovare le curve di curvatura opposta (lo è la curva $\gamma(-s)$), nello spazio la curva con uguale curvatura e torsione opposta (lo è la curva $-\gamma$); in generale?

2. \boxtimes Cenni a risultati globali.

Segnaliamo solamente dei risultati di natura globale sulle curve piane, per approfondire i quali conviene vedere per esempio Spivak.

2.1. DEFINIZIONI. Diciamo che una curva piana è

- (1) chiusa se è definita da \mathbb{S}^1 , o equivalentemente se è definita in un intervallo $[a, b]$ con $\gamma(a) = \gamma(b)$ e $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.
- (2) semplice se è iniettiva;
- (3) convessa se è semplice e sta da un lato di ogni sua retta tangente (equivale, ma non è banale dirlo, al fatto che i punti “interni” formino un insieme convesso).

2.2. TEOREMA (AVVOLGIMENTO). Sia γ curva piana chiusa con parametro d'arco; allora abbiamo

$$\int_{\gamma} \kappa = 2\pi \deg(\gamma')$$

dove \deg indica il grado della funzione $\gamma' : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$.

In particolare, se γ è semplice allora $\deg(\gamma') = 1$.

2.3. TEOREMA (CONVESSITÀ). Una curva chiusa semplice è convessa se e solo la curvatura ha sempre lo stesso segno.

2.4. TEOREMA (VERTICI). Ogni curva chiusa semplice convessa ha almeno quattro vertici (punti in cui si annulla la derivata della curvatura).

3. Esempi.

3.0. PARAMETRO D'ARCO E LUNGHEZZE. Per le seguenti curve, determinare la regolarità, i vettori tangenti, il parametro d'arco, la lunghezza d'arco (tra gli estremi indicati), eventualmente le espressioni in coordinate cartesiane/polarì:

$$\begin{aligned} &\text{cicloide } \left(\begin{array}{c} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{array} \right), t \in [0, 2\pi]; \quad \text{astroide } \left(\begin{array}{c} a \cos^3 \vartheta \\ a \sin^3 \vartheta \end{array} \right), \vartheta \in [0, 2\pi]; \\ &\text{cissioide } \varrho = \frac{a}{\cos \vartheta} - a \cos \vartheta, \vartheta \in [0, \pi/2]; \quad \text{cardioide } \varrho = 2a(1 + \cos \vartheta), \vartheta \in [0, 2\pi]; \\ &\text{spirale di Archimede } \varrho = a\vartheta, \vartheta \in [0, n\pi]; \quad \text{spirale logaritmica } \varrho = e^{a\vartheta}, \vartheta \in [0, n\pi]; \\ &\text{elica cilindrica } \left(\begin{array}{c} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{array} \right), t \in [0, 2\pi]; \quad \text{elica conica } \left(\begin{array}{c} t \cos t \\ t \sin t \\ bt \end{array} \right), t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Se possibile, calcolare anche i baricentri e i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali...

3.1. RETTE. Le rette sono le curve più semplici possibili: usando per esempio $\gamma(t) = te_1$ abbiamo che un riferimento di Frenet è quello costante uguale alla base canonica (non unico!), le curvature tutte identicamente nulle.

Una curva è un tratto di retta sse ha identicamente $\kappa_1 = 0$ (serve il teorema fondamentale?).

3.2. CERCHI. Le circonferenze (diciamo nel piano) $\gamma(t) = R \left(\begin{array}{c} \cos t \\ \sin t \end{array} \right)$ hanno lunghezza d'arco $s(t) = Rt$, tangente $\gamma' = R \left(\begin{array}{c} -\sin t \\ \cos t \end{array} \right)$, normale $\gamma''(t) = R \left(\begin{array}{c} -\cos t \\ -\sin t \end{array} \right)$, curvatura costante $\kappa = 1/R$.

Una curva piana è un tratto di circonferenza sse ha identicamente $\kappa_1 = \text{costante} \neq 0$ (serve il teorema fondamentale?). In generale deve avere tutte le altre curvature nulle.

3.3. CONICHE. La parabola nel piano data da $\gamma(t) = \left(\begin{array}{c} t \\ t^2 \end{array} \right)$ (cioè $y = x^2$) ha tangente $\gamma'(t) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2t \end{array} \right)$, $\gamma''(t) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right)$, curvatura $\kappa = 2/\sqrt{1+4t^2}^3$, lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4u^2} du = \frac{t}{2} \sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4} \operatorname{settsinh}(2t) = \frac{t}{2} \sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4} \log(2t + \sqrt{1+4t^2})$$

L'ellisse data da $\gamma(t) = \left(\begin{array}{c} a \cos t \\ b \sin t \end{array} \right)$ tangente $\gamma'(t) = \left(\begin{array}{c} -a \sin t \\ b \cos t \end{array} \right)$, $\gamma''(t) = \left(\begin{array}{c} -a \cos t \\ -b \sin t \end{array} \right)$, curvatura $\kappa = ab/\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}^3$, lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 u} du$$

che è un integrale ellittico.

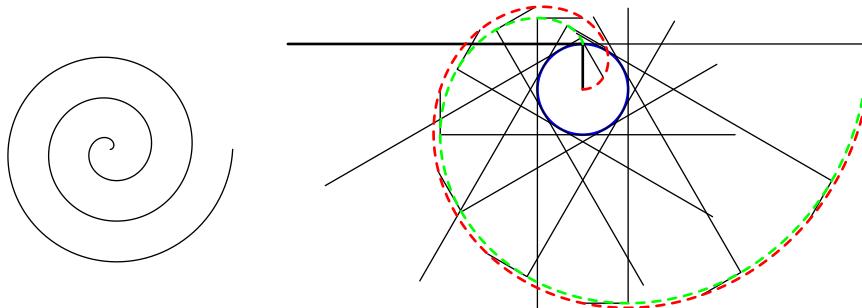
L'iperbole data da $\gamma(t) = \left(\begin{array}{c} a \cosh t \\ b \sinh t \end{array} \right)$ tangente $\gamma'(t) = \left(\begin{array}{c} a \sinh t \\ b \cosh t \end{array} \right)$, $\gamma''(t) = \gamma(t)$, curvatura $\kappa = ab/\sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t}^3$, lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(b^2 + a^2) \cosh^2 u - a^2} du$$

che è un altro integrale ellittico.

3.4. SPIRALE DI ARCHIMEDE. Le spirali di Archimede sono definite da $\gamma(t) = ct \left(\begin{array}{c} \cos t \\ \sin t \end{array} \right)$ con c costante non nulla. L'equazione polare è data da $\varrho = c\vartheta$. L'intersezione di rette per l'origine con la spirale dà luogo a punti a distanza costante dal successivo.

La spirale di Archimede si può ottenere a partire da un cerchio di raggio r e una squadra retta con un lato di lunghezza r (con posizione iniziale in un raggio): si fa rotolare senza strisciare il secondo lato della squadra sul cerchio e si traccia la curva descritta dall'estremo del lato di lunghezza r :



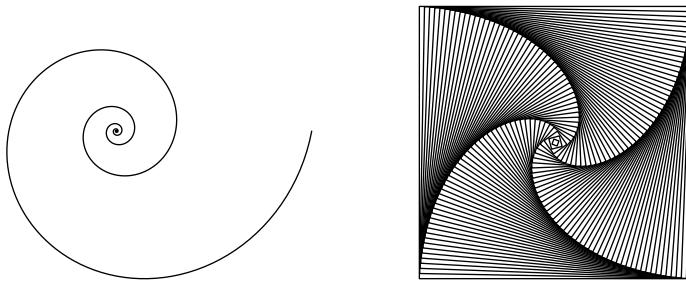
(invece l'angolo della squadra descrive una curva che sembra una spirale di Archimede, ma non lo è: si tratta di una involuta del cerchio, ed è una curva i cui centri di curvatura descrivono la circonferenza di partenza).

3.5. SPIRALE LOGARITMICA. Le spirali logaritmiche sono definite da $\gamma(t) = e^{ct} \left(\frac{\cos t}{\sin t} \right)$ con c costante non nulla. L'equazione polare è data da $\varrho = e^{c\vartheta}$. Hanno lunghezza d'arco $s(t) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{|c|} e^{ct}$, tangente $\gamma' = e^{ct} \left(\frac{c \cos t - \sin t}{c \sin t + \cos t} \right)$, $\gamma''(t) = e^{ct} (c^2 - 1) \left(\frac{\cos t}{\sin t} \right)$, curvatura $\kappa = \frac{e^{-ct}}{\sqrt{c^2+1}} = 1/cs$ (per $c > 0$, inversamente proporzionale alla lunghezza d'arco).

Le spirali logaritmiche sono caratterizzate dall'avere la curvatura inversamente proporzionale alla lunghezza d'arco (usare il teorema fondamentale).

Sono talvolta chiamate spirali equiangolari perché il raggio vettore dall'origine forma angolo costante con le tangenti (la costante c è la cotangente di tale angolo). Le rette per l'origine intersecano la spirale in punti le cui distanze successive sono in progressione geometrica (rapporto costante).

È infine da notare che il ricciolo che va verso l'origine non raggiunge mai l'origine, ma la lunghezza della curva da un fissato punto "fino all'origine" è finita. Se si fa rotolare la spirale su una sua tangente, che traiettoria percorre il "centro" della spirale, e dove arriva sulla retta tangente? Che traiettorie seguono gli altri punti della spirale?



La spirale logaritmica ha notevoli proprietà di stabilità della forma: evoluta, inversa e dilatazioni rispetto all'origine, pedali, caustica sono tutte spirali logaritmiche (*Eadem mutata resurgo*, Jakob Bernoulli).

Problema dei quattro cani: quattro cani partono dai vertici di un quadrato (diciamo verso l'interno), e ciascuno corre guardando istante per istante il cane del vertice successivo (diciamo in senso orario); che traiettorie seguono? In ogni istante i quattro cani sono vertici di un quadrato.

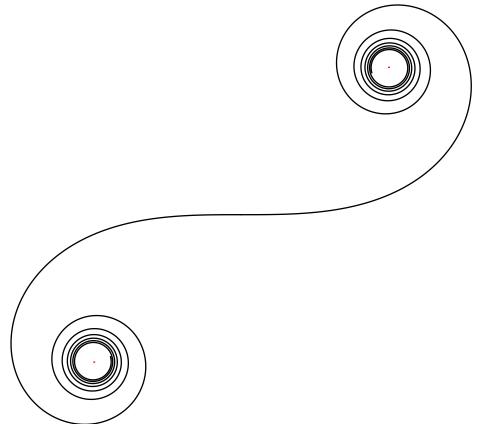
3.6. SPIRALE CORNU. Le spirali di Cornu sono definite dall'avere la curvatura uguale alla lunghezza d'arco; il loro interesse pratico è di costituire le curve di raccordo per passare per esempio da un rettilineo ad un tratto di circonferenza variando in modo lineare la curvatura (da zero a un valore non nullo): si usa per i treni (cambiare istantaneamente la curvatura li fa deragliare), per i raccordi idraulici (cambiare istantaneamente la curvatura crea problemi di flusso e di resistenza). Da $\kappa(s) = s$, usando la costruzione del teorema fondamentale, troviamo $\vartheta(s) = \int_0^s u du = s^2/2$ e

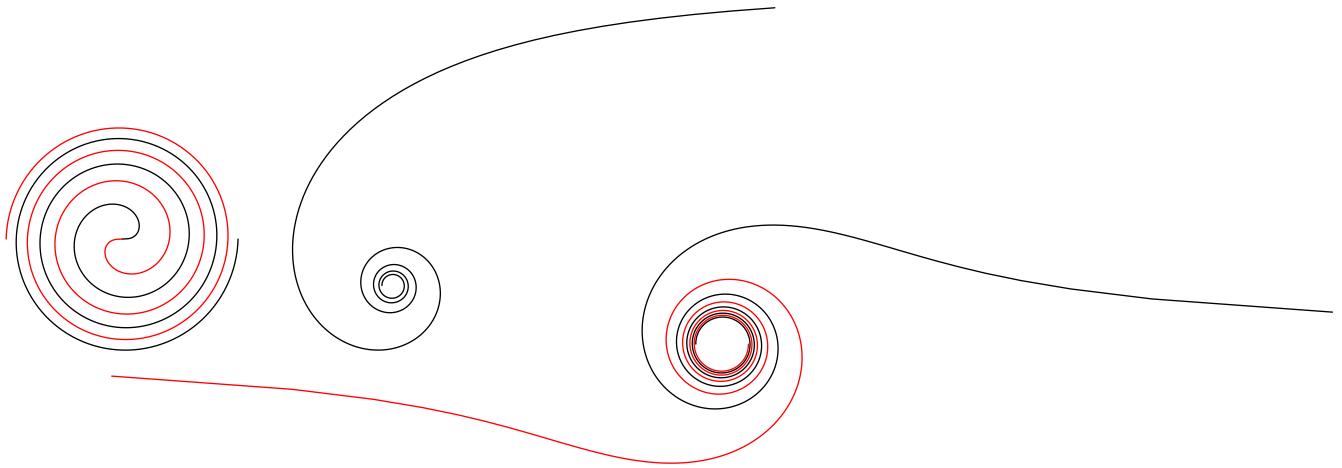
$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(u^2/2) du, \int_0^s \sin(u^2/2) du \right)$$

(integrali di Fresnel).

Dal fatto che $\int_0^{\pm\infty} \cos(u^2/2) du = \int_0^{\pm\infty} \sin(u^2/2) du = \pm\sqrt{\pi}/2$, si vede che le spire si avvolgono attorno ai punti $\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2} \binom{1}{1}$.

3.7. ALTRE SPIRALI. La spirale di Fermat, o parabolica, è data dalla equazione polare $\varrho^2 = a^2\vartheta$ (con a costante). La spirale reciproca, o iperbolica, è data da $\varrho\vartheta = a$. Il lituus (bastone pastorale) è dato da $\varrho^2\vartheta = a^2$.





3.8. SPIRALI SINUSOIDALI. Non sono vere spirali, e hanno equazioni polari del tipo $\rho^n = a^n \cos(n\vartheta)$ per $n \in \mathbb{Q}$. Si tratta di una famiglia che contiene varie curve note: retta ($n = -1$), cerchio ($n = 1$), iperbole retta ($n = -2$), lemniscata di Bernoulli ($n = 2$), parabola ($n = -1/2$), cardioide ($n = 1/2$), cubica di Tschirnhausen ($n = -1/3$), sestica di Cayley ($n = 1/3$).

disegni?

3.9. TRATTRICE. La trattrice è la curva piana passante per $(\frac{a}{0})$ e tali che in ogni punto il segmento di tangente tra il punto e l'asse delle ordinate ha lunghezza a (traiettoria di un cane ostinato con un guinzaglio lungo a mentre il padrone cammina lungo le ordinate). Dalla costruzione otteniamo che il punto $(\frac{x}{y})$ ha tangente in direzione $(\frac{x'}{y'})$, che incontra le ordinate nel punto di ordinata $y - \frac{y'}{x'}x$ e quindi la condizione è

$$x^2 + x^2 \frac{y'^2}{x'^2} = a^2$$

da cui possiamo ricavare (sotto opportune condizioni)

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{e} \quad x'^2 + y'^2 = \frac{a^2}{x^2} x'^2$$

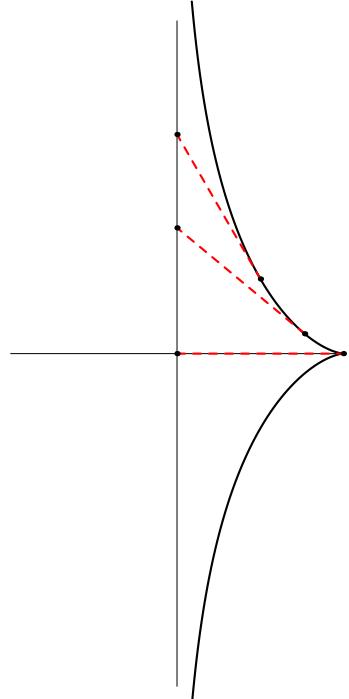
e derivando la prima si ottiene

$$\frac{y''x' - y'x''}{x'^3} = \frac{a^2}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

da cui si può ricavare la curvatura

$$\kappa = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{x}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(senza calcolare una parametrizzazione). Peraltro si può addirittura parametrizzare in lunghezza d'arco, integrando $\frac{a^2}{x^2} x'^2 = 1$ che dà $x = ae^{t/a}$ (da $x(0) = a$) e poi risolvendo $y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} x'$. Dedicando qualche tempo si può ottenere una espressione elementare. Per esempio usando $x = a \sin \vartheta$ si ottiene $y = a(\cos \vartheta - \operatorname{sech} \vartheta \cos \vartheta)$. Invece integrando direttamente $y' = \sqrt{1 - e^{2t/a}}$ (usando $x = e^{t/a}$) si trova $y = a(\sqrt{1 - e^{2t/a}} - \log(e^{-t/a} + \sqrt{e^{-2t/a} - 1}) = a(\sqrt{1 - e^{2t/a}} - \operatorname{sech} \vartheta \operatorname{tanh} \vartheta)$.



Vi sono quindi almeno tre espressioni elementari per la trattrice:

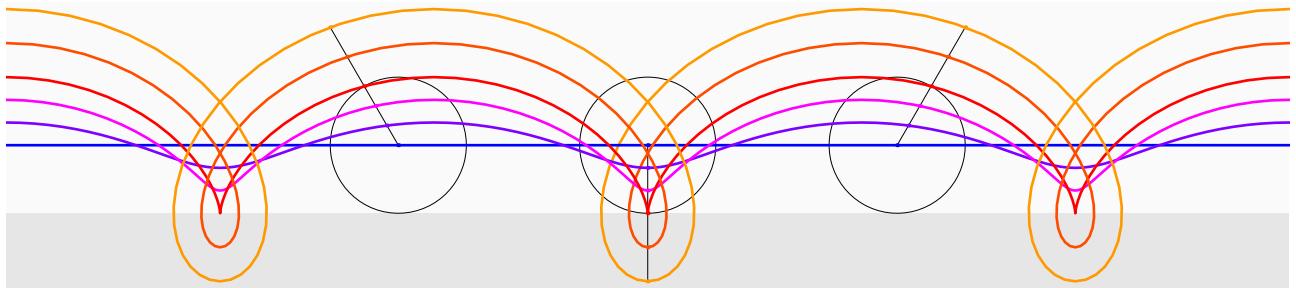
$$a \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta - \operatorname{sech} \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta + \log \tan(\vartheta/2) \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} e^{t/a} \\ \sqrt{1 - e^{2t/a}} - \operatorname{sech} \vartheta \operatorname{tanh} \vartheta \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} 1/\cosh \vartheta \\ \tanh \vartheta - \vartheta \end{pmatrix}$$

(si sostituisca $\cos \vartheta$ con $\tanh \vartheta$).

3.10. CATENARIA. Si tratta del grafico della funzione \cosh . Una trattrice è la sua involuta (curva dei centri). È interessante perché è la curva formata da un filo inestensibile omogeneo fissato a due estremi e soggetto solo al proprio peso (omogeneo sulla lunghezza d'arco).

Se invece il filo non pesa e sostiene una retta orizzontale di peso omogeneo, si ottiene una parabola; vicino al punto di minimo sono curve molto simili (perchè?).

3.11. CICLOIDE. La cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta. Usando come parametro l'angolo di rotazione, condizioni iniziali con centro $(0, R)$ e punto in $(0, 0)$, si ottiene una parametrizzazione $\gamma(\vartheta) = R(\begin{pmatrix} \vartheta - \sin \vartheta \\ 1 - \cos \vartheta \end{pmatrix})$. Studiare la curva.



Le altre curve nel disegno si ottengono dalle traiettorie di punti a distanze dal centro non uguale al raggio (talvolta detti epitrocoidi o ipotrocoidi a seconda che tale distanza sia maggiore o minore del raggio).

3.12. VERSIERA DI AGNESI. Si tratta della curva piana ottenuta partendo da una circonferenza di raggio $2a$ e centro $(0, a)$, e usando il fascio di rette di centro origine: i punti hanno ascissa quella dell'intersezione della retta con $y = 2a$ (tangente alla circonferenza nel polo nord), e ordinata quella dell'intersezione della retta con la circonferenza. Risulta subito una parametrizzazione del tipo $2a(\begin{pmatrix} \tan \vartheta \\ \cos^2 \vartheta \end{pmatrix})$, equazione $Y(X^2 + 4a^2) = 8a^3$, parametrizzazione razionale $2a(\begin{pmatrix} t \\ 1/(1+t^2) \end{pmatrix})$.

3.13. FINESTRA DI VIVIANI. La curva di Viviani è l'intersezione della sfera di raggio $2a$ e centro origine con il cilindro d'equazione $(X - a)^2 + Y^2 = a^2$. Si può trovare una parametrizzazione del tipo $2a(\begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ \sin(t) \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix})$. Studiarla.

3.14. CUBICA GOBBA. È la curva in \mathbb{R}^3 definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Abbiamo $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. La lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} du$$

dà un ulteriore integrale ellittico. La curvatura e la torsione sono

$$\kappa(t) = 2 \frac{\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}^3} \quad \text{e} \quad \tau(t) = \frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4}.$$

3.15. ELICHE CIRCOLARI. Si tratta di un cerchio che si arrampica sul cilindro retto: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$ con $a, b \neq 0$ (raggio e passo). Risulta $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}$, dunque lunghezza d'arco data da

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t \sqrt{a^2 + b^2}$$

e posto $c = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ abbiamo la parametrizzazione canonica $\tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} a \cos(cs) \\ a \sin(cs) \\ bcs \end{pmatrix}$, donde $\tilde{\gamma}'(s) = \begin{pmatrix} -ac \sin(cs) \\ ac \cos(cs) \\ bc \end{pmatrix}$, $\tilde{\gamma}''(s) = \begin{pmatrix} -ac^2 \cos(cs) \\ -ac^2 \sin(cs) \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui si ricavano subito curvatura e torsione

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \tau(s) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

che risultano costanti (per esercizio, rifare i calcoli senza usare il parametro d'arco).

In effetti nello spazio abbiamo che curvatura costante e torsione nulla caratterizzano le circonferenze, mentre curvatura costante (positiva) e torsione costante non nulla caratterizzano le eliche circolari: infatti curvatura e torsione nelle formule precedenti determinano a e b , e quindi dal teorema fondamentale abbiamo che quella curva è l'unica a meno di isometrie dello spazio soddisfacente a quelle condizioni.

Per esercizio, si dimostri l'ultima osservazione senza usare il teorema fondamentale (manipolando direttamente il sistema di Frenet: si derivi tre volte t).

3.16. ELICHE. Le eliche sono curve biregolari caratterizzate dalla proprietà che il vettore tangente forma un angolo costante con un fissato vettore v detto (direzione dell')asse dell'elica (sse il vettore binormale forma un angolo costante con v , sse il vettore normale è normale a v , talvolta si dice parallelo a un fissato piano). Ciò accade se e solo se esiste una costante c tale che $\tau(s) = c\kappa(s)$ (rapporto tra torsione e curvatura è costante).

Infatti, in un senso basta usare la base di Frenet t, n, b , e derivare $v \cdot t = \cos \vartheta$; si ottiene $0 = v \cdot t' = \kappa v \cdot n$. Quindi v è ortogonale a n , ovvero $v = \cos(\vartheta)t \pm \sin(\vartheta)b$; derivando quest'ultima espressione si ottiene la relazione voluta $\tau = \pm(1/\tan \vartheta)\kappa$.

Viceversa, porre $c = 1/\tan \vartheta$: il vettore $v = t \cos \vartheta + b \sin \vartheta$ è quello cercato (si controlla che è costante, avendo derivata nulla).

Queste curve hanno parametrizzazioni $\gamma(t)$ con $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} a \sin \vartheta(t) \\ a \cos \vartheta(t) \\ b \end{pmatrix}$ con a, b costanti e $\vartheta(t)$ funzione (regolare) qualsiasi; si verifichi che il rapporto tra κ e τ risulta $-\text{sgn}(\vartheta')a/b$, e che κ, τ determinano a e b , in modo che in base al teorema fondamentale possiamo dire che si tratta di tutte e sole queste curve.

Per esercizio, si dimostri l'ultima osservazione senza usare il teorema fondamentale (manipolando direttamente il sistema di Frenet: usare il vettore costante v per scrivere bene t).

Naturalmente, la curvatura è costante sse lo è la torsione, e allora si tratta di eliche circolari.

$$\text{3.17. SPIRALE? ELICA? } \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} ae^t \cos t \\ ae^t \sin t \\ be^t \end{pmatrix}.$$

$$\text{3.18. ELICA ELLITTICA? } \gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \\ ct \end{pmatrix}.$$

$$\text{3.19. ELICA IPERBOLICA? } \gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cosh t \\ b \sinh t \\ ct \end{pmatrix}.$$

3.20. CURVE SFERICHE. Una curva biregolare con velocità unitaria e torsione mai nulla si dice sferica se è contenuta in una sfera. Ciò capita sse vale la relazione

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)', \quad \text{ovvero} \quad \frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right)' = 0, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sigma}{\varrho} + (\sigma \varrho)' = 0,$$

o anche sse vale che

$$\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{\prime 2} \frac{1}{\tau^2} = \text{costante} = \varrho^2 + \varrho'^2 \sigma^2$$

dove abbiamo usato $\varrho = 1/\kappa$ e $\sigma = 1/\tau$ (la costante è R^2 dove R è il raggio della sfera). Per dimostrare che le due formule sono equivalenti, basta fare le sostituzioni indicate (e osservare che $\varrho' = -\kappa'/\kappa^2$, mentre $\sigma \varrho' = -\kappa'/(\tau \kappa^2)$). Per vedere l'equivalenza con la condizione di essere curve sferiche, da un lato basta derivare quattro volte l'espressione $(\alpha - C) \cdot (\alpha - C) = R^2$ (C ed R costanti: si ottiene $(\alpha - C) \cdot t = 0$, poi $(\alpha - C) \cdot n = -1/\kappa$, poi $(\alpha - C) \cdot b = \kappa'/(\tau \kappa^2)$ e infine la formula voluta); dall'altro lato si osserva che abbiamo già ottenuto

$$\alpha - C = -\frac{1}{\kappa}n + \frac{\kappa'}{\tau \kappa^2}b, \text{ da cui } C = \alpha + \frac{1}{\kappa}n - \frac{\kappa'}{\tau \kappa^2}b,$$

che è candidato ragionevole per il centro della sfera cercata (derivando, e usando l'ipotesi, si vede che è costante, come pure la differenza $\alpha - C$).

Se poi la curva è contenuta nella sfera unitaria, poniamo $J = \alpha \times \alpha' \cdot \alpha''$ (da cui $J' = \alpha \times \alpha' \cdot \alpha'''$). Allora $\kappa = \sqrt{1 + J^2}$, $\tau = J'/(1+J^2)$. Conviene osservare che essendo α in \mathbb{S}^2 , abbiamo che $\alpha, \alpha', \alpha \times \alpha'$

sono una base ortonormale, nel cui riferimento abbiamo $t = \alpha'$, $n = -\alpha + J(\alpha \times \alpha')$, $\|\alpha''\|b = J\alpha + (\alpha \times \alpha')$.

Inoltre la curva α è determinata da J (per il teorema fondamentale: J determina curvatura e torsione), i cerchi sono caratterizzati dall'avere J costante ($J' = 0$ annulla τ , quindi dà una curva piana), i cerchi massimi da $J = 0$ (sse $\kappa = 1$, quindi cerchi di raggio 1, massimo).

3.21. CURVE ASSOCIATE ALLE CURVE SFERICHE. Data una curva sferica unitaria γ di invariante J sulla sfera unitaria, studiare le curve γ' e $\gamma \times \gamma'$ (sono ancora curve sulla sfera unitaria, ma di solito non sono unitarie con il parametro originale).

Studiare poi le primitive di γ e $\gamma \times \gamma'$ (hanno curvatura e torsione rispettivamente 1 e J la prima, e J e 1 la seconda se $J \neq 0$); è vero che tutte le curve di curvatura costante 1 si ottengono così? È vero che tutte le curve di torsione costante 1 si ottengono così?

Studiare le curve combinazione lineare delle primitive di γ e $\gamma \times \gamma'$.

3.22. CURVA DEI VETTORI TANGENTI. Data una curva γ biregolare con velocità unitaria, studiare la curva $\delta = \gamma'$. Risulta che se t, n, b è riferimento di Frenet per γ e κ, τ sono curvatura e torsione di γ , allora $t_\delta = n$, $\|\delta'\| = \kappa$, $s_\delta = \int \kappa$, $\kappa_\delta = \sqrt{1 + \tau^2/\kappa^2}$,
 $n_\delta = (-\kappa t + \tau b)/\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$,
 $b_\delta = (\tau t + \kappa b)/\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$,
 $\tau_\delta = (\kappa\tau' - \tau\kappa')/(\kappa(\kappa^2 + \tau^2)) = \kappa(\tau/\kappa)'/(\kappa^2 + \tau^2)$

(attenzione: la curva δ è sferica, ma non unitaria, quindi non si può usare direttamente l'invariante J delle curve sferiche unitarie).

Nel caso che γ sia una curva unitaria nel piano la costruzione è meno interessante (la curva delle tangenti è contenuta nella circonferenza unitaria), e più semplice: $t_\delta = n$, $n_\delta = -t$, $\kappa_\delta = 1$. Cosa succede se la velocità non è unitaria?

3.23. CURVA DELLE NORMALI PRINCIPALI.

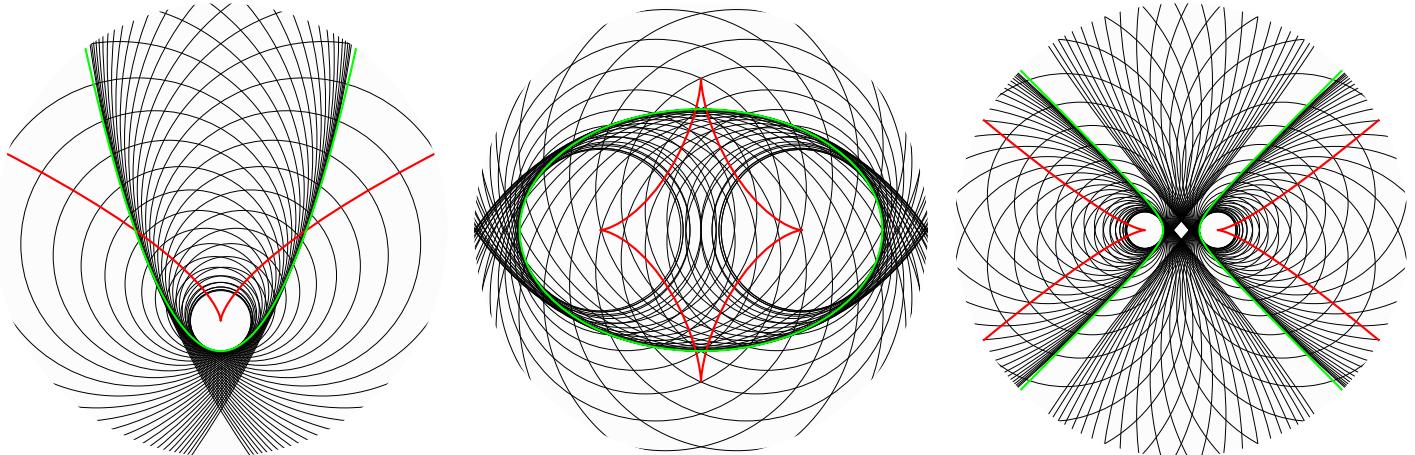
3.24. CURVA DELLE BINORMALI.

3.25. CURVA INTEGRALE DELLE NORMALI PRINCIPALI.

3.26. CURVA INTEGRALE DELLE BINORMALI.

3.27. CURVA DEI CENTRI OSCULATORI. La curva dei centri osculatori di una curva unitaria γ è data da $C_\gamma(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$. Se γ è piana, allora tangente, normale e curvatura di C_γ sono $-n$, t , κ^3/κ' rispettivamente; In particolare, le normali alla curva γ data inviluppano $C_\gamma(s)$. Nello spazio le formule diventano molto più complicate.

Cercare le curve dei centri osculatori per parabole, ellissi, iperbol:



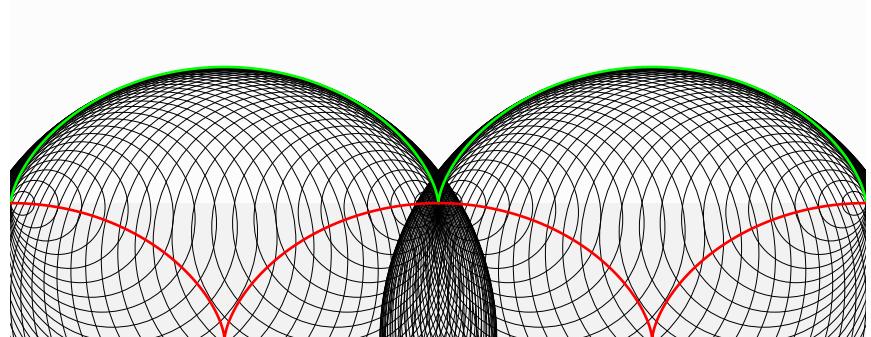
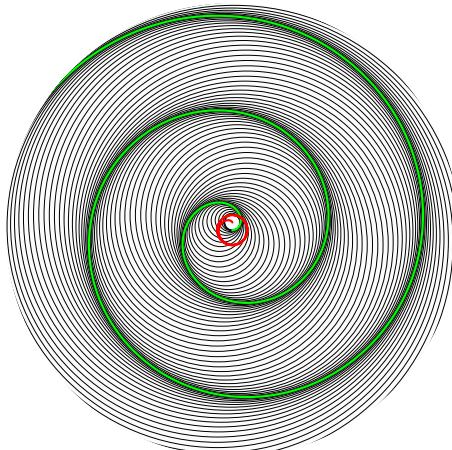
(si riconoscono una cuspide e una specie di astroide nei primi due casi: gli ultimi due sono nella famiglia detta di curve di Lamé).

La curva dei centri di una spirale logaritmica è un'altra spirale logaritmica.

La curva dei centri di una spirale di Archimede è una spirale limitata asintotica ad una circonferenza.

La curva dei centri di una trattrice è una catenaria.

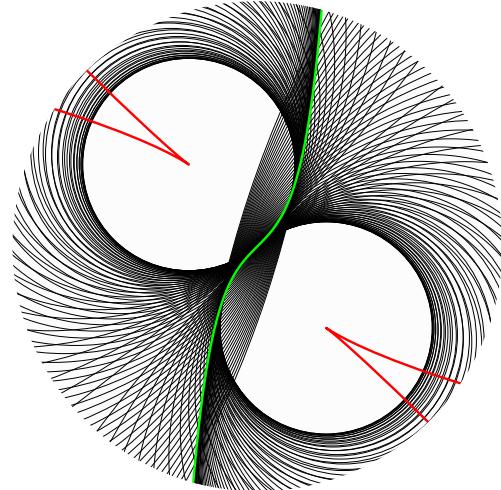
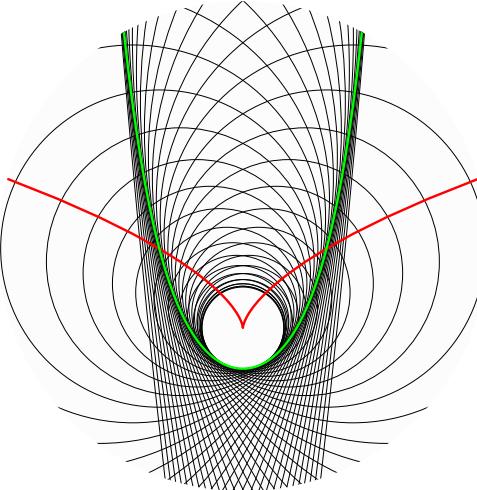
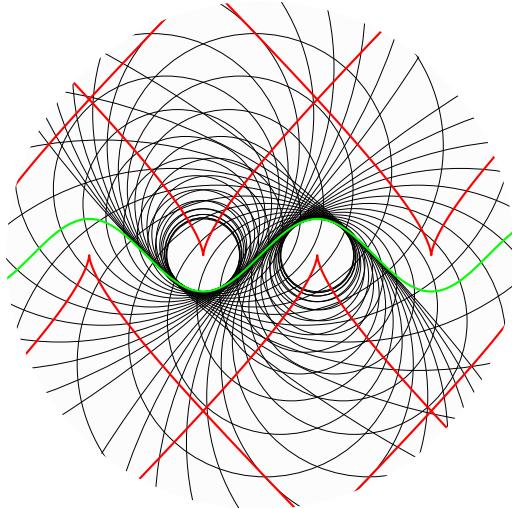
La curva dei centri di un cicloide è lo stesso cicloide, traslato e riparametrizzato.



Se γ è elica cilindrica, C_γ è elica cilindrica coassiale (e con lo stesso passo: se a, b sono raggio e passo di γ , allora $-b^2/a, b$ sono quelli di C_γ); chi è C_{C_γ} ? Si tratta di γ : quindi le due eliche sono ciascuna curva dei centri osculatori dell'altra: naturalmente i cerchi osculatori hanno un raggio in comune (ortogonale all'asse) ma giacciono su piani diversi.

3.28. GRAFICI TRIGONOMETRICI. Studiare le curve definite dai grafici delle funzioni trigonometriche sin, cos, sinh, cosh.

Cercare le curve dei centri osculatori:



(gli ultimi due grafici sono in scale molto diverse, perché il grafico del seno iperbolico ha curvature piccole, quindi cerchi osculatori grandi).

3.29. CURVA DEI FUOCHI OSCULATORI. Nel piano osculatore la prima approssimazione di una curva è data dalla parabola (che con la tangente dà il fascio iperosculatore contenente il cerchio osculatore). Studiare la curva dei fuochi di queste parabole. Anche la superficie descritta dalle direttrici dev'essere interessante?

3.30. CURVE INVILUPPO. Se diamo le parametrizzazioni delle rette tangentи al variare del parametro s , come trovare la parametrizzazione della curva con quelle tangenti?

Nel caso del piano, conviene trovare una formula chiusa per calcolare il punto di intersezione tra due rette in forma parametrica, e poi applicare quella formula per una retta della parametrizzazione e una "vicina": i punti della curva inviluppo verranno come limite. Se $P(t) + \langle v(t) \rangle$ è la famiglia di rette, la curva inviluppo dovrebbe essere data da

$$\gamma(t) = P(t) + \frac{\det(P'(t) \ v(t))}{\det(v'(t) \ v(t))} v(t) .$$

Nel caso dello spazio si può fare un ragionamento simile, a partire dai punti di minima distanza tra due rette (“vicine” della parametrizzazione, e poi passare al limite). Con le stesse notazioni di prima si dovrebbe trovare

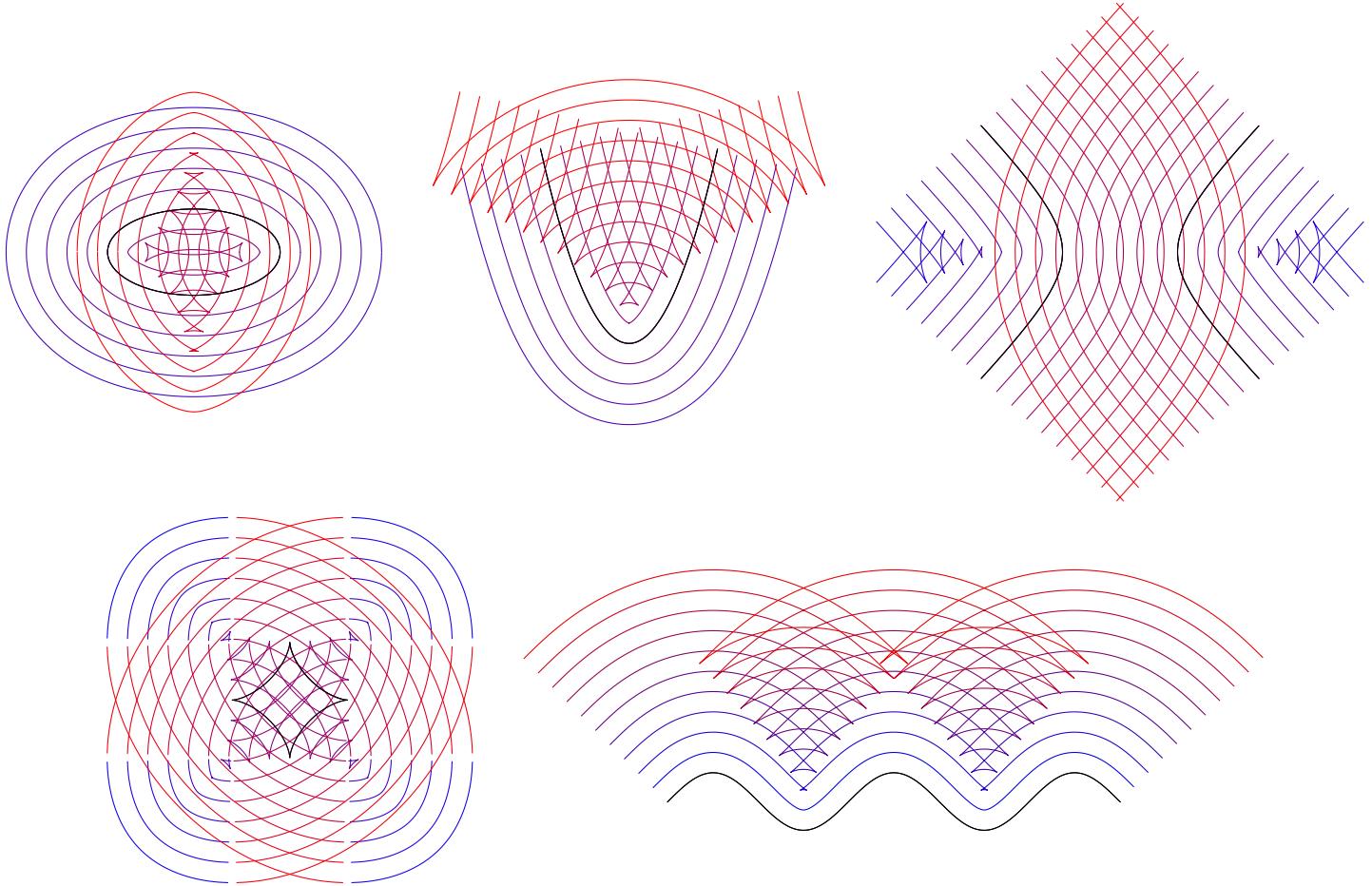
$$\gamma(t) = P(t) + \frac{\det \begin{pmatrix} P'(t) \cdot v'(t) & v'(t) \cdot v(t) \\ P'(t) \cdot v(t) & v(t) \cdot v(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} v'(t) \cdot v'(t) & v'(t) \cdot v(t) \\ v'(t) \cdot v(t) & v(t) \cdot v(t) \end{pmatrix}} v(t).$$

3.31. CURVE CON FISSATE RETTE NORMALI. Se diamo le parametrizzazioni delle rette normali al variare del parametro s , come trovare la parametrizzazione delle curve con quelle normali?

Qui non possiamo aspettarci che il risultato sia unico, anzi ci sarà una famiglia di curve parallele che risolve il problema, che ragionevolmente quindi si traduce in una equazione differenziale.

3.32. CURVE PARALLELE. Data una curva piana $\gamma(t)$ le curve parallele sono le curve $\delta(t)$ tali che il segmento congiungente punti corrispondenti è normale ad entrambe le curve (cioè alle loro tangenti) e di lunghezza costante. Quindi $\delta(t) = \gamma(t) + L n_\gamma(t)$ con L costante.

In particolare parallele di rette sono rette parallele, e parallele di circonferenze sono circonferenze concentriche. In generale per valori piccoli di distanza le curve parallele “si somigliano”, mentre per altri valori possono assumere forme molto diverse; ad esempio alcune curve parallele a ellissi, paraboli, iperboli, asteroidi, sinusoidi:



3.33. EVOLUTE. Se due curve γ e δ sono tali che per ogni t :

- $\delta(t)$ appartiene alla retta tangente a γ in $\gamma(t)$,
- $\gamma'(t) \cdot \delta'(t) = 0$,

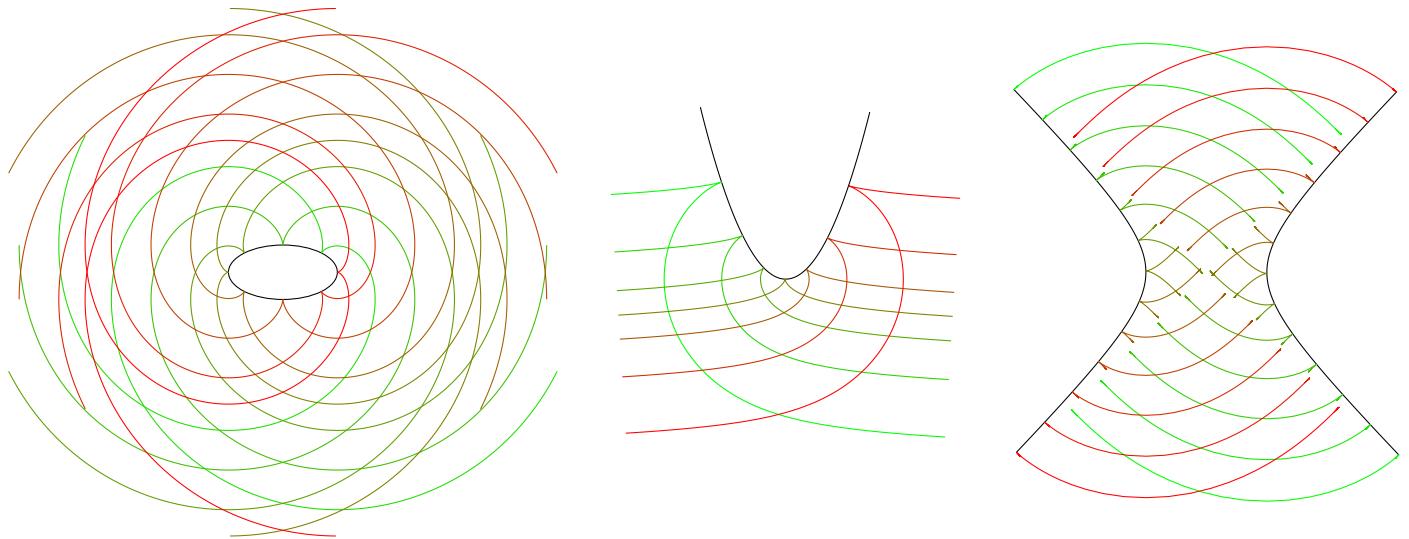
si dice che γ è evoluta di δ , e che δ è evolvente (o involuta) di γ (la curva δ descrive l'estremo libero di un filo teso che si avvolge a γ). Ciò vale sse $\delta(s) = \gamma(s) + (L - s)\gamma'(s)$ con L costante opportuna. Un senso è ovvio (fare il conto di $\delta'(s)$), nell'altro si scriva $\delta(s) = \gamma(s) + \ell(s)\gamma'(s)$ e si verifica che $\ell'(s) = -1$.

Nel caso piano, si verifica che la tangente dell'evolvente è la normale dell'evoluta, e la sua curvatura è l'inverso di $L - s$. La curva C_γ dei centri è evoluta di γ .

Nel caso dello spazio, si verifica che la tangente dell'evolvente è la normale dell'evoluta, e la sua curvatura è $\sqrt{1 + (\tau/\kappa)^2}/(L - s)$, la torsione un po' complicata: $(\kappa\tau)'/(\kappa(L - s)(\kappa^2 + \tau^2))$.

3.34. ESEMPI DI EVOLUTE ED INVOLUTE. Cercare di ogni curva la sua evoluta ed eventualmente cercarne le involute (ve ne sono molte: si tratta di una famiglia di curve parallele) dovrebbe essere fatto per ogni curva. L'evoluta nel caso piano è la curva dei centri osculatori, o anche l'inviluppo delle normali: per una circonferenza è il centro, per una ellisse e una iperbole sono curve di Lamé, per una parabola è una cubica cuspoidale, per un astroide è un astroide simile (dilatato e ruotato), per un cardioide è un cardioide simile, per una trattrice è una catenaria, per una spirale logaritmica è una spirale logaritmica.

Facciamo i disegni di alcune involute per le coniche usuali:



In particolare, le involute di una circonferenza (che somigliano ma non sono spirali di Archimede) possono essere caratterizzate dal fatto che la loro curvatura è inversamente proporzionale alla radice della lunghezza d'arco.

3.35. CURVE DI BERTRAND. Se γ è curva biregolare (non necessariamente unitaria) con $\kappa\tau \neq 0$, si dice che è di Bertrand se esiste una curva $\bar{\gamma}$ con lo stesso vettore normale, tale che per ogni t la congiungente $\gamma(t)$ con $\bar{\gamma}(t)$ è parallela alla normale (comune). Ciò vale sse la curva $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t) + r(t)n(t)$ ha normale $n(t)$. Allora si ha che $r(t)$ è costante (derivando $\bar{\gamma}(t)$ si vede che $r'(t)$ dev'essere nullo).

Inoltre si vede che γ è di Bertrand sse esistono costanti r, c tali che $r\kappa + ct = 1$ (indipendentemente dal parametro t). In un verso basta usare $\bar{\gamma} = \gamma + rn$. L'altro verso si può dimostrare sia imponendo che $\bar{\gamma}' \times \bar{\gamma}''$ sia ortogonale a n (porta all'equazione differenziale $d\log(\tau) = d\log(r\kappa - 1)$), oppure osservando che l'angolo formato da t e \bar{t} è costante (calcolandolo poi esplicitamente).

Se γ ammette più curve $\bar{\gamma}$ del tipo descritto, allora derivando le due relazioni corrispondenti si trova $\kappa' = 0 = \tau'$, e quindi si tratta di eliche circolari (e ci sono infinite curve $\bar{\gamma}$).

3.36. PROBLEMI DI TRAIETTORIA: BICI. Come descrivere la traiettoria della ruota posteriore di una bici di cui conosciamo la curva descritta dalla ruota anteriore?

3.37. CURVE PER INVERSIONE. Data una curva, diciamo inversa di questa rispetto ad una circonferenza la curva che si ottiene per inversione rispetto a quella circonferenza: si tratta del luogo dei punti P tali che l'inverso ($P' \in O \vee P$ tale che $\|OP'\| \|OP\| = r^2$ se O è il centro e r il raggio del cerchio) sta sulla curva data. L'inversa dell'inversa (rispetto allo stesso cerchio) è la curva di partenza.

Se la curva data ha equazione polare $\varrho(\vartheta)$, allora l'inversa rispetto ad una circonferenza centrata nell'origine ha equazione polare $r^2/\varrho(\vartheta)$.

Lista di inverse (tra parentesi il centro di inversione e la sua posizione sull'inversa): di retta (punto non sulla retta) è cerchio (contenente il punto), di un cerchio (punto non del cerchio) è un

altro cerchio (non contenente il punto), di una parabola (fuoco) è un cardioide (cuspide), di una iperbole retta (fuoco, risp. centro) è una lemniscata (centro) risp. strofoide retto (nodo); di ellissi o iperboli (fuoco) sono chiocciole di Pascal (nodo); di spirali logaritmiche (polo) sono spirali logaritmiche (polo); di spirali trigonometriche (polo) sono altre spirali trigonometriche (polo).

3.38. CAUSTICHE: CURVE PER RIFLESSIONE/RIFRAZIONE. Dato un punto O (eventualmente all'infinito), l'involuppo delle rette del fascio di centro O (eventualmente fascio di rette parallele di direzione O) riflesse (risp. rifratte) da una curva data si dice caustica o catacaustica o caustica per riflessione (risp. diacaustica o caustica per rifrazione) rispetto al polo O .

Esempi di caustiche (tra parentesi il polo) sono: di un cerchio (polo sul cerchio, risp. polo all'infinito) è un cardioide resp. nefroide, di una parabola (polo ortogonale all'asse) è una cubica, di un cardioide (cuspide) è un nefroide, di un deltoide (polo all'infinito) è un astroide, di una cisoide (polo sull'asse opportuno) è un cardioide, di una spirale logaritmica (polo) è una spirale logaritmica, di un arco di cicloide (polo ortogonale alla base) sono due archi di cicloide.

3.39. PEDALI E PEDALI NEGATIVE. Dato un punto O e una curva, si dice pedale (della curva rispetto al punto) il luogo dei punti di minima distanza dalle tangenti alla curva ad O (cioè le intersezioni delle rette per O con le ortogonali tangentи alla curva, o ancora le proiezioni ortogonali di O sulle tangenti alla curva), e si dice pedale negativa (della curva rispetto al punto) la curva involuppo delle rette passanti per i punti della curva e di direzione ortogonale alla congiungente con O .

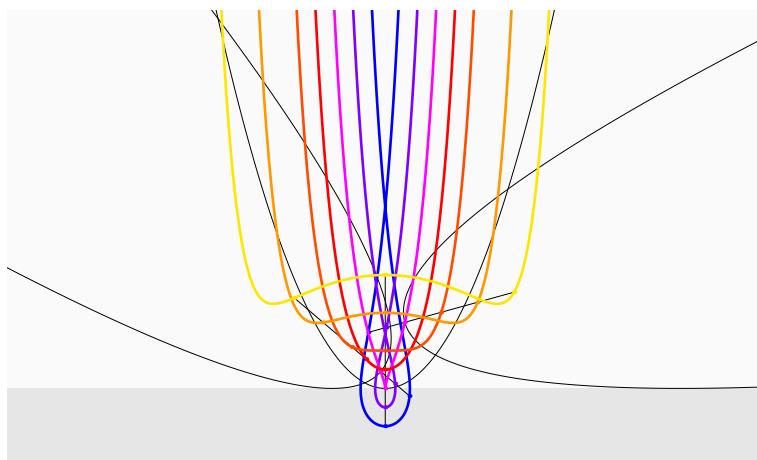
Giustificare i due nomi.

Esempi di curve (polo) e pedali (polo): di un cerchio (punto del cerchio) è un cardioide (cuspide), di un cerchio (punto non del cerchio) è una chioccia (nodo), di una parabola (fuoco) è una retta (non contenente il fuoco), di una parabola (vertice) è un cisoide (contenente il vertice), di ellisse o iperbole (fuoco) è un cerchio ausiliario (punto interno o esterno risp.), di iperbole retta (centro) è una lemniscata (nodo), di epicicloidi e ipocicloidi (centro) sono curve rosate, di un cardioide (cuspide) è una sestica di Cayley, di una cisoide (punto opportuno dell'asse) è un cardioide (punto opposto alla cuspide), di una spirale logaritmica (polo) è una spirale logaritmica (polo), di una spirale trigonometrica (polo) è un'altra spirale trigonometrica (polo), dell'involuta del cerchio (centro del cerchio) è spirale di archimede (polo).

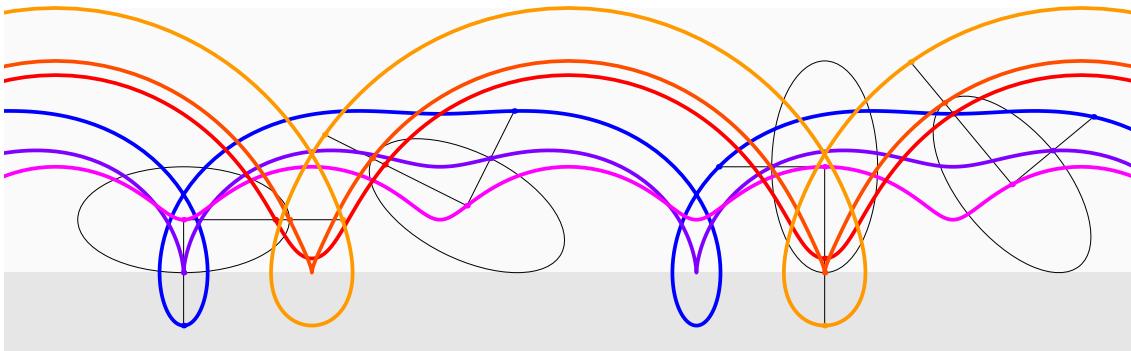
Pedali negative delle ellissi rispetto al centro si chiamano curve di Talbot (e rispetto ad un fuoco?), di una parabola rispetto al fuoco sono cubiche.

3.40. ROULETTES. Sono le curve (o curve involuppo) che si ottengono a partire da un punto (o una retta) solidale con una curva che rotola senza strisciare su un'altra curva. Le più note sono date dal rotolamento di un cerchio su una retta (cicloidi), e dal rotolamento di un cerchio su un altro cerchio: si chiamano epicicloidi o ipocicloidi a seconda che il cerchio mobile rotoli esternamente o internamente all'altro. Tra gli epicicloidi ci sono cardioide e nefroide, tra gli ipocicloidi ci sono deltoide e astroide. Se il rapporto tra i raggi è un numero razionale, allora si tratta di curve definite da una equazione algebrica.

Se si fa rotolare una parabola su una retta (tangente) la traiettoria del fuoco della parabola è una catenaria; si possono scrivere esplicitamente anche le traiettorie del vertice e di altri punti dell'asse:



Far rotolare una ellisse è più complicato, perché il parametro d'arco non si scrive con funzioni elementari, quindi non si hanno formule esplicite; si possono comunque fare i disegni: qui si vede la traiettoria di vertici, centro, un fuoco e due punti esterni:



3.41. GLISSETTES. Sono le curve che si ottengono da punti solidali con una curva che si muove rimanendo sempre tangente ad altre due curve fisse (di solito punti, rette o cerchi nei casi più facili).

3.42. CISSOIDI. Dato un punto fisso O e due curve fisse C e C' , il cissoide di questi dati è descritto dai punti P sulle rette r per O tali che la distanza OP è pari alla distanza tra punti di intersezione di r con C e C' .

Il più famoso è il cissoide di Diocle: O un punto della circonferenza C e C' retta tangente nel punto opposto.

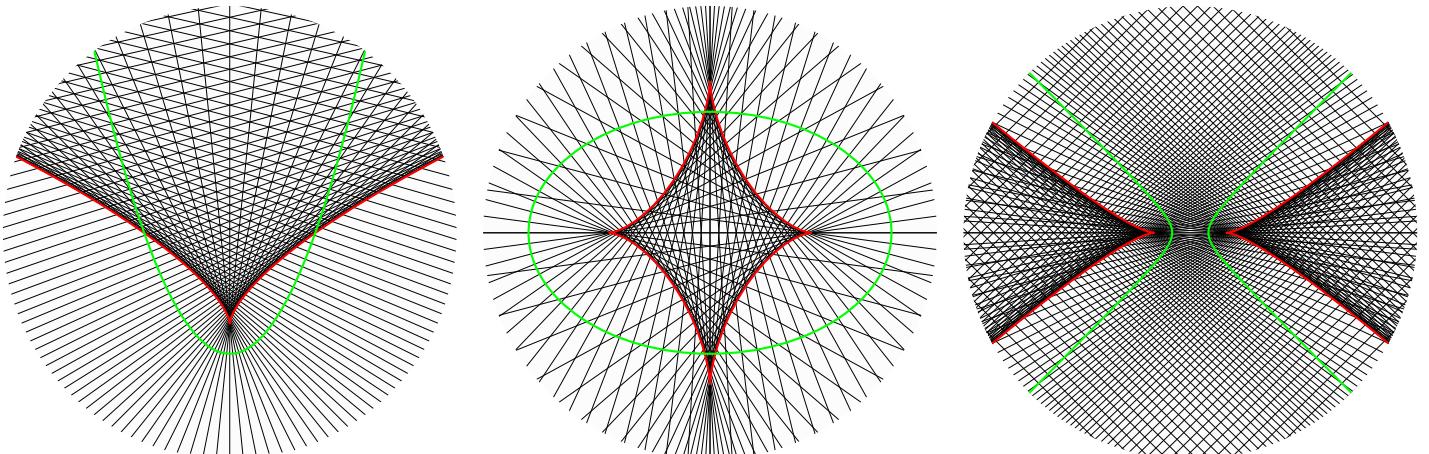
3.43. CONCOIDI. Dato un punto fisso O e una curva C e una costante k , il concoide di questi dati è formato dai punti P, P' sulle rette r per O tali che la loro distanza da un punto di intersezione di r con C sia esattamente k .

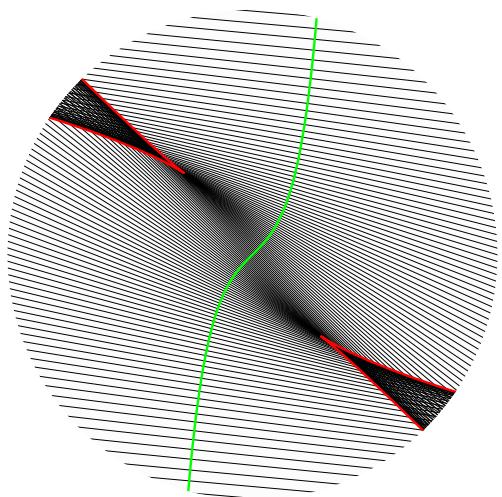
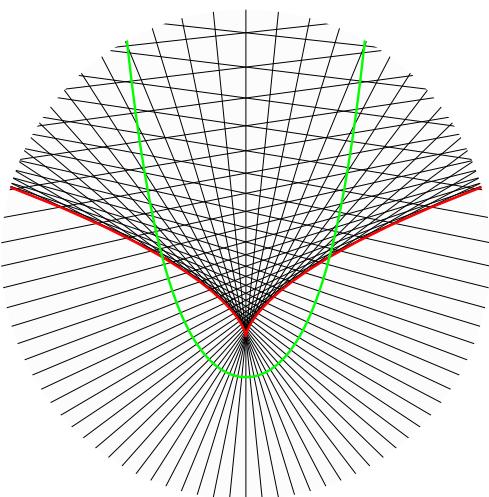
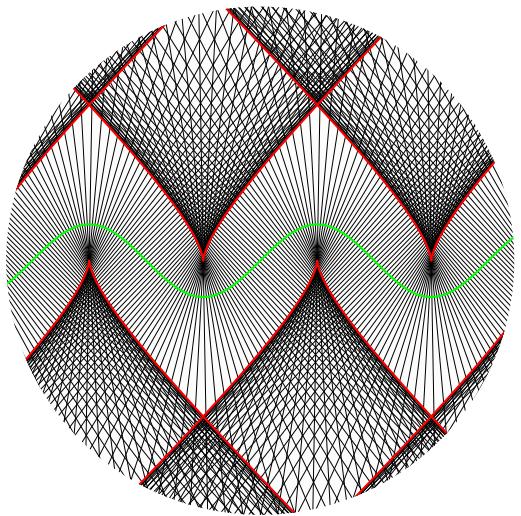
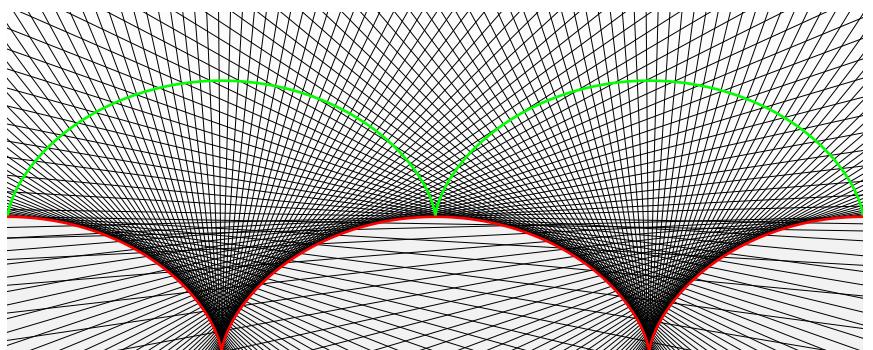
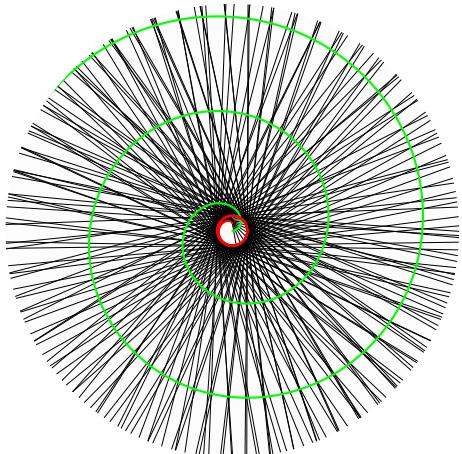
Usando un punto O appartenente ad un cerchio C si ottengono le chiocciole di Pascal (cardioide se la costante è pari al raggio del cerchio). Usando un punto O non appartenente ad una retta C si ottengono i concoidi di Nicomede.

3.44. STROFOIDI. Usando un polo fisso O , un punto fisso F e una curva C , lo strofoide di questi dati è formato dai punti P, P' sulle rette r per O tali che la loro distanza da un punto di intersezione di r con C è pari alla distanza di quest'ultimo da F .

Se C è una retta, O non sulla retta e F appartenente alla retta, si parla di strofoide (retto se F è la proiezione di O). Se C è un cerchio, O il centro, F un punto del cerchio, si ha il nefroide di Freeth.

3.45. Giusto per l'immaginazione, ripetiamo alcune figure di curve dei centri osculatori visualizzate come inviluppi delle normali:





Capitolo II

Geometria differenziale delle superficie

0. Introduzione.

In questo capitolo ci occupiamo di superficie reali in senso differenziale, principalmente immerse in spazi euclidei (solitamente \mathbb{R}^3). Faremo soprattutto teoria locale, ed accenneremo a pochi ma importanti risultati globali. Si cercherà anche di distinguere bene proprietà e metodi intrinseci (cose che può fare un esserino bidimensionale che vive nella superficie e non può riferirsi ad un ambiente più grande in cui la superficie sia immersa; tecnicamente sono i risultati ottenibili conoscendo solo la prima forma fondamentale della superficie) da proprietà e metodi estrinseci (nozioni che dipendono o usano l'ambiente esterno: soprattutto il fatto di avere versori normali alla superficie in ogni punto).

Questa distinzione si può fare anche nel caso 1-dimensionale, ma il risultato è banale: nessuna nozione importante è intrinseca, nel senso che l'esserino 1-dimensionale che vive sulla curva non può che vedere la geometria locale di una retta reale, e non ha strumenti per capire se il suo mondo abbia per esempio una curvatura non nulla, o una torsione, tutte proprietà definite usando un ambiente esterno, e che lui non può calcolare senza uscire dal suo mondo. Può capire se il suo mondo è compatto o a bordo, giusto se può fare il giro, o se arriva sul bordo...

Nel caso delle superficie la cosa è decisamente più sofisticata. Per esempio l'esserino 2-dimensionale non può distinguere un piano da un cilindro parabolico, visto che uno può essere deformato isometricamente nell'altro: qualsiasi misura fatta sull'uno darà lo stesso risultato sull'altro: questo significa che le curvature principali di una superficie non sono una nozione intrinseca, ma estrinseca (dipendono dall'immersione). Ma, sorprendentemente, l'esserino può, senza uscire dalla superficie, distinguere se la superficie è un piano o una sfera: corrisponde al fatto che la curvatura gaussiana è una nozione intrinseca (dal teorema Egregium di Gauss), anche se essa viene definita usando la nozione estrinseca di normale, o usando la seconda forma fondamentale.

Un metodo possibile per capire la natura della superficie senza uscire da essa è di calcolare accuratamente gli angoli interni di un triangolo geodetico: a seconda di come si discosta da 2π si può dedurre qualcosa sulla curvatura gaussiana (dal teorema di Gauss-Bonnet). Anche se non ci occuperemo di varietà tridimensionali, non si può non ricordare che il problema che Gauss si poneva (e non divulgava per non essere ritenuto pazzo) era se noi, in quanto esseri “tridimensionali” fossimo in grado con misure del nostro “spazio tridimensionale” di capire se esso fosse uno spazio euclideo come appare nel piccolo, o una varietà tridimensionale curvata in qualche ambiente più grande.

Nota che per distinguere un piano da una sfera si possono sfruttare proprietà globali: la sfera è compatta e “si può fare il giro seguendo geodetiche (“rette” per chi sta sulla superficie)”, che non capita sul piano. Da alcuni secoli siamo capaci di fare il giro della Terra, in effetti, ma non ancora il giro dell’Universo, ammesso che sia possibile. È più pratico fare calcoli con strumenti locali, quali riga e goniometro su una superficie.

Gli esempi, classici e di grande importanza, fanno parte integrante delle conoscenze da acquisire, e conviene studiarne i vari aspetti man mano che vengono introdotti, anche se nelle note essi sono accumulati in una sezione finale.

1. Teoria Locale.

1.1. Superficie regolari.

1.1.1. SUPERFICIE IMMERSE. Useremo prevalentemente superficie immerse in uno spazio euclideo \mathbb{R}^n (usualmente $n = 3$). Per definizioni sono sottinsiemi S di \mathbb{R}^n tali che per ogni loro punto P esiste un intorno aperto D in \mathbb{R}^n (si può sempre pensare un disco aperto centrato in P) e una mappa differenziabile $\sigma : U \rightarrow D \cap S$ con U insieme aperto del piano reale con jacobiano di rango massimo (due), che sia un omeomorfismo. Tale mappa si dice una parametrizzazione locale di S , la sua inversa si dice carta locale di S , e un insieme di carte che ricopre la superficie si dice un atlante di S .

1.1.2. RAPPRESENTAZIONI DELLE SUPERFICIE IMMERSE. Sappiamo dall'Analisi Matematica che le superficie regolari immerse nello spazio affine \mathbb{R}^3 si possono descrivere *localmente* in almeno tre modi:

- (1) zeri di funzioni reali F con jacobiano di rango massimo (uno, quindi) in ogni punto;
- (2) grafici di funzioni reali φ da aperti di \mathbb{R}^2 (lo jacobiano ha sempre rango uno, massimo);
- (3) parametrizzazioni regolari, ovvero immagine omeomorfa di funzioni σ da aperti di \mathbb{R}^2 verso \mathbb{R}^3 aventi jacobiano di rango massimo (due, quindi) in ogni punto.

Geometricamente, questo significa descrivere *localmente* un sottinsieme di \mathbb{R}^3 come superficie di livello di una funzione in un valore non critico, oppure come grafico di una funzione, oppure come immagine di una funzione regolare (jacobiano iniettivo). Noi useremo quasi sempre negli esempi la terza descrizione, che si presta meglio alle generalizzazioni per le superficie astratte.

Si osservi che, benché le superficie di solito non siano *globalmente* grafici di funzioni (o zeri di funzioni), per controllare se attorno ad un certo punto un dato insieme di \mathbb{R}^3 sia una superficie basta controllare che almeno una della tre proiezioni piane coordinate la descriva localmente come grafico (basta scegliere un minore non nullo della matrice jacobiana).

Che queste descrizioni locali siano equivalenti tra loro deriva da due ben noti teoremi dell'Analisi Matematica:

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA: data un funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con U aperto di \mathbb{R}^n , e $P \in U$ tale che lo jacobiano di f in P abbia rango massimo n , allora esiste un intorno aperto U' di P in U in cui f è omeomorfismo sull'immagine, ovvero ammette una funzione inversa definita in un intorno aperto V di $f(P)$.

TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA (DINI): data un funzione $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con U aperto di \mathbb{R}^{m+n} , e $P \in U$ con $F(P) = 0$ tale che lo jacobiano di F in P abbia rango massimo n , allora esiste un intorno aperto $U' = V \times W$ di P in U , con V aperto di \mathbb{R}^m e W aperto di \mathbb{R}^n , tale che $Z(F) \cap U'$ sia grafico di una funzione $\varphi : V \rightarrow W$: $\varphi(x) = y$ sse $F(x, y) = 0$ ($x \in V, y \in W$).

che sono equivalenti tra loro e per i quali rimandiamo ad un qualsiasi buon testo di Analisi Matematica. Ricordiamo solo che il teorema della funzione implicita si ottiene applicando quello della funzione inversa alla situazione $f = (\text{id}_V, F) : U' = V \times W \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$; e il teorema della funzione inversa si ottiene applicando quello della funzione implicita alla situazione $F = \text{id}_{\mathbb{R}^n} - f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1.1.3. CENNI SULLE SUPERFICIE ASTRATTE. Più in generale, intendiamo come superficie un qualunque spazio topologico hausdorff (con qualche altra proprietà più tecnica) che sia localmente omeomorfo ad aperti del piano reale (significa che ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto del piano reale, ovvero che esiste un ricoprimento aperto in cui ogni aperto è omeomorfo ad un aperto del piano reale; questi omeomorfismi si dicono carte della superficie); nel caso di superficie differenziabili chiediamo inoltre che nell'intersezione dei domini delle carte le mappe di transizione (composte di una carta con l'inverso dell'altra) siano mappe differenziabili (tra aperti del piano). Si dice atlante un insieme di carte che ricopre la superficie. Capiterà di dover prendere in considerazione superficie non immerse (non immersibili) in spazi euclidei, per le quali useremo la definizione generale in termini di atlanti.

Per varietà immerse, ha senso dire se le descrizioni date sono di una fissata classe di derivabilità, o analitiche semplicemente studiando le funzioni che le descrivono.

Nel caso di varietà astratte, cioè di spazi topologici dotati di un atlante, per definire le nozioni di classe o analiticità si deve fare riferimento alle mappe di transizione tra le carte dell'atlante: naturalmente, per varietà immerse questo approccio è equivalente a quello elementare.

1.1.4. RICHIAMI SULLO SPAZIO TANGENTE. Se una varietà M è immersa in \mathbb{R}^n definiamo lo spazio tangente in P come lo spazio affine passante per P di spazio direttore $T_P M$ formato dai vettori tangentini alla varietà in P : un vettore tangente in P è un vettore tangente a curve contenute nella varietà e passanti per P (quindi è $v \in T_P M$ sse esiste una curva $\gamma \subseteq M$ con $P = \gamma(0)$ e $v = \gamma'(0)$). A seconda delle descrizioni della superficie, possiamo calcolare lo spazio direttore $T_P M$:

- (1) come nucleo del differenziale dF_P di una equazione locale F ;
- (2) come spazio generato dai vettori tangentini al grafico di φ ;
- (3) come immagine del differenziale $d\sigma$ di una carta locale σ (cioè dalle derivate parziali di σ).

Si dice fibrato tangente TM l'unione disgiunta degli spazi tangenti al variare del punto P dotato di struttura canonica di varietà reale che non descriveremo (non useremo), ed è dotato di una mappa π verso M (ogni vettore di $T_P M$ mandato in P : quindi la fibra di π sopra un punto P è esattamente M). Una sezione di π (cioè una mappa che ad ogni punto associa un vettore del suo spazio tangente) opportunamente regolare di dice un campo tangente.

Il principale vantaggio di studiare superficie immerse è che si può definire lo spazio tangente usando l'ambiente, come sottovarietà affine dell'ambiente. Anche nel caso di varietà astratte è possibile introdurre una nozione ragionevole di spazio tangente e fibrato tangente, motivata dall'osservazione seguente.

1.1.5. VETTORI TANGENTI E DERIVAZIONI DIREZIONALI. I vettori tangentini ad una varietà M si possono interpretare anche come derivazioni direzionali nella direzione del vettore:

$$\text{se } X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ scriviamo anche } X = \xi_1 \partial_1 + \xi_2 \partial_2 + \xi_3 \partial_3$$

e intendiamo che agiscono sulle funzioni reali combinando le derivazioni parziali: $X(f) = \xi_1 \partial_1(f) + \xi_2 \partial_2(f) + \xi_3 \partial_3(f)$. I coefficienti ξ di X possono anche essere variabili sulla superficie nel qual caso parleremo di campi di vettori (o di derivazioni) della regolarità (continui, differenziabili, ecc.) dei coefficienti.

1.1.6. STRUTTURA DI LIE. I campi di vettori tangentini visti come campi di derivazioni possono agire (coordinata per coordinata) anche su campi vettori o altri campi tangentini, ottenendo come risultato dei campi vettori o di operatori differenziali (non necessariamente tangentini): se $X = \sum_i \xi_i \partial_i$ e $Y = \sum_j \eta_j \partial_j$ abbiamo

$$\begin{aligned} X(Y) &= \sum_i \xi_i \partial_i (\sum_j \eta_j \partial_j) = \sum_i \sum_j \xi_i \partial_i (\eta_j) \partial_j + \xi_i \eta_j \partial_i \partial_j = X \circ Y \\ Y(X) &= \sum_j \eta_j \partial_j (\sum_i \xi_i \partial_i) = \sum_j \sum_i \eta_j \partial_j (\xi_i) \partial_i + \eta_j \xi_i \partial_j \partial_i = Y \circ X \end{aligned}$$

(notare che le composizioni sono operatori differenziali, ma non del primo ordine, quindi non si possono interpretare come vettori) da cui si vede, tenendo conto della commutazione $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ delle derivate parziali, che la differenza

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X) = X \circ Y - Y \circ X = \sum_j \left(\sum_i \xi_i \partial_i (\eta_j) - \eta_i \partial_i (\xi_j) \right) \partial_j$$

(detto crochet di Lie) è ancora un campo di vettori tangentini o di derivazioni (operatori differenziali d'ordine 1). Questa operazione tra campi vettori sarà di importanza strategica per molti sviluppi. Notiamo per il momento solo le proprietà elementari:

- bilineare (usando il prodotto per funzioni differenziabili);
- alternanza: $[X, X] = 0$, (dunque antisimmetria: $[X, Y] + [Y, X] = 0$);
- Lie: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

1.1.7. FUNZIONI TRA SUPERFICIE Una funzione tra varietà è semplicemente una funzione continua tra le due varietà; se si tratta di varietà immerse possiamo usare le proprietà di classe e differenziabilità usuali dell'Analisi Matematica; se si tratta di varietà astratte di data classe diremo che una funzione tra di loro ha la classe delle funzioni composte con le carte di un atlante.

1.1.8. DIFFERENZIALI DI FUNZIONI. Ci servirà anche la nozione di differenziale di una funzione tra superficie. In generale, se $F : M \rightarrow N$ è funzione regolare tra varietà reali, il differenziale di F ,

scritto dF , associa ad ogni punto $P \in M$ del dominio la funzione lineare (e continua) $dF_P : T_P M \rightarrow T_{FP} N$ tra gli spazi direttori degli spazi tangenti in P ed FP alle due varietà che meglio approssima F in termini della norma euclidea:

$$F(P^{“+”}v) = F(P)^{“+”}dF_P(v) + o(\|v\|)$$

ove si intende $v \in T_P M$, e $P^{“+”}v \in M$ opportunamente definito (idem per $dF_P(v) \in T_{FP} N$ e la “somma” a destra...). Siccome ogni vettore tangente in P è della forma $v = \gamma'(0)$ per una curva γ con $\gamma(0) = P$, è ragionevole, e si dimostra ben posta, la definizione

$$dF_P(v) = (F \circ \gamma)'(0).$$

Infatti, se δ è un’altra curva con $\delta(0) = P$ e $\delta'(0) = v$, allora la differenza $(F \circ \gamma)'(0) - (F \circ \delta)'(0)$ si calcola con un paio di approssimazioni di Taylor:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(\varepsilon)) - F(\delta(\varepsilon))}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(0) + \gamma'(0)\varepsilon) - F(\delta(0) + \delta'(0)\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

avendo trascurato i termini di ordine superiore a uno in ε .

In termini del vettore tangente X pensato come derivazione direzionale, abbiamo che

$$dF(X) = X(F)$$

formula che giustifica da sola il doppio senso nell’uso della X (vettore tangente a sinistra, derivazione direzionale a destra). Infatti abbiamo che (per $X = \gamma'(0)$)

$$\begin{aligned} dF_P(X) &= \left(\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right)_{t=0} = \left(\sum_i \partial_i F(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \right)_{t=0} = \\ &= \left(\left(\sum_i \gamma'_i(t) \partial_i \right) F(\gamma(t)) \right)_{t=0} = \left(\sum_i \gamma'_i(0) \partial_i \right) F(P) = X(F)(P) \end{aligned}$$

formula che scriviamo anche, con un leggero abuso, come

$$(F \circ \gamma)' = dF(\gamma') = \gamma'(F)$$

con l’ovvio significato: derivare nel parametro della curva una funzione (composta con la curva) è come calcolare il differenziale della funzione nel vettore tangente alla curva, cioè calcolare la derivata direzionale della funzione nella direzione della tangente della curva. O ancora: derivare nel pararametro della curva è lo stesso che usare la derivata direzionale nella direzione del vettore tangente alla curva.

Per esempio usando $F = \gamma'$ possiamo scrivere $\gamma'' = (\gamma' \circ \gamma)' = \gamma'(\gamma')$. Nel caso di una superficie con carta $\sigma(u, v)$ identificheremo le derivate parziali ∂_u, ∂_v con le derivazioni direzionali nelle direzioni σ_u, σ_v dello spazio tangente.

Naturalmente valgono le usuali proprietà la più importante delle quali è la regola di composizione $d(G \circ F)_P = dG_{FP} \circ dF_P$.

NOTA. La storia degli infinitesimi più o meno è che l’approssimazione lineare descrive gli oggetti per scostamenti piccoli dal punto scelto, quindi quando si scrive l’espressione $dF(x) = F'(x)dx$ si intende in modo preciso “la funzione che ad ogni x associa la funzione lineare di coefficiente angolare $F'(x)$ (e dx significa la proiezione, applicazione lineare identica nel caso di una variabile)” e in modo immaginifico “un piccolo spostamento dx provoca una variazione di F data da $F'(x)dx$ ”.

Idem per $dF(x, y) = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy$: in questo caso per ogni punto fissato dx e dy diventano le proiezioni lineari su x e y rispettivamente.

MATRICI JACOBIANE. Naturalmente, usando delle carte ci si riconduce sempre al calcolo delle matrici jacobiane dell’Analisi Matematica: se la funzione $F(x)$ delle variabili $x = (x_i)$ ha componenti $F_j(x)$, allora il differenziale dF di F associa ad ogni punto x l’applicazione lineare (e continua) di matrice

$$J_F(x) = (\partial_{x_j} F_i(x))_{i,j} = \left(\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

(e la regola di composizione diventa semplicemente il prodotto di matrici).

I differenziali di funzioni vanno quindi visti come l’associazione ad ogni punto di una funzione (lineare e continua) tra gli spazi tangenti; in particolare se il codominio è \mathbb{R} , si vede che i differenziali

sono elementi del duale dello spazio tangente nel punto del codominio, dualità descritta da $dx_i(\partial_{x_j}) = \delta_{x_j}(x_i) = \delta_{ij}$ (che dice esattamente che dx_i è la proiezione sulla i -esima coordinata).

1.2. Prima forma fondamentale.

Consideriamo una superficie regolare S definita da $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, con coordinate locali u_1, u_2 . Useremo anche u, v quando vorremo per brevità evitare indici, e inoltre abbrevieremo $\frac{\partial}{\partial u_i} = \partial_{u_i} = \partial_i$ ogni volta che non sembri dar luogo ad ambiguità. Scriveremo inoltre $\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \partial_u \sigma = \sigma_u$ e altre simili abbreviazioni del calcolo.

1.2.1. DEFINIZIONE (PRIMA FORMA FONDAMENTALE). Consideriamo in ogni punto P della superficie lo spazio tangente $T_P S$: definiamo come prima forma fondamentale di S (in P) la forma quadratica indotta dal prodotto scalare usuale dello spazio ambiente su $T_P S$. Scriviamo I per la prima forma fondamentale, e quindi per $X, Y \in T_P S$ si ha $I(X, Y) = X \cdot Y$.

1.2.1.1. Usando per tale spazio l'usuale base σ_u, σ_v ,abbiamo allora che la matrice G_I di I è data da

$$G_I = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

essendo evidentemente simmetrica e sottintendendo la dipendenza dal punto P e dalle coordinate locali. Quando avremo bisogno di scrivere sommatorie, i coefficienti di G_I saranno indicati con g_{ij} , quindi identifichiamo $g_{11} = e$, $g_{12} = f = g_{21}$, $g_{22} = g$.

1.2.1.2. La prima forma fondamentale cattura quindi l'informazione data dalla restrizione al fibrato tangente di S del prodotto scalare usuale di \mathbb{R}^3 . Va pensata come l'informazione essenzialmente disponibile all'esserino superficiale di cui si parlava nell'introduzione: misurando il suo spazio con decimetro e goniometro (piccoli, cioè infinitesimi, quindi nello spazio tangente) usa e determina la prima forma fondamentale e tutto ciò che a partire da essa può essere determinato.

1.2.1.3. Ovviamente, la prima forma fondamentale è definita positiva, essendo la restrizione del prodotto scalare usuale; in particolare risulta $e > 0$, $g > 0$, $eg - f^2 > 0$.

1.2.2. MISURA DI LUNGHEZZE, ISOMETRIE. Se una curva γ su S è scritta in termini di coordinate locali di S come $\gamma(t) = \sigma(u(t))$, possiamo descrivere la derivata come

$$\|\gamma'\| = \|\sigma_u u' + \sigma_v v'\| = \sqrt{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2} = \sqrt{I(u')}$$

e definire la lunghezza della curva tramite l'integrale

$$\int \|\gamma'\| dt = \int \sqrt{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2} dt = \int \sqrt{I(u')} dt$$

(estremi opportuni).

In modo immaginifico, ma che può essere reso preciso, anche se non riconoscibile nella formulazione attuale dell'Analisi Matematica, possiamo scrivere ds/dt per $\|\gamma'\|$, togliere il "denominatore", quadrare, porre $du = u'dt$, $dv = v'dt$ e ottenere l'interpretazione

$$ds^2 = edu^2 + 2fuduv + gdv^2 = I\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)$$

da intendere come elemento infinitesimo di lunghezza della curva, in funzione di spostamenti infinitesimi delle coordinate locali.

Una applicazione F tra superficie si dice una isometria se è un diffeomorfismo che rispetta le lunghezze delle curve; una isometria locale se lo è localmente. Si vede facilmente che un diffeomorfismo è isometria sse il suo differenziale è isometria per le prime forme fondamentali in ogni punto.

1.2.3. GEODETICHE. A questo punto l'esserino bidimensionale potrebbe porsi il problema di trovare le curve di lunghezza minima tra due punti assegnati (geodetiche), e cercare di caratterizzare tali traiettorie in termini della prima forma. Vedremo che questo problema è più facile da un punto di vista estrinseco, ma a costo di qualche ragionamento complicato si potrebbe risolvere con metodo intrinseco: applicare il calcolo delle variazioni per minimizzare l'integrale della lunghezza nello spazio delle curve tra due fissati punti... Si trova allora che le geodetiche γ soddisfano al sistema di equazioni differenziali

$$\sum_i g_{ki} \gamma''_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}) \gamma'_i \gamma'_j$$

oppure equivalentemente

$$\left(\sum_i g_{k,i} \gamma'_i \right)' = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_k(g_{i,j}) \gamma'_i \gamma'_j$$

(k variabile, equazioni delle geodetiche). La tecnica di calcolo delle variazioni a cui si accenna può essere intuitivamente presentata in questo modo: Fissati gli estremi su due punti della superficie, cerchiamo una curva $\gamma(t)$ tale che per ogni possibile sua variazione $\gamma(t,s)$ (s parametro reale che deforma la curva ad estremi fissati) la lunghezza della curva aumenti: cerchiamo quindi un minimo della espressione

$$E(s) = \int_{t_0}^{t_1} \|\partial_t \gamma(s, t)\|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j} g_{i,j}(\gamma_i(t, s)) \partial_t \gamma_i(t, s) \partial_t \gamma_j(t, s) dt$$

(fra tutte le possibili variazioni della curva γ con parametro s). Nel seguito, per non appesantire troppo la notazione, dimentichiamo di scrivere le variabili (ma attenzione alle derivazioni composte!), e scriveremo $\partial_t \gamma_i = \gamma'_i$ (cioè indichiamo con ' $'$ la derivazione parziale rispetto a t).

Annulloamo la derivata di $E(s)$ rispetto a s , derivando sportivamente sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} E(s) = \int_{t_0}^{t_1} \partial_s \left(\sum_{i,j} g_{i,j} \gamma'_i \gamma'_j \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i,j} \sum_k \partial_k g_{i,j} \gamma'_i \gamma'_j \partial_s(\gamma_k) + \sum_{i,j} g_{i,j} \partial_s(\gamma'_i) \gamma'_j + \sum_{i,j} g_{i,j} \gamma'_i \partial_s(\gamma'_j) \right) dt = \end{aligned}$$

integriamo per parti gli addendi con derivazioni doppie:

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_k \sum_{i,j} \partial_k g_{i,j} \gamma'_i \gamma'_j \partial_s(\gamma_k) - \sum_{i,j} \partial_t(g_{i,j} \gamma'_j) \partial_s(\gamma_i) - \sum_{i,j} \partial_t(g_{i,j} \gamma'_i) \partial_s(\gamma_j) \right) dt =$$

raccogliamo i fattori derivati rispetto a s :

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \left(\sum_{i,j} \partial_k g_{i,j} \gamma'_i \gamma'_j - \sum_j \partial_t(g_{k,j} \gamma'_j) - \sum_i \partial_t(g_{i,k} \gamma'_i) \right) \partial_s(\gamma_k) dt = 0$$

deduciamo (perché?) che tutti i termini della sommatoria sono nulli: per ogni k

$$\sum_{i,j} \partial_k g_{i,j} \gamma'_i \gamma'_j - \sum_j \partial_t(g_{k,j} \gamma'_j) - \sum_i \partial_t(g_{i,k} \gamma'_i) = 0$$

da cui

$$\left(\sum_i g_{k,i} \gamma'_i \right)' = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_k(g_{i,j}) \gamma'_i \gamma'_j$$

oppure sviluppando le derivate parziali (prodotto e catena) otteniamo

$$\sum_{i,j} \partial_k g_{i,j} \gamma'_i \gamma'_j - \sum_{j,i} \partial_i g_{k,j} \gamma'_i \gamma'_j - \sum_j g_{k,j} \gamma''_j - \sum_{i,j} \partial_j g_{i,k} \gamma'_j \gamma'_i - \sum_i g_{i,k} \gamma''_i = 0$$

da cui il primo sistema differenziale scritto.

Nota: è importante capire che data una geodetica e due suoi punti, non è affatto detto che quella curva sia di minima distanza tra quei due punti; ci possono essere altre curve geodetiche (cioè che risolvono il sistema differenziale scritto) che passano per quei due punti. Si considerino come esempi piano, sfera, cilindri, coni. Ridefiniremo le geodetiche dicendo che sono le curve sulla superficie con curvatura nulla sul piano tangente, ritrovando lo stesso sistema differenziale.

1.2.4. MISURA DI ANGOLI, SIMILITUDINI E CONFORMITÀ. Per due curve γ e δ su S passanti per un punto P definiamo l'angolo $\vartheta_P(\gamma, \delta)$ tra le curve nel punto P tramite l'espressione

$$\cos \vartheta_P(\gamma, \delta) = \frac{\gamma' \cdot \delta'}{\|\gamma'\| \|\delta'\|} = \frac{e\gamma'_1 \delta'_1 + f(\gamma'_1 \delta'_2 + \gamma'_2 \delta'_1) + g\gamma'_2 \delta'_2}{\sqrt{e\gamma'^2_1 + 2f\gamma'_1 \gamma'_2 + g\gamma'^2_2} \sqrt{e\delta'^2_1 + 2f\delta'_1 \delta'_2 + g\delta'^2_2}} = \frac{I((\gamma'_1), (\delta'_1))}{\sqrt{I((\gamma'_2)} \sqrt{I(\delta'_2)}}$$

e, in particolare, tra due curve coordinate risulta che (il coseno del) l'angolo è determinato da f/\sqrt{eg} .

Il fattore di scala di una funzione F lungo una curva γ nel punto P è per definizione il fattore di scala del differenziale dF nella direzione tangente a γ in P . Una applicazione si dice conforme se rispetta gli angoli tra le curve, e ciò vale sse il suo differenziale è una similitudine in ogni punto per le prime forme fondamentali.

1.2.5. MISURA DI AREE. L'area di una regione R di una superficie in coordinate locali si calcola tramite l'integrale

$$A(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{eg - f^2} dudv = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{\det(I)} dudv$$

Il determinante di una funzione F nel punto P è per definizione il determinante del differenziale dF in P . Una applicazione si dice isoareale se rispetta le aree sulla superficie; e ciò vale sse il suo differenziale ha determinante pari alla radice del rapporto tra i determinanti delle prime forme fondamentali; nel caso di trasformazioni di una superficie in sè, ciò vale sse il suo differenziale ha determinante unitario.

1.3. Mappe di Gauss e di Weingarten.

Consideriamo ora la principale nozione estrinseca della superficie: la direzione normale ad essa.

1.3.1. ORIENTABILITÀ. Nel dominio di una fissata carta di una superficie immersa in \mathbb{R}^3 è facile fare una scelta, in modo differenziabile, di un vettore normale alla superficie (basta prendere il prodotto vettore dei vettori tangentì delle linee coordinate). Questo garantisce di poter scegliere un “campo normale” alla superficie localmente; si dice che la superficie è orientabile se una tale scelta si può fare globalmente su tutta la superficie.

1.3.2. DEFINIZIONE (MAPPA DI GAUSS). Definiamo $\mathcal{G} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ la mappa (di Gauss) dalla superficie alla sfera unitaria che ad ogni punto associa il versore normale alla superficie in quel punto:

$$\mathcal{G}(P) = n_P = \frac{\partial_1 \sigma \times \partial_2 \sigma}{\|\partial_1 \sigma \times \partial_2 \sigma\|} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$$

(si ricordi per inciso che $\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = \det G_I$).

1.3.2.1. Intuitivamente, una superficie è tanto più “curvata” vicino ad un punto tanto più varia vicino al punto la normale alla superficie; quindi una misura ragionevole della curvatura (gaussiana) potrebbe essere il limite del rapporto tra l'area della sfera descritta dalla mappa di Gauss variando in un intorno del punto, e l'area dell'intorno stesso. Un piano (normale costante), o anche un cilindro parabolico (normale che varia su una curva) avrebbero curvatura nulla; una sfera curvatura costante positiva.

1.3.3. DEFINIZIONE (MAPPA DI WEINGARTEN). Definiamo $\mathcal{L}_P = -d\mathcal{G}_P : T_P S \rightarrow T_P S$ la mappa (di Weingarten) come il differenziale della mappa di Gauss (cambiato di segno, ragioni storiche e locali). Si tratta quindi per ogni punto $P \in S$ di una applicazione lineare dallo spazio $T_P S$ (tangente in P a S) allo spazio $T_{\mathcal{G}(P)} \mathbb{S}^2 = \mathcal{G}(P)^\perp = T_P S$, cioè di un endomorfismo lineare di $T_P S$.

1.3.3.1. Si osservi che $d\mathcal{G}(X) = X(n)$ che significa che il differenziale della mappa di Gauss calcolato nel vettore tangente X è pari alla derivazione nella direzione di X del campo normale. Quindi abbiamo $\mathcal{L}(X) = -X(n)$. In particolare, $\mathcal{L}(\sigma_u) = -\sigma_u(n) = -n_u$ e $\mathcal{L}(\sigma_v) = -\sigma_v(n) = -n_v$.

1.3.3.2. In coordinate locali scriviamo dunque una matrice L per \mathcal{L}_P , usando la solita base:

$$\mathcal{L}_P (\sigma_u \quad \sigma_v) = (\sigma_u \quad \sigma_v) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

cioè useremo $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ intendendo che a, b, c, d sono funzioni delle coordinate locali nel punto. Si ricordi che $\mathcal{L}_P(\sigma_u) = -n_u \in n^\perp = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$, e similmente per $\mathcal{L}_P(\sigma_v) = -n_v$.

1.3.3.3. La mappa di Weingarten dà informazioni sulla velocità con cui varia il campo versore normale alla superficie, quindi contiene le informazioni cui siamo interessati circa la curvatura della nostra superficie.

1.3.3.4. Si potrebbe vedere subito che la mappa di Weingarten è autoaggiunta rispetto alla prima forma fondamentale; per esempio da $Y \cdot n = 0$ derivando nella direzione di X risulta subito che $X(Y) \cdot n + Y \cdot X(n) = 0$, quindi

$$X(Y) \cdot n = \mathcal{L}(X) \cdot Y = I(\mathcal{L}X, Y),$$

e similmente

$$Y(X) \cdot n = \mathcal{L}(Y) \cdot X = I(\mathcal{L}Y, X) ;$$

quindi per differenza risulta

$$I(\mathcal{L}X, Y) - I(X, \mathcal{L}Y) = X(Y) \cdot n - Y(X) \cdot n = [X, Y] \cdot n = 0$$

(essendo $[X, Y]$ nello spazio tangente, quindi ortogonale a n). Ma per studiare bene le proprietà di \mathcal{L} conviene introdurre un ulteriore oggetto: la seconda forma fondamentale.

1.3.3.5. Si può provare a definire una mappa di Weingarten anche per le curve, e ci si accorge subito che si tratta della moltiplicazione per la curvatura; quindi possiamo dire che la mappa di Weingarten generalizza la nozione di curvatura alle superficie.

1.4. Seconda forma fondamentale.

1.4.1. DEFINIZIONE (SECONDA FORMA FONDAMENTALE). Consideriamo in ogni punto P della superficie lo spazio tangente $T_P S$: definiamo come seconda forma fondamentale di S (in P) la forma quadratica su $T_P S$, indicata con \mathbb{II} , data per $X, Y \in T_P S$ da

$$\mathbb{II}(X, Y) = \mathcal{L}(X) \cdot Y = I(\mathcal{L}X, Y) .$$

1.4.1.1. Usando per tale spazio l'usuale base σ_u, σ_v , e ricordando che $\sigma_u \cdot n = 0 = \sigma_v \cdot n$, da cui $\sigma_{uu} \cdot n = -\sigma_u \cdot n_u$, $\sigma_{uv} \cdot n = -\sigma_u \cdot n_v$, $\sigma_{vu} \cdot n = -\sigma_v \cdot n_u$, e $\sigma_{vv} \cdot n = -\sigma_v \cdot n_v$ calcoliamo

$$\begin{aligned} l &= \mathbb{II}(\sigma_u, \sigma_u) = \mathcal{L}(\sigma_u) \cdot \sigma_u = -n_u \cdot \sigma_u = n \cdot \sigma_{uu} \\ m &= \mathbb{II}(\sigma_u, \sigma_v) = \mathcal{L}(\sigma_u) \cdot \sigma_v = -n_u \cdot \sigma_v = n \cdot \sigma_{uv} \\ &= \mathbb{II}(\sigma_v, \sigma_u) = \mathcal{L}(\sigma_v) \cdot \sigma_u = -n_v \cdot \sigma_u = n \cdot \sigma_{vu} \\ n &= \mathbb{II}(\sigma_v, \sigma_v) = \mathcal{L}(\sigma_v) \cdot \sigma_v = -n_v \cdot \sigma_v = n \cdot \sigma_{vv} \end{aligned}$$

da cui si vede che la seconda forma è simmetrica $\mathbb{II}(X, Y) = \mathbb{II}(Y, X)$, ovvero che l'applicazione \mathcal{L} è autoaggiunta rispetto alla prima forma fondamentale: $I(\mathcal{L}X, Y) = I(\mathcal{L}Y, X) = I(X, \mathcal{L}Y)$.

1.4.1.2. Abbiamo allora che la matrice $G_{\mathbb{II}}$ di \mathbb{II} è data da

$$G_{\mathbb{II}} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = L^t G_I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = G_I L$$

sottintendendo la dipendenza dal punto P e dalle coordinate locali, e si può esplicitare sia $G_{\mathbb{II}} = G_I L$:

$$\begin{aligned} l &= ae + cf \\ m &= be + df = af + cg \\ n &= bf + dg \end{aligned}$$

sia la matrice di \mathcal{L} in termini di prima e seconda forma fondamentali:

$$L = G_I^{-1} G_{\mathbb{II}} = \frac{1}{eg - f^2} \begin{pmatrix} g & -f \\ -f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{aligned} a &= \frac{gl - fm}{eg - f^2} & b &= \frac{gm - fn}{eg - f^2} \\ c &= \frac{em - fl}{eg - f^2} & d &= \frac{en - fm}{eg - f^2} \end{aligned}$$

(formule utili in futuro). Inoltre, quando avremo bisogno di scrivere sommatorie, indicheremo con h_{ij} le entrate di $G_{\mathbb{II}}$.

1.4.1.3. Saremo anche interessati ai determinanti di queste matrici, e conviene subito esplicitare

$$K = \det(L) = \frac{\det(G_{\mathbb{II}})}{\det(G_I)} = \frac{ln - m^2}{eg - f^2} = \frac{\mathbb{II}(X, X)\mathbb{II}(Y, Y) - \mathbb{II}(X, Y)^2}{I(X, X)I(Y, Y) - I(X, Y)^2} = \frac{\mathbb{II}(X, X)\mathbb{II}(Y, Y) - \mathbb{II}(X, Y)^2}{\|X\|^2\|Y\|^2 - (X \cdot Y)^2}$$

per qualsiasi X, Y base di $T_P S$. In termini delle carte abbiamo direttamente

$$K = \frac{\det(\sigma_u \times \sigma_v \cdot \sigma_{??})}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|^4}$$

Abbiamo anche $\text{tr}(L) = \frac{gl - 2fm + en}{eg - f^2}$.

1.4.2. PRIMO SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA SECONDA FORMA: RELAZIONE CON LA CURVATURA DELLE CURVE SULLA SUPERFICIE. Anche se si vedrà meglio studiando in dettaglio le curve sulla superficie, conviene subito osservare che dato un versore tangente v in $P \in S$, se consideriamo una curva sulla superficie che nel punto P abbia vettore tangente v , abbiamo:

$$\mathcal{I}(v, v) = I(\mathcal{L}v, v) = I(-v(n), v) = n \cdot v(v) = n \cdot v' = \kappa \cos \vartheta(n, v')$$

(indichiamo con v la derivata della curva e con v' la derivata seconda, l'unico passaggio non ovvio si ottiene derivando nella direzione di v l'uguaglianza $n \cdot v = 0$, da cui $v(n) \cdot v + n \cdot v(v) = 0$), cioè $\mathcal{I}(v, v)$ è la proiezione su n della curvatura della curva in P (talvolta detto teorema di Meusnier: tutte le curve per P su S con fissato vettore tangente in P hanno la stessa “curvatura normale”; inoltre i loro cerchi osculatori formano una sfera). In particolare: *usando come curva la sezione normale piana di S in P , cioè l'intersezione di S con il piano $P + \langle v, n \rangle$ abbiamo che la seconda forma è esattamente la curvatura della sezione normale piana in quel punto e quella direzione, con un segno che tiene conto dell'orientazione su quel piano.*

1.4.3. ESEMPIO. Per essere concreti nel caso delle superficie definite dal grafico di una funzione $f = f(x, y)$ abbiamo $\sigma = \sigma(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix}$, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$, $\sigma_x \times \sigma_y = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$, da cui

$$G_I = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\det I = 1 + f_x^2 + f_y^2,$$

$$G_{\mathcal{I}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

da cui anche

$$L = G_I^{-1} G_{\mathcal{I}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

1.5. Curvature.

1.5.1. CURVATURE E DIREZIONI PRINCIPALI. La mappa di Weingarten è autoaggiunta rispetto alla prima forma fondamentale che è definita positiva (essendo restrizione del prodotto scalare usuale), quindi per il teorema spettrale essa è ortogonalmente diagonalizzabile. Le due direzioni degli autovalori si dicono direzioni principali in P , i due autovalori (reali) si dicono curvature principali in P e si indicano con k_1, k_2 (maggiore il primo, che sono il massimo e il minimo delle curvature usuali delle sezioni piane normali in S per P : siccome \mathcal{L} è autoaggiunta per I , abbiamo che $\mathcal{I}(X, X) = I(\mathcal{L}X, X)$ ha massimo/minimo sugli autovettori di \mathcal{L}). Se v_1, v_2 sono gli autovettori di k_1, k_2 , allora una sezione piana normale con vettore tangente in P dato da $v_1 \cos \vartheta + v_2 \sin \vartheta$ ha curvatura pari a $k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta$.

1.5.2. CURVATURE GAUSSIANA E MEDIA. Definiamo curvatura gaussiana K in P il determinante dell'applicazione di Weingarten, e curvatura media H in P la semitraccia; il polinomio caratteristico di \mathcal{L} è dunque $T^2 - 2HT + K$, e risulta immediatamente che

$$K = \det(L) = k_1 k_2$$

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(L) = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \text{e} \quad k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

(si noti che $K \leq H^2$ anche perché la media geometrica è minore della aritmetica).

1.5.3. SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA SECONDA FORMA: APPROSSIMAZIONE DELLA SUPERFICIE AL SECONDO ORDINE. Se applichiamo lo sviluppo di Taylor alla superficie $\sigma(u, v)$ nella forma

$$\sigma(u + du, v + dv) = \sigma(u, v) + (\sigma_u du + \sigma_v dv) + \frac{1}{2} (\sigma_{uu} du^2 + 2\sigma_{uv} du dv + \sigma_{vv} dv^2) + \dots$$

e puntiamo con n otteniamo

$$(\sigma(u + du, v + dv) - \sigma(u, v)) \cdot n = \frac{1}{2}(ldu^2 + 2mdudv + ndv^2) + \dots = \frac{1}{2}\mathcal{I}(du, dv) + \dots$$

che si può interpretare nel modo seguente: la seconda forma fondamentale mostra la prima approssimazione dall'allontanamento della superficie dal piano tangente nella direzione indicata da du, dv . Usando coordinate in cui la seconda forma è diagonale, possiamo vedere che il termine quadratico dello sviluppo di Taylor è del tipo $\frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2x_2^2)$, e dunque approssima nel punto la forma di paraboloida ellittico, paraboloida parabolico, cilindro parabolico, paraboloida ellittico di rotazione a seconda dei valori di k_1, k_2 (rispettivamente concordi, discordi, uno dei due nullo, uguali non nulli).

1.5.4. TERZA FORMA FONDAMENTALE. Talvolta si definisce anche la terza forma fondamentale $\mathcal{III}(X, Y) = I(\mathcal{L}X, \mathcal{L}Y) = I(\mathcal{L}^2X, Y) = \mathcal{I}(X, \mathcal{L}Y)$. Si vede subito, usando Hamilton-Cayley per esempio, che vale la relazione $\mathcal{III} - 2H\mathcal{I} + KI = 0$.

1.5.5. TIPI DI PUNTI. Definiamo che un punto P su S è di tipo:

- (1) ellittico se $K(P) > 0$ (localmente S sembra un paraboloida ellittico),
- (2) iperbolico se $K(P) < 0$ (localmente S sembra un paraboloida iperbolico),
- (3) parabolico se $K(P) = 0$ ma $H(P) \neq 0$ (localmente S sembra un cilindro parabolico),
- (4) ombelicale se le due curvature principali coincidono; si dice proprio se sono non nulle (localmente S sembra un paraboloida ellittico di rotazione), di livello o planare se sono nulle (in questo caso la forma di S vicino a P è determinata da termini superiori dello sviluppo di Taylor).

1.5.6. SUPERFICIE CON SOLI PUNTI OMBELICALI. È un interessante esercizio mostrare che una superficie in cui tutti i punti sono ombelicali è una regione di piano o di sfera. In effetti da $X(n) = \lambda X$ per ogni X si deduce che λ è costante (derivando le $n_u = \lambda\sigma_u$ e $n_v = \lambda\sigma_v$, e sottraendo si trova $\lambda_u = 0 = \lambda_v$); ora se $\lambda = 0$ abbiamo $n_u = 0 = n_v$, quindi n costante, e siamo su un piano; se invece $\lambda \neq 0$ abbiamo $\sigma - \frac{1}{\lambda}n$ costante (centro), e siamo su una sfera.

1.5.7. ESEMPI. Conviene esplicitare i seguenti esempi di punti:

- (a) l'origine per la superficie di rotazione ottenuta dal profilo $Z = X^4$ (attorno all'asse Z); si ottiene un punto planare, non piano, in cui la superficie sta tutta dalla stessa parte del piano tangente;
- (b) l'origine per la superficie grafico di $Z = X^3 - 3Y^2X$; si ottiene una punto planare in cui la superficie attraversa sei volte il piano tangente (la superficie viene detta “sella della scimmia”); tutti gli altri punti sono iperbolici.
- (c) i punti di ascissa nulla per la superficie di rotazione ottenuta dal profilo $Z = X^3 + 1$ per $X + 1 > 0$ (attorno all'asse X): si ottiene un punto parabolico in cui la superficie sta da entrambe le parti, poiché i termini di terzo grado spostano la superficie nella direzione della curvatura principale nulla; gli altri punti sono ellittici o iperbolici a seconda che X sia negativo o positivo.
- (d) l'origine per la superficie di equazione $Z = X^2 + Y^4$ è un punto parabolico circondato da punti ellittici.

1.5.8. NON NEGATIVITÀ DELLA CURVATURA. È raro avere risultati “globali” facilmente, e uno di questi è il seguente: se S è superficie compatta immersa in \mathbb{R}^3 , allora esiste almeno un punto con curvatura gaussiana positiva. Ovvero non esistono superficie compatte immerse con curvatura sempre negativa.

Si verifica infatti che per un punto P che abbia massimo modulo (ipotesi di compattezza: la superficie è contenuta in qualche palla centrata nell'origine), le curvature di curve passanti per P sono tutte positive o tutte negative (per restare dentro alla palla).

1.5.9. CURVATURA ORIGINALE DI GAUSS. Si può recuperare la nozione di curvatura inizialmente suggerita (rapporto tra area descritta dal versore normale ed area della superficie) tramite questa osservazione:

$$\begin{aligned} \lim_R \frac{\text{Area}(\mathcal{G}R)}{\text{Area}(R)} &= \lim_R \frac{\iint_R \|n_u \times n_v\| dudv}{\iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv} = \lim_R \frac{\iint_R \|\mathcal{L}\sigma_u \times \mathcal{L}\sigma_v\| dudv}{\iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv} = \\ &= \lim_R \frac{\iint_R \det(\mathcal{L}) \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv}{\iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv} = K(P) \end{aligned}$$

dove il limite è fatto sul filtro degli intorni R di P .

È utile osservare l'analogia con il caso delle curve piane, in cui si può verificare che

$$\kappa = \lim_R \frac{\text{Lunghezza}(\mathcal{G}R)}{\text{Lunghezza}(R)}$$

con $\mathcal{G} : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ (che manda t nel versore normale $n(t)$; per le curve piane si definisce la curvatura usando la variazione del versore tangente, che chiaramente coincide con la variazione del versore normale, nel piano).

1.5.10. ANALOGIA CURVE/SUPERFICIE. Vi è una simpatica analogia tra curve nel piano e superficie nello spazio, legata al fatto che sono oggetti di codimensione uno:

parametrizzazioni :	$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$	$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \sigma(u, v)$
tangenti :	γ'	(σ_u, σ_v)
	$\gamma + \langle \gamma' \rangle$	$\sigma + \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$
prima forma :	$\cdot _{\langle \gamma' \rangle} = \gamma' \cdot \gamma' = \ \gamma'\ ^2$	$\cdot _{\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle} = I$
normale :	$n : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{S}^1$	$n : S \rightarrow \mathbb{S}^2$
Gauss :	$dn : T_P \mathcal{C} \rightarrow T_{n_P} \mathbb{S}^1 = T_P \mathcal{C}$ $t \mapsto dn(t) = t(n) = n' = -\kappa t$	$dn : T_P S \rightarrow T_{n_P} \mathbb{S}^2 = T_P S$ $X \mapsto dn(X) = X(n)$
Weingarten :	$-dn = \kappa$	$L = -dn$ (autoaggiunta per I)
curvatura :	moltiplicazione per κ	$L \sim \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$
parametro arco :	$\ \gamma'\ = 1$	linee di curvatura : $I = \mathbb{I}$
seconda forma :	$\mathbb{I} = I\kappa = \ \gamma'\ ^2 \kappa$ ($\ \gamma'\ = 1 \Rightarrow \mathbb{I} = \kappa$)	$\mathbb{I} = L^t I = IL$ ($I = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{I} = L$)

1.6. Curve sulle superficie.

1.6.1. CURVATURE GEODETICA E NORMALE PER CURVE SULLA SUPERFICIE. Consideriamo ora una curva γ che sia contenuta in una superficie S (diciamo immerse in \mathbb{R}^3 , come usuale). Il riferimento e_1, e_2, e_3 di Frenet per γ ha la proprietà che $e_1 = \gamma' \in T_P S$, ma di solito e_2 non appartiene allo spazio tangente di S , e il vettore binormale (alla curva) non è normale ad S .

Conviene quindi procurarci un riferimento mobile ortonormale che tenga conto anche di S ; si tratta del riferimento di Darboux v_1, v_2, v_3 : il primo vettore è il versore tangente alla curva $v_1 = \gamma'$, il terzo è il normale alla superficie $v_3 = n$, il secondo è equivalentemente un versore tangente tale che $v_3 = v_1 \times v_2$, ovvero il cross del terzo e del primo $v_2 = v_3 \times v_1 = n \times \gamma'$.

Come per il riferimento di Frenet possiamo esprimere le derivate:

$$(v'_1 \quad v'_2 \quad v'_3) = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_g & -\kappa_n \\ \kappa_g & 0 & -\tau_g \\ \kappa_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix}$$

(antisimmetria per il solito motivo). I coefficienti prendono i nomi di curvatura geodetica κ_g , curvatura normale κ_n , torsione geodetica τ_g . Per confrontare i riferimenti di Frenet e di Darboux conviene scrivere

$$(e_1 \quad e_2 \quad e_3) = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (v_1 \quad v_2 \quad v_3) = (e_1 \quad e_2 \quad e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ 0 & -\cos \vartheta & \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

(qui l'angolo ϑ è quello tra normale alla curva e_2 e normale alla superficie v_3) e poi derivare; per confronto, posto $E' = EK$, $V' = VH$ e $E = V\Theta$, $V = E\Theta^{-1}$ abbiamo

$$\begin{aligned} E' &= (V\Theta)' = V'\Theta + V\Theta' & V' &= (E\Theta^{-1})' = E'\Theta^{-1} + E(\Theta^{-1})' \\ &= V(H\Theta + \Theta') & &= E(K\Theta^{-1} + (\Theta^{-1})') \\ &= E\Theta^{-1}(H\Theta + \Theta') & \text{e} &= V\Theta(K\Theta^{-1} + (\Theta^{-1})') \\ K &= \Theta^{-1}(H\Theta + \Theta') & & H = \Theta(K\Theta^{-1} + (\Theta^{-1})') \end{aligned}$$

si ottiene allora che

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \kappa \sin \vartheta & \kappa^2 &= \kappa_g^2 + \kappa_n^2 \\ \kappa_n &= \kappa \cos \vartheta & \text{e} & \\ \tau_g &= \tau + \vartheta' & \tau &= \tau_g - \vartheta'.\end{aligned}$$

Si vede subito anche che $\kappa e_2 = \kappa_g v_2 + \kappa_n v_3$ (i due vettori sono $e'_1 = v'_1$).

1.6.2. ULTERIORI SIGNIFICATI GEOMETRICI DELLA SECONDA FORMA. Usando che $v'_3 = n' = u' \partial_u(n) + v' \partial_v(n) = v_1(n) = -\mathcal{L}v_1$ possiamo osservare subito che $\kappa_n = \mathbb{I}(v_1, v_1)$ e $\tau_g = \mathbb{I}(v_1, v_2)$. La terza equazione del riferimento di Darboux dice che $v_1(n) = n' = -\kappa_n v_1 - \tau_g v_2$, quindi l'annullamento della curvatura normale equivale alla \mathbb{I} -isotropia del vettore tangente, e l'annullamento della torsione geodetica equivale al fatto che il vettore tangente sia autovettore di Weingarten.

1.6.3. In una parametrizzazione qualsiasi, non necessariamente unitaria, entra in gioco anche la velocità $\|\gamma'\|$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\gamma' &= \|\gamma'\| v_1 \\ \gamma'' &= \|\gamma'\|^2 v_1 + \|\gamma'\| v'_1 \\ &= \|\gamma'\|^2 v_1 + \|\gamma'\|^2 \kappa e_2 \\ &= \|\gamma'\|^2 v_1 + \|\gamma'\|^2 \kappa_g v_2 + \|\gamma'\|^2 \kappa_n v_3.\end{aligned}$$

Infine, possiamo segnalare alcune formule esplicite di calcolo della curvatura geodetica:

$$\kappa_g = v'_1 \cdot (v_3 \times v_1) = \frac{\gamma'' \cdot (n \times \gamma')}{\|\gamma'\|^2}$$

(estrinseca; si può dare anche una formulazione intrinseca, senza uso del normale alla superficie, usando le derivate covarianti, cioè la proiezione sul piano tangente delle derivate usuali):

$$\kappa_g(v_3 \times v_1) = \frac{\nabla_{\gamma'}(\gamma') - I(\nabla_{\gamma'}(\gamma'), v_1)v_1}{I(\gamma', \gamma')}$$

vedi dopo per la simbologia delle derivate covarianti).

1.6.4. TIPI NOTEVOLI DI LINEE SULLE SUPERFICIE. L'annullamento di alcuni dei coefficienti presentati caratterizza curve interessanti sulla superficie:

- (1) **LINEE DI CURVATURA.** se $\tau_g = 0$ si parla di linee di curvatura perché sono le curve che seguono direzioni principali di curvatura: siccome per ipotesi $v'_3 = -\kappa_n v_1$, e d'altra parte abbiamo $v'_3 = v_1(n) = -\mathcal{L}v_1$, ne risulta che $\mathcal{L}v_1 = \kappa_n v_1$ (quindi il vettore tangente della curva è autovettore di \mathcal{L}); geometricamente, tutta la torsione della curva è assorbita dalla variazione dell'angolo ϑ tra i due riferimenti.

La caratterizzazione delle direzioni come autovettori di \mathcal{L} , permette di esplicitare delle equazioni differenziali per le linee di curvatura: se $\gamma' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ è autovettore di \mathcal{L} , allora $I(\gamma')$ è proporzionale a $\mathbb{I}(\gamma')$ (cioè i due vettori formano una matrice di rango uno), quindi

$$\det \begin{pmatrix} eu' + fv' & lu' + mv' \\ fu' + gv' & mu' + nv' \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \det \begin{pmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ e & f & g \\ l & m & n \end{pmatrix} = 0.$$

- (2) **LINEE ASINTOTICHE.** se $\kappa_n = 0$ si parla di linee asintotiche perché sono le direzioni isotrope della seconda forma fondamentale (da $\kappa_n = \mathbb{I}(v_1, v_1)$); esistono nei punti non ellittici (due nei punti iperbolici, una in quelli parabolici); si tratta di curve in cui i riferimenti di Frenet e Darboux coincidono (in particolare $\vartheta' = 0$ e $\tau = \tau_g$), ovvero la normale della curva è tangente alla superficie. Lungo queste curve è possibile valutare la curvatura di Gauss K , sfruttando che $\tau = \tau_g = \mathbb{I}(v_1, v_2)$:

$$K = \det \mathcal{L} = \det \mathbb{I} = -\mathbb{I}(v_1, v_2)^2 = -\tau^2$$

(in particolare è sempre negativa).

La caratterizzazione delle direzioni come vettori isotropi di \mathbb{I} , permette di esplicitare delle equazioni differenziali per le linee asintotiche: se $\gamma' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ è vettore isotropo di \mathbb{I} , allora $\mathbb{I}(\gamma') = 0$ quindi

$$lu'^2 + 2mu'v' + nv'^2 = 0.$$

- (3) LINEE GEODETICHE. se $\kappa_g = 0$ e $\|\gamma'\| = 1$ costante si parla di geodetiche; si tratta di curve unitarie prive di curvatura geodetica, cioè non hanno derivata della direzione sul piano tangente: per chi vive sulla superficie si tratta di "rette". In questo caso il vettore normale della curva è ortogonale alla superficie (si tratta di curve in cui i riferimenti di Frenet e Darboux sono sempre "opposti", $e_2 = v_3$; in particolare $\vartheta' = 0$ e $\tau = \tau_g$).

1.6.5. SEZIONI NORMALI. Si dicono invece sezioni normali le curve tali che, in ogni loro punto, e_2 (vettore normale della curva) sia parallelo a n (vettore normale alla superficie), ovvero sia ortogonale al piano tangente. Si vede facilmente che sezioni normali sono geodetiche, e viceversa? Attenzione: qualcuno chiama sezioni normali solo le sezioni piane (intersezione della superficie con un piano) che siano anche normali.

1.6.6. GEODETICHE: EQUAZIONI ESTRINSECHE. La definizione ci dà un approccio estrinseco alla determinazione delle geodetiche: se localmente la superficie ha equazione $F(x, y, z) = 0$, e la curva $\gamma(s)$ ha componenti $x(s), y(s), z(s)$ (parametrizzata con l'arco), allora è una geodetica se e solo se il vettore normale alla superficie e quello normale alla curva sono proporzionali, ovvero

$$\frac{x''}{F_x} = \frac{y''}{F_y} = \frac{z''}{F_z}$$

che è comunque un sistema differenziale parziale del second'ordine, e resta di solito intrattabile elementarmente.

1.6.7. GEODETICHE: EQUAZIONI INTRINSECHE. È possibile anche ottenere una versione intrinseca, imponendo che γ'' abbia solo componente normale alla superficie, cioè $\gamma'' \cdot \sigma_u = 0 = \gamma'' \cdot \sigma_v$, e usando che $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$ (perché $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$, con le solite variabili mute). Si ottiene

$$\begin{cases} (\sigma_u u' + \sigma_v v')' \cdot \sigma_u = 0 \\ (\sigma_u u' + \sigma_v v')' \cdot \sigma_v = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} ((\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_u)' = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_u)' = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_{uu} u' + \sigma_{uv} v') \\ ((\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_v)' = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_v)' = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_{uv} u' + \sigma_{vv} v') \end{cases}$$

che infine, usando le ovvie uguaglianze

$$\begin{array}{ll} e_u = 2\sigma_u \cdot \sigma_{uu} & e_v = 2\sigma_u \cdot \sigma_{uv} \\ f_u = \sigma_u \cdot \sigma_{uv} + \sigma_{uu} \cdot \sigma_v & f_v = \sigma_u \cdot \sigma_{vv} + \sigma_{uv} \cdot \sigma_v \\ g_u = 2\sigma_v \cdot \sigma_{vu} & g_v = 2\sigma_v \cdot \sigma_{vv} \end{array}$$

permette di trovare i coefficienti della prima forma:

$$\begin{cases} (eu' + fv')' = \frac{1}{2}(e_u u'^2 + 2f_u u' v' + g_u v'^2) \\ (fu' + gv')' = \frac{1}{2}(e_v u'^2 + 2f_v u' v' + g_v v'^2) \end{cases}$$

(ancora un sistema del second'ordine di aspetto ostile; migliora supponendo la prima forma diagonale o scalare).

1.6.8. Per vedere che le equazioni sono le stesse ottenute con la tecnica di calcolo delle variazioni per minimizzare l'energia, si può sia esplicitare quelle equazioni nel caso di superficie, sia generalizzare il calcolo appena fatto: se $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizza una varietà differenziabile (U aperto di \mathbb{R}^m , spazio tangente generato dalle $\partial_i \varphi = \varphi_i$), e γ una curva sulla varietà tramite $u : I \rightarrow U$, allora imporre $\gamma'' = (\sum_i \varphi_i u'_i)'$ ortogonale allo spazio tangente dà per ogni k :

$$(\sum_i \varphi_i u'_i)' \cdot \varphi_k = 0$$

e quindi

$$((\sum_i \varphi_i u'_i) \cdot \varphi_k)' = (\sum_i \varphi_i u'_i) \cdot \varphi'_k = (\sum_i \varphi_i u'_i) \cdot (\sum_j \varphi_{kj} u'_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\varphi_i \cdot \varphi_{kj} + \varphi_j \cdot \varphi_{ki}) u'_i u'_j$$

da cui, usando la prima forma (e derivate)

$$g_{i,j} = \varphi_i \cdot \varphi_j \quad \partial_k g_{i,j} = \varphi_{ik} \cdot \varphi_j + \varphi_i \cdot \varphi_{jk}$$

troviamo infine

$$\left(\sum_i g_{ik} u'_i \right)' = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_k g_{i,j} u'_i u'_j$$

da cui riconosciamo il sistema di equazioni già trovata cercando le curve di lunghezza minima tra due fissati punti. Per inciso si noti che possiamo scrivere il sistema in forma matriciale:

$$(G_I \gamma')' = \frac{1}{2} (\gamma'^t \partial_k (G_I) \gamma')_k$$

(uguaglianza di colonne).

1.6.9. CASO DI CLAIRAUT. Un caso interessante studiato è quello detto di Clairaut, in cui la prima forma è diagonale e ha derivata nulla in u , e derivata in v avente unico termine non nullo e_v . Il sistema diventa allora particolarmente semplice:

$$\begin{cases} (eu')' = 0 \\ (gv')' = \frac{1}{2} e_v u'^2 \end{cases}$$

e si vede subito che $eu' = c$ costante (la costante si può interpretare come $\sqrt{e} \cos \vartheta$ per l'angolo ϑ che la geodetica forma con le linee $v = v_0$ costante; da questo seguono delle limitazioni per la traiettoria della geodetica: risulta $e \geq c^2$); usando l'unitarietà $eu'^2 + gv'^2 = 1$ ricaviamo

$$u' = \frac{c}{e}, \quad v'^2 = \frac{e - c^2}{eg}$$

e quindi se supponiamo $v' \neq 0$ possiamo esprimere $u(v)$ e ottenere l'equazione ordinaria

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'}{v'} = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{e}\sqrt{e - c^2}}$$

(che comunque spesso non si integra in modo elementare). Si osservi che le varie equazioni incontrate permettono una analisi qualitativa dell'andamento delle geodetiche: quando e aumenta, u' diminuisce e l'angolo che la geodetica forma con le linee $v = v_0$ aumenta. Le superficie di rotazione e l'elicoide della retta sono casi di Clairaut. Si osservi che nel procedimento non abbiamo usato la seconda equazione del sistema: com'è possibile?

1.6.10. CASO DI MANFRON. Osserviamo prima di tutto che le due equazioni delle geodetiche implicano necessariamente che la geodetica ha velocità costante:

$$(eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2)' = 0$$

in effetti, supponendo $u'v' \neq 0$ abbiamo che le tre equazioni differenziali danno a due a due sistemi equivalenti, visto che sommando la prima equazione moltiplicata per u' alla seconda moltiplicata per v' troviamo esattamente l'ultima equazione scritta, che dà la costanza della velocità.

Possiamo allora ottenere la seguente generalizzazione del caso precedente: supponiamo solo che la prima forma sia indipendente da u , e consideriamo le due equazioni

$$\begin{cases} (eu' + fv')' = 0 \\ eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 1. \end{cases}$$

Ricavando $u' = (c - fv')/e$ dalla prima, e sostituendo nella seconda otteniamo

$$v'^2 = \frac{e - c^2}{eg - f^2}$$

che può essere sostituito in u' . Possiamo quindi ottenere l'equazione ordinaria del prim'ordine

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'}{v'} = \frac{c\sqrt{eg - f^2} - f\sqrt{e - c^2}}{e\sqrt{e - c^2}}$$

(ancora, è separabile, ma spesso non si integra in modo elementare). Gli elicoidi in generale sono casi di Manfron.

1.6.11. PROBLEMA. Che relazioni vi sono tra i diversi tipi definiti di linee? Per esempio, una linea di curvatura può essere asintotica, e cos'è nel caso? Come sono fatte le linee asintotiche che siano anche geodetiche? Quando le linee di curvatura sono geodetiche?

1.6.12. PROBLEMA. Studiare le curve per cui $\tau = \tau_g$, cioè $\vartheta' = 0$ (sono le curve per le quali i due riferimenti mobili non derivano tra loro, cioè l'angolo tra normale alla curva e normale alla superficie è costante).

1.6.13. RETI DI CURVE SULLE SUPERFICIE. Viene spontaneo chiedersi se sulle superficie possiamo sempre trovare delle parametrizzazioni con curve coordinate aventi buone proprietà, per esempio ortogonali, oppure seguendo linee di curvatura, oppure seguendo geodetiche ecc.

1.7. \boxtimes Derivate covarianti, simboli di Christoffel.

1.7.1. Sappiamo già differenziare le funzioni lungo un campo vettoriale, o anche in direzione di un vettore tangente. Possiamo quindi differenziare campi vettoriali dell'ambiente semplicemente derivandone le componenti. Se X è un campo tangente, W un campo qualsiasi, scriveremo $X(W)$, e chiaramente valgono le proprietà seguenti: per ogni X, Y campi tangentici, W campi qualsiasi

- (1) linearità nella derivazione: $(X + fY)(W) = X(W) + fY(W)$,
- (2) additività nell'argomento: $X(W_1 + W_2) = X(W_1) + X(W_2)$,
- (3) leibniz nell'argomento: $X(fW) = X(f)W + fX(W)$,
e $X(W_1 \cdot W_2) = X(W_1) \cdot W_2 + W_1 \cdot X(W_2)$,
- (4) lie: $X(Y) - Y(X) = [X, Y]$.

Osserviamo anche che $XY(W) - YX(W) = [X, Y](W)$.

1.7.2. DERIVATA COVARIANTE. Ora, dato un campo tangente Y , non è detto che $X(Y)$ sia tangente; decomponiamolo quindi in direzioni tangenti e normali:

$$X(Y) = \nabla_X(Y) + (X(Y) \cdot n)n = \nabla_X(Y) - (Y \cdot X(n))n$$

(abbiamo sfruttato che $Y \cdot n = 0$, da cui al solito $X(Y) \cdot n = -Y \cdot X(n)$), ricordando poi che $X(n) = -\mathcal{L}(X)$ e la seconda forma, definiamo la derivata covariante come

$$\nabla_X(Y) = X(Y) - (Y \cdot \mathcal{L}(X))n = X(Y) - \mathcal{I}(X, Y)n$$

che risulta quindi tangente.

Si osservi che stiamo dando una definizione estrinseca (derivare nello spazio e poi proiettare sul piano tangente) della derivata covariante, che però dovremmo aspettarci essere una operazione intrinseca: tiene conto solo della variazione "visibile" da chi sta sulla superficie, quindi in qualche senso è proprio il calcolo differenziale disponibile all'esserino bidimensionale.

1.7.3. Si vede facilmente che ∇_X gode delle usuali proprietà:

- (1) linearità nella derivazione: $\nabla_{X+fY}(W) = \nabla_X(W) + f\nabla_Y(W)$,
- (2) additività nell'argomento: $\nabla_X(W_1 + W_2) = \nabla_X(W_1) + \nabla_X(W_2)$,
- (3) leibniz nell'argomento: $\nabla_X(fW) = X(f)W + f\nabla_X(W)$,
e $\nabla_X(W_1 \cdot W_2) = \nabla_X(W_1) \cdot W_2 + W_1 \cdot \nabla_X(W_2)$,
- (4) lie: $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y]$.

Osserviamo invece che $\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$ in generale non coincide con $\nabla_{[X, Y]}$. Questo sarà proprio il quid per trovare le equazioni strutturali delle superficie.

1.7.4. SIMBOLI DI CHRISTOFFEL. Considerate la linearità nella derivazione, e l'addittività dell'argomento, le derivate covarianti sono descritte completamente dalle espressioni $\nabla_{\partial_i}(\partial_j)$, che a loro volta sono combinazioni dei ∂_k ; i simboli Γ_{ij}^k definiti da

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

si dicono simboli di Christoffel e determinano per ogni $X = \sum_i x_i \partial_i$ e ogni $Y = \sum_j y_j \partial_j$ la derivata covariante

$$\nabla_X(Y) = \sum_i x_i \nabla_{\partial_i}(Y) = \sum_{i,j} x_i \partial_i(y_j) \partial_j + \sum_{i,j,k} x_i y_j \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

come si voleva. Chiaramente, poiché $[\partial_i, \partial_j] = 0$ i simboli presentano la simmetria $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

1.7.5. DIPENDENZA DALLA PRIMA FORMA. Cerchiamo le relazioni tra prima forma fondamentale e derivate covarianti, ovvero cerchiamo di esprimere i simboli di Christoffel in termini dei coefficienti della prima forma fondamentale. Osservando che

$$\begin{aligned} \partial_k g_{ij} &= \partial_k(I(\partial_i, \partial_j)) = I(\nabla_{\partial_k}(\partial_i), \partial_j) + I(\partial_i, \nabla_{\partial_k}(\partial_j)) = \sum_l \Gamma_{ki}^l I(\partial_l, \partial_j) + \sum_l \Gamma_{kj}^l I(\partial_i, \partial_l) \\ &= \sum_l \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \sum_l \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ \partial_j g_{ik} &= \sum_l \Gamma_{ji}^l g_{lk} + \sum_l \Gamma_{jk}^l g_{il} \\ \partial_i g_{jk} &= \sum_l \Gamma_{ji}^l g_{lk} + \sum_l \Gamma_{jk}^l g_{il} \end{aligned}$$

e sottraendo la prima espressione dalle altre due si ottiene

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} = 2 \sum_l g_{kl} \Gamma_{ij}^l$$

che può essere visto come un prodotto di matrici $(?)_{kj} = 2G_I(\Gamma_{ij}^l)_{lj}$ per ogni i , invertito in $(\Gamma_{ij}^l)_{lj} = \frac{1}{2} G_I^{-1}(?)_{kj}$ per ogni i , da cui

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_k g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

(dove g^{lk} sono le entrate dell'inversa di G_I). Quindi, in particolare, simboli di Christoffel e derivate covarianti dipendono solo dalla prima forma fondamentale e sono intrinseci (può calcolarli l'esserino superficiale).

Può essere utile esplicitare gli indici per capire che le formule sono meno terribili del previsto: in forma matriciale abbiamo

$$\begin{pmatrix} \partial_1 g_{11} & \partial_2 g_{11} \\ 2\partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11} & \partial_1 g_{22} \end{pmatrix} = 2G_I \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \partial_2 g_{11} & 2\partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22} \\ \partial_1 g_{22} & \partial_2 g_{22} \end{pmatrix} = 2G_I \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

NOTA. Gli stessi calcoli fatti per X, Y, Z campi tangentì:

$$X(Y \cdot Z) = \nabla_X(Y) \cdot Z + Y \cdot \nabla_X(Z)$$

e analoghi per $Y(Z \cdot X)$, $Z(X \cdot Y)$, sommando i primi due e sottraendo il terzo danno

$$X(Y \cdot Z) + Y(Z \cdot X) - Z(X \cdot Y) = X \cdot [Y, Z] + Y \cdot [X, Z] + Z \cdot (\nabla_X(Y) + \nabla_Y(X))$$

da cui si ricava che

$$2\nabla_X(Y) \cdot Z = X(Y \cdot Z) - X \cdot [Y, Z] + Y(X \cdot Z) - Y \cdot [X, Z] - Z(X \cdot Y) + Z \cdot [X, Y]$$

(brutta asimmetria).

1.8. Geodetiche.

Abbiamo già introdotto le geodetiche:

- (1) come curva di minima lunghezza e velocità costante (in realtà abbiamo minimizzato l'integrale del quadrato della derivata, in un certo senso l'energia della curva);
- (2) curve unitarie sulla superficie con curvatura geodetica nulla (cioè prive di accelerazione tangenziale);

e ora possiamo dire in modo equivalente

- (3) curve con derivata covariante nulla in direzione della curva stessa.

Il vantaggio di quest'ultima formulazione è di permettere facilmente di derivare il sistema di equazioni differenziali cui devono soddisfare le geodetiche: infatti possiamo scrivere per la curva $\gamma : I \rightarrow S$ che $d\gamma(\partial_t) = \sum_i \gamma'_i \partial_i = \gamma'$, e ottenere

$$\nabla_{\partial_t} \gamma' = \sum_i \gamma''_i \partial_i + \sum_i \gamma'_i \nabla_{d\gamma(\partial_t)} \partial_i = \sum_i \gamma''_i \partial_i + \sum_i \gamma'_i \sum_j \gamma'_j \nabla_{\partial_j} \partial_i = \sum_k (\gamma''_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma'_i \gamma'_j) \partial_k$$

da cui il sistema cercato

$$\gamma''_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma'_i \gamma'_j = 0$$

che giustamente corrisponde (usando le formule che danno i simboli di Christoffel in termini intrinseci) al precedente ottenuto usando direttamente la prima forma fondamentale, e quindi ugualmente difficile da integrare.

2. ⊗ Equazioni e teorema fondamentali delle superficie.

Sappiamo già che differenziare rispetto a campi tangentici alla superficie non è stabile sui campi tangentici stessi; proiettare le derivate sullo spazio tangente dà luogo alle derivate covarianti che abbiamo già introdotto. Vogliamo qui esplicitare la situazione nel caso della relazione fondamentale del commutatore $XY - YX = [X, Y]$. Da un lato darà luogo alle cosiddette equazioni strutturali delle superficie, equazioni di Gauss e Codazzi-Mainardi (dalla prima si ricava il teorema egregium), dall'altro daranno le condizioni di integrabilità per il teorema fondamentale di esistenza di superficie con fissate prima e seconda forme fondamentali.

2.1. Equazioni strutturali delle superficie.

Consideriamo l'uguaglianza di derivazioni

$$XY(Z) - YX(Z) = [X, Y](Z)$$

per ogni tre campi tangentici X, Y, Z ; in generale non si tratta di un campo tangente: calcoliamo quindi le direzioni tangente e normale per uguagliarle separatamente:

$$\begin{aligned} XY(Z) &= X(\nabla_Y(Z) + \mathcal{I}(Y, Z)n) \\ &= \nabla_X \nabla_Y(Z) + \mathcal{I}(X, \nabla_Y(Z))n + X(\mathcal{I}(Y, Z))n - \mathcal{I}(Y, Z)L(X) \\ YX(Z) &= Y(\nabla_X(Z) + \mathcal{I}(X, Z)n) \\ &= \nabla_Y \nabla_X(Z) + \mathcal{I}(Y, \nabla_X(Z))n + Y(\mathcal{I}(X, Z))n - \mathcal{I}(X, Z)L(Y) \\ [X, Y](Z) &= \nabla_{[X, Y]}(Z) + \mathcal{I}([X, Y], Z)n \end{aligned}$$

2.1.1. EQUAZIONI DI GAUSS. Dalla parte tangenziale otteniamo quindi

$$\nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X, Y]}(Z) = \mathcal{I}(Y, Z)L(X) - \mathcal{I}(X, Z)L(Y)$$

ovvero, facendo il prodotto scalare con un qualsiasi W tangente:

$$(\nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X, Y]}(Z)) \cdot W = \mathcal{I}(Y, Z)\mathcal{I}(X, W) - \mathcal{I}(X, Z)\mathcal{I}(Y, W)$$

oppure, raccogliendo Z :

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} = L(X)L(Y)^t - L(Y)L(X)^t$$

(tutte queste espressioni vengono chiamate equazioni di Gauss).

Si osservi che dalla seconda equazione, usando $Z = Y$ e $W = X$ otteniamo a destra il determinante della seconda forma fondamentale, che quindi si esprime in termini di derivate covarianti, e può quindi essere valutato in modo intrinseco.

2.1.2. EQUAZIONI DI CODAZZI-MAINARDI. Dalla parte normale otteniamo invece

$$\mathcal{I}(X, \nabla_Y(Z)) + X(\mathcal{I}(Y, Z)) - \mathcal{I}(Y, \nabla_X(Z)) - Y(\mathcal{I}(X, Z)) = \mathcal{I}([X, Y], Z)$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$L(X) \cdot \nabla_Y(Z) + X(L(Y) \cdot Z) - L(Y) \cdot \nabla_X(Z) - Y(L(X) \cdot Z) = L([X, Y]) \cdot Z$$

e usando che $X(L(Y) \cdot Z) = \nabla_X(LY) \cdot Z + L(Y) \cdot \nabla_X(Z)$ (e analogo scambiando X e Y), possiamo cancellare Z :

$$\nabla_X(LY) - \nabla_Y(LX) = L([X, Y])$$

(tutte queste espressioni vengono chiamate equazioni di Codazzi-Mainardi).

Si osservi per inciso che l'ultima espressione si poteva ottenere in modo più semplice a partire da $XY(n) - YX(n) = [X, Y](n)$, cioè $X(LY) - Y(LX) = L([X, Y])$ (ma noi abbiamo visto che è anche equivalente alla precedente).

2.1.3. EQUAZIONI DI GAUSS IN COORDINATE. Usando la solita base $X = \partial_1$, $Y = \partial_2$ nelle equazioni di Gauss, ed esprimendo tutto in termini delle matrici fondamentali e dei simboli di Christoffel (si usa $Z \in \{\partial_1, \partial_2\}$ nella prima espressione, idem per W nella seconda; per la terza basta fare attenzione al termine di destra, che si scrive

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} (b \quad d) - \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} (a \quad c) \right) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kf & Kg \\ -Ke & -Kf \end{pmatrix}$$

in quanto si tratta di usare la prima forma), si ottiene un sistema di equazioni differenziali parziali detto di Gauss:

$$\begin{cases} \partial_1 \Gamma_{12}^1 - \partial_2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 = Kf \\ \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -Ke \\ \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 = Kg \\ \partial_1 \Gamma_{22}^2 - \partial_2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^2 = -Kf \end{cases}$$

(si noti che tutto si ottiene in base alla prima forma fondamentale, quindi intrinseco; si userà nel teorema fondamentale).

2.1.4. EQUAZIONI DI CODAZZI-MAINARDI IN COORDINATE. Usando la solita base $X = \partial_1$, $Y = \partial_2$ nelle equazioni di Codazzi-Mainardi, ed esprimendo tutto in termini delle matrici fondamentali e dei simboli di Christoffel (si usa $Z \in \{\partial_1, \partial_2\}$ nella prima espressione, per esempio) si ottiene un sistema di equazioni differenziali parziali detto di Codazzi-Mainardi:

$$\begin{cases} \partial_1 m - \partial_2 l = n \Gamma_{11}^2 + m(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) - l \Gamma_{12}^1 \\ \partial_1 n - \partial_2 m = n \Gamma_{12}^2 + m(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) - l \Gamma_{22}^1 \end{cases}$$

(si noti che qui è coinvolta la seconda forma fondamentale, quindi non intrinseco; si userà nel teorema fondamentale).

2.2. Teorema fondamentale delle superficie.

Mentre il teorema fondamentale delle curve si basava essenzialmente sul teorema di esistenza di soluzioni di equazioni differenziali ordinarie, un analogo problema per le superficie deve basarsi su teoremi di esistenza di soluzioni per equazioni alle derivate parziali, e questo anche nei casi più semplici richiede opportune ipotesi di integrabilità. Per esempio per risolvere $\partial_x \varphi = f$, $\partial_y \varphi = g$ è almeno necessario che $\partial_y f = \partial_x g$ (entrambe uguali alla derivata seconda mista di φ , se esiste, altrimenti il sistema non può avere soluzioni).

Le condizioni di integrabilità del teorema di esistenza di Frobenius vengono dalla commutazione delle derivate miste, e queste sono esattamente le condizioni che abbiamo codificato nelle equazioni strutturali (studiando il comportamento dei commutatori).

2.2.1. PROBLEMA DI ESISTENZA. Dati e, f, g con $e > 0$, $g > 0$, $eg - f^2 > 0$, e l, m, n esiste una superficie S che abbia prima forma fondamentale con coefficienti e, f, g e seconda forma fondamentale con coefficienti l, m, n ? Eventualmente, è unica?

Il problema si traduce nella esistenza di soluzioni per il sistema differenziale dato da

$$(\sigma_u \quad \sigma_v \quad n)_u = (\sigma_u \quad \sigma_v \quad n) \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -a \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -b \\ l & m & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_u \quad \sigma_v \quad n)_v = (\sigma_u \quad \sigma_v \quad n) \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -c \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -d \\ m & n & 0 \end{pmatrix}$$

(si ricordi che i coefficienti di Christoffel e l'applicazione di Weingarten si calcolano tramite prima e seconda forme fondamentali).

2.2.2. TEOREMA. Siano date le funzioni e, f, g con $e > 0, g > 0, eg - f^2 > 0$, e l, m, n differenziabili su un aperto U di \mathbb{R}^2 a valori reali. Se esse soddisfano alle relazioni di Gauss e di Codazzi-Mainardi, allora per ogni punto P di U esiste un intorno V di P contenuto in U , e una superficie $\sigma : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ avente prima e seconda forma fondamentali determinate dai coefficienti dati. Due tali superficie differiscono per una isometria di \mathbb{R}^3 .

3. Teorema Egregium di Gauss.

3.1. TEOREMA EGREGIUM. La curvatura gaussiana è una quantità intrinseca, può essere calcolata con misure che non escono dalla superficie, ovvero si può calcolare in base alla sola prima forma fondamentale.

L'abbiamo già essenzialmente visto con le equazioni di Gauss: la curvatura gaussiana è il determinante della applicazione di Weingarten, che a sua volta si calcola usando determinante di prima e seconda forma. Ora, il determinante della seconda forma fondamentale può tramite le equazioni di Gauss essere calcolato usando le derivate covarianti, quindi i simboli di Christoffel, quindi in ultima istanza solo la prima forma fondamentale.

3.1.1. Si può anche ottenere una dimostrazione diretta e qualche formula esplicita nel caso di superficie parametrizzata, ovvero nel caso locale. Sia σ la superficie; partendo da $\det(I)K = \det(\mathcal{I})$, e scrivendo le entrate della seconda forma fondamentale tramite

$$\sigma_{??} \cdot n = \sigma_{??} \cdot \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{\sigma_{??} \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{\det(\sigma_{??} \sigma_u \sigma_v)}{\sqrt{\det(I)}}$$

con $? \in \{u, v\}$ otteniamo che

$$\begin{aligned} \det(I)^2 K &= \det(\sigma_{uu} \sigma_u \sigma_v) \det(\sigma_{vv} \sigma_u \sigma_v) - \det(\sigma_{uv} \sigma_u \sigma_v)^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} \sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} & \sigma_{uu} \cdot \sigma_u & \sigma_{uu} \cdot \sigma_v \\ \sigma_u \cdot \sigma_{vv} & \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_{vv} & \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} & \sigma_{uv} \cdot \sigma_u & \sigma_{uv} \cdot \sigma_v \\ \sigma_u \cdot \sigma_{uv} & \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_{uv} & \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} - \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} & \sigma_{uu} \cdot \sigma_u & \sigma_{uu} \cdot \sigma_v \\ \sigma_u \cdot \sigma_{vv} & e & f \\ \sigma_v \cdot \sigma_{vv} & f & g \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{uv} \cdot \sigma_u & \sigma_{uv} \cdot \sigma_v \\ \sigma_u \cdot \sigma_{uv} & e & f \\ \sigma_v \cdot \sigma_{uv} & f & g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ora, per esprimere i termini rimanenti ricordiamo che

$$\begin{aligned} e_u &= 2\sigma_u \cdot \sigma_{uu} & e_v &= 2\sigma_u \cdot \sigma_{uv} \\ f_u &= \sigma_u \cdot \sigma_{uv} + \sigma_{uu} \cdot \sigma_v & f_v &= \sigma_u \cdot \sigma_{vv} + \sigma_{uv} \cdot \sigma_v \\ g_u &= 2\sigma_v \cdot \sigma_{vu} & g_v &= 2\sigma_v \cdot \sigma_{vv} \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} \cdot \sigma_u &= \frac{1}{2}e_u & \sigma_{uu} \cdot \sigma_v &= f_u - \frac{1}{2}e_v \\ \sigma_{uv} \cdot \sigma_u &= \frac{1}{2}e_v & \sigma_{uv} \cdot \sigma_v &= \frac{1}{2}g_u \\ \sigma_{vv} \cdot \sigma_u &= f_v - \frac{1}{2}g_u & \sigma_{vv} \cdot \sigma_v &= \frac{1}{2}g_v \end{aligned}$$

mentre dalle derivate parziali seconde

$$\begin{aligned} g_{uu} &= 2\sigma_{vu} \cdot \sigma_{vu} + 2\sigma_v \cdot \sigma_{vuu} \\ f_{uv} &= \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} + \sigma_u \cdot \sigma_{uvv} + \sigma_{uuv} \cdot \sigma_v + \sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} \\ e_{vv} &= 2\sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} + 2\sigma_u \cdot \sigma_{uvv} \end{aligned}$$

segue subito che

$$\sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} - \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} = -\frac{1}{2}e_{vv} + f_{uv} - \frac{1}{2}g_{uu}$$

e mettendo insieme il tutto otteniamo l'espressione

$$(eg - f^2)^2 K = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e_{vv} + f_{uv} - \frac{1}{2}g_{uu} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g \end{pmatrix}$$

che esprime K in termini della prima forma fondamentale (e sue derivate).

La terribile espressione si può semplificare se $f = 0$ (prima forma diagonale), e allora troviamo

$$e^2 g^2 K = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e_{vv} - \frac{1}{2}g_{uu} & \frac{1}{2}e_u & -\frac{1}{2}e_v \\ -\frac{1}{2}g_u & e & 0 \\ \frac{1}{2}g_v & 0 & g \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & 0 \\ \frac{1}{2}g_u & 0 & g \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{e^2 g^2} \left(-\frac{1}{2}ege_{vv} + \frac{1}{4}ee_v g_v + \frac{1}{4}ge_v^2 - \frac{1}{2}egg_{uu} + \frac{1}{4}ge_u g_u + \frac{1}{4}eg_u^2 \right) \\ &= \frac{1}{e^2 g^2} \left(-\frac{1}{2}ege_{vv} + \frac{1}{4}e_v(eg)_v - \frac{1}{2}egg_{uu} + \frac{1}{4}g_u(eg)_u \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{eg}} \left(\frac{ege_{vv} - \frac{1}{2}e_v(eg)_v}{eg\sqrt{eg}} + \frac{egg_{uu} - \frac{1}{2}g_u(eg)_u}{eg\sqrt{eg}} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{eg}} \left(\left(\frac{e_v}{\sqrt{eg}} \right)_v + \left(\frac{g_u}{\sqrt{eg}} \right)_u \right) \end{aligned}$$

e supponendo ulteriormente $e = 1$ otteniamo la più semplice

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{g_u}{\sqrt{g}} \right)_u = -\frac{(\sqrt{g})_{uu}}{\sqrt{g}}.$$

3.1.2. Un altro enunciato presentato come teorema egregium è il seguente: se due superficie sono localmente isometriche allora hanno la stessa curvatura gaussiana.

Si faccia però attenzione al fatto che il viceversa è falso: per esempio la superficie di rotazione del grafico del logaritmico $\begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ \log u \end{pmatrix}$ (per $u > 0$) e l'elicoide di una retta $\begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix}$ hanno la stessa curvatura ma non sono localmente isometriche. Esistono anche superficie di curvatura nulla, ma non localmente isometriche al piano, ma è più difficile trovare esempi.

3.2. CENNI SUL TENSORE DI CURVATURA? È classico definire un oggetto intrinseco, detto tensore di curvatura di Riemann, dato da

$$R(X, Y, Z) = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z = \sum R_{ijk}^l X_i Y_j Z_k \partial_l$$

oppure da

$$R(X, Y, Z, W) = I([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z, W = \sum R_{ijk}^l X_i Y_j Z_k W_l$$

(dove X, Y, Z, W sono campi tangentici, ma il risultato dipende solo dai vettori tangentici nel punto considerato) con $R_{ijk}^l = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k) \cdot \partial_l$ (le seconde uguaglianze sottintendono la multilinearità di R in ciascuna variabile). Le proprietà di alternanza sulle prime due e sulle ultime due variabili fanno sì che in realtà vi sia una unica informazione scalare $R_{122}^1 = K \det(I)$. Si può anche esplicitare la dipendenza dai simboli di Christoffel e loro derivate:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^l &= R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= I \left(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k, \partial_l \right) \\ &= I \left(\nabla_{\partial_i} \sum_s \Gamma_{jk}^s \partial_s - \nabla_{\partial_j} \sum_s \Gamma_{ik}^s \partial_s, \partial_l \right) \\ &= I \left(\sum_s (\partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s) \partial_s + \sum_s \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{is}^m - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{js}^m) \partial_m, \partial_l \right) \\ &= \sum_s \left(\partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{is}^m - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{js}^m) \right) g_{sl} \end{aligned}$$

(giusto per allenamento con gli indici).

4. ⊗ Teorema di Gauss-Bonnet.

4.1. TEOREMA DI GAUSS-BONNET. Sia P una regione connessa poligonale di una superficie S , con bordo descritto da curve γ_i ($i = 1, \dots, n$ numerate consecutivamente). Definiamo gli angoli esterni della regione P come β_i angolo tra γ'_i (fine) e γ'_{i+1} (inizio). Allora abbiamo che

$$\sum_i \beta_i + \sum_i \int_{\gamma_i} k_g + \iint_P K = 2\pi \quad [\text{formula di Bonnet}]$$

e in particolare se il poligono è geodetico risulta

$$\sum_i \beta_i = 2\pi - \iint_P K . \quad [\text{formula di Gauss}]$$

Chiamando $\alpha_i = \pi - \beta_i$ gli angoli interni di P (corrisponde all'idea intuitiva solo per poligoni convessi) allora risulta

$$\sum_i \alpha_i = (n-2)\pi + \sum_i \int_{\gamma_i} k_g + \iint_P K \quad [\text{formula di Bonnet}]$$

e nel caso geodetico

$$\sum_i \alpha_i = (n-2)\pi + \iint_P K . \quad [\text{formula di Gauss}]$$

4.1.1. Per indicare una strategia di dimostrazione del teorema conviene scegliere un riferimento ortogonale mobile sulla superficie, ovvero una base e_1, e_2 ortonormale del piano tangente, che varia in modo differenziabile sulla superficie. Definiamo ϑ l'angolo che una curva γ sulla superficie forma con il primo vettore del riferimento mobile scelto: quindi si ha ϑ tale che $\gamma' = \cos(\vartheta)e_1 + \sin(\vartheta)e_2$ (se γ è parametrizzata con l'arco).

La variazione dell'angolo ϑ_i lungo la curva γ_i lato del poligono è dovuta in parte alla curva, in parte al riferimento mobile: indichiamola con $\Delta_i \vartheta = \vartheta_i(\text{inizio}) - \vartheta_i(\text{fine})$. Osservando che la funzione a sinistra è continua e prende valori discreti in $2\pi\mathbb{Z}$, quindi riducendosi per deformazione ad una circonferenza, si trova che

$$\sum_i \beta_i + \sum_i \Delta_i \vartheta = 2\pi$$

(su una circonferenza non vi sono angoli esterni, ed evidentemente la variazione dell'angolo è 2π). Si tratta allora di esprimere la somma delle variazioni $\Delta_i \vartheta$.

4.1.2. Definiamo delle forme differenziali ω_{ij} sulla superficie nel seguente modo: per ogni campo tangente X si abbia

$$\nabla_X(e_j) = \sum_i \omega_{ij}(X) e_i$$

e dalla ortonormalità del riferimento mobile ottemiamo che $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, in particolare l'unica informazione si riduce a ω_{12} per cui $\nabla_X(e_2) = \omega_{12}(X)e_1$ e $\nabla_X(e_1) = -\omega_{12}(X)e_2$.

4.1.3. Dal punto precedente seguono le formule di Cartan

$$\vartheta' = k_g + \omega_{12}(\gamma')$$

se γ è curva sulla superficie parametrizzata con l'arco (infatti derivando $\gamma' = \cos(\vartheta)e_1 + \sin(\vartheta)e_2$ nella sua stessa direzione, si ha

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \gamma' &= -\sin(\vartheta)\vartheta' e_1 + \cos(\vartheta)\vartheta' e_2 + \cos(\vartheta)\nabla_{\gamma'} e_1 + \sin(\vartheta)\nabla_{\gamma'} e_2 \\ &= -\sin(\vartheta)\vartheta' e_1 + \cos(\vartheta)\vartheta' e_2 - \cos(\vartheta)\omega_{12}(\gamma')e_2 + \sin(\vartheta)\omega_{12}(\gamma')e_1 \\ &= (\vartheta' - \omega_{12}(\gamma'))(-\sin(\vartheta)e_1 + \cos(\vartheta)e_2) \end{aligned}$$

da cui $k_g = \vartheta' - \omega_{12}(\gamma')$ come scritto) e

$$d\omega_{12} = K \det(I) dudv$$

ovvero $d\omega_{12}(e_1, e_2) = K$ (infatti si calcola

$$\begin{aligned} d\omega_{12}(e_1, e_2) &= e_1(\omega_{12}(e_2)) - e_2(\omega_{12}(e_1)) - \omega_{12}([e_1, e_2]) \\ &= e_1(\nabla_{e_2}(e_2) \cdot e_1) - e_2(\nabla_{e_1}(e_2) \cdot e_1) - \nabla_{[e_1, e_2]}(e_2) \cdot e_1 \\ &= (\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}(e_2) - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}(e_2) - \nabla_{[e_1, e_2]}(e_2)) \cdot e_1 \\ &= R(e_1, e_2, e_2, e_1) = K \end{aligned}$$

da cui le formule).

4.1.4. Usando queste formule risulta quindi

$$\Delta_i \vartheta = \int_{\gamma_i} \vartheta'_i ds = \int_{\gamma_i} (k_g + \omega_{12}(\gamma')) ds = \int_{\gamma_i} k_g + \int_{\gamma_i} \omega_{12}$$

e sommando (l'ultimo termine) otteniamo

$$\sum_i \int_{\gamma_i} \omega_{12} = \int_{\partial P} \omega_{12} = \iint_P d\omega_{12} = \iint_P K$$

come si voleva.

4.2. CASO DI TRIANGOLI GEODETICI. Per triangoli T i cui tre lati siano geodetiche, risulta dunque che $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_T K$. Dunque, per K costante o per regioni piccole (abbastanza per poter supporre K costante) abbiamo $\iint_T K = K \text{Area}(T)$, da cui

$$K \text{Area}(T) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \quad \text{e} \quad K = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{\text{Area}(T)}$$

(possibile calcolo locale intrinseco della curvatura della superficie).

In particolare la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico sarà maggiore, uguale o minore di π a seconda che la curvatura della superficie sia positiva, nulla o negativa.

Le formule danno anche nel caso di curvatura costante non nulla dei limiti sulle aree dei triangoli (o dei poligoni in generale). Per esempio su una superficie a curvatura negativa l'area di poligoni geodeticici sarà sempre limitata ($\leq -\pi/K$), anche se la superficie non lo è: per esempio nel semipiano di Poincaré, o nel disco di Poincaré, o nella pseudosfera di Beltrami regioni polygonali hanno sempre area limitata, mentre i dischi no. In particolare stati di forma triangolare o poligonale non possono conquistare tutta la superficie (ma stati di forma circolare sì).

4.3. CASO DI SUPERFICIE COMPATTE ORIENTABILI. Se S è una superficie reale compatta orientabile di genere $g(S)$, allora abbiamo

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S K = 2 - 2g(S) = \chi(S)$$

dunque, in particolare, se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sappiamo già che esistono punti P con $K(P) > 0$, e quindi se $g(S) > 0$ esistono anche punti Q con $K(Q) < 0$ (essendo l'integrale non positivo se S non è di genere 0).

4.4. CASO DI SUPERFICIE COMPATTE A CURVATURA COSTANTE. La classificazione delle superficie compatte a curvatura costante si fa allora secondo tre casi:

- (> 0) caso di curvatura positiva, che possiamo supporre 1; allora il genere è zero: si tratta di una sfera, e l'area vale $4\pi/K$;
- ($= 0$) caso di curvatura nulla, allora il genere è 1: si tratta di un toro;
- (< 0) caso di curvatura negativa, allora il genere g è maggiore di 1: si tratta di una toro con g buchi, e l'area vale $4\pi(g-1)/K$.

In effetti vale anche il viceversa, nel senso che sulle superficie compatte orientabili possiamo dare una struttura di superficie differenziabili con curvatura costante positiva, nulla o negativa a seconda che il genere sia 0, 1 o > 1 rispettivamente.

4.5. CASO DI SUPERFICIE IMMERSE IN \mathbb{R}^3 . Da scrivere.

5. Esempi.

5.1. PIANO. Un piano in \mathbb{R}^3 è la più semplice superficie immersa; si può scrivere con $\sigma(u, v) = P + ua + vb$ con P punto e a, b vettori linearmente indipendenti che supponiamo unitari e ortogonali. Si calcola subito

$$\sigma_u = a \quad \sigma_v = b \quad \sigma_u \times \sigma_v = a \times b$$

mentre le derivate seconde sono tutte nulle. Si deduce che $G_I = \mathbb{I}_2$, $G_{II} = \mathbb{O}_2$, $L = \mathbb{O}_2$. Si osservi che la condizione $II = 0$ (nullità della seconda forma) caratterizza i piani in \mathbb{R}^3 ; implica che $K = 0$, ma non viceversa. Si vede subito che i simboli di Christoffel sono tutti nulli, e che quindi le equazioni delle geodetiche sono del tipo $u'' = 0 = v''$, che dunque sono le rette, come ci si aspetta.

Per complicare le cose, si può scrivere un piano con coordinate polari $\sigma(\varrho, \vartheta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho \cos \vartheta \\ \varrho \sin \vartheta \end{pmatrix}$ e calcolare

$$\sigma_\varrho = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \sigma_\vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varrho \sin \vartheta \\ \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \sigma_\varrho \times \sigma_\vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene la prima forma fondamentale di matrice $G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}$ e simboli di Christoffel

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varrho \end{pmatrix} \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\varrho \\ 1/\varrho & 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo le equazioni per le geodetiche:

$$\begin{cases} \varrho'' - \varrho \vartheta'^2 = 0 \\ \vartheta'' + \frac{2}{\varrho} \varrho' \vartheta' = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \varrho'' = \varrho \vartheta'^2 \\ (\varrho^2 \vartheta')' = 0 \end{cases}$$

Per ϑ costante si trovano le rette passanti per l'origine; altrimenti possiamo scrivere ϱ in funzione di ϑ , e ridurre il sistema all'equazione

$$\varrho_{\vartheta\vartheta} - \frac{2}{\varrho} \varrho_\vartheta^2 - \varrho = 0$$

(nota che $\varrho' = \varrho_\vartheta \vartheta'$, quindi $\varrho'' = (\varrho_\vartheta \vartheta')' = \varrho_{\vartheta\vartheta} \vartheta'^2 + \varrho_\vartheta \vartheta''$, e ϑ'' si ottiene dalla seconda equazione, cancellando ϑ'^2 da tutti i termini) che invertendo $\varrho = 1/u$ dà luogo a $u_{\vartheta\vartheta} + u = 0$ che si risolve esplicitamente; si trovano infine le rette del piano polare non passanti per l'origine.

5.2. SFERA (E PROIEZIONI VARIE). Per la sfera di raggio R (useremo spesso $R = 1$) conviene usare la parametrizzazione $\sigma(\vartheta, \phi) = R \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \phi \\ \cos \vartheta \sin \phi \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$ con le derivate

$$\sigma_\vartheta = R \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \cos \phi \\ -\sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \sigma_\phi = R \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_\vartheta \times \sigma_\phi = -R^2 \cos \vartheta \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \phi \\ \cos \vartheta \sin \phi \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene la prima forma fondamentale

$$G_I = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Dalle derivate successive

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = R \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \cos \phi \\ -\cos \vartheta \sin \phi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \sigma_{\vartheta\phi} = R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \phi \\ -\sin \vartheta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{\phi\phi} = R \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \cos \phi \\ -\cos \vartheta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

usando il versore normale si ottiene la matrice della seconda forma

$$G_{II} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

da cui si vede che L è la matrice scalare $1/R$, quindi $K = 1/R^2$, $H = 1/R$.

Per i simboli di Christoffel si trova quasi subito

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \vartheta / \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta / \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le geodetiche soddisfano al sistema

$$\begin{cases} \vartheta'' + \sin \vartheta \cos \vartheta (\phi')^2 = 0 \\ \phi'' - 2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \vartheta' \phi' = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} (\vartheta')' = -\sin \vartheta \cos \vartheta (\phi')^2 \\ (\cos^2 \vartheta \phi')' = 0 \end{cases}$$

come al solito d'aspetto difficile (ma di Clairaut). Tuttavia nel caso della sfera possiamo osservare che:

- l'equatore è una geodetica (perché la riflessione rispetto al piano equatoriale è una isometria, e quindi una geodetica che parta su un punto dell'equatore con direzione lungo l'equatore deve restare su di esso; oppure si usi ϕ costante nelle equazioni);
- rotazioni dello spazio danno isometrie della sfera, e immagini di geodetiche tramite isometrie sono geodetiche; con rotazioni ogni punto può essere spostato sull'equatore, e ogni direzione sul piano equatoriale;
- quindi concludere che le geodetiche della sfera sono i cerchi massimi, ovvero le intersezioni della sfera con piani passanti per l'origine.

Si osservi che abbiamo determinato le geodetiche usando argomenti di simmetria (per trovarne una) ed esistenza di abbastanza isometrie (per ridurci a quella trovata, le isometrie devono essere transitive su punti e vettori tangenti).

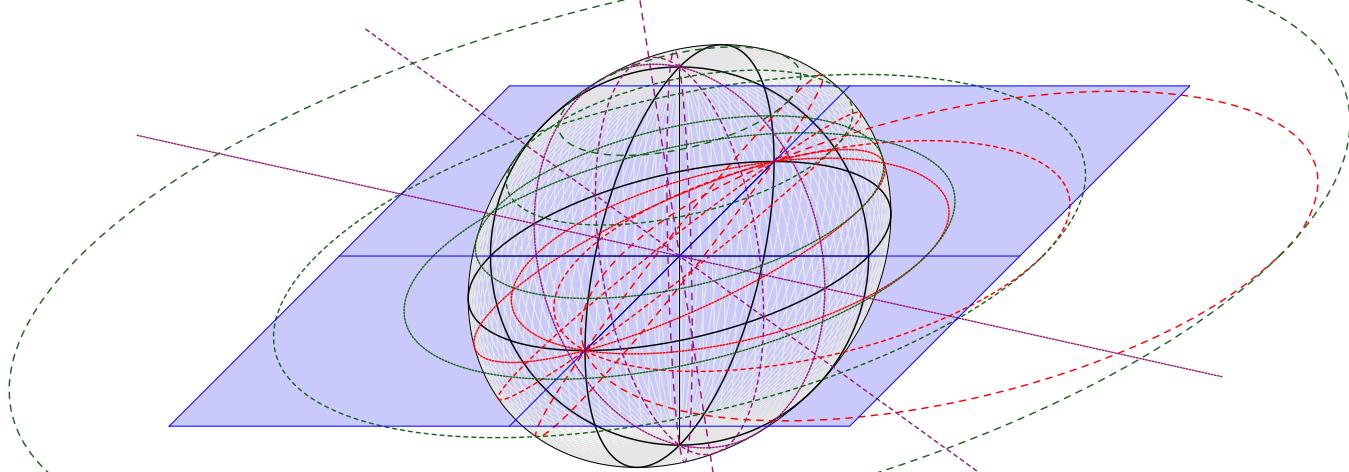
Un altro metodo astuto per determinare le geodetiche della sfera è di ricordare la condizione che la normale alla curva sia normale alla superficie: in questo caso sappiamo che i piani per il centro tagliano curve con questa proprietà, e per ogni punto e ogni direzione tangente danno una tale curva, che quindi sono tutte e sole le geodetiche.

5.2.1. ISOMETRIE DELLA SFERA. Le isometrie della sfera sono le restrizioni alla sfera delle isometrie dello spazio che la fissano, quindi un gruppo isomorfo a $SO_3(\mathbb{R})$.

5.2.2. PROIEZIONE STEREOGRAFICA. La proiezione stereografica p_N dal polo nord N al piano equatoriale (ortogonale all'asse tra polo nord e polo sud) Π è definita nei punti diversi dal polo nord intersecando il piano equatoriale con la retta per il polo nord e un punto dato:

$$p_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \Pi \quad P \mapsto (P \vee N) \cap \Pi.$$

È chiaramente un omeomorfismo, non una isometria, ma vedremo che è conforme (rispetta gli angoli); trasforma i meridiani in rette per l'origine, i paralleli in cerchi di centro l'origine, i cerchi per N in rette del piano (quindi non fa corrispondere le geodetiche).



In coordinate cartesiane (sia $z = 0$ il piano equatoriale, N il solito polo nord) si scrive

$$p_N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con inversa} \quad q_N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix}.$$

L'inversa q_N ha jacobiana data da

$$J(x, y) = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 1-x^2+y^2 & -2xy \\ -2xy & 1+x^2-y^2 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

che, applicato al vettore $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ e calcolatane la norma (al quadrato) euclidea dà $J^t J = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1+x^2+y^2)^2}$, da cui si deduce che la prima forma del piano viene trasformata nella forma di matrice $\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \mathbb{I}_2$ proporzionale a quella del piano stesso. Dunque la proiezione è conforme, con rapporto di similitudine $\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$ (varia da punto a punto).

In termini di latitudine ϑ e longitudine ϕ sulla sfera, e di coordinate polari u, v sul piano ($u = x^2 + y^2$, $\tan v = y/x$), la proiezione stereografica si scrive

$$p_N \begin{pmatrix} \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \vartheta}{1 - \sin \vartheta} \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \text{con inversa} \quad q_N \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arcsin \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \\ v \end{pmatrix},$$

di cui si calcola subito lo jacobiano e la trasformazione della prima forma del piano $G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$ (con $u = \frac{\cos \vartheta}{1 - \sin \vartheta}$, naturalmente):

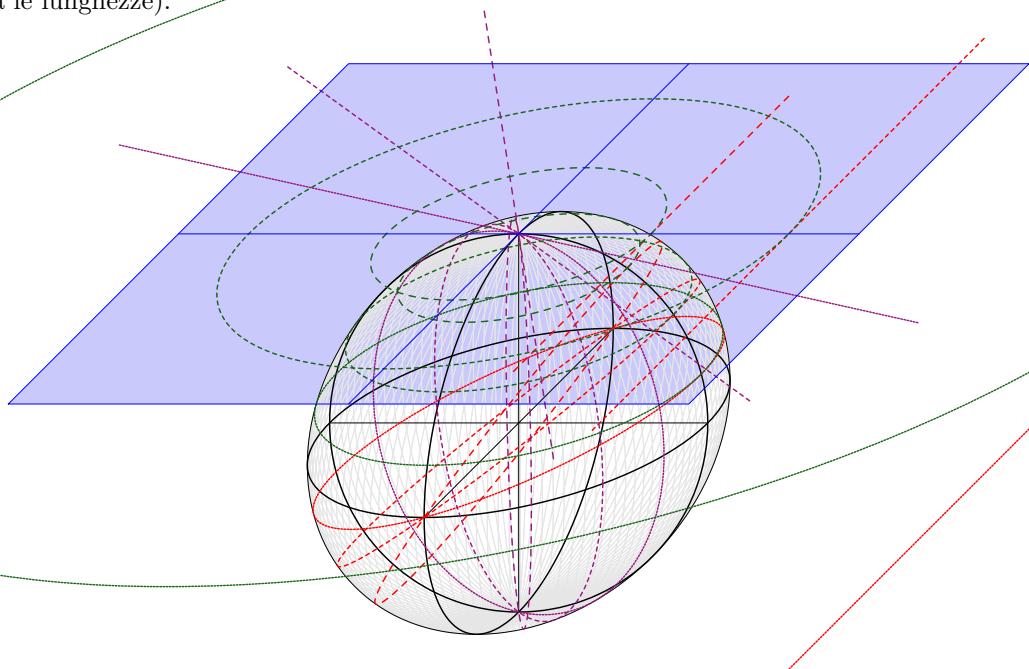
$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \sin \vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J^t G_I J = \frac{1}{(1 - \sin \vartheta)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

giustamente quella della sfera, a meno del fattore di similitudine $\frac{1}{(1 - \sin \vartheta)^2}$.

5.2.3. PROIEZIONE CENTRALE. La proiezione centrale si ottiene proiettando dal centro verso un piano tangente Π (per esempio al polo N); conviene quindi pensarla definita su una semisfera (definita dal piano per il centro parallelo a quello di proiezione):

$$p_C : \mathbb{S}_{<0}^2 \longrightarrow \Pi \quad P \mapsto (C \vee N) \cap \Pi.$$

Ha il vantaggio di proiettare le geodetiche della sfera (circoli massimi) in rette del piano (ma non rispetta le lunghezze).



In coordinate cartesiane abbiamo

$$p_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con inversa} \quad q_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In termini di latitudine ϑ e longitudine ϕ sulla sfera, e di coordinate polari u, v sul piano ($u = x^2 + y^2$, $\tan v = y/x$), la proiezione centrale si scrive

$$p_C \begin{pmatrix} \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \\ \phi \end{pmatrix}$$

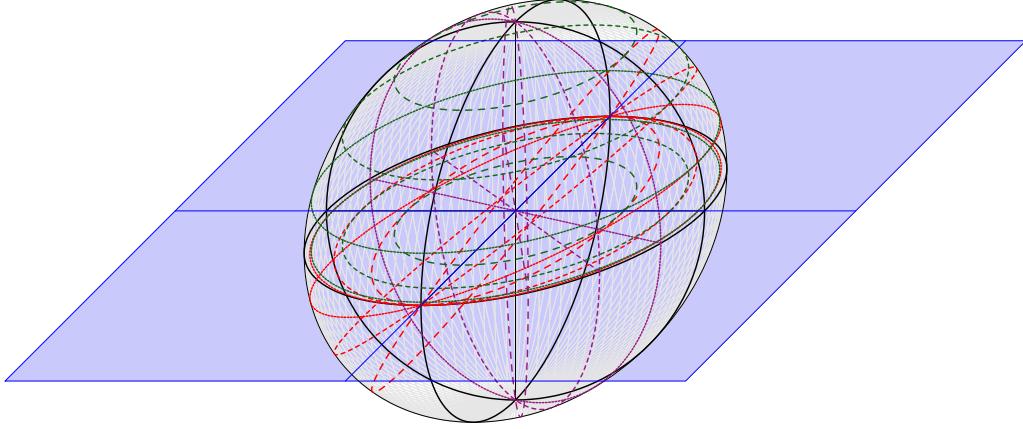
di cui si calcola subito lo jacobiano e la trasformazione della prima forma del piano $G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$ (con $u = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta}$, naturalmente):

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J^t G_I J = \frac{1}{\sin^4 \vartheta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

che non è proporzionale alla prima forma della sfera, quindi la proiezione centrale non è conforme (non rispetta gli angoli).

5.2.4. PROIEZIONE ORTOGONALE. La proiezione ortogonale si ottiene proiettando ortogonalmente verso un piano equatoriale; conviene quindi pensarla definita su una semisfera (sopra o sotto al piano di proiezione) e ha immagine un disco:

$$p_\perp : \mathbb{S}_{\geq 0}^2 \longrightarrow \Pi \quad P \mapsto (P + \Pi^\perp) \cap \Pi.$$



In coordinate cartesiane abbiamo

$$p_\perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con inversa} \quad q_\perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

In termini di latitudine ϑ e longitudine ϕ sulla sfera, e di coordinate polari u, v sul piano ($u = x^2 + y^2$, $\tan v = y/x$), la proiezione stereografica si scrive

$$p_\perp \begin{pmatrix} \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \phi \end{pmatrix}$$

di cui si calcola subito lo jacobiano e la trasformazione della prima forma del piano $G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$ (con $u = \cos \vartheta$, naturalmente):

$$J = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J^t G_I J = \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

che non è proporzionale alla prima forma della sfera, quindi la proiezione centrale non è conforme (non rispetta gli angoli). Peraltro (pensata su tutta la sfera), manda meridiani in rette per l'origine, paralleli in cerchi di centro origine, e geodetiche in ellissi bitangenti (in punti antipodali) all'equatore.

5.2.5. PROIEZIONE DI MERCATORE. Longitudine $\phi \in [-\pi, \pi]$ e latitudine $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ possono essere usate direttamente come funzioni sulla sfera verso un rettangolo del piano euclideo: i meridiani diventano segmenti verticali di lunghezza corretta π , mentre i paralleli diventano segmenti orizzontali, tutti di lunghezza uguale 2π (che non corrisponde alla lunghezza dei paralleli (che dipende dalla latitudine, ed è $2\pi \cos \vartheta$)).

Si noti che stiamo usando la coppia ϕ, ϑ , rovesciando l'ordine che si usa in altri contesti, in modo da avere la longitudine ϕ come ascisse per le carte geografiche. Ora il fattore di scala lungo i meridiani è 1, lungo i paralleli è $1/\cos \vartheta$. Il problema di Mercatore consiste nel deformare il rettangolo per ottenere una mappa dalla sfera che conserva gli angoli (dopo spieghiamo perché). Allo scopo si cerca $h(\vartheta)$ tale che la mappa $(\phi) \mapsto (h(\vartheta))$ renda conforme la mappa dalla sfera; per questo basta che (a

parte $h(0) = 0$ e $h(-\vartheta) = -h(\vartheta)$) il fattore di scala $h'(\vartheta)$ lungo i meridiani uguagli $1/\cos \vartheta$ (il fattore lungo i paralleli è 1). Risolvendo troviamo

$$h(\vartheta) = \int \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta} = \operatorname{settanh}(\sin \vartheta)$$

da cui si vede $h : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$.

Tramite composizione otteniamo allora una mappa conforme $\mathbb{S}^2 \setminus \{\pm N\} \rightarrow [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ la cui inversa si chiama parametrizzazione di Mercatore della sfera, è data da

$$[-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ h(\vartheta) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos u / \cosh v \\ \sin u / \cosh v \\ \tanh v \end{pmatrix}$$

e risulta conforme (per la struttura euclidea del piano) per costruzione.

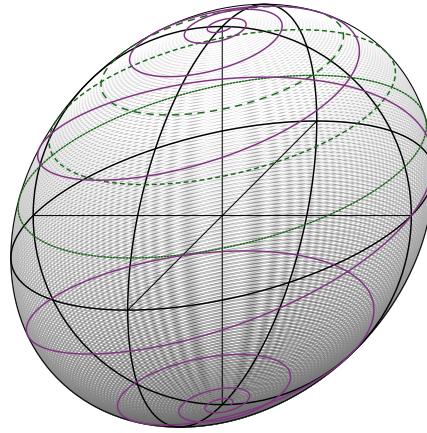
5.2.6. LOSSODROMICHE DELLA SFERA. La motivazione di Mercatore era quella di scegliere una rotta di navigazione, avendo a disposizione una bussola come quasi unico strumento (le stelle, nelle notti chiare, per rimediare): la bussola indica sempre il nord, quindi la direzione dei meridiani, e per chi naviga la strategia più comoda è mantenere una rotta con angolo costante rispetto alla bussola, cioè angolo costante rispetto ai meridiani: le curve così caratterizzate si chiamano lossodromiche della sfera.

A meno di non voler percorrere l'equatore, però, le lossodromiche non sono geodetiche, e questo porta a fare viaggi più lunghi del necessario. D'altra parte seguire una geodetica significa cambiare continuamente l'angolo di rotta rispetto alla bussola, che è difficile.

Combinando però una proiezione centrale (che vede le geodetiche come segmenti di retta) e una proiezione di Mercatore (che, per inciso, non è una proiezione in senso geometrico) si può stabilire una rotta compresa tra una geodetica e una lossodromica variando l'angolo di rotta ad intervalli fissati. Naturalmente, questa è una parentesi storica: oggi si usano i navigatori satellitari per perdersi.

Vediamo comunque la forma delle lossodromiche della sfera: sono le curve che formano un angolo fissato V con i meridiani (o con i paralleli, visto che meridiani e paralleli sono ortogonali tra loro). Conviene usare la colatitudine $\theta = \pi/2 - \vartheta$, con parametrizzazione della sfera data da $\sigma(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$. Abbiamo allora $\tan V = -\sin \theta (d\phi/d\theta)$, da cui $d\phi = -\tan(V)d\theta/\sin \theta$ e infine $\phi = -\tan(V) \log(\tan(\theta/2))$.

Usando la proiezione stereografica (viene $\varrho = 1/\tan(\theta/2) = \sin(\theta)/(1 - \cos(\theta))$) e $\phi = \phi$ l'immagine della lossodromica è una spirale logaritmica $\varrho = e^{\phi/\tan V}$ (dunque una lossodromica è una spirale sulla sfera che si arricciola attorno ai poli).



5.2.7. PROIEZIONE DI LAMBERT. La proiezione di Lambert è la proiezione della sfera su un cilindro retto tangente la sfera nella direzione ortogonale all'asse del cilindro. Ponendo la sfera nell'origine e di raggio R (equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$), possiamo usare il cilindro C di equazione $x^2 + y^2 = R^2$ e allora abbiamo la funzione

$$p_L : \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm N\} \longrightarrow C \quad p_L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx / \sqrt{x^2 + y^2} \\ Ry / \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \end{pmatrix}.$$

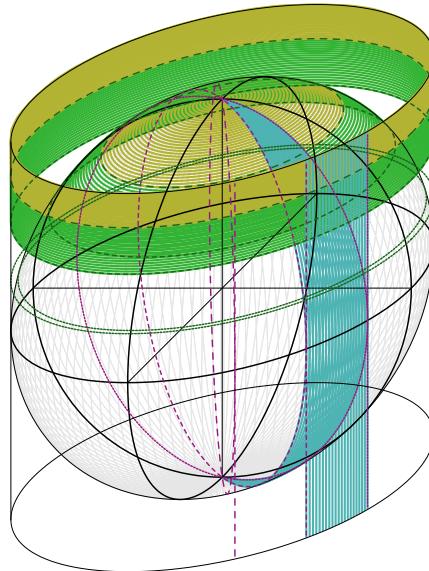
Si vede subito che la proiezione di Lambert manda paralleli in cerchi orizzontali, meridiani in segmenti verticali, non è definita sui due poli nord e sud, non è una isometria.

Tuttavia se usiamo la solita carta locale $\sigma(\vartheta, \phi)$ per la sfera, abbiamo che $p_L\sigma(\vartheta, \phi) = R \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$ è una carta locale per il cilindro (in particolare p_L , che con queste carte è l'identità, è omeomorfismo della sfera privata dei poli sul tronco aperto di cilindro) e le due forme fondamentali di sfera e cilindro rispettivamente

$$R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non sono proporzionali (né isometria, né conformità), ma hanno lo stesso determinante. In particolare vale il teorema di Archimede: la proiezione di Lambert conserva le aree.

Come applicazione si ottengono subito le aree delle calotte polari (zone sopra un fissato parallelo), delle corone tra due paralleli, e delle lunule (zone comprese tra due meridiani).



5.2.8. AREA DEI TRIANGOLI SULLA SFERA. L'area delle lunule si può anche calcolare direttamente dalla definizione:

$$\int_0^\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos(\vartheta) \, d\vartheta d\phi = 2\alpha R^2$$

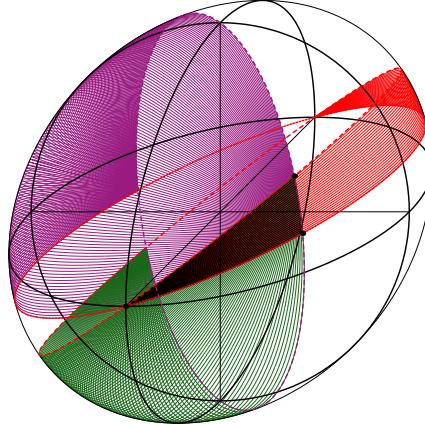
e questo permette di ricavare facilmente l'area dei triangoli (formula di Gauss-Bonnet sulla sfera): dato un triangolo geodetico di vertici A, B, C , scriviamo A', B', C' per i punti antipodali, abbiamo evidentemente tre lunule

$$\begin{aligned} S(ABC) + S(A'BC) &= 2\alpha R^2 \\ S(ABC) + S(AB'C) &= 2\beta R^2 \\ S(ABC) + S(ABC') &= 2\gamma R^2 \end{aligned}$$

e sommando otteniamo

$$\begin{aligned} 2S(ABC) &= 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2 - (S(ABC) + S(A'BC) + S(AB'C) + S(ABC')) \\ &= 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2 - (S(ABC) + S(AB'C') + S(AB'C) + S(ABC')) \\ &= 2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2 \end{aligned}$$

l'ultima somma in parentesi rappresentando chiaramente una semisfera (superficie $2\pi R^2$).



In particolare, due triangoli simili (angoli uguali) hanno la stessa superficie, quindi sono proprio congruenti. La formula $S(ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ è la versione sferica del teorema di Gauss-Bonnet; dice che la somma degli angoli interni è maggiore di π , che l'area è il difetto sferico (differenza tra la somma degli angoli e π), dà un modo per distinguere il piano dalla sfera tramite misure locali (angoli di un triangolo geodetico).

5.2.9. GEOMETRIA DEI TRIANGOLI SFERICI. Consideriamo un triangolo geodetico sulla sfera (di raggio R) di vertici A, B, C e lati (opposti) a, b, c . Abbiamo allora che

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \cos(c/R) & \|A \times B\| &= \sin(c/R) \\ A \cdot C &= \cos(b/R) & \text{e} & \|A \times C\| = \sin(b/R) \\ B \cdot C &= \cos(a/R) & \|B \times C\| &= \sin(a/R) \end{aligned}$$

mentre gli angoli del triangolo si misurano usando i vettori tangentini, ovvero gli angoli tra i piani per l'origine, ovvero tra i vettori ortogonali ai piani:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(A \times B) \cdot (A \times C)}{\|A \times B\| \|A \times C\|} = \frac{(A \times B) \times A \cdot C}{\|A \times B\| \|A \times C\|} = \frac{(A \cdot A)(B \cdot C) - (A \cdot B)(B \cdot C)}{\|A \times B\| \|A \times C\|} = \\ &= \frac{\cos(a/R) - \cos(b/R) \cos(c/R)}{\sin(b/R) \sin(c/R)} = \frac{\cos(a/R) - \cos(b/R) \cos(c/R)}{\sqrt{1 - \cos^2(b/R)} \sqrt{1 - \cos^2(c/R)}} \end{aligned}$$

e

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{1 + 2 \cos(a/R) \cos(b/R) \cos(c/R) - (\cos^2(a/R) + \cos^2(b/R) + \cos^2(c/R))}{(1 - \cos^2(b/R))(1 - \cos^2(c/R))}$$

(si noti che il numeratore è espressione simmetrica nei coseni di $a/R, b/R, c/R$).

Queste, con le analoghe formule per gli altri angoli, possono essere invertite per ottenere:

$$\cos(a/R) = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta} \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

e

$$\sin^2(a/R) = 1 - \cos^2(a/R) = \frac{1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}{(1 - \cos^2 \beta)(1 - \cos^2 \gamma)}$$

(da apprezzare la simmetria-dualità lati/angoli). Possiamo quindi dedurre:

TEOREMA DI CARNOT (O DEI COSENI) SFERICO:

$$\cos(a/R) = \cos(b/R) \cos(c/R) + \sin(b/R) \sin(c/R) \cos \alpha$$

(notare che per $R \rightarrow \infty$ usando Taylor troviamo il teorema di Carnot euclideo);

TEOREMA DI PITAGORA SFERICO:

$$\cos(a/R) = \cos(b/R) \cos(c/R) \quad \text{sse} \quad \cos \alpha = 0 \quad \text{sse il triangolo è rettangolo in } A$$

(di nuovo, per $R \rightarrow \infty$ usando Taylor troviamo il teorema di Pitagora euclideo); si provi a dedurne dei teoremi di Euclide sferici, come i teoremi di Euclide si deducono dal teorema di Pitagora in geometria euclidea;

TEOREMA DEI SENI SFERICO:

$$\frac{\sin(a/R)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(b/R)}{\sin \beta} = \frac{\sin(c/R)}{\sin \gamma}$$

(e ancora, per $R \rightarrow \infty$ usando Taylor troviamo il teorema dei seni euclideo).

Resta da notare che nel caso sferico abbiamo anche i teoremi “duali” di Carnot e Pitagora (ed Euclide?), che parlano degli angoli in funzione dei lati:

TEOREMA DUALE DI CARNOT (O DEI COSENI) SFERICO:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos(a/R)$$

(cosa diventa per $R \rightarrow \infty$?);

TEOREMA DUALE DI PITAGORA SFERICO:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma \quad \text{sse} \quad a/R = \pi/2 \quad \text{sse } a \text{ è un quarto di geodetica}$$

(di nuovo, per $R \rightarrow \infty$?); cercare anche enunciati per i duali di Euclide sferico.

La dualità delle formule lati/angoli (usiamo $R = 1$ per semplicità, e scriviamo una sola volta le formule, che si triplicano permutando tra loro lati e angoli):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin a} &= \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)}}{\sin(a) \sin(b) \sin(c)} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{\sin a}{\sin \alpha} &= \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \end{aligned}$$

si può estendere a molte formule di trigonometria sferica, di cui diamo un piccolo panorama:

- usando a cascata due volte il teorema dei coseni, otteniamo delle formule che legano tre lati e due angoli (ovvero due lati e tre angoli):

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \gamma + \sin c \cos \alpha \quad \cos \alpha \sin \beta = -\sin \alpha \cos \beta \cos c + \sin \gamma \cos a$$

- usando le formule dei coseni per un lato/angolo e la formula di bisezione $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ otteniamo le formule per semilati/semiangoli:

$$\sin^2 \frac{a}{2} = -\frac{\cos \sigma \cos(\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}$$

dove s è il semiperimetro, e σ la semisomma degli angoli,

- usando poi che $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$ si ha

$$\sin^2 a = -\frac{4 \cos \sigma \cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma} \quad \sin^2 \alpha = \frac{4 \sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

(si osservi che questo permette di scrivere la costante della formula dei seni con delle espressioni che ricordano la formula di Erone euclidea; è utile quando si parla di aree dei triangoli sferici)

- usando le formule dei semiangoli e le formule di addizione e prostaferesi, si ricavano le ANALOGIE DI DELAMBRE:

$$\frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \quad \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \quad \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}$$

- da cui seguono (ma sono equivalenti) le ANALOGIE DI NAPIER:

$$\frac{\tan \frac{a+b}{2}}{\tan \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \tan \frac{\alpha+\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{a-b}{2}}{\tan \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \tan \frac{\alpha-\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

- usando la somma di due coseni e la formula dei seni si trova:

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin c} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{1 - \cos\gamma} \quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}$$

da cui si possono ricavare nuovamente le analogie di Delambre.

• Infine, usando un po' di astuzia (trigonometrica piana) e le analogie di Delambre si possono dimostrare varie formule per l'area dei triangoli in funzione dei lati, che possono essere pensate sia come duali della formula degli angoli, sia come analoghi della formula euclidea di Erone. Abbiamo la FORMULA DI L'HUILIER:

$$\tan^2 \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{4} = \tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} \tan \frac{s-c}{2}$$

e le FORMULE DI CAGNOLI:

$$\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{2} = \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} = \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}$$

e

$$\cos \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{2} = \frac{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \gamma}{\cos \frac{c}{2}} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}$$

(per la prima conviene sviluppare il lato destro con le formule di prostaferesi-Werner, per le altre sviluppare il lato sinistro con le formule di sottrazione).

5.2.10. TRIANGOLI RETTANGOLI, BIRETTANGOLI E TRIRETTANGOLI (E DUALI). Nel caso speciale dei triangoli rettangoli abbiamo delle formule semplificate:

$$\begin{array}{llll} \cos\alpha = 0 & \sin\alpha = 1 & \cos a = \cos b \cos c & \sin a = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} \\ \cos\beta = \frac{\tan c}{\tan a} = \cos b \frac{\sin c}{\sin a} & \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a} & \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} & \sin b = \frac{\tan c}{\tan\gamma} \\ \cos\gamma = \frac{\tan b}{\tan a} = \cos c \frac{\sin b}{\sin a} & \sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin a} & \cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta} & \sin c = \frac{\tan b}{\tan\beta} \end{array}$$

(anche le formule per l'area ammettono una semplificazione: usando le formule di Cagnoli si trova che la tangente della metà dell'area è il prodotto delle tangenti di metà dei cateti) come pure nel caso duale di triangoli rettilati cioè con un lato di lunghezza un quarto di una retta:

$$\begin{array}{llll} \cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma & \sin\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c} & \cos a = 0 & \sin a = 1 \\ \cos\beta = \frac{\cos b}{\sin c} & \sin\beta = \frac{\tan\gamma}{\tan c} & \cos b = -\frac{\tan\gamma}{\tan\alpha} = \cos\beta \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} & \sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\ \cos\gamma = \frac{\cos c}{\sin b} & \sin\gamma = \frac{\tan\beta}{\tan b} & \cos c = -\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \cos\gamma \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} & \sin c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \end{array}$$

Le nozioni di triangoli birettangoli (due angoli retti) e birettillati (due lati retti) sono equivalenti, l'unica formula non banale resta $\cos\gamma = \cos c$ (con $\sin\gamma = \sin c$). Anche le nozioni di triangoli trirettangoli e trirettillati sono equivalenti, e in questo caso la matrice di lati ed angoli è identica.

Infine, consideriamo il caso di un triangolo con un angolo retto e un lato retto: se i due sono opposti abbiamo un triangolo trirettangolo, se sono adiacenti abbiamo un triangolo birettangolo.

5.2.11. TRIANGOLI ISOSCELI. Per esercizio si studino i triangoli isosceli, cioè con due angoli (o lati) uguali: due triangoli isosceli con lo stesso (terzo) angolo al vertice come si confrontano? In particolare come variano gli angoli e i lati uguali al variare del terzo lato (e della "altezza" del triangolo, conviene dividerlo in due retti)?

5.2.12. CIRCOLI SULLA SFERA. Per studiare i circoli, basta studiare quelli centrati nel polo nord, ovvero basta studiare i paralleli.

La loro lunghezza dipende solo dalla colatitudine, ovvero dal loro stesso raggio: sulla sfera di raggio R , un circolo di raggio ϱ ha colatitudine ϱ/R , quindi è un circolo euclideo di raggio euclideo $\sin(\varrho/R)$, e dunque lunghezza $2\pi \sin(\varrho/R)$.

Per calcolare l'area si può ricorrere alla definizione e calcolare un facile integrale, oppure utilizzare la proiezione di Lambert: essendo proiettato un rettangolo di base 2π e altezza $1 - \cos(\varrho/R)$ l'area in questione è $2\pi(1 - \cos(\varrho/R))$.

Ora, usando il teorema di Gauss-Bonnet sulla circonferenza, otteniamo che la curvatura geodetica della circonferenza soddisfa a $k_g 2\pi \sin(\varrho/R) + 2\pi(1 - \cos(\varrho/R)) = 2\pi$, da cui $k_g = \frac{\cos(\varrho/R)}{\sin(\varrho/R)}$.

5.2.13. INVERSIONI SFERICHE. Esempio classico che non saprei dove altro inserire. Scelto un punto C in \mathbb{R}^n e uno scalare non nullo $\varrho \in \mathbb{R}$, definiamo l'inversione di centro C e potenza ϱ come la mappa $I = I_{C,\varrho}$ seguente:

$$I = I_{C,\varrho} : \mathbb{R}^n \setminus \{C\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{C\} \quad I(P) = C + \varrho \frac{P - C}{\|P - C\|^2}$$

(eventualmente estesa alla compattificazione di Alexandroff scambiando C con ∞).

Si vede subito che è una applicazione di quadrato identico, e che non ha punti uniti per $\varrho < 0$. Supponiamo $\varrho > 0$:

- (1) punti uniti sono quelli della sfera centrata in C e di raggio $\sqrt{\varrho}$.
- (2) Sottospazi affini passanti per C sono stabili (globalmente) per I (e l'applicazione indotta è inversione con stesso centro e potenza).
- (3) Immagini di piani non passanti per C sono sfere contenenti C , e viceversa.
- (4) Immagini di sfere non contenenti C sono sfere non contenenti C .
- (5) Il differenziale di I è la mappa lineare composizione della simmetria ortogonale al vettore $P - C$ e della omotetia di rapporto $\varrho/\|P - C\|^2$, come si vede da:

$$\begin{aligned} I(P + v) &= C + \varrho \frac{(P + v) - C}{\|(P + v) - C\|^2} \\ &= C + \varrho \frac{(P - C) + v}{((P - C) + v) \cdot ((P - C) + v)} \\ &= C + \varrho \frac{(P - C) + v}{\|P - C\|^2 + 2v \cdot (P - C) + \|v\|^2} \\ &= C + \varrho \frac{(P - C) + v}{\|P - C\|^2} \frac{\|P - C\|^2}{\|P - C\|^2 + 2v \cdot (P - C) + \|v\|^2} \\ &= C + \varrho \frac{(P - C) + v}{\|P - C\|^2} \left(1 - \frac{2v \cdot (P - C)}{\|P - C\|^2} + \dots\right) \\ &= C + \varrho \frac{(P - C)}{\|P - C\|^2} - \varrho \frac{2v \cdot (P - C)}{\|P - C\|^4} (P - C) + \varrho \frac{v}{\|P - C\|^2} + \dots \\ &= I(P) + \frac{\varrho}{\|P - C\|^2} \left(v - \frac{2v \cdot (P - C)}{\|P - C\|^2} (P - C)\right) + \dots \end{aligned}$$

- (6) Le proiezioni stereografiche di centro C sono restrizioni di opportune inversioni di centro C . In tali proiezioni sfere (risp. non) contenenti C vengono mandate in sfere (risp. sottospazi affini).
- (7) Conviene esplicitare i casi $n = 2$ (capire le relazioni con Moebius), $n = 3$ (inversioni sulle sfere, e relazioni con le proiezioni stereografiche da sfere a piani).

5.2.14. ALTRE PROIEZIONI: CILINDRICHE CENTRALI E CONICHE CENTRALI. Allo scopo di avere rappresentazioni piane o "sviluppabili sul piano" della sfera si possono usare molte altre proiezioni, tra cui le proiezioni dal centro della sfera verso un cilindro tangente e ortogonale ad un equatore (da non confondere con Mercatore), o verso un cono tangente alla sfera da un punto esterno (cappello cinese). Di solito di tratta di trasformazioni che non conservano nulla della prima forma (provare).

5.3. ELLISOIDI. Gli ellisoidi sono più complicati:

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cos \phi \cos \vartheta \\ b \cos \phi \sin \vartheta \\ \pm c \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{equazione cartesiana } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(studiarne le forme fondamentali, le curvature, i punti, ecc. eventualmente nei casi di rotazione $a = b$).

5.4. IPERBOLOIDI. Gli iperboloidi ellittici (a due falde) ammettono parametrizzazioni

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \sinh \phi \cos \vartheta \\ b \sinh \phi \sin \vartheta \\ \pm c \cosh \phi \end{pmatrix} \quad \text{equazione cartesiana } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

e quelli iperbolici (una falda, rigati)

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cosh \phi \cos \vartheta \\ b \cosh \phi \sin \vartheta \\ \pm c \sinh \phi \end{pmatrix} \quad \text{equazione cartesiana } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(studiarne le forme fondamentali, le curvature, i punti, ecc. eventualmente nei casi di rotazione $a = b$ o anche $a = b = c = 1$).

5.5. PARABOLOIDI. I paraboloidi ellittici ammettono parametrizzazioni

$$\begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} au \cos \vartheta \\ bu \sin \vartheta \\ \pm u^2 \end{pmatrix} \quad \text{equazione cartesiana } z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

e quelli iperbolici (a sella, rigati)

$$\begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} au \cosh \vartheta \\ bu \cosh \vartheta \\ \pm u^2 \end{pmatrix} \quad \text{equazione cartesiana } z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

(studiarne le forme fondamentali, le curvature, i punti, ecc. eventualmente nei casi “di rotazione” $a = b = 1$). Si noti che nel caso dei paraboloidi iperbolici possiamo anche trovare una parametrizzazione quadratica polinomiale: $\begin{pmatrix} a(u+v) \\ b(u-v) \\ 4uv \end{pmatrix}$ legata alle schiere di rette; si può fare la stessa cosa per l’iperboloide iperbolico?

5.6. TORO. Per il toro immerso in \mathbb{R}^3 conviene usare la parametrizzazione $\sigma(\vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta(R+r \cos \phi) \\ \sin \vartheta(R+r \cos \phi) \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$ con le derivate

$$\sigma_{\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta(R+r \cos \phi) \\ \cos \vartheta(R+r \cos \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{\phi} = \begin{pmatrix} -r \cos \vartheta \sin \phi \\ -r \sin \vartheta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix} \quad \sigma_{\vartheta} \times \sigma_{\phi} = (R+r \cos \phi) \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene la prima forma fondamentale

$$G_I = \begin{pmatrix} (R+r \cos \phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Dalle derivate successive

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos \vartheta(R+r \cos \phi) \\ -\sin \vartheta(R+r \cos \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{\vartheta\phi} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \sin \phi \\ -r \cos \vartheta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{\phi\phi} = \begin{pmatrix} -r \cos \vartheta \cos \phi \\ -r \sin \vartheta \cos \phi \\ -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

usando il versore normale si ottiene la matrice della seconda forma

$$G_{II} = \begin{pmatrix} -(R+r \cos \phi) \cos \phi & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

da cui si vede che le due curvature principali sono $-1/r$ e $-\frac{\cos \phi}{R+r \cos \phi}$, quindi $K = \frac{\cos \phi}{r(R+r \cos \phi)}$, $H = -\frac{R+2r \cos \phi}{r(R+r \cos \phi)}$.

Per i simboli di Christoffel si trova quasi subito

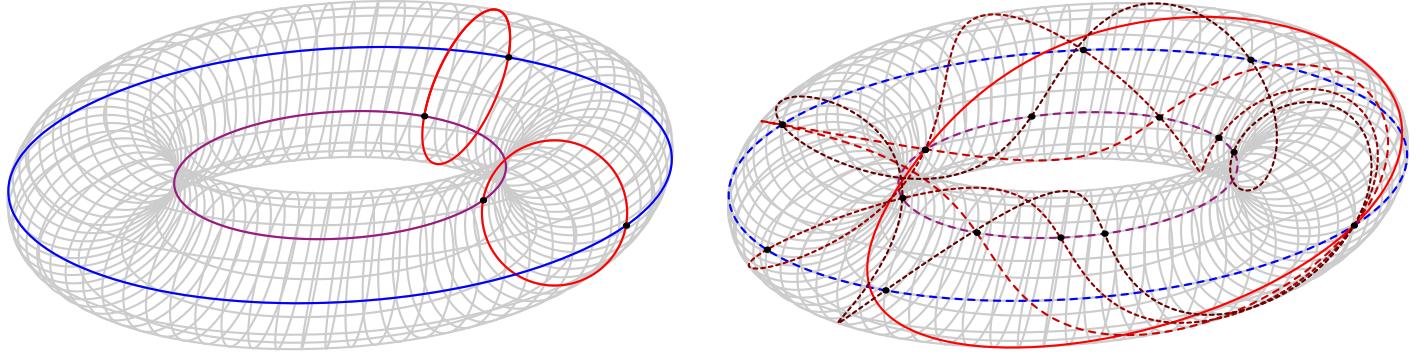
$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -r \sin \phi / (R+r \cos \phi) \\ -r \sin \phi / (R+r \cos \phi) & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} r \sin \phi (R+r \cos \phi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le geodetiche soddisfano al sistema

$$\begin{cases} \vartheta'' - 2 \frac{r \sin \phi}{R+r \cos \phi} \vartheta' \phi' = 0 \\ \phi'' + r \sin \phi (R+r \cos \phi) (\vartheta')^2 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} ((R+r \cos \phi)^2 \vartheta')' = 0 \\ (r^2 \phi')' = -r(R+r \cos \phi) \sin(\phi) \vartheta'^2 \end{cases}$$

come al solito d'aspetto difficile. Tuttavia per ϑ costante si riconoscono le sezioni normali piane dei cerchi meridiani. Per ϕ costante invece abbiamo geodetiche solo in due casi (gli equatori interno ed esterno del toro, di nuovo sezioni normali piane). Usando i ragionamenti del caso di Clairaut (questo toro è una superficie di rotazione), possiamo classificare le geodetiche del toro in cinque gruppi: secondo la costante $(R + r \cos \phi)^2 \vartheta' = c$ abbiamo

- (1) $c = 0$, si tratta dei meridiani del toro;
 - (2) $0 < |c| < R - r$, si tratta di geodetiche incrociano entrambi gli equatori;
 - (3) $|c| = R - r$, si tratta dell'equatore interno, e di geodetiche che gli sono asintotiche;
 - (4) $R - r < |c| < R + r$, si tratta di "geodetiche limitate" che incrociano solo l'equatore esterno;
 - (5) $|c| = R + r$, si tratta dell'equatore esterno;
- (nei casi 2 e 4 vi sono sia curve chiuse, sia curve dense).



Per studiare le isometrie del toro immerso, cerchiamo le funzioni $\begin{pmatrix} \tilde{\vartheta}(\vartheta, \phi) \\ \tilde{\phi}(\vartheta, \phi) \end{pmatrix}$ che rispettano la prima forma; in particolare dalla curvatura troviamo $\tilde{\phi} = \pm\phi$ (a meno di multipli interi di 2π che non influiscono sulla paratereizzazione), e sostituendo nella uguaglianza delle prime forme

$$(R + r \cos \phi)^2 d\vartheta^2 + r^2 d\phi^2 = (R + r \cos \tilde{\phi})^2 d\tilde{\vartheta}^2 + r^2 d\tilde{\phi}^2$$

troviamo $d\tilde{\phi} = \pm d\phi$, e quindi $\begin{pmatrix} \tilde{\vartheta} \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \vartheta + c \\ \pm \phi \end{pmatrix}$.

5.6.1. IL TORO IMMERSO IN \mathbb{R}^4 (TORO PIATTO). Vedendo il toro come prodotto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ viene in modo naturale immerso in \mathbb{R}^4 con la parametrizzazione $\begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$. Si vede facilmente che la prima forma fondamentale ha matrice identica, e quindi si comporta come un piano. La complicazione del toro immerso in \mathbb{R}^3 va quindi attribuita al fatto di aver deformato l'oggetto per immergerlo in un ambiente piccolo...

5.7. CILINDRI. Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva, e $a \in \mathbb{R}^3$ un versore, diciamo cilindro di base γ e direzione a la superficie descritta dalle rette per i punti di γ di direzione a ; è parametrizzata da $\sigma(u, v) = \gamma(u) + va$. La parametrizzazione è iniettiva sse non esistono secanti della curva base parallele alla direzione dell'asse.

Possiamo sempre supporre che γ sia una curva piana, parametrizzata con l'arco, e che a sia ortogonale al piano di giacitura della curva. Allora abbiamo:

$$\sigma_u = \gamma'(u) \quad \sigma_v = a \quad \sigma_u \times \sigma_v = \gamma'(u) \times a$$

da cui la prima forma fondamentale di matrice $G_I = \mathbb{I}_2$ (isometrico al piano dei parametri). Le derivate seconde danno:

$$\sigma_{uu} = \gamma''(u) \quad \sigma_{uv} = 0 \quad \sigma_{vv} = 0$$

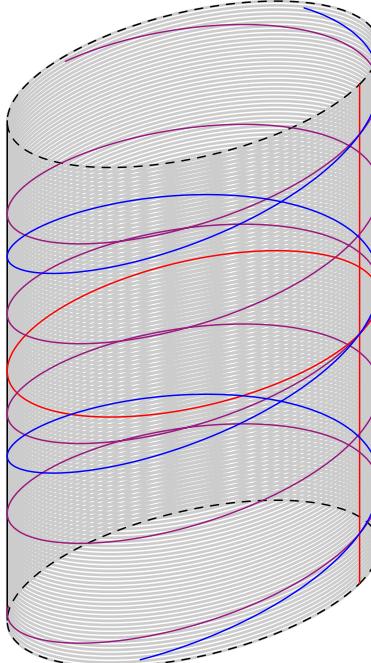
da cui la seconda forma fondamentale

$$G_{II} = \begin{pmatrix} \gamma'' \cdot (\gamma' \times a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma'' \times \gamma') \cdot a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si vedono le curvature principali 0 e $\gamma'' \cdot (\gamma' \times a) = -\kappa$, $K = 0$.

I simboli di Christoffel sono tutti nulli, quindi le equazioni delle geodetiche sono le banali $u'' = 0 = v''$, e si riconoscono le rette parallele all'asse (per u costante), le traslate della base (per v costante),

e delle eliche generalizzate che si arrampicano sul cilindro con passo fisso (immagini delle rette sul piano dei parametri).



Isometrie dei cilindri?

5.8. CONI. Dato un punto P e una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, diciamo cono di vertice P e base γ la superficie data dalla unione delle rette per P e passanti per punti di γ . È parametrizzata da $\sigma(u, v) = P + v(\gamma(u) - P) = (1 - v)P + v\gamma(u)$, e la parametrizzazione è iniettiva sse ogni retta per il vertice contiene al più un punto della base. Possiamo sempre supporre che P sia l'origine del riferimento, e che γ sia una curva sferica ($\|\gamma\| = 1$) con velocità unitaria (con invarianti $J = \gamma \times \gamma' \cdot \gamma''$). Allora abbiamo $\sigma(u, v) = v\gamma(u)$,

$$\sigma_u = v\gamma'(u) \quad \sigma_v = \gamma(u) \quad \sigma_u \times \sigma_v = v(\gamma'(u) \times \gamma(u))$$

da cui la prima forma

$$G_I = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalle derivate seconde

$$\sigma_{uu} = v\gamma''(u) \quad \sigma_{uv} = \gamma'(u) \quad \sigma_{vv} = 0$$

e si ricavano la seconda forma fondamentale

$$G_{II} = \begin{pmatrix} v\gamma'' \cdot (\gamma' \times \gamma) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vJ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e le curvature principali 0 e $\gamma'' \cdot (\gamma' \times \gamma)/v$, $K = 0$.

I simboli di Christoffel sono

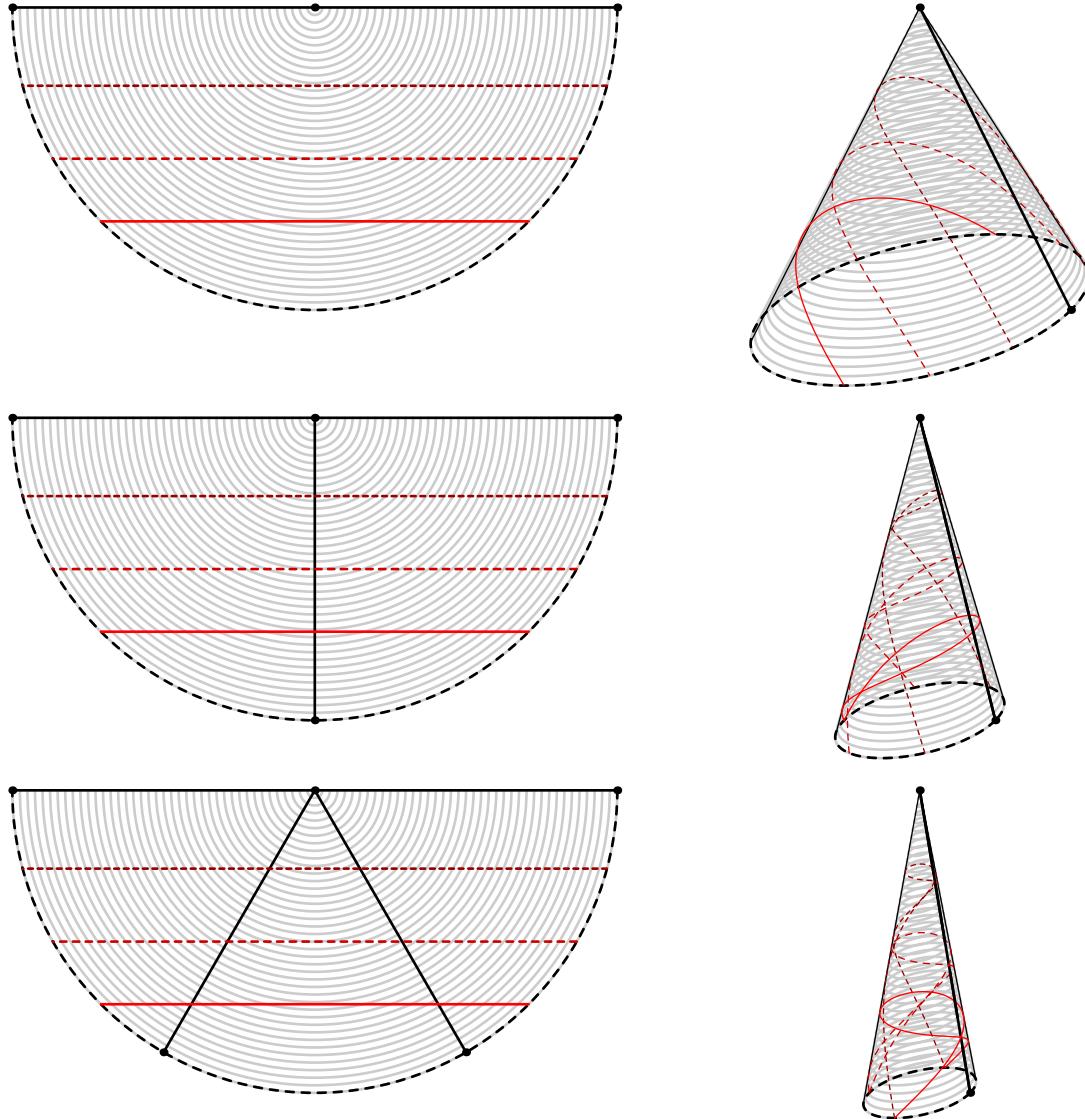
$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/v \\ 1/v & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e le equazioni delle geodetiche sono

$$\begin{cases} u'' + 2u'v'/v = 0 \\ v'' - v(u')^2 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} (v^2u')' = 0 \\ v'' = v(u')^2 \end{cases}$$

e l'unica cosa chiaramente visibile sono le rette per u costante. Peraltro si tratta di una situazione di Clairaut, quindi può essere discussa completamente. In alternativa, si tratta di una superficie isometrica a una parte di piano (usare coordinate polari!) e quindi le geodetiche devono corrispondere alle rette del piano. In particolare nel caso di coni quadratici si osservi che sotto certe condizioni

(angolo al vertice minore di $\pi/3$) vi sono geodetiche che si autointersecano, cioè che ripassano sugli stessi punti! Le figure seguenti danno un'idea (per esempio, fare esperimenti con fogli trasparenti):



Isometrie dei coni?

5.9. SUPERFICIE DI ROTAZIONE. Le superficie di rotazione si ottengono da una curva piana γ detta profilo, che ruota attorno ad un asse contenuto nel piano. Si chiamano paralleli (o longitudini) i cerchi descritti in rotazione dai punti del profilo, di dicono meridiani le immagini ruotate del profilo. Per scrivere una parametrizzazione, supponiamo che l'asse sia quello con direttore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e che il profilo

sia $\gamma(u) = \begin{pmatrix} h(u) \\ k(u) \end{pmatrix}$. Allora $\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} h(u) \cos v \\ h(u) \sin v \\ k(u) \end{pmatrix}$. Si osservi che se il profilo ha equazione $F(x, z) = 0$,

allora la superficie di rotazione ha equazione $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, come si vede facilmente dalla parametrizzazione.

Derivando la parametrizzazione

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} h'(u) \cos v \\ h'(u) \sin v \\ k'(u) \end{pmatrix} \quad \sigma_v = \begin{pmatrix} -h(u) \sin v \\ h(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_u \times \sigma_v = h(u) \begin{pmatrix} -k'(u) \cos v \\ -k'(u) \sin v \\ h'(u) \end{pmatrix}$$

otteniamo la prima forma fondamentale

$$G_I = \begin{pmatrix} h'^2 + k'^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}.$$

Passando alle derivate seconde otteniamo

$$\sigma_{uu} = \begin{pmatrix} h''(u) \cos v \\ h''(u) \sin v \\ k''(u) \end{pmatrix} \quad \sigma_{uv} = \begin{pmatrix} -h'(u) \sin v \\ h'(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{vv} = \begin{pmatrix} -h(u) \cos v \\ -h(u) \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui la seconda forma

$$G_{\mathbb{I}} = \frac{1}{\sqrt{h'^2 + k'^2}} \begin{pmatrix} h'k'' - h''k' & 0 \\ 0 & hk' \end{pmatrix}.$$

Otteniamo la curvatura gaussiana e quelle principali

$$K = \frac{k'(h'k'' - h''k')}{h(h'^2 + k'^2)^2} \quad k_1 = \frac{h'k'' - h''k'}{(h'^2 + k'^2)^{3/2}} \quad k_2 = \frac{k'}{h(h'^2 + k'^2)^{1/2}}.$$

Il tutto si può un po' semplificare se supponiamo il profilo unitario: $h'^2 + k'^2 = 1$, donde $h'h'' + k'k'' = 0$, e allora abbiamo

$$G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix} \quad G_{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} h'k'' - h''k' & 0 \\ 0 & hk' \end{pmatrix}$$

e

$$K = \frac{k'k''}{hh'} = -\frac{h''}{h} \quad H = \frac{1}{2} \frac{hk'' + h'k'}{hh'} = \frac{(hk')'}{(h^2)'} \quad k_1 = \frac{k''}{h'} = -\frac{h''}{k'} \quad k_2 = \frac{k'}{h}.$$

Le equazioni delle geodetiche possono essere scritte

$$\begin{cases} u'' = hh_u(v')^2 \\ (h^2v')' = 0 \end{cases}$$

e si tratta di un caso di Clairaut... Abbiamo $h^2v' = c$ costante (quindi v' ha sempre lo stesso segno: le geodetiche non cambiano verso di rotazione), sostituendo e integrando la prima equazione otteniamo $(u')^2 + h^2(v')^2 = d^2$ (altra costante, che possiamo supporre 1 essendo la velocità). Quindi se il raggio h del profilo aumenta abbiamo che v' diminuisce (angoli maggiori con i paralleli) e u' aumenta (percorrenza più veloce), al contrario se il raggio h diminuisce; le geodetiche quindi si muovono più vicine ai paralleli quanto più piccolo il raggio della regione che attraversano, e sono più vicine ai meridiani nelle regioni con raggio grande. Unendo questo al vincolo sul raggio $h \geq c$, possiamo capire l'andamento vicino alle zone proibite: al parallelo $h = c$ che non possono attraversare si avvicinano con angolo che tende a zero; quindi se il parallelo limite è una geodetica non lo possono toccare (altrimenti in quel punto ci sarebbero due geodetiche con la stessa direzione) e gli si avvicinano asintoticamente (capita nel toro, per esempio); se il parallelo limite non è una geodetica allora lo toccano in un punto e rimbalzano indietro (questo fenomeno si è già visto nei coni, oltre che nel toro).

Isometrie delle superficie di rotazione? Ce ne sono di ovvie (dalla rotazione), ma possono essercene altre a seconda del profilo che si fa ruotare.

5.10. PSEUDOSFERA DI BELTRAMI. La pseudosfera di Beltrami nasce dalla ricerca di una superficie di rotazione con $K = -1$ costante. Per ottenere la condizione con $h'^2 + k'^2 = 1$ deve essere $h'' = h$, da cui $h = ae^u + be^{-u}$ per $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarie. Usando $h = e^u$, risulta $k' = \sqrt{1 - e^{2u}}$ (dev'essere $u < 0$), e il profilo che ne risulta è la trattrice $\gamma(u) = \left(\begin{array}{c} e^u \\ \int \frac{e^u}{\sqrt{1 - e^{2u}}} du \end{array} \right)$. Possiamo scrivere le forme

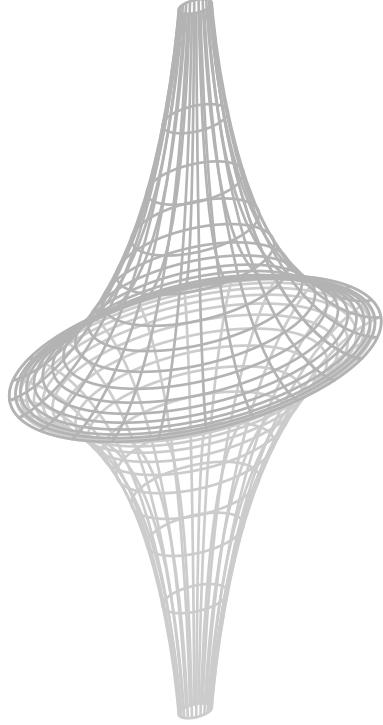
$$G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{pmatrix} \quad G_{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} -e^u/\sqrt{1 - e^{2u}} & 0 \\ 0 & e^u\sqrt{1 - e^{2u}} \end{pmatrix}$$

e le curvature

$$K = -1 \quad k_1 = -e^u/\sqrt{1 - e^{2u}} \quad k_2 = e^{-u}\sqrt{1 - e^{2u}}.$$

Si osservi che la curvatura è costante -1 , da cui il nome di pseudosfera; tuttavia si tratta di una superficie non compatta, ed avente punti non regolari (quelli dell'equatore). In effetti la pseudosfera di Beltrami ha grande importanza storica perché fu il primo modello euclideo (cioè immerso in uno spazio euclideo) di geometria iperbolica piana; esso però non può, a causa dell'immersione, rappresentare tutto un piano iperbolico, ma solo una sua parte. Pare che non si possa inserire una immagine

della pseudosfera:



Geodetiche della pseudosfera?

Isometrie della pseudosfera? Qui la curvatura non dà condizioni, ma ci sono altre isometrie facili, oltre a quelle dovute alla rotazione: $(\frac{\tilde{u}}{\vartheta}) = (\pm e^{-c}\vartheta + d)$.

5.11. Quali superficie di rotazione hanno K costante?

5.12. RIGATE. Si dicono rigate le superficie che sono unione di rette (cilindri e coni ne sono esempi; si tratta delle superficie descritte da bracci di meccanismi in movimento; le rigate sono sempre sviluppabili?). Per dare una rigata basta disporre di una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ detta direttrice e di un'altra curva $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ detta generatrice, (che va intesa come un campo di vettori lungo la direttrice). Allora la superficie in questione si scrive $\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$. Risulta una immersione se $\gamma' + v\delta'$ e δ sono linearmente indipendenti (per esempio se γ' e δ sono linearmente indipendenti, per esempio se γ non tanga le rette della rigata).

Le derivate prime

$$\sigma_u = \gamma' + v\delta' \quad \sigma_v = \delta \quad \sigma_u \times \sigma_v = (\gamma' + v\delta') \times \delta$$

danno la prima forma

$$G_I = \begin{pmatrix} \|\gamma' + v\delta'\|^2 & (\gamma' + v\delta') \cdot \delta \\ (\gamma' + v\delta') \cdot \delta & \|\delta\|^2 \end{pmatrix}$$

di determinante $\|(\gamma' + v\delta') \times \delta\|^2$. Dalle derivate seconde

$$\sigma_{uu} = \gamma'' + v\delta'' \quad \sigma_{uv} = \delta' \quad \sigma_{vv} = 0$$

e si ricavano la seconda forma fondamentale

$$G_{\mathbb{II}} = \frac{1}{\|(\gamma' + v\delta') \times \delta\|} \begin{pmatrix} (\gamma'' + v\delta'') \cdot (\gamma' + v\delta') \times \delta & \delta' \cdot \gamma' \times \delta \\ \delta' \cdot \gamma' \times \delta & 0 \end{pmatrix}$$

e le curvature

$$K = -\frac{(\delta' \cdot \gamma' \times \delta)^2}{\|(\gamma' + v\delta') \times \delta\|^4}$$

Per semplificare le espressioni possiamo supporre δ sferica e unitaria $\|\delta\| = \|\delta'\| = 1$ (quindi $\delta \cdot \delta' = 0 = \delta' \cdot \delta''$), e che $\gamma' \cdot \delta' = 0$. Per realizzare l'ultima condizione, si osserva che è possibile, senza cambiare la superficie, sostituire γ con qualsiasi $\bar{\gamma}$ (contenuta nella superficie rigata) che intersechi

ogni retta della rigata in un solo punto; possiamo allora cercare $\bar{\gamma} = \gamma + \nu\delta$ in modo che una delle due condizioni (equivalenti tra loro) sia realizzata:

- (a) $\bar{\gamma}$ unica curva congiungente punti di minima distanza di rette vicine della rigata;
- (b) nei punti di $\bar{\gamma}$ il piano tangente alla rigata sia ortogonale a δ' .

Vedere che le due condizioni sono equivalenti richiede qualche conto. Dalla seconda condizione possiamo subito trovare delle espressioni esplicite: il piano tangente è generato da $\bar{\gamma}' = \gamma' + \nu'\delta + \nu\delta'$ e δ , e l'ortogonalità con δ' impone $\nu = -\frac{\gamma' \cdot \delta'}{\delta' \cdot \delta'}$, e quindi abbiamo

$$\gamma + v\delta = \gamma - \frac{\gamma' \cdot \delta'}{\delta' \cdot \delta'} \delta + \left(\frac{\gamma' \cdot \delta'}{\delta' \cdot \delta'} + v \right) \delta = \bar{\gamma} + \bar{v}\delta$$

con la condizione voluta. Si noti che la curva $\bar{\gamma}$ è intrinseca, definita da condizioni geometriche, quindi dipende dalla superficie e non dalla parametrizzazione iniziale; si chiama linea di vita della superficie. Abbiamo allora che la superficie è determinata da tre parametri: $J = \delta \times \delta' \times \delta''$ (invariante che determina la curva sferica unitaria δ), $F = \gamma' \cdot \delta$ (determina l'angolo tra la curva γ e la direzione δ della retta), $p = \gamma' \times \delta \cdot \delta' = \gamma' \cdot \delta \times \delta'$ (determina l'angolo tra $\delta \times \delta'$ e γ). Usando $\delta, \delta', \delta \times \delta'$ come base ortonormale (mobile) abbiamo che

$$\gamma' = (\delta \cdot \gamma')\delta + (\delta' \cdot \gamma')\delta' + (\delta \times \delta' \cdot \gamma')\delta \times \delta' = F\delta + p\delta \times \delta'$$

e poi $\gamma = \int \gamma' ds$. In termini di questa normalizzazione abbiamo che

$$G_I = \begin{pmatrix} F^2 + p^2 + v^2 & F \\ F & 1 \end{pmatrix} \quad G_{\mathbb{II}} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + v^2}} \begin{pmatrix} p(F - pJ) - v(p' + vJ) & p \\ p & 0 \end{pmatrix} \quad K = -\frac{p^2}{(p^2 + v^2)^2}.$$

Geodetiche delle rigate? Ovviamente le rette contenute sulla superficie sono sue geodetiche.

5.13. SVILUPPABILI DELLE TANGENTI. In generale si dicono sviluppabili le superficie che sono localmente isometriche ad aperti del piano. Un caso particolare sono le sviluppabili delle tangenti di una fissata curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si ha $\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\gamma'(u)$, e usando il riferimento di Frenet $t = \gamma'$, $\gamma'' = \kappa n$, $\gamma'' \times \gamma' = \kappa n \times t = -\kappa b$, abbiamo

$$\sigma_u = \gamma' + v\gamma'' = t + \kappa n \quad \sigma_v = \gamma' = t \quad \sigma_u \times \sigma_v = (\gamma' + v\gamma'') \times \gamma' = v\gamma'' \times \gamma' = -v\kappa b$$

danno la prima forma

$$G_I = \begin{pmatrix} \|\gamma' + v\gamma''\|^2 & (\gamma' + v\gamma'') \cdot \gamma' \\ (\gamma' + v\gamma'') \cdot \gamma' & \|\gamma'\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \kappa^2 v^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

di determinante $\kappa^2 v^2$. Siccome esistono curve piane con questa curvatura κ , quindi con sviluppabile delle tangenti avente la stessa prima forma fondamentale, e una curva piana ha sviluppabile delle tangenti piana, ne ricaviamo che le sviluppabili delle tangenti sono sviluppabili, appunto. Passando alle derivate seconde abbiamo

$$\sigma_{uu} = \gamma'' + v\gamma''' = (\kappa + v\kappa')n - v\kappa^2 t + v\kappa\tau b \quad \sigma_{uv} = \gamma'' = \kappa n \quad \sigma_{vv} = 0$$

e si ricavano la seconda forma fondamentale

$$G_{\mathbb{II}} = \begin{pmatrix} v\kappa\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

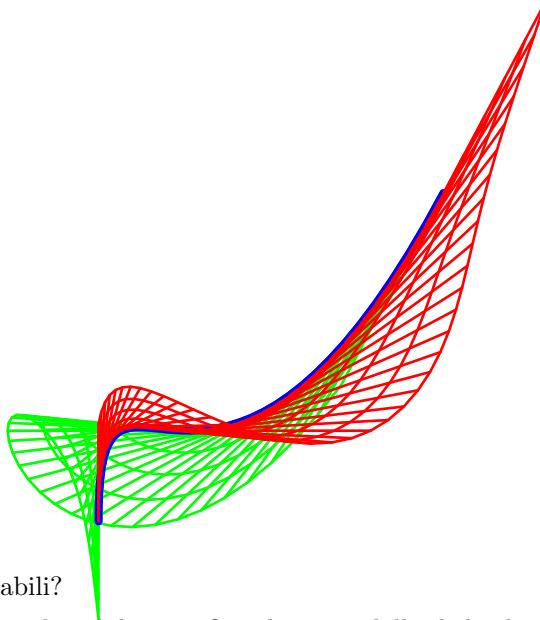
e le curvature

$$K = 0 \quad k_1 = 0 \quad k_2 = \frac{\tau}{v\kappa}$$

(le curve con v costante danno la direzione di curvatura nulla, visto che n non dipende da v ; l'altra direzione principale è n).

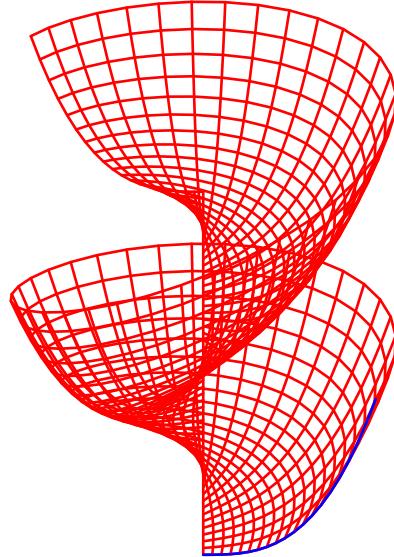
Si può dimostrare che una superficie è piatta (la curvatura gaussiana è identicamente nulla) sse

si tratta di regioni di piani, cilindri, coni o sviluppabili delle tangenti.



Geodetiche delle sviluppabili?

5.14. ELICOIDI. Si dicono elicoidi le superficie descritte dalle eliche dei punti di una curva fissata. Data la curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ che supponiamo piana $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$ e una retta a (asse dell'elica) che supponiamo sia l'asse z , un elicoide circolare di passo p si scrive come $\sigma(t, u) = \begin{pmatrix} x(t) \cos(u) \\ x(t) \sin(u) \\ z(t) + pu \end{pmatrix}$. Si può anche supporre γ unitaria.



Si noti che nel caso particolare $p = 0$ si ha una superficie di rotazione, nel caso $p \neq 0$ e $z' = 0$ ($z(t)$ costante) si ottiene l'elicoide semplice di una retta. Con le derivate prime:

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} x'(t) \cos(u) \\ x'(t) \sin(u) \\ z'(t) \end{pmatrix} \quad \sigma_u = \begin{pmatrix} -x(t) \sin(u) \\ x(t) \cos(u) \\ p \end{pmatrix} \quad \sigma_t \times \sigma_u = \begin{pmatrix} px'(t) \sin(u) - x(t)z'(t) \cos(u) \\ -px'(t) \cos(u) - x(t)z'(t) \sin(u) \\ x(t)x'(t) \end{pmatrix}$$

da cui la prima forma

$$G_I = \begin{pmatrix} x'^2 + z'^2 & pz' \\ pz' & x^2 + p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & pz' \\ pz' & x^2 + p^2 \end{pmatrix}$$

che risulta diagonale sse $p = 0$ (rotazione) o $z' = 0$ (elica semplice). Le derivate seconde

$$\sigma_{tt} = \begin{pmatrix} x''(t) \cos(u) \\ x''(t) \sin(u) \\ z''(t) \end{pmatrix} \quad \sigma_{tu} = \begin{pmatrix} -x'(t) \sin(u) \\ x'(t) \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{uu} = \begin{pmatrix} -x(t) \cos(u) \\ -x(t) \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

danno la seconda forma fondamentale

$$G_{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{p^2x'^2 + (x'^2 + z'^2)x^2}} \begin{pmatrix} -x(x''z' - x'z'') & -px'^2 \\ -px'^2 & x^2z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^2x'^2 + x^2}} \begin{pmatrix} -x(x''z' - x'z'') & -px'^2 \\ -px'^2 & x^2z' \end{pmatrix}$$

(diagonale nei casi $p = 0$ oppure $x' = 0$). La curvatura di Gauss diventa

$$K = -\frac{p^2x'^4}{(p^2x'^2 + x^2)(p^2 + x^2)}.$$

Geodetiche degli elicoidi? Si osservi che la prima forma è indipendente da u , quindi si tratta di un caso di Manfron.

Conviene anche studiare i casi in cui il profilo è definito da una funzione $x(z)$ oppure $z(x)$ (non sono allora curve unitarie, e bisogna rifare i conti).

5.14.1. ELICOIDI SEMPLICI. Si chiamano elicoidi semplici quelli dell'asse delle $x (= u)$, con profilo $z = 0$. Abbiamo allora

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ u + pv \end{pmatrix} \quad G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 + u^2 \end{pmatrix} \quad G_{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + u^2}} \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p & 0 \end{pmatrix} \quad K = -\frac{p^2}{(p^2 + u^2)^2}$$

e possiamo anche esplorare tutte le isometrie locali di questa superficie: se $(\tilde{v}(u, v))$ è isometria allora rispetta K

$$-\frac{p^2}{(p^2 + u^2)^2} = -\frac{p^2}{(p^2 + \tilde{u}^2)^2}$$

da cui si deduce che $\tilde{u}(u, v) = \pm u$, e rispetta la prima forma:

$$du^2 + (p^2 + u^2)dv^2 = d\tilde{u}^2 + (p^2 + \tilde{u}^2)d\tilde{v}^2$$

da cui si deduce che $d\tilde{v}(u, v) = \pm dv$ e quindi $\tilde{v}(u, v) = c \pm v$ (parentesi: scrivere l'uguaglianza delle prime forme con i differenziali è una stenografia per l'uguaglianza di matrici delle prime forme trasformando con lo Jacobiano). Quindi le uniche isometrie sono quelle evidenti: $(\pm u)$, e si tratta di isometrie di \mathbb{R}^3 che mandano l'elicoide in sè.

È interessante notare che per passi diversi gli elicoidi semplici non sono isometrici (usando circa la stessa tecnica).

Ricordiamo che l'elicoide di passo 1 ha la stessa curvatura (e stessi determinanti di prima e seconda forma, in effetti) della superficie di rotazione del logaritmo:

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ \log(u) \end{pmatrix} \quad G_I = \begin{pmatrix} (1 + u^2)/u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \quad G_{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \begin{pmatrix} -1/u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \quad K = -\frac{1}{(1 + u^2)^2}$$

ma non sono localmente isometriche: se così fosse ci sarebbe una mappa $(\tilde{v}(u, v))$ che, rispettando K dovrebbe avere $\tilde{u}(u, v) = \pm u$ e per rispettare la prima forma dovrebbe avere

$$\begin{aligned} du^2 + (1 + u^2)dv^2 &= \frac{1 + \tilde{u}^2}{\tilde{u}^2} d\tilde{u}^2 + \tilde{u}^2 d\tilde{v}^2 \\ &= \frac{1 + u^2}{u^2} du^2 + u^2 (\tilde{v}_u du + \tilde{v}_v dv)^2 \end{aligned}$$

e il termine misto $dudv$ impone $\tilde{v}_u \tilde{v}_v = 0$, che è incompatibile con (gli altri termini del) l'uguaglianza. Per esercizio, si cerchino le isometrie della superficie di rotazione del logaritmo.

È invece sorprendente che gli elicoidi semplici siano localmente isometrici a superficie di rotazione, precisamente a catenoidi (rotazione della catenaria):

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh(u) \cos(v) \\ \cosh(u) \sin(v) \\ u \end{pmatrix} \quad G_I = \cosh^2(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_{\text{II}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = -\frac{1}{\cosh^4(u)}$$

(si noti che la parametrizzazione è conforme al piano). Imponendo l'uguaglianza delle prime forme troviamo

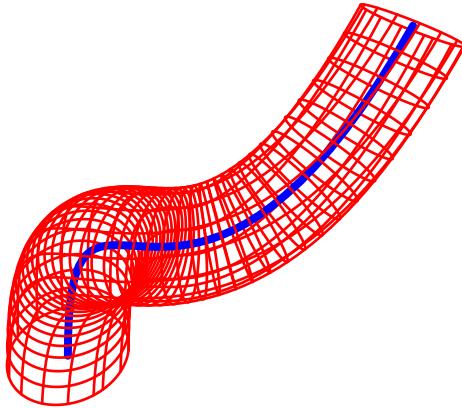
$$\begin{aligned} du^2 + (1 + u^2)dv^2 &= \cosh^2(\tilde{u})d\tilde{u}^2 + \cosh^2(\tilde{u})d\tilde{v}^2 \\ &= (d\sinh(\tilde{u}))^2 + (1 + \sinh^2(\tilde{u}))d\tilde{v}^2 \end{aligned}$$

e basta porre $u(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sinh(\tilde{u})$ e $v(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}$ per avere una isometria.

5.14.2. ELICOIDI DELLE RETTE. Studiare gli elicoidi di rette del tipo $x = mz$.

5.14.3. Studiare gli elicoidi di logaritmo, parabola, radice, iperbole, trattrice, seno.

5.15. SUPERFICIE TUBOLARI. Data una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura mai nulla e parametrizzata con l'arco, definiamo il suo intorno tubolare di raggio r come la superficie definita da $\sigma(s, v) = \gamma(s) + r(n(s) \cos v + b(s) \sin v)$ dove $n(s), b(s)$ sono normale e binormale alla curva (si tratta di un tubo di raggio r attorno a γ). È curioso notare che la superficie laterale del tubo è esattamente $2\pi r$ per la lunghezza di γ , pari a quella di un cilindro di raggio r e altezza pari alla lunghezza di γ , ma le due superficie non sono isometriche, né isoareali.



5.16. RETI DI TCHEBYSHEF. Data una parametrizzazione $\sigma(u, v)$ su una superficie, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) le curve coordinate formano quadrilateri con lati opposti di ugual lunghezza;
 - (2) $e_v = 0 = g_u$ (si tratta dei coefficienti diagonali della prima forma: e non dipende da v , e g non dipende da u);
 - (3) possiamo trovare dei parametri regolari tali che la prima forma ha coefficienti diagonali 1, e quello non diagonale $\cos \vartheta$ con ϑ (dipendente dai parametri) angolo tra le curve coordinate.
- Basta imporre l'indipendenza da v della lunghezza $\int \sqrt{e} du$, e idem con parametri scambiati.

5.17. SUPERFICIE DI CURVATURA NULLA E NON SVILUPPABILE (HEINZE). Consideriamo la matrice

$$G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_{II} = e^{-\frac{1 \pm v}{v^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 \pm v} & \mp \frac{u}{(1 \pm v)^2} \\ \mp \frac{u}{(1 \pm v)^2} & \frac{u^2}{(1 \pm v)^3} \end{pmatrix}$$

con $\pm = \text{sgn}(u)$. Si verifica con il teorema fondamentale che esiste una superficie con queste prima e seconda forma, e quindi di curvatura nulla; tuttavia non è sviluppabile (localmente isometrica al piano). Non banale.

5.18. DISCO DI POINCARÉ. Il disco di Poincaré è un esempio di superficie astratta: insiemisticamente è il disco unitario del piano reale, e lo si dota della prima forma fondamentale di matrice

$$G_I = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} \mathbb{I}_2 = \frac{4}{(1 - r^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

dove x, y sono le solite coordinate cartesiane (quindi \mathbb{D} è descritto da $x^2 + y^2 < 1$), r, ϑ le solite coordinate polari, eventualmente moltiplicata per R^2 (costante positiva). Vedremo che ha curvatura costante negativa, e quindi non può realizzarsi immersa in \mathbb{R}^3 (almeno globalmente).

5.18.1. ISOMETRIE DEL DISCO DI POINCARÉ. Possiamo identificare isometrie e geodetiche del disco di Poincaré con alcune considerazioni elementari, quasi senza conti: le trasformazioni di Moebius della forma

$$f(z) = e^{i\vartheta} \frac{z - w}{1 - z\bar{w}}$$

con $|w| < 1$ complesso e ϑ reale fissato qualsiasi mandano \mathbb{D} in sè, sono isometrie transitivie sui punti del disco. Si vede anche che sono transitivie sulle coppie formate da un punto del piano e una direzione da quel punto.

5.18.2. GEODETICHE. Quindi per trovare le geodetiche basta studiare quelle per l'origine e poi spostarle con quelle isometrie in qualsiasi altro punto. D'altra parte, nell'origine basta studiare la geodetica con direzione l'asse delle ascisse (perché le rotazioni sono isometrie), e per simmetria della prima forma, si vede che la geodetica dev'essere la retta stessa. Conclusione: le geodetiche sono le rette per l'origine, e le circonferenze ortogonali al bordo del disco (le trasformazioni di Moebius mescolano rette e cerchi, le isometrie rispettano gli angoli).

5.18.3. CURVATURA DEL DISCO DI POINCARÉ. Per calcolare la curvatura, non avendo a disposizione metodi estrinseci (abbiamo dato solo la prima forma), dobbiamo ricorrere a metodi intrinseci: usando le formule del teorema Egregium abbiamo

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{eg}} \left(\frac{e_r}{\sqrt{eg}} \right)_r = -1$$

(dopo qualche conto in coordinate polari). Oppure calcolando i simboli di Christoffel al solito modo, restano

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{2r}{1-r^2} \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r(1+r^2)}{1-r^2} \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1+r^2}{r(1-r^2)}$$

e poi ricordare che $K \det(I) = R_{122}^1$ che qui si riduce a $\partial_r \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) = -\det(I)$ (serve qualche conto).

5.18.4. CERCHI DEL DISCO DI POINCARÉ. Approfittando delle isometrie possiamo ottenere informazioni sui cerchi studiando quelli centrati nell'origine: i punti a distanza iperbolica R dall'origine sono chiaramente un cerchio di raggio r euclideo, e la relazione tra i raggi si può ottenere studiando la lunghezza iperbolica del tratto di retta $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$R = \int_0^r \frac{2}{1-t^2} dt = \int_0^r \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \log \frac{1+r}{1-r}$$

da cui

$$r = \frac{e^R - 1}{e^R + 1}$$

Ora la lunghezza della circonferenza iperbolica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$ di raggio euclideo r (raggio iperbolico R) è

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{x'^2 + y'^2}}{1-x^2-y^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1-r^2} dt = 2\pi \frac{2r}{1-r^2} = 2\pi \frac{e^R - e^{-R}}{2} = 2\pi \sinh(R)$$

che si vede essere vicina a $2\pi R$ per R piccolo (e tende a infinito per R grande).

Possiamo calcolare l'area dello stesso cerchio:

$$\begin{aligned} & \iint \frac{2dx}{1-x^2-y^2} \times \frac{2dy}{1-x^2-y^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{4r}{(1-r^2)^2} dr d\vartheta = 2\pi \int_0^r \left(\frac{1}{(1-r)^2} - \frac{1}{(1+r)^2} \right) dr = \\ & = 2\pi \frac{2r^2}{1-r^2} = 4\pi \left(\frac{e^{R/2} - e^{-R/2}}{2} \right)^2 = 4\pi \sinh^2(R/2) = 2\pi(\cosh(R) - 1) \end{aligned}$$

da cui si vede che è vicina a πR^2 per R piccolo, e tende a infinito per R grande.

La curvatura geodetica della circonferenza si può ottenere usando il teorema di Gauss-Bonnet: da $k_g 2\pi \sinh(R) - 2\pi(\cosh(R) - 1) = 2\pi$ otteniamo $k_g = \frac{\cosh(R)}{\sinh(R)}$, da confrontare con quella dei cerchi sulla sfera.

5.18.5. TRIANGOLI IPERBOLICI. Analogamente a quanto fatto per la sfera, si potrebbe studiare la geometria dei triangoli geodetici sul disco di Poincaré, per esempio provando che la superficie è pari a $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, ovvero i teoremi classici:

TEOREMA DI CARNOT (O DEI COSENI) IPERBOLICO:

$$\cosh(a/R) = \cosh(b/R) \cosh(c/R) - \sinh(b/R) \sinh(c/R) \cos \alpha$$

(notare che per $R \rightarrow \infty$ usando Taylor troviamo il teorema di Carnot euclideo);

TEOREMA DI PITAGORA IPERBOLICO:

$$\cosh(a/R) = \cosh(b/R) \cosh(c/R) \quad \text{sse} \quad \cos \alpha = 0 \quad \text{sse il triangolo è rettangolo in } A$$

(di nuovo, per $R \rightarrow \infty$ usando Taylor troviamo il teorema di Pitagora euclideo);

TEOREMA DEI SENI IPERBOLICO:

$$\frac{\sinh(a/R)}{\sin \alpha} = \frac{\sinh(b/R)}{\sin \beta} = \frac{\sinh(c/R)}{\sin \gamma}$$

(e ancora, per $R \rightarrow \infty$ usando Taylor troviamo il teorema dei seni euclideo).

TEOREMA DUALE DI CARNOT (O DEI COSENI) IPERBOLICO:

$$\cosh(a/R) = \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \quad \text{ovvero} \quad \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cosh(a/R)$$

(cosa succede per $R \rightarrow \infty$?);

5.18.6. ANGOLI DI PARALLELISMO. Una specialità di questo tipo di geometrie è legato alla nozione di parallelismo di rette, e di angolo di parallelismo.

☒ **5.19.** (SEMI)PIANO DI POINCARÉ. Il semipiano di Poincaré si indica con \mathbb{H} , insiemisticamente è il semipiano reale con ordinata positiva, oppure il semipiano complesso con parte immaginaria positiva, dotato della prima forma fondamentale data da

$$G_I = \frac{1}{v^2} \mathbb{I}_2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

dove u, v con $v > 0$ sono le coordinate cartesiane, r, ϑ le coordinate polari, eventualmente moltiplicata per R^2 (reale positivo).

5.19.1. ISOMETRIE DEL SEMIPIANO DI POINCARÉ. Possiamo osservare facilmente che il gruppo $SL_2(\mathbb{R})$ agisce su \mathbb{H} tramite isometrie, e che $SO_2(\mathbb{R})$ stabilizza il punto i . Conviene per questo identificare \mathbb{H} con il semipiano complesso con parte immaginaria positiva, ricordare che una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ agisce tramite una trasformazione di Moebius $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, e che la prima forma si scrive $\frac{1}{\Im(z)} dz d\bar{z}$.

Si vede anche facilmente che le isometrie agiscono transitivamente sulle coppie di punti e direzioni.

5.19.2. La curvatura si calcola facilmente, come nel caso del disco, essere $-1/R^2$.

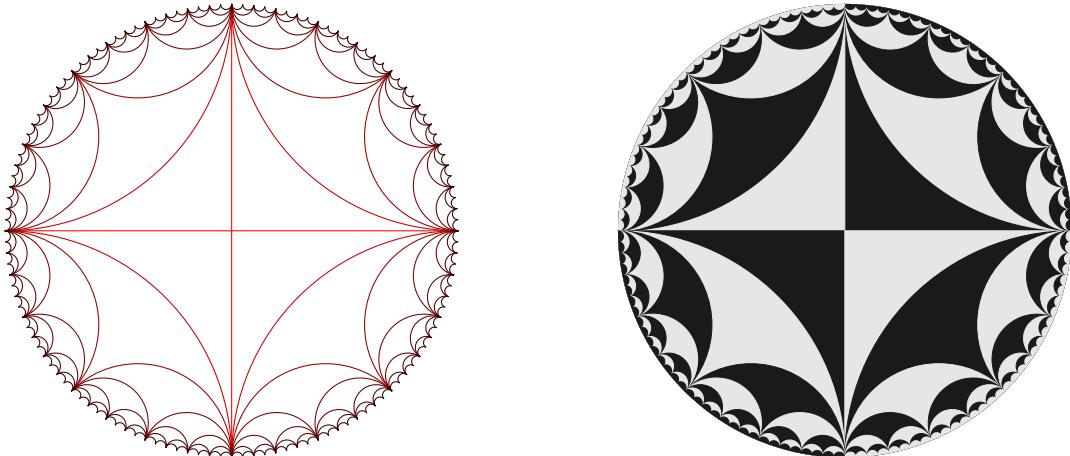
5.19.3. Le geodetiche risolvono un sistema differenziale del tipo

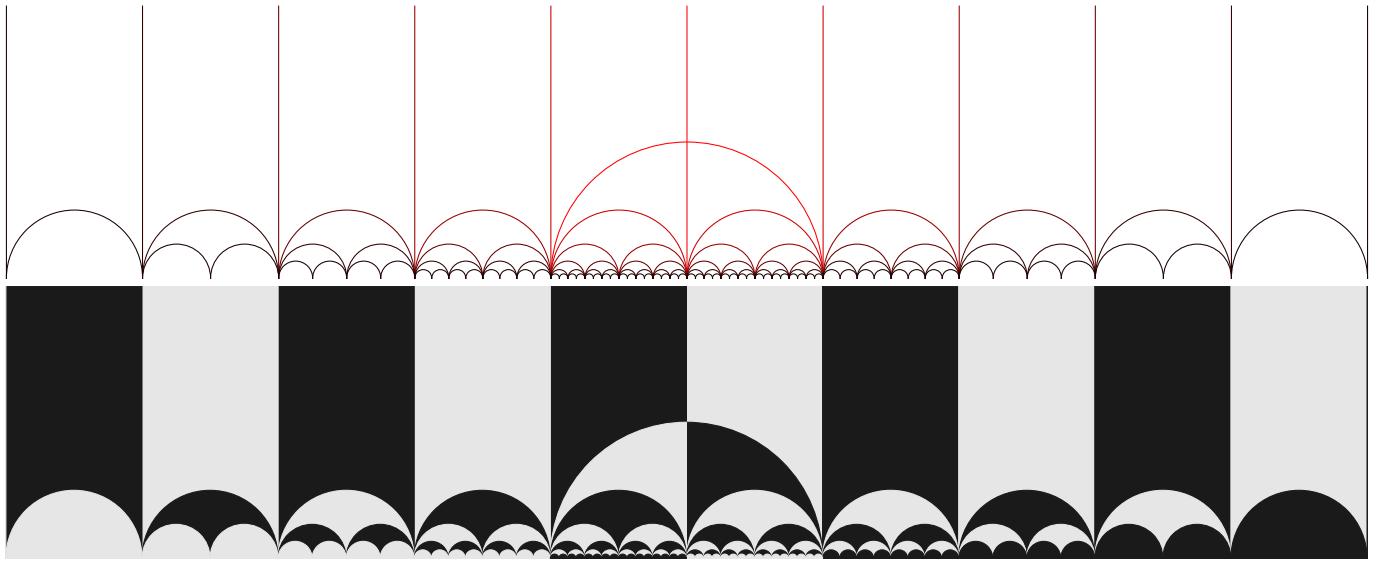
$$\begin{cases} \left(\frac{u'}{v^2} \right)' = 0 \\ \left(\frac{v'}{v^2} \right)' = -\frac{u'^2 + v'^2}{v^3} \end{cases}$$

che si può risolvere esplicitamente, ma si possono descrivere senza conti usando il punto i , la geodetica con direzione nord (necessariamente la retta verticale) e poi trasformando con Moebius: si riconosce subito che si tratta quindi delle rette verticali e dei semicerchi centrati sull'asse delle ascisse. Si ricordi che abbiamo usato la stessa tecnica nel caso della sfera.

5.19.4. Si possono fare vari conti esplicativi, tipo lunghezza dei tratti di geodetica, area dei triangoli geodetici, studiare i cerchi centrati in i , ...

☒ **5.20. MODELLI DI GEOMETRIA IPERBOLICA.** Disco e semipiano di Poincaré sono isometrici, e sono modelli di geometria iperbolica, ovvero di superficie a curvatura costante negativa.





Vi sono altri modelli quali il disco di Klein-Beltrami (disco unitario, le geodetiche sono i segmenti, ma la metrica non è quella euclidea), la superficie di Minkowski (una falda di un iperboloido ellittico).

Vediamo l'isometria tra disco e semipiano di Poincaré; si può realizzare sia in termini di trasformazioni de Moebius, sia in termini di proiezioni. Consideriamo una sfera di raggio $1/2$ centrata nell'origine, appoggiamo il disco \mathbb{D} di Poincaré sul polo nord, e proiettiamolo sulla (semi)sfera dal polo sud; poi proiettiamo dal polo ovest la semisfera sul (semi)piano tangente al polo est (piano che identifichiamo con \mathbb{H}). Fatti i conti otteniamo la mappa $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ data da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + (1+y)^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

(si noti che l'origine va in i , il bordo nelle ascisse) con jacobiano dato da

$$J = \frac{2}{(x^2 + (1+y)^2)^2} \begin{pmatrix} -x^2 + (1+y)^2 & -2x(1+y) \\ -2x(1+y) & x^2 - (1+y)^2 \end{pmatrix}$$

che porta la prima forma di \mathbb{H} nella corrispondente di \mathbb{D} :

$$J^t \frac{1}{v^2} \mathbb{I}_2 J = \frac{(x^2 + (1+y)^2)^2}{(1-x^2-y^2)^2} \frac{4}{(x^2 + (1+y)^2)^4} \begin{pmatrix} (x^2 + (1+y)^2)^2 & 0 \\ 0 & (x^2 + (1+y)^2)^2 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} \mathbb{I}_2.$$

In termini delle trasformazioni di Moebius, possiamo comporre nell'ordine: la traslazione di i , l'inversione, la traslazione di $i/2$, e infine coniugare.

La relazione dei modelli di Poincaré con quello di Klein-Beltrami si ottiene invece con una proiezione ortogonale dal disco a una semisfera (da comporre poi con proiezioni stereografiche verso il disco nuovamente, o verso il semipiano).

Capitolo III

Topologia Generale

0. Introduzione.

La topologia si occupa dello studio degli spazi topologici, che sono insiemi in cui si è definita una struttura geometrica che permette di parlare di “intorni dei punti”, ovvero si è specificato una qualche nozione di vicinanza tra punti. Di conseguenza si può definire la nozione di continuità delle funzioni tra spazi topologici (funzioni che rispettano le nozioni di vicinanza introdotte).

I più semplici spazi topologici sono quelli metrici, che si suppongono ben noti al lettore. Uno spazio topologico in generale non è metrizzabile, nel senso che la sua topologia non viene indotta da una metrica, ed è un problema interessante caratterizzare gli spazi metrizzabili.

Alcune nozioni già note per gli spazi metrici (continuità, separazione, connessione, compattezza) si hanno anche per gli spazi topologici, e spesso sono più chiare nell’ambiente topologico. Altre nozioni come quella di completezza si applicano solo a certi spazi topologici che tipicamente si trovano quando si cerca di dare qualche struttura agli spazi di funzioni.

Lo scopo di queste note è solo quello di introdurre la terminologia essenziale, i risultati principali e una casistica di esempi che permetta di apprezzare appieno la generalità e l’importanza delle nozioni topologiche. Manca del tutto l’importante argomento degli spazi vettoriali normati e topologici, e della dualità nel contesto topologico; si tratta di un campo troppo vasto per il poco tempo a disposizione e che viene trattato nei corsi di Analisi Funzionale. Non vi è nemmeno alcun accenno all’uso della topologia in algebra, ovvero allo studio delle topologie in oggetti algebrici come gruppi, anelli, campi; in tali casi vi sono topologie naturali strettamente legate alle strutture algebriche: per esempio per studiare la teoria di Galois delle estensioni finite di campi sono sufficienti i gruppi finiti, mentre per studiare le estensioni algebriche di grado infinito è necessario l’uso di certi gruppi topologici (profiniti, cioè dotati della topologia proiettiva delle topologie discrete sui loro quozienti finiti).

1. Spazi topologici e funzioni continue.

1.1. Topologie.

1.1.1. APERTI. Una topologia su un insieme X è il dato di una famiglia \mathcal{T}_X di sottinsiemi di X che sia chiusa per unioni arbitrarie e intersezioni finite (in particolare, contiene l’insieme vuoto e l’insieme X stesso, in quanto unione e intersezione della famiglia vuota). Gli elementi di \mathcal{T}_X si dicono aperti di X .

Le topologie su un insieme X sono ordinate per inclusione (una topologia si dice più fine di un’altra se la contiene, meno fine se è contenuta). L’intersezione arbitraria di topologie su X è una topologia su X .

1.1.2. TOPOLOGIE GENERATE, BANALE, CAOTICA. Ogni insieme X ammette la topologia banale o indiscreta (minima topologia possibile, avente quali aperti solo il vuoto e l’insieme stesso), e quella caotica o discreta (massima topologia possibile, avente quali aperti tutti i sottinsiemi di X). Per ogni famiglia di sottinsiemi di X esiste una più piccola topologia che contiene quella famiglia (l’intersezione di tutte le topologie che la contengono), e si dice la topologia generata da quella famiglia.

1.1.3. TOPOLOGIE COFINITE E CONUMERABILI. Per ogni insieme X l’insieme delle sue parti cofinite (cioè quelle con complementare finito) è una topologia su X , detta topologia cofinita. Coincide con la topologia discreta se e solo se X è finito. Per ogni insieme X l’insieme delle sue parti conumerabili (cioè quelle con complementare finito o numerabile) è una topologia su X , detta topologia

conumerabile. Coincide con la topologia discreta se e solo se X è finito o numerabile (insiemisticaamente).

1.1.4. TOPOLOGIE D'ORDINE. Dato un insieme totalmente ordinato X (sia \leqslant l'ordine), gli insiemi chiusi per la relazione di ordine (in un fissato senso) formano una topologia. Si noti che sia la famiglia degli insiemi A con la proprietà “se $a \in A$ e $a \leqslant b$ allora $b \in A$ ”, sia la famiglia dei complementari formano delle topologie (infatti queste famiglie hanno proprietà di chiusura ad unioni ed intersezioni arbitrarie). Di solito si chiamano topologie d'ordine a destra o a sinistra, e si dice topologia d'ordine quella generata dalle due, quindi dagli intervalli.

1.1.5. TOPOLOGIE INCLUDENTI ED ESCLUDENTI. Dato un insieme X e un suo punto P (o un suo sottinsieme S) la topologia includente di P (o di S) è formata dalle parti di X che contengono P (o S) e dal vuoto; la topologia escludente di P (o di S) è formata dalle parti di X che non contengono P (o intersecano S nel vuoto) e dallo spazio stesso.

1.1.6. BASI E PREBASI. Un sottinsieme \mathcal{B}_X di \mathcal{T}_X si dice una base (della topologia) se ogni aperto è unione (arbitraria) di elementi della base. Affinché una famiglia di parti di X sia base per una topologia (quella generata!) è necessario e sufficiente che ogni intersezione finita di suoi elementi si scriva come unione di elementi della famiglia; in tal caso la topologia generata è la famiglia di tutte le unioni arbitrarie di elementi della base.

Un sottinsieme \mathcal{P}_X di \mathcal{T}_X si dice una prebase (della topologia) se l'insieme di tutte le intersezioni finite di suoi elementi è una base di \mathcal{T}_X . Affinché una famiglia di parti di X sia prebase per una topologia (quella generata!) è necessario e sufficiente che generi la topologia; in tal caso la topologia generata ha come base l'insieme delle intersezioni finite di elementi della famiglia.

1.1.7. Si osservi quindi che l'insieme delle topologie su X è ordinato dall'inclusione, con minimo e massimo assoluti, con inf arbitrari (intersezione) e sup arbitrari (topologia generata dall'unione). Si tratta quindi di un reticolo, non distributivo, di parti di parti di X ($\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$), non è un errore di stampa).

1.1.8. CHIUSI. L'insieme dei chiusi di \mathcal{T}_X è formato dai complementari degli aperti. Si tratta quindi di una famiglia di parti di X chiusa per intersezioni arbitrarie ed unioni finite (in particolare contiene l'insieme vuoto e l'insieme X stesso); data una tale famiglia, è unicamente definita una topologia (formata dai complementari) per cui quella è la famiglia dei chiusi.

1.1.9. POSIZIONI DI PUNTI RISPETTO A SOTTINSIEMI. Dati un sottinsieme $S \subseteq X$ e un punto $x \in X$ di uno spazio topologico X si dice che:

- (1) x è interno a S se esiste un aperto U contenente x e contenuto in S ; esterno a S se esiste un aperto U contenente x e contenuto nel complementare di S ;
- (2) x è aderente a (o di chiusura per) S se ogni aperto contenente x interseca S ;
- (3) x è di accumulazione per S se ogni aperto contenente x interseca S in punti diversi da x ; isolato per S se esiste un aperto contenente x che interseca S solo in x ;
- (4) x è di frontiera per S se è aderente sia ad S , sia al complementare; dunque se ogni aperto contenente x interseca entrambi.

1.1.10. INTERNO, CHIUSURA, DERIVATO, FRONTIERA. Per ogni sottinsieme S di X definiamo:

- (1) l'interno S° di S come l'unione di tutti gli aperti contenuti in S (dunque il più grande aperto contenuto in S); quindi è l'insieme di tutti i punti interni ad S ;
- (2) la chiusura \overline{S} di S come l'intersezione di tutti chiusi contenenti S (dunque il più piccolo chiuso contenente S , ovvero il complementare dell'interno del complementare di S); si tratta quindi dell'insieme dei punti di chiusura per S ;
- (3) il derivato S' come l'insieme dei punti di accumulazione per S ;
- (4) la frontiera ∂S come la differenza tra la chiusura e l'interno, ovvero l'insieme dei punti di frontiera per S .

Si vede immediatamente che $S^\circ \subseteq S \subseteq \overline{S}$, che $\partial S \subseteq \overline{S}$, che S° e ∂S sono disgiunti con unione \overline{S} e che \overline{S} è unione disgiunta dei punti isolati e dei punti di accumulazione di S .

È un esercizio classico capire quanti insiemi distinti si possono ottenere usando ripetutamente le operazioni di interno, chiusura, complementare (sono 14 e si possono trovare tutti distinti a partire dal seguente sottinsieme)

$$T = \{1/n : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \{5\} \cup [6, 7] \cup ([8, 9] \cap \mathbb{Q})$$

della retta reale con la topologia usuale).

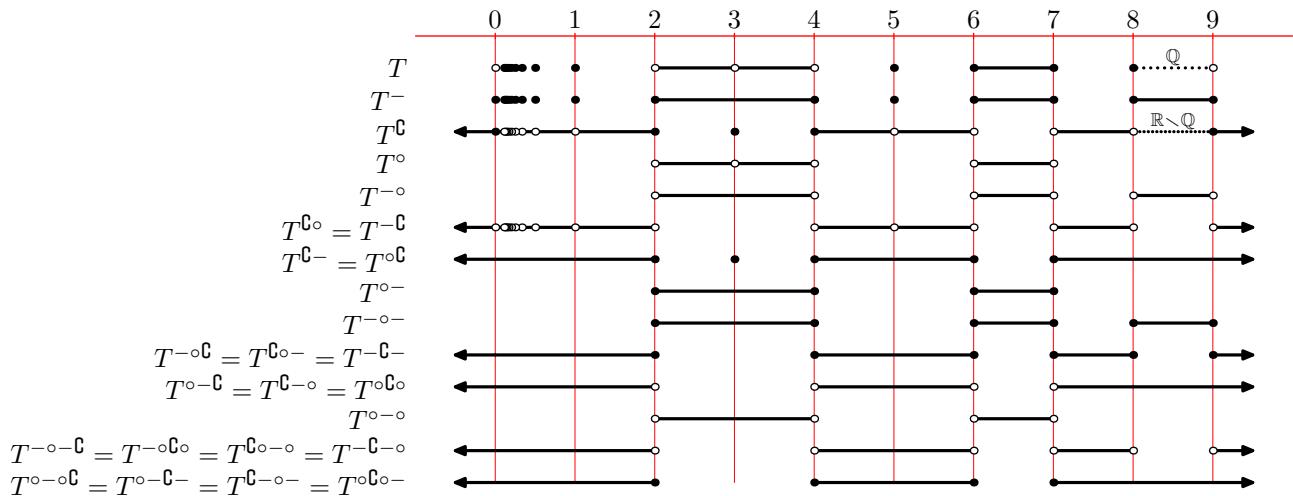
Tenendo conto che $\circ = \complement - \complement$, possiamo usare solo le operazioni di chiusura e complemento: in tal caso abbiamo che $(\complement - \complement)^4 = (\complement - \complement)^2$ e $(-\complement)^4 = (-\complement)^2$, e troviamo i seguenti insiemi:

$$\begin{array}{llll} A^- & A^{-\complement} = A^{\complement\circ} & A^{-\complement-} = A^{-\circ} & A^{-\complement-\complement-} = A^{-\circ-} \\ A & & & A^{-\complement-\complement} = A^{\complement\circ\circ} \\ A^\complement & A^{\complement-} = A^{\circ\complement} & A^{\complement-\complement} = A^\circ & A^{\complement-\complement-\complement-} = A^{\circ-\circ} \\ A & & & A^{\complement-\complement-\complement-\complement} = A^{\circ-\circ} \end{array}$$

Usando tutti e tre gli operatori, abbiamo le relazioni $\complement\circ = -\complement$, $\complement- = \circ\complement$, $(\circ-)^2 = \circ-$, $(-\circ)^2 = -\circ$, e troviamo il seguente schema:

$$\begin{array}{llll} A^- & A^{-\circ} & A^{-\circ-} & A^{-\circ-\complement} = A^{-\circ\complement\circ} = A^{-\complement-\circ} = A^{\complement\circ-\circ} \\ A & A^\complement & A^{\complement-} = A^{\complement\circ} & A^{-\complement\circ} = A^{-\complement-} = A^{\complement\circ-} \\ A^\complement & A^\circ & A^{\circ\complement} = A^{\complement-} & A^{\circ-\complement} = A^{\circ\complement\circ} = A^{\complement\circ-\circ} \\ A & & A^{\circ-\circ} & A^{\circ-\circ\complement} = A^{\circ-\complement-} = A^{\circ\complement\circ-} = A^{\complement\circ-\circ-} \end{array}$$

Rimane come esercizio capire quali relazioni di inclusione ci siano in generale tra i 14 insiemi trovati. Può essere utile considerare il sottinsieme T di \mathbb{R} prima definito:



1.1.11. INSIEMI DENSI, POVERI, PERFETTI. Un sottinsieme S di uno spazio topologico X si dice denso se $\overline{S} = X$ (la sua chiusura è tutto X , ovvero ogni aperto non vuoto di X interseca S , ovvero il solo chiuso che lo contenga è X , sse non è contenuto in alcun chiuso proprio), si dice povero se S° è vuoto (cioè se il complementare è denso). Si dice perfetto un insieme chiuso e privo di punti isolati, cioè un insieme che coincide con il proprio derivato.

1.1.12. INSIEMI RARI E MAGRI. Un sottinsieme S di uno spazio topologico X si dice raro se la sua chiusura ha interno vuoto (cioè se la sua chiusura non contiene aperti non vuoti): $\overline{S}^\circ = \emptyset$. Si dice magro (o “di prima categoria”, terminologia antiquata) se è unione numerabile di insiemi rari, non magro (o “di seconda categoria”, terminologia antiquata) altrimenti. Talvolta lo spazio X si dice di Baire se ogni aperto non vuoto è non magro.

1.1.13. PROPRIETÀ DI KURATOWSKI. Gli operatori di chiusura ed interno sono funzioni di $\mathcal{P}(X)$ in sè, con le seguenti proprietà reticolari, dette di Kuratowski:

(1) la chiusura è operatore ordinato ($S \subseteq T$ implica $\overline{S} \subseteq \overline{T}$), maggiore dell’identità ($S \subseteq \overline{S}$), commutante con le unioni finite ($\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$, e anche $\overline{\emptyset} = \emptyset$) e idempotente ($\overline{\overline{S}} = \overline{S}$);

(2) l’interno è operatore ordinato ($S \subseteq T$ implica $S^\circ \subseteq T^\circ$), minore dell’identità ($S^\circ \subseteq S$), commutante con le intersezioni finite ($(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$, e anche $X^\circ = X$) e idempotente ($S^{\circ\circ} = S^\circ$). Conoscere uno degli operatori di Kuratowski determina la topologia:

- data la topologia sappiamo come definire questi operatori;
- dato l’operatore di chiusura, definiamo la topologia i cui chiusi sono i sottinsiemi di X che coincidono con la propria chiusura ($F = \overline{F}$, cioè i sottinsiemi fissi dell’operatore di chiusura); dato

l'operatore di interno, definiamo la topologia i cui aperti sono i sottinsiemi di X che coincidono con il proprio interno ($U = U^\circ$, cioè i sottinsiemi fissi dell'operatore di interno).

Si verifica quasi subito che gli insiemi così definiti sono topologie (l'aspetto più sorprendente è la chiusura alle intersezioni arbitrarie per i chiusi, e alle unioni arbitrarie per gli aperti: per i chiusi si ragiona usando che $S_\beta \supseteq \bigcap_\alpha S_\alpha$ per ogni β , quindi $S_\beta = \overline{S_\beta} \supseteq \overline{\bigcap_\alpha S_\alpha}$ per ogni β , quindi $\bigcap_\alpha S_\alpha = \bigcap_\alpha \overline{S_\alpha} \supseteq \overline{\bigcap_\alpha S_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{S_\alpha}$; l'altra inclusione tra gli estremi è facile, e quindi i tre insiemi sono uguali), e in questa verifica la proprietà di idempotenza degli operatori non viene usata).

La proprietà di idempotenza serve per mostrare che l'operatore di Kuratowski definisce una topologia che ritorna l'operatore stesso nella costruzione data (come esercizio, si dimostri che la proprietà di idempotenza è essenziale per dimostrare questi fatti: dato $S \subseteq X$, \overline{S} coincide con l'intersezione dei $T \subseteq X$ tali che $S \subseteq T = \overline{T}$; dato $S \subseteq X$, S° coincide con l'unione dei $T \subseteq X$ tali che $S \supseteq T = T^\circ$; cioè che gli operatori sono caratterizzati dai loro sottinsiemi fissi).

Un esempio di operatore che rispetta le proprietà di chiusura tranne l'idempotenza è il seguente: usiamo $X = \mathbb{Z}$ e per ogni $S \subseteq \mathbb{Z}$ definiamo la chiusura \overline{S} come l'unione degli intervallini $\{s-1, s, s+1\}$ al variare di $s \in S$; che topologia definisce, e quale operatore di chiusura di Kuratowski viene da tale topologia?

Per esempio la topologia banale su X è associata all'operatore di chiusura che porta ogni insieme non vuoto in X (e all'operatore di interno che manda ogni insieme diverso da X nel vuoto). La topologia discreta è associata all'operatore di chiusura (e di interno) identico. Che operatori definiscono le topologie cofinite, conumerabili, includenti, escludenti, d'ordine?

Gli operatori di derivato e di frontiera determinano la topologia?

1.1.14. PROBLEMA. Si studino in generale le relazioni tra gli operatori topologici e quelli insiemistici (unione \cup , intersezione \cap , complementare \complement , differenza \setminus); oltre alle proprietà di Kuratowski, si verifichi in particolare che

$$\begin{array}{lll} A^\circ = A \setminus \partial A & \overline{A} = A \cup \partial A & \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \\ A = A^\circ \text{ sse } A \cap \partial A = \emptyset & A = \overline{\overline{A}} \text{ sse } \partial A \subseteq A & A = \partial A \text{ sse } A = \overline{A} \text{ e } A^\circ = \emptyset \\ (\complement A)^\circ = \complement \overline{A} & \complement \overline{A} = \complement (A^\circ) & \partial(\complement A) = \partial A \\ \partial(A^\circ) \subseteq \partial A & \partial \overline{A} \subseteq \partial A & \partial \partial A \subseteq \partial A \\ (A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} & \partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B \\ (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ & \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} & \partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B \end{array}$$

dando controesempi nel caso delle inclusioni strette. Si osservi esplicitamente il caso $\partial A = \emptyset$ (capita sse A è aperto e chiuso, cioè nei casi non banali sse X ha sconnessioni).

Nel caso di operazioni infinite, le cose peggiorano:

$$\left(\bigcap_i A_i \right)^\circ \subseteq \bigcap A_i^\circ \quad \overline{\bigcup_i A_i} \supseteq \bigcup \overline{A_i}.$$

1.2. Strutture topologiche.

1.2.1. FILTRI. Dato un insieme X , un filtro \mathcal{F} su X è una famiglia di parti di X che non sia vuota, non contenga il vuoto, sia chiusa per intersezioni finite e per sovrainsiemi (in particolare contiene sempre X).

L'idea è di avere famiglie che si stringono per intersezioni finite attorno a qualcosa (che non sia mai vuoto per intersezioni finite). Gli esempi standard di filtri sono: le famiglie degli insiemi contenenti un fissato sottinsieme non vuoto; l'insieme degli intorni di un punto in uno spazio topologico (cioè gli insiemi contenenti un aperto contenente il punto); la famiglia degli insiemi cofiniti in un insieme infinito.

Ovviamente i filtri sono ordinati per inclusione insiemistica, e l'intersezione di filtri è un filtro (questo non significa che ogni famiglia di parti di X generi un filtro, però, perché non è detto che ci sia almeno un filtro contenente quella famiglia).

1.2.2. ULTRAFILTRI. Un ultrafiltro è un filtro massimale (per l'inclusione); ciò capita sse per ogni $S \subseteq X$ si ha che S o il complementare stanno nel filtro (dati un filtro \mathcal{F} e un insieme $S \notin \mathcal{F}$, i sottinsiemi V tali che $V \cup S \in \mathcal{F}$ definiscono un filtro contenente \mathcal{F} e il complementare di S). Altra caratterizzazione: un filtro \mathcal{F} è un ultrafiltro sse dato $A \cup B \in \mathcal{F}$ si ha $A \in \mathcal{F}$ oppure $B \in \mathcal{F}$.

Si dimostra, usando il lemma di Zorn, che ogni filtro è contenuto in qualche ultrafiltro.

Gli insiemi contenenti un fissato elemento sono chiaramente degli ultrafiltri, e sono detti (ultra)filtri principali. Chiaramente, gli ultrafiltri più interessanti sono quelli non principali: per esempio in \mathbb{Z} le semirette positive generano un filtro che non può avere sovrafiltri principali (l'intersezione di tutti i suoi elementi è vuota), ed è quindi contenuto in ultrafiltri non principali di \mathbb{Z} .

1.2.3. BASI E PREBASI DI FILTRI. Una base di un filtro è un sottinsieme del filtro tale che ogni elemento del filtro ne contenga uno della base. Una famiglia di parti di X è base per un filtro sse è non vuota, non contiene il vuoto, e ogni intersezione finita di suoi elementi contiene un suo elemento; in tal caso il filtro generato è formato da tutti i sovrainsiemi degli elementi della base.

Una prebase di un filtro è un sottinsieme del filtro tale che l'insieme delle sue intersezioni finite sia base per il filtro. Una famiglia di parti di X è prebase per un filtro sse le intersezioni finite di suoi elementi non sono mai vuote.

1.2.4. Si osservi quindi che l'insieme dei filtri su X è ordinato dall'inclusione, con minimo assoluto ed elementi massimali, ma non massimo assoluto, con inf arbitrari (intersezione) ma privo dei sup anche binari, in generale. In effetti una unione crescente di filtri è un filtro, mentre l'unione di filtri genera un filtro sse è prebase per un filtro, sse sono entrambi contenuti in uno stesso massimale, sse intersezioni degli elementi dei due filtri sono sempre non vuote.

1.2.5. IMMAGINI (E ANTIMMAGINI) DI FILTRI. Data una funzione $f : X \rightarrow Y$ e un filtro \mathcal{F} di X , le immagini dei suoi elementi sono base per un filtro di Y (formano già un filtro se f è suriettiva) detto il filtro immagine tramite f e indicato con $f(\mathcal{F})$; si osservi quindi che il simbolo $f(\mathcal{F})$ in questo contesto indica il filtro immagine e non l'immagine del filtro. Immagini di ultrafiltri sono ultrafiltri.

Per le antimmagini la situazione è meno semplice: se \mathcal{G} è filtro di Y tale che ogni suo elemento intersechi $f(X)$, allora l'immagine inversa $f^{-1}(\mathcal{G})$ è base per un filtro di X . In particolare, se f è suriettiva, allora $f^{-1}(\mathcal{G})$ è un filtro. Ma in generale non è detto che le tracce di \mathcal{G} su $f(X)$ formino nemmeno una prebase per un filtro.

1.2.6. STRUTTURE TOPOLOGICHE. Una struttura topologica su un insieme X è il dato per ogni punto $x \in X$ di un filtro $\mathcal{T}_X(x)$ di X tale che per ogni x e ogni $V \in \mathcal{T}_X(x)$ valga la seguente proprietà: $x \in V$ (cioè $\mathcal{T}_X(x)$ è contenuto nel filtro principale di x) ed esista un $W \in \mathcal{T}_X(x)$ tale che $V \in \mathcal{T}_X(y)$ per ogni $y \in W$.

La condizione si può esprimere equivalentemente: per ogni x e ogni $V \in \mathcal{T}_X(x)$ esista U tale che $x \in U \subseteq V$ e $U \in \mathcal{T}_X(u)$ per ogni $u \in U$. Infatti basta usare $U = \{u \in X : V \in \mathcal{T}_X(u)\} \subseteq V$ (come si verifica subito: per ogni $u \in U$ esiste $W_u \in \mathcal{T}_X(u)$ tale che $W_u \subseteq U$, perché $y \in W_u$ implica $V \in \mathcal{T}_X(y)$ e perciò $y \in U$, quindi $U \in \mathcal{T}_X(u)$).

Si osservi che una struttura topologica non è solo una collezione di filtri contenuti nei filtri principali di ogni punto: la condizione data impone una certa coerenza locale tra i filtri. Gli elementi di $\mathcal{T}_X(x)$ sono detti gli intorni di x (per quella struttura topologica). Conviene chiamare intorno di un sottinsieme S di X un W che sia intorno di ogni punto di S ($W \in \mathcal{T}_X(x)$ per ogni $x \in S$).

La nozione di struttura topologica è equivalente a quella di topologia:

- o data una topologia \mathcal{T}_X , definiamo la struttura topologica per cui per ogni punto il filtro $\mathcal{T}_X(x)$ degli intorni è quello generato dagli aperti di X contenenti quel punto;
- o data una struttura topologica, definiamo la topologia i cui aperti sono le parti U di X che sono intorno di ogni loro punto ($U \in \mathcal{T}_X(x)$ per ogni $x \in U$);

e otteniamo corrispondenze biunivoche tra le due nozioni. La condizione locale imposta sui filtri della struttura topologica serve per garantire che la topologia corrispondente abbia gli stessi filtri di intorni (in generale, cioè senza la condizione locale, potrebbero tornare dei filtri più piccoli: se in $X = \mathbb{Z}$ definiamo che gli intorni di $n \in \mathbb{Z}$ sono gli insiemi contenenti $\{n - 1, n, n + 1\}$ otteniamo filtri senza la proprietà locale, e questi filtri definiscono la topologia banale su \mathbb{Z} ; provare con $\{n, n + 1\}$).

Per esempio alla topologia banale su X corrisponde la struttura topologica per cui $\mathcal{T}_X(x) = \{X\}$ per ogni $x \in X$; mentre alla topologia discreta corrisponde la struttura topologica per cui il filtro $\mathcal{T}_X(x)$ è l'intero filtro principale di x (per ogni $x \in X$).

Anche le nozioni di basi e prebasi di topologia e filtri della struttura topologica si corrispondono: data una topologia \mathcal{T}_X di cui \mathcal{B}_X sia base (risp. prebase) allora l'insieme degli elementi di \mathcal{B}_X che contengono x è base (risp. prebase) per $\mathcal{T}_X(x)$, e viceversa gli elementi di basi (risp. prebasi) dei filtri di una struttura topologica che sono intorni di ogni loro punto formano una base (risp. prebase) della topologia.

1.2.7. RIASSUNTO. La definizione di topologia su un insieme può dunque essere data in vari modi, e conviene spesso tenerli presenti contemporaneamente, descrivendo ogni topologia nei diversi modi:

aperti/chiusi	intorni	operatori (Kuratowski)
sottinsieme $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ (aperti di X) chiuso per intersezioni finite e unioni arbitrarie (contiene X e \emptyset).	funzione $\mathcal{T}_X : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ che ad ogni punto $x \in X$ associa un filtro $\mathcal{T}_X(x)$ con condizione locale: per ogni $x \in X$ e $V \in \mathcal{T}_X(x)$ esiste $U \subseteq V$ t.c. $x \in U$ e $U \in \mathcal{T}_X(u)$ per ogni $u \in U$.	operatore di interno $\circ : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ordinato, minore dell'identità, idempotente, commut. con intersez. finite.
sottinsieme $\mathcal{C}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ (chiusi di X) chiuso per unioni finite e intersezioni arbitrarie (contiene \emptyset e X).		operatore di chiusura ${}^- : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ordinato, maggiore dell'identità, idempotente, commut. con unioni finite.

(scriversi anche come si passa da una descrizione all'altra).

1.2.8. PUNTI LIMITE E ADERENTI AI FILTRI. Sia X spazio topologico. Diciamo che un punto $x \in X$ è punto limite di un filtro \mathcal{F} (o che il filtro converge al punto) sse il filtro \mathcal{F} contiene il filtro $\mathcal{T}_X(x)$ degli intorni del punto. Si dice che $x \in X$ è aderente al filtro \mathcal{F} se appartiene alla chiusura di tutti gli elementi del filtro, cioè se ogni suo intorno interseca ogni elemento di \mathcal{F} . Naturalmente un punto limite è aderente. Per un ultrafiltro le due nozioni sono equivalenti, e quindi un punto è aderente ad un filtro sse è punto limite di un sovrafiltro.

1.2.9. RETI E CONVERGENZA. Un insieme (parzialmente) ordinato (i.e. con relazione riflessiva e transitiva) si dice filtrante o diretto (verso l'alto) se comunque dati due suoi elementi ne esiste qualcuno maggiore di entrambi. Per esempio un filtro è un insieme filtrante se consideriamo un elemento maggiore di un altro quando è contenuto (l'idea è che sono maggiori nell'ordine gli elementi più piccoli, quelli che più precisamente indicano i limiti). Ovviamente \mathbb{N} è insieme filtrante con l'usuale ordine.

Diciamo rete in X ogni funzione da un insieme filtrante verso X (di solito si dice successione se l'insieme filtrante è \mathbb{N} , e comunque si usa notazione indiciale: se $A \rightarrow X$ si scrive x_α per l'immagine di $\alpha \in A$). Ad ogni rete $A \rightarrow X$ possiamo associare il filtro generato dagli insiemi del tipo $S_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$ (si tratta dell'immagine dell'ovvio "filtro verso l'alto" di A).

Quindi se X è spazio topologico possiamo parlare di punti limiti e aderenti ad una rete, che per definizione sono i punti limiti e aderenti al filtro corrispondente alla rete. In particolare quindi un punto è limite di una rete sse ogni suo intorno contiene tutti gli elementi della rete da un certo indice in poi; ed è aderente sse per ogni suo intorno, ed ogni indice della rete esiste un elemento di indice maggiore appartenente all'intorno (sse esiste una sottorete che lo ha come limite).

L'associazione che porta reti in filtri è una corrispondenza biunivoca, nel senso che ogni filtro su X definisce una rete in X avente gli stessi punti limiti e aderenti: al filtro \mathcal{F} in X associamo la rete avente come dominio l'insieme filtrante formato dalle coppie (A, α) con $\alpha \in A \in \mathcal{F}$, ordinato da $(A, \alpha) \leq (B, \beta)$ sse $A \supseteq B$ (controinclusione); definiamo allora la rete mandando (A, α) in $\alpha \in X$. Quindi parlare di filtri o di reti è equivalente, e sebbene la nozione di rete sembri più intuitiva, quella di filtro è tecnicamente molto più facile da gestire.

Data una rete $x : A \rightarrow X$, diciamo sottorete di x ogni rete ottenuta componendo x con una mappa ordinata $\varphi : B \rightarrow A$ dove anche B è insieme ordinato filtrante e tale che per ogni elemento di A esiste un elemento di B la cui immagine lo maggiora (cofinalità). Sottoreti corrispondono a sovrafiltri. Si faccia attenzione al fatto che sottoreti di successioni non sono di solito (sotto)successioni.

Diciamo ultrareti le reti corrispondenti ad ultrafiltri; si riconoscono in quanto per ogni sottinsieme S di X , la rete cade in S o nel suo complementare da un certo indice in poi.

1.2.10. CHIUSURA E INTERNO IN TERMINI DI RETI E FILTRI. La chiusura di un sottinsieme S di X si può caratterizzare come l'insieme dei punti di X tali che esiste una rete (o un filtro) in S convergente al punto (si intende il filtro generato in X), ovvero come l'insieme dei punti aderenti a

reti (o filtri) di S . Basta controllare le successioni se X è localmente numerabile. In particolare un insieme è chiuso sse contiene tutti i punti limiti (o aderenti) delle proprie reti (o dei propri filtri).

L'interno di un sottinsieme S di X si può caratterizzare come l'insieme dei punti di X tali che ogni rete (o filtro) in S convergente al punto sta definitivamente in S . In particolare un insieme è aperto sse ogni rete (o filtro) convergente a suoi punti sta definitivamente nell'insieme.

♣ Come esempi rilevanti in cui la topologia e in particolare convergenze e chiusure sono caratterizzate dalle reti e non dalle sole successioni, si considerino i prodotti infiniti $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (successioni con la topologia delle scatole, non quella prodotto), e $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (funzioni qualsiasi di \mathbb{R} in sè con la topologia prodotto, corrispondente alla convergenza puntuale: una rete f_α converge a f se e solo se $f_\alpha(x)$ converge a $f(x)$ per ogni x).

1.3. Funzioni continue.

1.3.1. DEFINIZIONI. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici si dice continua se l'antimmagine tramite f manda \mathcal{T}_Y in \mathcal{T}_X (antimmagini di aperti sono aperte, o equivalentemente antimmagini di chiusi sono chiusi). Basta chiaramente controllare su una (pre)base di aperti.

La funzione f è continua sse per ogni punto di X il suo filtro di intorni contiene l'antimmagine tramite f del filtro di intorni del punto immagine (si dice che la funzione è continua in x se $f^{-1}\mathcal{T}_Y(fx) \subseteq \mathcal{T}_X(x)$, e quindi una funzione è continua sse lo è in ogni punto del dominio).

La continuità si caratterizza anche "direttamente": per ogni filtro (rete) in X convergente ad un punto, il filtro (la rete) immagine converge al punto immagine (in particolare sse il filtro immagine del filtro degli intorni di un punto contiene il filtro degli intorni del punto immagine: $f\mathcal{T}_X(x) \supseteq \mathcal{T}_Y(fx)$). Equivalentemente, se per ogni sottinsieme S di X l'immagine della chiusura è contenuta nella chiusura dell'immagine.

Sono queste le nozioni intuitive di continuità: tracciare senza discontinuità (rispettare la convergenza), rispettare la vicinanza (punti vicini ad un insieme vanno in punti vicini all'immagine). Bastano le successioni se X è localmente numerabile.

1.3.2. SCHEMA. La diverse caratterizzazioni/definizione di continuità possono essere schematizzate seguendo le possibili definizioni di topologia (per esercizio, dimostrare le equivalenze; dove basta usare basi o prebas? quando basta usare le successioni?):

aperti/chiusi	intorni	filtri/reti/chiusura
$f^{-1}\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_X$ cioè: $\forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}V \in \mathcal{T}_X$ (imm.inv. di aperti è aperto).	$\forall x \in X : f^{-1}\mathcal{T}_Y(fx) \subseteq \mathcal{T}_X(x)$ (imm.inv. di intorni è intorno).	per ogni filtro \mathcal{F} convergente a x allora $f\mathcal{F}$ converge a fx .
	$\forall x \in X \text{ e } V \in \mathcal{T}_Y(fx) \text{ esiste } U \in \mathcal{T}_X(x) : fU \subseteq V$.	per ogni rete x_α convergente a x allora fx_α converge a fx .
$f^{-1}\mathcal{C}_Y \subseteq \mathcal{C}_X$ cioè: $\forall C \in \mathcal{C}_Y : f^{-1}C \in \mathcal{C}_X$ (imm.inv. di chiusi è chiuso).	$\forall x \in X : \mathcal{T}_Y(fx) \subseteq f\mathcal{T}_X(x)$.	$\forall S \subseteq X : f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

Come caratterizzare le funzioni continue in termini dell'operatore di interno?

1.3.3. ESEMPI BANALI. Se il dominio ha topologia discreta, o il codominio topologia banale, o se la funzione è costante, allora automaticamente la funzione è continua. Se il codominio è discreto, una funzione è continua sse le fibre sono aperti del dominio. Se il dominio ha topologia banale e il codominio ha i punti chiusi (o aperti), una funzione è continua sse è costante.

Se una funzione è continua, allora resta continua per ogni topologia nel dominio più fine di quella data, e per ogni topologia nel codominio meno fine di quella data.

Date due topologie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ sullo stesso insieme X , di solito non vi sono relazioni di inclusione tra le funzioni continue per \mathcal{T} e per \mathcal{T}' (usando la stessa topologia su dominio e codominio).

Cosa si può dire delle funzioni continue se il dominio ha topologia cofinita? L'immagine deve avere al più topologia cofinita (altrimenti si trova un chiuso con antimmagine non finita, quindi non chiuso).

1.3.4. COMPOSIZIONE. Si controlla immediatamente che la composizione di due funzioni continue è funzione continua (e che se f è continua in x e g continua in $f(x)$ allora $g \circ f$ è continua

in x). L'identità è funzione continua se usiamo la stessa topologia in dominio e codominio (in generale sse usiamo nel dominio una topologia più fine che nel codominio). In generale se una funzione (insiemisticamente) biiettiva è continua, non è detto che l'inversa (insiemistica) sia continua.

1.3.5. OMEOMORFISMI. Un omeomorfismo è una funzione continua che ammette una inversa continua. Un omeomorfismo è biiettivo e continuo, il viceversa è falso (serve anche la condizione di continuità dell'inversa): per esempio l'identità di uno spazio in sè dotato di due topologie una strettamente più fine dell'altra è continua in un verso e non nell'altro. In effetti l'identità è un omeomorfismo sse usiamo la stessa topologia in dominio e codominio.

Una funzione continua è omeomorfismo sse è biiettiva e bicontinua, sse induce biezioni tra gli spazi e tra le rispettive topologie. Una funzione continua che induce una biezione tra le topologie si dice un quasi-omeomorfismo.

1.3.6. PROPRIETÀ TOPOLOGICHE. Diciamo che una proprietà di uno spazio topologico è topologica se è invariante per omeomorfismi, cioè se vale la condizione: uno spazio soddisfa quella proprietà se e solo se tutti gli spazi a lui omeomorfi la soddisfano. In linea di massima le proprietà che vengono definite per gli spazi topologici sono topologiche (e di solito non lo faremo nemmeno notare esplicitamente, ma sarebbe sempre una domanda da porsi per ogni definizione). Esempi di proprietà non topologiche sono: per uno spazio metrico la nozione di limitatezza (dipende dalla metrica, la stessa topologia può essere definita da metriche diverse con proprietà metriche diverse, per esempio una limitata e una no), per uno spazio affine la proprietà di convessità (dipende dalla struttura affine e non dalla topologia), il fatto che la topologia sia definita da una fissata metrica d (il fatto invece che sia metrizzabile è proprietà topologica). Esempi di proprietà topologiche (numerabilità, separazioni, connessioni, compattezze) verranno definite nei prossimi paragrafi; un esempio curioso: per una pseudometrica la proprietà di essere una metrica è topologica (è equivalente alla proprietà hausdorff per la topologia generata).

Spazi omeomorfi hanno (tautologicamente) le stesse proprietà topologiche. Per vedere che due spazi non sono omeomorfi, basta quindi vedere che hanno diverse proprietà topologiche; per esempio $[0, 1]$ e \mathbb{S}^1 non sono omeomorfi perché togliere un punto può sconnettere il primo ma non il secondo; $[0, 1]$ e $(0, 1)$ non sono omeomorfi perché il primo è compatto e il secondo no.

1.3.7. FUNZIONI APERTE E CHIUSE. Una funzione è aperta (risp. chiusa) se manda aperti (risp. chiusi) del dominio in aperti (risp. chiusi) del codominio. Si tratta di due nozioni completamente diverse e completamente diverse dalla continuità (si osservi comunque che funzioni biettive, continue e aperte, o chiuse, sono omeomorfismi, e viceversa).

Le immersioni aperte (inclusione di un aperto in X) sono aperte, ma non chiuse; le immersioni chiuse (inclusione di un chiuso in X) sono chiuse ma non aperte; una mappa suriettiva e quoziente (cioè il codominio ha topologia indotta dalla mappa) non è di solito né aperta né chiusa, è aperta (risp. chiusa) sse i saturati per la funzione (antimmagini delle immagini, ovvero unione delle fibre dell'immagine) degli aperti (risp. dei chiusi) del dominio sono aperti (risp. chiusi).

1.3.8. TOPOLOGIE INDOTTE. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione:

(1) se X è uno spazio topologico, allora esiste una massima topologia su Y tale che f risulti continua (formata dalle parti di Y la cui antimmagine sia un aperto di X), e si dice la topologia indotta da f su Y ; ovviamente i sottinsiemi di Y le cui antimmagini formano una (pre)base per la topologia di X , sono (pre)base per la topologia indotta su Y da f ;

(2) se Y è uno spazio topologico, allora esiste una minima topologia su X tale che f risulti continua (formata dalle antimmagini di aperti di Y), e si dice la topologia indotta da f su X ; ovviamente l'antimmagine di una (pre)base dà una (pre)base per la topologia indotta.

In particolare un sottinsieme di uno spazio topologico si intende sempre dotato della topologia indotta dall'inclusione (sono aperti le intersezioni degli aperti col sottinsieme, sono chiusi le intersezioni dei chiusi col sottinsieme); e un quoziente si intende sempre dotato della topologia indotta dalla proiezione.

Più in generale:

(1) se Y è un insieme e $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ sono funzioni con X_α spazi topologici, allora esiste una unica topologia su Y massimale per la proprietà di rendere continue tutte le funzioni f_α ; ha come aperti le parti di Y le cui antimmagini tramite f_α sono aperti di X_α per ogni α e si dice la topologia indotta dalla famiglia f_α . Tali topologie sono dette induttive o forti o finali (per la famiglia di morfismi).

(2) d'altro lato, se X è un insieme e $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$ sono funzioni con Y_α spazi topologici, allora esiste una unica topologia su X minimale per la proprietà di rendere continue tutte le funzioni f_α ; ha come prebase la famiglia delle antimmagini tramite f_α degli aperti di Y_α e si dice la topologia indotta dalla famiglia f_α . Tali topologie sono dette proiettive o deboli o iniziali (per la famiglia di morfismi).

♣ Esempi di tali costruzioni sono i prodotti di spazi topologici (con topologia debole delle proiezioni sui fattori), le unioni di spazi topologici (con topologia induttiva delle inclusioni), per esempio gli spazi proiettivi o gli spazi \mathbb{R}^∞ , vedasi gli esempi.

Tutte queste costruzioni hanno la proprietà fondamentale di riconoscere la continuità di funzioni da spazi con topologia induttiva (risp. verso spazi con topologia proiettiva) semplicemente dalla continuità delle funzioni composte (con la famiglia che definisce la topologia induttiva, risp. proiettiva).

1.3.9. RICOPRIMENTI. Un ricoprimento di uno spazio topologico è una famiglia di sottinsiemi (pensati tutti con la topologia indotta dall'inclusione) la cui unione sia tutto lo spazio. Si dice ricoprimento aperto (risp. chiuso) se i suoi elementi sono aperti (risp. chiusi) dello spazio.

È ovvio che un sottinsieme di X è un aperto (risp. chiuso) sse intersecato con ogni elemento di un ricoprimento aperto dà un aperto (risp. chiuso) di quell'elemento. La stessa proprietà è paleamente falsa per i ricoprimenti chiusi.

Diciamo che un ricoprimento è localmente finito se ogni punto dello spazio ha un intorno che interseca solo un numero finito di elementi del ricoprimento. Un ricoprimento chiuso localmente finito riconosce gli aperti (risp. chiusi), nel senso prima detto.

1.3.10. LOCALMENTE CHIUSI. Sono localmente chiusi gli insiemi per cui ogni loro punto ha un intorno che interseca l'insieme in un chiuso dell'intorno; sono caratterizzati dall'essere aperti della loro chiusura, ovvero di essere intersezione di un aperto e di un chiuso.

1.4. Proprietà di numerabilità.

Si tratta di proprietà che misurano in qualche senso topologico (e non insiemistico) quando è “grande in senso topologico” uno spazio topologico.

1.4.1. SEPARABILITÀ. Uno spazio si dice separabile se ammette un sottinsieme denso numerabile. Ad esempio \mathbb{R} con la topologia usuale lo è (avendo \mathbb{Q} come denso numerabile), mentre \mathbb{R} con la topologia discreta non lo è.

1.4.2. NUMERABILITÀ. Uno spazio topologico si dice (topologicamente) numerabile (oppure a base numerabile, oppure “secondo numerabile”) se esiste una base numerabile della sua topologia; in tal caso è separabile (basta prendere un punto in ogni aperto di una base numerabile per ottenere un insieme numerabile denso), il viceversa falso (per esempio \mathbb{R} con base di aperti gli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra: si chiama retta di Sorgenfrey, la sua topologia è più fine di quella usuale di \mathbb{R} , ma ha comunque \mathbb{Q} come denso numerabile).

Uno spazio topologico si dice localmente (topologicamente) numerabile (oppure localmente a base numerabile, oppure “primo numerabile”) se ogni suo punto ammette una base numerabile di intorni (per esempio, banalmente ogni spazio discreto è localmente numerabile, e ogni spazio (pseudo)metrico lo è usando dischi con raggi razionali). Spazi numerabili sono localmente numerabili, il viceversa essendo falso (per esempio \mathbb{R} con la topologia metrica discreta, si tratta di uno spazio localmente numerabile, non numerabile, né separabile).

Si osservi anche che separabile e localmente numerabile non implica numerabile: un insieme non numerabile con la topologia i cui aperti contengono un fissato punto è un controesempio.

Infine se uno spazio non è numerabile, le proprietà di essere separabile e localmente numerabile sono indipendenti: esempi di spazi separabili e non localmente numerabili sono gli insiemi più che numerabili con topologia cofinita, oppure la compattificazione di Alexandroff dei razionali.

1.5. Proprietà di separazione.

Si tratta di proprietà che misurano quanto una topologia su un insieme riesce a distinguere punti diversi (attenzione, non c'entra nulla con la separabilità; purtroppo la terminologia topologica è piuttosto caotica e inconsistente, ma ormai classica!).

1.5.1. PROPRIETÀ DI SEPARAZIONE. Uno spazio topologico si dice:

- T_0 o Kolmogorov se per ogni coppia di punti distinti esiste un aperto contenente l'uno e non l'altro (cioè un intorno dell'uno che non contiene l'altro punto) o viceversa;
- T_1 o Fréchet se per ogni coppia di punti distinti esiste un aperto contenente l'uno e non l'altro (cioè un intorno di ciascuno che non contiene l'altro), ciò vale sse i punti sono chiusi;
- T_2 o Hausdorff se per ogni coppia di punti distinti esistono intorni (aperti) disgiunti (si dice che gli intorni separano i punti); uno spazio è hausdorff sse filtri (o reti) convergenti hanno un unico limite.
- regolare se per ogni punto e ogni chiuso che non lo contiene esistono aperti disgiunti contenenti rispettivamente il punto e il chiuso (si dice che gli intorni separano chiusi e punti, ed è equivalente chiedere che le chiusure dei due aperti siano disgiunte); vale sse per ogni punto gli intorni chiusi sono una base;
- T_3 o hausdorff regolare se è T_0 e regolare (e allora è hausdorff: per spazi regolari T_0 , T_1 e T_2 sono equivalenti);
- completamente regolare se per ogni punto e ogni chiuso che non lo contiene esiste una funzione reale continua a valori in $[0, 1]$ che vale 0 nel punto e 1 nel chiuso (separazione di punti e chiusi disgiunti tramite funzioni continue); in particolare è regolare, ma non vale il viceversa;
- $T_{3\frac{1}{2}}$ o Tychonoff se è T_0 e completamente regolare (e allora è T_3 ; per spazi completamente regolari T_0 , T_1 e T_2 sono equivalenti); vedremo che questi spazi hanno una importanza strategica per alcune loro proprietà geometrico-analitiche (spazi uniformizzabili).
- normale se per ogni coppia di chiusi disgiunti esistono aperti disgiunti contenenti rispettivamente i due chiusi (si dice che gli intorni separano chiusi disgiunti, ed è equivalente chiedere che le chiusure dei due aperti siano disgiunte); vale sse per ogni chiuso gli intorni chiusi sono una base dei suoi intorni; il lemma di Uryshon afferma che normale implica “completamente normale” (separazione di chiusi disgiunti tramite funzioni continue; di conseguenza spesso il termine completamente normale è usato con significato diverso!); da osservare che, contrariamente alle altre proprietà, la normalità non è stabile per operazioni importanti tipo il prodotto cartesiano e il passaggio a sottospazi;
- T_4 o hausdorff normale o Uryshon se è normale e T_1 (allora è $T_{3\frac{1}{2}}$); questi spazi sono importanti perché hanno forti proprietà di estensione di funzioni continue definite su sottinsiemi: precisamente ogni funzione reale continua definita su un chiuso si estende con continuità a tutto lo spazio (cioè è restrizione al chiuso di funzioni continue sullo spazio, lemma di estensione di Tietze, ma non è facile).

1.5.2. CARATTERIZZAZIONI IN TERMINI DI CHIUSI. Tenendo conto che parlare di chiusi disgiunti è come parlare di un chiuso e di un suo intorno aperto (il complementare dell'altro chiuso), e che parlare di un punto non appartenente ad un chiuso è come parlare di un punto e un suo intorno aperto, si vede che: T_0 significa che dati due punti, almeno uno non appartiene alla chiusura dell'altro; T_1 significa che dati due punti, ciascuno non appartiene alla chiusura dell'altro; T_2 significa che l'intersezione degli intorni chiusi di un punto contiene solo il punto; T_3 significa che l'intersezione degli intorni chiusi di un chiuso contiene solo il chiuso (ovvero ogni aperto contiene un intorno chiuso di ogni suo punto); T_4 significa che ogni aperto contiene un intorno chiuso di ogni suo chiuso.

La condizione $T_{3\frac{1}{2}}$ significa che gli zeri di funzioni reali continue sono una base per i chiusi (ogni chiuso è intersezione di zeri di funzioni reali continue).

1.5.3. AVVERTENZA. La terminologia non è costante in letteratura e addirittura i termini $T_3/T_{3\frac{1}{2}}/T_4$ e regolare/completamente regolare/normale possono essere invertiti a seconda dei testi; quindi in ogni libro di topologia bisogna controllare il significato di questi termini!

☒ **1.5.4. URYSHON E TIETZE.** Per dimostrare il lemma di Uryshon si può procedere così: si sceglie una biiezione $\mathbb{N} \rightarrow D := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (sia $n \mapsto r_n$, $r_0 = 0$). dati i due chiusi disgiunti A, B di X , si costruisce per induzione una sequenza di aperti U_r per $r \in D$ tale che $A \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq X \setminus B$ per ogni $r \in D$ e $\overline{U_r} \subseteq U_s$ per ogni $r < s$ in D (ad ogni passo n si applica la normalità al chiuso unione di A e delle chiusure degli U_{r_k} già costruiti con $r_k < r_n$ e all'aperto intersezione di $X \setminus B$ e degli U_{r_k} già costruiti con $r_k > r_n$). Allora la funzione $f(x) = \inf\{s \in D : x \in U_s\} = \sup\{r \in D : x \notin \overline{U_r}\}$ risponde al problema.

Per dimostrare il lemma di Tietze: prima si osserva che data una funzione continua $f : A \rightarrow [-M, M]$ da un chiuso di X , si può trovare una funzione continua $g_1 : X \rightarrow [-M/3, M/3]$ tale che

$|f(x) - g_1(x)| \leq (2/3)M$ per ogni $x \in A$ (usando Uryshon sulle immagini inverse di $[-M, -M/3]$ e $[M/3, M]$). Per induzioni si ottengono allora funzioni g_i tali che $|f(x) - \sum_{i \leq n} g_i(x)| \leq (2/3)^n M$ per ogni $x \in A$ e $|g_i(x)| \leq (2/3)^i M/2$ per ogni $x \in X$. Allora la serie $g = \sum_i g_i$ risponde al problema.

1.5.5. FUNZIONI CON CODOMINIO HAUSDORFF. Se il codominio è hausdorff, il luogo di coincidenza di due funzioni è chiuso, quindi due funzioni coincidono sse coincidono su un insieme denso; il grafico di una funzione è chiuso (nel prodotto di dominio e codominio). Uno spazio è hausdorff sse la sua immagine diagonale è chiusa nel suo quadrato cartesiano.

1.5.6. (CONTRO)ESEMPI. Un insieme con almeno due elementi, dotato della topologia banale ovviamente non soddisfa ad alcuna proprietà T di separazione (però, non essendoci chiusi non banali risulta tautologicamente normale, completamente regolare e regolare). Uno spazio che non soddisfa a nessuna proprietà di separazione si ottiene da \mathbb{R} usando la topologia generata dalle semirette $(-\infty, n)$ e $(-n, \infty)$ per $n \in \mathbb{N}$ non nullo.

Un insieme non vuoto X con la topologia definita usando come aperti (il vuoto e) gli insiemi che contengono un fissato $P \in X$, è solo T_0 . Più in generale, se X è spazio topologico definiamo su $X \sqcup \{P\}$ la topologia i cui aperti sono (il vuoto e) $U \sqcup \{P\}$ con U aperto di X (si dice topologia di estensione dei chiusi: i chiusi sono esattamente i chiusi di X): allora $X \sqcup \{P\}$ è T_0 sse lo è X , e non è mai $T_{1,2,3}$.

Se invece usiamo come chiusi gli insiemi del tipo $F \sqcup \{P\}$ con F chiuso di X (e il vuoto), otteniamo la topologia di estensione degli aperti. Questi spazi sono sempre normali (condizione vuota: non esistono chiusi non vuoti disgiunti), ma regolari o hausdorff o T_1 (il punto P è chiuso con unico intorno tutto lo spazio), T_0 sse lo era X .

Su ogni insieme X possiamo considerare la topologia dei complementi finiti (sono aperti il vuoto e i complementari dei sottinsiemi finiti, ovvero chiusi solo i sottinsiemi finiti e tutto l'insieme). Se X è finito, si tratta della topologia discreta. Se X è infinito di tratta della minima topologia T_1 su X , e siccome i suoi aperti sono densi (l'intersezione di due aperti non è mai vuota), non può essere T_2 .

Un esempio di spazio T_2 ma non più che T_2 si può ottenere a partire da \mathbb{R}^2 , togliendo l'origine e aggiungendo due punti O_\pm i cui intorni abbiano come base i semidischi aperti dati dalle intersezioni dei dischi aperti centrati nell'origine con i semipiani aperti π_\pm complementari dell'asse delle ascisse (rispettivamente). Si chiama il piano con doppia origine, è visibilmente T_2 , ma gli intorni dei punti O_\pm hanno chiusure mai disgiunte (si intersecano in un tratto dell'asse delle ascisse). Lo stesso esempio fa vedere che spazi T_2 non sono necessariamente “completamente hausdorff” (che significa separare punti distinti con funzioni continue a valori in $[0, 1]$), né $T_{2\frac{1}{2}}$ (che significa separare punti distinti con intorni chiusi disgiunti); che relazioni ovvie vi sono tra queste nozioni?

Un esempio ancora più esoterico di spazio non più che T_2 si ottiene da $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{\geq 0}$ e un reale $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Come intorni di $(x, y) \in X$ gli insiemi formati dal punto stesso e da due intervalli aperti delle ascisse con centro in $x \pm y/\vartheta$. Si verifica che lo spazio è T_2 , ma le chiusure di qualsiasi due aperti si intersecano sempre.

Un esempio più semplice si ottiene usando nella retta reale la topologia con gli intorni usuali per i punti diversi dall'origine, e come intorni dell'origine quelli usuali ma togliendo gli inversi dei numeri interi non nulli (si vede allora che l'origine è chiusa e l'insieme formato dagli inversi dei numeri interi non nulli sono chiusi disgiunti non separabili).

Esempi di spazi regolari, ma non completamente regolari sono piuttosto difficili. Il più semplice sembra il semipiano di Mysior: si tratta del semipiano reale (ordinate non negative) unito un punto esterno $+\infty$, con la topologia discreta intorno ai punti con ordinata positiva, e con i seguenti intorni per gli altri: intorni di $(x, 0)$ sono formati (dal punto e) da tutti tranne un numero finito dei punti dei segmenti verso $(x, 2)$ e $(x + 2, 2)$; intorni di $+\infty$ sono gli insiemi con ascissa in semirette positive (si verifica che la semiretta $(-\infty, 1]$ è chiusa, e che ogni funzione continua che vi si annulla, si annulla anche su $+\infty$).

Un esempio di spazi completamente regolari ma non normali si ottiene dal semipiano di Niemytzski: si tratta di $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ con la topologia euclidea in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$, e definendo gli intorni di base di punti dell'asse delle ascisse usando dischi aperti tangentici in quel punto. Si tratta di uno spazio separabile, ma non numerabile (l'asse delle ascisse ha topologia discreta e non è numerabile). Razionali e irrazionali sull'asse delle ascisse sono chiusi disgiunti non separabili.

Un altro esempio si ottiene usando la topologia di Sorgenfrey sulla retta reale: base per gli aperti

sono gli intervalli del tipo $[a, b]$: si tratta di uno spazio localmente numerabile, separabile, ma non numerabile (quindi non può essere metrizzabile). Il prodotto di due tali rette non è normale (usare la diagonale).

Chiaramente gli spazi euclidei usuali \mathbb{R}^n sono normali.

1.5.7. Sia dato uno spazio topologico X qualsiasi. Vi è un massimo quoziente che (con la topologia indotta) sia T_0 : basta usare la relazione di equivalenza in X data da $x \sim y$ sse hanno la stessa chiusura, cioè $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$; si vede allora facilmente che la mappa quoziente $X \rightarrow X/\sim$ ha la proprietà di fattorizzare qualsiasi funzione continua da X verso uno spazio T_0 .

Vi è inoltre un massimo quoziente che (con la topologia indotta) sia T_1 : basta usare la relazione di equivalenza in X generata da $x \approx y$ se uno appartiene alla chiusura dell'altro, cioè $x \in \overline{\{y\}}$ (o $y \in \overline{\{x\}}$); da notare che qui bisogna prendere la relazione di equivalenza generata, essendo la condizione non transitiva; si vede allora facilmente che la mappa quoziente $X \rightarrow X/\approx$ ha la proprietà di fattorizzare qualsiasi funzione continua da X verso uno spazio T_1 .

1.5.8. NOZIONI TOPOLOGICHE SOTTO-HAUSDORFF. Vi sono alcune nozioni che diventano banali negli spazi hausdorff, e che sono invece importanti negli altri casi: si dice che un chiuso è irriducibile se non è unione di due chiusi propri (nei casi hausdorff solo i punti sono chiusi irriducibili); si dice che un punto è generico per un chiuso (necessariamente irriducibile) se tale chiuso coincide con la chiusura del punto. Uno spazio si dice sobrio se ogni chiuso irriducibile ha un unico punto generico. Dato qualsiasi spazio topologico, esiste un unico (a meno di omeomorfismo) spazio sobrio associato (i suoi punti sono i chiusi irriducibili del primo), con un morfismo canonico (ogni punto viene mandato nella sua chiusura) che induce una biiezione le due topologie (quasi-isomorfismo).

Uno degli esempi più importanti di topologie non hausdorff è dato dagli spazi affini (risp. proiettivi) dotati delle topologie di Zariski, in cui i chiusi sono generati dagli zeri di polinomi (risp. omogenei). Si osservi per esercizio che il prodotto di topologie Zariski non è la topologia Zariski del prodotto (che è molto più ricca). Inoltre, la nozione di chiuso irriducibile nella topologia Zariski riflette la nozione di polinomi irriducibili e di ideali primi (nozioni algebriche).

1.6. (pseudo)metriche e topologie (pseudo)metrizzabili.

1.6.1. (PSEUDO)METRICHE. Una pseudometrica su un insieme X è una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nulla sulla diagonale ($d(x, x) = 0$ per ogni $x \in X$), simmetrica ($d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$) e verificante la disegualanza triangolare ($d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$).

Si dice una metrica se si annulla solo sulla diagonale, ovvero se $d(x, y) = 0$ implica $x = y$ (ovvero sse $x \neq y$ implica $d(x, y) > 0$).

Ogni pseudometrica definisce una relazione di equivalenza tramite $x \sim y$ sse $d(x, y) = 0$, e sull'insieme X/\sim la pseudometrica induce una metrica nel modo ovvio.

Due pseudometriche si dicono equivalenti se una è multiplo scalare dell'altra.

1.6.2. SPAZI (PSEUDO)METRICI. Uno spazio (pseudo)metrico è un insieme dotato di una (pseudo)metrica. Una isometria è una funzione tra due spazi (pseudo)metrici che rispetta le (pseudo)-metriche (automaticamente iniettiva se il dominio è spazio metrico). Due spazi si dicono isometrici se tra loro esiste una biiezione che sia una isometria.

1.6.3. TOPOLOGIA ASSOCIATA ALLA (PSEUDO)METRICA. In ogni spazio pseudometrico definiamo la topologia associata alla pseudometrica come la topologia avente per prebase i dischi aperti $D(x, r^-) = \{y : d(x, y) < r\}$ al variare di $x \in X$ e di $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Si tratta di una topologia hausdorff se e solo se d è una metrica (basta che sia T_0 , in effetti; quindi per una pseudometrica la proprietà di essere una metrica è topologica, nel senso che si caratterizza con la topologia definita). Si osservi che i dischi aperti sono aperti (di base) per definizione; i dischi chiusi sono chiusi? La chiusura di un disco aperto non è necessariamente il disco chiuso (per esempio per la metrica discreta, i dischi aperti sono anche chiusi della topologia).

Ovviamente, le isometrie sono continue. Si ritrova qui la caratterizzazione ε - δ (definizione dell'Analisi) della continuità.

Diciamo che uno spazio è (pseudo)metrizzabile se la sua topologia è definita da una qualche (pseudo)metrica, e che due (pseudo)metriche su un insieme sono topologicamente equivalenti se definiscono la stessa topologia. Ovviamente metriche equivalenti sono topologicamente equivalenti, il viceversa essendo falso (per esempio su \mathbb{Z} la metrica discreta e quella indotta da \mathbb{R}).

1.6.4. DIAMETRI E INSIEMI LIMITATI. Definiamo la distanza tra due sottinsiemi di uno spazio pseudometrico come l'inf delle distanze tra i punti dell'uno e quelli dell'altro. Il diametro di un insieme come il sup delle distanze tra due suoi punti. Limitati gli insiemi con diametro finito (sse sono contenuti in qualche disco).

Fissato un sottinsieme Y di uno spazio (pseudo)metrico X , la funzione reale su X definita da $d_Y(x) = d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$ è continua.

1.6.5. ESEMPI: Ovviamente la metrica discreta (distanza 0 oppure 1 a seconda che i due punti coincidono o meno) dà la topologia discreta, la pseudometrica banale (distanza costantemente nulla) dà la topologia banale.

Ogni metrica è topologicamente equivalente ad una metrica con valori limitati in $[0, 1]$: data d , si usi la metrica $\frac{d}{1+d}$ (per mostrare che soddisfa alla disuguaglianza triangolare si usi che $a \leq b + c$ implica, passando agli inversi, sommando 1 e invertendo, che $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$), oppure $\min(1, d)$.

Su \mathbb{R} la metrica usuale $d(x, y) = |x - y|$ dà la topologia usuale, come pure $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

Su $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ possiamo indurre una metrica che lo renda isometrico a $[-1, 1]$ (con la metrica usuale) attraverso la mappa biiettiva \arctan (per esempio).

Metriche su \mathbb{Q} invarianti per traslazione: a parte quella reale, possiamo per ogni numero primo p definire la metrica p -adica in cui la distanza tra due punti è $p^{-v_p(d)}$ dove d è la differenza dei due numeri, e $v_p(d)$ è la sua valutazione p -adica, cioè l'intero $v \in \mathbb{Z}$ tale che p^v divide esattamente d ($d = p^v a/b$ con a, b coprimi con p). Si tratta di metriche per cui la disuguaglianza triangolare si verifica in forma cosiddetta ultrametrica:

$$d(x, y) \leq \sup(d(x, z), d(z, y))$$

e per conseguenza vale l'uguaglianza se le due distanze a destra sono diverse (tutti i triangoli sono isosceli!). Con questa proprietà si può verificare che ogni punto di un disco è centro del disco, e che la circonferenza di un disco è unione di dischi aperti dello stesso raggio (quindi è un aperto!). Le metriche indotte su \mathbb{Z} sono banali nel caso reale, non banali nel caso p -adico, dove i dischi centrati in 0 sono gli ideali principali generati dalle potenze di p .

In \mathbb{R}^2 le metriche euclidea ($d_2(x, y) = \|x - y\|$), del taxi ($d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$), e del sup ($d_0(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$) sono topologicamente equivalenti (perché $d_0 \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_0$) e non sono equivalenti (hanno i dischi di forma rotonda, romboidale, quadrata rispettivamente).

In \mathbb{R}^2 studiare la metrica dell'ufficio postale: $d(x, y) = d(x, 0) + d(0, y)$ (se $x \neq y$), e la pseudometrica data dalla somma delle distanze dagli assi ($d(x, y) = \min(|x_1|, |x_2|) + \min(|y_1|, |y_2|)$ se $x \neq y$).

1.6.6. SEPARABILITÀ E NUMERABILITÀ. Ogni spazio (pseudo)metrico è localmente numerabile (basta usare dischi di raggio razionale). Separabilità e numerabilità sono equivalenti per spazi (pseudo)metrici: infatti possiamo usare i punti di un insieme denso numerabile D come centri di dischi con raggi razionali (quindi numerabili) per ottenere una base della topologia. Allora ogni aperto è unione di elementi di questa base: sia infatti U l'aperto, $x \in U$ (non in D , altrimenti è banale) e troviamo un elemento di base contenente x e contenuto in U . Sia $3q$ un raggio razionale tale che il disco centrato in x sia contenuto in U (essendo U aperto), e sia $y \in D$ punto con $d(x, y) < q$ (essendo D denso): allora il disco centrato in y e di raggio $2q$ appartiene alla base, contiene x ed è contenuto nel disco di partenza, quindi in U . Quindi U è unione dei dischi centrati in punti di D con raggi razionali che siano contenuti in U .

In particolare uno spazio separabile ma non topologicamente numerabile non può essere (pseudo)-metrizzabile.

1.6.7. CHIUSURA E NORMALITÀ. In uno spazio (pseudo)metrizzabile: la chiusura di un insieme coincide con i punti a distanza nulla da esso, ogni chiuso è intersezione numerabile di aperti, ogni aperto è unione numerabile di chiusi.

Dati K compatto e Y chiuso di X metrizzabile, abbiamo $d(K, Y) = 0$ sse $K \cap Y \neq \emptyset$. In particolare, metrizzabile implica normale.

1.6.8. Per uno spazio pseudometrico le proprietà T_0, T_1, T_2 (e superiori?) sono equivalenti, e mostrano anche che la proprietà di essere una metrica è topologica (dipende solo dalla topologia

associata alla pseudometrica). In particolare, uno spazio topologico che sia T_0 ma non (T_1 o) T_2 non può essere (pseudo)metrizzabile.

☒ 1.6.9. CRITERI DI METRIZZABILITÀ. Dalle osservazioni precedenti si possono ricavare vari modi per mostrare che uno spazio topologico non è (pseudo)metrizzabile: per esempio se non è localmente topologicamente numerabile, oppure se è separabile e non topologicamente numerabile, oppure se è T_0 e non T_1 , o T_1 e non T_2 , ecc. Dare dei criteri per la metrizzabilità di uno spazio topologico è più difficile, e tra i criteri classici i principali sono i seguenti.

URYSOHN(-TYCHONOV): uno spazio topologico è separabile e metrizzabile se e solo se è hausdorff, regolare e (topologicamente) numerabile. In particolare uno spazio compatto è metrizzabile sse è (topologicamente) numerabile.

NAGATA-SMIRNOV: uno spazio topologico è metrizzabile se e solo se è hausdorff, regolare e ammette una base della topologia che sia unione numerabile di famiglie localmente finite di aperti (localmente finite significa che ogni punto ha un intorno che interseca solo un numero finito di aperti della famiglia); quest'ultima proprietà viene spesso detta “a base σ -localmente finita”.

BING: uno spazio topologico è metrizzabile se e solo se è T_0 , regolare e ammette una base della topologia che sia unione numerabile di famiglie localmente discrete di aperti (localmente discrete significa che ogni punto ha un intorno che interseca solo uno degli aperti della famiglia); quest'ultima proprietà viene spesso detta “a base σ -localmente discreta”.

☒ 1.6.10. DISTANZA DI HAUSDORFF. Dato uno spazio pseudometrico (X, d) possiamo introdurre in $\mathcal{P}(X)$ la “pseudometrica” di hausdorff $d_H : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ tramite

$$d_H(S, T) = \max \left(\sup_{s \in S} d(s, T), \sup_{t \in T} d(S, t) \right)$$

dove $d(x, Z) = \inf_{z \in Z} d(x, z)$ per $x \in X$ e $Z \subseteq X$ (il max tra i due termini serve per la simmetria). Conviene osservare che

$$d_H(S, T) = \inf \left\{ \varepsilon : S \subseteq T_\varepsilon \text{ e } T \subseteq S_\varepsilon \right\}$$

dove per $Z \subseteq X$ definiamo l’ ε -ispessimento come $Z_\varepsilon = \{x \in X : d(x, Z) < \varepsilon\}$ (unione delle palline aperte di raggio ε e centrate in punti di Z).

Si vede subito che $d_H(S, T) = d_H(T, S)$, che $d_H(S, T) = 0$ sse $\overline{S} = \overline{T}$ (i due insiemi hanno la stessa chiusura), e la disuguaglianza triangolare $d_H(S, T) \leq d_H(S, Z) + d_H(Z, T)$ (conviene osservare prima che $d(x, T) \leq d(x, Z) + d_H(Z, T)$ e poi passare alla funzione di hausdorff).

In particolare d_H è una pseudometrica sull’insieme dei limitati di X , ed è una metrica sull’insieme dei chiusi limitati. In generale viene usata per studiare limiti di successioni di sottinsiemi di X , anche in casi non limitati.

1.7. Famiglie di (pseudo)metriche e topologie uniformizzabili.

1.7.1. SPAZI UNIFORMI. Una famiglia di (pseudo)metriche su un insieme X determina una topologia su X usando come prebase di aperti i dischi al variare di centro, raggio e (pseudo)metriche. Si dice che lo spazio è uniforme (e ogni tale topologia uniformizzabile), ed è hausdorff sse per ogni coppia di punti esiste una (pseudo)metrica per cui hanno distanza positiva. La topologia definita da una famiglia di pseudometriche può essere hausdorff anche se nessuna della pseudometriche è una metrica.

Ogni famiglia di pseudometriche è topologicamente equivalente ad una famiglia filtrante di pseudometriche (significa che date due pseudometriche ne esiste un’altra maggiore di entrambe), usando la famiglia dei sup sulle parti finite. Per tali famiglie i dischi sono base della topologia.

1.7.2. PSEUDOMETRIZZABILITÀ. La topologia definita da una famiglia finita di pseudometriche è chiaramente pseudometrizzabile: basta usare come metrica il max delle distanze per la famiglia data (o anche la somma, o la radice della somma dei quadrati: sono tutte pseudometriche topologicamente equivalenti e che definiscono la stessa topologia della famiglia data).

Se invece la famiglia di metriche è più che numerabile, allora la topologia generata non è localmente numerabile, e quindi non può essere pseudometrizzabile (ovviamente, supponiamo che la famiglia di pseudometriche sia “minimale”, ovvero che la stessa topologia non possa essere definita da un sottinsieme delle metriche di cardinalità minore).

Ogni famiglia numerabile di (pseudo)metriche è topologicamente (e anche uniformemente, vedere dopo) equivalente ad una sola (pseudo)metrica: basta usare metriche d_i limitate da 1 e poi usare la serie $d = \sum_i d_i / 2^i$ come (pseudo)metrica (confrontare gli aperti di base). Quindi ogni spazio topologizzato da una famiglia numerabile di pseudometriche è pseudometrico. In particolare ogni prodotto finito o numerabile di spazi pseudometrici è pseudometrico.

Per confrontare le basi di aperti della topologia \mathcal{T} definita dalle pseudometriche (limitate da 1) d_i (per $i \in \mathbb{N}$) e della topologia \mathcal{T}_d definita da d si procede in questo modo. Ogni intorno di prebase di $\mathcal{T}(x)$ è dato da $D_i(x, \varepsilon) = \{y \in X : d_i(x, y) < \varepsilon\}$, e questo contiene l'aperto di base $D(x, \varepsilon/2^i) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon/2^i\}$, come si verifica subito, quindi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$. D'altro lato, sia $D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ intorno di base di $\mathcal{T}_d(x)$, e sia N tale che $\sum_{i>N} 1/2^i < \varepsilon/2$. Mostriamo allora che l'intersezione dei dischi $D_i(x, \varepsilon/4)$ per $i = 0, \dots, N$ (aperto di base della \mathcal{T}) è contenuto in $D(x, \varepsilon)$:

$$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{d_i(x, y)}{2^i} < \sum_{i \leq N} \frac{\varepsilon/4}{2^i} + \sum_{i > N} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4} 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

quindi $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}$ e le due topologie coincidono.

1.7.3. CARATTERIZZAZIONE DEGLI SPAZI UNIFORMIZZABILI (COMPLETA REGOLARITÀ). Per uno spazio topologico X le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (1) X è completamente regolare (separazione di punti e chiusi con funzioni continue);
- (2) X ha la topologia debole della famiglia delle funzioni continue di X in \mathbb{R} ;
- (3) X è uniformizzabile (ovvero la topologia è definita da una famiglia di pseudometriche);
- (4) X è sottospazio di un prodotto di spazi pseudometrizzabili.

Se poi lo spazio è hausforff (cioè T_2 e quindi $T_{3\frac{1}{2}}$) è equivalente anche:

- (5) X è sottospazio di I^A con $I = [0, 1]$ (come A si può usare l'insieme delle funzioni continue $C(X, [0, 1])$, o un insieme formato dalle funzioni d_x , date da $d_x(y) = d(x, y)$, al variare di x nei punti dello spazio e d in un insieme di pseudometriche limitate che definiscono la topologia).

Per verificare le equivalenze, conviene prima di tutto osservare che data una topologia \mathcal{T} su X , la topologia indotta su X dalla famiglia delle funzioni continue da X (con topologia \mathcal{T}) a \mathbb{R} è in generale più debole della topologia \mathcal{T} (in effetti sono uguali se e solo se i chiusi di \mathcal{T} sono gli zeri di insiemi di funzioni continue da X a \mathbb{R}).

Per vedere che (2) implica (3) confrontare la topologia con quella definita dalla famiglia di pseudometriche definite da $d_f(x, x') = |f(x) - f(x')|$ al variare di f nelle funzioni continue di X in \mathbb{R} .

Per vedere che (3) implica (2) basta osservare che per ogni pseudometrica d e ogni punto x abbiamo una funzione continua $d_x(x') = d(x, x')$.

Per mostrare che (1) implica (2) consideriamo un punto x e un suo intorno aperto U ; allora il complementare è un chiuso che non contiene x , quindi esiste una funzione reale continua f che li separa: l'antimmagine dell'intervallo $[0, 1/2]$ è allora un aperto della topologia debole contenuto in U , quindi anche U è intorno per la topologia debole.

Per mostrare che (3) implica (1), consideriamo un punto x e un chiuso C che non lo contiene. Per ipotesi il complementare U del chiuso contiene una intersezione finita di dischi $D_d(x, \varepsilon)$ (al variare di d in un numero finito di pseudometriche), quindi la funzione $f = \max_d d_x$ è continua, e vale 0 in x , ed è maggiore o uguale ad ε sul complementare di U . La funzione $\frac{1}{\varepsilon} \min(f, \varepsilon)$ è allora continua a valori in $[0, 1]$, nulla in x e costantemente 1 su C .

Per vedere che (3) e (4) sono equivalenti basta confrontare gli aperti di base della topologia definita dalla famiglia di pseudometriche e di quella definita dalla mappa diagonale $X \rightarrow \prod_d (X, d)$ (nel codominio la topologia prodotto degli spazi pseudometrizzabili).

⊗ **1.7.4.** In particolare, uno spazio uniforme è (pseudo)metrizzabile sse è a base numerabile.

⊗ 1.7.5. UNIFORMITÀ. Data una famiglia \mathcal{P} di pseudometriche su X , definiamo l'uniformità associata $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ come il filtro della diagonale in $X \times X$ generato da $U_{d,r} = d^{-1}[0, r]$ al variare di $d \in \mathcal{P}$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Per ogni $U \in \mathcal{U}(\mathcal{P})$ e $x \in X$ definiamo $U(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$. Allora $U(x)$ al variare di $U \in \mathcal{U}(\mathcal{P})$ dà il filtro degli intorni di x per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ definita dalla famiglia di pseudometriche.

Una topologia \mathcal{T} si dice compatibile con una uniformità \mathcal{U} se \mathcal{U} induce la topologia \mathcal{T} su X e in tal caso \mathcal{U} è contenuta nel filtro degli intorni della diagonale per la topologia prodotto in $X \times X$. Se \mathcal{T} è compatta e compatibile con \mathcal{U} , allora \mathcal{U} è unica.

☒ 1.7.6. Due pseudometriche sono dette uniformemente equivalenti se definiscono la stessa uniformità su X , e allora sono anche topologicamente equivalenti; il viceversa è falso: le metriche usuale e quella twistata da arctan su \mathbb{R} sono topologicamente ma non uniformemente equivalenti.

☒ 1.7.7. FUNZIONI UNIFORMI(/EMENTE CONTINUE). Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra spazi uniformi si dice uniformemente continua (o uniforme) se per ogni $V \in \mathcal{U}_Y$ esiste $U \in \mathcal{U}_X$ tale che $(f \times f)U \subseteq V$, quindi sse per ogni $V \in \mathcal{U}_Y$ si ha $(f \times f)^{-1}V \in \mathcal{U}_X$.

In termini di pseudometriche della famiglia \mathcal{P}_Y , ciò vale sse $(d(f \times f))^{-1}[0, \varepsilon] \in \mathcal{U}_X$ per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, e quindi sse per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste una famiglia finita $d_i \in \mathcal{P}_X$ e $\eta_i \in \mathbb{R}_{>0}$ (basta $i = 1$ se la famiglia \mathcal{P}_X è filtrante) tali che $d_i(x, x') \leq \eta_i$ implica $d(fx, fx') \leq \varepsilon$.

1.7.7.1. Chiaramente l'identità è uniforme, e composizione di funzioni uniformi è uniforme.

1.7.7.2. Una funzione uniforme è continua, il viceversa di solito è falso. Se f è continua e X compatto, allora la funzione è uniformemente continua per ogni uniformità su Y compatibile con la topologia.

☒ 1.7.8. UNIFORMITÀ INDOTTE, PRODOTTO. Come nel caso delle topologie, sottospazi e quozi-enti di uno spazio uniforme sono dotati in modo canonico di uniformità, come pure i prodotti di spazi uniformi.

2. Connessione.

2.1. SPAZI CONNESSI. Uno spazio topologico si dice connesso se non ha chiusaperti non banali (il vuoto e sè stesso). Uno spazio topologico è connesso sse non è unione disgiunta di due aperti non banali (o equivalentemente di due chiusi non banali), sse ogni funzione continua verso uno spazio discreto è costante, sse ogni funzione continua a valori reali che assuma valori positivi e negativi si annulla.

2.1.1. Uno spazio X è connesso sse per ogni coppia di sottinsiemi non vuoti che abbia unione X almeno uno interseca la chiusura dell'altro.

2.1.2. PROPRIETÀ DI STABILITÀ. Immagine continua di connessi è connessa, unione di connessi con intersezione non vuota è connessa.

Chiusura di connessi è connessa (X è connesso sse ha un sottinsieme denso connesso), viceversa falso: la chiusura può essere connessa senza che l'insieme lo sia. Per ogni sottinsieme connesso, tutti i sottinsiemi compresi tra lui e la sua chiusura sono connessi.

Quozienti di connessi sono connessi. Viceversa falso, ma un insieme avente un quoziente connesso e fibre connesse è connesso.

La dimostrazione di queste proprietà si può fare in molti modi diversi, e di solito la più facile è usando la caratterizzazione in termini di funzioni a valori discreti.

2.1.3. COMPONENTI. Le componenti connesse di uno spazio sono i suoi sottinsiemi massimali che siano connessi (con le topologie indotte), e sono dei chiusi dello spazio. Dunque uno spazio è connesso sse ha una sola componente connessa. Uno spazio si dice totalmente sconnesso se le sue componenti connesse sono i punti (ad esempio ogni insieme con topologia discreta, oppure \mathbb{Q} con topologia usuale).

2.1.4. La quasi-componente di un punto è l'intersezione di tutti i chiusaperti contenenti il punto; si tratta di chiusi dello spazio, e in generale diversi dalla componente contenente quel punto (che è l'unione di tutti i connessi contenenti il punto). Le quasi componenti sono unioni di componenti.

2.1.5. CONNESSI DELLA RETTA REALE. In \mathbb{R} un insieme è connesso sse è convesso, ovvero sse è un intervallo (se è sconnesso, sia $A \sqcup B$, pigliamo $A \ni a < b \in B$ e sia ξ il sup di $[a, b] \cap A$: non appartiene né ad A né a B).

2.1.6. RISULTATI CLASSICI LEGATI ALLA CONNESSIONE SULLA RETTA. Sia I l'intervallo $[0, 1]$. Ogni funzione continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(0)f(1) \leq 0$ ammette $t \in I$ con $f(t) = 0$. Ogni funzione continua $f : I \rightarrow I$ ammette $t \in I$ con $f(t) = t$ (punto unito).

Sono equivalenti:

- (a) ogni funzione continua $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ammette $x \in \mathbb{S}^1$ con $f(x) = f(-x)$;
- (b) ogni funzione continua $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ antipodale ($f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{S}^1$); ammette $y \in I$ con $f(y) = 0$;
- (c) non esistono funzioni continue antipodaliali $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^0$

(l'ultimo punto si dimostra usando la connessione; esistono generalizzazioni a dimensioni superiori, che per essere dimostrate richiedono tecniche omotopiche).

È classico usare questi risultati per alcune applicazioni pratiche:

- (i) (tagliare a metà due torte con un taglio): se A e B sono regioni limitate del piano, esiste una retta che divide ciascuna in due parti di uguale superficie (considerare una circonferenza che le contenga entrambe, e per ogni diametro la retta ortogonale al diametro che dimezza l'una o l'altra delle regioni...);
- (ii) (tagliare in quattro parti uguali una torta con due tagli perpendicolari): se A è una regione del piano, esiste una coppia di rette ortogonali che la divide in quattro parti di uguale superficie.

2.2. SPAZI LOCALMENTE CONNESSI. Uno spazio si dice localmente connesso se ogni punto ammette una base di intorni connessi, dunque sse gli aperti connessi sono base per la topologia. Uno spazio è localmente connesso sse ogni componente connessa di aperti è aperta, e dunque ogni componente connessa è un aperto di X (dunque un chiusaperto).

2.2.1. L'immagine continua di localmente connessi non è in generale localmente connessa (si consideri la funzione da $\{-1\} \cup \mathbb{R}_{>0}$ che manda -1 nell'origine e la semiretta nel grafico del seno del topologo). Invece l'immagine per funzione continua suriettiva e aperta sì.

Similmente la chiusura di localmente connessi non è localmente connessa (seno e spirale del topologo).

Quozienti di localmente connessi sono localmente connessi (conviene ragionare sugli aperti: se V è un aperto del codominio, e V_β sono le sue componenti connesse, allora ciascuna è aperta perché l'antimmagine è unione delle componenti connesse dell'antimmagine di V mandate in V_β , quindi unione di aperti).

Insiemi totalmente sconnessi sono localmente connessi sse sono discreti.

2.3. SPAZI CONNESSI PER ARCHI. Uno spazio si dice connesso per archi se ogni due suoi punti possono essere uniti da un cammino (funzione da $[0, 1]$ che manda 0 in un punto e 1 nell'altro) continuo. Uno spazio connesso per archi è connesso (se fosse sconnesso, un arco continuo tra componenti connesse diverse darebbe una sconnessione dell'intervallo $[0, 1]$; in alternativa usando la connessione per archi si mostra che ogni funzione a valori discreti è costante).

2.3.1. Immagine continua di connessi per archi è connessa per archi, unione di connessi per archi con intersezione non vuota è connessa per archi. Nota: chiusura di connessi per archi è connessa, ma non necessariamente connessa per archi.

Quozienti di connessi per archi sono connessi per archi. Viceversa falso, ma un insieme avente un quoziente connesso per archi e fibre connesse per archi è connesso per archi.

2.3.2. Le componenti connesse per archi di uno spazio sono i suoi sottinsiemi massimali che siano connessi per archi (con le topologie indotte). In generale, le arco-componenti non sono né chiusi, né aperti. Uno spazio è connesso per archi sse ha una sola componente connessa per archi.

Le arco-componenti sono contenute, di solito non uguali, alle componenti connesse.

2.4. SPAZI LOCALMENTE CONNESSI PER ARCHI. Uno spazio si dice localmente connesso per archi se ogni punto ammette una base di intorni connessi per archi, dunque sse gli aperti connessi per archi sono base per la topologia. Uno spazio è localmente connesso per archi sse ogni componente connessa per archi di aperti è aperta, e dunque ogni componente connessa per archi è un aperto di X (dunque un chiusaperto).

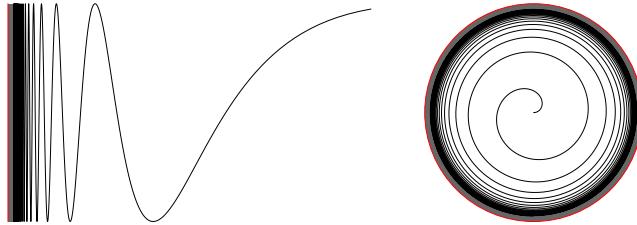
2.4.1. La locale connessione per archi non è stabile per immagini continue: lo stesso esempio fatto per la locale connessione funzione, come pure una funzione $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ che enumera i razionali (suriettiva) usando le topologie indotte dalla euclidea di \mathbb{R} (discreta sul dominio, usuale sul codominio).

Immagini continue aperte e quoziuenti di localmente connessi per archi lo sono.

2.4.2. Uno spazio localmente connesso per archi è localmente connesso, mentre il viceversa è falso: per esempio ogni insieme numerabile con topologia cofinita (lemma di Sierpinski: uno spazio Hausdorff compatto e connesso, per esempio $[0, 1]$, non è unione disgiunta di una famiglia numerabile di chiusi, oppure se è tale unione allora uno al più dei chiusi è non vuoto; siano per assurdo K_i tali chiusi, e costruiamo una sequenza decrescente di chiusi L_i non vuoti con intersezione vuota: sia U_1 intorno aperto di K_2 con $\overline{U_1} \cap K_1 = \emptyset$, e sia L_1 componente di $\overline{U_1}$ che interseca K_2 , e per connessione anche K_{n_2} con $n_2 > 2$; poi U_2 intorno aperto di K_{n_2} con $\overline{U_2} \cap K_2 = \emptyset$, e sia L_2 componente di $L_1 \cap \overline{U_2}$ che interseca K_{n_3} , e per connessione anche K_{n_3} con $n_3 > n_2$; e così via).

2.4.3. Se uno spazio è localmente connesso per archi allora è connesso se e solo se è connesso per archi; dunque se uno spazio è localmente connesso per archi le sue componenti connesse e connesse per archi coincidono.

2.4.4. Gli spazi \mathbb{R}^n sono connessi per archi e ogni loro aperto è localmente connesso per archi. Il grafico del seno del topologo $\sin(1/x)$ (per $x > 0$) è connesso per archi, quindi la sua chiusura S (che comprende il segmento $\{0\} \times [-1, 1]$) è connessa, ma non connessa per archi (quindi nemmeno localmente). Lo spazio S ha due componenti connesse per archi: il grafo stesso (omeomorfo ad \mathbb{R} , che è un aperto ma non un chiuso) e il segmento verticale (che è un chiuso ma non un aperto); i punti del segmento verticale non hanno basi di intorni connessi, e un cammino continuo da $[0, 1]$ che parte da uno di questi punti deve rimanere sempre nel segmento verticale (perché $[0, 1]$ è connesso e localmente connesso).



(vi sono molte variazioni sul tema del seno del topologo, per esempio considerando solo il grafico della funzione unito al punto origine, oppure unendo alla chiusura del grafico anche il semiasse positivo delle ascisse, o usando la funzione per $x \neq 0$).

Il pettine del topologo (unione di un segmento $[0, 1]$ orizzontale con segmenti verticali sulle ascisse $0, 1, 1/2, 1/3, \dots$, oppure il cono su quei punti):



è connesso per archi ma non localmente connesso (si osservi il punto a sinistra in alto).

Per avere un esempio di spazio connesso, ma non connesso per archi, con infinite componenti connesse per archi, nessuna delle quali chiusa o aperta, si consideri il toro $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (quoziente algebrico con topologia indotta), r l'immagine in T di una retta di \mathbb{R}^2 con inclinazione irrazionale (si tratta di un sottinsieme denso di T , e interseca ogni parallelo del toro in un insieme numerabile), e sia $X = T \setminus r$. Risulta che X è connesso, e le sue componenti connesse per archi sono i traslati di r (disgiunti tra loro e da r stessa).

2.4.5. Spazi discreti sono localmente connessi (per archi), ma non sono connessi (per archi) a meno che non si abbia un solo punto.

2.5. VARIETÀ REALI. Le varietà sono sempre localmente connesse per archi, quindi sono connesse se lo sono per archi. Se una varietà è connessa: togliere una sottovarietà di codimensione almeno due la lascia connessa, togliere una sottovarietà di codimensione uno lascia al più due componenti connesse, togliere una fibra non vuota di un valore regolare di una funzione differenziabile reale la sconnette. Togliere ad uno spazio proiettivo un suo iperpiano lo lascia connesso: dunque una sottovarietà di codimensione uno può non sconnettere, e un iperpiano proiettivo non può essere dato dagli zeri di una funzione differenziabile di cui zero sia valore regolare (ma di una funzione continua si?).

2.6. L'INSIEME π_0 . Si indica con $\pi_0(X)$ l'insieme formato dalle componenti connesse per archi di X , ovvero il quoziente di X modulo la relazione di “appartenere alla stessa componente connessa per archi”; X è connesso per archi se $\pi_0(X) = \text{pt}$. Ogni funzione continua $X \rightarrow Y$ induce una funzione $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$, rispettando identità e composizione.

3. Compattezza.

3.1. COMPATTEZZA PER RICOPRIMENTI APERTI. Uno spazio topologico si dice compatto se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito, dunque sse ogni famiglia di chiusi con intersezione vuota ammette una sottofamiglia finita con intersezione vuota, sse ogni famiglia di chiusi con le intersezioni finite non vuote ha intersezione non vuota.

Un sottinsieme di uno spazio topologico si dice compatto se lo è con la topologia indotta, si dice relativamente compatto (rel.compatto) se la sua chiusura è sottinsieme compatto.

Chiaramente basta controllare la proprietà della definizione per le famiglie di una base di aperti. Non è banale, ma è vero, che basta controllarla per le famiglie di una prebase di aperti (teorema di Alexander).

3.1.1. COMPATTEZZA PER FILTRI E RETI. Uno spazio è compatto sse ogni filtro ha almeno un punto aderente, sse ogni ultrafiltro converge, sse ogni rete ha almeno un punto di aderenza, sse ogni ultrarete converge. Infatti: dato un filtro, l'insieme dei chiusi che gli appartengono ha la proprietà delle intersezioni finite (quindi vi sono punti nell'intersezione di tutti, punti aderenti), d'altro lato la proprietà delle intersezioni finite di chiusi permette di generare un filtro a partire da quei chiusi (che quindi ha punti aderenti, cioè appartenenti a tutti i chiusi).

3.1.2. COMPATTEZZE NUMERABILI. Vi sono alte nozioni di compattezza, che nel caso di spazi (pseudo)metrici sono equivalenti alla definizione generale: uno spazio si dice numerabilmente compatto se ogni ricoprimento aperto numerabile ammette un sottoricoprimento finito, dunque sse ogni famiglia numerabile di chiusi con intersezione vuota ammette una sottofamiglia finita con intersezione vuota, sse ogni famiglia numerabile di chiusi con le intersezioni finite non vuote ha intersezione non vuota, sse ogni successione ammette punti aderenti, sse ogni successione ammette *sottoreti* convergenti.

Uno spazio di dice sequenzialmente compatto se ogni successione ammette sottosuccessioni convergenti.

Le relazioni tra queste nozioni non sono banali. Alcune implicazioni sono ovvie: compatto implica numerabilmente compatto e il viceversa è vero se lo spazio è topologicamente numerabile (facile) oppure (pseudo)metrico (meno facile, vedi dopo); sequenzialmente compatto implica numerabilmente compatto e il viceversa è vero se lo spazio è localmente topologicamente numerabile. Tuttavia vi sono spazi localmente numerabili, sequenzialmente compatti e non compatti. In generale, compattezza e compattezza sequenziale sono nozioni diverse (ma sono equivalenti nel caso di spazi pseudometrici).

3.1.3. LINDELÖF. Uno spazio si dice (di) Lindelöf se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile (si tratta di una proprietà di numerabilità, più che di compattezza). Chiaramente compatto equivale a numerabilmente compatto e Lindelöf. Quindi per spazi Lindelöf localmente topologicamente numerabili le nozioni di compatto, numerabilmente compatto e sequenzialmente compatto sono equivalenti.

Uno spazio topologicamente numerabile è Lindelöf, ma in generale non viceversa; però nel caso (pseudo)metrizzabile le tre proprietà di numerabilità topologica, separabilità e Lindelöf sono equivalenti.

Invece non vi sono relazioni in generale tra separabilità e Lindelöf: il piano prodotto di due rette di Sorgenfrey è separabile ma non Lindelöf (regolare e Lindelöf implica normale), e la compattificazione di Alexandroff di \mathbb{R} con topologia discreta è Lindelöf ma non separabile.

3.1.4. ESEMPI BANALI. Topologie indiscrete sono compatte. Insiemi finiti sono compatti (in qualsiasi topologia). Uno spazio discreto è compatto sse è finito.

3.1.5. PROPRIETÀ DI STABILITÀ. Immagine continua di compatti è compatta. I chiusi di un compatto sono compatti. Ma i compatti in generale non sono chiusi (per esempio, si cerchino i compatti di \mathbb{R} con la topologia generata dalle semirette $(-\infty, n]$ con $n \in \mathbb{Z}$).

3.1.6. (CASO HAUSDORFF) I compatti di un hausdorff sono chiusi (più precisamente in un hausdorff punti e compatti disgiunti hanno intorni disgiunti; quindi anche compatti disgiunti hanno intorni disgiunti: in uno spazio hausdorff i compatti si comportano “come i punti”).

3.1.7. Dunque una funzione continua di un compatto in un hausdorff è chiusa. Ne segue che le topologie (hausdorff) compatte sono minimali tra le hausdorff e che le topologie hausdorff (compatte) sono massimali tra le compatte (data l'identità continua $(X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ abbiamo $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, ma se \mathcal{T} è compatta e \mathcal{T}' è hausdorff, allora la mappa è chiusa e le topologie coincidono).

3.1.8. In uno spazio compatto hausdorff chiusi e compatti coincidono (infatti, siccome è hausdorff i compatti sono chiusi, e siccome è compatto i chiusi sono compatti). Quindi ogni spazio compatto hausdorff è normale (e completamente regolare), perché in questi spazi sappiamo separare compatti (quindi anche chiusi) disgiunti con intorni disgiunti.

3.1.9. NUMERI DI LEBESGUE. Dato uno spazio (pseudo)metrico compatto X e un suo ricoprimento aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che ogni insieme di diametro minore di ε è contenuto in qualche aperto del ricoprimento. Tali ε stanno in un intervallo $(0, \lambda]$ e λ viene detto il numero di Lebesgue del ricoprimento. Infatti, per ogni $x \in X$ sia U_x un aperto del ricoprimento che contiene x , e sia $D(x, 2\varepsilon_x)$ un disco aperto contenuto in U_x . Per compattezza troviamo un numero finito di dischi $D(x_i, \varepsilon_i)$ che ricoprono X , e sia $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$. Ora, se A è un insieme di diametro minore di ε , per ogni $a \in A$ abbiamo $a \in D(x_i, \varepsilon_i)$, e quindi $a \in U_{x_i}$.

La stessa proprietà è vera sotto l'ipotesi (pseudo)metrico sequenzialmente compatto (infatti altrimenti vi sarebbe un ricoprimento tale che per ogni n vi è un insieme C_n di diametro $< 1/n$ non contenuto in alcun aperto: scegliendo $x_n \in C_n$, e trovando una sottosuccessione convergente si arriva ad una contraddizione). Inoltre, per tali spazi vale che per ogni ε lo spazio è ricoperto da un numero finito di palle di raggio ε (cioè, il ricoprimento con palle di raggio ε ammette un sottoricoprimento finito: altrimenti si trova una sequenza priva di sottosequenze convergenti). Con queste due proprietà si dimostra che (pseudo)metrizzabile e sequenzialmente compatto implica compatto (e quindi anche (pseudo)metrizzabile e numerabilmente compatto implica compatto).

3.2. LOCALE COMPATTEZZA. Uno spazio si dice localmente compatto se ogni punto ammette un intorno compatto. Se lo spazio è hausdorff, è equivalente a chiedere che ogni punto ammetta una base di intorni compatti. Per esempio \mathbb{R} è localmente compatto (ma non compatto), mentre \mathbb{Q} non è localmente compatto.

Da notare che la locale compattezza non è rispettata da funzioni continue (si pensi alla funzione $\{-1\} \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ che manda -1 nell'origine e la semiretta nel grafico del seno del topologo), ma lo è da funzioni continue e aperte.

3.2.1. In generale, vi sono almeno quattro definizioni di localmente compatto, tutte equivalenti tra loro nel caso hausdorff, ma tra le quali in generale valgono solo le implicazioni banali:

- ogni punto ammette un intorno compatto;
- ogni punto ammette un intorno chiuso compatto (sse ammette un intorno relativamente compatto, sse ammette una base di intorni rel.compatti);
- ogni punto ammette una base di intorni compatti;
- ogni punto ammette una base di intorni chiusi compatti.

3.2.2. (CASO HAUSDORFF) Uno spazio hausdorff compatto è localmente compatto, il viceversa falso (per esempio \mathbb{R}). Uno spazio hausdorff localmente compatto è completamente regolare (sottospazio di uno normale, la sua compattificazione di Alexandroff), e ogni compatto ha una base di intorni compatti.

3.3. TEOREMA DI WALLACE. Dati due compatti A, B di X, Y rispettivamente, gli insiemi del tipo $U \times V$ dove U è intorno aperto di A e V è intorno aperto di B sono una base di intorni di $A \times B$ in $X \times Y$: cioè ogni aperto di $X \times Y$ contenente $A \times B$ contiene anche un $U \times V$ con U, V intorno aperto di A, B rispettivamente.

Per la dimostrazione conviene usare prima $A = \{a\}$ e B compatto, poi in generale.

3.3.1. Se X è compatto, allora ogni proiezione $X \times Y \rightarrow Y$ è chiusa (e viceversa).

3.3.2. I compatti di \mathbb{R}^n sono i chiusi limitati (teorema di Heine-Borel, che si basa sul teorema di Bolzano-Weierstrass: successioni limitate in \mathbb{R}^n hanno punti aderenti, cioè sottosuccessioni convergenti).

L'affermazione non è vera in generale negli spazi metrici: la nozione di limitatezza dipende dalla metrica scelta, e non dalla topologia che essa definisce. Per esempio \mathbb{R} con la metrica discreta è limitato, ma non compatto. La topologia usuale di \mathbb{R}^n è definita sia dalla metrica euclidea usuale, sia da metriche limitate (per esempio l'inf tra la metrica usuale ed 1), per le quali tutti i sottinsiemi sono limitati (ma non compatti: i compatti sono esattamente quelli euclidei, poiché la nozione di compatto dipende solo dalla topologia, non dalla metrica usata per definire la topologia).

3.4. CENNI SULLE COMPATTIFICAZIONI. In generale chiamiamo compattificazione (hausdorff) di uno spazio X uno spazio (hausdorff) compatto Y dotato di una mappa continua $X \rightarrow Y$, che sia

omeomorfismo sull'immagine densa. Una compattificazione si dice universale se fattorizza ogni mappa continua da X in spazi compatti (i.e. ogni tale mappa si estende alla compattificazione).

3.4.1. COMPATTIFICAZIONE DI ALEXANDROFF Si ottiene con un punto aggiunto, i cui intorni sono i complementari dei chiusi compatti; risulta T_1 sse lo spazio originale lo è; T_2 sse lo spazio originale è hausdorff localmente compatto (qualche volta si usa il nome Alexandroff solo in questo caso). Per esempio la compattificazione con un punto di \mathbb{R} è omeomorfa alla circonferenza (via proiezione stereografica), quella di \mathbb{R}^n è omeomorfa a \mathbb{S}^n . La compattificazione con un punto di \mathbb{Q} invece non è nemmeno T_2 : che proprietà ha il punto aggiunto (i suoi intorni sono i cofiniti, quindi è un punto denso)?

In generale non è vero che una funzione continua si estenda ad una funzione continua tra le compattificazioni con un punto (esiste l'estensione sse la mappa è propria).

Si noti che se X è hausdorff localmente compatto, allora $X^* = X \sqcup \{\infty\}$ è compatto hausdorff e quindi normale.

Se X è hausdorff compatto, e U un aperto non banale, allora la compattificazione di Alexandroff di U è omeomorfa al quoziente topologico $X/(X \setminus U)$. In particolare $(X \setminus \{x\})^* \cong X$.

3.4.2. COMPATTIFICAZIONE DI STONE-CECH Si definisce per spazi completamente regolari ed è universale tra i compatti hausdorff contenenti come denso lo spazio dato: si costruisce \check{X} come chiusura della immagine canonica di X in $I^{C(X,I)}$, essendo $I = [0, 1]$.

Chiaramente, la compattificazione di Stone-Cech si estende alle funzioni: ogni funzione continua tra due spazi completamente regolari si estende in modo unico ad una funzione continua tra i due compattificati.

In particolare se X è compatto, allora è canonicamente $X = \check{X}$, e quindi \check{X} è universale tra le compattificazioni hausdorff.

Per spazi hausdorff localmente compatti (non compatti), la compattificazione di Alexandroff è la minima possibile, e quella di Stone-Cech è la massima possibile (ogni altra compattificazione ne è un quoziente).

Le compattificazioni di Stone-Cech di solito sono molto difficili anche in casi facili: per esempio se $X = \mathbb{N}$ (con topologia discreta!) allora \check{N} (ha cardinalità $2^{\mathbb{N}}$) si può identificare con l'insieme di tutti gli ultrafiltri di \mathbb{N} con la topologia avente per base di chiusi gli insiemi C_A dei filtri contenenti $A \subseteq \mathbb{N}$. Si vede allora che è uno spazio totalmente sconnesso, non discreto, non metrizzabile, non (topologicamente) numerabile, non sequenzialmente compatto.

Una costruzione in generale con gli ultrafiltri si può fare, ma usando solo i sottinsiemi di X che siano zeri di funzioni reali continue su X .

3.4.3. ESEMPI. Dell'intervallo $(0, 1)$ aperto reale abbiamo tre compattificazioni naturali: quella di Alexandroff (omeomorfa alla circonferenza), la chiusura $[0, 1]$ in \mathbb{R} (è limitato, quindi la sua chiusura è un compatto), e quella di Stone-Cech (che è diversa dalla precedente, visto che per esempio il seno del topologo non può estendersi ad una funzione continua nell'intervallo chiuso). Idem per \mathbb{R} .

Dello spazio affine usuale $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ abbiamo varie compattificazioni simpatiche: quella di Alexandroff (omeomorfa via proiezione stereografica alla sfera n -dimensionale, bordo del disco $(n+1)$ -dimensionale), lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, l' n -toro $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^n$ (prodotto di n copie di \mathbb{S}^1), qualsiasi prodotto di spazi proiettivi con somma delle dimensioni pari a n , quella di Stone-Cech.

3.5. SPAZI σ -COMPATTI. Un sottinsieme di uno spazio topologico si dice σ -compatto se è unione numerabile di compatti dello spazio. Uno spazio localmente compatto e σ -compatto è unione crescente di compatti ciascuno contenuto nell'interno del successivo (ovvero unione di rel.compatti, ciascuno contenente la chiusura del precedente); in tal caso ogni compatto è contenuto in uno della sequenza.

3.5.1. Ogni spazio σ -compatto è Lindelöf.

3.5.2. Ogni spazio localmente compatto e topologicamente numerabile è σ -compatto.

3.5.3. Per spazi localmente compatti sono equivalenti:

- topologicamente numerabile,
- metrizzabile e separabile,
- metrizzabile e σ -compatto,
- metrizzabile e invaso da una successione di compatti ognuno contenuto nell'interno del successivo,

- metrizzabile e invaso da una successione di aperti relativamente compatti, la chiusura di ciascuno contenuto nel successivo.

3.6. SPAZI COMPATTAMENTE GENERATI. Una famiglia X_α di sottinsiemi di X che ricopre X si dice generatrice per la topologia se i chiusi (equiv. gli aperti) di X si riconoscono dall'avere intersezione chiusa (risp. aperta) con ogni X_α (questa condizione genera eventualmente su X una topologia più fine di quella data). Uno spazio si dice compattamente generato se la famiglia dei suoi compatti è generatrice. La famiglia dei compatti di uno spazio determina (nel senso appena detto: aperti sono gli insiemi che intersecano ogni compatto in un aperto) una topologia eventualmente più fine della data, ma con gli stessi compatti.

In particolare, conoscere i compatti di una topologia non determina la topologia stessa. Se \mathcal{T}' è più fine di \mathcal{T} allora i compatti di \mathcal{T}' sono anche compatti di \mathcal{T} (basta verificare sui ricoprimenti aperti), e in generale sono davvero di meno; anche se i compatti fossero gli stessi non si può concludere l'uguaglianza tra le topologie (per esempio: topologie discrete, includenti di un punto, includenti di un insieme finito).

3.7. FUNZIONI COMPATTE, PERFETTE E PROPRIE. Una funzione continua di dice compatta se è universalmente chiusa, perfetta se è chiusa a fibre compatte, propria se ogni compatto ha antimmagine compatta.

3.7.1. Una mappa chiusa è compatta sse ha fibre compatte.

3.7.2. Una mappa compatta è propria (il viceversa è falso in generale, ma vale se il codominio è hausdorff localmente compatto).

3.7.3. Una mappa si dice localmente compatta se ogni punto del dominio ha un intorno tale che la mappa ristretta alla chiusura dell'intorno sia compatta.

3.7.4. Uno spazio è (localmente) compatto sse l'unica mappa $X \rightarrow pt$ lo è.

3.7.5. Una inclusione è compatta sse è chiusa.

3.7.6. Composizione di mappe compatte è compatta; se la composizione è compatta, cosa si può dire delle due mappe?

4. \boxtimes Completezza.

4.1. NOZIONI DI CAUCHY. Se X è uno spazio uniforme, diciamo che:

- un filtro \mathcal{F} in X è di Cauchy se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $M \in \mathcal{F}$ tale che $M \times M \subset U$ (vale sse per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $x \in X$ tale che $U(x) \in \mathcal{F}$);
- una rete in X è di Cauchy sse tale è il filtro associato, cioè sse per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $\alpha_U \in A$ tale che per $\alpha, \beta \geq \alpha_U$ si ha $(x_\alpha, x_\beta) \in U$;
- in termini di famiglie di pseudometriche si traduce in: per ogni pseudometrica $d \in \mathcal{P}$ e ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $M \in \mathcal{F}$ di d -diametro minore di ε , ovvero esiste $\alpha_U \in A$ tale che per $\alpha, \beta \geq \alpha_U$ si ha $d(x_\alpha, x_\beta) \leq \varepsilon$.

4.1.1. Immagini uniformi di filtri (reti) di Cauchy sono di Cauchy.

4.1.2. Si vede subito che filtri (risp. reti) convergenti sono di Cauchy (per ogni uniformità compatibile con la topologia), il che porta alla seguente definizione:

4.2. COMPLETEZZA. Uno spazio uniforme si dice completo se ogni filtro (rete) di Cauchy converge. Nel caso di spazi pseudometrici basta la condizione per le successioni.

4.2.1. Un prodotto di spazi uniformi è completo sse ogni fattore lo è.

4.2.2. Sottospazi completi di un hausdorff sono chiusi.

4.2.3. I chiusi di uno spazio completo sono completi.

4.2.4. Se Y è spazio hausdorff completo, e A un sottinsieme denso di X , allora ogni funzione uniforme di $A \rightarrow Y$ si estende in modo unico a una funzione uniforme $X \rightarrow Y$.

4.2.5. Gli spazi euclidei \mathbb{R} e \mathbb{R}^n sono completi.

4.3. COMPLETAMENTI. Il problema di trovare un completamento per uno spazio uniforme (come si fa per \mathbb{Q} costruendo \mathbb{R}) è quello di immergerlo in uno spazio uniforme completo in qualche modo "minimale".

4.3.1. SPAZI PSEUDOMETRICI: se X è spazio pseudometrico, esso si immerge isometricamente come sottinsieme denso nello spazio pseudometrico $C(X)$ formato dalle successioni di Cauchy di X ,

che è spazio completo (ma quasi mai metrico, se non in casi banali, anche se X era metrico). Definiamo \widehat{X} lo spazio metrico associato a $C(X)$, e si dice il completamento hausdorff di X ; la composizione con l'isometria canonica (suriettiva, quasi mai iniettiva) da $C(X)$ a \widehat{X} dà una isometria di X verso \widehat{X} con immagine densa, e che è iniettiva sse X era spazio metrico: in tal caso l'inclusione isometrica densa di X in \widehat{X} è universale (fattorizza ogni inclusione isometrica di X in uno spazio hausdorff completo), e quindi \widehat{X} è unico a meno di (unica) isometria.

4.3.2. Completamento di \mathbb{Q} per l'usuale metrica euclidea è \mathbb{R} , completamenti di $\mathbb{Q}[i]$ e di \mathbb{Q}^{alg} sono per entrambi \mathbb{C} .

I completamenti di \mathbb{Q} per le metriche p -adiche si indicano con \mathbb{Q}_p , e sono i corpi delle frazioni dei completamenti di \mathbb{Z} con la metrica p -adica (che si indicano con \mathbb{Z}_p e ammettono una costruzione puramente algebrica a partire dai quozienti $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ come serie di potenze di p con coefficienti in $\{0, 1, \dots, p-1\}$).

Lo spazio dei polinomi $K[x]$ dotato della topologia x -adica (base di intorni di 0 sono gli ideali generati dalle potenze di x) è metrizzabile, e il suo completamento è dato dalle serie formali $K[[x]]$.

4.3.3. SPAZI UNIFORMI: se X è spazio uniforme, esiste uno spazio uniforme completo hausdorff \widehat{X} (la diagonale del prodotto dei completamenti di X per le pseudometriche che definiscono la sua topologia) e una mappa $X \rightarrow \widehat{X}$ con immagine densa. Se X è hausdorff, allora si tratta di una inclusione, e \widehat{X} è universale e unico a meno di isomorfismo uniforme.

4.4. COMPATTEZZA NEGLI SPAZI (PSEUDO)METRICI E UNIFORMI. Vi sono relazioni strette tra compattezza e completezza nel caso siano entrambe definite:

4.4.1. INSIEMI TOTALMENTE LIMITATI. Uno spazio uniforme X è detto totalmente limitato se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste un sottinsieme finito $x_i \in X$ tale che $U(x_i)$ ricoprono X (vale sse per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste un ricoprimento finito di X con sottinsiemi B tali che $B \times B \subseteq U$).

In termini di pseudometriche della famiglia \mathcal{P} , la condizione diventa: per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ lo spazio X è unione finita di dischi di raggio ε .

In termini di filtri la condizione diventa: ogni ultrafiltro è di Cauchy, ovvero ogni filtro è contenuto in uno di Cauchy, ovvero ogni rete ha una sottorete di Cauchy.

4.4.2. Uno spazio uniforme è compatto sse è completo e totalmente limitato. Questo risultato si deduce facilmente dalle caratterizzazioni in termini di filtri: compatto significa che ogni ultrafiltro converge, completo significa che ogni filtro di Cauchy converge, totalmente limitato significa che ogni ultrafiltro è di Cauchy.

4.4.3. Uno spazio pseudometrico è compatto sse ogni successione ha almeno un punto di aderenza, sse ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.

4.5. TEOREMA DI BAIRE. Gli spazi metrici completi (e anche gli spazi hausdorff localmente compatti) sono spazi di Baire, il che può essere espresso in vari modi equivalenti:

4.5.1. se una famiglia numerabile di chiusi ricopre lo spazio, allora uno almeno non è raro (ha interno non vuoto);

4.5.2. se una famiglia numerabile di sottinsiemi ricopre lo spazio, allora uno almeno non è magro (ha interno della chiusura non vuoto);

4.5.3. ogni famiglia numerabile di aperti densi ha intersezione densa;

4.5.4. per ogni aperto dello spazio, se è unione numerabile di chiusi allora almeno uno ha interno non vuoto.

4.5.5. per ogni aperto dello spazio, se ha una intersezione numerabile vuota di aperti allora almeno uno non è denso.

4.5.6. Si noti anche che ogni sottospazio di uno spazio di Baire è di Baire.

4.6. TEOREMA (DEL PUNTO UNITO) DI BROUWER. Se φ è una mappa di uno spazio metrico completo in sè che sia una contrazione (cioè $d(\varphi x, \varphi y) \leq cd(x, y)$ con $c < 1$) allora ammette un unico punto unito (che si trova come limite della successione di Cauchy data da $\varphi^n(x)$ a partire da un arbitrario punto x).

5. Operazioni sugli spazi topologici.

5.1. Somme e prodotti.

5.1.1. SOMME. Dati due spazi topologici X e Y , la loro somma è l'insieme $X \sqcup Y$ (unione disgiunta) dotato della topologia avente per aperti le unioni disgiunte di aperti; si tratta della topologia indotta dalle due mappe naturali da X e Y verso $X \sqcup Y$ (che sono allora continue, aperte e chiuse), e realizza per composizione la proprietà universale $C(X \sqcup Y, T) = C(X, T) \times C(Y, T)$ per ogni spazio topologico T (cioè dare una funzione continua di $X \sqcup Y$ in T è equivalente a darne le due composizioni continue da X e Y in T). La nozione si estende ad un numero finito o arbitrario di addendi.

Naturalmente questi spazi sono sempre sconnessi tranne casi banali, compatti solo se somma finita di compatti, mentre conservano le proprietà locali comuni a tutti gli addendi.

Somme di spazi (pseudo)metrizzabili sono pseudometrizzabili.

Come si comportano gli operatori di interno e chiusura per la somma di spazi? Come si comporta la convergenza di filtri e reti per la somma?

5.1.2. PRODOTTI. Dati due spazi topologici X e Y , il loro prodotto è l'insieme $X \times Y$ (prodotto cartesiano) dotato della topologia avente per base di aperti i prodotti cartesiani di aperti; si tratta della topologia indotta dalle due mappe naturali da $X \times Y$ verso X e Y (che sono allora continue, aperte ma non nec. chiuse), e realizza per composizione la proprietà universale $C(T, X \times Y) = C(T, X) \times C(T, Y)$ per ogni spazio topologico T (cioè dare una funzione continua di T in $X \times Y$ è equivalente a darne le due composizioni continue da T verso X e Y). La nozione si estende ad un numero finito o arbitrario di fattori (attenzione alla topologia: una base di aperti è fatta con prodotti di aperti quasi tutti uguali ai fattori, poiché bisogna fare solo intersezioni finite di elementi della prebase).

5.1.3. Gli operatori di interno, chiusura, bordo e derivato si comportano con i prodotti di sottinsiemi secondo regole di commutazione (interno, chiusura) o Leibniz (bordo, derivato): scrivere esplicitamente. Per esempio, $\partial(A \times B) = (\partial(A) \times B) \cup (A \times \partial(B))$, e si applichi al bordo degli ipercubi $[0, 1]^n$.

La convergenza si comporta in modo “puntuale”: un filtro nel prodotto converge se e solo se convergono i filtri immagine tramite le proiezioni; per questo la topologia prodotto è detta anche topologia della convergenza puntuale (sull'insieme di indici).

5.1.4. Il prodotto distribuisce sulla somma in un senso ovvio. L'insieme vuoto è neutro per la somma, killer per il prodotto. Le palle \mathbb{D}^n sono omeomorfe al prodotto $(\mathbb{D}^1)^n$ (ipercubo), e anche a $\mathbb{D}^i \times \mathbb{D}^j$ con $i + j = n$.

5.1.5. DUPLICAZIONE DEI PUNTI. Dato uno spazio topologico X , lo spazio $X \times F$ dove $F = \{0, 1\}$ è un insieme dotato della topologia banale si dice ottenuto da X duplicando i punti. Chi sono gli aperti, e gli intorni di un fissato punto? In particolare questo procedimento permette di eliminare le prime tre proprietà di separazione, e di conservare quelle successive.

5.1.6. Il prodotto è连通 (per archi) se i fattori lo sono.

5.1.7. Il prodotto è localmente连通 (per archi) se i fattori lo sono e quasi tutti connessi (per archi).

5.1.8. (TYCHONOFF) Il prodotto (arbitrario) di spazi è compatto se i fattori lo sono (Tychonoff). Un verso è facile (i fattori sono immagine continua del prodotto), per l'altro si ragiona sugli ultrafiltri del prodotto (un filtro del prodotto converge se i filtri immagine convergono nei fattori, e un ultrafiltro ha per immagini ultrafiltri nei fattori e quindi convergono). Per esempio $[0, 1]^\mathbb{R}$ è sottospazio compatto di $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (con topologie prodotto; ma non è sequenzialmente compatto). Il teorema di Tychonoff può sembrare sorprendente in quanto la compattezza sembra una proprietà di finitezza e non ci si aspetta che sia conservata da prodotti addirittura arbitrari; dove in realtà sbaglia l'immaginazione è sulla topologia prodotto, che essendo piuttosto grossolana permette l'esistenza di molti compatti (più fine una topologia, meno compatti ci sono).

5.1.9. Il prodotto (arbitrario) di spazi è localmente compatto se i fattori sono localmente compatti e quasi tutti compatti.

5.1.10. Uno spazio è hausdorff se la sua immagine (diagonale) naturale nel prodotto è chiusa.

5.1.11. Il prodotto di due spazi metrici è uno spazio metrizzabile: si possono definire varie metriche (per esempio la metrica del sup sui fattori, la metrica della formula di Pitagora sui fattori,

la metrica somma di quelle sui fattori) tra loro topologicamente equivalenti.

Il prodotto numerabile di spazi metrici è uno spazio metrizzabile, un prodotto arbitrario in generale no (\mathbb{R}^n e $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ sono metrizzabili, $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ invece no). In generale, la topologia prodotto di spazi (pseudo)metrizzabili è definita dalla famiglia di pseudometriche definite usando le (pseudo)metriche su ciascun fattore, quindi è sempre uniformizzabile (completamente regolare), ed è pseudometrizzabile solo se il numero di fattori è al più numerabile.

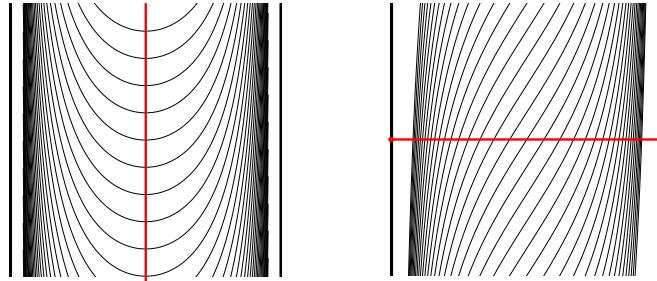
5.1.12. Il prodotto di spazi uniformizzabili? Completezza per i prodotti?

5.2. Quozienti e sottospazi.

5.2.1. QUOZIENTI. Data una relazione di equivalenza \sim su uno spazio topologico X , l'insieme quoziente X/\sim eredita automaticamente una topologia (indotta dalla proiezione $p : X \rightarrow X/\sim$). Più in generale, se f è funzione suriettiva da X spazio topologico a un insieme Y , si parla di topologia finale o quoziente su Y . Usando questa topologia, la composizione con f realizza la proprietà universale $C(Y, T) = C_f(X, T)$ dove $C_f(X, T)$ è il sottinsieme delle funzioni continue di X in T che hanno valore costante sulle fibre di f .

5.2.2. Una proiezione (o in generale un mappa quoziente) non è necessariamente né aperta né chiusa: è aperta (risp. chiusa) sse per ogni aperto (risp. chiuso) di X la sua saturazione (antimmagine dell'immagine) è aperta (risp. chiusa).

5.2.3. In generale, se X/\sim è di hausdorff allora le classi di equivalenza sono chiuse in X (questo equivale a che il quoziente sia T_1) e la relazione stessa \sim è chiusa in $X \times X$ (coincide con l'immagine inversa tramite $p \times p$ della diagonale di X/\sim); ma in generale queste condizioni non sono sufficienti: affinché X/\sim sia di hausdorff è necessario e sufficiente che classi distinte siano separate da aperti saturi disgiunti (saturi significa che sono antimmagini tramite la proiezione, ovvero che contengono tutta la classe di ogni loro punto). Si considerino i classici esempi: le classi di equivalenza sono due rette verticali limite dei grafici di $c + \tan(x)$ in un caso, e di $c + 1/\cos(x)$ nell'altro



(un quoziente hausdorff, l'altro no).

5.2.4. Se X è compatto hausdorff, un suo quoziente è di hausdorff sse la relazione di equivalenza è chiusa nel prodotto (e in tal caso la proiezione è mappa chiusa).

5.2.5. Connessione e compattezza di un quoziente? Quozienti di (localmente) connessi (per archi) mantengono le stesse proprietà; il viceversa è falso: i quozienti possono acquisire proprietà di connessione che lo spazio originale non aveva (tuttavia, quoziente connesso con fibre connesse implica che lo spazio di partenza era connesso).

I quozienti di compatti sono compatti (immagini continue di compatti), ma i quozienti di localmente compatti non sono necessariamente localmente compatti (il quoziente di \mathbb{R} modulo la relazione di equivalenza che identifica tra loro i numeri interi si chiama "bouquet di circonferenze", e si vede subito che il punto corrispondente a \mathbb{Z} nel quoziente non ha nessun intorno compatto).

5.2.6. SOTTOSPAZI. Dato un sottinsieme Y di uno spazio X , Y eredita automaticamente una topologia (indotta dall'inclusione canonica). Più in generale, se f è funzione iniettiva da un insieme Y a X spazio topologico, si parla di topologia iniziale o indotta su Y . Usando questa topologia, la composizione con f realizza la proprietà universale $C(T, Y) = C_Y(T, X)$ dove $C_Y(T, X)$ è il sottinsieme delle funzioni continue di T in X che hanno immagine contenuta in $Y \cong f(Y)$.

5.2.7. Quasi nessuna proprietà è stabile passando ai sottospazi (tuttavia $T_{0,1,2,3}$ lo sono).

5.3. \sqcap Somme amalgamate e prodotti fibrati.

5.3.1. SOMME AMALGAMATE. Date due funzioni $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ di spazi topologici, definiamo la somma amalgamata come l'insieme $X \sqcup_Z Y$ quoziante di $X \sqcup Y$ sotto la relazione di equivalenza indotta dalla mappa $Z \rightarrow X \sqcup Y$, cioè la relazione generata dalle coppie $(f(z), g(z))$ per $z \in Z$; la topologia quoziante coincide con la massima topologia che rende continue entrambe le mappe da X e Y ? Il quadrato commutativo (immersioni canoniche da X e Y)

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \sqcup_Y Z \end{array}$$

formato dalla somma amalgamata si dice cocartesiano, e possiede la proprietà universale

$$C(X \sqcup_Z Y, T) = C(X, T) \times_{C(Z, T)} C(Y, T).$$

5.3.2. Se Z è vuoto, si tratta della somma. Se Z è un punto si tratta della somma puntata. Se Y è un punto si tratta del quoziante di X tramite f , cioè dello spazio ottenuto da X degenerando in un punto $f(Z)$. Se $X, Y \subset T$ e $Z = X \cap Y$, si tratta di $X \cup Y$ (omeomorfo se $X \cap Y$ era chiuso). Se Z è un sottospazio di X suriettivo su Y , allora si tratta di un quoziante di X (insiemisticamente; per le topologie?).

5.3.3. PRODOTTI FIBRATI. Date due funzioni $X \rightarrow Z \leftarrow Y$ di spazi topologici, definiamo il prodotto fibrato come il sottinsieme $X \times_Z Y$ di $X \times Y$ definito dalle coppie con stessa immagine in Z . Lo si dota della minima topologia che rende continue le due mappe verso X e Y ; può essere più fine della topologia indotta come sottinsieme del prodotto? Il quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

formato (proiezioni canoniche verso X e Y) dal prodotto fibrato si dice cartesiano, e possiede la proprietà universale

$$C(T, X \times_Z Y) = C(T, X) \times_{C(T, Z)} C(T, Y).$$

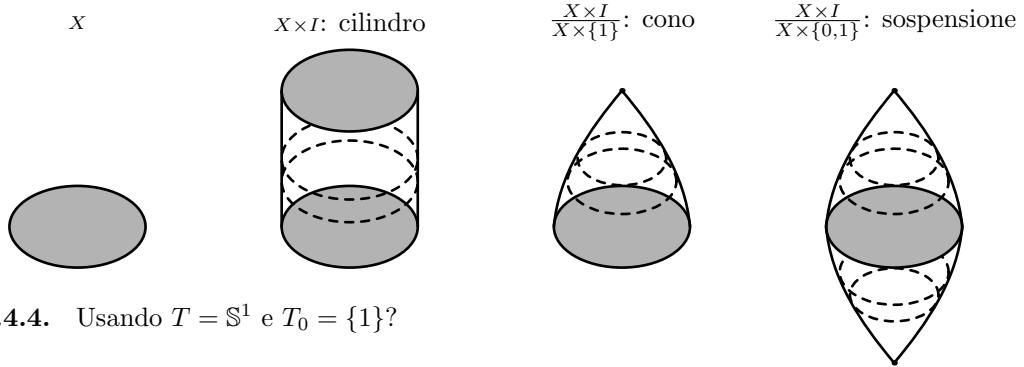
5.3.4. Se Z è un punto si tratta del prodotto. Se $X, Y \subset T$ e $Z = X \cap Y$, si tratta di $X \cap Y$. Se X surietta Z , e Y è sottospazio di Z , si tratta di un sottospazio di X (insiemisticamente; per le topologie?).

5.4. \top Coni semplici, sospensioni.

5.4.1. In generale, se $T_0 \subseteq T$, definiamo il prodotto con X amalgamato su T_0 come la somma amalgamata del diagramma $T \times X \leftarrow T_0 \times X \rightarrow T_0$. Si tratta dello spazio $X \times T$ soggetto alla relazione $(x, t_0) \sim (x', t_0)$ per ogni $x, x' \in X$ e $t_0 \in T_0$.

5.4.2. In particolare, usando $I = [0, 1]$ e $I_0 = \{1\}$, si dice il cono semplice di X : $(X \times I)/(X \times \{1\})$. Per esempio il cono di una sfera $(n-1)$ -dimensionale è il disco n -dimensionale.

5.4.3. Usando $I = [0, 1]$ e $I_0 = \{0, 1\}$, si dice la sospensione di X , e si può vedere come incollamento per la base di due coni semplici di X . Per esempio la sospensione di una sfera $(n-1)$ -dimensionale è la sfera n -dimensionale.



5.4.4. Usando $T = \mathbb{S}^1$ e $T_0 = \{1\}$?

5.5. \top Coni (join).

5.5.1. In generale, se $T_0, T_1 \subseteq T$, definiamo il prodotto con X e Y amalgamato su T_0 e T_1 come la somma amalgamata del diagramma $X \times T \times Y \leftarrow ((X \times T_0 \times Y) \sqcup (X \times T_1 \times Y)) \rightarrow ((T_0 \times Y) \sqcup (X \times T_1))$.

5.5.2. In particolare, usando $I = [0, 1]$, $I_0 = \{0\}$ e $I_1 = \{1\}$, si dice il cono di X e Y : è uno spazio avente un segmento che unisce ogni punto di X ad ogni punto di Y , e si indica spesso con $X * Y$.

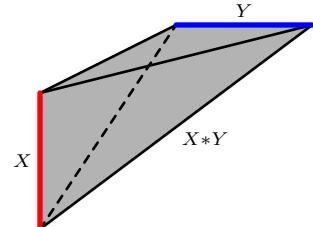
Si vede subito che coni semplici e sospensioni sono casi particolari di join: $C(X) = X * \{1\}$ e $S(X) = X * \{0, 1\}$.

5.5.3. Topologie deboli sui coni (associatività di $*$).

5.5.4. In particolare si ha $\mathbb{S}^{n+1} \cong \mathbb{S}^n * \{0, 1\} \cong \{0, 1\}^{*(n+2)} \cong \mathbb{S}^i * \mathbb{S}^j$ (per $i + j = n$, notare che $\mathbb{S}^0 = \{0, 1\}$).

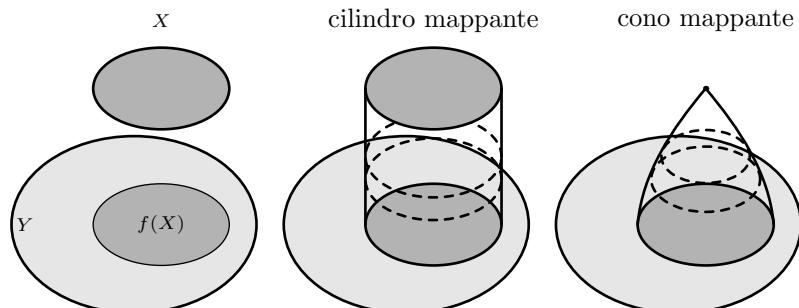
5.5.5. Discutere $\mathbb{D}^i * \mathbb{D}^j$.

5.5.6. Confrontare \mathbb{D}^n , $\mathbb{S}^{n-1} * \text{pt}$, $\mathbb{D}^{n-1} * \text{pt}$.



5.6. \top Coni mappanti e cilindri mappanti.

Data una funzione $f : X \rightarrow Y$ il cilindro mappante di f è la somma amalgamata del diagramma $X \times I \leftarrow X \rightarrow Y$ (il cilindro $X \times I$ incollato ad Y usando f). Il cono mappante di f è la somma amalgamata del diagramma $C(X) \leftarrow X \rightarrow Y$ (il cono di X incollato ad Y usando f , si tratta di un quoziente del cilindro mappante).



6. Fattoria topologica.

6.1. Esempi domestici.

6.1.1. TOPOLOGIE SU UN INSIEME CON DUE PUNTI. A parte quella banale e quella discreta, vi è la topologia di Sierpinski in cui un punto è chiuso e l'altro è aperto (e denso): si tratta di una topologia T_0 ma non T_1 , connessa (per archi?), pseudometrizzabile?

6.1.2. TOPOLOGIE SU \mathbb{R} . A parte quella usuale, meritano attenzione almeno:

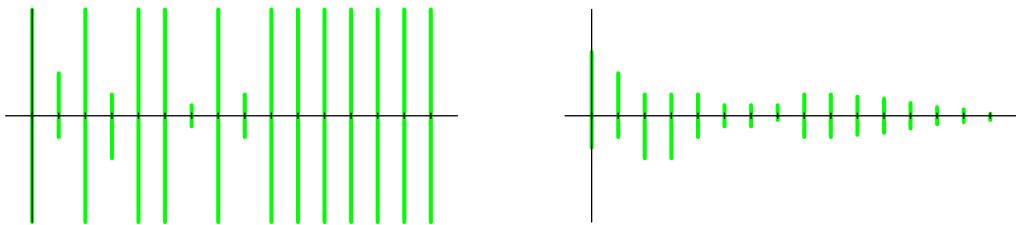
- quelle d'ordine (due versioni a seconda che gli aperti siano le semirette aperte $(a, +\infty)$ e allora è minore della topologia usuale, o generati dalle semirette chiuse $[a, +\infty)$);

- quella di Sorgenfrey (gli aperti sono generati dagli intervalli $[a, b)$, risulta più fine di quella usuale, separabile, non discreta, localmente numerabile, ma non numerabile, quindi non metrizzabile, totalmente sconnesso, non localmente connesso, non compatto; i compatti per questa topologia vanno cercati tra i compatti usuali, e sono sottinsiemi al più numerabili e con complementare denso; è normale, ma il prodotto cartesiano no),

- quella dei complementari dei compatti della topologia usuale (risulta T_1 , ma non T_2 perché due aperti si intersecano sempre, quindi non è metrizzabile anche se è separabile, numerabile, localmente numerabile);

- quella che usa come aperti quelli usuali togliendo al più una quantità numerabile di punti;
- quella cofinita (Zariski).

6.1.3. PRODOTTI DI \mathbb{R} . Il prodotto infinito $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (si tratta delle successioni) con la topologia prodotto è metrizzabile (ma la sfera unitaria non è compatta), con la topologia delle scatole (base fatta usando il prodotto di intervalli aperti) risulta uniformizzabile, cioè completamente regolare (topologia definita da una famiglia di pseudometriche), non connesso, non localmente compatto, non localmente numerabile, non metrizzabile quindi, non separabile avendo collezioni non numerabili di aperti disgiunti (questo è un esempio facile in cui non bastano le successioni ma servono le reti per descrivere la topologia: si pensi agli intorni della funzione nulla, e che essa appartiene alla chiusura dell'insieme formato dalle successioni infinitesime mai nulle). Nei disegni sono rappresentati degli intorni della successione nulla per la topologia prodotto e per la topologia delle scatole:



Si può anche usare la metrica lessicografica, che non è equivalente a quella prodotto.

Si usa spesso anche \mathbb{R}^{∞} definito come unione degli spazi \mathbb{R}^n (ciascuno incluso nel successivo come iperpiano con ultima coordinata nulla), con la topologia induttiva delle inclusioni. Si può vedere come sottinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (\mathbb{N} -uple quasi ovunque nulli) e la topologia è quella indotta dalla topologia delle scatole (non da quella prodotto). Anche in questo caso l'insieme \mathbb{S}^{∞} formato dalla unione delle sfere unitarie non è compatto. La metrica definita usando le metriche euclidee su ogni addendo dà luogo ad una ulteriore topologia.

Nello spazio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (funzioni arbitrarie di \mathbb{R} in sè) con topologia prodotto: la topologia è definita da una famiglia non numerabile di pseudometriche, quindi non è pseudometrizzabile, essendo non localmente numerabile; anche qui convergenze e chiusure sono definite dalle reti e non sono sufficienti le successioni: per esempio la funzione nulla appartiene alla chiusura dell'insieme delle funzioni caratteristiche degli insiemi cofiniti (chi è la chiusura?), ma nessuna successione in tale insieme converge alla funzione nulla.

6.1.4. CUBI DI HILBERT. Si chiamano così i prodotti arbitrari di copie di $I = [0, 1]$. Nel caso di prodotto numerabile è anche $\prod_{i>0}[0, 1/i]$; risulta allora normale, separabile (l'insieme degli elementi quasi ovunque nulli e altrove razionali è denso), numerabile, compatto, arco-connesso.

6.1.5. TOPOLOGIE D'ORDINE. Su un insieme totalmente ordinato si usa spesso la topologia d'ordine generata dalla semirette “aperte” nei due sensi (sui reali coincide con la topologia usuale);

si tratta di spazi hausdorff. In generale tuttavia la chiusura di un intervallo aperto non è l'intervallo chiuso, gli intervalli sono convessi ma non viceversa (si possono definire le componenti convesse di ogni sottinsieme dello spazio: poiché l'unione di due convessi con intersezione non vuota è ancora convesso, ogni insieme è unione disgiunta di sottinsiemi convessi massimali), è uno spazio connesso sse non ha elementi consecutivi e ogni insieme limitato ha sup (le due condizioni sono equivalenti a: se è unione di A e B con $A \leq B$ allora esistono e coincidono sup $A = \inf B$), è spazio compatto sse è completo per l'ordine (ogni sottinsieme non vuoto ha inf e sup).

Un esempio non banale è dato da \mathbb{R}^2 o $[0, 1]^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico. Nel primo caso si tratta di uno spazio metrizzabile, prodotto delle topologie discreta e usuale su \mathbb{R} ovvero somma diretta di \mathbb{R} copie di \mathbb{R} , nel secondo caso invece no (quindi non ha la topologia indotta come sottinsieme!). In entrambi i casi è interessante notare la topologia indotta su segmenti verticali e orizzontali.

6.1.6. TOPOLOGIE SUGLI ORDINALI. Siano ω il primo ordinale infinito, e Ω il primo successivo con cardinalità maggiore. Gli insiemi $[0, \Gamma)$ e $[0, \Gamma]$ con $\Gamma < \Omega$ con topologie d'ordine sono numerabili, regolari, metrizzabili, totalmente sconnessi, localmente compatti, compatto il secondo e non il primo. L'insieme $[0, \Omega)$ con topologie d'ordine risulta localmente numerabile, non numerabile né separabile, sequenzialmente e numerabilmente compatto, ma non compatto; mentre $[0, \Omega]$ con topologie d'ordine risulta non localmente numerabile, non numerabile né separabile, compatto e numerabilmente compatto, ma non sequenzialmente compatto.

Usiamo topologie d'ordine e loro prodotto abbiamo che $T = [0, \Omega] \times [0, \omega]$ è normale, e il sottinsieme $T^* = T \setminus \{(\Omega, \omega)\}$ no (i chiusi $\{\Omega\} \times [0, \omega]$ e $[0, \Omega) \times \{\omega\}$ non sono separabili).

6.1.7. RETTE LUNGHE. La retta lunga L si ottiene inserendo un intervallo $(0, 1)$ tra α e $\alpha + 1$ per ogni α in $[0, \Omega)$. La retta lunga estesa \bar{L} si ottiene allo stesso modo usando $[0, \Omega]$.

6.2. Sfere, palle, tori, spazi proiettivi e lenticolari.

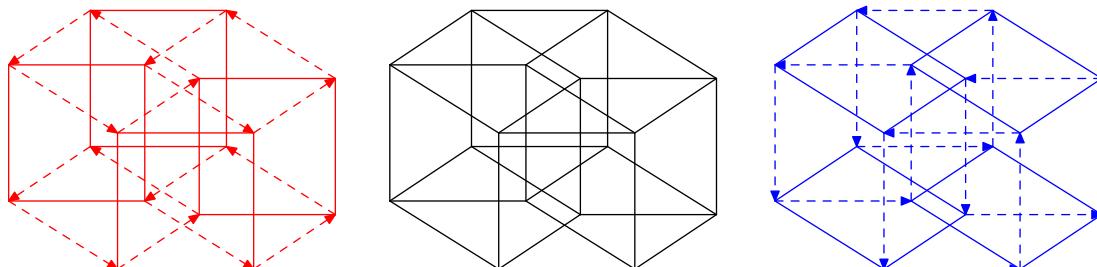
6.2.1. Le sfere \mathbb{S}^n sono varietà reali senza bordo di dimensione n (immerse in \mathbb{R}^{n+1}). Abbiamo che \mathbb{S}^n è omeomorfa a $\mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1}$ (palla modulo bordo), a $S(\mathbb{S}^{n-1})$ (sospensione della sfera precedente), $\mathbb{D}^n \sqcup_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{D}^n$ (incollamento di due palle identificando i bordi).

Inoltre $\mathbb{S}^n \cong (\mathbb{D}^p \times \mathbb{S}^q) \sqcup_{\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^q} (\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{D}^{q+1})$ per $p \geq 1$ e $p + q = n$ (identificazione sui bordi). Pensando \mathbb{S}^n isomorfa al bordo dell'ipercubo, abbiamo delle uguaglianze insiemistiche ovvie: da $(\mathbb{D}^1)^n = (\mathbb{D}^1)^i \times (\mathbb{D}^1)^j$ passando all'operatore bordo.

Cosa vuol dire per la sfera 1-dimensionale?

La sfera 2-dimensionale è omemorfa all'incollamento di un cilindro con i due coperchi.

La sfera 3-dimensionale \mathbb{S}^3 è omeomorfa all'incollamento di due tori solidi, identificando il bordo (risp. meridiano, equatore) dell'uno con il bordo (risp. equatore, meridiano) dell'altro. Conviene vederla come bordo del cubo 4-dimensionale, a sua volta prodotto di due quadrati: in questo caso la decomposizione è proprio insiemistica.



(nei disegni laterali si cerca di evidenziare le quattro stanze che formano i due tori: in tratto continuo le pareti di comunicazione, con le frecce si indica un verso di percorrenza per fare il giro del toro).

Risulta che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è isomorfo a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, mentre \mathbb{R}^n è quoziiente di $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ (identificando $\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$ ad un punto).

6.2.2. Le palle \mathbb{D}^n sono varietà reali (con bordo) di dimensione n (immerse in \mathbb{R}^n , con bordo \mathbb{S}^{n-1}). Chiaramente, $\mathbb{D}^n = C(\mathbb{S}^{n-1})$ (cono della sfera precedente).

6.2.3. Il toro \mathbb{T}^n di dimensione n è il prodotto di n copie di \mathbb{S}^1 , con la topologia ottenuta come sottinsieme di \mathbb{R}^{2n} . È isomorfo al quoziiente di gruppi additivi $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ dotato della topologia

quoziente (di quella di \mathbb{R}^n). Si osservi che il simbolo $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ potrebbe avere due significati: quello algebrico (quoziente di gruppi abeliani) e quello topologico (identificare il sottinsieme \mathbb{Z}^n a un punto, che darebbe un risultato ben diverso: \mathbb{R}/\mathbb{Z} quoziente algebrico dà \mathbb{S}^1 , quoziente topologico dà un bouquet numerabile di copie di \mathbb{S}^1 incollate in un punto); dovrebbe essere sempre chiaro dal contesto quale dei due significati si usa.

6.2.4. Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{R}^\times = \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ (sfere modulo antipodia) è varietà reale compatta connessa senza bordo, di dimensione n . Si realizza come quoziente del disco \mathbb{D}^n modulo antipodia del bordo, e come incollamento $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \sqcup_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{D}^n$. È orientabile per n dispari, non per n pari.

Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^\times = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ è varietà reale compatta connessa senza bordo, di dimensione $2n$. Si realizza come incollamento $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \sqcup_{\mathbb{S}^{2n-1}} \mathbb{D}^{2n}$ (si dice mappa di Hopf la $\mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$).

Gli spazi proiettivi di dimensione n possono essere anche visti come unione di $n+1$ spazi affini usuali (complementari degli iperpiani coordinati), e topologizzati con la topologia indotta dalle inclusioni; si tratta della stessa topologia ottenuta per quoziente. Sono topologie metrizzabili?

Si osservi invece che queste topologie sono diverse da quelle indotte usando le inclusioni date dalla descrizione induittiva degli spazi proiettivi come unioni disgiunte di spazi affini, uno per ogni dimensione, o anche come unione disgiunta di uno spazio affine e dello spazio proiettivo dei punti impropri.

6.2.5. Si dicono spazi lenticolari, e si indicano con $\mathbb{L}_{n,p}$, i quozienti di \mathbb{S}^{2n+1} (visti come sottospazi di \mathbb{C}^n) sotto l'azione di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ data dalla moltiplicazione per radici primitive p -esime dell'unità (per $p=2$ sono spazi proiettivi reali).

6.3. \top Gruppi topologici e azioni topologiche.

6.3.1. GRUPPI TOPOLOGICI. Un gruppo dotato di una topologia si dice un gruppo topologico se le operazioni di gruppo (prodotto e inverso) sono continue. In particolare inverso e traslazioni (destre e sinistre) sono omeomorfismi, e quindi la topologia è completamente determinata dal filtro degli intorni dell'unità (elemento neutro) del gruppo. È hausdorff sse l'intersezione degli intorni dell'unità si riduce all'unità.

6.3.2. Se G è un gruppo topologico, e H un sottogruppo (normale), allora la chiusura di H è un sottogruppo (normale). Un sottogruppo aperto è anche chiuso. La componente connessa dell'unità è un sottogruppo chiuso normale. Un quoziente G/H è hausdorff sse H è chiuso, è discreto sse H è aperto.

6.3.3. NOTA! Il simbolo di quoziente si usa sia per i quozienti topologici, sia per quelli di gruppo (con la topologia quoziente indotta, naturalmente): in qualche caso sono entrambi definiti, e sono molto diversi tra loro, ma il contesto dovrebbe sempre dire quale dei due si intende (quello di gruppo, di solito). Si confrontino: \mathbb{R}/\mathbb{Z} in senso topologico (bouquet di infinite circonference) e in senso algebrico (una circonferenza); $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ in senso topologico (come disegnarlo?) e in senso algebrico (un toro).

6.3.4. Un morfismo di gruppi tra gruppi topologici è continuo sse lo è nell'unità.

6.3.5. ESEMPI. Tutti i gruppi sono topologici in quanto discreti. Tutti i gruppi di matrici reali (risp. complesse, in generale su un anello topologico) sono topologici in quanto topologizzati come sottospazi dello spazio delle matrici (spazio affine).

6.3.6. AZIONI DI GRUPPO. Un'azione destra (risp. sinistra) di un gruppo G su un insieme X è una mappa $X \times G \rightarrow X$ (risp. $G \times X \rightarrow X$) “unitaria e associativa”. Equivalentemente, il dato di un antimorfismo (risp. morfismo) di gruppi da G agli automorfismi di X .

6.3.7. Per ogni $x \in X$ si indica con G_x lo stabilizzatore di x in G (sottogruppo di G che fissa x), e con xG oppure x^G (risp. Gx oppure Gx) l'orbita di x sotto l'azione di G . Elementi nella stessa orbita hanno stabilizzatori coniugati. La cardinalità dell'orbita di x è l'indice di G_x in G .

Le orbite formano una partizione di X e l'insieme quoziente si indica con X/G (risp. $G \backslash X$), l'insieme delle orbite.

6.3.8. Una azione è transitiva se vi è un'unica orbita, libera se tutti gli stabilizzatori sono l'identità, fedele se l'intersezione di tutti gli stabilizzatori dà l'identità.

6.3.9. MAPPE EQUIVARIANTI. Una mappa $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ tra due insiemi con azione di G si dice G -equivariante se commuta con l'azione degli elementi del gruppo, i.e. se $\varphi(gx) = g\varphi(x)$, sse $\varphi g = g\varphi$, sse $g^{-1}\varphi g = \varphi$. Due G -insiemi si dicono isomorfi se lo sono tramite una biiezione G -equivariante.

Ogni G -insieme transitivo (si dice anche omogeneo) è isomorfo a un G -insieme della forma G/H (classi laterali di H) con H sottogruppo di G e azione canonica (moltiplicazioni delle classi per elementi di G); basta usare $H = G_x$ per qualche $x \in X$ (al variare di x si ottengono isomorfismi diversi per coniugio): la mappa $G/G_x \rightarrow X$ è suriettiva sse l'azione è transitiva.

Gli automorfismi di $X = G/H$ in quanto G -insieme sono in biiezione con $N(H)/H$ (dove $N(H)$ è il normalizzante di H in G : vedere sotto quali condizioni la classe γH può essere l'immagine di H per una mappa G -equivariante: per essere ben definita serve che $\gamma h H = h\gamma H$ per ogni $h \in H$, quindi che $\gamma^{-1}H\gamma \subseteq H$). Per un G -insieme X , gli automorfismi G -equivarianti sono in biiezione non canonica con $N(G_x)/G_x$ per $x \in X$.

6.3.10. Conoscere le azioni di un gruppo dà informazioni sul gruppo, fino a determinarne la classe di isomorfismo: per esempio una mappa di gruppi $G \rightarrow H$ è suriettiva sse ogni mappa G -equivariante tra due H -insiemi è anche H -equivariante; è biiettiva sse è suriettiva e ogni G -insieme è anche un H -insieme (compatibilmente).

6.3.11. AZIONI TOPOLOGICHE Se G è gruppo topologico e X spazio topologico, un'azione si dice topologica (o che G agisce in modo continuo su X) se è continua in quanto funzione. Ogni orbita e lo spazio delle orbite ereditano delle topologie.

6.3.12. Azioni propriamente discontinue: l'azione di un gruppo discreto G su uno spazio X si dice propriamente discontinua se ogni punto $x \in X$ ha un intorno con intersezione vuota con tutti i suoi trasformati per $g \in G$ non identità. L'azione si dice propria se per ogni compatto K di X , l'insieme dei $g \in G$ tali che gK interseca K è finito.

Se un gruppo discreto G opera propriamente e senza punti fissi su X hausdorff localmente compatto, allora opera in modo propriamente discontinuo e lo spazio delle orbite è hausdorff localmente compatto.

6.3.13. GRUPPI CLASSICI. Si chiamano gruppi classici quelli delle matrici a coefficienti reali o complessi, di solito con l'operazione di prodotto di matrici.

Complessi: $M_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$, sono varietà reali di dimensioni rispettivamente $2n^2$, $2n^2$ (è aperto del primo), n^2 , $n^2 - 1$. A parte il primo sono gruppi moltiplicativi, connessi, compatti gli ultimi due. L'esponenziale mappa M_n in GL_n , e fa corrispondere matrici antihermitiane a unitarie, e antihermitiane con traccia nulla a unitarie speciali (e dà isomorfismo tra matrici hermitiane ed hermitiane definite positive). Abbiamo isomorfismi $GL_n(\mathbb{C}) = U_n(\mathbb{C}) \times H_n^+(\mathbb{C})$ (matrici hermitiane definite positive, in corrispondenza con \mathbb{R}^{n^2} , usando che per ogni matrice il prodotto con la sua trasposta coniugata dà una hermitiana positiva, e che queste ammettono unica radice quadrata), $U_{n+1}(\mathbb{C})/U_n(\mathbb{C}) = SU_{n+1}(\mathbb{C})/SU_n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2n+1}$.

Reali: $M_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{C}) \cap M_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R}) = U_n(\mathbb{C}) \cap M_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R}) = SU_n(\mathbb{C}) \cap M_n(\mathbb{R})$, sono varietà reali di dimensioni rispettivamente n^2 , n^2 (è aperto del primo), $(n^2 - n)/2$, $(n^2 - n)/2$ (è componente connessa del precedente). A parte il primo sono gruppi moltiplicativi, compatti gli ultimi due, connessi tranne il secondo e il terzo (che hanno due componenti connesse). L'esponenziale mappa M_n in GL_n e fa corrispondere matrici antisimmetriche a ortogonali speciali (e dà isomorfismo tra matrici simmetriche e simmetriche definite positive). Abbiamo isomorfismi $GL_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ (matrici simmetriche definite positive, in corrispondenza con $\mathbb{R}^{(n^2+n)/2}$), $O_{n+1}(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R}) = SO_{n+1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n$.

6.4. \top Complessi cellulari.

- 6.4.1.** I complessi cellulari, o CW-complessi, sono spazi (hausdorff) ottenuti induttivamente da:
- (0) un insieme discreto di punti X^0 (0-celle),
 - (1) X^n si ottiene da X^{n-1} incollando n -celle (ciascuna omeomorfa a) \mathbb{D}^n tramite mappe di incollamento $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ (si dicono mappe caratteristiche le $\mathbb{D}^n \rightarrow X^n$, e sono omeomorfismi nell'interno di \mathbb{S}^n);
 - (2) si può arrestare il processo ad un passo finito, ponendo $X = X^n$, oppure continuare indefinitamente, ponendo $X = \bigcup_n X^n$ (con la topologia limite induttivo, cioè quella debole (W) rispetto

alle mappe di inclusione, che risultano chiuse, degli scheletri).

Di solito si dicono celle le immagini in X degli interni dei \mathbb{D}^n , cosicché X diventa unione disgiunta di celle.

6.4.2. Un sottocomplesso è un chiuso che sia unione di celle, ovvero una unione di celle che contenga la chiusura di ogni sua cella.

6.4.3. Un complesso cellulare è compatto se è finito. In particolare la chiusura di una cella interseca solo un numero finito di altre celle (C). Più in generale: un compatto in un complesso cellulare è contenuto in una unione finita di celle, e interseca solo un numero finito di celle.

6.4.4. I complessi cellulari sono normali (in particolare hausdorff), localmente contraibili, connessi (per archi) se X^1 lo è.

6.4.5. Prodotti di complessi cellulari lo sono ancora (ma attenzione alla topologia).

6.4.6. I complessi cellulari di dimensione 1 si dicono grafi.

6.4.7. Una struttura cellulare su uno spazio X è una sua scrittura in termini di una catena ascendente di chiusi, a partire da uno discreto, aggiungendo al passo n -esimo delle n -celle, il tutto con la topologia debole indotta dalle celle (cioè un omeomorfismo tra X e un complesso cellulare). Le varietà reali hanno strutture cellulari, mentre di solito i complessi cellulari non sono varietà. Uno spazio può avere varie strutture cellulari:

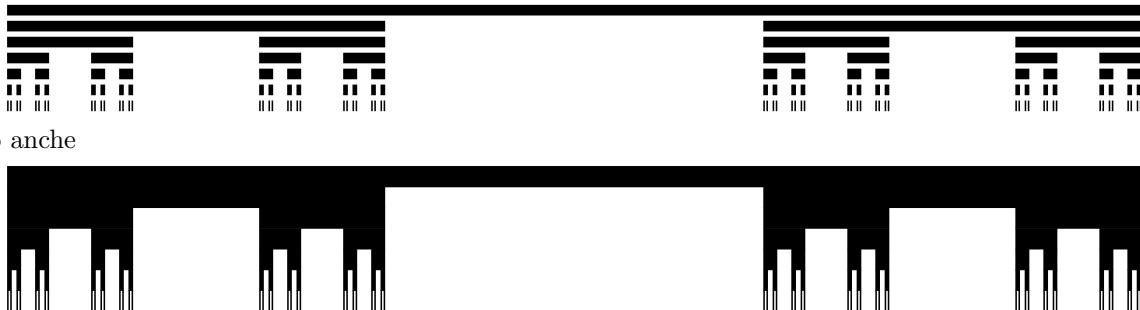
- la sfera \mathbb{S}^n ha struttura cellulare con una 0-cellula e una n -cella, o anche con una 0-cellula, una $(n-1)$ -cella e due n -celle;
- lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha una struttura cellulare con una i -cella per ogni $i = 0, \dots, n$ (incollamenti usando la suriezione di $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ su $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$);
- lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha una struttura cellulare con una i -cella per ogni $i = 0, 2, \dots, 2n$ (incollamenti usando la suriezione di $\partial\mathbb{D}^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1}$ su $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ che ha fibre omeomorfe a \mathbb{S}^1).
- lo spazio euclideo \mathbb{R}^n ha una struttura cellulare non compatta, quindi con infinite celle: per esempio con $X^0 = \mathbb{Z}^n$. Lo stesso per l'interno del disco \mathbb{D}^n ?
- I dischi chiusi \mathbb{D}^n hanno struttura di complesso cellulare compatto: qual è il numero minimo di celle da usare?

7. Zoo topologico.

7.1. Insieme di Cantor.

L'insieme di Cantor può essere caratterizzato come l'unico spazio metrico, compatto, perfetto e totalmente sconnesso; inoltre ogni spazio metrico compatto e totalmente sconnesso ne è immagine continua (ma non è facile). Si tratta di un sottinsieme dell'intervallo $[0, 1]$, di misura nulla, cardinalità del continuo e omeomorfo al proprio quadrato.

7.1.1. Si costruisce induttivamente ponendo $\mathfrak{C}_0 = [0, 1]$, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_0 \setminus (1/3, 2/3)$, $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 \setminus (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$, in generale \mathfrak{C}_{i+1} si ottiene da \mathfrak{C}_i togliendo il “terzo centrale aperto” di tutti i suoi intervallini. Infine definiamo \mathfrak{C} come l'intersezione di tutti i \mathfrak{C}_i . Dalla costruzione si vede immediatamente che si tratta di un chiuso (intersezione di chiusi, ovvero complemento dell'unione di intervalli aperti), che è di misura nulla (la somma delle misure degli intervalli aperti è 1), che non è vuoto (contiene almeno gli estremi degli intervalli toliti, ma in realtà molto di più), che ogni punto è di accumulazione e di frontiera. Il procedimento può essere visualizzato in questa figura:



o anche



Vi sono poi ovvie variazioni:



che ne giustificano l'uso come pettine, oppure in architettura.

7.1.2. Usando gli sviluppi eventualmente illimitati in base tre si vede quasi subito che gli elementi dell'insieme di Cantor sono i numeri il cui sviluppo evita la cifra 1, ovvero quelli che si scrivono solo con le cifre 0 e 2. Per esempio $0.\overline{02} = 1/4$ (o $0.\overline{20} = 3/4$) appartiene a \mathfrak{C} senza essere estremo degli intervalli toliti. In particolare la funzione

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathfrak{C} \quad (a_i) \mapsto \sum_i a_i / 3^i$$

dà un omeomorfismo di spazi topologici usando a sinistra la topologia prodotto (e anche una isometria, usando a sinistra la metrica indotta da quelle discrete?).

7.1.3. Questo garantisce che \mathfrak{C} ha la cardinalità del continuo (pur avendo misura nulla, visto che il complementare, cioè l'insieme degli intervalli aperti toliti, ha misura $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = 1$ come l'intervallo intero), ma possiamo anche trovare una funzione suriettiva

$$\delta : \mathfrak{C} \longrightarrow [0, 1] \quad \sum_i a_i / 3^i \mapsto \sum_i a_i / 2^{i+1}$$

(si tratta di dimezzare le cifre dello sviluppo e leggere il risultato in base 2). Si osservi però che non è una funzione iniettiva.

7.1.4. Sempre usando gli sviluppi in base 3 possiamo esplicitare un omeomorfismo

$$\iota_2 : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \quad \sum_i a_i / 3^i \mapsto \left(\sum_i a_{2i-1} / 3^i, \sum_i a_{2i} / 3^i \right)$$

che mostra come l'insieme di Cantor sia omeomorfo al proprio prodotto. Si può naturalmente generalizzare ad omeomorfismi ι_n di \mathfrak{C} verso \mathfrak{C}^n .

Dall'omeomorfismo $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{C}$ possiamo trovare direttamente

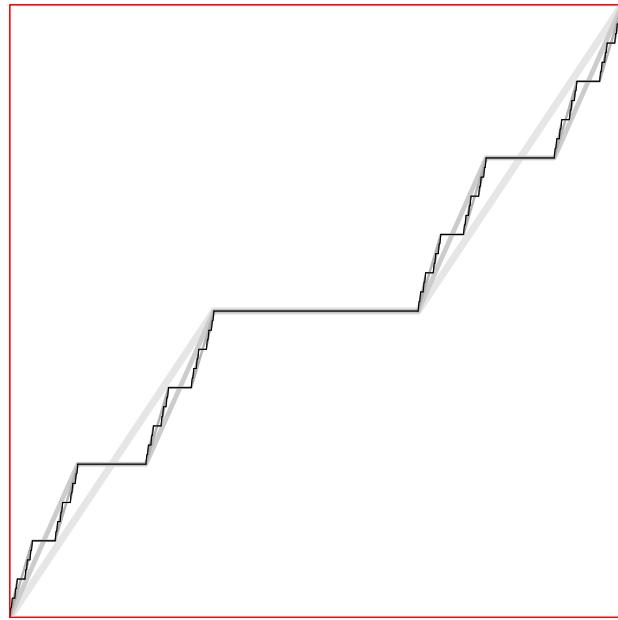
$$\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \cong \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \cong \{0, 2\}^{2\mathbb{N}} \cong \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{C}$$

come pure generalizzare al prodotto numerabile: $\mathfrak{C}^{\mathbb{N}} \cong \{0, 2\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \cong \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{C}$.

7.1.5. È chiaro che le costruzioni possono essere generalizzate togliendo intervalli aperti di ampiezza piccola (ottenendo anche insiemi di misura non nulla) da un lato, giocando con $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, oppure variando la base 3 dall'altro.

7.2. Scalinata del diavolo.

Estendendo la funzione δ fuori da \mathfrak{C} usando dei tratti orizzontali, possiamo ottenere una funzione continua dell'intervallo $[0, 1]$ in sè, che ha la proprietà di essere debolmente crescente, con derivata nulla in un insieme di misura 1 e passare da 0 a 1: si chiama scalinata del diavolo e se ne può approssimare il grafico nel modo seguente:



7.3. Curva di Peano.

Estendendo la mappa

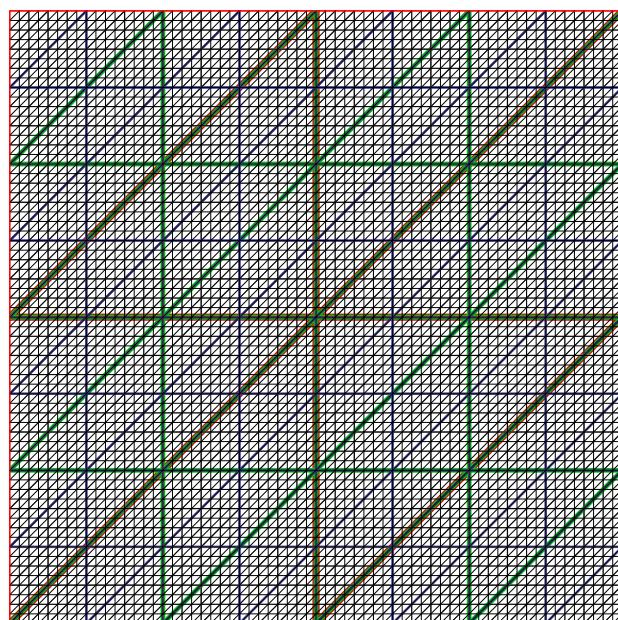
$$(\delta \times \delta) \circ \iota_2 : \mathfrak{C} \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$$

a tutto l'intervallo $[0, 1]$ congiungendo con tratti di retta (le immagini de)gli estremi dell'insieme di Cantor, otteniamo una curva continua, detta curva di Peano. Essa ha la proprietà di riempire il quadrato, come si può capire dalle approssimazioni che si disegnano usando gli insiemi \mathfrak{C}_i .

Analogamente usando le funzioni

$$\delta^{\times n} \circ \iota_n : \mathfrak{C} \rightarrow [0, 1]^n$$

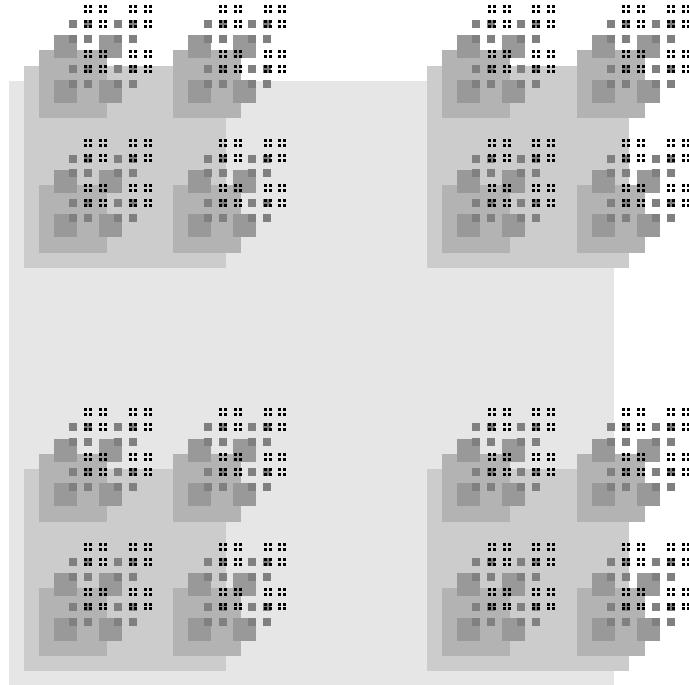
si possono ottenere curve che riempiono gli ipercubi.



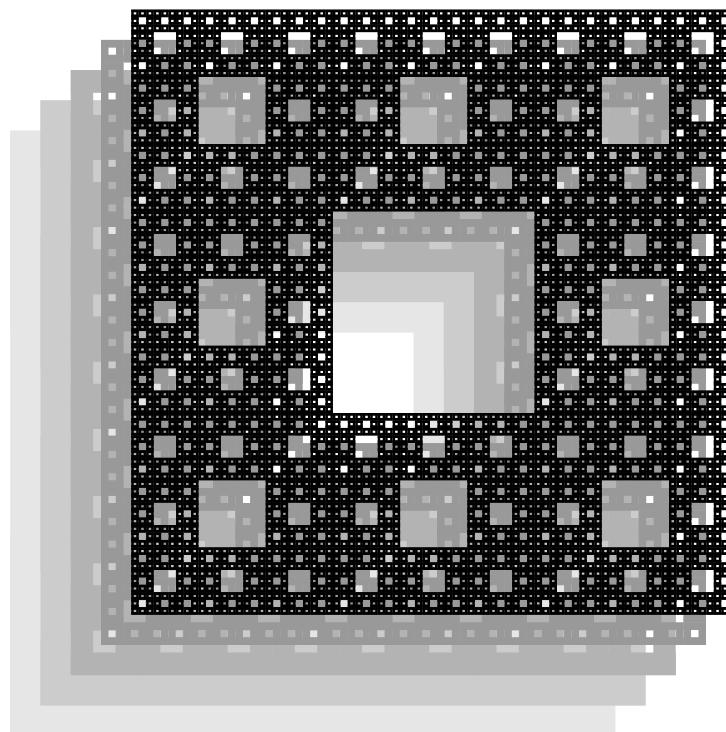
7.4. Tappeto di Sierpinski e polvere di Cantor.

Non vi sono particolari difficoltà a generalizzare il procedimento di “togliere aperti” al prodotto di intervalli, e si possono ottenere vari oggetti interessanti, che rappresentiamo insieme a qualche passo della “generazione”:

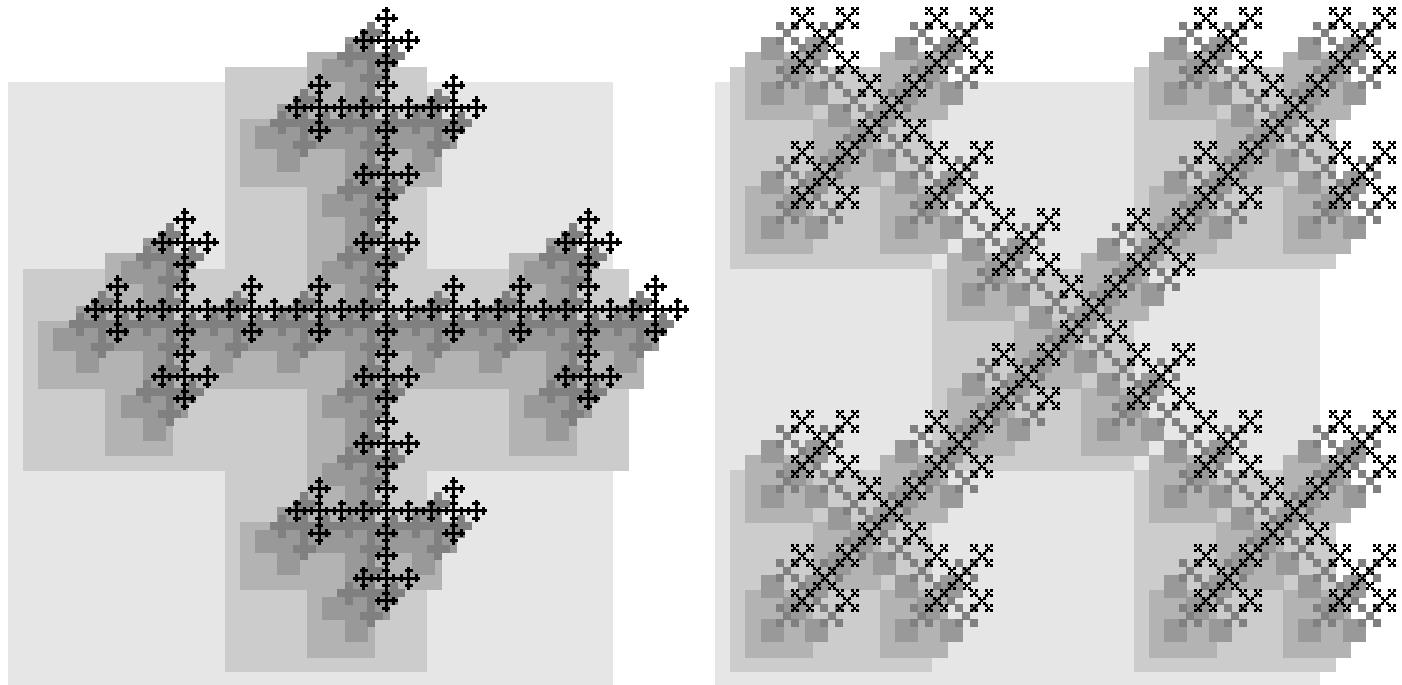
7.4.1. POLVERE DI CANTOR: si tratta del prodotto di due insiemi di Cantor, basta togliere al quadrato la croce formata dai 5 quadrati in cui è divisa:



7.4.2. TAPPETO DI SIERPINSKI: si tratta di togliere solo il quadrato centrale; si ottiene una curva connessa, che in un certo senso è universale per le curve piane compatte:



7.4.3. ALBERI INFINITI: si osservi che il secondo connette la polvere di Cantor:



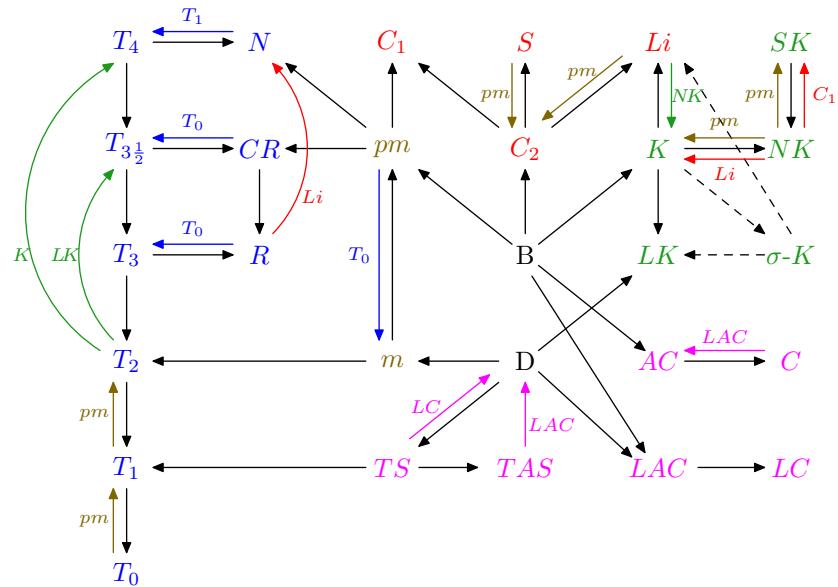
7.4.4. DIMENSIONI SUPERIORI. Naturalmente vi sono varie possibilità in dimensione 3, tra cui la polvere di Cantor (prodotto di tre insiemi di Cantor), la spugna di Menger (togliere la cubo i 7 cubetti "centrali", lasciando solo quelli ai bordi; si ottiene una curva, in un certo senso universale per le curve compatte), vari alberi infiniti...

8. Tavole riassuntive.

8.1. Per presentare un riassunto dei risultati principali conviene usare delle sigle:

sigla	<i>S</i>	<i>C</i> ₁	<i>C</i> ₂	<i>Li</i>	<i>T</i> ₀	<i>T</i> ₁	<i>T</i> ₂	<i>R</i>	<i>CR</i>	<i>N</i>	<i>pm</i>	<i>m</i>	<i>C</i>	<i>AC</i>	<i>IC</i>	<i>LAC</i>	<i>TS</i>	<i>TAS</i>	<i>K</i>	<i>LK</i>	<i>NK</i>	<i>SK</i>		
proprietà	<i>S</i>	<i>C</i> ₁	<i>C</i> ₂	<i>Localm.</i>	<i>Numerabile</i>	<i>Topol.</i>	<i>Numerabile</i>	<i>Lindelöf</i>	<i>T</i> ₀	<i>T</i> ₁	<i>T</i> ₂	<i>R</i>	<i>Regolare</i>	<i>Compl.</i>	<i>Regolare</i>	<i>Normale</i>	<i>Pseudometrizzabile</i>	<i>Metrizzabile</i>	<i>Connesso</i>	<i>Arco-Connesso</i>	<i>Localm.</i>	<i>Connesso</i>	<i>Totalm.</i>	<i>Arco-Connesso</i>

8.2. Le principali implicazioni viste sono riassunte in questo schema:



(B e D indicano le topologie banali e discrete, le frecce nere sono implicazioni che valgono sempre, quelle colorate sotto la condizione scritta).

8.3. Infine, possiamo ricordare le principali proprietà di stabilità e una serie di esempi classici:

stabilità	<i>S</i>	<i>C</i> ₁	<i>C</i> ₂	<i>Li</i>	<i>T</i> ₀	<i>T</i> ₁	<i>T</i> ₂	<i>R</i>	<i>CR</i>	<i>N</i>	<i>pm</i>	<i>C</i>	<i>AC</i>	<i>IC</i>	<i>LAC</i>	<i>TS</i>	<i>TAS</i>	<i>K</i>	<i>LK</i>	<i>NK</i>	<i>SK</i>
più fine	○	○	○	○	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	○	○	○	○
meno fine	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	●	●	○	○	○	○	●	○	●	●
sottospazi	○	●	●	○	●	●	●	●	●	○	●	○	○	○	○	●	●	○	○	○	○
aperti	●	●	●	○	●	●	●	●	●	○	●	○	○	●	●	●	●	○	○	○	○
chiusi	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●
prodotti finiti	●	●	●	○	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
prodotti numerabili	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	*	*	●	●	●	●	*	○
prodotti arbitrari	○	○	○	○	●	●	●	●	●	○	CR	●	●	*	*	●	●	●	●	*	○
quozienti	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
somme	ℕ	●	ℕ	ℕ	●	●	●	●	●	●	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●
immagini continue	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	●	●	●	○	○	○	●	●	○	○	●
imm. cont. aperte	●	●	●	●	●			○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
imm. cont. chiuse	●	○	○	●	●			○	○	○	●	○	●	●	●	○	○	●	●	●	●

spazi topologici	proprietà	S	C ₁	C ₂	L _i	T ₀	T ₁	T ₂	R	CR	N	pn	C	AC	LC	LAC	TS	TAS	K	LK	NK	SK
banale		•	•	•	•	•	○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	•	•	•
{0, 1} Sierpinski		•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	•	•	•	•
{0, 1} discreta		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•
\mathbb{Z} includente 0		•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	○	•	○	○
\mathbb{Z} escludente 0		•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	•	•	•	•
\mathbb{Z} cofinita		•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	○	•	○	○	•	•	•	•
\mathbb{Z} discreta		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	•	•	•	•	○	•	○	○
\mathbb{Z} p -adica		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	○	○	○
\mathbb{Q} euclidea		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	○	○	○
\mathbb{R} includente 0		•	•	○	○	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	○	•	○	○
\mathbb{R} escludente 0		○	•	○	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	•	•	•	•
\mathbb{R} cofinita		•	○	○	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	•	•	•
\mathbb{R} conumerabile		○	○	○	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	○	•	○	○	•	○	○	○
\mathbb{R} ordine destro		•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	○	•	○	○
\mathbb{R} euclidea		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	•	○
\mathbb{R} Sorgenfrey		•	•	○	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	○	○	○
\mathbb{R} discreta		○	•	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○
$\mathbb{R}, \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$		•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	○	•	○	○
$\mathbb{R}, \{(\frac{(-\infty, n)}{(-n, +\infty)} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$		•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	○	•	•	•	•	○	○	○	•	○	○
\mathbb{Q}^*		•	○	○	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	○	○	○	○	•	•	•	•
$\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}^*$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	•	•	•
(\mathbb{R} , discreta)*		○	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	○	○	•	•	•	•
$\check{\mathbb{N}}$		•	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	•
semipiano Mysior		○	○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	○	•	•	○	○
semipiano Niemytzki		•	•	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○
\mathbb{R}^2 Sorgenfrey		•	•	○	○	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	○	○	○
\mathbb{R}^2 lex		○	•	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	•	•	○	○
$[0, 1]^2$ lex		○	•	○	•	•	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	○	○	•	•	•	•
(ch.) seno topologo		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	•	○
pettine topologo		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	•	•
Cantor $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ prodotto		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ box		○	○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ prodotto		•	○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	•	○	○	○	○	○
$[0, 1]^{\mathbb{R}}$ prodotto		•	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	•	○	○	•	•	•
$\mathbb{R}^{\infty} = \bigcup \mathbb{R}^n$		•	○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	•	○	○	○	○	○
$\mathbb{S}^{\infty} = \bigcup \mathbb{S}^n$		•	○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	•	○	○	○	○	○
$[0, \Gamma)$ ($\omega < \Gamma < \Omega$)		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	•	•	•	○	○
$[0, \Gamma]$ ($\omega < \Gamma < \Omega$)		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	•	•	•	•	•
$[0, \Omega)$		○	•	○	○	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	○	•
$[0, \Omega]$		○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	•
$T = [0, \Omega] \times [0, \omega]$		○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	•	•	•
$T^{\circ} = T \setminus (\Omega, \omega)$		○	○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	○	○	•	•	○	○	○
retta lunga L		○	•	○	○	○	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	•	○	○	○	•	•
retta lunga estesa \bar{L}		○	○	○	•	•	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	•	○	○	○	•	•

Capitolo IV

Topologia delle superficie reali compatte

0. Introduzione.

In questo capitolo presentiamo gli strumenti fondamentali per la classificazione topologica delle superficie reali compatte e introdurremo la nozione di genere topologico, invariante fondamentale della classificazione. Il calcolo del genere è spesso difficile, e noi introdurremo il teorema di Riemann-Hurwitz quale principale strumento per questo.

NOTA. Non dedichiamo spazio al caso 1-dimensionale, perché la classificazione è ovvia: le varietà reali connesse 1-dimensionali (spazi topologici con un atlante su aperti della retta reale) senza bordo sono isomorfe ad un cerchio (caso compatto) o alla retta reale (caso non compatto); se presentano bordo sono isomorfe ad un segmento chiuso (caso compatto) oppure ad una semiretta chiusa (caso non compatto). Non vi sono ovviamente problemi di orientabilità.

1. Definizioni ed esempi.

Seguiamo la filosofia generale per dare strutture geometriche agli spazi topologici:

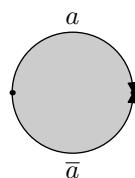
1.1. DEFINIZIONE (SUPERFICIE REALI). *Una superficie reale S è uno spazio topologico separato e connesso localmente omeomorfo ad aperti di \mathbb{R}^2 (oppure a dischi aperti di \mathbb{R}^2) con mappe di transizione differenziabili. La superficie si dirà compatta se lo è in quanto spazio topologico. Una superficie si dirà orientabile se ammette un atlante tale che le mappe di transizione abbiano Jacobiane di determinante positivo in ogni punto; equivalentemente, se ogni cammino chiuso sulla superficie conserva l'orientamento.*

1.1.1. Con cammino chiuso intendiamo una mappa φ dall'intervallo chiuso $[0, 1]$ in S tale che $\varphi(0) = \varphi(1)$, con orientamento intendiamo la scelta di un orientamento nello spazio tangente ad S nel punto iniziale (e finale).

1.1.2. NOTA SULLA CONNESSIONE: per comodità abbiamo richiesto che una superficie sia connessa; naturalmente tutto quello che vedremo si applicherebbe anche ad ogni componente connessa di una “superficie reale non connessa”.

1.2. ESEMPI. Vediamo subito alcuni esempi fondamentali che saranno i “pezzi base” della classificazione.

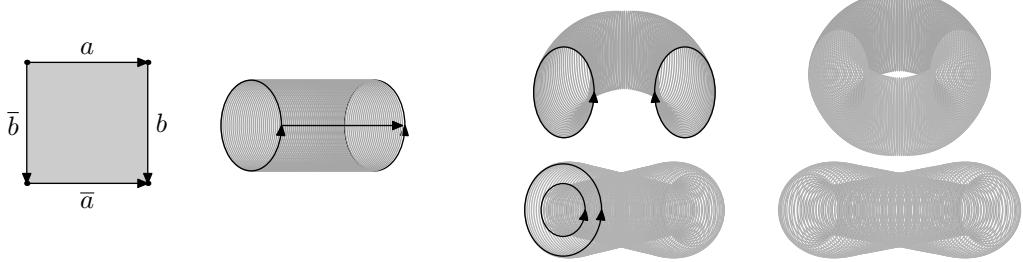
1.2.1. SFERA. La sfera \mathbb{S} , come ben noto, è una superficie reale compatta orientabile che si può presentare con un atlante di due carte (le proiezioni stereografiche dai due poli sul piano dell'equatore). Essa si può ottenere identificando in senso “discorde” i due lati di un poligono chiuso formato da due soli lati (un diagonale): si tratta di chiudere con un zip le due semicirconferenze di un cerchio del piano reale.



Rappresenteremo questa costruzione con il simbolo $a\bar{a}$ (girando intorno al bordo del poligono, si incontra uno dei due lati in un verso, l'altro nel verso opposto).

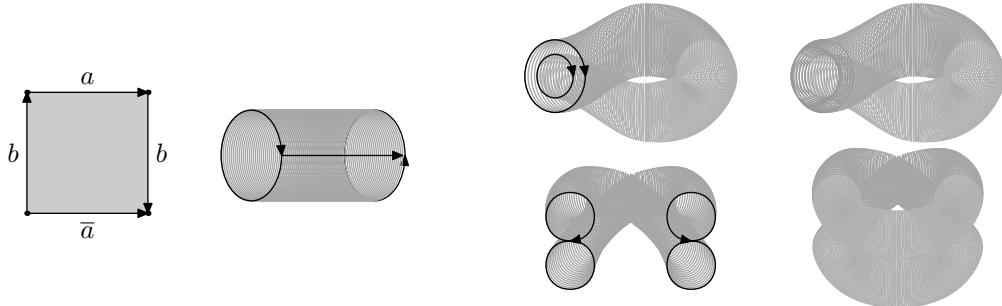
1.2.2. TORO. Il toro \mathbb{T} è la superficie reale compatta orientabile che si ottiene identificando i

lati di un quadrato secondo il simbolo $a\bar{b}\bar{a}\bar{b}$;



identificando prima una coppia di lati si ottiene un cilindro \mathcal{C} , e successivamente si identificano i due bordi rimanenti. Un atlante reale per il toro si può ottenere usando tre carte, quali?

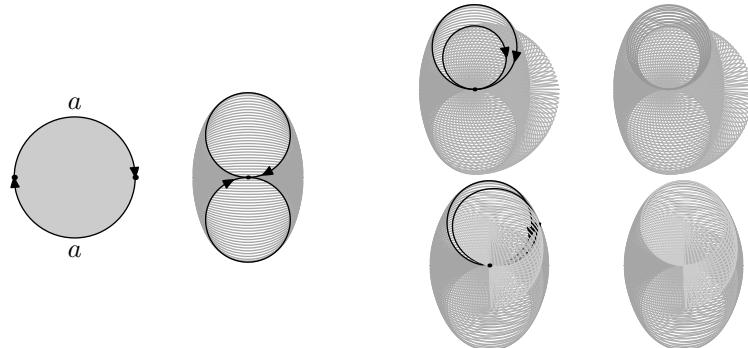
1.2.3. OTRE DI KLEIN. L'otre di Klein \mathbb{K} è la superficie reale compatta non orientabile che si ottiene identificando i lati di un quadrato secondo il simbolo $a\bar{b}\bar{a}\bar{b}$;



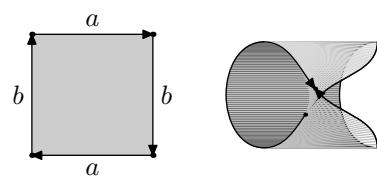
come per il toro, identificando i due lati a si ottiene un cilindro, ma poi i due bordi rimanenti sono identificati con l'orientamento opposto che per il toro. Atlante? Si veda per divertimento: <http://www.kleinbottle.com/> ma si faccia attenzione in quanto il genere dichiarato è sbagliato...

È importante osservare che l'otre di Klein si può costruire prima identificando i due lati b , il che dà luogo ad una figura \mathcal{M} chiamata nastro di Möbius, e poi identificando i due lati a che nel nastro si sono uniti a formare un circuito chiuso (una circonferenza). Questa costruzione rende chiaro che la superficie non è orientabile, poiché \mathcal{M} contiene un percorso chiuso che inverte l'orientamento.

1.2.4. PIANO PROIETTIVO. Il piano proiettivo (reale) \mathbb{P} è la superficie compatta non orientabile che si ottiene identificando i lati di un di-agono secondo il simbolo aa ,



oppure i lati di un quadrato secondo il simbolo $abab$;



questa seconda costruzione rende chiaro che \mathbb{P} contiene nastri di Möbius, e dunque non è orientabile. Si può descrivere con un ben noto atlante formato di tre piani affini (si tratta del “solito piano proiettivo reale” ottenuto dal disco modulo antipodia del bordo...).

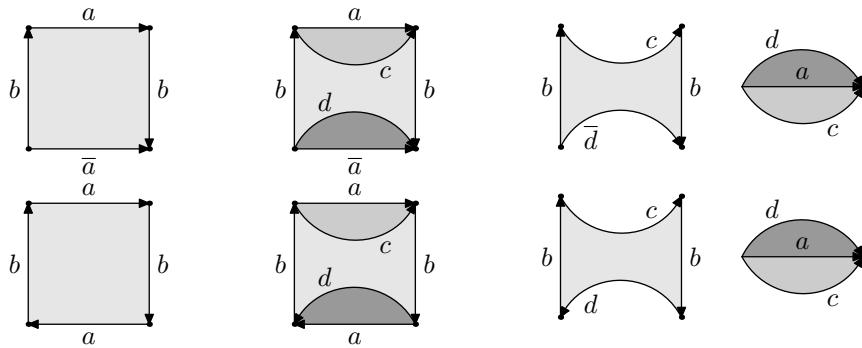
1.2.5. PROBLEMA DEI TRIANGOLI. Abbiamo discusso le figure che si ottengono identificando alcuni lati di poligoni con due e quattro lati (erano tutte le possibilità?). Cosa si può dire nel caso di poligoni con tre lati (si ottengono due figure con bordo, e due senza, ma...)?

1.3. CHIRURGIA SULLE SUPERFICIE. Gli esempi visti sono stati costruiti partendo da poligoni piani con un numero pari di lati, ed identificandone a coppie i lati; implicitamente abbiamo dato alla superficie risultante la topologia quoziante della relazione di equivalenza che consiste nella identificazione dei lati nel modo via via indicato. Si osservi per inciso che in tutti i casi i vertici del poligono vengono tutti identificati in un unico punto della superficie.

Parleremo di “chirurgia delle superficie” quando passeremo da una rappresentazione di una superficie come “poligono modulo identificazione di lati” ad un’altra tale rappresentazione senza alterarne la topologia e la struttura di superficie reale.

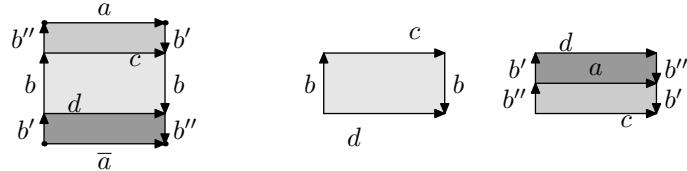
Per esempio possiamo osservare che:

1.3.1. Sia \mathbb{P} che \mathbb{K} si ottengono incollando (in modo diverso) un disco \mathcal{D} ad un nastro di Möbius.



In particolare, togliendo un disco \mathcal{D} a \mathbb{P} (oppure a \mathbb{K}) si ottiene un nastro di Möbius.

1.3.2. L’otre \mathbb{K} si ottiene come unione di due nastri di Möbius.



In particolare si osservi come vengono incollati i bordi dei due nastri per ottenere l’otre.

1.4. SOMMA CONNESSA. L’operazione chirurgica più importante per la classificazione delle superficie reali compatte è la somma connessa. Date due superficie S_1 ed S_2 , la somma connessa $S_1 \# S_2$ si ottiene tramite la costruzione seguente: si sceglie un disco D_i su S_i e un omeomorfismo $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$ tra i bordi dei due dischi; allora $S_1 \# S_2$ è la superficie che si ottiene incollando secondo φ i due bordi B_i delle superficie bucate $S_i \setminus D_i$. Scrivere per bene il procedimento. Come si ottiene un atlante per $S_1 \# S_2$ a partire da atlanti di S_1 ed S_2 ?

Vediamo alcune proprietà evidenti (uguaglianza significa essere canonicamente isomorfi):

1.4.1. $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$.

1.4.2. $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$.

1.4.3. $S \# \mathbb{S} = S$ ($\forall S$).

Dunque $\#$ è operazione commutativa ed associativa, con elemento neutro \mathbb{S} ; ma non esiste in generale il simmetrico di un fissato elemento S .

Vediamo alcuni esempi importanti per la classificazione:

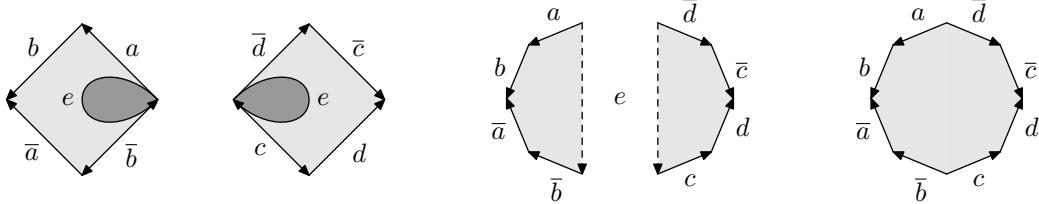
1.4.4. $\mathbb{K} = \mathbb{P} \# \mathbb{P}$. L’abbiamo osservato prima: togliendo un disco al piano proiettivo di ottiene un nastro di Möbius, ed incollando due nastri per il bordo si ottiene un’otre di Klein.

1.4.5. $\mathbb{K} \# \mathbb{P} = \mathbb{T} \# \mathbb{P}$. Questa formula è sorprendente, e si può verificare a partire dalla seguente: $\mathbb{K} \# \mathbb{M} = \mathbb{T} \# \mathbb{M}$, poiché \mathbb{P} si ottiene con opportune identificazioni da \mathbb{M} . Il punto essenziale è che sia \mathbb{K} sia \mathbb{T} si ottengono da cilindri per identificazione dei bordi (in due modi diversi), e la somma amalgamata di qualunque superficie S con un cilindro è semplicemente la superficie stessa a cui sono stati rimossi due dischi; questi due dischi sono poi incollati per il bordo seguendo le identificazioni

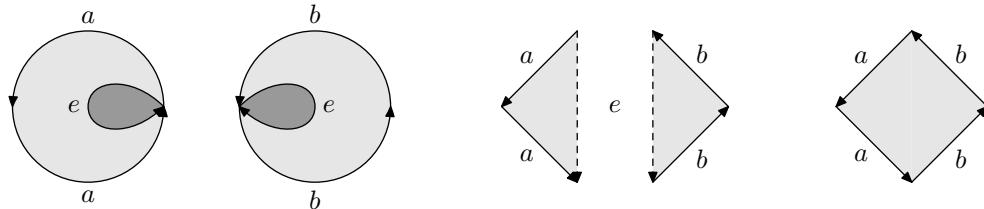
richieste. Rivedremo questo risultato in modo più algebrico usando la chirurgia che serve per il teorema di classificazione.

1.4.6. $\mathbb{T}\# \mathbb{P} = \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P}$. È una conseguenza delle prime due osservazioni. Però non si può “cancellare” \mathbb{P} e scrivere che \mathbb{T} sia $\mathbb{P} \# \mathbb{P}$, altrimenti anche \mathbb{T} e \mathbb{K} sarebbero uguali!

1.4.7. SOMMA CONNESSA DI n TORI. Si può rappresentare come un poligono con $4n$ lati con i bordi identificati secondo la sequenza $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 a_2 b_2 \bar{a}_2 \bar{b}_2 \cdots a_n b_n \bar{a}_n \bar{b}_n$. Si può vedere facilmente per induzione a partire dalla seguente costruzione, che serve sia per il caso base che per il passo induttivo:



1.4.8. SOMMA CONNESSA DI n PIANI PROIETTIVI. Si può rappresentare come un poligono con $2n$ lati con i bordi identificati secondo la sequenza $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$. Si può vedere facilmente per induzione a partire dalla seguente costruzione, che serve sia per il caso base che per il passo induttivo:



2. Triangolazioni e Caratteristica di Eulero-Poincaré.

Il triangolo euclideo standard Δ è la regione del piano reale descritta dall’inviluppo convesso dei punti O (origine), $O + e_1$, $O + e_2$ (versori degli assi), ovvero $\Delta = \{(x, y) : 0 \leq x, y, x+y \leq 1\}$. Qualche volta conviene usare triangoli equilateri, nel qual caso si considerano come vertici le tre radici cubiche dell’unità nel piano di Gauss. Scrivere esplicitamente un omemorfismo del triangolo euclideo nel triangolo equilatero standard.

Se S è una superficie, un triangolo di S è una mappa iniettiva e continua $\tau : \Delta \rightarrow S$ che sia un omeomorfismo sull’immagine. Chiamiamo lati e vertici dei triangoli di S le immagini dei lati e dei vertici dei corrispondenti triangoli euclidei.

2.1. DEFINIZIONE-TEOREMA (TRIANGOLAZIONI). Una triangolazione di una superficie reale S è una collezione di triangoli di S tale che:

- (1) ogni punto P di S che non sia un vertice e non appartenga ad un lato, appartiene ad un unico triangolo che ne è un intorno;
- (2) ogni punto P di S che non sia un vertice ma appartenga ad un lato, appartiene ad esattamente due triangoli che si intersecano esattamente in quel lato, e la cui unione è un intorno di P ;
- (3) ogni punto P di S che sia un vertice appartiene ad un numero finito di triangoli che sono numerabili in modo tale che ciascuno abbia esattamente un lato in comune con il successivo nell’ordine ciclico, e l’unione di tutti è un intorno di P .

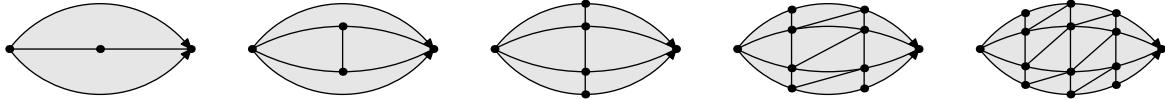
Ogni superficie reale ammette una triangolazione; una superficie è compatta se e solo se ammette una triangolazione finita (e allora tutte lo sono). Vale anche il viceversa in questo senso: uno spazio topologico separato e connesso è una superficie reale se e solo se ammette una triangolazione.

La dimostrazione di questo fatto non è banale. Ovviamente possiamo per definizione ricoprire la superficie S con un insieme (finito se compatta) di (immagini omemorfe di) dischi chiusi; nel caso che ogni bordo di tali dischi sia diviso in un numero finito di segmenti dai bordi degli altri dischi, il risultato diventa facile: abbiamo a disposizione una “poligonazione” della superficie, e per ottenerne una triangolazione basta suddividere ogni poligono in triangoli. Tuttavia può presentarsi in caso in

cui bordi di dischi si incontrano in infiniti punti, e per ricondursi al caso “finito” occorre un argomento delicato di deformazione dei bordi. \square

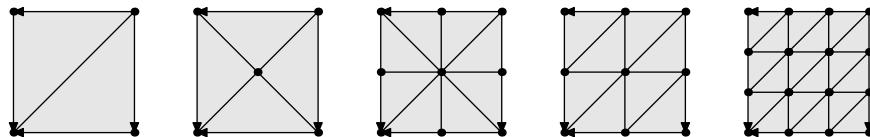
2.2. ESEMPI.

2.2.1. SFERA. Alcune possibili triangolazioni della sfera vista come di-agono, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si provi a disegnare tali triangolazioni sulla superficie sferica; si contino vertici, lati e triangoli).

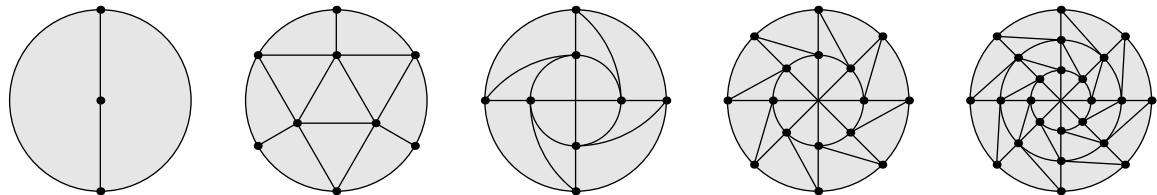
2.2.2. TORO. Alcune possibili triangolazioni del toro visto come quadrangolo, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si provi a disegnare tali triangolazioni sulla superficie torica; si contino vertici, lati e triangoli).

2.2.3. OTRE DI KLEIN. Esercizio.

2.2.4. PIANO PROIETTIVO. Alcune possibili triangolazioni del piano proiettivo visto come di-agono, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si contino vertici, lati e triangoli). Si osservi che togliendo il triangolo centrale alla prima triangolazione si ottiene un nastro di Moebius.

2.2.5. SOMME CONNESSE. Facile esercizio.

2.3. DEFINIZIONE-TEOREMA (CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ). Data una superficie S , e una sua triangolazione \mathcal{T} , siano t il numero di triangoli, e il numero di lati, v il numero di vertici. La caratteristica di Eulero-Poincaré di S è per definizione l’intero $\chi(S) = t - e + v$. Tale intero non dipende dalla triangolazione scelta, ma solo dalla superficie S .

Infatti, date due triangolazioni di una superficie, possiamo trovarne un’altra che è un raffinamento di entrambe, nel senso che ogni triangolo di ciascuna delle due è formato dalla unione di triangoli del raffinamento comune (questo fatto non è proprio banale, e richiede un argomento simile a quello del teorema precedente, per evitare che un lato sia diviso in infiniti segmenti). Di conseguenza, basta confrontare le caratteristiche di Eulero-Poincaré di una triangolazione e di un suo raffinamento. Ma ogni raffinamento si ottiene con un numero finito di operazioni simili ai seguenti tipi:

- (1) aggiungere un nuovo vertice interno ad un triangolo, e come lati i segmenti dal nuovo vertice ai tre vertici del triangolo: vi sono un vertice, tre lati e due triangoli più di prima;
 - (2) aggiungere un nuovo vertice interno ad un lato, e due lati che congiungono il nuovo vertice con i vertici opposti a quel lato dei due triangoli che lo condividono: vi sono un vertice, tre lati (dove?) e due triangoli più di prima;
 - (3) aggiungere un nuovo vertice interno ad un lato per i tre lati di un triangolo, il triangolo che li congiunge, e tre nuovi lati che congiungono i nuovi vertici ai vertici opposti dei tre triangoli adiacenti: vi sono tre vertici, nove lati e sei triangoli più di prima;
- e in ogni caso si vede che la caratteristica di Eulero-Poincaré non è variata.

Una alternativa è di mostrare che si può passare da una triangolazione di S ad una qualsiasi altra tramite un numero finito di “poligonazioni”, con operazioni che non modificano il valore della caratteristica di Eulero-Poincaré (estendendo la definizione nel modo ovvio alle poligonazioni di una superficie). \square

2.4. ESEMPI.**2.4.1. SFERA.** $\chi(\mathbb{S}) = 2$.**2.4.2. TORO.** $\chi(\mathbb{T}) = 0$.**2.4.3. OTRE DI KLEIN.** $\chi(\mathbb{K}) = 0$.**2.4.4. PIANO PROIETTIVO.** $\chi(\mathbb{P}) = 1$.**2.4.5. SOMME CONNESSE.** $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$. In particolare si ha:

$$\chi(\#_{i=1}^n \mathbb{T}) = 2 - 2n,$$

$$\chi(\#_{i=1}^n \mathbb{P}) = 2 - n,$$

$$\chi(\mathbb{P} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 1 - 2n,$$

$$\chi(\mathbb{K} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = -2n.$$

2.5. PROBLEMA: POLIEDRI REGOLARI. Usando la nozione di triangolazione, e sapendo che la caratteristica di Eulero-Poicaré della sfera è 2, si mostri che vi sono solo cinque poliedri regolari (tetraedro: 4 triangoli, cubo: 6 quadrati, octaedro: 8 triangoli, dodecaedro 12 pentagoni, icosaedro: 20 triangoli) specificando quali poligoni regolari si usano, quanti, e quanti si incontrano in ogni vertice. Conviene per esempio chiamare n il numero di poligoni, L il numero di lati di ogni poligono, V il numero di poligoni che si incontrano in un vertice; si hanno allora n poligoni, $nL/2$ lati, nL/V vertici nella poligonazione, e la relazione di Eulero permette di limitare $L < 6$, poi $V (< 6, \leq 3, \leq 3)$ rispettivamente per $L = 3, 4, 5$, e infine gli n possibili.

Si veda per esercizio: <http://darkwing.uoregon.edu/koch/java/FourD.html>

2.6. PROBLEMA. Studiare che spazi topologici si ottengono identificando i lati di pentagoni ed esagoni; quali sono varietà (con o senza bordo)?

3. Genere e classificazione.

3.1. DEFINIZIONE (GENERE TOPOLOGICO). Data una superficie S , definiamo il genere topologico di S come l'intero dato da:

$$g(S) = \begin{cases} \frac{2 - \chi(S)}{2} & \text{se } S \text{ orientabile} \\ 2 - \chi(S) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque abbiamo che

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g(S) & \text{se } S \text{ orientabile} \\ 2 - g(S) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3.2. ESEMPI.**3.2.1. SFERA.** $g(\mathbb{S}) = 0$.**3.2.2. TORO.** $g(\mathbb{T}) = 1$.**3.2.3. OTRE DI KLEIN.** $g(\mathbb{K}) = 2$.**3.2.4. PIANO PROIETTIVO.** $g(\mathbb{P}) = 1$.

3.2.5. SOMME CONNESSE. $g(S_1 \# S_2) = g(S_1) + g(S_2)$ se le superficie sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili; $g(S_1 \# S_2) = 2g(S_1) + g(S_2)$ se S_1 è orientabile e S_2 è non orientabile (nel qual caso $S_1 \# S_2$ non è orientabile). In particolare:

$$g(\#_{i=1}^n \mathbb{T}) = n,$$

$$g(\#_{i=1}^n \mathbb{P}) = n,$$

$$g(\mathbb{P} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 2n + 1,$$

$$g(\mathbb{K} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 2n + 2.$$

3.3. TEOREMA (DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE REALI COMPATTE). A meno di omeomorfismi, le superficie reali compatte si classificano nel modo seguente: sfera (rappresentazione poligonale $a\bar{a}$, genere 0), somma connessa di n tori (rappresentazioni poligonali $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_n b_n \bar{a}_n \bar{b}_n$, genere n), somma connessa di n piani proiettivi (rappresentazioni poligonali $a_1 a_1 \cdots a_n a_n$, genere n). Pensando in termini di genere: per $g = 0$ vi è solo la sfera, per ogni genere g positivo vi sono due superficie, una orientabile (somma connessa di g tori) e una non orientabile (somma connessa di g piani proiettivi reali).

Equivalentemente: ogni superficie reale compatta orientabile è una sfera oppure la somma connessa di n tori, e ogni superficie reale compatta non orientabile è la somma connessa di una superficie reale orientabile e di un piano proiettivo o di un'otre di Klein.

La dimostrazione di questo teorema è un esercizio di chirurgia delle superficie; bisogna mostrare che ogni superficie reale compatta si può rappresentare con uno dei poligoni (modulo identificazione dei lati) che abbiamo visto essere delle forme canoniche per le somme connesse di tori e piani proiettivi. Procediamo in due passi, uno geometrico e uno algebrico:

Nel primo, si sceglie una triangolazione della superficie, e se ne ottiene un modello formato da un poligono piano con un numero pari di lati i quali devono essere a due a due identificati per ottenere la superficie di partenza. Questo si ottiene scegliendo un ordine nell'insieme dei triangoli tale che l' i -esimo triangolo τ_i abbia un lato in comune, sia e_i , con almeno uno dei precedenti. Allora è chiaro che possiamo disporre sul piano i triangoli euclidei (equilateri) in modo da rispettare la comunanza dei lati corrispondenti, ed ottenere una figura poligonale piana come detto, e tale che la superficie di partenza si ottiene come quoziante topologico del poligono (la mappa dal poligono alla superficie è chiusa, poiché è mappa continua da un compatto ad uno spazio separato, quindi la superficie ha la topologia quoziante). Ora abbiamo un poligono con un numero pari di lati da identificare a due a due in uno dei due possibili modi; scegliendo un senso di percorrenza del bordo possiamo rappresentare la figura tramite una sequenza di lettere

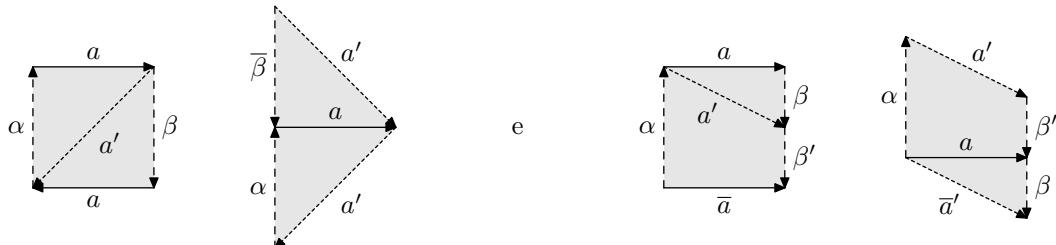
$$ab\bar{c}\bar{a}d\bar{c}d\bar{e}f\bar{e}\bar{f}g\bar{g}\dots$$

dove ogni lettera compare due volte e può comparire semplice o soprallineata a seconda che si presenti nel verso di percorrenza o meno. Dobbiamo quindi, tramite chirurgia, ridurre questo simbolo a uno di quelli standard.

Nel secondo, si riducono tutte le possibili parole a quelle standard. Diciamo rappresentazione poligonale una qualsiasi sequenza di lettere, ciascuna occorrente due volte semplice o soprallineata (come sopra, rappresentano i lati da identificare per ottenere la superficie dal poligono), e introduciamo le seguenti regole di equivalenza (usiamo le lettere romane per i lati, lettere greche per sequenze di lati):

- (a) cancellazione: $a\bar{a} \sim \emptyset$ (rappresentazione poligonale della sfera);
- (b) ciclicità: $a\alpha \sim \alpha a$;
- (c) reversibilità: $\alpha \sim \bar{\alpha}$ (il segnato di una sequenza è la sequenza dei segnati nell'ordine inverso, e $\bar{\bar{a}} = a$);
- (d) coppie concordi: $\alpha a \beta a \sim \alpha \bar{\beta} a a$ (o equivalentemente, usando la versione, $\alpha a \beta a \sim \alpha a a \bar{\beta}$);
- (e) coppie discordi: $\alpha a \beta \beta' \bar{a} \sim \alpha a \beta' \bar{\beta} \bar{a}$.

Le prime tre regole sono ovvie, le ultime due si giustificano con la chirurgia usuale:



Facciamo subito notare alcune conseguenze facili:

(d') la regola per le coppie concordi si generalizza facilmente in

$$\alpha a \beta \beta' a \sim \alpha \bar{\beta}' a \beta a \sim \alpha a \beta' a \bar{\beta} \sim \alpha \bar{\beta}' a a \bar{\beta}$$

Osserviamo anche che le regole (d) ed (e), usando la ciclicità, si generalizzano lasciando invariata una eventuale coda γ , cioè: $\alpha a \beta a \gamma \sim \alpha \bar{\beta} a a \gamma$ e $\alpha a \beta \beta' \bar{a} \gamma \sim \alpha a \beta' \bar{\beta} \bar{a} \gamma$.

(f) Blocchi completi di lettere sono mobili (giustificazione euristica: si tratta di una superficie sommata-connessa, quindi si può spostare dove si vuole): basta dimostrarlo per piani proiettivi e tori. Per i piani proiettivi è facile: $\alpha a a \beta \sim \alpha \beta a a$ (passando attraverso $\alpha a \bar{\beta} a$), e si generalizza in $\alpha a a \beta \gamma \sim \alpha \beta a a \gamma$. Per i tori abbiamo $\alpha a b \bar{a} \bar{b} \sim \alpha \beta a b \bar{a} \bar{b}$ perché

$$\alpha a b \bar{a} \bar{b} \sim \beta a b \bar{a} \bar{b} \sim \beta a b \bar{a} \bar{b} \sim \beta a b \bar{a} \bar{b} \sim a a \beta b \bar{a} \bar{b} \sim a \beta b \bar{a} \bar{b}$$

e si generalizza in $\alpha a b \bar{a} \bar{b} \beta \gamma \sim \alpha \beta a \bar{b} \bar{a} \gamma$.

Segnaliamo anche le facili osservazioni che:

- (1) $\mathbb{K} = \mathbb{P} \# \mathbb{P}$ perché $aabb \sim ab\bar{a}b$;
- (2) $\mathbb{T} \# \mathbb{P} = \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P}$ perché $aabbcc \sim a\bar{b}ac\bar{c} \sim a\bar{b}\bar{b}\bar{c}\bar{a}c$;
- (3) di conseguenza risulta $\mathbb{T} \# \mathbb{P} = \mathbb{K} \# \mathbb{P}$, ma non si può cancellare \mathbb{P} .

Vediamo allora la dimostrazione del teorema di classificazione:

- (1) possiamo prima di tutto associare e scorporare tutte le coppie di lettere concordi che compaiono: si tratta di una somma connessa di piani proiettivi:

$$\alpha a \beta a \gamma \sim \alpha \bar{\beta} a a \gamma \sim \alpha \bar{\beta} \gamma a a$$

e restano allora solo coppie discordi;

- (2) se una coppia discordi è separata da un'altra coppia discordi, possiamo associarle in un toro e scorporarlo:

$$\alpha a \beta b \gamma \bar{a} \delta \bar{b} \varepsilon \sim \alpha a b \gamma \beta \bar{a} \delta \bar{b} \varepsilon \sim a b \bar{a} \bar{b} \varepsilon \alpha \delta \gamma \beta$$

e si continua con $\varepsilon \alpha \delta \gamma \beta$ fino a scorporare tutti i tori possibili;

- (3) restano allora solo coppie discordi, non divise da altre coppie discordi: facendo induzione sulla distanza tra le due occorrenze di una lettera si arriva ai casi $a\bar{a}$ che si cancellano.
- (4) Se si sono trovati solo tori, abbiamo finito. Se c'era anche solo un piano proiettivo possiamo usare la formula di somma connessa di tre piani proiettivi per trasformare tutto in una somma di piani proiettivi. Si osservi per inciso che possiamo capire subito se una parola dà luogo ad una superficie orientabile: deve avere almeno una coppia concorde. \square

3.4. TEOREMA (DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE REALI COMPATTE, SECONDA FORMA).

Due superficie reali compatte sono omeomorfe se e solo se sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili, e hanno lo spesso genere oppure hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré.

3.5. SIGNIFICATI TOPOLOGICI. In particolare, ogni superficie reale compatta orientabile di genere n è omeomorfa ad una sfera con n manici, oppure a un toro con n buchi (primo significato topologico del genere). E ogni superficie reale compatta non orientabile di genere n è omeomorfa alla somma connessa di un toro con n buchi con un piano proiettivo oppure con un'otre di Klein?

Il genere n di una superficie si può interpretare topologicamente in questi termini:

3.5.1. n è il massimo numero di cammini chiusi disgiunti che si possono togliere da una superficie, facendo in modo che rimanga ancora uno spazio connesso.

3.5.2. $2n$ è il massimo numero di cammini chiusi senza componenti comuni che si possono togliere da una superficie, facendo in modo che rimanga ancora uno spazio connesso.

3.6. PROBLEMA. Studiare la superficie che si ottengono dai seguenti simboli per poligoni:

3.6.1. $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} a_n$ (è una somma connessa di n piani proiettivi);

3.6.2. $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} \bar{a}_n$ (è una somma connessa di $[n/2]$ tori).

3.7. PROBLEMA. Nel caso di superficie compatte non orientabili, che cosa si può dire del significato topologico del genere? In particolare, se il genere è n , quanti "buchi" ha la superficie?

3.8. PROBLEMA. Ogni parola con tutte le lettere doppie dà una superficie reale compatta?

3.9. PROBLEMA. Ogni parola dà una superficie reale compatta?

Capitolo V

Omotopia e tipo d'omotopia

La “forma” di uno spazio va intesa come qualcosa che si conserva per “deformazioni continue”; la nozione tecnica di omotopia traduce questa visione intuitiva. I casi più facili di spazi omotopicamente equivalenti sono i retratti di deformazione, che sono particolarmente intuitivi e saranno molto utili in seguito.

1. Omotopia.

1.1. Coppie, spazi puntati.

1.1.1. Una coppia è il dato di uno spazio topologico e di un suo sottospazio. Se il sottospazio è ridotto ad un punto di parla di spazio puntato. Un morfismo tra spazi puntati sarà una funzione continua che manda il fissato punto del dominio nel fissato del codominio; più in generale, un morfismo di coppie è un quadrato commutativo (cioè una funzione continua tra gli spazi che rispetta i sottospazi scelti).

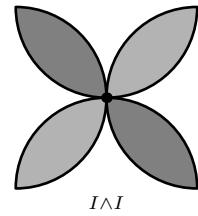
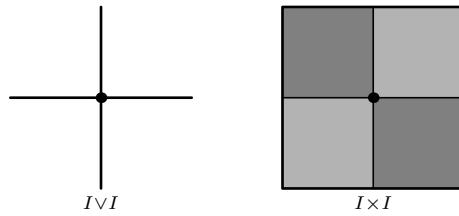
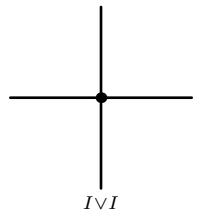
1.1.2. Dati due spazi puntati (X, x) e (Y, y) definiamo la loro somma puntata (o wedge sum) come la somma del diagramma $X \leftarrow \text{pt} \rightarrow Y$ (le due mappe identificano i punti x e y), puntata usando il punto x (o y , che è lo stesso, visto che sono identificati). Si indica spesso con $X \vee Y$, e ha ovviamente la proprietà universale voluta per le mappe puntate tra spazi puntati.

1.1.3. Il prodotto cartesiano $X \times Y$ puntato in (x, y) ha ovviamente la proprietà universale voluta per le mappe puntate tra spazi puntati.

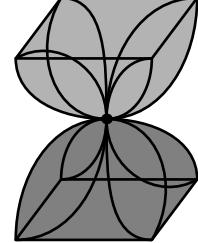
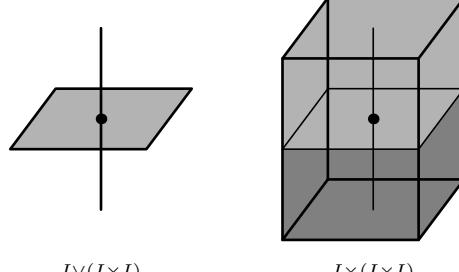
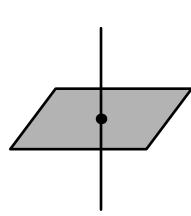
1.1.4. Vi è una inclusione canonica di $X \vee Y$ nel prodotto $X \times Y$ (con immagine $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$), e definiamo il prodotto puntato (o smash product) dei due spazi puntati come il quoziente di questa inclusione, con l'ovvia scelta del punto. Si indica spesso con $X \wedge Y$.

Per esempio, $\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{n+m}$.

Altri esempi: se X è il segmento $[-1, 1]$ puntato a 0, allora $X \vee X$ è l'unione di due segmenti incollati nell'origine, $X \times X$ è il quadrato puntato nell'origine, $X \wedge X$ è un quadrifoglio puntato nell'origine:

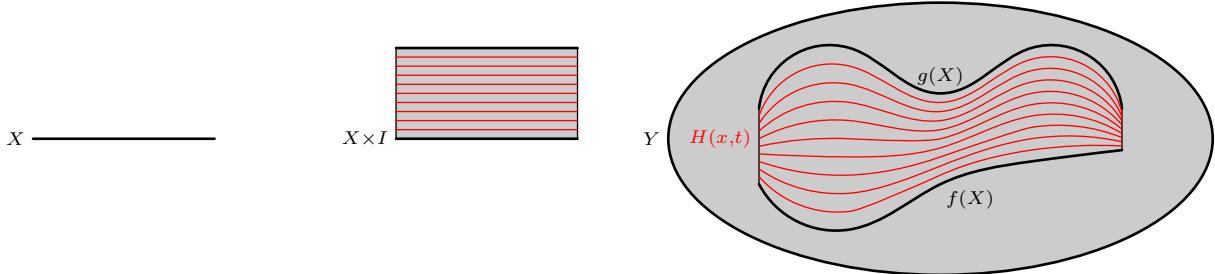


se poi $Y = X \times X$ allora $X \vee Y$, $X \times Y$ e $X \wedge Y$ sono:



1.2. Omotopia tra funzioni.

1.2.1. Date due funzioni continue $f, g : X \rightarrow Y$, una omotopia tra f e g è una funzione continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tale che $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Si tratta di una relazione di equivalenza in $C(X, Y)$, si indica con $f \sim g$, e l'insieme quoziante si indica con $H(X, Y)$ (classi di omotopia di funzioni continue).



Equivalentemente, due funzioni sono omotope quando si può estendere a tutto il cilindro $X \times I$ la funzione che vale f su $X \times \{0\}$ e g su $X \times \{1\}$.

1.2.2. TOPOLOGIE COMPATTO-APERTE. Sull'insieme delle funzioni continue tra Z e X , sia $C(Z, X)$ o X^Z , poniamo la topologia detta compatto-aperta, o della convergenza compatta, una cui prebase è formata dai sottinsiemi $M(K, U)$ di $C(Z, X)$ che mappano un fissato compatto K di Z in un fissato aperto U di X .

Se Z è compatto, e X è metrico, allora la topologia compatto-aperta coincide con la topologia della convergenza uniforme.

Se Z è localmente compatto, allora: la funzione valutazione $C(Z, X) \times Z \rightarrow X$ è continua, e una mappa $\varphi : Y \times Z \rightarrow X$ è continua sse la mappa naturale $\hat{\varphi} : Y \rightarrow C(Z, X)$ è continua.

Se Z è hausdorff loc.compatto, e Y hausdorff, allora la biiezione $C(Y \times Z, X) = C(Y, C(Z, X))$ è un omeomorfismo.

Ora, dalle uguaglianze

$$C(X \times I, X) = C(I, C(X, Y)) = C(X, C(I, Y))$$

possiamo osservare che:

- una omotopia si può vedere come un arco continuo da f a g in $C(X, Y)$ munito della topologia compatto-aperta (se X è localmente compatto), quindi si tratta della relazione di equivalenza “appartenere alla stessa arco-componente” e le classi di equivalenza sono le componenti connesse per archi di $C(X, Y)$.
- una omotopia si può anche vedere come una mappa ϱ da X nello spazio $C(I, Y)$ munito della topologia compatto-aperta; essendo tale spazio munito delle “proiezioni” $\pi_t : C(I, Y) \rightarrow Y$ per ogni $t \in I$ (calcolando in t), ogni ϱ si legge come omotopia da $\pi_0 \varrho$ a $\pi_1 \varrho$.

1.2.3. Due funzioni a valori in convessi di \mathbb{R}^n sono sempre omotope (tramite una omotopia lineare: $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$). Due funzioni a valori in \mathbb{S}^n e mai antipodali sono sempre omotope (basta riscalare l'omotopia lineare sulla sfera).

1.2.4. Identità e inversione sulle sfere sono omotope in dimensione (della sfera) dispari (corrisponde ad avere un arco continuo in SO). L'inclusione di \mathbb{S}^i in \mathbb{S}^n è omotopa ad una funzione costante?

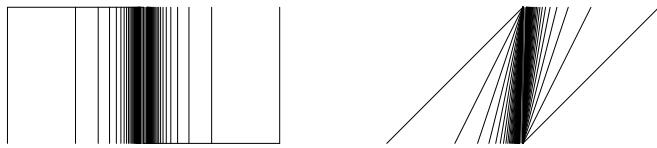
1.2.5. PETTINAMENTO DELLE SFERE: esiste un campo tangente (continuo) mai nullo su una sfera \mathbb{S}^n sse n è dispari (sse l'identità e la mappa antipodale sono omotope). In particolare la sfera \mathbb{S}^2 non può essere pettinata.

In dimensione pari (sfera dispari) è facile trovare un tale campo (prendere le coordinate a copie, e di ogni copia l'ortogonale); in dimensione dispari un tale campo dovrebbe essere omotopo sia all'identità che all'opposto (essendo mai antipodale con esse).

1.3. Nullomotopia, spazi contraibili.

1.3.1. Una funzione si dice nullomotopa se è omotopa ad una funzione costante. Uno spazio si dice contraibile o contrattile se la sua identità è nullomotopa; in particolare risulta connesso per archi

(viceversa falso). Per esempio il pettine del topologo è contraibile, ma incollandone opportunamente due otteniamo uno spazio connesso per archi ma non contraibile:



1.3.2. Uno spazio Y è contrattile sse $H(X, Y)$ è un singoletto per ogni X (ogni funzione verso Y è omotopa a una costante, ovvero se due funzioni verso Y sono sempre omotope), sse $H(Y, X)$ è un singoletto per ogni X connesso per archi (ogni funzione da Y è omotopa a una costante, ovvero se due funzioni da Y sono sempre omotope) sse $H(Y, X)$ è in corrispondenza biunivoca con le arco-componenti di X .

1.3.3. Ogni insieme stellato, o convesso, di \mathbb{R}^n è contraibile. Uno spazio discreto è contraibile sse è un punto. Per ogni X il cono su X è contraibile, mentre la sospensione è contraibile se X lo era (ma non il viceversa, nonostante i controvezemi siamo difficili).

1.4. Composizioni. Equivalenze omotopiche

1.4.1. La relazione di equivalenza dell'omotopia rispetta la composizione di funzioni, cioè se $f, g : X \rightarrow Y$ sono omotope e $f', g' : Y \rightarrow Z$ sono omotope, allora anche $f'f, g'g : X \rightarrow Z$ sono omotope (quindi, se f, g sono omotope, allora hf, hg lo sono, viceversa falso). In particolare è ben definita la composizione tra classi di omotopia.

1.4.2. Una funzione si dice una equivalenza omotopica se ammette una inversa a meno di omotopia; due spazi si dicono omotopicamente equivalenti se esiste tra loro una equivalenza omotopica; useremo il simbolo $X \sim Y$ per intendere che X e Y sono omotopicamente equivalenti.

1.4.3. Ogni spazio contraibile è omotopicamente equivalente allo spazio con un punto. Il piano bucato e il toro solido sono omotopicamente equivalenti ad una circonferenza.

1.4.4. TIPO DI OMOTOPIA. Le classi di equivalenza di spazi a meno di equivalenza omotopica si dicono tipi di omotopia. Due spazi omeomorfi hanno stesso tipo di omotopia, il viceversa essendo falso. Se due spazi hanno lo stesso tipo di omotopia, allora i loro π_0 sono isomorfi; il viceversa, ovviamente, falso (osservare il doppio pettine: non è contaibile, ma ha il π_0 di un punto).

1.5. Omotopie relative.

Una omotopia si dice relativa ad un sottospazio A di X se è costante su A per ogni valore di $t \in I$. Si tratta chiaramente di una relazione di equivalenza, più restrittiva della precedente (ed è l'identità se $A = X$). I casi più importanti sono le palle \mathbb{D}^n usando omotopie relativamente al loro bordo \mathbb{S}^{n-1} (per esempio, cammini ad estremi fissati, per $n = 1$).

2. Retrazioni e retratti.

2.1. Retrazioni.

2.1.1. Un sottospazio S di X si dice retratto di X se l'inclusione i ammette una inversa sinistra continua p ($pi = id_S$). La funzione $r = ip$ di X in sé si dice retrazione (vale $r(x) \in S$ per $x \in X$, $r(x) = x$ sse $x \in S$). L'esistenza di p inversa destra continua di i equivale all'esistenza della retrazione r .

2.1.2. I retratti di un hausdorff sono chiusi (essendo il luogo di coincidenza di due funzioni continue, identità e retrazione).

2.2. Retratti di deformazione.

2.2.1. Un sottospazio S di X si dice un retratto di deformazione debole se l'inclusione è una

equivalenza omotopica (in particolare, non è detto che sia un retratto: si chiede solo $pi \sim id_S$, non necessariamente $=$, e $ip \sim id_X$).

2.2.2. Si dice un retratto di deformazione (forte) se esiste una retrazione di X su S omotopa alla identità di X (relativamente ad S). Di conseguenza, l'inclusione è una equivalenza omotopica (il viceversa è falso).

2.2.3. Retratto di deformazione forte implica retratto di deformazione, che implica sia retratto di deformazione debole, sia retratto; tra queste due nozioni non vi sono implicazioni dirette.

2.2.4. ESTENSIONE DELLE OMOTOPIE. Per una coppia (X, S) , si dice che vale la proprietà di estensione delle omotopie se per ogni mappa $f : X \rightarrow Y$ e ogni omotopia $H_0 : S \times I \rightarrow Y$ con $H_0(s, 0) = f(s)$, esiste una omotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ con $H_0(x, 0) = f(x)$ che estende H_0 .

2.2.5. Una coppia (X, S) ha la proprietà di estensione delle omotopie sse il cilindro mappante dell'inclusione $S \hookrightarrow X$ (unione di $X \times \{0\}$ e $S \times I$) è un retratto di $X \times I$ (cilindro di X).

2.2.6. In particolare, se la condizione è vera, se S è contraibile allora la proiezione $X \rightarrow X/S$ è equivalenza omotopica. Si osservi che questo è falso senza ipotesi: in generale non vi sono relazioni tra il fatto che S sia contraibile e il fatto che X e X/S siano omotopicamente equivalenti (cioè quozientare con un sottinsieme contraibile può cambiare il tipo di omotopia: pensare a due pettini del topologo uniti in modo da dare uno spazio non contraibile).

2.2.7. Se (X, S) e (Y, S) sono coppie con la proprietà di estensione delle omotopie, e se $f : X \rightarrow Y$ è una equivalenza omotopica identica su S , allora f è una equivalenza omotopica relativamente a S .

In particolare, se $S \hookrightarrow X$ è equivalenza omotopica con la proprietà di estensione delle omotopie, allora S è un retratto di deformazione forte di X .

2.2.8. Una mappa $f : X \rightarrow Y$ è una equivalenza omotopica sse X è retratto di deformazione forte del cilindro mappante di f .

2.2.9. Due spazi sono omotopicamente equivalenti sse sono contenuti in un terzo di cui entrambi sono retratti di deformazione forte. Quindi la relazione di omotopia è la relazione di equivalenza generata da quella di retratto di deformazione forte.

3. Applicazioni.

3.1. Esempi.

3.1.1. Ogni punto di ogni spazio è un retratto dello spazio, ma è un retratto di deformazione sse lo spazio è contraibile.

3.1.2. Il pettine del topologo è contraibile relativamente a ogni punto. Tutti i punti sono retratti di deformazione del pettine, di deformazione forte?

3.1.3. Due pettini del topologo incollati in punti di non contraibilità formano uno spazio connesso per archi ma non contraibile.

3.1.4. La palla \mathbb{B}^n è retratto di deformazione forte di \mathbb{R}^n , la palla aperta è retratto di deformazione debole di \mathbb{R}^n (ma non retratto) e la sfera \mathbb{S}^{n-1} è retratto di deformazione forte di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (e anche di $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$).

3.1.5. Se S è contraibile contenuto in X pure contraibile, allora S è retratto di deformazione debole di X , ma non necessariamente un retratto: per esempio il pettine del topologo contenuto nel quadrato, oppure la palla aperta unitaria contenuta in \mathbb{R}^n .

3.2. Caso delle sfere.

Siano \mathbb{S} la sfera unitaria e \mathbb{B} la palla unitaria di uno spazio normato.

3.2.1. Due mappe $f, g \in C(X, \mathbb{S})$ mai antipodali sono omotope relativamente al luogo di coincidenza. Quindi ogni mappa non suriettiva è nullomotopa.

3.2.2. Per ogni funzione $f \in C(\mathbb{S}, Y)$: f è nullomotopa (anche relativamente ad un assegnato punto) sse f ammette una estensione continua $F \in C(\mathbb{B}, Y)$. Basta infatti passare da omotopia ad estensione sulla palla tramite $\mathbb{S} \times I \rightarrow C(\mathbb{S}, Y) \cong \mathbb{B}$, la mappa essendo $(x, t) \mapsto ((1-t)x, t)$.

In particolare: la sfera è contraibile sse esiste una retrazione della palla sulla sfera (suo bordo): basta usare la mappa identica della sfera (nullomotopa sse si estende alla palla). Le sfere sono contraibili negli spazi Banach di dimensione infinita.

3.2.3. Per le sfere in dimensione finita, sono veri ed equivalenti:

- NON CONTRAIBILITÀ DELLA SFERA: la sfera \mathbb{S}^n non è contraibile.
- NON RETRAZIONE DELLA PALLA SULLA SFERA: non esistono retrazioni continue dell'inclusione della sfera \mathbb{S}^n nella sua palla.
- TEOREMA DEL PUNTO UNITO DI BROUWER PER FUNZIONI CONTINUE DELLA PALLA IN SÈ: ogni funzione continua della sfera \mathbb{B}^n in sè ammette un punto unito.

(e gli analoghi enunciati usando funzioni di classe qualsiasi, invece che solo continue: usando il teorema di Stone-Weierstrass si vede che il teorema di Brouwer è vero nel caso continuo sse è vero per un'altra classe).

Per vedere che le ultime due condizioni sono equivalenti: data φ senza punti uniti, definiamo $r : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ intersecando la semiretta aperta da $\varphi(P)$ verso P con la sfera; data una retrazione r , possiamo usare $-i \circ r$ oppure $(id - r)/2$ come continue prive di punti uniti.

Per dimostrare la non retrazione potremo usare degli invarianti algebrici: $n = 0$ per connessione, $n = 1$ usando il π_1 , n usando il π_n . Ma possiamo già ora dare una dimostrazione elementare: supponendo di avere una retrazione differenziabile potremmo dedurre che il volume $(n+1)$ -dimensionale di \mathbb{B}^{n+1} è nullo, che è assurdo.

3.3. Applicazioni ai complessi cellulari.

3.3.1. Per le coppie di un complesso cellulare ed un suo sottocomplesso la proprietà di estensione delle omotopie vale (basta mostrare che il cilindro di una cella ha come retratto di deformazione la cella stessa e il cilindro del suo bordo; per questo basta una proiezione da un punto sovrastante il cilindro).

3.3.2. Se (X, S) è una coppia di complessi cellulari, e S è contraibile, allora $X \rightarrow X/S$ è equivalenza omotopica. Dunque $X/S \cong (X \cup C(S))/C(S) \sim X \cup C(S)$ (perché $C(S)$ è sempre contraibile).

Se S e T sono sottocomplessi contraibili, allora $X/S \sim X/T$. In particolare $\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^0 \sim \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ (ma non \cong ; introdurre una 1-cellula incollata ad \mathbb{S}^0 , e una "parallela" in \mathbb{S}^2), e in generale $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^i \sim \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{i+1}$ per $i < n$. Una superficie torica con n dischi meridiani è omotopicamente equivalente alla somma puntata ciclica di n dischi, ovvero alla somma puntata di un cerchio e di n dischi.

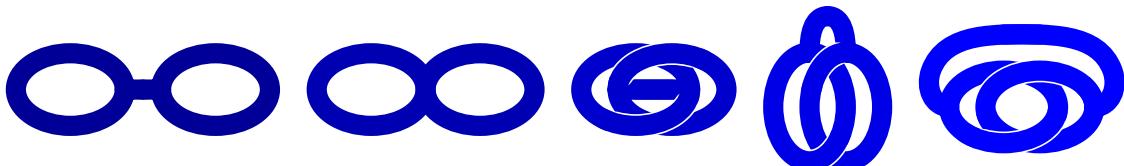
3.3.3. Se (X, S) è una coppia di complessi cellulari, e $f, g : S \rightarrow Y$ sono mappe omotope, allora $X \sqcup_{S,f} Y$ e $X \sqcup_{S,g} Y$ sono omotopicamente equivalenti.

In particolare, se S è contraibile in X (cioè l'inclusione è omotopa all'inclusione d'un punto), $X/S \sim X \cup C(S) \sim X \vee S(S)$. Per esempio, $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^i \sim \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{i+1}$ per $i < n$.

3.4. Gioco.

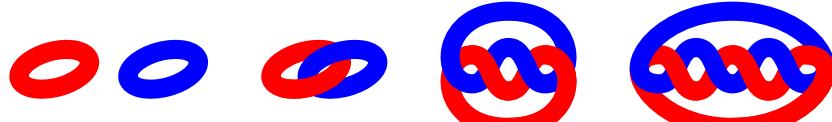
Due superficie reali X, Y immerse in \mathbb{R}^n si dicono omotope, o topologicamente equivalenti, se esiste una applicazione continua $\varphi : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(0, \cdot)$ sia l'immersione di X in \mathbb{R}^n , $\varphi(1, \cdot)$ sia un omeomorfismo di X su Y , e per ogni t si abbia un omeomorfismo di X in $X_t = \text{im } \varphi(t, \cdot)$. Si tratta di avere un "disegno animato" che trasforma X in Y senza ricorrere a tagli, strappi, cuciture o altri accidenti discontinui.

Si considerino allora le seguenti superficie immerse in \mathbb{R}^3 , e si dica quali sono equivalenti tra loro, e quali no, giustificando le risposte positive tramite qualche fotogramma del "disegno animato":

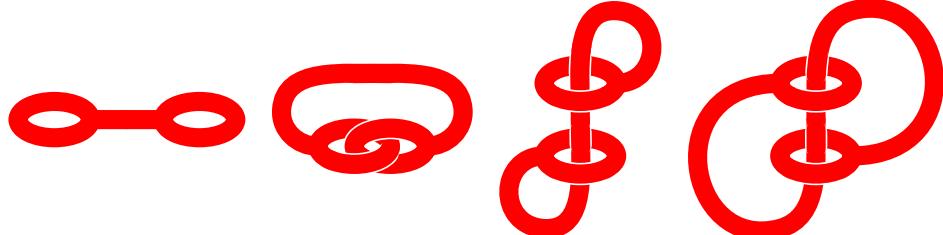


Come è possibile giustificare delle risposte negative?

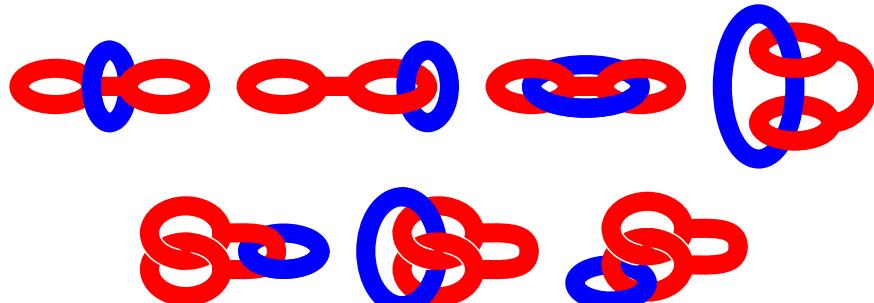
Due tori:



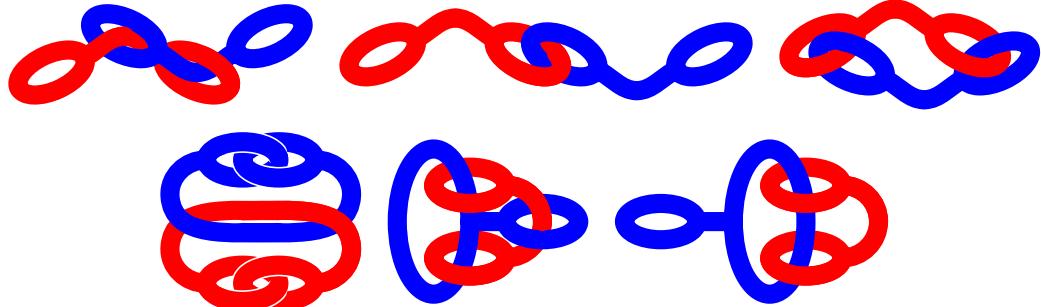
Un bitoro:



Un toro e un bitoro:



Immaginarsi tutte le configurazioni possibili di due bitori tipo quello rosso. Per esempio:



Si osservi invece che tutte le configurazioni precedenti di superficie possono essere “sciolte” in \mathbb{R}^4 : in particolare il miglior strumento per un ladro di biciclette sembra essere una palla aperta di \mathbb{R}^4 (dove immergere le catene).

Capitolo VI

Gruppo Fondamentale

Associare ad ogni spazio topologico degli invarianti algebrici permette di dimostrare che due spazi non sono omeomorfi mostrando che possiedono invarianti non isomorfi. Se tali invarianti sono omotopici, si può così mostrare che due spazi non sono omotopicamente equivalenti.

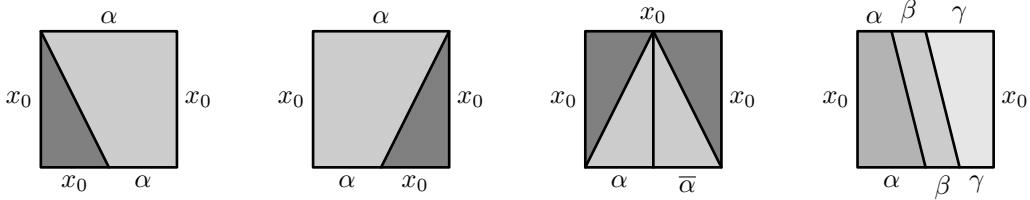
Avere abbastanza invarianti permetterebbe di ottenere risultati di classificazione: dire che due spazi sono equivalenti in qualche senso sse gli invarianti associati sono isomorfi tra loro; questo è troppo ottimistico per gli invarianti semplici che studieremo qui.

Essendo le sfere gli spazi topologici più semplici, dopo i dischi, i primi invarianti da studiare sono le mappe a meno di omotopia dalle sfere agli spazi: studieremo il primo, mostrando la sua struttura di gruppo non necessariamente commutativo (da cui la necessità di introdurre qualche nozione sul modo di rappresentare gruppi non commutativi), e le due principali tecniche di calcolo: via retratti di deformazione e via ricoprimenti (teorema di Seifert-Van Kampen).

1. Gruppo Fondamentale.

1.1. Definizione, funtorialità e invarianza omotopica..

1.1.1. Il (primo) gruppo fondamentale $\pi_1(X, x)$ di uno spazio topologico X puntato in x è il gruppo dei cammini chiusi di base x a meno di omotopia relativa al punto; la legge di gruppo è la giustapposizione di cammini (si scrive per primo il primo percorso: $\alpha\beta$ significa prima α e poi β , la composizione essendo ben definita modulo omotopia dei cammini); l'omotopia è essenziale affinché si tratti di un gruppo (elemento neutro è la classe del cammino costante, l'associatività si vede usando solo riparametrizzazioni, la proprietà degli inversi, cammini percorsi in senso inverso: $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, è più sofisticata: bisogna durante l'omotopia “accorciare” il cammino, usando $\alpha|_{[0,s]}\bar{\alpha}|_{[0,s]}$ per $s \in [0, 1]$):



(dalle figure si dovrebbe essere in grado di scrivere le omotopie, che comunque non sono uniche, naturalmente). Se non si è osservato finora, si noti che due cammini con gli stessi estremi sono omotopi tra loro sse essi possono essere prolungati ad una funzione continua su un quadrato o su un disco, quando il valore ai bordi sia dato dai cammini.

1.1.2. Nota: $\pi_0(X, x) = H((\mathbb{S}^0, 1), (X, x))$ (è solo un insieme puntato, e misura le componenti connesse per archi di X , puntando quella di x), $\pi_1(X, x) = H((\mathbb{S}^1, 1), (X, x))$, e in generale potremmo definire $\pi_n(X, x) = H((\mathbb{S}^n, 1), (X, x))$ (per $n > 1$ si tratta di gruppi commutativi, usando l'operazione di concatenazione).

1.1.3. Se X è connesso per archi, la scelta del punto x porta a gruppi fondamentali isomorfi (basta usare un cammino tra i due punti base, e l'isomorfismo tra i gruppi indotto dalla composizione con il cammino da un lato, e il suo rovesciato dall'altro). La scelta del cammino tra punti base dipende solo dalla classe di omotopia del cammino, e cambia l'isomorfismo per coniugio.

1.1.4. Data una mappa $f : X \rightarrow Y$, viene indotta per composizione con f una mappa di gruppi detta immagine diretta $f_\circ : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$. Si ha $\text{id}_{X\circ} = \text{id}_{\pi_1(X)}$ e $(gf)_\circ = g_\circ f_\circ$.

1.1.5. Se $f, g : X \rightarrow Y$ sono mappe omotope relativamente ad x , allora $f_\circ = g_\circ$.

1.1.6. Se S è retratto di deformazione forte (resp. retrazione) di X , allora l'inclusione i induce isomorfismi (risp. inclusioni) $i_\circ : \pi_1(S, s) \rightarrow \pi_1(X, s)$ per ogni $s \in S$.

1.1.7. Se $f, g : X \rightarrow Y$ sono mappe omotope con omotopia H , allora le due mappe di gruppi $f_\circ : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ e $g_\circ : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, g(x))$ soddisfano $g_\circ = h_\gamma f_\circ$ dove γ è il cammino $H(x, t)$ da $f(x)$ a $g(x)$, e $h_\gamma(\alpha) = \gamma^{-1} \alpha \gamma$.

1.1.8. Equivalenze omotopiche inducono isomorfismi tra i gruppi fondamentali. In particolare i gruppi fondamentali sono invarianti omotopici, cioè possiamo dimostrare che due spazi non sono omotopicamente equivalenti dimostrando che hanno gruppi fondamentali non isomorfi; il viceversa naturalmente è falso: due spazi possono avere gruppi fondamentali isomorfi senza essere omotopicamente equivalenti (anche già nel caso di spazi con gruppo fondamentale nullo).

Si osservi per inciso che questo risultato dà una importante tecnica di calcolo del gruppo fondamentale: calcolare quello di un retratto di deformazione dello spazio dato; spesso si cerca di ricondursi a retratti che siano complessi cellulari, nel qual caso sapremo sempre calcolare il gruppo fondamentale.

1.1.9. PRODOTTI. Il gruppo fondamentale del prodotto (non lo smash!) è canonicamente isomorfo al prodotto cartesiano dei gruppi fondamentali dei fattori (vale per un insieme arbitrario di fattori). Per esempio un prodotto di r cerchi ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}^r (se \mathbb{Z} è il gruppo fondamentale del cerchio).

1.2. Spazi semplicemente connessi.

1.2.1. Uno spazio si dice semplicemente connesso se è connesso per archi e ha gruppo fondamentale nullo.

1.2.2. Uno spazio connesso per archi X è semplicemente connesso sse ogni coppia di cammini con gli stessi estremi sono omotopi relativamente agli estremi (un senso è ovvio, l'altro viene da $\gamma \sim \gamma(\bar{\beta}\beta) \sim (\gamma\bar{\beta})\beta \sim \beta$), sse $H(\mathbb{S}^1, X)$ è banale, sse $C(\mathbb{S}^1, X) = C(\mathbb{B}^2, X)$ (tramite restrizione delle funzioni).

1.2.3. Ogni spazio contraibile è semplicemente connesso. Non viceversa, controesempi le sfere più che 1-dimensional (un loop può essere scelto sulla sfera evitando un punto, cioè non suriettivo, a meno di omotopia: si usa che l'antimmagine in un compatto di un punto è compatta). In particolare, per $n > 1$ le sfere \mathbb{S}^n sono semplicemente connesse e non contraibili.

1.2.4. Retratti di semplicemente connessi sono semplicemente connessi.

1.2.5. Se Y è semplicemente connesso, allora la proiezione $X \times Y \rightarrow X$ induce un isomorfismo $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X)$.

1.3. Gruppo Fondamentale del circolo.

1.3.1. $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

1.3.2. GLI ISOMORFISMI. Il morfismo di gruppi $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ che manda n nel ciclo $t \mapsto \text{cis}(2\pi nt)$ ha come inverso il morfismo $\pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ che manda un ciclo γ nell'indice di avvolgimento $\text{ind}_\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$ (pensando \mathbb{S}^1 come circolo unitario in \mathbb{C}), ovvero nel grado della mappa che rialza γ verso \mathbb{R} (se il rialzamento $\tilde{\beta}$ è tale che $\beta = e^{2\pi i \tilde{\beta}}$ e $\tilde{\beta}(0) = 0$, allora il grado è $\tilde{\beta}(1)$).

1.3.3. LE DEMOSTRAZIONI. Le proprietà di \mathbb{R} (per ogni due punti vi è solo una classe di omotopia di cammini con quegli estremi) e della mappa $\text{cis}2\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ (rialza unicamente cammini e omotopie: vi sono ricoprimenti aperti di \mathbb{S}^1 i cui elementi hanno antimmagini formate da copie disgiunte omeomorfe all'immagine, e per ogni cammino si usa una suddivisione con intervalli di lunghezza minore di un numero di Lebesgue dell'antimmagine per il cammino del ricoprimento) sono sufficienti per la dimostrazione.

Si può ottenere anche una dimostrazione che usa direttamente la definizione in termini dell'integrale dell'indicatore logaritmico.

1.3.4. Quindi spazi omotopicamente equivalenti al circolo hanno gruppo fondamentale ciclico infinito (isomorfo a \mathbb{Z}). Il viceversa è falso (si pensi a $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$, che non è omotopicamente equivalente a \mathbb{S}^1 perché ha mappe non banali dalla sfera, cioè un π_2 non nullo), anche se si richiede che tutti i π_i per $i > 1$ siano nulli (si cerchi un esempio decorando il circolo con due rastrelli topologici).

1.3.5. COMPLEMENTI VARI. Per $n > 1$ abbiamo invece che $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$, e come conseguenza un caso di invarianza del dominio: \mathbb{R}^2 non è isomorfo a \mathbb{R}^n per $n \neq 2$.

1.3.6. TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA. Ogni polinomio di grado positivo a coefficienti complessi ammette uno zero nel campo complesso. Vi sono varie dimostrazioni classiche di questo risultato: quelle più elementari usando l'analisi complessa, oppure appunto la topologia algebrica (gruppo fondamentale del circolo); quelle puramente algebriche sono più difficili.

1.3.7. BROWER IN DIM.2 Ogni mappa continua da \mathbb{D}^2 in sè ha un punto fisso. Infatti (vedi capitolo precedente) \mathbb{S}^1 non è contraibile, avendo gruppo fondamentale non banale.

1.3.8. Sono equivalenti:

- (a) (BORSUK-ULAM IN DIM.2) ogni funzione continua $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ammette $x \in \mathbb{S}^2$ con $f(x) = f(-x)$; cioè ogni funzione continua di \mathbb{S}^2 in \mathbb{R}^2 ammette punti antipodali sulla sfera con lo stesso valore della funzione (altrimenti usando la differenza tra la funzione e il suo valore antipodale, si trova un loop equatoriale non banale).
- (b) ogni funzione continua $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ antipodale ($f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{S}^2$); ammette $y \in \mathbb{S}^2$ con $f(y) = 0$;
- (c) non esistono funzioni continue antipodali $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$.

È classico dimostrare (c) usando il gruppo fondamentale del circolo, e i rialzamenti a \mathbb{R} delle funzioni coinvolte (per gli analoghi in dimensioni superiori, servono tecniche omotopiche superiori).

1.3.9. È classico usare questi risultati per applicazioni pratiche (tagliare a metà frittelle con un taglio): se A , B e C sono regioni limitate dello spazio, esiste un piano che divide ciascuna in due parti di uguale volume (esiste una generalizzazione in dimensione n : con un taglio iperpiano si possono dimezzare n regioni limitate).

1.3.10. Di conseguenza, \mathbb{S}^2 non può essere realizzato in \mathbb{R}^2 .

1.3.11. Se tre chiusi ricoprono \mathbb{S}^2 , almeno uno contiene punti antipodali (usare Borsuk-Ulam alle funzioni distanze dai chiusi).

2. Teorema di Seifert-Van Kampen.

2.0. Preliminari sui gruppi.

2.0.1. GRUPPI ABELIANI, ABELIANIZZAZIONI. Dati due gruppi abeliani G_1 e G_2 , il prodotto cartesiano e la somma diretta sono isomorfi, e le mappe di inclusione e di proiezione posseggono le proprietà universali corrispondenti: $\text{Hom}_{ab}(G_1 \times G_2, H) = \text{Hom}_{ab}(G_1, H) \times \text{Hom}_{ab}(G_2, H)$ e $\text{Hom}_{ab}(H, G_1 \times G_2) = \text{Hom}_{ab}(H, G_1) \times \text{Hom}_{ab}(H, G_2)$. Per una famiglia arbitraria G_i di gruppi abeliani, la somma diretta $\bigoplus_i G_i$ è un sottogruppo del prodotto diretto (cartesiano) $\prod_i G_i$, e gli è uguale sse la famiglia è finita.

Dato un gruppo qualsiasi G , definiamo il suo commutatore $[G, G]$ come il gruppo generato dai termini del tipo $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, il suo abelianizzato come il quoziente $G/[G, G]$.

2.0.2. GRUPPI LIBERI, PRODOTTO LIBERO. Dato un insieme S , il gruppo abeliano libero generato da S è $\mathbb{Z}^{(S)}$ (somma diretta di una copia di \mathbb{Z} per ogni elemento di S), e gode della proprietà universale $\text{Hom}_{ab}(\mathbb{Z}^{(S)}, H) = \text{Hom}_{set}(S, H)$.

2.0.3. La stessa proprietà universale, ma estesa alla classe di tutti i gruppi (non necessariamente abeliani) definisce il gruppo libero generato da S , che è formato da tutte le parole che possono essere scritte concatenando elementi di S , e verrà indicato con $\langle S \rangle$; quindi $\text{Hom}_{grp}(\langle S \rangle, H) = \text{Hom}_{set}(S, H)$.

2.0.4. Dati due gruppi qualsiasi G_1 e G_2 , il loro prodotto libero $G_1 * G_2$ risolve il problema universale della somma per i gruppi non necessariamente commutativi, ovvero $\text{Hom}_{grp}(G_1 * G_2, H) = \text{Hom}_{grp}(G_1, H) \times \text{Hom}_{gp}(G_2, H)$, e si realizza come il gruppo delle parole a lettere alternate in G_1 e G_2 (operazione la concatenazione, modulo eventualmente prodotto di elementi nello stesso gruppo). L'operazione si estende ad un numero finito di gruppi.

2.0.5. Se i due gruppi sono abeliani, il prodotto libero non è abeliano, e il suo abelianizzato coincide con la somma diretta.

2.0.6. PRESENTAZIONI DI GRUPPI. Un modo pratico e classico per definire gruppi è di esibire un insieme S di generatori e un insieme R di relazioni tra i generatori (elementi del gruppo libero dei

generatori): il gruppo $\langle S \rangle / \langle R \rangle$ è allora il quoziente del gruppo libero generato da S con il sottogruppo normale generato da R . Per esempio:

- $\langle \emptyset \rangle / \langle \emptyset \rangle = \{1\}$ (gruppo banale);
- $\langle S \rangle / \langle \emptyset \rangle = \langle S \rangle$ (gruppo libero);
- $\langle a \rangle / \langle a^n \rangle = \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ (gruppo ciclico finito);
- $\langle a, b \rangle / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z}^2$ (gruppo commutativo);
- $\langle a, b \rangle / \langle ab^2a^{-1}b^{-3}, ba^2b^{-1}a^{-3} \rangle = \{1\}$ (un modo difficile di scrivere il gruppo banale);

ogni gruppo ammette una presentazione (usando come generatori tutti gli elementi, e come relazioni $(xy)y^{-1}x^{-1}$ per ogni x, y nel gruppo!), ovviamente non unica, e decidere se due presentazioni danno luogo a gruppi isomorfi può essere estremamente difficile.

2.0.7. SISTEMI E LIMITI INDUTTIVI DI GRUPPI. Un sistema induttivo di gruppi indicato su un insieme ordinato I è il dato di un gruppo G_i per ogni $i \in I$, di una mappa $G_i \rightarrow G_j$ per ogni $i \leq j$, soggetto alla compatibilità per composizione. Si definisce limite induttivo del sistema un gruppo G dotato di mappe $G_i \rightarrow G$ per ogni $i \in I$, compatibili con le mappe del sistema, universale per tale posizione: per ogni H l'insieme $\text{Hom}_{grp}(G, H)$ sia in biiezione canonica con le collezioni di mappe compatibili dai termini del sistema induttivo ad H . Il limite induttivo si realizza come quoziente del prodotto libero.

2.1. Enunciati.

2.1.1. CASO GENERALE. Se $\{U_i : i \in L\}$ è un ricoprimento di X con aperti connessi per archi contenenti il punto base, e chiuso per intersezioni finite, allora $\pi_1(X)$ è il limite induttivo dei gruppi $\pi_1(U_i)$ rispetto alle mappe indotte dalle inclusioni di aperti.

Più precisamente: se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è un ricoprimento di X con aperti connessi per archi contenenti il punto base, il morfismo canonico $*_{i \in I} \pi_1(U_i) \rightarrow \pi_1(X)$ è suriettivo se $U_i \cap U_j$ sono connessi per archi, e il nucleo è il sottogruppo normale generato dalle (differenze di) immagini dei $\pi_1(U_i \cap U_j)$ se anche $U_i \cap U_j \cap U_k$ sono connessi per archi.

Moralmente, poiché X può essere identificato con il limite induttivo degli elementi del ricoprimento aperto $\{U_i\}$, il teorema di Seifert-Van Kampen dice che sotto opportune condizioni il calcolo del gruppo fondamentale commuta con i limiti induttivi.

L'esistenza del morfismo canonico è garantita dalle inclusioni $U_i \rightarrow X$ che danno morfismi $\pi_1(U_i) \rightarrow \pi_1(X)$ (e la compatibilità con i morfismi dati dalle inclusioni di aperti danno il morfismo canonico dal limite induttivo verso il gruppo fondamentale).

La suriettività si ottiene scegliendo una suddivisione di I in intervalli di ampiezza minore di un numero di Lebesgue per $\alpha^{-1}(\mathcal{U})$, scrivendo α come concatenazione dei cammini corrispondenti $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_N$ e poi scegliendo un cammino γ_i in $U_{i_1} \cap U_{i_2}$ dal punto base a $\alpha_i(1) = \alpha_{i+1}(0)$; allora

$$\alpha = (\alpha_1 \bar{\gamma}_1)(\gamma_1 \alpha_2 \bar{\gamma}_2)(\gamma_2 \cdots \bar{\gamma}_{N-1})(\gamma_{N-1} \alpha_N)$$

è combinazione di elementi dei $\pi_1(U_{i_\ell})$.

Per dimostrare che il nucleo è quello descritto (ovvero l'iniettività della funzione dal limite induttivo) bisogna vedere che se $\beta = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_N$ è omotopo (tramite H diciamo) al cammino costante in $\pi_1(X)$ (con $\beta_i \in \pi_1(U_i)$) allora è equivalente al cammino costante modulo omotopia in $\pi_1(U_i)$ e relazioni del sottogruppo indicato. Si fa reticolando il dominio $I \times I$ dell'omotopia H con rettangolini di diametro inferiore ad un numero di Lebesgue per $H^{-1}(\mathcal{U})$, in modo tale che ogni vertice sia comune al più a tre rettangolini. Connnettendo il punto base con ogni (immagine di) vertice di rettangolini tramite un cammino che stia nella intersezione degli aperti del ricoprimento coinvolti dal vertice, vediamo che ogni cammino "da sinistra a destra" in $I \times I$ è equivalente (usando le relazioni del nucleo) ad ogni altro; in particolare β (cammino in basso) è equivalente alla composizione di cammini costanti (cammino in alto).

2.1.2. CASO SEMPLICEMENTE CONNESSO. In particolare, se gli U_α sono semplicemente connessi, allora X è semplicemente connesso.

Se gli $U_\alpha \cap U_\beta$ sono semplicemente connessi, allora $\pi_1(X)$ è il prodotto libero dei $\pi_1(U_\alpha)$.

2.1.3. CASO DI TRE APERTI. Nel caso che il ricoprimento sia dato con tre aperti $U, V, U \cap V$, allora $\pi_1(X) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$ (quoziente del prodotto libero modulo il sottogruppo normale generato dall'intersezione).

In particolare se $\pi_1(V) = 0$ allora $\pi_1(X)$ è quoziante di $\pi_1(U)$ modulo $\pi_1(U \cap V)$. Se $\pi_1(U \cap V) = 0$ allora $\pi_1(X)$ è il prodotto libero $\pi_1(U) * \pi_1(V)$.

2.1.4. SOMME. Il gruppo fondamentale della somma puntata (wedge sum) è canonicamente isomorfo al prodotto libero dei gruppi fondamentali degli addendi nel caso in cui i punti fissati ammettano intorni semplicemente connessi (in generale? studiare il caso della somma puntata, sui due vertici, di due vortici di circonference: un'applicazione con due aperti del teorema di Seifert-Van Kampen darebbe il banale $\pi \cong \pi *_{\pi} \pi$; il gruppo fondamentale è molto più grande di $\pi * \pi$; si noti anche che unire i vertici dei due vortici con un segmento dà un risultato diverso, non omotopicamente equivalente). Per esempio un bouquet di r cerchi ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}^{*r} . La proprietà si estende ad un numero arbitrario di addendi.

2.1.5. VARIANTI. Spesso è utile usare ricopimenti chiusi invece che aperti, e funziona bene per esempio se ognuno dei chiusi ha un intorno aperto di cui sia un retratto di deformazione forte (e a quegli aperti si possa applicare il teorema).

3. Applicazioni.

3.1. Gruppi Fondamentali di gruppi topologici.

3.1.1. Se G è un gruppo topologico, in $\pi_1(G, 1)$ si può introdurre anche l'operazione di composizione tra cammini data dal prodotto puntuale (prodotto del gruppo). Si tratta di un'operazione con lo stesso elemento neutro della composizione di cammini ($\alpha\varepsilon = \alpha = \varepsilon\alpha$ e $\alpha \cdot \varepsilon = \alpha = \varepsilon \cdot \alpha$), e le due operazioni distribuiscono reciprocamente:

$$(\alpha\beta) \cdot (\alpha'\beta') = (\alpha \cdot \alpha')(\beta \cdot \beta') .$$

Come conseguenza, le due operazioni coincidono (usare $\beta = \varepsilon = \alpha'$) e sono associative (usare $\beta = \varepsilon$) e commutative (usare $\alpha = \varepsilon = \beta'$). Quindi il gruppo fondamentale di un gruppo topologico è sempre commutativo.

Questa osservazione si generalizza al caso di uno spazio topologico X dotato di un punto x_0 e di una mappa $p : X \times X \rightarrow X$ tale che $p(x, x_0)$ e $p(x_0, x)$ sono omotope all'identità di X rel. x_0 : la conclusione è sempre che $\pi_1(X, x_0)$ è commutativo.

3.1.2. ESEMPI. Per gli spazi di matrici:

$$\pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{I}) = \pi_1(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathbb{I}) = \pi_1(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

e le applicazioni canoniche indotte dalle inclusioni sono suriettive nel caso $\pi_1(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_1(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$ (per $2 \leq n$) e isomorfismi nel caso $\pi_1(\mathrm{SO}_m(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_1(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$ (per $2 < m \leq n$). In effetti si dimostra che, identificato $\mathrm{SO}_m(\mathbb{R})$ con il sottogruppo di $\mathrm{SO}_{m+1}(\mathbb{R})$ che fissa il polo nord N nell'azione su \mathbb{S}^n , abbiamo che $\mathrm{SO}_{m+1}(\mathbb{R})$ è ricoperto da due aperti (formati dagli elementi che mandano N fuori da N , resp. $-N$) che sono, assieme alla loro intersezione, retratti di deformazione di $\mathrm{SO}_m(\mathbb{R})$ (omeomorfi al prodotto $(\mathbb{S}^n \setminus \pm N) \times \mathrm{SO}_m(\mathbb{R})$). Problema: chi è un generatore del gruppo fondamentale (cammino non omotopo a zero, ma di quadrato omotopo a zero)?

Invece $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso e $\pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \pi_1(\mathrm{U}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ (ricordare che $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^1 \times \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$), e inoltre le applicazioni canoniche indotte dalle inclusioni $\mathrm{U}_m(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ sono isomorfismi (per $m \leq n$).

3.1.3. ALTRI GRUPPI DI MATRICI. $SL_n, SO_{a,b}, \dots$

3.1.4. Se G è un gruppo topologico semplicemente connesso, e H un sottogruppo normale discreto (in particolare centrale), allora $\pi_1(G/H, H) = H$. Infatti la mappa quoziante $G \rightarrow G/H$ ha la proprietà di rialzare unicamente cammini e omotopie (scelto il punto di partenza), e definisce $\pi_1(G/H, H) \rightarrow H$ mandando α (basato in $1_{G/H}$ e rialzato da 1_G) in $\tilde{\alpha}(1)$, con inversa che manda h nell'immagine dell'unico (a meno di omotopia) cammino da 1_G ad h .

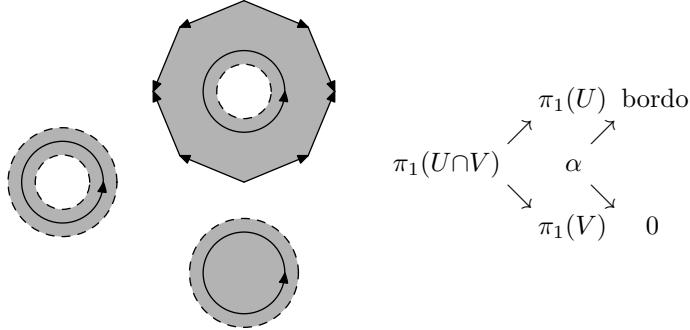
Più in generale, se H è sottogruppo normale discreto, la mappa canonica $\pi_1(G/H, H) \rightarrow H$ è suriettiva e il nucleo è l'immagine tramite la proiezione $G \rightarrow G/H$ del gruppo fondamentale di G .

Esempi: $\pi_1(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{T}) &= \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2, \\ \pi_1((\mathbb{S}^1)^n) &= \pi_1(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n, \\ \pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) &= \pi_1(\mathbb{H}^1/\{\pm 1\}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (\text{si ricordi che } \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) &\cong \mathbb{H}^1/\{\pm 1\} \cong \mathbb{S}^3/\{\pm 1\} \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \text{ mentre } \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^3), \\ \pi_1(\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})) &= \pi_1(\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1/\{\pm 1\}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

3.2. Applicazione alle superficie reali compatte.

Nel caso delle superficie reali compatte, usando la rappresentazione poligonale e come aperti un disco e il complementare di uno ivi contenuto vi sono tre aperti omotopi a un punto (il disco), una circonferenza (l'intersezione, che è un anello) e un bouquet di circonferenze.



Il gruppo fondamentale è quindi il quoziente di un gruppo libero (del bouquet di circonferenze) modulo l'immagine del gruppo della circonferenza (quindi la relazione che definisce la superficie a partire dal poligono). Abbiamo quindi che :

$$\mathbf{3.2.1.} \quad \pi_1(\mathbb{T}) = \langle a, b \rangle / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle = \langle a, b \rangle / \langle [a, b] \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

$\mathbf{3.2.2.} \quad \pi_1(\mathbb{K}) = \langle a, b \rangle / \langle aba^{-1}b \rangle \cong \langle a, c \rangle / \langle a^2c^2 \rangle$ (basta mandare b in ac ; provengono delle due rappresentazioni poligonali \mathbb{K} e $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$),

$$\mathbf{3.2.3.} \quad \pi_1(\mathbb{P}^2) = \langle a \rangle / \langle a^2 \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$\mathbf{3.2.4.} \quad \pi_1(M_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle / \langle [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle,$$

$$\mathbf{3.2.5.} \quad \pi_1(M_g \# \mathbb{K}) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, a_{g+1}, b_{g+1} \rangle / \langle [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] a_{g+1} b_{g+1} a_{g+1}^{-1} b_{g+1} \rangle,$$

$$\mathbf{3.2.6.} \quad \pi_1(M_g \# \mathbb{P}^2) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, e \rangle / \langle [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] e^2 \rangle,$$

$$\mathbf{3.2.7.} \quad \pi_1(\text{somma connessa di } g \mathbb{P}^2) = \langle a_1, \dots, a_g \rangle / \langle a_1^2 \cdots a_g^2 \rangle,$$

$\mathbf{3.2.8.}$ In particolare, due superficie reali compatte orientabili di genere diverso non possono essere omotopicamente equivalenti, e a fortiori nemmeno omeomorfe. Lo stesso per superficie reali compatte non orientabili.

$\mathbf{3.2.9.}$ SUPERFICIE REALI CON BORDO. Il gruppo fondamentale di superficie reali con bordo è sempre libero (si retraggono-deformano a un bouquet di circonferenze).

3.3. Applicazione ai complessi cellulari.

$\mathbf{3.3.1.}$ Ogni cammino e ogni omotopia di cammini in un complesso cellulare sono contenuti in qualche sottocomplesso finito.

$\mathbf{3.3.2.}$ RIDUZIONE. Dato un complesso cellulare X , Sia Y ottenuto da X attaccando delle 2-celle secondo mappe di incollamento dei bordi. Allora il morfismo canonico $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ indotto dalla mappa $X \rightarrow Y$ è suriettivo, e il nucleo è generato dalle immagini dei cicli in cui si incollano le 2-celle aggiunte. Basta infatti applicare opportunamente il teorema di Seifert-Van Kampen. Lo stesso argomento applicato a celle di dimensione superiore dice che il gruppo fondamentale non cambia oltre il 2-scheletro.

$\mathbf{3.3.3.}$ L'inclusione del 2-scheletro $X^2 \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo dei gruppi fondamentali $\pi_1(X^2) \cong \pi_1(X)$. Osservare anche che $\pi_0(X^1) \cong \pi_0(X)$.

$\mathbf{3.3.4.}$ SPAZI PROIETTIVI. Spazi proiettivi reali di dimensione almeno 2 hanno gruppo fondamentale isomorfo a quello del piano, dunque $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ciò non ha nulla a che vedere con l'orientabilità: gli spazi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sono orientabili sse n è dispari). Spazi proiettivi complessi sono tutti semplicemente connessi.

3.3.5. REALIZZAZIONE. Per ogni gruppo G , esiste un complesso cellulare X_G tale che $\pi_1(X_G) = G$. Infatti basta prendere una presentazione del gruppo (con generatori e relazioni) e costruire un complesso cellulare avente come 1-celle i generatori, e una 2-cellula per ogni relazione, incollate secondo le relazioni stesse.

Esempi: gruppi ciclici finiti e loro prodotti.

3.3.6. PRESENTAZIONI. Il gruppo fondamentale di un complesso cellulare connesso finito è di presentazione finita.

3.4. Applicazione ai grafi.

3.4.1. Un grafo è un complesso cellulare di dimensione 1 (dunque localmente contraibili e localmente connessi per archi); diciamo vertici i punti (0-celle), lati le 1 celle; finito se ha un numero finito di vertici e lati (sse compatto); orientato se per ogni lato si è scelto un verso; connesso se è connesso; un cammino in un grafo è una concatenazione di lati, ciascuno consecutivo al precedente (ridotto se non si ritorna mai indietro su un lato appena percorso); un ciclo è un cammino chiuso;

3.4.2. CONNETTIVITÀ. Un grafo è connesso sse per ogni coppia di vertici c'è una sequenza finita di lati che li uniscono (percorso sul grafo). Se un grafo è connesso, togliendo un lato si ottengono al più due componenti connesse. Si dice connettività di un grafo il massimo numero di lati che si possono togliere in modo che rimanga connesso.

3.4.3. EULERO-POINCARÉ. La caratteristica di Eulero-Poincaré di un grafo finito è la differenza tra il numero di vertici e quello dei lati. Per un grafo connesso, la somma di caratteristica e connettività è 1. Si tratta di invarianti omotopici.

3.4.4. ALBERI. Un albero è un grafo connesso privo di cicli; capita sse il grafo è contraibile (a un suo qualsiasi vertice, relativamente a quel vertice); se è finito capita sse la caratteristica è 1. Ogni grafo contiene alberi, e contiene alberi massimali per l'inclusione (un albero è massimale se passa per tutti i vertici del grafo).

3.4.5. GRUPPI FONDAMENTALI. Il gruppo fondamentale degli alberi è nullo. Dato un grafo connesso, e considerato un suo albero massimale, sia L l'insieme dei lati esterni all'albero; allora il gruppo fondamentale del grafo è libero con generatori i cicli associati agli elementi di L ; in particolare, il gruppo fondamentale di un grafo è sempre libero, e se il grafo è connesso il numero di generatori è la connettività del grafo.

3.5. Applicazione a link e nodi.

3.5.1. NODI E LINK. Un nodo (knot) è una mappa continua, iniettiva e lineare a tratti (o differenziabile) K di S^1 in S^3 (o in \mathbb{R}^3), e si identifica con la sua immagine. Un link è una unione nodi disgiunti. Una circonferenza semplice si chiama non-nodo (unknot).

Di solito per rappresentare i nodi si usano delle proiezioni piane, specificando nei punti di incrocio quale ramo passa sopra; nelle proiezioni si evitano casi speciali (tangenze, sovrapposizioni di più di due punti ecc.) e allora si dicono regolari.

3.5.2. Due nodi (link) K, K' si dicono equivalenti se esiste una isotopia ambientale $H : S^3 \times I \rightarrow S^3$ tra l'identità e h con $hK = K'$. Questo vale (ma non è banale) sse $S^3 \setminus K$ è omeomorfo a $S^3 \setminus K'$.

Si osservi che richiedere come equivalenza l'omotopia tra nodi porta ad un risultato banale (tutti equivalenti a un punto).

3.5.3. ANFICHIRALITÀ, SIMMETRIA. Il riflesso di un nodo è una sua immagine speculare; il nodo si dice anfichirale se è equivalente al suo riflesso (sono rari). Scelta una orientazione di un nodo, si dice opposto il nodo con l'orientazione opposta; il nodo si dice simmetrico se è equivalente (rispettando l'orientazione) al proprio opposto.

3.5.4. SOMMA CONNESSA, NODI PRIMI. La somma connessa di due nodi orientati si definisce togliendo un segmento a ciascuno e incollandoli per i bordi liberi (rispettando l'orientamento). Un nodo è composto se non è somma connessa die due nodi non banali, primo altrimenti. Chiaramente, ogni nodo è somma connessa di primi, e di solito si cerca di classificare (e tabulare) i nodi primi.

3.5.5. INVARIANTI. Per studiare i nodi e la loro classificazione, si cercano invarianti topologici: i primi elementari studiati sono stati il numero minimo di incroci in proiezioni piane regolari (usato

per tabulare i nodi primi), la distanza dal non-nodo (numero minimo di scambi sopra/sotto da fare per sciogliere il nodo).

3.5.6. Uno dei primi invarianti studiati dei link di nodi e link è il gruppo fondamentale del complementare (ma è chiaro a priori che non potrà distinguere nodi dai loro riflessi ed opposti, quindi non sarà un invariante sufficiente). Per esempio:

Se L = una circonferenza allora $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) = \mathbb{Z}$ (ed $\mathbb{R}^3 \setminus L$ ha tipo d'omotopia di $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$),

Se L = due circonferenze non intrecciate allora $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (ed $\mathbb{R}^3 \setminus L$ ha tipo d'omotopia di $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$),

Se L = due circonferenze intrecciate semplicemente allora $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ed $\mathbb{R}^3 \setminus L$ ha tipo d'omotopia d'una superficie torica somma-puntata con una sfera),

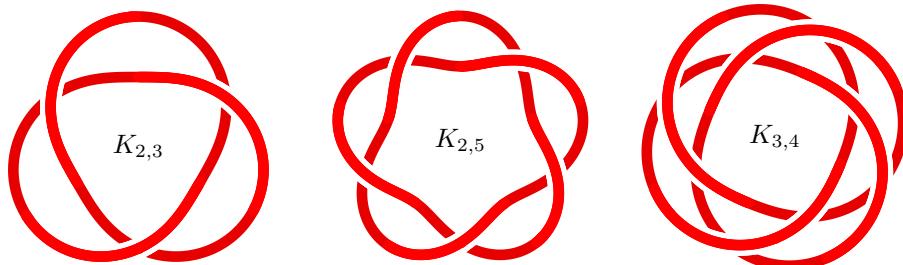
Studiare il caso di una fila di tre circonferenze allacciate, e di una catena di tre circonferenze allacciate.

Studiare il caso degli anelli di Borromeo: sono tre anelli intrecciati in modo tale che togliendone (ciascuno) gli altri due sono non annodati (ma i tre insieme sono non separabili).

3.5.7. NODI TORICI. I nodi torici sono i nodi che hanno immagine su una superficie torica. Si classificano come $K_{n,m}$ con $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ coprimi e $n > m$ (ovvero $K_{n,m} \cong K_{m,n}$), e il gruppo fondamentale del complementare è $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{n,m}) = \langle a, b \rangle / \langle a^n = b^m \rangle$.

Si tratta di una applicazione del teorema di Seifert-Van Kampen: si pensa \mathbb{S}^3 come unione dei due tori complementari sulla cui superficie giacciono i nodi. Ciascun toro (solido) ha come gruppo fondamentale \mathbb{Z} , e la loro intersezione (tolto il nodo) è una striscia con gruppo fondamentale libero il cui generatore avvolge n volte un toro, ed m l'altro.

Questo permette di classificare completamente i nodi torici: se n o m è 1, si tratta del non-nodo, altrimenti $K_{n,m}$ è equivalente a $K_{n',m'}$ sse $\{n, m\} = \{n', m'\}$, perché i gruppi sono determinati da n ed m (si noti che si tratta di gruppi con centro non banale, unico caso tra i gruppi dei nodi).



$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}) = \langle a, b \rangle / \langle a^2 = b^3 \rangle, \quad \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,5}) = \langle a, b \rangle / \langle a^2 = b^5 \rangle, \quad \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{3,4}) = \langle a, b \rangle / \langle a^3 = b^4 \rangle.$$

3.5.8. PRESENTAZIONE DI WIRTINGER. Il metodo di Wirtinger permette di trovare una presentazione del gruppo del link a partire da una proiezione piana regolare orientata: si chiamano a_1, a_2, \dots, a_n i tratti connessi della proiezione, e per ogni “ponte” che dà sconnessioni si definisce una relazione r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) costruita così: se a è il lato che passa sopra, b il tratto entrante, c quello uscente usiamo $ba = ac$ se l'orientazione di a, c è quella usuale $\rightarrow \uparrow \rightarrow$, e $ab = ca$ altrimenti: $\rightarrow \downarrow \rightarrow$ (i generatori dei loop sono scelti in modo coerente avvitando nell'orientazione scelta del nodo). Allora

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \frac{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle}{\langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle}$$

e una qualsiasi delle relazioni r_i può essere tolta (cioè è combinazione delle altre). Da questa presentazione si può vedere in particolare che per i nodi l'abelianizzato del gruppo è sempre \mathbb{Z} .

La dimostrazione si può fare sia usando Seifert-Van Kampen: si pensa il nodo in un piano con i passaggi “sotto” che toccano un piano parallelo; allora sopra quest'ultimo piano si vedono i generatori, sotto nulla, e sul piano si leggono le relazioni. O anche usando un retratto di deformazione del complementare del nodo ad una specie di toro (cavo) con le pareti incollate dove ci sono i punti.

3.5.9. La presentazione di Wirtinger funziona in generale per i link (mentre la presentazione torica non funziona per i link torici: perché?). Per esempio per i link di due circonferenze abbiamo: $\langle a, b \rangle / \langle ab = ba \rangle$ se si intrecciano semplicemente (Hopf), $\langle a, b \rangle / \langle (ab)^2 = (ba)^2 \rangle$ (oppure $\langle a, c \rangle / \langle ac^2 = c^2a \rangle$) se si intrecciano doppiamente (una specie di croce), $\langle a, b \rangle / \langle (ab)^3 = (ba)^3 \rangle$ (oppure $\langle a, c \rangle / \langle ac^3 = c^3a \rangle$) se si intrecciano triplamente (una specie di stella di David), ecc. È interessante vedere una

catena di tre circonferenze, e il caso degli anelli di Borromeo: tre cerchi intrecciati in modo tale che togliendone (ciascuno) gli altri siano liberi (viene $\langle a, b, c \rangle / \langle [a, [b, c]], [c, [a, b]] \rangle$).

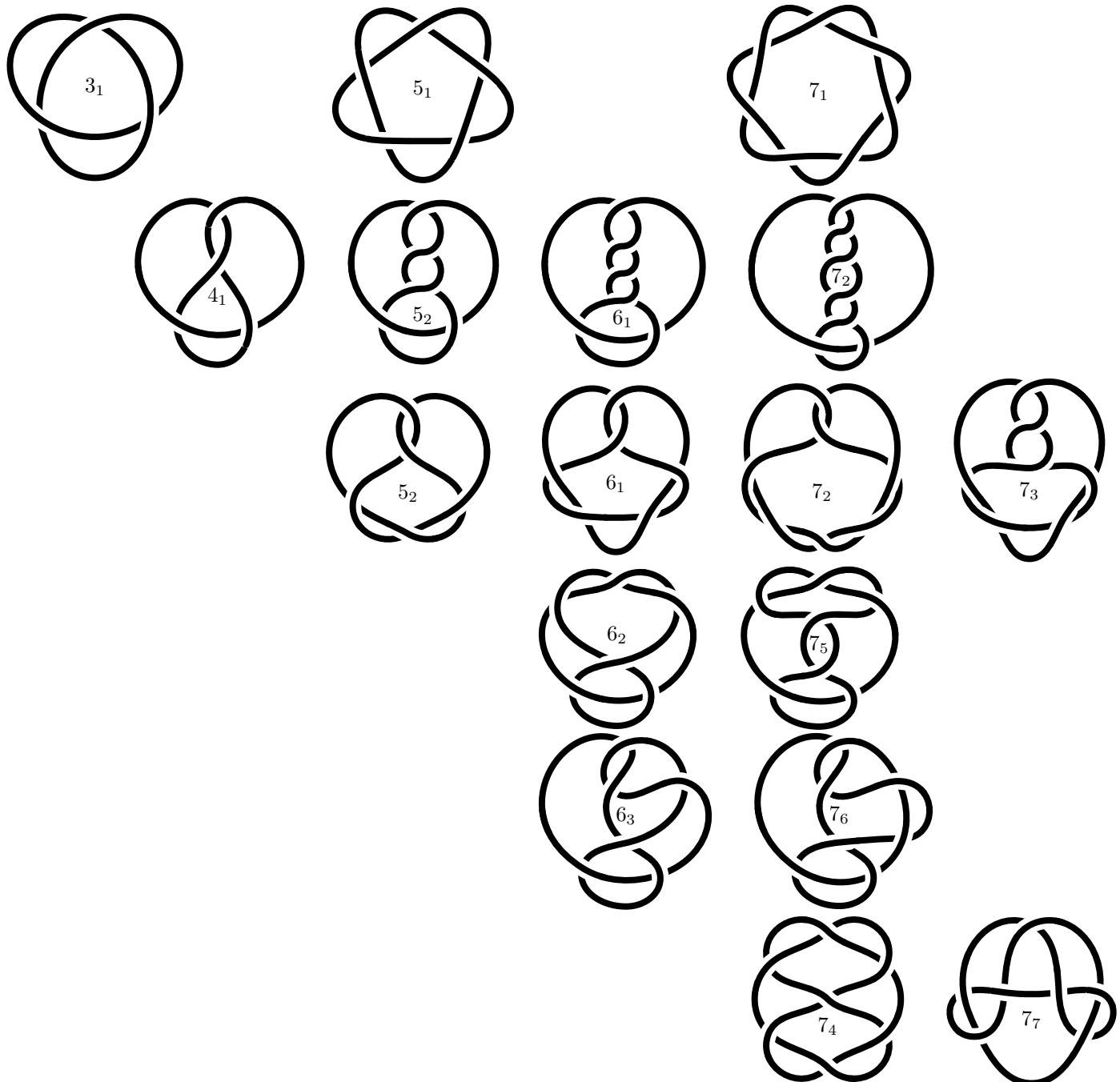
3.5.10. Il nodo detto trifoglio, chiamato 3_1 , è il nodo torico $K_{2,3}$. La presentazione di Wirtinger porta a $\langle a, b \rangle / \langle aba = bab \rangle$, che corrisponde a $\langle x, y \rangle / \langle x^2 = y^3 \rangle$ via $x \mapsto aba$, $y \mapsto ab$, con inversa $a \mapsto y^2x^{-1}$ e $b \mapsto xy^{-1}$.

3.5.11. Altri casi piccoli: il nodo 4_1 detto “otto”, ed in generale i nodi $(2n)_1$ e $(2n+1)_2$ “otto lunghi” hanno presentazione di Wirtinger con due generatori e una relazione.

3.5.12. I nodi $(2n+1)_1$ “stelle” hanno presentazione di Wirtinger con due generatori e una relazione: $\langle a, b \rangle / \langle a(ba)^n = b(ab)^n \rangle$, ma sono tutti nodi torici $K_{2n+1,2}$, e la presentazione torica è molto più semplice: $\langle x, y \rangle / \langle x^2 = y^{2n-1} \rangle$ (isomorfismi?).

3.5.13. I nodi $3_1\#3_1$ (“nodo quadrato”) e $3_1\# -3_1$ (“grammy”) non sono equivalenti (non banale), ma hanno lo stesso gruppo.

3.5.14. Riportiamo i primi nodi della tavola classica, con proiezioni piane fino a 7 incroci nella pagina seguente (alcuni sono presentati in due modi).



Capitolo VII

Rivestimenti

La definizione e lo studio dei rivestimenti ha varie motivazioni, e una delle principali è legata ad una certa analogia con la teoria di Galois in Algebra. Nel caso della Topologia, si verifica che (sotto ragionevoli condizioni) il gruppo fondamentale di uno spazio si identifica canonicamente con un opportuno gruppo di automorfismi di un suo rivestimento (che sia semplicemente connesso), e che tutti i rivestimenti intermedi sono in corrispondenza con i sottogruppi del gruppo fondamentale (o di quello degli automorfismi detto), facendo corrispondere a sottogruppi normali dei rivestimenti particolarmente belli (simmetrici).

1. Spazi incubi, fibrati, rivestimenti.

1.1. Spazi incubi, fibrati.

1.1.1. INCUBI. Dato uno spazio topologico X , si dice spazio su X , o (spazio) incubo di X ogni mappa continua $p : Y \rightarrow X$; diciamo mappa tra due incubi di X una funzione continua $Y \rightarrow Y'$ compatibile con la struttura degli incubi (cioè che renda commutativo l'ovvio triangolo). Due incubi si diranno isomorfi se c'è un omeomorfismo tra loro che sia mappa di incubi di X . Le fibre di un incubo sono le antimmagini dei punti di X .

1.1.2. FIBRATI BANALI. Per ogni spazio Z si dicono incubi banali (o fibrati banali) di X gli incubi isomorfi a $p_X : Z \times X \rightarrow X$ (proiezione su X); le fibre sono allora ovviamente tutte isomorfe a Z .

Le foglie di un fibrato banale sono i sottinsiemi $\{z\} \times X$ del fibrato $Z \times X$, e sono tutte omeomorfe a X . Gli automorfismi di un fibrato banale con X connesso e Z discreto permutano le foglie. Se X è qualsiasi?

1.1.3. FIBRATI. Si dicono fibrati (localmente banali) di X gli incubi localmente banali, cioè i $p : Y \rightarrow X$ per i quali esiste un ricoprimento aperto U_α di X tale che $p_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ siano fibrati banali per ogni α (ovvero per ogni punto della base esiste un intorno aperto ristretto al quale l'incubo sia un fibrato banale). Restrizioni sulla base di fibrati sono fibrati. Prodotti fibrati di fibrati sulla stessa base sono fibrati.

1.1.4. Se $p : Y \rightarrow X$ è fibrato allora è mappa aperta, e se X è connesso allora le fibre sono omeomorfe tra loro; se inoltre Y è non vuoto, allora p è suriettivo.

1.1.5. SEZIONI CONTINUE DI FIBRATI. Dato un fibrato $p : Y \rightarrow X$ si definiscono le sue sezioni locali su un aperto U di X come le funzioni continue $s : U \rightarrow Y$ tali che $ps = \text{id}_U$ (rialzamenti dell'inclusione $U \hookrightarrow X$ a Y , inverse destre della restrizione del fibrato a U). In particolare sono mappe aperte. Localmente esistono sempre sezioni. Se $U = X$ si parla di sezioni globali.

1.1.6. I fibrati (incubi localmente banali) di I e $I \times I$ sono tutti (incubi) banali.

1.1.7. Per esempio un cilindro è un fibrato banale del cerchio con fibra un segmento; un nastro di Moebius è un fibrato localmente banale, ma non banale (nota: hanno stessa base e stessa fibra, e hanno entrambi sezioni globali).

Esempio: fibrati tangenti alle varietà.

1.2. Rivestimenti.

1.2.1. Un rivestimento è un fibrato (localmente banale) a fibre discrete; è una mappa aperta, suriettiva se X connesso e Y non vuoto.

Se la base X è connessa, le fibre sono tutte isomorfe tra loro. La cardinalità delle fibre si dice il numero di fogli del rivestimento. Rivestimento con un foglio equivale a omeomorfismo.

Ogni componente connessa di un rivestimento è un rivestimento, e di solito si considerano solo rivestimenti connessi.

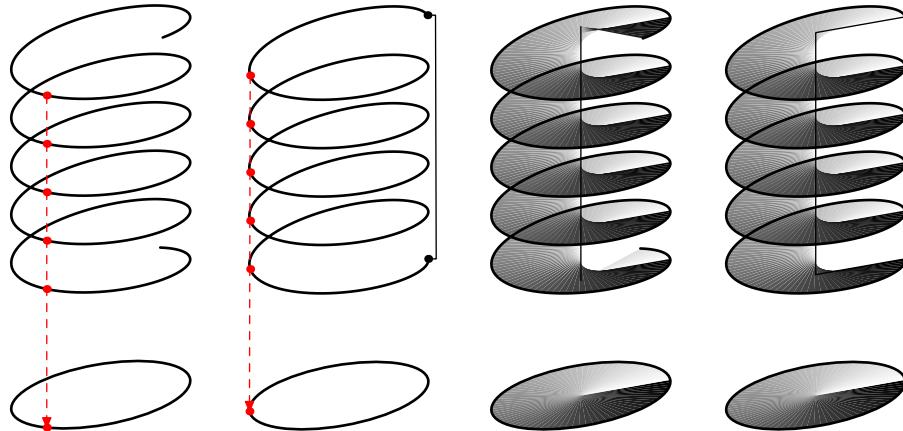
Restrizioni sulla base di rivestimenti sono rivestimenti.

1.2.2. L'esponenziale complessa è un rivestimento $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ con \aleph_0 fogli.

La potenza n -esima complessa $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ è rivestimento con n fogli.

1.2.3. L'avvolgimento $cis : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dato da $cis(t) = \exp(it)$ è un rivestimento con \aleph_0 fogli.

La potenza n -esima complessa $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ è rivestimento con n fogli.



(nei due disegni a destra il “segmento verticale sopra l'origine” è un punto). Si osservi che questi rivestimenti non hanno sezioni globali (logaritmi e radici, rispettivamente, non possono essere definiti continui su tutto un intorno di zero).

1.2.4. Un fibrato è un rivestimento sse per ogni punto esiste un intorno e una famiglia di sezioni (su quell'intorno) che diano una partizione in aperti a lui omeomorfi della sua antimmagine.

1.2.5. Le sezioni locali di un rivestimento sono omeomorfismi sull'immagine (in particolare aperte e chiuse), e coincidono sse coincidono su un punto.

1.2.6. Un rivestimento connesso con una sezione globale è un omeomorfismo.

1.2.7. In generale, la composizione di due rivestimenti non è un rivestimento (ma lo è per esempio nel caso siano finiti). Esistono rivestimenti con due fogli di $\mathbb{R} \sqcup_{\mathbb{Z}} \bigsqcup_{\mathbb{Z}} \mathbb{S}^1$, rivestimento con \mathbb{Z} fogli di $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, e che non è un rivestimento di quest'ultimo.

1.2.8. RIVESTIMENTI REGOLARI (O NORMALI O DI GALOIS). Se un gruppo discreto G opera in modo propriamente discontinuo su uno spazio topologico X , allora la proiezione $X \rightarrow X/G$ è un rivestimento con fibra omeomorfa a G . Rivestimenti isomorfi a questi si dicono regolari o normali o di Galois.

1.2.9. RELAZIONI CON GLI OMEOMORFISMI LOCALI. Una mappa $p : Y \rightarrow X$ si dice omeomorfismo locale se per ogni punto di Y esistono intorni di lui e della sua immagine mappati omeomorficamente da p . Dunque è una mappa aperta.

Un rivestimento è un omeomorfismo locale, non viceversa visto che un aperto di un rivestimento resta un omeomorfismo locale, senza essere di solito un rivestimento.

☒ **1.2.10.** Viceversa, se Y è hausdorff (non vuoto), un omeomorfismo locale a fibre finite di cardinalità costante è un rivestimento (a fibre finite). Si tratta delle funzioni perfette e suriettive?

2. Proprietà di rialzamento.

2.1. Cammini e omotopie.

2.1.1. Rialzare una funzione $f : Z \rightarrow X$ su $p : Y \rightarrow X$ significa trovare una funzione $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ tale che $p \tilde{f} = f$. È equivalente a trovare una sezione globale s della proiezione canonica

$p' : Z \times_X Y \rightarrow Z$: data s usiamo $\tilde{f} = f's$, data \tilde{f} si costruisce $s = (\text{id}_Z, \tilde{f})$:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ \parallel & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Z \times_X Y = Z' & \xrightarrow{f'} & Y \\ s \uparrow\downarrow p' & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

2.1.2. Ogni rivestimento rialza i cammini con unicità, scelto il punto di partenza (basta osservare che il prodotto fibrato dà un rivestimento banale di I).

2.1.3. Ogni rivestimento rialza le omotopie di cammini con unicità, scelto il punto di partenza (basta osservare che il prodotto fibrato dà un rivestimento banale di $I \times I$).

2.1.4. Per una mappa $p : Y \rightarrow X$, si dice che rialza (ev. con unicità) le omotopie se per ogni omotopia $H : Z \times I \rightarrow X$ e ogni rialzamento $\bar{H}_0 : Z \rightarrow Y$ di $H_0 = H(\cdot, 0)$, esiste (ev. unica) una estensione dell'omotopia $\bar{H} : Z \times I \rightarrow Y$.

Un omeomorfismo locale che rialza con unicità i cammini, rialza con unicità le omotopie (basta rialzare i cammini $\{z\} \times I$). In particolare, lo fanno i rivestimenti.

2.2. Monodromia.

Usiamo la notazione $\pi_1(X, x_0, x)$ per i cammini in X da x_0 a x modulo omotopia relativa agli estremi, dunque $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_0, x_0)$. Sia $p : Y \rightarrow X$ rivestimento (tutti gli spazi connessi e localmente connessi per archi).

2.2.1. La mappa canonica $p : \pi_1(Y, y_0, y) \rightarrow \pi_1(X, x_0, x)$ è iniettiva (ogni cammino è rialzamento della propria immagine).

2.2.2. La mappa canonica $p : \bigsqcup_{y \in Y_x} \pi_1(Y, y_0, y) \rightarrow \pi_1(X, x_0, x)$ è biiettiva (cammini con stesso inizio e immagine omotope sono omotopi e hanno lo stesso estremo, e ogni cammino ha rialzamento che parte da y_0).

2.2.3. La mappa canonica $p : \bigsqcup_{y \in Y_{x_0}} \pi_1(Y, y_0, y) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è biiettiva.

2.2.4. La mappa canonica $p : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è iniettiva.

2.2.5. In particolare:

(1) Se γ è un cammino in Y con estremi distinti sulla stessa fibra, allora $p\gamma$ è un ciclo non banale (cioè non omotopo al cammino costante) in X .

(2) I rivestimenti di spazi semplicemente connessi e localmente connessi per archi sono globalmente banali.

(3) Un rivestimento induce in isomorfismo tra i gruppi fondamentali sse è omeomorfismo.

(4) Il sottogruppo $p\pi_1(Y, y_0)$ di $\pi_1(X, x_0)$ è normale sse Y/X è normale, ovvero $X = Y/G$ con G avente azione propriamente discontinua su Y . In un senso basta usare $G = \pi_1(X, x_0)/p\pi_1(Y, y_0)$, nell'altro senso si usa il rialzamento dei cammini.

2.2.6. AZIONE DI MONODROMIA SULLE FIBRE. Dato un rivestimento $p : Y \rightarrow X$, e un punto $x \in X$, il gruppo $\pi_1(X, x)$ agisce in modo naturale a destra sulla fibra $Y_x = p^{-1}(x)$: ogni cammino porta un punto della fibra nell'estremo del suo rialzamento che comincia in quel punto. Si ha che Y è connesso per archi sse l'azione è transitiva.

Per ogni $y \in Y_x$, lo stabilizzatore di quest'azione è $p_\circ(\pi_1(Y, y))$.

2.2.7. LEMMA DI MONODROMIA. Se $p : Y \rightarrow X$ è rivestimento, e α, β sono cammini in X omotopi, allora due rialzamenti in Y con la stessa origine hanno la stessa estremità e sono omotopi (più precisamente i cammini sono omotopi sse i rialzamenti che partono dallo stesso punto lo sono).

2.2.8. LEMMA DI MONODROMIA FORTE. Se $p : Y \rightarrow X$ è rivestimento, e α, β sono cammini in X con uguale origine ed estremo, e $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ sono rialzamenti con la stessa origine, allora hanno lo stesso estremo sse $\alpha\beta^{-1} \in p_\circ(\pi_1(Y))$.

2.3. Funzioni.

2.3.1. CRITERIO DI RIALZAMENTO. Dato un rivestimento puntato $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ e una mappa continua $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$, con Z connesso e localmente connesso per archi, esiste un rialzamento $\bar{f} : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ (cioè un triangolo commutativo di spazi puntati) sse $f(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq p_\circ(\pi_1(Y, y_0))$

$p(\pi_1(Y, y_0))$. Necessità facile ($f(\pi_1(Z, z_0)) = p\bar{f}(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq p(\pi_1(Y, y_0))$), per la sufficienza si cerchi una sezione dell'antimmagine Z' del rivestimento su Z ($Z' = Z \times_X Y$ non è necessariamente connesso: ma si osserva che il rivestimento p' dà una biiezione tra i gruppi fondamentali $\pi_1(Z', (z_0, y_0))$ e $\pi_1(Z, z_0)$, e si sceglie la componente connessa di (z_0, y_0) , che quindi è omeomorfa a Z).

La richiesta che Z sia localmente connesso per archi è essenziale: controesempio del quasi-cerchio.

2.3.2. UNICITÀ DEL RIALZAMENTO. Due rialzamenti $Z \rightarrow Y$ di una funzione $f : Z \rightarrow X$, con Z connesso, sul rivestimento $p : Y \rightarrow X$ coincidono sse coincidono in un punto.

Più in generale, il luogo di coincidenza di due rialzamenti (su un rivestimento) è aperto (e chiuso).

3. Gruppi fondamentali e rivestimenti.

3.1. Gruppi fondamentali dei rivestimenti.

3.1.1. Per ogni rivestimento $p : Y \rightarrow X$, la mappa canonica $p_\circ : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, p(y))$ è iniettiva, e possiamo identificare il gruppo fondamentale $\pi_1(Y, y)$ del rivestimento con un sottogruppo del gruppo fondamentale $\pi_1(X, p(y))$ della base (formato dai cicli i cui rialzamenti a partire da y sono cicli). Cambiando y nella fibra di $p(y)$ si ottiene la classe di coniugio di quel sottogruppo.

Si tratta di un sottogruppo normale sse il rivestimento è normale. Infatti, in un verso basta usare il gruppo quoziante $G = \pi_1(X, p(y))/p_\circ\pi_1(Y, y)$, che agisce su Y in modo che $Y/G \cong X$. Dall'altro verso preso $\alpha \in p_\circ\pi_1(Y, y)$ e $\gamma \in \pi_1(X, p(y))$, rialzamento di $\gamma\alpha\bar{\gamma}$ in Y a partire da y è dato da $\tilde{\gamma}g(\tilde{\alpha})\bar{\gamma}$ (se $\tilde{\alpha}$ rialza α a partire da y , e $g \in G$ sposta y in $\tilde{\gamma}(1)$), e quindi termina in y ; perciò $\gamma\alpha\bar{\gamma} \in p_\circ\pi_1(Y, y)$.

3.1.2. Il numero di fogli di un rivestimento p è pari all'indice di $p_\circ\pi_1(Y, y)$ in $\pi_1(X, p(y))$.

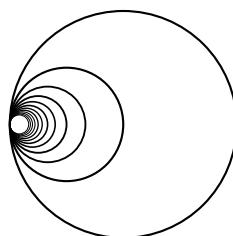
In particolare, l'indice è uno (sse i gruppi sono isomorfi) sse p è omeomorfismo.

3.1.3. Il problema che intendiamo affrontare è capire la corrispondenza tra sottogruppi del gruppo fondamentale e rivestimenti della base. In particolare: ogni sottogruppo è gruppo fondamentale di qualche rivestimento?

3.2. Rivestimenti universali.

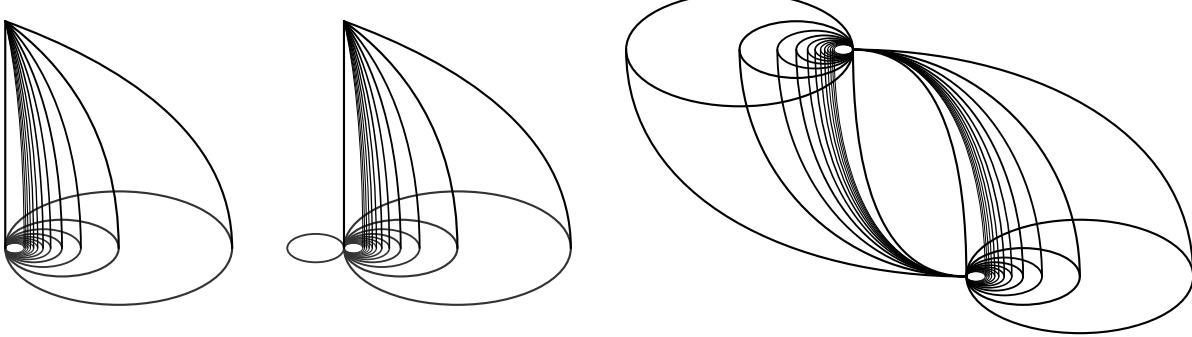
3.2.1. SPAZI SEMILOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSI. Un aperto U di X si dice neutro se la mappa $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ è nulla (si fattorizza attraverso il gruppo banale). Uno spazio si dice semilocalmente semplicemente connesso se ammette un ricoprimento con aperti neutri, ovvero se ogni punto ha un intorno aperto neutro (e dunque una base di tali intorni). Ovviamente lo sono tutti gli spazi localmente semplicemente connessi (ogni punto ha una base di intorni semplicemente connessi), tutti gli spazi in cui ogni punto ha un intorno semplicemente connesso, e tutti gli spazi semplicemente connessi. In particolare varietà reali e complessi cellulari: sono localmente contraibili.

Il vortice di circonferenze (unione delle circonferenze tangenti nell'origine del piano con centri sulle ascisse e raggi $1/n$):



ha gruppo fondamentale più che numerabile: perché?) non è semilocalmente semplicemente connesso. Il suo cono è semplicemente connesso (quindi semilocalmente, ma non localmente, semplicemente connesso). Unendo due tali coni identificando il vertice dell'uno al punto vortice dell'altro dà uno spazio che è semilocalmente semplicemente connesso, senza che i suoi punti abbiano qualche intorno semplicemente connesso. Un simile esempio si ottiene anche a partire dal cono del vortice di circonferenze, identificando il vertice con il punto vortice (farsi il disegno); in tutti i casi, descrivere il gruppo

fondamentale.



3.2.2. RIVESTIMENTI UNIVERSALI. Un rivestimento di X si dice universale se è semplicemente connesso. Ciò è vero sse è universale tra i rivestimenti di X , cioè se è rivestimento (universale) di ogni altro rivestimento di X , cioè se ogni altro rivestimento di X è un suo quoziente (come si vede dal criterio di rialzamento).

3.2.3. ESISTENZA DI RIVESTIMENTI UNIVERSALI. Uno spazio topologico X connesso e localmente connesso per archi ammette un rivestimento universale \tilde{X} sse è semilocalmente semplicemente connesso.

Un verso è banale: se esiste il rivestimento universale, ogni punto ha un intorno (trivializzante per il rivestimento) che si rialza sul rivestimento universale, e quindi la mappa corrispondente tra i gruppi fondamentali si fattorizza attraverso quello nullo (del rivestimento universale).

Viceversa usiamo l'osservazione che nel rivestimento universale, se esiste, dato un rialzamento \tilde{x}_0 di x_0 e un punto \tilde{x} , esiste un unico cammino a meno di omotopia tra loro, corrispondente ad un unico elemento di $\pi_1(X, x_0, p\tilde{x})$. Se X è semilocalmente semplicemente connesso allora \tilde{X} si può ottenere usando l'unione disgiunta

$$\bigsqcup_{x \in X} p^{-1}(x) = \bigsqcup_{x \in X} \bigsqcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \{\tilde{x}\} \cong \bigsqcup_{x \in X} \bigsqcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}) \cong \bigsqcup_{x \in X} \pi_1(X, x_0, x)$$

con la topologia avente per basi di intorni i sottinsiemi ottenuti componendo con cammini in un aperto neutro, usando la classe nulla di $\pi_1(X, x_0)$ come punto base, e proiezione naturale verso X (estremo del cammino). Gli aperti neutri risultano allora trivializzanti in virtù dell'ipotesi del teorema. Inoltre lo spazio \tilde{X} è connesso per archi (dato un punto \tilde{x} , il cammino $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{x}_{[0,s]}$, cioè $\tilde{\alpha}(s)(t) = \tilde{x}(ts)$, connette \tilde{x}_0 e \tilde{x}) e semplicemente connesso (se $\tilde{\alpha}$ è un circuito basato a \tilde{x}_0 , allora $\tilde{\alpha}$ è una omotopia di $\alpha = p\tilde{\alpha}$ con ε_{x_0} , e per rialzamento delle omotopie risulta che $\tilde{\alpha}$ è omotopa a $\varepsilon_{\tilde{x}_0}$).

3.2.4. Prodotti finiti di rivestimenti universali sono rivestimenti universali del prodotto.

3.2.5. PROBLEMA. Come procurarsi il rivestimento universale di uno spazio, conoscendo quello di un suo retratto di deformazione forte?

3.3. Corrispondenza di Galois tra rivestimenti e gruppi fondamentali.

3.3.1. Ad ogni rivestimento Y di X rimane associato un sottogruppo $p_*\pi_1(Y)$ del gruppo fondamentale $\pi_1(X)$, che è normale sse il rivestimento è normale (Galois).

Viceversa, che questa corrispondenza sia suriettiva non è in generale vero: per esempio il sottogruppo banale verrebbe realizzato dal rivestimento universale.

3.3.2. Se X ammette rivestimento universale \tilde{X} , allora ogni sottogruppo H di $\pi_1(X)$ viene associato il rivestimento quoziante \tilde{X}/H , il cui gruppo fondamentale è isomorfo ad H .

Le due mappe, una inversa dell'altra, danno allora una corrispondenza biunivoca tra classi di isomorfismo di rivestimenti di X e classi di coniugio di sottogruppi del gruppo fondamentale di X (e tra classi di isomorfismo di rivestimenti puntati di X e sottogruppi del gruppo fondamentale di X), rispettando le strutture di reticolo dei due insiemi; a rivestimenti normali corrispondono sottogruppi normali. Due rivestimenti sono isomorfi sse i sottogruppi corrispondenti sono coniugati.

3.3.3. Se X è uno spazio semplicemente connesso, e G un gruppo che opera su X in modo propriamente discontinuo, allora X/G ha gruppo fondamentale isomorfo a G , e X come rivestimento universale (generalizza, con dimostrazione analoga, un analogo risultato visto per quozienti di gruppi).

Più in generale, se X è hausdorff e G opera su X in modo propriamente discontinuo, allora la mappa canonica $\pi_1(X/G) \rightarrow G$ è suriettiva con nucleo dato dall'immagine tramite la proiezione $X \rightarrow X/G$ del $\pi_1(X)$.

4. Teoria di Galois dei rivestimenti.

4.1. Automorfismi di rivestimenti.

4.1.1. Dato un rivestimento $p : Y \rightarrow X$ definiamo $G(p) = G(Y/X)$ il gruppo delle trasformazioni di rivestimento, cioè degli automorfismi di Y che commutano con p (si chiama anche gruppo di Galois del rivestimento p). Esso agisce liberamente e propriamente su Y . La mappa $Y \rightarrow Y/G(Y/X)$ è sempre un rivestimento, come pure $Y/G(Y/X) \rightarrow X$ (che è omeomorfismo sse il rivestimento p è normale).

4.1.2. Naturalmente le trasformazioni di rivestimento agiscono sulle fibre del rivestimento, ed è l'identità sse induce l'identità su una (e allora ciascuna) fibra.

4.1.3. RIVESTIMENTI NORMALI. Un rivestimento è normale se vale una delle seguenti condizioni (equivalenti tra loro):

- (0) è isomorfo a uno del tipo $Y \rightarrow Y/G$ con G gruppo discreto con azione propriamente discontinua su Y ,
- (1) X è omeomorfo a $Y/G(Y/X)$;
- (2) il gruppo delle trasformazioni di rivestimento $G(Y/X)$ agisce in modo transitivo su una (e allora ciascuna) fibra;
- (3) il suo gruppo fondamentale è normale nel gruppo fondamentale della base,
- (4) ogni elemento del gruppo fondamentale della base si rialza a cammini che sono sempre chiusi o sempre aperti (indipendentemente dal punto iniziale scelto per il rialzamento).

Inoltre ogni endomorfismo di un rivestimento normale è un automorfismo.

L'equivalenza di (1) e (2) è ovvia; quella di (2) e (3) è facile tenendo conto che gruppi fondamentali di punti di una fibra sono coniugati (nel gruppo della base); (2) implica (4) è ovvio: basta rialzare un cammino e spostarlo con l'azione del gruppo; (4) implica (3) è facile: rialzamenti dei coniugati di un rialzamento chiuso sono chiusi.

4.1.4. RIVESTIMENTI ABELIANI. Un rivestimento Y di X si dice abeliano se è normale e $G(Y/X)$ è abeliano. Se X ammette rivestimento universale \tilde{X} , allora ammette anche un rivestimento abeliano universale (nel senso che ogni altro rivestimento abeliano ne è un quoziente modulo un sottogruppo del suo gruppo di trasformazioni di rivestimento), e si realizza come quoziente $X^{\text{ab}} = \tilde{X}/G'$ dove G' è il sottogruppo derivato di $G = G(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$.

4.2. Relazioni con i gruppi fondamentali.

4.2.1. COMPATIBILITÀ DI $G(Y/X)$ CON L'AZIONE SULLE FIBRE DI $\pi_1(X)$. Sulle fibre di un rivestimento Y di X agiscono due gruppi: $G(Y/X)$ a sinistra, e il gruppo fondamentale (basato sull'immagine della fibra) a destra, e le due azioni sono compatibili. In particolare, $G(Y/X)$ agisce sulle fibre con applicazioni equivarianti per l'azione del gruppo fondamentale.

4.2.2. Il gruppo $G(Y/X)$ è naturalmente isomorfo al gruppo delle trasformazioni equivarianti (per l'azione del gruppo fondamentale) di una (ognuna) fibra del rivestimento.

4.2.3. Se $p : Y \rightarrow X$ è rivestimento qualsiasi, allora abbiamo una sequenza esatta di gruppi:

$$1 \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow N(\pi_1(Y)) \longrightarrow G(Y/X) \longrightarrow 1$$

e in particolare $G(Y/X) \cong N(\pi_1(Y))/\pi_1(Y)$, dove $N(\pi_1(Y))$ è il normalizzante di $\pi_1(Y)$ in $\pi_1(X)$.

4.2.4. Se $p : Y \rightarrow X$ è rivestimento normale, allora l'inclusione dei gruppi fondamentali e la mappa naturale verso $G(Y/X)$ danno una sequenza esatta di gruppi:

$$1 \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow G(Y/X) \longrightarrow 1$$

e in particolare $G(Y/X) \cong \pi_1(X)/p_*\pi_1(Y)$.

4.2.5. In particolare, per il rivestimento universale \tilde{X} vale che $G(\tilde{X}/X) = \pi_1(X)$, e dunque la sequenza si può vedere come

$$1 \longrightarrow G(\tilde{X}/Y) \longrightarrow G(\tilde{X}/X) \longrightarrow G(Y/X) \longrightarrow 1$$

e perciò $G(Y/X) \cong G(\tilde{X}/X)/G(\tilde{X}/Y)$.

4.3. Teoremi fondamentali.

4.3.1. CORRISPONDENZA DI GALOIS. Sia Υ un rivestimento connesso normale di X . Allora c'è una corrispondenza biunivoca (isomorfismo di reticolati) tra classi di isomorfismo di rivestimenti intermedi e classi di coniugio di sottogruppi del gruppo $G(\Upsilon/X)$; a rivestimenti normali corrispondono sottogruppi normali.

Ad ogni rivestimento Y intermedio tra Υ e X viene associato il sottogruppo $G(\Upsilon/Y)$, e ad ogni sottogruppo H di $G(\Upsilon/X)$ viene associato il rivestimento Υ/H .

4.3.2. La stessa corrispondenza dà luogo ad una corrispondenza biunivoca tra il reticolo dei rivestimenti puntati intermedi e il reticolo dei sottogruppi del gruppo $G(\Upsilon/X)$.

4.3.3. La verifica delle corrispondenze si ottiene mostrando la buona definizione modulo isomorfismi di rivestimenti, e poi che le due mappe sono una l'inversa dell'altra verificando che le composizioni diano le identità.

L'affermazione sulla normalità è facile se si suppone che esista il rivestimento universale: allora Y su X è di Galois sse $\pi_1(Y)$ è normale in $\pi_1(X)$, sse i quozienti modulo $\pi_1(\Upsilon)$ idem, sse $G(\Upsilon/Y)$ è normale in $G(\Upsilon/X)$. Ma si può anche dimostrare direttamente senza ipotesi di esistenza del rivestimento universale.

Da un lato, se si suppone $r : Y \rightarrow X$ normale ($q : \Upsilon \rightarrow Y$ e composto $p = rq : \Upsilon \rightarrow X$) mostriamo che $G(\Upsilon/Y)$ è normale in $G(\Upsilon/X)$: basta vedere che per $f \in G(\Upsilon/Y)$ e $h \in G(\Upsilon/X)$ si ha $hfh^{-1} \in G(\Upsilon/Y)$, cioè $qhfh^{-1} = q$. Se $y \in \Upsilon$, da $py = ph^{-1}y$ segue $rqy = rqh^{-1}y$, e per ipotesi esiste $\sigma \in G(Y/X)$ con $qy = \sigma qh^{-1}y$, e quindi $qh = \sigma q$ (sono due rialzamenti di p coincidenti in y). Allora abbiamo $qhfh^{-1} = \sigma qfh^{-1} = \sigma qh^{-1} = qhh^{-1} = q$.

Dall'altro lato supponiamo $G(\Upsilon/Y)$ normale in $G(\Upsilon/X)$, e mostriamo che l'azione di $G(Y/X)$ è transitiva sulle fibre di Y . Come preliminare, costruiamo (usando l'ipotesi di normalità) una funzione $\delta : G(v/X) \rightarrow G(Y/X)$; ad ogni $h \in G(v/X)$ associamo la sua fattorizzazione $\delta(h) \in G(Y/X)$ attraverso q , cioè $qh = \delta(h)q$ (esiste perché se $y, \eta \in \Upsilon$ con $qy = q\eta$, allora $\eta = \tau y$ con $\tau \in G(\Upsilon/Y)$ da cui $q\eta = qh\sigma y = qh\sigma h^{-1}hy = qhy$, donde la fattorizzazione). Ora, se $y' = qy$ e $\eta' = q\eta$ sono in Y con $ry' = r\eta'$, abbiamo $rqy = rq\eta$, quindi per normalità esiste $h \in G(\Upsilon/X)$ con $\eta = hy$, da cui $\eta' = q\eta = qhy = \delta(h)qy = \delta(h)y'$ (che dà la transitività voluta).

4.3.4. CORRISPONDENZA DI GALOIS-GROTHENDIECK. C'è una corrispondenza biunivoca tra rivestimenti di X e rappresentazioni del gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ (ad ogni rivestimento associa l'azione del gruppo sulla fibra, viceversa?); a rivestimenti connessi corrispondono azioni transitive; a rivestimenti normali corrispondono rappresentazioni associate alle classi di sottogruppi normali. Inoltre morfismi di rivestimento corrispondono biettivamente a morfismi tra le corrispondenti rappresentazioni.

4.4. Analogia Galois algebrico - Galois topologico.

4.4.1.

Galois algebrico

estensioni di K

automorfismi di L che fissano K

gruppo di Galois $G(L/K)$

estensioni normali Ω :

$$[\Omega/K] \longleftrightarrow L(G(\Omega/K))$$

$$L \longrightarrow G(\Omega/L)$$

$$\Omega^H \longleftarrow H$$

L/K è normale sse $H \triangleleft G(\Omega/K)$

Galois topologico

rivestimenti di X

automorfismi di Y che commutano su X

gruppo di automorfismi di rivestimento $G(Y/X)$

rivestimenti normali Υ :

$$[\Upsilon/X] \longleftrightarrow L(G(\Upsilon/X))$$

$$Y \longrightarrow G(\Upsilon/Y)$$

$$\Upsilon/H \longleftarrow H$$

Y/X è normale sse $H \triangleleft G(\Upsilon/X)$

e allora $G(L/K) = G(\Omega/K)/G(\Omega/L)$

$$\begin{array}{ccc} \Omega & & \\ | & & \\ G(\Omega/K) & G(\Omega/L) & \\ | & & \\ K & G(L/K) & \end{array}$$

chiusura algebrica di K

e allora $G(Y/X) = G(\Upsilon/X)/G(\Upsilon/Y)$

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon & & \\ | & & \\ G(\Upsilon/X) & G(\Upsilon/Y) & \\ | & & \\ Y & & \\ | & & \\ X & G(Y/X) & \end{array}$$

rivestimento universale di X

4.4.2. Il motivo profondo per cui le mappe sono inclusioni (estensioni di campi) nel lato algebrico e suriezioni (rivestimenti) nel lato topologico è che il dizionario algebra-geometria è controvariante: per passare da oggetti geometrici come gli spazi ad oggetti algebrici si usano le funzioni dagli spazi in qualche struttura semplice, quindi mappe tra spazi inducono mappe tra le funzioni in senso inverso per composizione (e mandando mappe suriettive in mappe iniettive).

Nel caso per esempio delle Superficie di Riemann si usano i campi delle funzioni meromorfe sulla superficie; allora la teoria di Galois delle estensioni di questi campi corrisponde alla teoria di Galois dei rivestimenti (ramificati) di Superficie di Riemann.

5. Applicazioni.

5.1. Applicazione alle varietà reali.

5.1.1. Rivestimenti di varietà reali sono canonicamente varietà reali (e il rivestimento mappa di varietà). Le varietà reali sono localmente contraibili, dunque ammettono rivestimenti universali.

5.1.2. Rivestimenti di M e $M \setminus N$ con N sottovarietà di M : se N ha codimensione almeno 2 ogni mappa tra restrizioni ad $M \setminus N$ di rivestimenti di M si estende ai rivestimenti; se N ha codimensione almeno 3 ogni rivestimento di $M \setminus N$ si estende ad un rivestimento di M .

5.1.3. Gruppi fondamentali di M e $M \setminus N$ con N sottovarietà di M : la mappa canonica $\pi_1(M \setminus N) \rightarrow \pi_1(M)$ è suriettiva (risp. biiettiva) se N ha codimensione almeno 2 (risp. 3).

5.2. Applicazione ai gruppi topologici.

5.2.1. Rivestimenti di gruppi topologici connessi e localmente connessi per archi sono gruppi topologici e la mappa di rivestimento un morfismo di gruppi.

5.2.2. GRUPPI CLASSICI. Rivestimenti universali (quindi con due fogli) di $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ per $n > 2$. Il gruppo \mathbb{H}_1 dei quaternioni unitari (isomorfo ad \mathbb{S}^3) è rivestimento con due fogli, quindi universale, di $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (tramite azione sui quaternioni reali $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$ per coniugio: q agisce con $r \mapsto qr\bar{q}$); il prodotto $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1$ è rivestimento con due fogli, quindi universale, di $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ (tramite azione sui quaternioni $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$: (p, q) agisce con $r \mapsto pr\bar{q}$); in generale vi sono rivestimenti con i gruppi di Clifford.

5.3. Applicazione alle superficie reali compatte.

Conviene realizzare le superficie in questione come quozienti del piano reale o di una striscia, modulo l'azione di un gruppo discreto (traslazioni e/o riflessioni). Ovviamente la sfera è rivestimento universale (e unico) di sè stessa.

5.3.1. CILINDRI. Il cilindro infinito è quoziente del piano modulo il gruppo delle traslazioni generato da e_1 ; il cilindro finito è quoziente di una striscia $\mathbb{R} \times I$ modulo lo stesso gruppo. Quindi i loro rivestimenti finiti sono tutti cilindri (infiniti o finiti, rispettivamente). D'altra parte, il cilindro infinito è $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, quello finito $I \times \mathbb{S}^1$, e quindi i loro rivestimenti si ottengono da quelli di \mathbb{S}^1 (\mathbb{R} essendo il rivestimento universale, con gruppo di trasformazioni generato dalle traslazioni intere).

5.3.2. MOEBIUS. Il nastro di Moebius infinito è quoziente del piano modulo il gruppo generato da una “traslazione di e_1 con inversione lungo e_2 ”; quello finito usando una striscia $\mathbb{R} \times I$. Quindi i loro rivestimenti sono cilindri o nastri di Moebius a seconda dell'ordine pari o dispari di fogli.

5.3.3. TORI. Un toro è quoziente del piano modulo le traslazioni generate da $\sigma = e_1$ ed $\tau = e_2$; i suoi rivestimenti finiti sono sempre tori, quelli infiniti cilindri. I sottogruppi facili da vedere sono

quelli generati da potenze dei generatori: $\langle \sigma^m \rangle$, $\langle \tau^n \rangle$ (cilindri), $\langle \sigma^m, \tau^n \rangle$ (tori) e $\langle \sigma^m \tau^n \rangle$ (cilindri storti se $mn \neq 0$).

Per trovare tutti i sottogruppi, basta osservare come intersecano il sottogruppo normale generato da σ (risp. τ) e che immagine hanno nel quoziente (che è isomorfo al gruppo ciclico dell'altro generatore): si trovano quindi anche $\langle \sigma^m \tau^{n'}, \tau^n \rangle$ e $\langle \sigma^m, \sigma^{m'} \tau^n \rangle$ (tori storti). Farsi uno schema del reticolo dei gruppi fondamentali e dei gruppi di Galois coinvolti.

5.3.4. KLEIN. L'otre di Klein è quoziante del piano modulo le traslazioni generate da e_2 (sia τ che genera un sottogruppo normale) e le traslazioni di e_1 seguite dalla riflessione rispetto ad e_2 (sia σ , che genera un sottogruppo non normale); la relazione $\tau\sigma\tau = \sigma$ mostra che il gruppo di Galois è isomorfo al gruppo fondamentale. Il rivestimento universale è quindi il piano, e quello abeliano universale è il quoziante del piano modulo il sottogruppo generato da τ^2 (derivato), e si vede essere un cilindro infinito.

I rivestimenti infiniti sono cilindri o nastri di Moebius a seconda che la potenza coinvolta di σ sia pari o dispari, e sono normali nel primo caso, non nel secondo a meno che non vi siano τ o τ^2 nel sottogruppo. I rivestimenti finiti sono tori (normali) oppure altri di Klein (non normali, a meno che non vi siano τ o τ^2 nel sottogruppo) a seconda che sia pari o dispari la potenza coinvolta di σ .

Più precisamente, per trovare tutti i sottogruppi del gruppo di Galois, usiamo che $\langle \tau \rangle$ è sottogruppo normale, e il quoziante isomorfo a $\langle \sigma \rangle$; quindi ogni sottogruppo H è generato da τ^n e $\sigma^m \tau^{n'}$ con $n' < n$ se $nm \neq 0$. Troviamo così i gruppi ciclici $\langle \tau^n \rangle$ (sempre normali), $\langle \sigma^m \rangle$ (normali solo per m pari, altrimenti il normalizzante è $\langle \sigma \rangle$), e $\langle \sigma^m \tau^n \rangle$ (mai normali se $mn \neq 0$, con normalizzanti $\langle \tau, \sigma^2 \rangle$ per m pari, $\langle \sigma \tau^n \rangle$ per n dispari).

Tra i sottogruppi non ciclici troviamo quelli del tipo $\langle \tau^n, \sigma^m \rangle$ che sono normali sse m è pari oppure $n = 1, 2$ (altrimenti il normalizzante è $\langle \sigma, \tau^{n/2} \rangle$ o $\langle \sigma, \tau^n \rangle$ asc n sia pari o dispari), e quelli del tipo $\langle \tau^n, \sigma^m \tau^{n'} \rangle$ che sono normali solo per $n = 1, 2$ (altrimenti hanno normalizzante dato da $\langle \tau, \sigma^2 \rangle$ per m pari, $\langle \sigma, \sigma \tau^{n/2} \rangle$ o $\langle \sigma, \sigma \tau^n \rangle$ asc n sia pari o dispari per m dispari).

Con queste informazioni dovrebbe essere possibile fare uno schema del reticolo dei gruppi fondamentali e dei gruppi di Galois coinvolti.

5.3.5. PIANO PROIETTIVO REALE. Il piano proiettivo reale ha come rivestimento universale la sfera tridimensionale (di cui è quoziante modulo antipodia).

5.3.6. SUPERFICIE ORIENTABILI DI GENERE $g > 1$. In questo caso il rivestimento universale è sempre il piano, con una “tassellazione” (iperbolica) fatta con poligoni aventi $4g$ lati.

5.4. Applicazione ai complessi cellulari.

5.4.1. Rivestimenti di complessi cellulari sono complessi cellulari.

5.4.2. Se $Y \rightarrow X$ è rivestimento, allora $X^1 \rightarrow Y^1$ è rivestimento (vero per ogni scheletro?).

5.4.3. Una mappa di rivestimenti è un isomorfismo sse lo è la mappa indotta tra i loro 1-scheletri.

5.4.4. Un rivestimento è normale sse lo è per gli 1-scheletri.

5.4.5. La restrizione dà un isomorfismo $G(Y/X) \cong G(Y^1/X^1)$.

5.4.6. COSTRUZIONI DI CAYLEY. Dato un gruppo G con generatori g_α e relazioni r_β , possiamo costruire il complesso cellulare X_G avente $\pi_1(X_G) \cong G$ (una 0-cellula, una 1-cellula per ogni generatore, una 2-cellula per ogni relazione). Possiamo anche costruire un complesso cellulare \tilde{X}_G semplicemente connesso, dotato di una azione di G tale che $\tilde{X}_G/G \cong X$, che quindi ne diventa il rivestimento universale: usiamo come 0-celle tutti gli elementi di G , 1-celle tra g e gg_α per $g \in G$ e g_α tra i generatori, 2-celle per ogni ciclo dell'1-scheletro corrispondenti alle relazioni r_β ; l'azione di G su \tilde{X}_G è per moltiplicazione a sinistra.

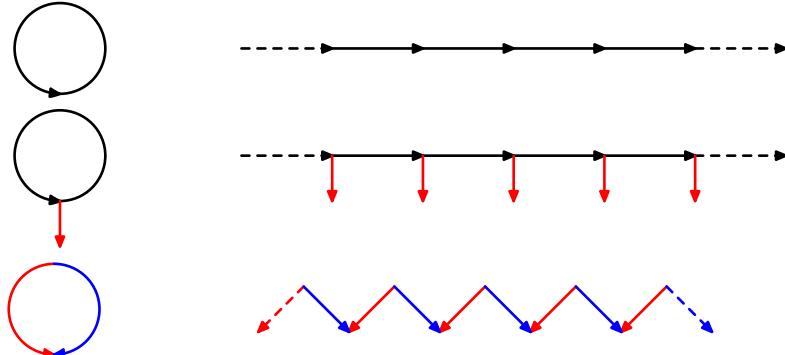
Esempi: esplicitare i casi dei gruppi ciclici finiti e loro prodotti (liberi e cartesiani).

5.4.7. PROBLEMA. Come procurarsi il rivestimento abeliano universale? Naturalmente basta quoziare il rivestimento universale con il sottogruppo derivato, ma si può costruire direttamente usando come 0 celle gli elementi di $G^{ab} = G/G'$, e poi procedere come per il rivestimento universale (1-celle per ogni generatore, 2-celle per ogni relazione).

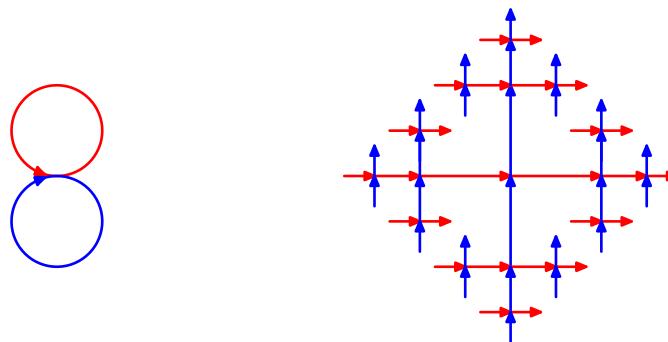
5.4.8. SOMME PUNTATE DI SPAZI. Dati due spazi di cui si conoscono i rivestimenti universali, come costruire il rivestimento universale della somma punita dei due?

5.5. Applicazione ai grafi.

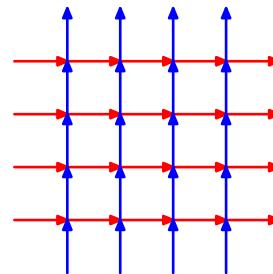
5.5.1. Rivestimenti di grafi sono grafi, rivestimenti universali sono alberi (infiniti).



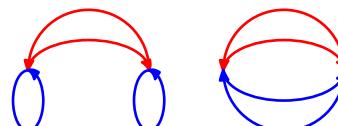
5.5.2. Rivestimenti universali della somma puntata di n circonferenze è un albero omogeneo con $2n$ lati per ogni vertice.



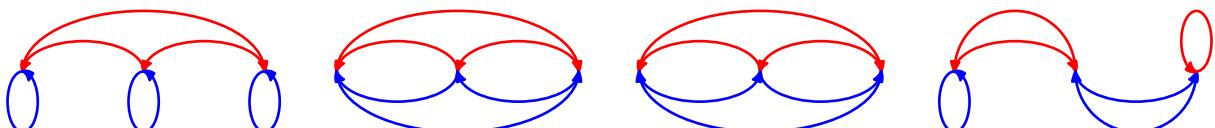
Il rivestimento universale abeliano è il reticolato di \mathbb{Z}^n :



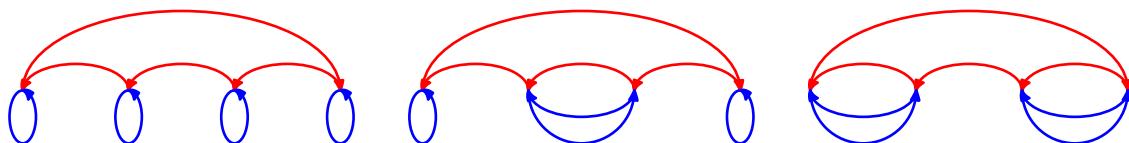
Nel caso di due circonferenze possiamo esplicitare alcuni rivestimenti finiti (è un buon esercizio capire quali sono normali, quali abeliani, quali sono i gruppi fondamentali in quanto sottogruppi della base, quali sono i gruppi di automorfismi sulla base): con due fogli ve ne sono 3,

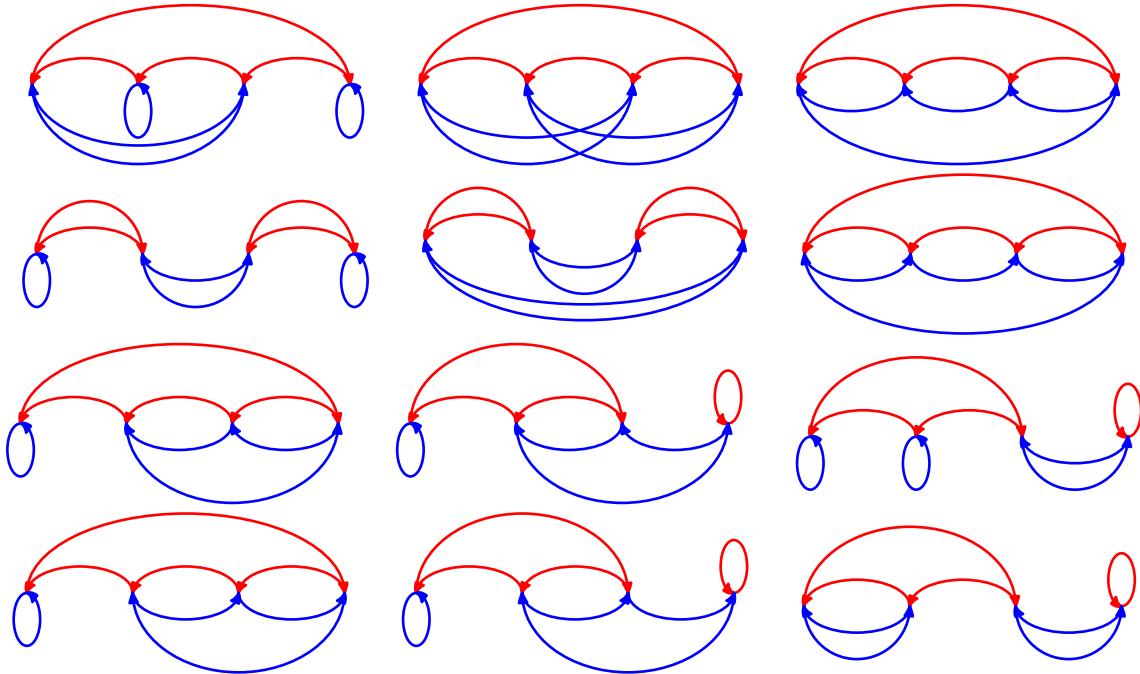


con tre fogli ve ne sono 5,



con quattro fogli ve ne sono parecchi:





5.5.3. PROBLEMA. Dato un grafo Γ , $T \subseteq \Gamma$ un albero massimale, e considerato l'albero rivestimento universale di Γ/T , come costruire il rivestimento universale di Γ ?

5.5.4. Se $Y \rightarrow X$ è rivestimento di grafi con n fogli, allora abbiamo che $\chi(Y) = n\chi(X)$ e $c(Y) = n(c(X) - 1) + 1$.

5.5.5. APPLICAZIONI AI GRUPPI. Sottogruppi di gruppi liberi sono liberi, e se G ha k generatori e H indice n , allora H ha $n(k - 1) + 1$ generatori (di solito molti più di G , e tanti di più quanto più piccolo il sottogruppo!).

Appendice A

Problemi di Topologia

1. Problemi di topologia generale.

1.1. ESEMPI DI QUOZIENTI. L'insieme delle quadriche affini viene topologizzato usando la sua identificazione con (un sottinsieme di) uno spazio proiettivo. Considerando l'insieme delle classi di equivalenza modulo affinità, sappiamo che vi è solo un numero finito di classi di equivalenza; in questo insieme finito, descrivere la topologia quoziente.

Per esempio nel caso $n = 2$ le coniche non degeneri sono classificate in quattro classi (E ed E' , ellissi con o senza punti reali, P parabole, I ellissi) e risulta che $\{E'\}$ è un chiuso aperto, $\{P\}$ un chiuso, $\{E\}$ ed $\{I\}$ aperti la cui chiusura contiene P ; si osservi che la topologia riflette le proprietà di deformazione geometrica: deformando l'equazione di una parabola, si ottengono sia ellissi che iperboli... Considerando tutte le coniche (comprese le degeneri)?

Considerare anche i casi $n = 1, 3$.

1.2. Confrontare la topologia di X con la topologia debole su X rispetto alla famiglia di mappe continue di X in \mathbb{R} , e rispetto alla famiglia di mappe continue di X in sè.

1.3. Confrontare lo spazio $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n$ (dove \mathbb{R}^n è incluso in \mathbb{R}^{n+1} come iperpiano $x_{n+1} = 0$) dotato della topologia induttiva delle mappe di inclusione $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^\infty$, e lo spazio $\mathbb{R}^\mathbb{N} = \prod_{i \geq 1} \mathbb{R}$ dotato della topologia prodotto, cioè della debole rispetto alle proiezioni sui fattori. Il primo si può vedere come sottinsieme del secondo, ma ha una topologia più fine di quella indotta dal prodotto. La topologia prodotto è metrizzabile, quella induttiva no (non è localmente numerabile).

1.4. Si considerino gli spazi $H' = \prod_{n \geq 1} [0, 1] = [0, 1]^\mathbb{N}$ e $H = \prod_{n \geq 1} [0, 1/n]$ con le rispettive topologie prodotto (delle topologie usuali degli intervalli). È vero che si tratta di spazi metrizzabili? Eventualmente, sono isometrici?

1.5. Consideriamo $\{0, 1\}$ con la topologia discreta. È vero che $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ (prodotto numerabile di copie di $\{0, 1\}$). con la topologia prodotto è uno spazio discreto? È vero che è metrizzabile?

1.6. Discutere eventuali isomorfismi e relazioni tra: pettine del topologo (formato dal segmento orizzontale $[0, 1]$ e dai segmenti verticali di altezza 1 su 0 e $1/n$ per $n > 0$ intero), sua intersezione con il triangolo di origine e versori, sua intersezione con il triangolo simmetrico, e con il rastrello del topologo (cono dell'insieme formato da 0 e $1/n$ per $n > 0$ intero).

1.7. Discutere eventuali isomorfismi e relazioni tra: pettine razionale (formato dal segmento orizzontale $[0, 1]$ e dai segmenti verticali di altezza 1 sopra ogni razionale del segmento), sua intersezione con il triangolo di origine e versori, sua intersezione con il triangolo simmetrico, e con il rastrello razionale (cono dell'insieme formato dai razionali di $[0, 1]$).

1.8. Discutere e confrontare $\mathbb{D}^i \times \mathbb{D}^j$, $\mathbb{D}^i * \mathbb{D}^j$, $\mathbb{D}^i \wedge \mathbb{D}^j$. Similmente per $\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j$, $\mathbb{S}^i * \mathbb{S}^j$, $\mathbb{S}^i \wedge \mathbb{S}^j$.

1.9. Discutere le proprietà di separazione delle topologie cofinita (aperti sono il vuoto e gli insiemi con complementare finito), escludente (aperti sono lo spazio e gli insiemi che non contengono un fissato punto), includente (aperti sono il vuoto e gli insiemi che contengono un fissato punto).

1.10. Dato X uno spazio topologico, studiare il suo duplicato (prodotto di X con $\{0, 1\}$ dotato della topologia banale). Confrontarlo con il prodotto di X con $\{0, 1\}$ dotato della topologia discreta, e con $X \sqcup X$.

1.11. Usando la somma amalgamata dell'intervallo $[0, 1]$ con sè stesso sulle mappe di inclusione di $[0, 1]$, riconoscere un segmento con due teste. Inventare similmente un segmento con gli estremi doppi, e un circolo con uno o più punti raddoppiati.

1.12. Descrivere le somme amalgamate di due inclusioni di $\mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ in \mathbb{R} .

1.13. Descrivere la somma amalgamata di $X \times \mathbb{R}$ e \mathbb{Z} sopra $X \times \mathbb{Z}$ con le mappe evidenti (inclusione e proiezione su \mathbb{Z}). Confrontarlo con la somma amalgamata di $X \times [-1, 1]$ e \mathbb{Z} sopra $X \times \mathbb{Z}$

usando la mappa $(x, z) \mapsto (x, 1/z)$ (per $z \neq 0$, $(x, 0)$ altrimenti).

1.14. Scrivere e classificare tutte le sequenze di n lettere, ciascuna doppia ev. soprassegnata, come superficie reali compatte, per $n = 1, 2, 3, 4$. Per esempio, per $n = 1$: aa (piano proiettivo reale) e $a\bar{a}$ (sfera). Per $n = 2$: $aabb, a\bar{a}bb, a\bar{a}\bar{b}, abab, ab\bar{a}b, ab\bar{a}\bar{b}, abba, abb\bar{a}, ab\bar{b}\bar{a}$.

1.15. Discutere una rappresentazione poligonale e/o come complesso cellulare dello spazio ottenuto dal cono di una circonferenza, identificando il vertice con un punto della circonferenza, e identificando il ciclo così ottenuto con la circonferenza stessa. Si tratta di una varietà reale?

1.16. Le rette del piano proiettivo reale formano uno piano proiettivo reale. Le rette del piano affine reale formano un nastro di Moebius (aperto). Un modo è vedere che il complementare di un punto nel piano proiettivo reale è omeomorfo a un nastro di Moebius (aperto).

2. Problemi su omotopia e gruppo fondamentale.

2.1. Scrivere esplicitamente retratti di deformazione del toro bucato e dell'otre di Klein verso la somma puntata di due circonferenze.

2.2. Scrivere esplicitamente retratti di deformazione della sfera bucata verso un punto, e del piano proiettivo bucato verso una circonferenza.

2.3. Descrivere gruppo fondamentale e rivestimenti di un cilindro e di un nastro di Moebius. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ottiene una superficie reale con bordo a partire dal quadrato unitario e identificando due lati opposti dopo aver torto n volte il quadrato (tenendo i due lati da identificare paralleli: $n = 0$ dà il cilindro, $n = 1$ il nastro): discutere isomorfismi, tipo di omotopia, gruppo fondamentale e rivestimenti.

2.4. Descrivere gruppo fondamentale e rivestimenti di un cilindro infinito (senza bordo) e di un nastro di Moebius infinito (senza bordo): si ottengono al solito modo partendo da $I \times \mathbb{R}$.

2.5. Dal centro di una mela, n vermicattoli scavano ciascuno una galleria verso l'esterno. Quando sono tutti usciti, qual è il gruppo fondamentale e il tipo d'omotopia della mela? Che genere ha il suo bordo?

2.6. Determinare il gruppo fondamentale di un grappolo d'uva.

2.7. Mostrare che le superficie reali compatte "bucate", cioè private di un punto, hanno il tipo di omotopia di un bouquet di cerchi. Discuterne quindi il gruppo fondamentale e i rivestimenti.

2.8. Discutere le superficie reali compatte a cui siano stati tolti k punti.

2.9. Abbiamo che $\pi_1(X)$ è abeliano se gli isomorfismi tra i $\pi_1(X, x)$ non dipendono dai cammini scelti ma solo dagli estremi x .

2.10. Se esiste un punto $e \in X$ e una funzione $\varphi : X \times X \rightarrow X$ con $\varphi(e, x) = x = \varphi(x, e)$ (per ogni $x \in X$) allora $\pi_1(X, e)$ è commutativo.

2.11. Determinare la relazione tra $\pi_1(X, x)$ (visto come classi di omotopia di mappe $(\mathbb{S}^1, s) \rightarrow (X, x)$) e $H(\mathbb{S}^1, X)$ (classi di omotopia di mappe $\mathbb{S}^1 \rightarrow X$).

2.12. Mostrare che ogni endomorfismo di gruppo di $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ proviene da una endomorfismo continuo di \mathbb{S}^1 .

2.13. Se Y è sottospazio di X , trovare condizioni sotto le quali la mappa $\pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, y)$ sia iniettiva, suriettiva, isomorfismo.

2.14. Se x è retratto di deformazione forte di X , allora ogni intorno U di x ammette un sottointorno V con inclusione $V \rightarrow U$ nullmotopata.

Disponendo a zig-zag infiniti pettini del topologo (o pettini razionali), trovare uno spazio che sia contraibile ma non retratto di deformazione di alcun suo punto.

2.15. Se X è unione finita di \mathbb{S}^1 tangenti tra loro nel piano reale, descrivere i possibili tipi di omotopia.

2.16. Se X è unione finita di \mathbb{S}^2 aventi a coppie al più un punto comune, descrivere i possibili tipi di omotopia.

2.17. Se X è semplicemente connesso, descrivere i rivestimenti univesali di $X \times Y$ e $X \vee Y$.

2.18. Se X è connesso per archi, allora $X * Y$ è semplicemente connesso.

2.19. La restrizione (sulla base) di un rivestimento è ancora un rivestimento? Di un rivestimento universale, resta un rivestimento universale? Relazioni con i gruppi fondamentali e di Galois dei rivestimenti?

2.20. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali e rivestimenti universali, confrontandoli tra loro dei seguenti spazi: prodotto del grafo “ ∞ ” con \mathbb{D}^2 , somma puntata di due tori solidi, bitoro solido, somma connessa di due tori solidi.

2.21. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali e rivestimenti universali, confrontandoli tra loro dei seguenti spazi: prodotto del grafo “ ∞ ” con \mathbb{S}^1 , somma puntata di due tori, somma connessa di due tori.

2.22. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali e rivestimenti universali di \mathbb{R}^3 cui siano state tolte 1, 2, 3 rette, distinguendo a seconda della posizione reciproca delle rette. Cosa cambia usando $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?

2.23. Considerando lo spazio della matrici d’ordine 2 a coefficienti in \mathbb{R} e in \mathbb{C} , calcolare i gruppi fondamentali dei seguenti sottospazi: matrici di traccia nulla, matrici di determinante nullo, matrici di determinante 1, matrici triangolari superiori di determinante 1, matrici di determinate 1 e traccia nulla, matrici di determinate -1 e traccia nulla (non serve il teorema di Seifert Van Kampen).

3. Problemi sui complessi cellulari.

3.1. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali, rivestimenti del piano \mathbb{R}^2 e della sfera \mathbb{S}^2 cui sono tolti n punti (per $n \in \mathbb{N}$). Cosa può succedere se si toglie una quantità numerabile di punti? Distinguere se questi formano un insieme discreto o meno...

3.2. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali, rivestimenti del toro \mathbb{T} cui sono tolti n punti (per $n \in \mathbb{N}$).

3.3. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali, rivestimenti di \mathbb{K} e \mathbb{P}^2 cui sono tolti n punti (per $n \in \mathbb{N}$).

3.4. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali, rivestimenti della sfera \mathbb{S}^2 cui sono aggiunte n 1-celle (per $n \in \mathbb{N}$).

3.5. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali, rivestimenti del toro \mathbb{T} cui sono aggiunte n 1-celle (per $n \in \mathbb{N}$).

3.6. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali, rivestimenti del piano proiettivo reale \mathbb{P}^2 cui sono aggiunte n 1-celle (per $n \in \mathbb{N}$).

3.7. Descrivere tipo di omotopia, gruppi fondamentali, rivestimenti dell’otre \mathbb{K} cui sono aggiunte n 1-celle (per $n \in \mathbb{N}$).

3.8. Descrivere sospensione e cono di un complesso cellulare.

3.9. Descrivere le operazioni tra spazi topologici fatte su complessi cellulari.

3.10. Descrivere la sfera $\mathbb{S}^\infty = \bigcup_{i \geq 0} \mathbb{S}^i$ (sottinsieme di $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{i \geq 0} \mathbb{R}^i$, usando le inclusioni $\mathbb{R}^i \hookrightarrow \mathbb{R}^{i+1}$ con equazione l’ultima coordinata) come complesso cellulare, usando due i -celle ad ogni passo i . Dimostrare che \mathbb{S}^∞ è contraibile (sugg.: inclusioni non identiche di sfere sono funzioni nullomotope; tuttavia il modo tecnicamente più facile di fare la contrazione è in due tempi: prima shiftare a destra tutte le coordinate, che è omotopo all’identità, e poi contrarre tutto al punto con prima coordinata 1).

3.11. Descrivere $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R}) = \bigcup_{i \geq 0} \mathbb{P}^i(\mathbb{R})$ (esplicitare le inclusioni) come complesso cellulare (una i -cella ad ogni passo i). È vero o falso che si tratta dell’insieme delle rette per l’origine di \mathbb{R}^∞ (vedi sopra). È vero o falso che $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ è contraibile?

3.12. Dare possibili descrizioni di \mathbb{S}^n e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come complessi cellulari. Usare anche $n = \infty$. Come sono i sistemi dei gruppi fondamentali corrispondenti?

3.13. Il gruppo fondamentale del toro è \mathbb{Z}^2 , quello del toro solido è \mathbb{Z} : questo contraddice l’asserzione che il gruppo fondamentale di un complesso cellulare è quello del suo 2-scheletro?

3.14. Discutere gruppi fondamentali e rivestimenti di $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Cosa si può dire in generale di $X \vee Y$?

3.15. Spazi con gruppo fondamentale isomorfo a \mathbb{Z} : descrivere il più esplicitamente possibile i rivestimenti e i loro automorfismi per i seguenti spazi: \mathbb{S}^1 , $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$, \mathbb{S}^2 unito con una 1-cellula tra polo nord N e polo sud S , $\mathbb{S}^2/N \sim S$ (sfera con i due poli identificati), $\mathbb{S}^2 \sqcup_{\{S,N\}} \mathbb{S}^2$ (due sfere appiccicate per i rispettivi poli; notare che è il rivestimento con due fogli di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\dots$), \mathbb{D}^2 unito con una 1-cellula tra due punti diversi del bordo, il piano privato dell’origine, la sfera senza i due poli.

3.16. Dato uno spazio topologico X con rivestimento universale \tilde{X} , mostrare che il cono privato del vertice $C^\times(X)$ e la sospensione privata dei due vertici $S^\times(X)$ hanno lo stesso gruppo fondamentale di X , e hanno rivestimenti universali rispettivamente $C^\times(\tilde{X})$ e $S^\times(\tilde{X})$.

3.17. Determinare i rivestimenti universali abeliani dei seguenti spazi: $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, oltre di Klein \mathbb{K} , $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

3.18. Disegnare il rivestimento universale e il rivestimento universale abeliano di $M_2 = \mathbb{T} \# \mathbb{T}$.

4. Problemi sui grafi.

4.1. Discutere eventuali isomorfismi, tipi di omotopie, gruppi fondamentali, rivestimenti dei seguenti spazi: somma puntata di una quantità numerabile di circonference, l'unione delle circonference del piano di centri $(\frac{1}{n}, 0)$ e raggi $\frac{1}{n}$ (per $n \in \mathbb{N}$: vortice di circonference), l'unione delle circonference del piano di centri $(n, 0)$ e raggi n (per $n \in \mathbb{N}$).

4.2. Discutere tipi di omotopie, gruppi fondamentali, rivestimenti per una circonferenza cui vengano aggiunte n 1-celle (per $n \in \mathbb{N}$).

4.3. Discutere il gruppo fondamentale del grafo ottenuto da due alberi isomorfi identificando i vertici omologhi.

4.4. Discutere il gruppo fondamentale del grafo ottenuto da un albero identificando tutte le foglie in un punto.

4.5. Studiare il grafo con un vertice e due loop, in particolare i suoi rivestimenti: quello universale, quello associato al sottogruppo derivato di $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, quelli di ordini bassi,

4.6. Studiare analogamente i grafi con due vertici e due/tre lati.

4.7. Dato un complesso cellulare, che relazioni vi sono tra il rivestimento universale del suo 1-scheletro, e l'1-scheletro del suo rivestimento universale?

Appendice B

Temi d'esame: Geometria Differenziale

1. Anno accademico 2012/13.

1.1. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $xz = 1$ (contenuto nel piano x, z).

- (a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S ;
- (b) calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S ;
- (c) classificare i punti di S in base alle curvature;
- (d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S ;
- (e) determinare le lossodromiche di S (curve con fissato angolo rispetto ai meridiani).

1.2. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $x - z^2 = 1$ (contenuto nel piano x, z).

- (a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S ;
- (b) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S ;
- (c) classificare i punti di S in base alle curvature;
- (d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S ;
- (e) determinare le lossodromiche di S (curve che formano angolo costante con i meridiani).

1.3. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $z = \sin(x)$ per $x \geq 0$ (contenuto nel piano x, z).

- (a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S , e gli eventuali punti non regolari;
- (b) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S ;
- (c) classificare i punti di S in base alle curvature;
- (d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S ;
- (e) determinare le lossodromiche di S (curve che formano angolo costante con i meridiani).

1.4. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $x = \sin(z)$ (contenuto nel piano x, z).

- (a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S , e gli eventuali punti non regolari;
- (b) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S ;
- (c) classificare i punti di S in base alle curvature;
- (d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S ;
- (e) determinare le lossodromiche di S (curve che formano angolo costante con i meridiani).

1.5. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $z = x^4 - x^2$ (contenuto nel piano x, z).

- (a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S , e gli eventuali punti non regolari;
- (b) calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S ;
- (c) classificare i punti di S in base alle curvature;
- (d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S ;
- (e) determinare le lossodromiche di S (curve che formano angolo costante con i meridiani).

2. Anno accademico 2013/14.

2.1. Sia $\gamma(s)$ una curva biregolare in \mathbb{R}^3 unitaria (t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ e τ curvatura e torsione, supposte entrambe non nulle). Poniamo $\delta(s)$ la curva descritta (sulla sfera unitaria) dal vettore tangente t (con parametro s).

- (a) È vero che δ è curva biregolare? Quando risulta unitaria?
- (b) Determinare il riferimento di Frenet di δ in funzione di quello di γ .
- (c) Determinare la curvatura κ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ .
- (d) Determinare la torsione τ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ .
- (e) Determinare quali curve γ danno $\tau_\delta = 0$.

2.2. Si consideri l'elicoide della retta $z = x$ attorno all'asse z con passo 1, sia σ .

- (a) Usando come parametri x e ϑ , si scrivano delle parametrizzazioni per σ ; si trovi una equazione cartesiana per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ , e ridursi poi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da ϑ , e l'unitarietà delle geodetiche).

2.3. Si consideri l'elicoide della curva $z = \log x$ attorno all'asse z con passo 1, sia σ .

- (a) Usando come parametri x e ϑ , si scrivano delle parametrizzazioni per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ , e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da ϑ , e l'unitarietà delle geodetiche).

2.4. Si consideri l'elicoide della curva $z = x^2$ (per $x > 0$) attorno all'asse z con passo 1, sia σ .

- (a) Usando come parametri x e ϑ , si scrivano delle parametrizzazioni e delle equazioni cartesiane per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ , e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da ϑ , e l'unitarietà delle geodetiche).

2.5. Si consideri l'elicoide della curva $z^2 = x$ (per $z > 0$) attorno all'asse z con passo 1, sia σ .

- (a) Usando come parametri x e ϑ , si scrivano delle parametrizzazioni per σ , e una equazione cartesiana per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ , e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da ϑ , e l'unitarietà delle geodetiche).

2.6. Si consideri l'elicoide della curva $z = \sin x$ (per $x > 0$) attorno all'asse z con passo 1, sia σ .

- (a) Usando come parametri x e ϑ , si scrivano delle parametrizzazioni per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ , e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da ϑ , e l'unitarietà delle geodetiche).

2.7. Si consideri l'elicoide della curva $z = \tanh x$ (per $x > 0$) attorno all'asse z con passo 1, sia σ .

- (a) Usando come parametri x e ϑ , si scrivano delle parametrizzazioni per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ , e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da ϑ , e l'unitarietà delle geodetiche).

3. Anno accademico 2014/15.

3.1. Sia $\gamma(s)$ una curva biregolare in \mathbb{R}^3 unitaria (t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ e τ curvatura e torsione, supposte entrambe non nulle). Poniamo $\delta(s)$ la curva descritta (sulla sfera unitaria) dal vettore binormale b (con parametro s).

- (a) È vero che δ è curva biregolare? Quando risulta unitaria?
- (b) Determinare il riferimento di Frenet di δ in funzione di quello di γ .
- (c) Determinare la curvatura κ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ .
- (d) Determinare la torsione τ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ . Quali curve γ danno $\tau_\delta = 0$?
- (e) Dire se la curva δ determina la curva γ di partenza (a meno di isometrie dello spazio?).

3.2. Si consideri la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ u \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Usando come parametri u e v , si scrivano delle parametrizzazioni per σ ; si trovi una equazione cartesiana per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ .
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; quali sono le soluzioni evidenti di questo sistema?
- Sia γ una curva unitaria, con curvatura mai nulla, su σ che incontra ogni generatrice in un punto; mostrare che γ è geodetica se e solo se in ogni suo punto il suo vettore normale è normale alla generatrice.

3.3. Si consideri la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

- (a) Usando come parametri t e s , si scrivano delle parametrizzazioni per σ ; si trovi una equazione cartesiana per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ .

- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono le soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

3.4. Si consideri la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Usando come parametri t e s , si scrivano delle parametrizzazioni per σ ; si trovi una equazione cartesiana per σ .
 (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
 (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
 (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione σ .
 (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono le soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

3.5. Sia data la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$.

- (a) Usando come parametri t e s , si scrivano delle parametrizzazioni per σ ; si trovi una equazione cartesiana per σ .
 (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
 (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
 (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione σ .
 (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

3.6. Sia data la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Usando come parametri t e s , si scrivano delle parametrizzazioni per σ ; si trovi una equazione cartesiana per σ .
 (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
 (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
 (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione σ .
 (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

3.7. Sia data la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Usando come parametri t e s , si scrivano delle parametrizzazioni per σ ; si trovi una equazione cartesiana per σ .
 (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
 (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
 (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione σ .
 (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

4. Anno accademico 2015/16.

4.1. Sia $\gamma(s)$ una curva biregolare unitaria in \mathbb{R}^3 ($t(s), n(s), b(s)$ il suo riferimento di Frenet, $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ curvatura e torsione, supposte entrambe mai nulle).

- (a) Esistono curve β che abbiano il versore $b(s)$ come versore tangente? Determinare riferimento di Frenet, curvatura e torsione di tali curve.
 (b) Esistono curve α che abbiano il versore $n(s)$ come versore tangente? Determinare riferimento di Frenet, curvatura e torsione di tali curve.

- (c) Le curve dei punti precedenti sono uniche, eventualmente a meno di quali trasformazioni? Esse determinano la curva di partenza γ , eventualmente a meno di quali trasformazioni?

Risultati.

- (a) per trovare $\beta(s)$ basta integrare $b(s)$, e risulta quindi una curva unitaria; scrivendo tutto nella base t, n, b e usando le equazioni di Frenet di γ abbiamo:

$$\begin{aligned}\beta' &= b & t_\beta &= b \\ \beta'' &= b' = -\tau n & n_\beta &= \pm n \\ \beta''' &= -(\tau n)' = -\tau'n + \tau n' & b_\beta &= \mp t \\ &= -\kappa\tau t - \tau'n + \tau^2 b \\ \beta' \times \beta'' &= \tau t \\ \kappa_\beta &= |\tau| \\ \tau_\beta &= -\kappa\end{aligned}$$

- (b) per trovare $\alpha(s)$ basta integrare $n(s)$, e risulta quindi una curva unitaria; scrivendo tutto nella base t, n, b e usando le equazioni di Frenet di γ abbiamo:

$$\begin{aligned}\alpha' &= n & t_\alpha &= n \\ \alpha'' &= n' = -\kappa t + \tau b & n_\alpha &= \frac{-\kappa t + \tau b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ \alpha''' &= (-\kappa t + \tau b)' = -\kappa't - \kappa t' + \tau'b + \tau b' & b_\alpha &= \frac{\tau t + \kappa b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ &= -\kappa't - (\kappa^2 + \tau^2)n + \tau'b \\ \alpha' \times \alpha'' &= \tau t + \kappa b \\ \kappa_\alpha &= \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \\ \tau_\alpha &= \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\kappa^2(\tau/\kappa)'}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{(\tau/\kappa)'}{1 + (\tau/\kappa)}\end{aligned}$$

- (c) Abbiamo che β e α sono uniche a meno di traslazioni, essendo primitive di versori noti.

D'altra parte β determina κ e τ (a meno del segno?), usando le equazioni di Frenet come visto, quindi determina γ a meno di isometrie dello spazio. Tenendo conto che β determina anche il versore binormale, a meno di casi particolari si ricostruisce γ a meno di traslazioni.

Invece α determina $\kappa^2 + \tau^2$ e $(\tau/\kappa)'/(1 + (\tau/\kappa)^2)$, che non permette di determinare univocamente κ e τ in generale. D'altra parte due eliche circolari $\begin{pmatrix} a \cos \vartheta \\ a \sin \vartheta \\ \vartheta \end{pmatrix}$ con diversi parametri a hanno lo stesso campo normale principale, ma non sono isometriche (si ottengono per dilatazioni sul piano orizzontale: due tali eliche si usano per una scala a chiocciola). Se però il rapporto τ/κ non è costante, possiamo ottenere $\arctan(\tau/\kappa)$ integrando τ_α (l'eventuale costante di integrazione può essere assorbita da una riparametrizzazione?), e quindi determinare curvatura e torsione di γ , quindi γ a meno di isometrie dello spazio. Tenendo conto che α determina anche il versore normale, a meno di casi particolari si ricostruisce γ a meno di traslazioni.

4.2. Si consideri la superficie σ formata dalla unione delle rette tangentи all'elica cilindrica $\begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ \vartheta \end{pmatrix}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$. Scrivere una parametrizzazione di σ usando come parametri u e ϑ .

- (a) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (b) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (c) Determinare la famiglia delle curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione data.
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ .
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? La superficie è localmente isometrica al piano?

Risultati. Scriviamo $(u, \vartheta) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$: $\sigma(u, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta - u \sin \vartheta \\ \sin \vartheta + u \cos \vartheta \\ \vartheta + u \end{pmatrix}$.

- (a) Applichiamo lo yoga standard:

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 1 \end{pmatrix} & \sigma_\vartheta &= \begin{pmatrix} -\sin \vartheta - u \cos \vartheta \\ \cos \vartheta - u \sin \vartheta \\ 1 \end{pmatrix} & n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \\ 1 \end{pmatrix} & G_I &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2+u^2 \end{pmatrix} \\ \sigma_{uu} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \sigma_{u\vartheta} &= \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} & \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \begin{pmatrix} -\cos \vartheta + u \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta - u \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} & G_{II} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(abbiamo supposto $u > 0$).

- (b) Abbiamo K identicamente nullo, matrice di Weingarten $L = G_I^{-1}G_{II} = \frac{1}{u\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ da cui si deduce che tutti i punti sono parabolici.
(c) Impostando le condizioni di ortogonalità, cerchiamo le curve descritte da $(u(t), \vartheta(t))$ tali che:

$$\begin{aligned} (u' \ \vartheta') G_I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 & (u' \ \vartheta') G_I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ u' + \vartheta' &= 0 & u' + (2 + u^2)\vartheta' &= 0 \\ u = -\vartheta + c & & \sqrt{2} \arctan(u/\sqrt{2}) &= -\vartheta + c \end{aligned}$$

- (d) Le linee asintotiche sono quelle che hanno come direzione tangente vettori isotropi di G_{II} : si tratta chiaramente delle curve con $\vartheta' = 0$, ovvero le prime linee coordinate della parametrizzazione (che sono rette). Quelle stesse rette sono anche linee di curvatura (per la curvatura principale nulla), mentre l'altra famiglia di linee di curvatura, dovendo essere ortogonali alle precedenti, sono già state trovate al punto precedente.
(e) Il sistema di equazioni differenziali per le linee geodetiche è il seguente:

$$\begin{cases} (u' + \vartheta')' = u\vartheta'^2 \\ (2u' + (2 + u^2)\vartheta')' = 0 \end{cases}$$

chiaramente risolto dalle rette contenute in σ ($\vartheta' = 0$, le equazioni si riducono a $u'' = 0$). Trattandosi di una sviluppabile, essa è localmente isometrica al piano: si può confrontarla con il sottinsieme del piano formato dalla unione delle tangenti alla circonferenza di raggio 2 (curvatura dell'elica essendo $1/2$): per vedere subito la stessa prima forma fondamentale, che per σ "quasi non dipende" dalla terza coordinata, bisogna o usare le curve in parametrizzazione d'arco, oppure parametrizzare la circonferenza con $2 \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/\sqrt{2}) \\ \sin(\vartheta/\sqrt{2}) \end{pmatrix}$ per avere stessa curvatura e stessa velocità dell'elica di partenza.

4.3. Sia data la superficie di rotazione σ con profilo $x = 2 + \sin z$ (attorno all'asse delle z).

- (a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ .
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee lossodromiche di σ (curve che formano angolo costante con i profili).
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

4.4. Sia data la superficie elicoide σ con profilo $x = e^{-z}$ (attorno all'asse delle z con passo unitario).

- (a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ .
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ , le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

4.5. Sia data la superficie rigata σ con profilo $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t}{t^3} \end{pmatrix}$ e direzioni $\begin{pmatrix} 1-t \\ \frac{t}{0} \end{pmatrix}$.

- (a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ .
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ , le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

4.6. Sia data la superficie elicoidale ottenuta dal profilo $z = x + \sin(x)$ (attorno all'asse z , con passo 1).

- (a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ .
- (b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ .
- (c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ ; che tipi di punti vi sono su σ ?
- (d) Determinare le linee asintotiche di σ , le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
- (e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Appendice C

Temi d'esame: Topologia Generale

1. Anno accademico 2012/13.

1.1. (TOPOLOGIA PRODOTTO SU $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni di \mathbb{R} in sè dotato della topologia prodotto.

- (a) Descrivere gli intorni della funzione costante 1.
- (b) Sia F il sottinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formato dalle funzioni caratteristiche di insiemi finiti di \mathbb{R} . Mostrare che la funzione costante 1 appartiene alla chiusura di F . Descrivere la chiusura di F .
- (c) Mostrare che non esistono successioni in F convergenti a 1, e trovare una rete in F convergente a 1.
- (d) Si consideri la mappa canonica (immersione diagonale) di \mathbb{R} in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ad ogni numero r si associa la funzione costante r). Si tratta di una funzione continua? È vero o falso che l'immagine è chiusa?
- (e) La topologia prodotto è metrizzabile? È definita da una famiglia di pseudometriche?

Risultati:

- (a) Una base di intorni di 1 si ottiene al variare di $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ usando le funzioni φ tali che $\varphi(x_i) \in (1 - \varepsilon_i, 1 + \varepsilon_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.
- (b) Ogni intorno di base di 1 come sopra contiene come elemento di F per esempio $\chi_{\{x_1, \dots, x_n\}}$. La chiusura di F è formata da tutte le funzioni caratteristiche di sottinsiemi di \mathbb{R} .
- (c) Sia χ_{S_n} una successione in F ; allora l'unione di tutti gli S_n è un sottinsieme numerabile di \mathbb{R} , e sia $x \in \mathbb{R}$ non in tale sottinsieme. Allora l'intorno della funzione 1 definito da $\varphi(x) \in (1/2, 3/2)$ non contiene nessun elemento della successione, che quindi non può convergere a 1. Per trovare una rete convergente ad 1, basta usare come insieme ordinato (dalla controinclusione) gli intorni (anche solo di base) di 1, ed associare a ciascuno un elemento di F che gli appartenga.
- (d) È continua perché composta con le proiezioni è sempre continua (identità). L'immagine è chiusa, perché il complementare è aperto (ogni funzione non costante ha tutto un intorno di funzioni non costanti).
- (e) Lo spazio non è topologicamente numerabile (visto (b, c)) e quindi non è metrizzabile. È completamente regolare in quanto la topologia (prodotto di spazi metrizzabili) è generata dalla famiglia di pseudometriche associate ai punti $x \in \mathbb{R}$ definite da $d_x(\varphi, \psi) = |\varphi(x) - \psi(x)|$.

1.2. (TOPOLOGIA COCOMPATTA SU \mathbb{R}) Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia τ i cui aperti sono (il vuoto e) i complementari degli insiemi compatti della topologia usuale di \mathbb{R} .

- (a) Mostrare che la topologia τ è strettamente meno fine di quella usuale, che essa risulta T_1 ma non T_2 , che è separabile.
- (b) Mostrare che con la topologia τ l'insieme \mathbb{R} risulta connesso e localmente connesso (pensare all'intersezione di aperti).
- (c) Mostrare che con la topologia τ l'insieme \mathbb{R} risulta compatto. Vi sono altri sottinsiemi compatti per τ ma non per la topologia usuale?
- (d) Descrivere gli intorni per τ di ogni punto di \mathbb{R} e dedurne che la topologia è (a base) numerabile e localmente numerabile.
- (e) Si tratta di uno spazio (pseudo)metrizzabile?

Risultati:

- (a) I compatti sono chiusi, quindi τ è meno fine della topologia usuale, e vi sono aperti usuali con complementare non compatto, quindi è strettamente meno fine. È chiaramente T_1 , i punti essendo compatti, ma non T_2 perché due aperti non vuoti di τ hanno sempre intersezione non vuota (i

complementari essendo compatti usuali). Vi sono sottinsiemi numerabili che intersecano ogni aperto di τ , per esempio \mathbb{Q} o anche \mathbb{Z} , quindi è separabile.

- (b) Siccome l'intersezione di due aperti non vuoti è sempre non vuota non vi possono essere sconnesioni.
- (c) Un ricoprimento aperto di \mathbb{R} per τ è tale che un solo aperto ricopre tutto tranne un compatto usuale di \mathbb{R} , per ricoprire il quale basta un insieme finito di aperti. Altri insiemi compatti per τ e non per la topologia euclidea sono \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , le semirette... Comunque non tutti i sottinsiemi sono compatti: per esempio il complementare di un punto non è compatto.
- (d) Un intorno di x è qualsiasi insieme contenente il complementare di un compatto che non contiene x ; ogni tale insieme contiene un aperto della forma $(-\infty, x - M) \cup (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cup (x + M, +\infty)$ per $\varepsilon, M \in \mathbb{R}$ opportuni, anche scelti in \mathbb{Q} ; quindi la topologia è localmente numerabile. In effetti è anche numerabile, usando i complementari di $[p, q]$ con $p, q \in \mathbb{Q}$ come base di aperti.
- (e) Essendo T_1 ma non T_2 la topologia non può essere pseudometrizzabile (per tali spazi le condizioni T_0, T_1, T_2 sono equivalenti). Non può nemmeno essere definita da un'famiglia di pseudometriche, non potendo essere regolare.

1.3. (COMPONENTI E QUASI-COMPONENTI CONNESSE) In uno spazio topologico X si definiscono le componenti connesse di un punto come l'unione di tutti i sottinsiemi connessi di X contenenti il punto, e le quasi-componenti connesse di un punto come l'intersezione di tutti i chiusaperti di X contenenti il punto.

- (a) Mostrare che sia le componenti che le quasi-componenti sono chiusi di X , ma non necessariamente aperti;
- (b) Mostrare che ogni componente è contenuta in una quasi-componente, ma non viceversa; e che le quasi-componenti sono unioni di componenti;
- (c) Si consideri il sottinsieme X del piano cartesiano (con la topologia indotta) formato dall'unione delle circonferenze centrate nell'origine e di raggi $1 + \frac{1}{n}$ (per $n = 1, 2, \dots$) e dei quattro punti $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. Determinare componenti e quasi-componenti di X .
- (d) Mostrare che uno spazio topologico ha una sola componente se e solo se ha una sola quasi-componente.

Risultati:

- (c) Ogni circonferenza è un chiusaperto connesso, quindi una componente e una quasi-componente; i quattro punti formano una quasi-componente, e ciascuno di loro è una componente.

1.4. (INSIEMI DENSI IN SOVRAINSIEMI) In uno spazio topologico X si dice che un sottinsieme è denso se la sua chiusura è X , e che un sottinsieme A di $B \subseteq X$ è denso in B se lo è usando la topologia indotta su B .

- (a) Siano $A \subseteq B \subseteq C$ sottinsiemi di X . Mostrare che se A è denso in B e B è denso in C , allora A è denso in C ; è vero il viceversa?
- (b) Mostrare che l'immagine tramite una funzione continua di un sottinsieme denso non è necessariamente densa; determinare condizioni necessarie e sufficienti sulla funzione affinché ciò succeda;
- (c) Mostrare che se X possiede un sottinsieme denso con complementare denso, allora non ha punti isolati;
- (d) Mostrare che la frontiera di un chiuso ha complementare denso; è vero per gli aperti? e per sottinsiemi qualsiasi?

1.5. (CONDIZIONI DI CONNESSIONE) Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice connesso se non è unione di chiusaperti non vuoti disgiunti.

- (a) Mostrare che un sottinsieme S di X è connesso (per la topologia indotta) se e solo se non esistono sottinsiemi non vuoti H, K di X tali che $S = H \cup K$, $H \cap \overline{K} = \emptyset = \overline{H} \cap K$.
- (b) È vero o falso che un sottinsieme S di X è connesso (per la topologia indotta) se e solo se non esistono sottinsiemi aperti disgiunti H, K di X aventi intersezione non vuota con S e tali che $S \subseteq H \cup K$?

[Sugg.: mostrare quale implicazione è vera, trovare un contropunto per l'altra]

- (c) È vero o falso che un sottinsieme S di X è connesso (per la topologia indotta) se e solo se non esistono sottinsiemi chiusi disgiunti H, K di X aventi intersezione non vuota con S e tali che $S \subseteq H \cup K$?

[Sugg.: mostrare quale implicazione è vera, trovare un contropunto per l'altra]

- (d) Usando solo la connessione dell'intervallo $I = [0, 1]$ (e le proprietà delle funzioni continue reali) dimostrare che ogni funzione continua di I in sè ha almeno un punto unito.

1.6. (SPAZI IPERCONNESSI E ULTRA CONNESSI) Sia X uno spazio topologico.

- (a) Diciamo che X è iperconnesso se l'intersezione di qualsiasi due aperti non vuoti è sempre non vuota; mostrare che allora X è connesso.
- (b) Diciamo che X è ultraconnesso se l'intersezione di qualsiasi due chiusi non vuoti è sempre non vuota; mostrare che allora X è connesso per archi.
- (c) Mostrare che le nozioni di iperconnesso e ultraconnesso sono indipendenti tra loro (cioè nessuna implica l'altra).
- (d) Quali proprietà di separazione ($T_0, T_1, T_2?$) possono avere spazi che siano iperconnessi o ultraconnessi?
- (e) Esistono spazi con topologia non banale che siano sia iperconnessi sia ultraconnessi?

Risultati:

- (a) Ovvio: non ci possono essere sconnessioni.
- (b) Meno ovvio: prendiamo $x, y \in X$, e sia z un punto della intersezione delle chiusure di x e y (le due chiusure si intersecano per ipotesi). Allora il cammino che vale x in $[0, 1/2)$, z in $\{1/2\}$ e y in $(1/2, 1]$ è continuo (antimmagine di chiusi è chiusa).
- (c) Le topologie di inclusione di un punto sono iperconnesse e non ultraconnesse, e le topologie di esclusione di un punto sono ultraconnesse e non iperconnesse.
- (d) Chiaramente spazi ultraconnessi hanno punti non chiusi, quindi non possono essere T_1 , ma possono essere T_0 (topologie di esclusione di un punto). Spazi iperconnessi non possono essere T_2 , ma possono essere T_1 (topologie cofinite su insiemi finiti).
- (e) Un insieme con due punti, uno chiuso e uno aperto (e denso) ha topologia iperconnessa ed ultraconnessa, senza essere banale. Si tratta della topologia di estensione degli aperti (o dei chiusi) a partire da un singoletto, o anche la topologia di inclusione di un punto ed esclusione di un altro a partire dall'insieme vuoto.

1.7. (DUPLICAZIONI DEI PUNTI) Sia X uno spazio topologico, B l'insieme $\{0, 1\}$ dotato della topologia banale, D l'insieme $\{0, 1\}$ dotato della topologia discreta.

- (a) Descrivere le topologie prodotto di $X \times B$ e $X \times D$ (descrivere gli aperti e gli intorni di ogni punto); l'identità (insiemistica) è una funzione continua?
- (b) Discutere le proprietà di connessione di $X \times B$ e $X \times D$.
- (c) Discutere le proprietà di compattezza di $X \times B$ e $X \times D$.
- (d) Discutere le proprietà di separazione ($T_0, T_1, T_2?$) di $X \times B$ e $X \times D$ (in base a quelle di X).
- (e) Se X è metrizzabile, cosa si può dire di $X \times B$ e $X \times D$?

2. Anno accademico 2013/14.

2.1. (BOX TOPOLOGY NELLE SUCCESSIONI REALI) Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni in \mathbb{R} dotato della topologia (box topology) una cui base è formata dai prodotti (indiciati su \mathbb{N}) di aperti di \mathbb{R} .

- (a) Dimostrare che si tratta di uno spazio hausdorff, non metrizzabile (sugg.: non è localmente numerabile).
- (b) Si descrivano gli intorni della successione nulla 0.
- (c) Sia I l'insieme I delle successioni infinitesime mai nulle; mostrare che 0 appartiene alla chiusura di I .
- (d) Mostrare non esistono successioni in I convergenti a 0, e trovare una rete in I convergente a 0.
- (e) La funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ che manda r nella successione costante r è continua per la box topology?

Risultati:

- (a) È più fine della topologia prodotto, che è hausdorff. Lo spazio non è localmente numerabile: per assurdo sia U_n una base numerabile di intorni di 0 con $U_n = \prod_j U_{nj}$. Allora l'intorno di zero definito da $V = \prod_j V_j$, con V_j contenuto e diverso da U_{jj} per ogni j , non contiene alcun elemento della base scelta.
- (b) Sono $\prod_j V_j$ con V_j intorni di 0 in \mathbb{R} .

- (c) Evidentemente ogni intorno di 0 come sopra contiene successioni infinitesime mai nulle.
- (d) Sia f_n una tale successione (di successioni infinitesime mai nulle), e usiamo $V = \prod_j V_j$ con V_j intorni di 0 in \mathbb{R} che non contiene $f_n(j)$. È chiaro che nessun f_n appartiene a V , quindi la successione f_n non può convergere a 0. Per trovare una rete in I convergente a 0 usiamo come insieme ordinato (dalla controinclusione) quello degli intorni di 0 (eventualmente solo di base) e a ciascuno si associa un elemento di I che gli appartenga.
- (e) No, per esempio l'immagine inversa dell'aperto $\prod_j (-1/j, 1/j)$ è formato solo da 0, che non è aperto in \mathbb{R} .

2.2. (ESTENSIONE CONUMERABILE DELLA TOPOLOGIA EUCLIDEA) Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della minima topologia τ contenente sia la topologia metrica usuale sia la topologia formata dagli insiemi conumerabili (complementare degli insiemi numerabili).

- (a) Mostrare che gli aperti sono formati da aperti usuali tolto un insieme al più numerabile di punti; chi è la chiusura di un tale aperto? Descrivere similmente i chiusi.
- (b) Mostrare che si tratta di uno spazio hausdorff non regolare (sugg.: ogni aperto contiene intorni chiusi dei suoi punti?).
- (c) Mostrare che un sottinsieme è compatto se e solo se è finito.
- (d) Mostrare che lo spazio è connesso ma non connesso per archi.
- (e) Mostrare che lo spazio non è localmente numerabile, né separabile.

Risultati:

- (a) Questi insiemi, che sono intersezione di un aperto euclideo e uno conumerabile, certamente appartengono alla topologia τ ; inoltre formano già una topologia (chiusi a unioni arbitrarie e intersezioni finite). La chiusura di un tale aperto coincide con la chiusura euclidea. I chiusi, essendo complementari di aperti, sono dati da un chiuso euclideo unito con un sottinsieme (al più) numerabile qualsiasi.
- (b) È topologia hausdorff perché contiene quella euclidea che è hausdorff. Non è regolare perché per esempio il punto 0 non ha intorni disgiunti dal chiuso formato dagli inversi degli interi non nulli.
- (c) Insiemi finiti sono sempre compatti. Viceversa, se un insieme è infinito, supponiamo numerabile, possiamo ricoprirlo con gli aperti formati dal complementare aggiunto un punto dell'insieme: si tratta di un ricoprimento infinito in cui tutti gli aperti sono necessari, quindi non raffinabile.
- (d) Lo spazio è connesso perché non vi sono chiusaperti non banali. Invece non è connesso per archi perché gli unici archi continui sono quelli costanti (un arco continuo deve mandare un intorno connesso massimale di 0 nel punto iniziale del cammino, usando un intorno del punto iniziale privato dei razionali, quindi totalmente sconnesso...).
- (e) Sia per assurdo U_n una base numerabile di intorni di 0; dato un intorno euclideo V di 0, l'insieme $V \setminus \{x_n\}$ con $0 \neq x_n \in U_n$ per $n \in \mathbb{N}$ è intorno di 0 per τ che non contiene nessuno degli U_n . La topologia non è separabile, poiché tutti gli insiemi numerabili sono chiusi per definizione. Chiaramente questa topologia non può essere definita da una o una famiglia di pseudometriche, non essendo regolare.

2.3. (TOPOLOGIA DI SORGENTFREY) Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia di Sorgenfrey sinistra avente per base di aperti gli insiemi del tipo $[a, b)$ con $a < b$.

- (a) Mostrare che si tratta di una topologia strettamente più fine di quella euclidea, ma non è discreta.
- (b) Mostrare che è localmente numerabile, separabile, non (topologicamente) numerabile, non metrizzabile.
- (c) Mostrare che è totalmente sconnesso.
- (d) Mostrare che i sottinsiemi compatti sono (insiemisticamente) numerabili. Vale il viceversa?
- (e) Che relazioni vi sono tra le funzioni di \mathbb{R} in sè continue per la topologia usuale e quelle continue per la topologia di Sorgenfrey (usando la stessa topologia in dominio e codominio)?

2.4. (TOPOLOGIA SEMIRETTE SINISTRE INTERE IN \mathbb{R}) Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia generata dagli insiemi del tipo $(-\infty, n)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

- (a) Mostrare che si tratta di una topologia non T_0 , né regolare.
- (b) Descrivere la chiusura di un qualunque insieme.
- (c) Mostrare che lo spazio è connesso per archi e localmente connesso per archi.
- (d) Mostrare che gli aperti diversi dallo spazio sono compatti, e che nessun chiuso non vuoto è compatto.

- (e) Mostrare che lo spazio è topologicamente numerabile, localmente numerabile, separabile ma non è uno spazio pseudometrizzabile.

2.5. (TOPOLOGIA INDOTTA DAI RAZIONALI IN \mathbb{R}) Si consideri \mathbb{R} con la topologia usuale τ , e sia $\tau_{\mathbb{Q}}$ la topologia (forte) su \mathbb{R} indotta dalla inclusione di \mathbb{Q} (con topologia indotta da τ) in \mathbb{R} .

- (a) Descrivere la topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$, per esempio caratterizzando gli aperti, mostrando che è strettamente più fine della τ , ma non è discreta.
 (b) Con la topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$ lo spazio \mathbb{R} risulta separabile, topologicamente (localmente) numerabile, hausdorff?
 (c) Quali sono le proprietà di connessione di \mathbb{R} dotato della topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$?
 (d) Quali sottinsiemi di \mathbb{R} sono compatti per la topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$?
 (e) La topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Risultati:

- (a) Su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si tratta della topologia discreta, su \mathbb{Q} della topologia usuale.
 (b) Non è separabile (ha un sottinsieme non numerabile con topologia discreta), quindi nemmeno topologicamente numerabile. È localmente numerabile e hausdorff.
 (c) Non è connesso, né localmente connesso (quindi nemmeno per archi).
 (d) Sono i compatti di \mathbb{Q} uniti un sottinsieme finito di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Chi sono i compatti di \mathbb{Q} ?
 (e) È metrizzabile usando distanza usuale ma limitata da 1 tra punti razionali, e 1 altrimenti.

2.6. (TOPOLOGIA INDOTTA DALLA CIRCONFERENZA IN \mathbb{R}) Si consideri la mappa $cis : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ (manda x in $\cos(x) + i \sin(x)$) e sia σ la topologia su \mathbb{R} indotta tramite cis dalla topologia usuale di \mathbb{S}^1 (a sua volta indotta da quella usuale di \mathbb{C} tramite l'inclusione).

- (a) Descrivere la topologia σ , per esempio caratterizzando gli aperti, mostrando che è strettamente meno fine della topologia τ indotta su \mathbb{R} dalla topologia usuale di \mathbb{C} , ma non è banale.
 (b) Con la topologia σ lo spazio \mathbb{R} risulta separabile, topologicamente (localmente) numerabile, hausdorff, regolare?
 (c) Quali sono le proprietà di connessione di \mathbb{R} dotato della topologia σ ?
 (d) Quali sottinsiemi di \mathbb{R} sono compatti per la topologia σ ? In particolare, i compatti sono chiusi? \mathbb{R} è compatto?
 (e) La topologia σ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Risultati:

- (a) Gli aperti (e anche i chiusi) sono “periodici” modulo 2π .
 (b) Risulta separabile (\mathbb{Q} è denso), topologicamente e localmente numerabile, non hausdorff (un punto e ogni suo traslato per $2n\pi$ hanno gli stessi intorni), regolare.
 (c) Essendo la topologia meno fine di quella usuale, gli archi usuali sono continui e dunque è connessa per archi. È anche localmente connessa per archi, perché qualsiasi funzione che salta da un punto a un suo traslato di $2n\pi$ è continua per questa topologia.
 (d) Un insieme K è compatto se e solo se l'unione di tutti i suoi traslati $H = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K + 2n\pi$ è compatto, se e solo se $H \cap [0, 2\pi]$ è compatto (anche usuale, ovvero un chiuso). Comunque i compatti usuali euclidei sono compatti di σ , ma non chiusi per σ .
 (e) Chiaramente definendo la distanza tra x e y come il minimo delle distanze euclideanee tra i traslati modulo 2π si ottiene una pseudometrica che dà la topologia σ , che quindi è pseudometrizzabile e completamente regolare.

2.7. (TOPOLOGIA INDOTTA DAGLI ASSI IN \mathbb{R}^2) Si consideri \mathbb{R}^2 con la topologia usuale τ , e sia σ la topologia (forte) su \mathbb{R}^2 indotta dalla inclusione del sottinsieme $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ (con topologia indotta da τ) in \mathbb{R}^2 .

- (a) Descrivere la topologia σ , per esempio caratterizzando gli aperti, mostrando che è strettamente più fine della τ ma non è discreta.
 (b) Con la topologia σ lo spazio \mathbb{R}^2 risulta separabile, topologicamente (localmente) numerabile, hausdorff?
 (c) Quali sono le proprietà di connessione di \mathbb{R}^2 dotato della topologia σ ?
 (d) Quali sottinsiemi di \mathbb{R}^2 sono compatti per la topologia σ ?
 (e) La topologia σ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

3. Anno accademico 2014/15.

3.1. (CHIUSURE E INTERNI NELLE SUCCESSIONI REALI) Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni in \mathbb{R} , e indichiamo con β la box-topology (i cui aperti sono i prodotti indiciati su \mathbb{N} di aperti di \mathbb{R}), e con τ la topologia prodotto.

- (a) Trovare chiusura e interno per β e per τ dell'insieme delle successioni limitate.
- (b) Trovare chiusura e interno per β e per τ dell'insieme delle successioni che evitano un insieme finito F di valori.
- (c) Trovare chiusura e interno per β e per τ dell'insieme delle successioni che assumono solo un insieme finito F di valori.
- (d) Trovare chiusura e interno per β e per τ dell'insieme delle successioni strettamente crescenti.
- (e) Data una funzione $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, che relazioni vi sono tra la continuità per la box-topology (in entrambi dominio e codominio) e la continuità per la topologia prodotto (in entrambi dominio e codominio)? [dimostrazioni o controesempi]

Risultati:

(a, b, c, d)

	S	$S^{\circ\beta}$	\supseteq	$S^{\circ\tau}$	\overline{S}^{β}	\subseteq	\overline{S}^{τ}
(a)	S	S	\supseteq	\emptyset	S	\subseteq	X
(b)	S	S	\supseteq	\emptyset	X	\subseteq	X
(c)	\emptyset	\emptyset	\supseteq	\emptyset	S	\subseteq	S
(d)	S	S	\supseteq	\emptyset	\overline{S}	$=$	\overline{S}

dove \overline{S} è l'insieme delle successioni non decrescenti.

- (e) Nessuna relazione: la funzione che associa ad ogni successione la successione delle sue somme parziali è continua per τ e non per β , mentre la funzione che associa ad ogni successione quella che si ottiene sostituendo il primo elemento con il sup del modulo di tutti (se esiste, 1 altrimenti) è continua per β e non per τ .

3.2. Si consideri l'insieme \mathbb{R}^2 dotato della topologia τ indotta dalla famiglia delle inclusioni (nel piano) delle rette per l'origine (usando su tali rette la topologia euclidea usuale), cioè la massima topologia che rende continue tutte le inclusioni.

- (a) Mostrare che τ è più fine della topologia euclidea del piano. Per ogni punto di \mathbb{R}^2 , descrivere una base di intorni della topologia τ .
- (b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ : separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?
- (c) Quali sono le proprietà di connessione di τ ?
- (d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
- (e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Risultati:

- (a) Se U è un aperto euclideo allora interseca ogni retta in un aperto della retta, e quindi appartiene alla topologia τ . Per i punti diversi dall'origine, vi è una unica retta per l'origine che lo contiene, e una base dei suoi intorni per τ è semplicemente una base di intorni del punto sulla retta. Per l'origine, gli intorni devono intersecare ogni retta in un intorno del punto sulla retta, quindi una base di intorni si può ottenere dalle funzioni $\mathbb{S}^1 \rightarrow (0, 1)$ e non vi sono basi numerabili di intorni. Si osservi anche che vi sono intorni dell'origine per τ che non sono euclidei.
- (b) Siccome esistono famiglie non numerabili di aperti disgiunti, la topologia τ non è separabile, né topologicamente numerabile. Non è nemmeno localmente numerabile, a causa dell'origine (negli altri punti invece vi sono basi numerabili degli intorni). È hausdorff perché più fine della euclidea, che è hausdorff.
- (c) Lo spazio è connesso per archi (passando per l'origine) e localmente connesso per archi, quindi connesso e localmente connesso.
- (d) I compatti sono unione finita di compatti delle rette per l'origine.
- (e) Non è pseudometrizzabile, né regolare a causa dell'origine; tolta l'origine diventa metrizzabile.

3.3. (PRODOTTO NUMERABILE DI UNO SPAZIO FINITO DISCRETO) Si consideri l'insieme $D^{\mathbb{N}}$, dove D è un insieme finito con topologia discreta, dotato della topologia prodotto τ .

- (a) Per ogni punto di $D^{\mathbb{N}}$, descrivere una base di intorni della topologia prodotto.

- (b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia prodotto: separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?
- (c) Quali sono le proprietà di connessione di τ ? Vero o falso che lo spazio è totalmente sconnesso?
- (d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
- (e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? Vero o falso che $D^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo ad un sottinsieme (con la topologia indotta) di \mathbb{R} ?

Suggerimento: basta pensare alle proprietà dei prodotti e all'insieme di Cantor (caso D con 2 elementi).

3.4. Si consideri l'insieme \mathbb{R}^2 dotato della topologia τ indotta dalla famiglia delle inclusioni (nel piano) delle rette parallele all'asse delle ascisse (usando su tali rette la topologia euclidea usuale), cioè la massima topologia che rende continue tutte le inclusioni.

- (a) Mostrare che τ è più fine della topologia euclidea del piano. Per ogni punto di \mathbb{R}^2 , descrivere una base di intorni della topologia τ .
- (b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ : separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?
- (c) Quali sono le proprietà di connessione di τ ?
- (d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
- (e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? Vero o falso che \mathbb{R}^2 dotato della topologia τ è omeomorfo al prodotto di una retta con topologia euclidea e una con topologia discreta?

3.5. Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia τ indotta dalle inclusioni dei suoi sottinsiemi \mathbb{Q} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (entrambi dotati delle topologie indotte da quella usuale di \mathbb{R}), cioè la massima topologia che rende continue le due inclusioni.

- (a) Mostrare che τ è più fine della topologia usuale di \mathbb{R} , e descriverne gli aperti.
- (b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ : separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?
- (c) Quali sono le proprietà di connessione di τ ?
- (d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
- (e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? Che relazione c'è tra la topologia τ e le due topologie indotte su \mathbb{R} dalle inclusioni di \mathbb{Q} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Risultati:

- (a) Gli aperti di τ sono i sottinsiemi V di \mathbb{R} tali che $V \cap \mathbb{Q}$ è un aperto di \mathbb{Q} e $V \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ è un aperto di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; in particolare lo sono \mathbb{Q} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (b) È topologicamente numerabile, quindi separabile (ma \mathbb{Q} non è denso perché è chiuso: ma $\mathbb{Q} \cup (\sqrt{2} + \mathbb{Q})$ è denso), e localmente numerabile.
- (c) Ogni aperto è unione disgiunta di sottinsiemi non banali aperti, quindi non può avere nessuna proprietà di connessione, ed è totalmente sconnesso.
- (d) I compatti vanno cercati tra i compatti euclidei (essendo la topologia maggiore di quella), ma in effetti sono di meno: $[0, 1]$ non è compatto per τ (si trova un ricoprimento aperto non raffinabile usando \mathbb{Q} e $(1/n, 1 - 1/n)$ per n intero positivo) e nemmeno $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. È facile vedere che se un insieme contiene sequenze di razionali convergenti (in senso euclideo) a un irrazionale, o viceversa, allora non è compatto per τ . Un compatto euclideo che non presenta questi fenomeni dovrebbe essere compatto per τ .
- (e) La topologia τ è proprio l'intersezione di quelle due, ed è metrizzabile usando distanza usuale limitata da 1 tra razionali e tra irrazionali, 1 altrimenti.

3.6. Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia τ indotta dalle inclusioni dei suoi sottinsiemi \mathbb{Z} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (entrambi dotati delle topologie indotte da quella usuale di \mathbb{R}), cioè la massima topologia che rende continue le due inclusioni.

- (a) Mostrare che τ è più fine della topologia usuale di \mathbb{R} , e descriverne gli aperti.
- (b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ : separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?
- (c) Quali sono le proprietà di connessione di τ ?
- (d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
- (e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? Che relazione c'è tra la topologia τ e le due topologie indotte su \mathbb{R} dalle inclusioni di \mathbb{Z} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$?

Risultati:

- (a) Gli aperti sono dati da aperti euclidei usuali uniti con qualsiasi collezione di interi, in particolare ogni intero è un aperto di τ .
- (b) È topologicamente numerabile (con base di aperti quella usuale euclidea insieme a tutti i punti interi), quindi separabile e localmente numerabile; hausdorff perché maggiore di quella euclidea.
- (c) Gli interi sono chiusaperti, e gli intervalli $(n, n+1)$ tra interi consecutivi connessi per archi; quindi si tratta delle componenti connesse (per archi). Dunque lo spazio non è connesso ed è localmente connesso per archi.
- (d) I compatti vanno cercati tra i compatti usuali euclidei, ma chiaramente se contengono un intero non sono compatti per τ . Quindi i compatti sono gli insiemi finiti e i compatti euclidei che non intersecano \mathbb{Z} .
- (e) Si tratta esattamente della topologia indotta da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, visto che l'altra condizione è banalizzata dalla topologia discreta di \mathbb{Z} . È metrizzabile.

3.7. Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia τ indotta dalla mappa $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ che manda ogni numero nella sua parte intera (massimo intero minore o uguale al numero dato), cioè la minima topologia che rende continua φ (su \mathbb{Z} si consideri la topologia discreta).

- (a) Descrivere gli aperti di τ e dire se è comparabile con le topologie euclideanhe e di Sorgenfrey.
- (b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ : separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?
- (c) Quali sono le proprietà di connessione di τ ?
- (d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ? Lo spazio è compatto e/o localmente compatto?
- (e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

4. Anno accademico 2015/16.

4.1. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni di \mathbb{R} in sé, dotato della topologia prodotto.

- (a) Trovare chiusura e interno dell'insieme delle funzioni continue.
- (b) Trovare chiusura e interno dell'insieme delle funzioni caratteristiche dei punti di \mathbb{R} .
- (c) Trovare chiusura e interno dell'insieme delle funzioni φ tali che $\varphi(0) > 0$.
- (d) Determinare se la funzione di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ in sé che manda una funzione f nel suo quadrato (cioè manda f nella funzione $x \mapsto f(x)^2$) è continua.
- (e) Determinare se la funzione di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ in sé che manda una funzione f in $f \circ f$ (cioè manda f nella funzione $x \mapsto f(f(x))$) è continua.

Risultati: Si noti che ogni aperto della topologia prodotto contiene sia funzioni continue che funzioni discontinue e anche funzioni che non sono funzioni caratteristiche (di sottinsiemi di \mathbb{R}). Inoltre ogni intorno aperto della funzione nulla contiene funzioni caratteristiche (anche di punti).

- (a) L'insieme delle funzioni continue è denso con interno vuoto.
- (b) L'insieme delle funzioni caratteristiche dei punti ha come chiusura l'insieme stesso unito alla funzione nulla, e ha interno vuoto.
- (c) L'insieme è aperto, e la chiusura è l'insieme delle funzioni φ tali che $\varphi(0) \geq 0$.
- (d) È continua perché la composizione con le proiezioni (valutazioni in $x \in \mathbb{R}$) manda f in $f(x)^2$ che è continua perché composizione di $f \mapsto f(x)$ e $y \mapsto y^2$.
- (e) Non è continua perché la composizione con le proiezioni (valutazioni in $x \in \mathbb{R}$) manda f in $f(f(x))$ che è composizione di $f \mapsto f(x)$ e $y \mapsto f(y)$: la prima è continua, la seconda in generale no, a meno che f stessa non sia continua, e quindi non ci si aspetta la continuità della funzione composta. Per esempio la funzione χ_0 (funzione caratteristica del punto 0) ha $\chi_0(\chi_0(0)) = \chi_0(1) = 0$, e controllando un aperto $(-\varepsilon, \varepsilon)$ di \mathbb{R} si vede che per avere un sottinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con immagine nell'intervallo bisogna imporre una condizione sui valori in 0 (in un intorno di 1), ma anche su tutti i valori in un intorno di 1 (cioè su infiniti punti, il che non può dare un aperto della topologia prodotto).

4.2. Si consideri l'insieme \mathbb{R}^2 dotato della topologia τ indotta dalla famiglia delle inclusioni (nel piano) delle circonferenze di centro l'origine (e raggi maggiori o uguali a 0, usando su tali circonferenze la topologia euclidea usuale), cioè la massima topologia che rende continue tutte le inclusioni.

- (a) Mostrare che τ è più fine della topologia euclidea del piano. Per ogni punto di \mathbb{R}^2 , descrivere una base di intorni della topologia τ .
- (b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?
- (c) Quali sono le proprietà di connessione di τ ? Descrivere le componenti connesse per τ .
- (d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
- (e) Si consideri la funzione $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $p(\varrho, (\cos \vartheta, \sin \vartheta)) = (\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta)$. Usando la topologia τ nel codominio, che topologia viene indotta da p nel dominio? Usando la topologia prodotto (di quelle eucleede usuali) nel dominio, quale topologia viene indotta nel codominio?

Risultati.

- (a) Un insieme è aperto se (e solo se) l'antimmagine su ogni circonferenza (cioè l'intersezione con ogni circonferenza) è un aperto (di quella circonferenza). In particolare lo è ogni aperto euclideo del piano, ma lo sono anche l'origine e ciascuna delle circonferenze (e si tratta anche di chiusaperti). Per ogni punto basta prendere una base di intorni sulla circonferenza a cui appartiene.
- (b) La topologia è chiaramente non separabile né topologicamente numerabile (esiste una famiglia non numerabile di aperti disgiunti) ed è localmente numerabile. È metrizzabile, usando per esempio metriche limitate da 1 su ogni circonferenza, e dichiarando 1 la distanza tra due punti se non appartengono alla stessa circonferenza. Quindi è completamente regolare e hausdorff.
- (c) Ogni circonferenza è connessa per archi ed è un chiusaperto, quindi le componenti connesse sono le circonferenze. Chiaramente lo spazio non è connesso, ma è localmente connesso per archi.
- (d) Ogni insieme che intersechi più di un numero finito di circonferenze non può essere compatto; quindi i compatti sono solo le unioni finite di compatti su ogni circonferenza.
- (e) Sul dominio viene indotta da τ la topologia prodotto di $\mathbb{R}_{>0}$ con topologia discreta e \mathbb{S}^1 con topologia usuale, mentre $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ rimane con topologia banale; in particolare non viene indotta la topologia prodotto discreta \times usuale, ma una meno fine.
Usando la topologia prodotto di quelle eucleede usuali sul dominio, sul codominio viene indotta la topologia usuale del piano (fuori dell'origine è facile, mentre gli intorni dell'origine sono da giustificare).

4.3. Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia τ generata dalle semirette aperte $(-\infty, a)$ con $a > 0$ e $(b, +\infty)$ con $b < 0$.

- (a) Descrivere gli aperti di τ e dire se è comparabile con la topologia euclidea.
- (b) La topologia τ è separabile, localmente numerabile, numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? In particolare, descrivere la chiusura per τ dei punti. La topologia τ è pseudometrizzabile?
- (c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ ?
- (d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
- (e) A quali punti convergono le successioni $x_n = \frac{1}{n+1}$ e $y_n = \frac{n}{n+1}$?

Risultati.

- (a) Intersezioni delle semirette danno intervalli aperti contenenti 0, e si vede che con questi abbiamo tutta la topologia τ , che quindi è formata dagli intervalli aperti (anche generalizzati, cioè semirette) contenenti 0; in particolare è contenuta nella topologia euclidea.
- (b) È chiaramente numerabile perché gli intervalli (a, b) con $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < 0 < b$ sono una base numerabile; quindi è separabile (si noti che 0 è denso) e localmente numerabile (base di intorni di $x > 0$ sono gli intervalli $(-1/n, x + 1/n)$ con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$).
Si vede facilmente che è T_0 ma non T_1 , quindi non è pseudometrizzabile. Non può avere altre proprietà di separazione perché esistono chiusi disgiunti, ma non aperti disgiunti.
Chiusura di 0 è tutto \mathbb{R} , chiusura di $x < 0$ è $(-\infty, x]$ e chiusura di $x > 0$ è $[x, \infty)$.
- (c) È connesso per archi e localmente connesso per archi, poiché gli archi euclidei sono continui anche per τ ; quindi è anche connesso e localmente connesso.
- (d) Lo spazio non è compatto (il ricoprimento aperto $(-n, n)$ non ha sottoricoprimenti finiti), ma è localmente compatto essendo i compatti euclidei compatti per τ . In effetti τ ha molti più compatti di quelli euclidei; un insieme è compatto se è limitato e soddisfa a queste proprietà: se inf e sup sono entrambi non negativi basta che il sup appartenga all'insieme, se sono entrambi non

positivi basta che l'inf appartenga all'insieme, se sono opposti bisogna che entrambi appartengano all'insieme.

- (e) Tutti i punti sono limite della x_n (ogni intorno di $x > 0$ contiene tutta la successione, ogni intorno di $x \leq 0$ contiene la successione definitivamente). I punti $x \geq 1$ sono limiti della y_n .

4.4. Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia τ generata dalle semirette aperte $(-\infty, a)$ con $a < 0$ e $(b, +\infty)$ con $b > 0$.

- (a) Descrivere gli aperti di τ e dire se è comparabile con la topologia euclidea.
- (b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? Descrivere le chiusure dei punti.
- (c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ ?
- (d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
- (e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? A quali punti converge la successione $x_n = n$? e la successione $y_n = (-1)^n n$?

Risultati.

- (a) Essendo chiusi per intersezioni, gli insiemi dati sono una base per la topologia, che quindi è formata dalle unioni arbitrarie di tali elementi: oltre alle semirette $(-\infty, a)$ con $a \leq 0$ e $(b, +\infty)$ con $b \geq 0$ vi sono le unioni di queste. Chiaramente è strettamente meno fine della topologia euclidea.
- (b) La topologia è chiaramente numerabile (basta usare le semirette con estremi razionali), quindi separabile (per esempio \mathbb{Z} è denso e numerabile) e localmente numerabile. Si vede facilmente essere T_0 ma non T_1 . L'unico punto chiuso è 0, mentre per $x < 0$ la chiusura è $[x, 0]$ e per $x > 0$ è $[0, x]$.
- (c) Essendo meno fine della topologia euclidea, risulta connesso per archi e localmente connesso per archi (quindi connesso e localmente connesso).
- (d) Un ricoprimento aperto per τ deve contenere un aperto contenente 0, e l'unico intorno di 0 è tutto \mathbb{R} : ogni ricoprimento è raffinabile con un aperto, quindi lo spazio è compatto e localmente compatto. Per lo stesso motivo, tutti i sottinsiemi contenenti 0 sono compatti per τ . Un sottinsieme è compatto per τ se e solo se contiene 0, oppure contiene l'inf dei suoi elementi positivi (se ne ha) e il sup dei suoi elementi negativi (se ne ha).
- (e) Per questioni di separazione si vede che non è pseudometrizzabile, e controllando con i pochi aperti a disposizione si vede che non è regolare, quindi nemmeno completamente regolare. La successione x_n tende a tutti gli $x \geq 0$, mentre la successione y_n tende solo a 0.

4.5. Si consideri l'insieme \mathbb{R} dotato della topologia τ generata dagli insiemi conumerabili.

- (a) Descrivere gli aperti di τ e dire se è comparabile con la topologia euclidea.
- (b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate?
- (c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ ?
- (d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ? Lo spazio è compatto e/o localmente compatto?
- (e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? A quali punti converge la successione $x_n = n$?

Per il punto (c): siccome due aperti non vuoti hanno intersezione non vuota, lo spazio è connesso e localmente connesso. Tuttavia è totalmente arco-sconnesso: infatti gli unici cammini continui sono quelli costanti. Si può vedere per esempio così: se γ è cammino continuo, abbiamo che $\gamma([0, 1] \cap \mathbb{Q})$ è al più numerabile, quindi chiuso di X ; per continuità $\gamma^{-1}(\gamma([0, 1] \cap \mathbb{Q}))$ è un chiuso di $[0, 1]$, contenente $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, quindi uguale a $[0, 1]$; ma $[0, 1]$ è connesso, quindi l'immagine di γ è contenuta in una componente connessa dell'immagine (che è numerabile, quindi le componenti connesse per la topologia conumerabile sono i punti).

4.6. Si consideri l'insieme $X = \{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ dotato della topologia τ prodotto delle topologie discrete su $\{0, 1\}$.

- (a) Descrivere gli aperti di τ ; è vero che τ ammette una base di chiusaperti?
- (b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?
- (c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ ?

- (d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ ?
(e) La funzione $\mathbb{R} \rightarrow X$ che manda ogni $x \in \mathbb{R}$ nella sua funzione caratteristica è continua (usando la topologia usuale su \mathbb{R})? Se no, qual è la minima topologia su \mathbb{R} che rende continua tale funzione?
- Nota.* Questo esercizio è interessante sia per non confonderlo con il prodotto numerabile di copie di $\{0, 1\}$ discrete (insieme di Cantor), sia perché $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ (funzioni di \mathbb{R} in $\{0, 1\}$) è in corrispondenza biiettiva con l'insieme delle parti di \mathbb{R} , quindi stiamo dando una topologia all'insieme dei sottinsiemi di \mathbb{R} .

Appendice D

Temi d'esame: Topologia

1. Anno accademico 2011/12.

1.1. PRIMA PROVA PARZIALE.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di omotopia e di nullomotopia per funzioni continue.
- (b) Dimostrare che due funzioni continue a valori in \mathbf{S}^n mai antipodali sono omotope tra loro.
- (c) Dimostrare che l'inclusione equatoriale di \mathbf{S}^{n-1} in \mathbf{S}^n è nullomotopa.

Esercizio 2. Consideriamo l'insieme $\{0, 1\}$: indichiamolo con S se dotato della topologia discreta, e con B se dotato della topologia banale. Sia X uno spazio topologico.

- (a) Uno tra $X \times S$ e $X \times B$ è omeomorfo all'unione disgiunta $X \sqcup X$?
- (b) Supponiamo X sia spazio T_0 (risp. T_1 , T_2 , regolare, normale); cosa si può dire delle proprietà di separazione di $X \times B$?
- (c) Descrivere interno e chiusura di sottinsiemi di $X \times B$ (usando interno e chiusura in X).

Esercizio 3. Consideriamo le sfere \mathbf{S}^n contenute in \mathbf{R}^{n+1} , e le inclusioni \mathbf{S}^{n-1} in \mathbf{S}^n indotte dalle inclusioni \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^{n+1} (annullando l'ultima coordinata).

- (a) Sia \mathbf{S}^∞ l'unione $\bigcup_{n \geq 0} \mathbf{S}^n$ con la topologia indotta dalle inclusioni; dimostrare che è spazio连通的. È compatto?
- (b) Determinare una struttura di complesso cellulare per \mathbf{S}^∞ in modo che ogni \mathbf{S}^n ne sia un sotto-complexo (sugg.: lo scheletro n -esimo si ottenga dal precedente con l'aggiunta di due n -celle).
- (c) Dimostrare che \mathbf{S}^∞ è spazio contraibile.

1.2. SECONDA PROVA PARZIALE.

Esercizio 1. Sia X connesso per archi.

- (a) Dare la definizione di gruppo fondamentale di uno spazio puntato (X, x_0) . Come dipende dal punto x_0 ?
- (b) Dare la definizione di rivestimento, e di azione del gruppo fondamentale della base sulle fibre del rivestimento.
- (c) Mostrare che l'azione del gruppo fondamentale sulle fibre di un rivestimento è transitiva se solo se il rivestimento è connesso per archi.

Esercizio 2. Si consideri il complesso cellulare X formato da due 0-celle P, Q , tre 1-celle a, b, c parallele con estremi identificati ai due punti precedenti, e una 2 cella con il bordo identificato al ciclo formato da b e c .

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) Descrivere tutti i rivestimenti di X .
- (c) Se ad X aggiungiamo una ulteriore 2-cellula incollata secondo la stessa relazione bc , otteniamo un complesso cellulare con lo stesso gruppo fondamentale? con lo stesso tipo di omotopia?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (la somma puntata di due piani proiettivi reali).

- (a) Determinare $\pi_1(X)$ (gruppo fondamentale) e \tilde{X} (rivestimento universale).
- (b) Determinare il rivestimento abeliano universale, e tutti i rivestimenti abeliani di X .
- (c) Determinare tutti i rivestimenti finiti di X , discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.

1.3. PRIMO APPELLO.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di omotopia tra funzioni continue tra spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di retratti di deformazione e di deformazione forte.
- (c) Sfere (reali) di dimensioni diverse hanno stesso tipo di omotopia?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due rette incidenti, sia X .

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione un complesso cellulare con due 0-celle e quattro 1-celle parallele?
- (c) È vero che X ha lo stesso tipo di omotopia del piano privato di tre punti?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio $\mathbb{K} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (la somma connessa di due piani proiettivi reali: è l'otre di Klein).

- (a) Determinare $\pi_1(X)$ (gruppo fondamentale) e \tilde{X} (rivestimento universale).
- (b) Determinare il rivestimento abeliano universale, e tutti i rivestimenti abeliani di X .
- (c) Determinare tutti i rivestimenti finiti di X , discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.

1.4. SECONDO APPELLO.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di rivestimento tra spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di rivestimento universale e il criterio di esistenza.
- (c) Che relazioni vi sono tra gruppi fondamentali di uno spazio e dei suoi rivestimenti?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 a cui sono tolte tre rette, due sghembe e una incidente entrambe, sia X .

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione un complesso cellulare con due 0-celle e sei 1-celle parallele?
- (c) È vero che X ha lo stesso tipo di omotopia di un bouquet di 5 circonferenze?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_3 formato da una 0-cellula A , una 1-cellula a , una 2-cellula incollata secondo la relazione a^3 .

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_3)$ (gruppo fondamentale) e $\tilde{\mathbb{L}}_3$ (rivestimento universale).
- (b) Determinare il gruppo fondamentale, il rivestimento abeliano universale, e tutti i rivestimenti abeliani di $\mathbb{P}^2 \vee \mathbb{L}^3$ (somma puntata di un piano proiettivo reale e di \mathbb{L}^3).
- (c) Determinare tutti i rivestimenti finiti di $\mathbb{P}^2 \vee \mathbb{L}^3$, discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.

1.5. TERZO APPELLO.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di gruppo fondamentale per spazi topologici.
- (b) Cosa significa dire che due spazi hanno lo stesso tipo di omotopia?
- (c) Mostrare che spazi omotopi hanno gruppi fondamentali isomorfi. Il viceversa è vero o falso?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 a cui sono tolte tre rette concorrenti in un punto, sia X .

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione un complesso cellulare con due 0-celle e sei 1-celle parallele?
- (c) È vero che X ha lo stesso tipo di omotopia di un bouquet di 5 circonferenze?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_3 formato da una 0-cellula A , una 1-cellula a , una 2-cellula incollata secondo la relazione a^3 .

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_3)$ (gruppo fondamentale) e $\tilde{\mathbb{L}}_3$ (rivestimento universale).
- (b) Determinare il gruppo fondamentale, il rivestimento abeliano universale, e tutti i rivestimenti abeliani di $\mathbb{L}_3 \vee \mathbb{L}_3$ (somma puntata di due copie di \mathbb{L}_3).
- (c) Determinare tutti i rivestimenti finiti di $\mathbb{L}_3 \vee \mathbb{L}_3$, discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.

1.6. QUARTO APPELLO.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di gruppo fondamentale per spazi topologici.
- (b) Enunciare il teorema di Seifert-Van Kampen per un ricoprimento con due aperti.
- (c) Usare il teorema enunciato per trovare il gruppo fondamentale dell'otre di Klein.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 a cui sono tolti gli spigoli (1-dimensional) di un tetraedro, sia X .

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione un complesso cellulare con due 0-celle e quattro 1-celle parallele?
- (c) È vero che X ha lo stesso tipo di omotopia di un bouquet di 3 circonferenze?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_4 formato da una 0-cellula A , una 1-cellula a , una 2-cellula incollata secondo la relazione a^4 .

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_4)$ (gruppo fondamentale) e $\tilde{\mathbb{L}}_4$ (rivestimento universale).
- (b) Determinare il gruppo fondamentale, il rivestimento abeliano universale, e tutti i rivestimenti abeliani di $\mathbb{L}_4 \vee \mathbb{P}^2$ (somma puntata di \mathbb{L}_4 e un piano proiettivo).
- (c) Determinare i rivestimenti finiti di $\mathbb{L}_4 \vee \mathbb{P}^2$, discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.

2. Anno accademico 2012/13.

2.1. PRIMA PROVA PARZIALE.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici.
- (b) Discutere quali tra le seguenti nozioni sono invarianti per equivalenza omotopica (dimostrazione o controesempio): connessione, compattezza, contraibilità.
- (c) Siano $\mathbf{T} = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ il toro (quoziante algebrico, con la topologia quoziante) e $\mathbf{S} = \mathbf{R}^2/\sim$ dove $x \sim y$ se e solo se $x, y \in \mathbf{Z}^2$ (quoziante topologico). Mostrare che esiste una funzione canonica continua $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$, ma che i due spazi non sono né omeomorfi né omotopicamente equivalenti.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico connesso per archi, $x \in X$.

- (a) Dare la definizione di gruppo fondamentale $\pi_1(X, x)$ di X basato a x .
- (b) Mostrare che se $y \in X$, allora i gruppi $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ sono isomorfi; che relazione c'è tra due tali isomorfismi?
- (c) Dimostrare che gli isomorfismi del punto precedente sono canonici (tutti uguali) se e solo se $\pi_1(X, x)$ è abeliano.

Esercizio 3. Consideriamo l'insieme X formato da \mathbf{R}^3 privato di n semirette uscenti dall'origine.

- (a) Mostrare esplicitamente che X ha come retratto di deformazione la sfera unitaria privata di n punti.
- (b) Mostrare esplicitamente che X è omotopicamente equivalente al piano reale privato di $n - 1$ punti.
- (c) Determinare il gruppo fondamentale di X .

2.2. SECONDA PROVA PARZIALE.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di rivestimento di uno spazio topologico X . Che relazioni vi sono tra il gruppo fondamentale di un rivestimento e quello dello spazio base?
- (b) Definire l'azione del gruppo fondamentale di X sulle fibre di un rivestimento.
- (c) Mostrare la compatibilità tra l'azione degli automorfismi di un rivestimento e quella del gruppo fondamentale sulle fibre.

Esercizio 2. Sia \mathbf{K} l'otre di Klein.

- (a) Descrivere gruppo fondamentale, rivestimento universale e automorfismi del rivestimento universale di \mathbf{K} .
- (b) Trovare il rivestimento universale abeliano di \mathbf{K} e il suo gruppo fondamentale.
- (c) Descrivere tutti i rivestimenti abeliani di \mathbf{K} .

Esercizio 3. Sia X la somma puntata di \mathbf{P} (piano proiettivo reale) con \mathbf{S}^1 .

- (a) Determinare tutti i rivestimenti con 2 fogli di X , e i loro gruppi fondamentali (in quanto sottogruppi di quello di X). Si tratta di rivestimenti normali?
- (b) Determinare tutti i rivestimenti con 3 fogli di X , e i loro gruppi fondamentali (in quanto sottogruppi di quello di X). Si tratta di rivestimenti normali?
- (c) Descrivere il rivestimento universale di X .

2.3. PRIMO APPELLO.**Esercizio 1.**

- (a) Dare la definizione di omotopia tra funzioni continue tra spazi topologici e di contraibilità per spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di retratti di deformazione e di deformazione forte. È vero che spazi contraibili sono retratti di deformazione (ev. forte) di ogni loro punto?
- (c) Determinare il più grande sottinsieme contraibile di un toro e di un piano proiettivo reale.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due circonferenze allacciate, e lo spazio Y formato da \mathbb{S}^3 a cui sono tolte due circonferenze allacciate.

- (a) Determinare i gruppi fondamentali di X e di Y .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione una superficie torica?
- (c) È vero che Y ha come retratto di deformazione una superficie torica?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_4 formato da una 0-cellula A , una 1-cellula a , una 2-cellula incollata secondo la relazione a^4 .

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_4)$ (gruppo fondamentale) e $\tilde{\mathbb{L}}_4$ (rivestimento universale).
- (b) Mostrare che \mathbb{L}_4 ha un solo rivestimento normale \mathbb{M} con 2 fogli e descriverlo topologicamente. Determinare $\pi_1(\mathbb{M})$ e il gruppo di autoromorfismi $G(\mathbb{M}/\mathbb{L}_4)$.
- (c) Sia X la somma puntata di \mathbb{M} e di \mathbb{S}^1 . Determinare gruppo fondamentale, rivestimenti con 2 e 3 fogli, rivestimento universale e abeliano universale di X .

2.4. SECONDO APPELLO.**Esercizio 1.**

- (a) Dare la definizione di rivestimento tra spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di rivestimento universale e il criterio di esistenza.
- (c) Dare definizione e caratterizzazioni di rivestimento normale.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 a cui sono tolte una retta e due circonferenze ad essa allacciate (e non tra loro), sia X .

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) Qual è il complesso cellulare di Cayley associato al gruppo fondamentale di X ?
- (c) Il complesso cellulare del punto (b) è omotopicamente equivalente ad X ?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_6 formato da una 0-cellula A , una 1-cellula a , una 2-cellula incollata secondo la relazione a^6 .

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_6)$ (gruppo fondamentale) e $\tilde{\mathbb{L}}_6$ (rivestimento universale).
- (b) Mostrare che \mathbb{L}_6 ha solo due rivestimenti intermedi, entrambi normali, e descriverli topologicamente. Determinare gruppo fondamentale e il gruppo di automorfismi (sopra \mathbb{L}_6) di entrambi.
- (c) Detto \mathbb{M} il rivestimento con tre fogli del punto (b), sia X la somma puntata di \mathbb{M} e di \mathbb{S}^1 . Determinare gruppo fondamentale, rivestimenti con 2 e 3 fogli, rivestimento universale e abeliano universale di X .

2.5. TERZO APPELLO.**Esercizio 1.**

- (a) Dare la definizione di gruppo fondamentale per spazi topologici.
- (b) Enunciare il teorema di Seifert-Van Kampen per un ricoprimento con due aperti.
- (c) Usare il teorema enunciato per trovare il gruppo fondamentale della somma connessa di un toro e di un piano proiettivo reale.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due rette non incidenti e una circonferenza allacciata ad entrambe, sia X .

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) Qual è il complesso cellulare di Cayley associato al gruppo fondamentale di X ?
- (c) Il complesso cellulare del punto (b) è omotopicamente equivalente ad X ?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_3 ottenuto da $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tramite la costruzione di Cayley (complejo cellulare con una 0-cellula, una 1-cellula a , e una 2 cella con incollamento a^3). Poniamo $X = \mathbb{L}_3 \vee \mathbb{S}^1$.

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_3)$, $\pi_1(X)$ (gruppi fondamentali) e $\widetilde{\mathbb{L}_3}$ (rivestimento universale).
- (c) Determinare tutti i rivestimenti con due e tre fogli di X , discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.
- (b) Descrivere il rivestimento universale e il rivestimento universale abeliano di X .

2.6. QUARTO APPELLO.**Esercizio 1.**

- (a) Dare la definizione di gruppo fondamentale per spazi topologici.
- (b) Enunciare il teorema di Seifert-Van Kampen per un ricoprimento con due aperti.
- (c) Usare il teorema enunciato per trovare il gruppo fondamentale della somma connessa di un'otre di Klein e di un piano proiettivo reale.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due rette non incidenti e una circonferenza allacciata ad una e non all'altra, sia X .

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) Qual è il complesso cellulare di Cayley associato al gruppo fondamentale di X ?
- (c) Il complesso cellulare del punto (b) è omotopicamente equivalente ad X ?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_6 formato da una 0-cellula A , una 1-cellula a , una 2-cellula incollata secondo la relazione a^6 .

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_6)$ (gruppo fondamentale) e $\widetilde{\mathbb{L}_6}$ (rivestimento universale).
- (b) Mostrare che \mathbb{L}_6 ha solo due rivestimenti intermedi, entrambi normali, e descriverli topologicamente. Determinare gruppo fondamentale e il gruppo di automorfismi (sopra \mathbb{L}_6) di entrambi.
- (c) Detto \mathbb{M} il rivestimento con due fogli del punto (b), sia X la somma puntata di \mathbb{M} e di \mathbb{S}^1 . Determinare gruppo fondamentale, rivestimenti con 2 e 3 fogli, rivestimento universale e abeliano universale di X .

3. Anno accademico 2013/14.

3.1. PRIMA PROVA PARZIALE.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici, di retratto di deformazione e retratto di deformazione forte di uno spazio topologico.
- (b) Dare un esempio di due spazi non omeomorfi di cui uno sia retratto di deformazione forte dell'altro.
- (c) Dare un esempio di due spazi non omeomorfi, non uno retratto di deformazione dell'altro e che siano omotopicamente equivalenti.
- (d) Dare un esempio di due spazi di cui uno sia retratto di deformazione dell'altro, ma non retratto di deformazione forte.

Esercizio 2. Consideriamo un grafo connesso e compatto Γ contenuto in \mathbb{R}^3 e il suo complementare $X = \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$.

- (a) È vero che $\pi_1(\Gamma)$ e $\pi_1(X)$ sono isomorfi (calcolarli)?
- (b) È vero o falso che Γ e X hanno lo stesso tipo di omotopia?
- (c) Trovare un complesso cellulare avente una sola 0-cellula e che abbia lo stesso tipo di omotopia di X .
- (d) Trovare un complesso cellulare che sia retratto di deformazione forte di X .

3.2. SECONDA PROVA PARZIALE.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di rivestimenti di spazi topologici, di gruppo degli automorfismi di rivestimento e descrivere le relazioni con il gruppo fondamentale della base.
- (b) Dare la definizione di rivestimento universale e il criterio di esistenza.
- (c) Dare definizione e caratterizzazioni dei rivestimenti normali.
- (d) Se Y è retratto di deformazione forte di X , mostrare che hanno lo stesso reticolo di rivestimenti, e descrivere come ottenere quelli di X dati quelli di Y .

Esercizio 2. Consideriamo il gruppo $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e si ricordi che è isomorfo a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

- (a) Determinare il complesso cellulare di Cayley X_1 associato alla presentazione $\langle a \rangle / \langle a^6 \rangle$ e il reticolo dei rivestimenti.
- (b) Determinare il complesso cellulare di Cayley X_2 associato a $\langle a, b \rangle / \langle a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ e il reticolo dei rivestimenti.
- (c) Determinare gruppo fondamentale e il reticolo dei rivestimenti dello spazio prodotto $Y = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{L}_3$.
- (d) Che relazioni (inclusioni, morfismi, omotopie) vi sono tra i tre spazi precedenti?

3.3. PRIMO APPELLO.**Esercizio 1.**

- (a) Dare la definizione di omotopia tra funzioni continue tra spazi topologici e di equivalenza omotopica per spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di retratti di deformazione e di deformazione forte. Esibire un esempio di due spazi omotopicamente equivalenti, ma non uno retratto dell'altro.
- (c) Un toro e un'otre di Klein non sono omotopicamente equivalenti (perché?), e trovare i massimi sottinsiemi dell'uno e dell'altro che siano omotopicamente equivalenti.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due circonference con un punto comune.

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione un grafo?
- (c) È vero che X ha come retratto di deformazione un complesso cellulare?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_3 ottenuto da $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tramite la costruzione di Cayley (complesso cellulare con una 0-cellula, una 1-cellula a , e una 2 cella con incollamento a^3). Poniamo $X = \mathbb{L}_3 \vee \mathbb{S}^1$.

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_3)$, $\pi_1(X)$ (gruppi fondamentali) e $\widetilde{\mathbb{L}_3}$ (rivestimento universale).
- (b) Descrivere il rivestimento universale e il rivestimento universale abeliano di X .
- (c) Determinare tutti i rivestimenti con due e tre fogli di X , discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.

3.4. SECONDO APPELLO.**Esercizio 1.**

- (a) Dare la definizione di rivestimento tra spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di rivestimento universale e il criterio di esistenza.
- (c) Dare definizione e caratterizzazioni di rivestimento normale.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due circonference con due punti in comune.

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) Qual è il complesso cellulare di Cayley associato al gruppo fondamentale di X ?
- (c) Il complesso cellulare del punto (b) è omotopicamente equivalente ad X ?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_4 ottenuto da $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tramite la costruzione di Cayley (complesso cellulare con una 0-cellula, una 1-cellula a , e una 2 cella con incollamento a^4). Poniamo $X = \mathbb{L}_4 \vee \mathbb{S}^1$.

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_4)$, $\pi_1(X)$ (gruppi fondamentali) e $\widetilde{\mathbb{L}_4}$ (rivestimento universale).
- (b) Descrivere il rivestimento universale e il rivestimento universale abeliano di X .
- (c) Determinare tutti i rivestimenti con due e tre fogli di X , discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.

3.5. TERZO APPELLO.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di omotopia tra funzioni continue tra spazi topologici e di equivalenza omotopica per spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di retratti di deformazione e di deformazione forte.
- (c) È vero o falso che la sfera e il piano proiettivo ai quali sia tolto un punto sono omotopicamente equivalenti? Se possibile scrivere esplicitamente delle retrazioni verso un punto.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due ellissi con tre punti in comune.

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) Qual è il complesso cellulare di Cayley associato al gruppo fondamentale di X ?
- (c) Il complesso cellulare del punto (b) è omotopicamente equivalente ad X ?

Esercizio 3. Consideriamo l'unico rivestimento M con due fogli dello spazio \mathbb{L}_4 (ottenuto da $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tramite la costruzione di Cayley: complesso cellulare con una 0-cellula, una 1-cellula a , e una 2-cellula con incollamento a^4). Poniamo $X = M \vee \mathbb{S}^1$.

- (a) Determinare $\pi_1(M)$, $\pi_1(X)$ (gruppi fondamentali) e \tilde{M} (rivestimento universale).
- (b) Descrivere il rivestimento universale e il rivestimento universale abeliano di X .
- (c) Determinare tutti i rivestimenti con due e quattro fogli di X , discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi.

3.6. QUARTO APPELLO.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di gruppo fondamentale per spazi topologici.
- (b) Enunciare il teorema di Seifert-Van Kampen per un ricoprimento con due aperti.
- (c) Usare il teorema enunciato per trovare il gruppo fondamentale della somma connessa di due piani proiettivi reali.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte le tre rette sui lati di un triangolo.

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) Qual è il complesso cellulare di Cayley associato al gruppo fondamentale di X ?
- (c) Il complesso cellulare del punto (b) è omotopicamente equivalente ad X ?

Esercizio 3. Consideriamo i due rivestimenti M ed N con due e tre fogli rispettivamente dello spazio \mathbb{L}_6 (ottenuto da $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tramite la costruzione di Cayley: complesso cellulare con una 0-cellula, una 1-cellula a , e una 2-cellula con incollamento a^6). Poniamo $X = M \vee N$.

- (a) Determinare $\pi_1(M)$, $\pi_1(N)$ e $\pi_1(X)$ (gruppi fondamentali).
- (b) Descrivere il rivestimento universale e i rivestimenti abeliani di X .
- (c) Determinare tutti i rivestimenti fino a sei fogli di X , discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi. Tra questi esistono rivestimenti non normali con gruppo di automorfismi non banale?

3.7. QUINTO APPELLO.**Esercizio 1.**

- (a) Dare la definizione di rivestimento tra spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di rivestimento universale e il criterio di esistenza.
- (c) Dare definizione e caratterizzazioni di rivestimento normale.

Esercizio 2.

- (a) Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due circonferenze semplicemente allacciate:



Mostrare che si deforma ad una coppia di tori opportunamente incollati e determinare

il gruppo fondamentale.

- (b) Si consideri lo spazio Y formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due circonferenze doppiamente allacciate:



Mostrare che si deforma ad una coppia di tori opportunamente incollati e determinare

il gruppo fondamentale.

- (c) Descrivere i complessi cellulari associati ai gruppi fondamentali di X e Y . Sono omotopicamente equivalenti a X e Y (risp.)?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_8 (ottenuto da $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tramite la costruzione di Cayley: complesso cellulare con una 0-cellula, una 1-cellula a , e una 2-cellula con incollamento a^8).

- (a) Determinare tutti i rivestimenti di \mathbb{L}_8 e i loro gruppi fondamentali.
- (b) Determinare gruppo fondamentale e rivestimento universale dello spazio X somma puntata dei due rivestimenti intermedi di \mathbb{L}_8 .
- (c) Determinare tutti i rivestimenti abeliani di X . Trovare il minimo rivestimento non normale con gruppo di automorfismi non banale.

4. Anno accademico 2014/15.

4.1. PRIMO APPELLO.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di omotopia tra funzioni continue e di equivalenza omotopica tra spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di retratti di deformazione e di deformazione forte. Esibire un esempio di uno spazio e un suo sottospazio non retratto di deformazione che siano omotopicamente equivalenti.
- (c) Si consideri la mappa $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (rivestimento universale); è vero o falso che è nullomotopa?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte due circonferenze disgiunte e non allacciate.

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione un complesso cellulare (descriverne uno)?
- (c) È vero che X ha come retratto di deformazione un grafo?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio X ottenuto come somma puntata (sullo stesso punto) di tre piani proiettivi reali.

- (a) Determinare $\pi_1(X)$ e \tilde{X} (rivestimento universale).
- (b) Descrivere il rivestimento abeliano universale e tutti i rivestimenti abeliani di X .
- (c) Quanti rivestimenti esistono con 3 fogli, e ve ne sono di normali? Esistono rivestimenti normali non abeliani con 4 fogli?

4.2. SECONDO APPELLO.

Esercizio 1.

- (a) Dare la definizione di rivestimento tra spazi topologici.
- (b) Descrivere le relazioni tra i gruppi fondamentali di uno spazio e dei suoi rivestimenti.
- (c) Siano $X' \rightarrow X$ una funzione continua, $Y \rightarrow X$ un rivestimento e $Y' = X' \times_X Y$ il prodotto fibrato. Mostrare che Y' è un rivestimento di X' , e descrivere il gruppo fondamentale di Y' noti quelli di X, X', Y .

Esercizio 2. Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolte le tre semirette da P verso Q , da Q verso R , da R verso P dove P, Q, R sono i tre vertici di un triangolo.

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione un complesso cellulare (descriverne uno)?
- (c) È vero che X ha come retratto di deformazione un grafo?

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio X ottenuto come somma puntata di un piano proiettivo reale e di una circonferenza.

- (a) Determinare $\pi_1(X)$ e \tilde{X} (rivestimento universale).
- (b) Descrivere il rivestimento abeliano universale e tutti i rivestimenti abeliani di X .
- (c) Quanti rivestimenti esistono con 3 fogli, e ve ne sono di normali? Esistono rivestimenti normali non abeliani con 4 fogli?

4.3. TERZO APPELLO.**Esercizio 1.**

- (a) Dare la definizione di omotopia tra funzioni continue tra spazi topologici e di contraibilità per spazi topologici.
- (b) Dare la definizione di retratti di deformazione e di deformazione forte. È vero che spazi contraibili sono retratti di deformazione (ev. forte) di ogni loro punto?
- (c) Determinare il più grande sottinsieme contraibile di una somma connessa di n tori.

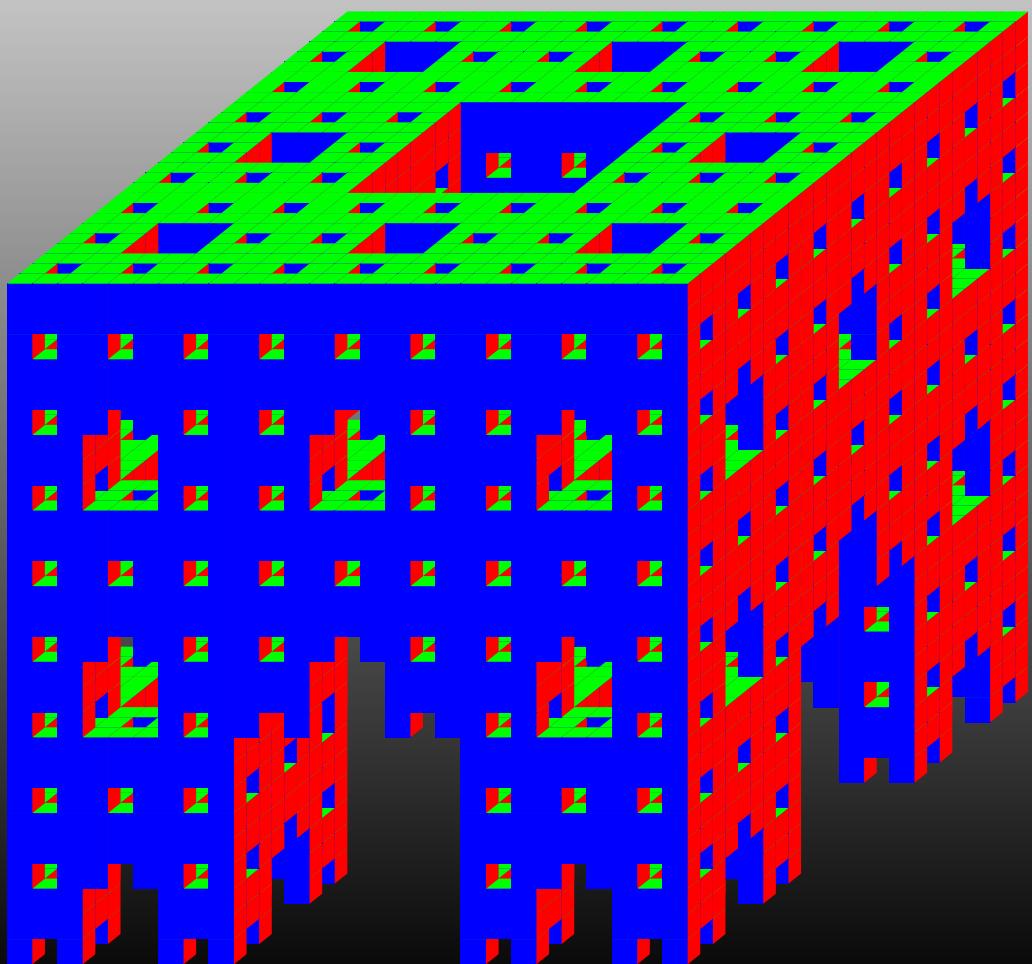
Esercizio 2. Si consideri lo spazio X formato da \mathbb{R}^3 a cui sono tolti i tre semiassi positivi e i tre segmenti che uniscono i tre punti unità su tali semiassi.

- (a) Determinare il gruppo fondamentale di X .
- (b) È vero che X ha come retratto di deformazione un complesso cellulare (descriverne uno)? È vero che X ha come retratto di deformazione un grafo?
- (c) Descrivere tutti i rivestimenti con due fogli dei retratti del punto precedente.

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio \mathbb{L}_3 formato da una 0-cellula A , una 1-cellula a , una 2-cellula incollata secondo la relazione a^3 .

- (a) Determinare $\pi_1(\mathbb{L}_3)$ (gruppo fondamentale) e $\tilde{\mathbb{L}}_3$ (rivestimento universale).
- (b) Determinare il gruppo fondamentale, il rivestimento abeliano universale, e tutti i rivestimenti abeliani di $\mathbb{P}^2 \vee \mathbb{L}^3$ (somma puntata di un piano proiettivo reale e di \mathbb{L}^3).
- (c) Determinare i rivestimenti finiti di $\mathbb{P}^2 \vee \mathbb{L}^3$, discutendone la normalità e il gruppo di automorfismi, fino al minimo numero di fogli per cui esista un rivestimento non normale con gruppo di automorfismi non banale.

Castello Sospeso



Torre Archimede