Ciclo di una permutazione, l-ciclo

www.baudo.hol.es

June 12, 2017

1 DEFINIZIONE (1)

Per ciclo di una permutazione si intende il nome della notazione utilizzata per rappresentare una permutazione.

2 DEFINIZIONE (2)

Sia n un intero positivo. Si dice ciclo (o permutazione ciclica) ogni $\sigma \in S_n$ per cui esistono un intero positivo l e $a_1, ..., a_l \in \{1, ..., n\}$ a due a due distinti tali che

- $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, ..., \sigma(a_l) = a_1$;
- $\sigma(k) = k$ per ogni $k \in \{1, ..., n\} \setminus \{a_1, ..., a_l\}$.

Il numero l si dice lunghezza di σ. Una permutazione ciclica di lunghezza l si dice anche l-ciclo.

3 DEFINIZIONE (3)

Sia r un intero positivo, $2 \leq r \leq n$ e siano dati r elementi distinti $i_1, i_2, ..., i_r \in X = \{1, 2, ..., n\}$. Col simbolo $\gamma = (i_1 i_2 ... i_r)$ si denoti la permutazione $\gamma \in S_n$ tale che:

1. $\gamma(i_k) = i_k$ se $i_k \notin \{i_1, i_2, ..., i_r\}$
2. $\gamma(i_k) = i_{k+1}$ se $1 \leq k \leq r - 1$
3. $\gamma(i_r) = i_1$

Tale permutazione è detta ciclo di lunghezza r. Se il ciclo ha lunghezza 2 viene detto trasposizione o scambio.

3.1 NOTE

Il solo ciclo di lunghezza 1 è la permutazione identica.

Il ciclo di lunghezza 2 è detto trasposizione o scambio.

La scrittura ciclica di un l-ciclo non è unica. Se $l > 1$, il ciclo ammette esattamente l scritture cicliche distinte, ottenute tramite rotazioni successive degli indici verso sinistra.

4 NOTAZIONE

Un ciclio è una lista di indici fra parentesi, e conveniamo che rappresenti la permutazione che associa a ogni indice nel ciclo quello successivo.

5 ESEMPIO

Ad esempio, il ciclo

$$(12345)$$

rappresenta la permutazione che manda 1 in 2, 2 in 3 e così via fino a 5 in 1. Due cicli sono disgiunti se non hanno lettere in comune. Per esempio, (123) e (45) sono disgiunti, ma (123) e (124) no.

6 COMPOSIZIONE DI PERMUTAZIONI = PRODOTTO DI CICLI

Per scrivere la composizione di permutazioni rappresentate da cicli, basta scrivere i cicli di seguito.

Non è difficile calcolare la permutazione risultante da una composizione di cicli: basta, per ogni lettera, "seguire il suo destino" lungo i vari cicli. Per esempio,

$$(123)(135)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Come abbiamo fatto il conto? Cominciamo da 1: il primo ciclo manda 1 in 2, il secondo non tocca il 2, il terzo manda 2 in 4: concludiamo che i tre cicli mandano 1 in 4. Il primo ciclo manda 2 in 3, il secondo 3 in 5, e il terzo non tocca 5: concludiamo che i tre cicli mandano 2 in 5, e così via. Notate che alla fine del conto c'è un controllo di coerenza molto semplice: tutti i numeri nella seconda riga devono essere distinti.

7 APPRFONDIMENTI

- DISPENSA: Orbite e cicli di una permutazione [**?**]
- DISPENSA: Permutazioni [**?**]