A.A. 2014/2014
Corso di Algebra Lineare

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

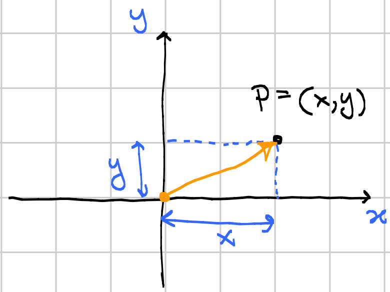
ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 01

Titolo nota 02/10/2013

1. Uso dei vettori in geometria (geom. analitica)
2. Sistemi lineari
3. Spazi vettoriali e applicazioni lineari
4. Prodotti scalari e forme quadratiche

$\left.\right\}$ MATRICI

PIANO CARTESIANO



I punti del piano cartesiano possono essere pensati come VETTORI.
A questo punto sono definite 2 operazioni
- somma di 2 vettori

$$\vec{V} = (x_1, y_1) \qquad \vec{W} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{V} + \vec{W} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

- prodotto di un vettore per un numero $\quad \vec{V} = (x_1, x_2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$ ← numero reale

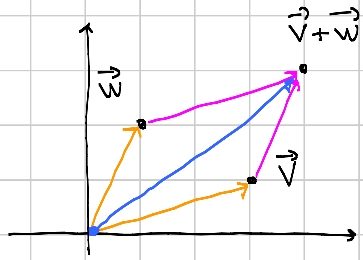
$$\lambda \vec{V} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

Significato geometrico:

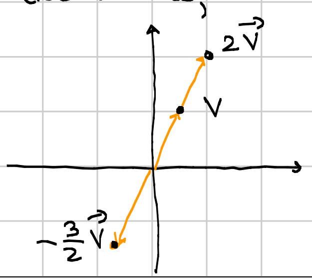
$V = (3,1)$

$W = (1,2)$

$V + W = (4,3)$



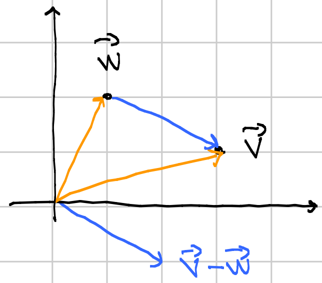
- somma = regola del parallelogramma
- prodotto per λ = moltiplicare per λ la lunghezza del vettore, conservando la direzione e invertendo o no il verso a seconda del segno di λ



Differenza di 2 vettori $\vec{v} - \vec{w} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
$= \vec{v} + (-1)\vec{w}$

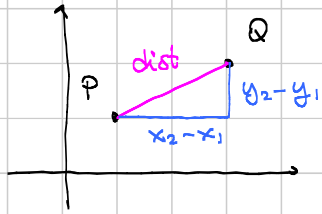
$\vec{v} = (3,1)$ $\vec{v} - \vec{w} = (2,-1)$
$\vec{w} = (1,2)$

$\vec{v} = \vec{w} + (\vec{v} - \vec{w})$



Distanza tra 2 punti (2 vettori)

$P = (x_1, y_1)$ $\text{dist}(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
$Q = (x_2, y_2)$



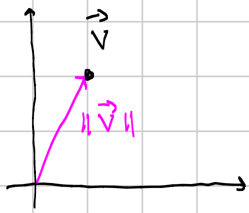
Norma di un vettore

$\vec{v} = (x_1, y_1)$

La norma di $\vec{v}$, che si indica con $\| \vec{v} \|$ o anche solo $|\vec{v}|$ è il numero (reale ≥ 0):

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

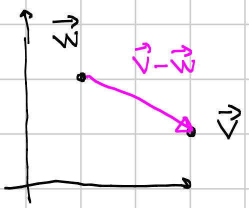
= lunghezza del vettore $\vec{v}$ pensato applicato nell'origine

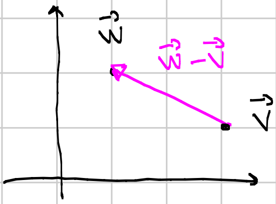


Relazione tra norma e distanza

$\text{dist}(\vec{v}, \vec{w}) = \| \vec{v} - \vec{w} \|$
$= \| \vec{w} - \vec{v} \|$

La norma di un vettore $\vec{v}$ è sempre uguale alla norma di $-\vec{v}$





<u>Prodotto scalare</u> $\vec{v} = (x_1, y_1)$ $\vec{w} = (x_2, y_2)$

Si definisce prodotto scalare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e si indica con $\vec{v} \bullet \vec{w}$ oppure $<\vec{v}, \vec{w}>$, il numero reale

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = <\vec{v}, \vec{w}> = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

INPUT: 2 vettori
OUTPUT: numero, cioè uno scalare.

<u>Relazione tra norma e prodotto scalare</u>

Sia $\vec{v} = (x_1, x_2)$. Allora

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = <\vec{v}, \vec{v}> = x_1^2 + x_2^2 = \|\vec{v}\|^2$$

<u>Esercizio</u> $(\vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u} = <\vec{v} + \vec{w}, \vec{u}>$

$\vec{v} = (x_1, y_1)$ $\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$\vec{w} = (x_2, y_2)$
$\vec{u} = (x_3, y_3)$ $(\vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u} = (x_1 + x_2) \cdot x_3 + (y_1 + y_2) \cdot y_3$

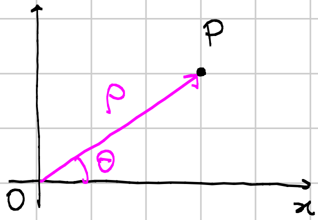
$$= \boxed{x_1 x_3} + \boxed{x_2 x_3} + \boxed{y_1 y_3} + \boxed{y_2 y_3}$$

$$= \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{w} \bullet \vec{u}$$

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 02

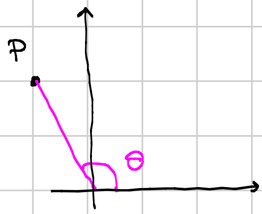
Titolo nota 02/10/2013

Piano cartesiano come vettori:
- somma
- prodotto di un vettore per un numero
- prodotto scalare → norma → distanza



Coordinate polari nel piano

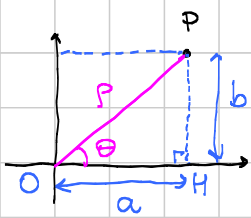
Un punto P si può univocamente determinare dati
- la sua distanza ρ dall'origine (cioè la sua norma pensandolo come vettore
- l'angolo θ che la retta $\vec{OP}$ forma con il semiasse positivo delle x.



Nota:
- $\rho \geq 0$ sempre e $\rho = 0$ se e solo se $P = O$
- θ è un angolo, quindi definito a meno di multipli di 2π
- Il θ di $P = O$ non è ben definito

Formule di passaggio

1° caso Note le coordinate polari ρ e θ di P, come trovo le coordinate cartesiane a e b?



$$\boxed{a = \rho \cos\theta \qquad b = \rho \sin\theta}$$

Precorso nel triangolo rettangolo OPH

2° caso Note le coord. cartesiane a e b, come trovo ρ e θ?

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$ Pitagora!

θ : guardare il disegno!!!

$a = \rho \cos\theta$, $b = \rho \sin\theta$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{se}}$ posso dividere ottengo

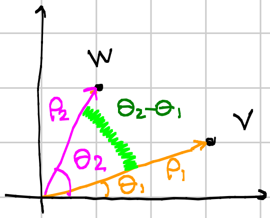
$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad \text{quindi} \qquad \boxed{\tan\theta = \frac{b}{a}} \quad \text{se } a \neq 0$$

Come ricavare θ nota la sua tangente dipende dal quadrante in cui siamo (NON basta fare arctan: vedi Analisi 1).

— o — o —

Significato geometrico del prodotto scalare (parte 1)

$\vec{v} = (x_1, y_1)$ $\qquad$ $\vec{w} = (x_2, y_2)$



$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Scrivo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in coordinate polari

$\vec{v} = (\rho_1 \cos\theta_1, \rho_1 \sin\theta_1)$ $\qquad$ $\vec{w} = (\rho_2 \cos\theta_2, \rho_2 \sin\theta_2)$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= \rho_1 \rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \rho_1 \rho_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) \qquad \text{PRECORSO!!} \\ &= \underbrace{\rho_1}_{\|\vec{v}\|} \underbrace{\rho_2}_{\|\vec{w}\|} \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

In conclusione $\qquad \boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\text{angolo compreso})}$

Conseguenza $\quad$ Se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ allora ci sono 2 casi

① o uno dei 2 vettori è nullo

② o $\cos(\text{angolo compreso}) = 0$, cioè angolo $= \pm \frac{\pi}{2}$
cioè i 2 vettori sono perpendicolari

In particolare se $\vec{v} = \vec{w}$, allora angolo $= 0$, quindi $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|^2$.

Il prodotto scalare è distributivo rispetto alla somma

$$\langle \vec{V}+\vec{W}, \vec{U} \rangle = \vec{V}\cdot\vec{U} + \vec{W}\cdot\vec{U}$$

Altra proprietà: $\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = \langle \vec{W}, \vec{V} \rangle$ (verificarla!)

$$\langle \vec{V}+\vec{W}, \vec{A}+\vec{B} \rangle = \langle \vec{V}, \vec{A}+\vec{B} \rangle + \langle \vec{W}, \vec{A}+\vec{B} \rangle$$
$$= \langle \vec{V}, \vec{A} \rangle + \langle \vec{V}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{W}, \vec{A} \rangle + \langle \vec{W}, \vec{B} \rangle$$

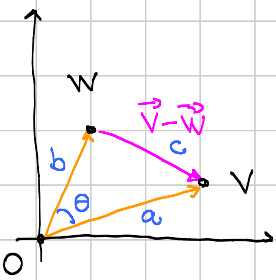
In particolare

$$\|\vec{V}+\vec{W}\|^2 = \langle \vec{V}+\vec{W}, \vec{V}+\vec{W} \rangle$$
$$= \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle + \underbrace{\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle + \langle \vec{W}, \vec{V} \rangle}_{\text{uguali}} + \langle \vec{W}, \vec{W} \rangle$$
$$= \|\vec{V}\|^2 + 2\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle + \|\vec{W}\|^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \|\vec{V}+\vec{W}\|^2 &= \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{W}\|^2 + 2\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle \\ \|\vec{V}-\vec{W}\|^2 &= \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{W}\|^2 - 2\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle \end{aligned}}$$

Interpretazione geometrica del prodotto scalare (parte 2)

Teorema di Carnot (teorema del coseno)



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$ Precorso

In linguaggio vettoriale:

$$\overset{c^2}{\|V-W\|^2} = \overset{a^2}{\cancel{\|V\|^2}} + \overset{b^2}{\cancel{\|W\|^2}} - \cancel{2}\,\overset{a}{\|V\|}\cdot\overset{b}{\|W\|}\cdot\cos\theta$$
$$= \cancel{\|V\|^2} + \cancel{\|W\|^2} - \cancel{2}\langle V, W \rangle$$

Quindi $\boxed{\langle V, W \rangle = \|V\|\cdot\|W\|\cdot\cos\theta}$

<u>Conseguenza 1</u>

norme di un vettore

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot |\cos\theta| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

valore assoluto di un numero

Quindi $\boxed{|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|}$

<u>Esercizio</u> Esprimere il prodotto scalare in funzione della norma

$$\boxed{\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\left[\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right]}$$

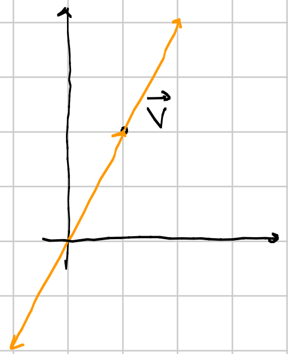
Fare la verifica !!!

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 03

Titolo nota 02/10/2013

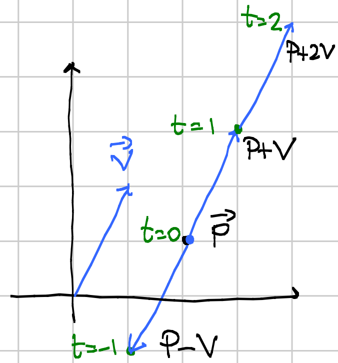
Utilizzo geometrico dei vettori nel piano

Situazione semplice: Dato $\vec{v}$ vettore nel piano, cosa rappresenta $t\vec{v}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$?



Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ ← vettore nullo (origine)
ottengo tutta la retta passante per l'origine la cui direzione è descritta da $\vec{v}$.

Brutalmente, posso pensare ad un omino che al tempo t si trova nel punto $t\vec{v}$ (l'omino percorre la retta).
Il vettore $\vec{v}$ è la velocità (costante) dell'omino.



Altro esempio: cosa rappresenta

$$P + tV \quad \text{al variare di } t$$

($t \in \mathbb{R}$; P, V: 2 vettori dati)

$t=0 \rightsquigarrow \vec{P}$

$t=1 \rightsquigarrow \vec{P}+\vec{V}$

$t=2 \rightsquigarrow \vec{P}+2\vec{V}$

Brutalmente, posso pensare ad un omino che al tempo $t=0$ sta in P e poi si muove lungo la retta passante per P con velocità data dal vettore $\vec{v}$.

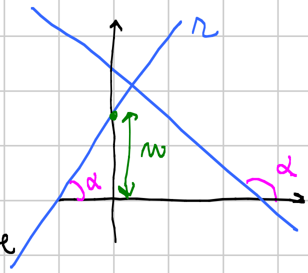
Oss. Tutto questo si può pensare in coordinate

$\vec{P} = (x_1, x_2)$

$\vec{V} = (v_1, v_2)$

$$\vec{P} + t\vec{V} = (x_1 + tv_1,\ x_2 + tv_2)$$

Equazioni di una retta (modi di descrivere una retta)



① $\boxed{y = mx + n}$ $m = \tan\alpha$
$= \text{coeff. angolare}$

Vantaggi:
→ m ed n sono determinati univocamente dalla retta (per ogni retta c'è un solo m ed un solo n possibile)

Svantaggi:
→ questa eq. non descrive le rette // asse y.

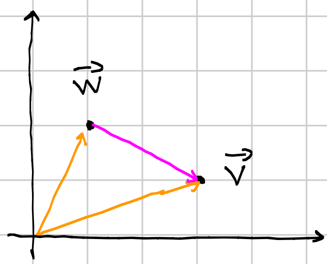
② $\boxed{ax + by + c = 0}$ Vantaggi:
→ tutte le rette hanno eq. di questo tipo
Svantaggi:
→ a, b, c non sono univoc. determinati (posso molt. tutto per $\lambda \neq 0$)
→ a o b devono essere NON entrambi nulli

③ $\boxed{\vec{P} + t\vec{V} \text{ al variare di } t \in \mathbb{R}}$ con $\vec{P}$ e $\vec{V}$ vettori dati

Ancora una volta $\vec{P}$ e $\vec{V}$ non sono univocamente determinati, ma così si descrivono tutte le rette.

— o — o —

Descrizione di un segmento

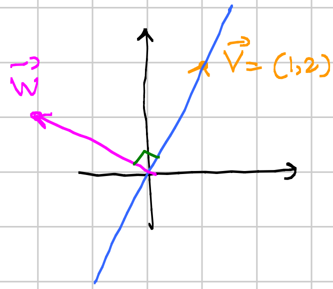


Serve un omino che per $t = 0$ sta in $\vec{W}$ e poi si muove nella direzione congiungente

In formule: $\boxed{\vec{W} + t(\vec{V} - \vec{W}) \quad t \in [0, 1]}$

$t = 0 \rightsquigarrow \vec{W}$ Al tempo t abbiamo percorso la frazione t della strada

Più in generale $\boxed{\vec{w} + t(\vec{v} - \vec{w}) \quad t \in \mathbb{R}}$ rappresenta la retta passante per $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (se $\vec{v} \neq \vec{w}$)



Esempio 1 (retta per l'origine) $y = 2x$

In forma vettoriale $\vec{v} = (1,2)$
la retta è $t\vec{v} = (t, 2t)$

$x = t$

$y = 2t$

Altro modo: $-2x + y = 0$ $\quad \vec{w} = (-2,1)$

$\vec{Q} = (x, y)$

L'equazione implicita $-2x + y = 0$ è equivalente a

$$\langle \vec{w}, \vec{Q} \rangle = 0$$

fisso   generico p.to della retta

Questo dice che il generico punto Q della retta è perpendicolare a $\vec{w}$.

Più in generale: una retta per l'origine ha un'eq. del tipo

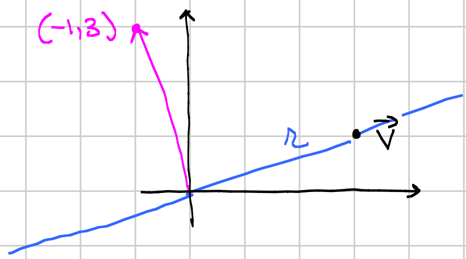
$$ax + by = 0$$

Questa si può vedere come prodotto scalare tra $\vec{w} = (a,b)$ ed il vettore $\vec{Q} = (x,y)$. Quindi i p.ti della retta sono tutti e soli i punti del piano che, pensati come vettori) sono $\perp$ a $\vec{w}$

— o — o —

Esempio 2 Consideriamo $\vec{v} = (3,1)$ e la retta $t\vec{v}$.

Scrivere l'eq. negli altri modi



$t\vec{v} = (3t, t)$ $x = 3t$, $y = t$

$y = \frac{1}{3} x$

Un vettore $\perp$ ad (a,b) è $(-b, a)$. Il prodotto scalare diventa

$$a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$$

La retta è costituita da tutti i p.ti perpendicolari a $\vec{W} = (-1,3)$, cioè i p.ti $\vec{Q} = (x,y)$ t.c. $\underbrace{-x+3y}_{\vec{W} \bullet \vec{Q}} = 0$, cioè $y = \frac{1}{3} x$.

Esempio 3 Scrivere la retta passante per $(257, 126)$ e perpendicolare alla retta r di prima

Devo pensare ad un omino che parte da $\vec{P} = (257,126)$ al tempo $t=0$ e che si muove in direzione $\perp$ a $\vec{v}$, cioè in direzione $\vec{W} = (-1,3)$.

La retta diventa $\vec{P} + t\vec{W} = (257, 126) + t\,(-1,3)$
$= (257-t,\ 126+3t)$

volendo $x = 257 - t$ $y = 126 + 3t$.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 04

Titolo nota 04/10/2013

Sistemi lineari

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-2y=3 \end{cases}$$ 2 equazioni – 2 incognite: x, y

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=6 \\ x-y+z=3 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$$ 3 equazioni in 3 incognite: x, y, z

In generale si possono considerare sistemi di m equazioni in n incognite: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Le singole equazioni devono contenere solo somme di multipli delle incognite, cioè devono essere del tipo

$$\boxed{a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n} = \boxed{b} \leftarrow \text{termine noto}$$

COMBINAZIONE LINEARE delle incognite: si intende che $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono numeri dati

Nomenclatura Un sistema lineare (m eq., n incognite) si dice

- OMOGENEO se tutti i termini noti sono $=0$
- NON OMOGENEO se almeno un termine noto è $\neq 0$.

Esempi
$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-2y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y+6+3y=4 \\ x=2y+3 \end{cases} \quad \begin{cases} 7y=-2 \\ x=2y+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{2}{7} \\ x=-\frac{4}{7}+3=\frac{17}{7} \end{cases}$$

Il sistema ammette soluzione UNICA $(x,y)=\left(-\frac{2}{7}, \frac{17}{7}\right)$

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+6y=7 \end{cases} \rightsquigarrow 2x=4-3y \quad \text{sostituisco nella } 2^a$$

$$\underbrace{\boxed{8-\cancel{6y}}}_{2x}+\cancel{6y}=7 \qquad \boxed{8=7}$$

Il sistema NON ha soluzioni !!! Si poteva vedere subito! $4x+6y$ è il doppio di 4, ma 7 non è il doppio di 4.

$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ -4x + 2y = -16 \end{cases} \rightsquigarrow \quad y = 2x - 8 \quad \text{sostituisco nella } 2^a \text{ e ottengo}$$

$$-\cancel{4x} + \underbrace{\boxed{\cancel{4x} - 16}}_{2y} = -16 \qquad -16 = -16$$

Quindi la 2^a equazione è soddisfatta purché lo sia la prima (si vede anche da subito: la 2^a eq. è la 1^a moltiplicata per -2).
Il sistema ammette INFINITE soluzioni, e sono tutte le coppie (x,y) tali che $y = 2x - 8$ (nel piano cartesiano sarebbe una retta).
Detto ancora meglio, l'insieme delle soluzioni dipende da un parametro libero:

$$(x,y) = (t, 2t-8)$$

t è il parametro e per ogni $t \in \mathbb{R}$ la coppia $(t, 2t-8)$ risolve il sistema.

— o — o —

Riassumendo: sono apparse 3 possibilità

→ soluzione unica
→ nessuna soluzione
→ infinite soluzioni dipendenti da 1 o più parametri

— o — o —

ALGORITMO DI GAUSS

Obiettivo: come trasformare un sistema qualunque in un sistema più semplice con le stesse soluzioni.

Operazioni permesse:
1. Scambiare tra di loro 2 equazioni
2. Sostituire una equazione R_i (pensata come riga i-esima) con $a R_i + b R_j$ con $a \neq 0$

Esempio

$R_j \quad 2x + 3y - 5z = 2 \longrightarrow 2x + 3y - 5z = 2$

$R_i \quad x - 2y + 3z = 5 \longrightarrow \underset{b}{\boxed{3}} \cdot R_j + \underset{a}{\boxed{2}} R_i \rightarrow 8x + 5y - 9z = 16$

$$\underset{b}{\boxed{3}}(2x+3y-5z) + \underset{a}{\boxed{2}}(x-2y+3z) = \underset{b}{\boxed{3}} \cdot 2 + \underset{a}{\boxed{2}} \cdot 5$$

Ci sono 2 versioni dell'algoritmo di Gauss:

* versione generale: posso usare ogni $a \neq 0$ e ogni $b \in \mathbb{R}$
* versione ultraortodossa: devo usare $a = 1$ e b a scelta.

$\boxed{\text{Fatto importante}}$ Utilizzando le operazioni ① e ② il sistema viene trasformato in un sistema con le stesse soluzioni

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\begin{cases} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases} \xrightarrow{①} \begin{cases} R_j = 0 \\ R_i = 0 \end{cases}$ Non può cambiare nulla

$$\begin{cases} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases} \xrightarrow{②} \begin{cases} aR_i + bR_j = 0 \\ R_j = 0 \end{cases}$$

Se è verificato il 1°, allora è verificato il 2°.
Se è verificato il 2°, allora $R_j = 0$, ma allora $aR_i = 0$, ma allora $R_i = 0$ (qui è decisivo avere che $a \neq 0$).

— o — o —

Esempio
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 4 \quad \to 2^a - 2 \cdot 1^a \\ x + y - z = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -5y - 4z = -6 \\ x + y - z = -2 \quad \to 3^a - 1^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -5y - 4z = -6 \\ -y - 4z = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -y - 4z = -7 \\ -5y - 4z = -6 \quad \to 3^a - 5 \cdot 2^a \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -y - 4z = -7 \\ 16z = 29 \end{cases}$$

Da qui si risolve immediatamente

$$z = \frac{29}{16} \qquad -y = 4z - 7 = \frac{29}{4} - 7 = \frac{1}{4} \rightsquigarrow y = -\frac{1}{4}$$

$$x = -2y - 3z + 5 = \frac{1}{2} - \frac{87}{16} + 5 = \frac{8 - 87 + 80}{16} = \frac{1}{16}$$

L'obiettivo che si può sempre raggiungere con l'algoritmo di Gauss è di portare il sistema in una forma A SCALA:

→ nella prima equazione ci possono essere tutte le variabili

→ nelle equazioni successive, c'è sempre almeno una variabile in meno che nella precedente.

<u>Esempio</u>
$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 3x+2y-z=5 & \rightsquigarrow 2^a-3\cdot 1^a \\ 2x-y=6 & \rightsquigarrow 3^a-2\cdot 1^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ -y+8z=5 \\ -3y+6z=6 & \to 3^a-3\cdot 2^a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-3z=0 \\ -y+8z=5 \\ -18z=-9 \end{cases}$$

$$z=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}, \quad y=8z-5=4-5=-1, \quad x=3z-y=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},-1,\frac{5}{2}\right).$$

—o —o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 5

Titolo nota 04/10/2013

$\boxed{\text{MATRICI}}$ Una matrice è una tabella rettangolare di numeri

Esempio

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} c1 & c2 & c3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{riga } 1 \\ \leftarrow \text{riga } 2 \end{array} \end{array}$$

Si indica con $M_{m \times n}$ l'insieme delle matrici con m righe e n colonne.

La matrice dell'esempio sta in $M_{2\times3}$.

Gli elementi di una matrice si indicano con $\boxed{a_{ij}}$ riga i, colonna j.

Nell'esempio $a_{2,2} = \frac{1}{2}$ $a_{2,3} = 4$ $a_{3,2}$ NON ESISTE

Operazioni tra matrici

* Somma di matrici: si può fare tra matrici con le stesse dimensioni e si fa termine a termine.

Più formalmente: $A \in M_{m\times n}$ $A = \{a_{ij}\}$

$B \in M_{m\times n}$ $B = \{b_{ij}\}$

Allora

$$A+B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$$

* Prodotto di una matrice per un numero: si fa moltiplicando tutti gli elementi per quel numero.

Formalmente: $A \in M_{m\times n}$ $A = \{a_{ij}\}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = \{\lambda a_{ij}\} \in M_{m\times n}$$

Casi speciali di matrice

- $m = 1$ si ottengono i vettori riga, del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}$
- $n = 1$ si ottengono i vettori colonna, del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}$
- $m = n = 1$ è un numero singolo $(\sqrt{2}) \in M_{1\times 1}$.

Trasposta di una matrice: data una matrice $A \in M_{m\times n}$, si definisce trasposta di A la matrice $A^t \in M_{\boxed{n\times m}}$ scambiati
la matrice ottenuta scambiando
tra di loro le righe e le colonne di A.
Formalmente: $A = \{a_{ij}\}$ $\quad A^t = \{a_{ji}\}$

Esempio $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Occhio: talvolta la trasposta si può trovare indicata A^T, ${}^TA$, ${}^tA$.

—o—o—

PRODOTTO TRA MATRICI

Siano date due matrici $A \in M_{m\times n}$
$B \in M_{n\times k}$ IMPORTANTE: colonne della prima = righe della 2ª

Il prodotto di A e B è la matrice

$$C = AB \in M_{m\times k}$$

così definita:

se $A = \{a_{ij}\}$ $\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$ $\qquad B = \{b_{ij}\}$ $\begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k \end{matrix}$

allora
$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Esempio 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$

Posso fare AB ? No! Colonne 1ª ≠ Righe 2ª

Posso fare B·A ? Sì! Colonne 1ª (B) = Righe 2ª (A)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{2\cdot 1+3\cdot 4}{14} & \overset{2\cdot 2+3\cdot 5}{19} & 24 \\ 32 & 43 & 54 \end{pmatrix} \leftarrow 2\cdot 3+3\cdot 6$$

Detto altrimenti, l'elemento c_{ij} del prodotto, si ottiene facendo una specie di prodotto scalare fra la riga i-esima della 1ª e la colonna j-esima della seconda.

Osservazione Le matrici quadrate si possono sempre moltiplicare per se stesse (anzi sono le sole con questa proprietà)

$$B\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 27 \\ 36 & 61 \end{pmatrix} = B^2$$

Caso speciale Posso moltiplicare una matrice $A \in M_{m\times n}$ per un vettore colonna $v \in M_{n\times 1}$

Ottengo come risultato un altro vettore colonna

$Av \in M_{m\times 1}$

Esempio

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}\underset{v}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 3+3\cdot 2 \\ 4\cdot(-1)+5\cdot 3+6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y \\ x-3y \end{pmatrix}$$

FLASH BACK

La parte sx di un sistema lineare è il prodotto tra una matrice di numeri (i coeff. del sistema) ed un vettore colonna di incognite.
La parte dx di un sistema lineare è un vettore colonna di numeri (i termini noti).

La matrice ha
→ tante righe quante sono le equazioni
→ tante colonne quante sono le incognite, cioè tante quante le righe del vettore colonna delle incognite

Esempio
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Lo posso scrivere come $A\vec{x} = \vec{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Una matrice a scala è una matrice in cui tutte le righe dopo la 1a hanno degli zeri iniziali. Ogni riga ha almeno uno zero in più della riga precedente.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE

Titolo nota 09/10/2013

Sistemi lineari (rivisitati)

m equazioni del tipo. L'i-esima equazione è qualcosa del tipo

$$\boxed{a_{i1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n = b_i}$$

In forma compatta si può scrivere come $\boxed{Ax = b}$ dove

$A = (a_{ij})$ è la matrice dei coeff., $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è il vettore colonna dei termini noti.

Algoritmo di Gauss: trasforma il sistema in un sistema equivalente (con le stesse soluzioni), sperabilmente più semplice.

Operazioni consentite:

① $R_i \leftrightarrow R_j$ ② $R_i \rightsquigarrow a R_i + b R_j$

↪ $a = 1$ (versione ultraortodossa)

↪ $a \neq 0$ (versione generalizzata)

Le operazioni si possono fare direttamente sulla matrice, $\boxed{\text{MA}}$ devo ripetere le stesse operazioni anche sulla colonna dei termini noti.

Più comodamente, costruisco una matrice "aggiungendo ad A la colonna dei termini noti" e poi opero alla Gauss su quella $\bar{A} = (A \mid b)$

Esempio
$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ x - y - z = 5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\bar{A} =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 7 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -3y - 3z = 7 \\ 2z = -1 \end{cases}$$

e si risolve

<u>Osservazione</u> L'algoritmo di Gauss è la classica sostituzione.
Se io dalla prima equazione ricavo x: $2x = -y - z - 3$

$$x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}$$

Se vado a sostituire nella 2^a e nella 3^a ottengo un nuovo sistema in cui non c'è più la x. È lo stesso ottenuto con Gauss in versione ultraortodossa.

<u>Obiettivo dell'alg. di Gauss</u> è portare il sistema nella forma A SCALA: ogni riga è di questo tipo

potrebbero non esserci nelle ultime righe

$$\underbrace{0\,0\,\ldots\,0}_{\text{zeri iniziali}}\quad \underset{\neq 0}{*}\quad \underbrace{*\,*\,*\,*}_{\text{altra roba, anche }=0}$$

nella prima riga possono non esserci

Ogni riga ha un numero di zeri iniziali maggiore (anche più di uno) della riga precedente.

<u>Notazione</u>: il primo termine non nullo di una data riga si chiama PIVOT.

<u>Esempio</u>
$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 4 \\ 4x - y + 5z = 5 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right) \text{ matrice completa}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 2x + y - z = 2 \\ -3y + 7z = 6 \\ 0 = -5 \end{array}$$

Il sistema è impossibile, la matrice A (solo la matrice A) ridotta a scala è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bigcirc = \text{PIVOT}$$

Quadro generale. Se tutte le righe della matrice A ridotta a scala hanno il PIVOT, allora di sicuro il sistema ammette soluzione.

Caso particolare: prendiamo un sistema $n \times n$

① Se tutte le righe della matr. A a scala hanno il PIVOT, allora il sistema ha soluzione UNICA (dall'ultima eq. trovo x_n, poi dalla penultima trovo x_{n-1}, e così via).

② Se una o più righe in fondo non hanno il pivot, allora bisogna vedere i corrispondenti termini noti

(2.1) Se uno dei corrispondenti termini noti è $\neq 0$, vuol dire che una delle eq. è del tipo $0 =$ numero $\neq 0$ e il sistema non ha soluzione

(2.2) Se tutti i corrispondenti termini noti sono $=0$, vuol dire che il sistema ha infinite soluzioni nel senso che c'è almeno una variabile che posso assegnare a piacere e trovare di conseguenza le altre.

Esempio
$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 4 \\ 4x - y + 5z = 10 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ -3y + 7z &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Posso assegnare liberamente z:
$$z = a$$
$$-3y = 6 - 7a \qquad y = -2 + \frac{7}{3}a$$
$$2x = -y + z + 2 = 2 - \frac{7}{3}a + a + 2$$
$$= 4 - \frac{4}{3}a$$

Tradotto: $x = 4 - \frac{4}{3} a \qquad y = -2 + \frac{7}{3} a \qquad z = a$

risolve il sistema per ogni valore di a.

— o — o —

Lo stesso discorso vale per sistemi $m \times n$:

① Se tutte le colonne (cioè tutte le incognite) hanno pivot $\neq 0$ e non ci sono righe nulle in fondo, allora c'è soluzione unica

② Se ci sono righe nulle in fondo, bisogna vedere i termini noti corrispondenti

③ Quando ci sono infinite soluzioni, posso assegnare liberamente tutte le variabili senza pivot.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 07

Titolo nota 09/10/2013

$$\begin{cases} x+y-z+2u+v=2 \\ x+y-z+u-v=0 \\ x+y-z-u-2v=0 \\ x+y-z+4u+2v=2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \to 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

L'ultima riga, essendoci 0 anche tra i termini noti, è come se non ci fosse.
Ho infinite soluzioni e posso assegnare a piacere le variabili corrispondenti a colonne senza pivot, cioè y e z

$$\begin{aligned} x+y-z+2u+v &= 2 \\ -u-2v &= -2 \\ 3v &= 4 \quad \rightsquigarrow \text{trovo } v \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

trovo u

LIBERI

$x = 2\boxed{-y+z}\boxed{-2u-v}$

li conosco e li sostituisco

Esempio 2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 3x+y+4u+2v &= 1 \\ 2z+v &= 4 \\ 3v &= 1 \end{aligned}$$

trovo x con y e u liberi

trovo z

$\to$ trovo v

<u>Ultima osservazione</u> Lavorando alla Gauss posso portare la matrice in forma a scala, e questo basta per risolvere i sistemi.
Continuando a lavorare alla Gauss, potrei mettere tutti zeri anche SOPRA i pivot.

Ad esempio posso trasformare la matrice di sopra come segue:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & \boxed{0} & 12 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \boxed{0} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow 3 \cdot 1^a - 2 \cdot 3^a \\ \leftarrow 3 \cdot 2^a - 3^a \\ \end{matrix}$$

Se faccio l'ultraortodosso, non cambiano nemmeno i PIVOT.

— o — o —

<u>Esercizio 1</u> Trovare, nel piano, l'intersezione tra la retta $y = 3x+1$ e la retta $2x - 3y + 5 = 0$.

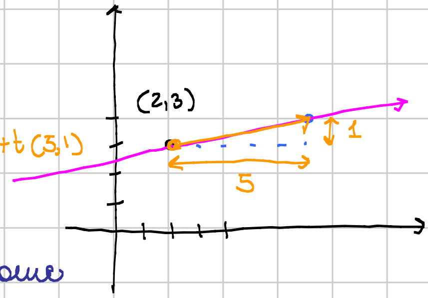
Si tratta di risolvere il sistema lineare $\begin{cases} y = 3x+1 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - y = -1 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$ e da qui si risolve.

<u>Esercizio 2</u> Trovare l'intersezione tra la retta $\boxed{y = 3x+1}$ e la retta $\boxed{(2,3) + t\,(5,1)}$

↑ eq. esplicita

↓ eq. parametrica



$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Trasformo in forma esplicita l'eq. parametrica

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ L'eq. parametrica la posso scrivere come $(\underbrace{2+5t}_{x}, \underbrace{3+t}_{y})$

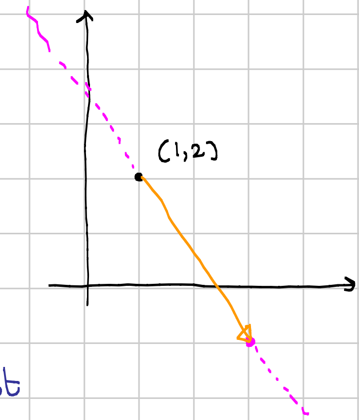
Cerco il valore di t per cui x e y stanno sulla 1^a retta, cioè risolvo $y = 3x+1$:

$3+t = 3(2+5t)+1$; $3+t = 6+15t+1$; $14t = -4$; $t = -\frac{2}{7}$

$x = 2+5t = 2 - \frac{10}{7} = \ldots$

$y = 3+t = 3 - \frac{2}{7} = \ldots$

Esempio Come passare dalla forma parametrica $\vec{P_0} + t\vec{V}$ alla forma cartesiana $ax+by+c=0$.
Poniamo che la retta data sia $(1,2)+t(2,-3)$



$\boxed{1° \text{ modo}}$ Sostituisco 2 valori a t (ad esempio $t=0$ e $t=1$), ottengo 2 p.ti della retta, nel nostro caso $t=0 \to (1,2)$
$t=1 \to (3,-1)$,
e scrivo l'eq. della retta per 2 p.ti

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Impongo che il p.to $x=1+2t$, $y=2-3t$ verifichi l'eq. $ax+by+c=0$

$a(1+2t)+b(2-3t)+c=0$; $a+2at+2b-3bt+c=0$;
$(a+2b+c)+(2a-3b)t=0$ questa deve essere vera per ogni t, quindi è che i coeff. siano nulli

$$\begin{cases} 2a-3b=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$ Non resta che trovare a, b, c

$a=\frac{3}{2}b$; $\frac{3}{2}b+2b+c=0$; $3b+4b+2c=0$; $7b=-2c$

$$\begin{cases} a=\frac{3}{2}b \\ 7b=-2c \end{cases}$$ Fisso c come mi pare, ad esempio $c=1$, e ottengo $b=-\frac{2}{7}$ e $a=\frac{3}{2}b=-\frac{3}{7}$. Quindi l'eq. è

$$\boxed{-\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}y+1=0}$$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ La velocità v, che è il vettore che descrive la DIREZIONE della retta, è $(2,-3)$. Nell'equazione $ax+by+c=0$, il vettore (a,b) è un vettore PERPENDICOLARE alla retta, quindi perpendicolare a $(2,-3)$. Un vettore perpendicolare a $(2,-3)$ è $(3,+2)$ (il prodotto scalare fa 0), quindi posso usare $a=3$ e $b=2$, quindi l'eq. è del tipo

$3x+2y+c=0$. Come trovo c? Sostituendo il p.to iniziale della retta, cioè $(1,2)$:

$$3+4+c=0 \rightarrow c=-7 \rightarrow 3x+2y-7=0$$

$\boxed{\text{4° modo (geometrico)}}$ $\underset{x_0,y_0}{(1,2)}+t(2,-3)$

L'eq. della retta per un punto (x_0,y_0) è $(y-\underset{2}{y_0}) = \underset{-\frac{3}{2}}{m}(x-\underset{1}{x_0})$

m dipende unicamente dalla direzione della retta quindi $m=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$

$$y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$$

$\boxed{\text{5° modo (algebrico)}}$ $x=1+2t$ elimino la t
$y=2-3t$

$t=\frac{1}{2}(x-1)$ dalla 1ª equazione. Poi sostituisco nella 2ª:

$$y=2-\frac{3}{2}(x-1)$$

—o —o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 08

Titolo nota 09/10/2013

Esercizio Trovare l'intersezione tra le rette

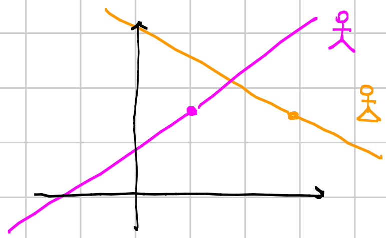
$(1,2) + t\,(2,-3)$

$(4,-1) + t\,(6,5)$

1° modo Passo tutto in forma cartesiana e interseco lì.

2° modo Da non fare: $(1+2t,\ 2-3t)$ $(4+6t,\ -1+5t)$ $\quad 1+2t = 4+6t$ $\quad 2-3t = -1+5t$

Questo equivale a fatto che le 2 parametrizzazioni passino per il punto di intersezione allo STESSO TEMPO, e non c'è motivo per cui debba succedere.



Da fare: usare 2 tempi diversi $(1+2t,\ 2-3t)$ 1ª retta

$(4+6s,\ -1+5s)$ 2ª retta

$$\boxed{\begin{cases} 1+2t = 4+6s \\ 2-3t = -1+5s \end{cases}}$$

trovo t ed s, quindi sostituisco

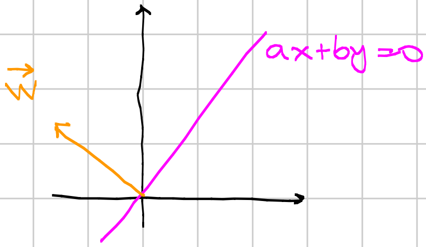
cerco se esistono 2 tempi per cui le 2 rette si trovano nello stesso punto

— o — o —

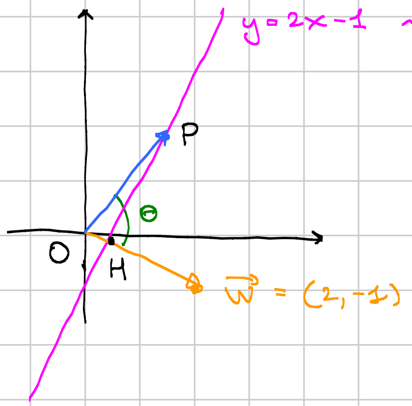
Eq. della retta e prodotto scalare

Caso facile: retta per l'origine $\quad ax+by=0$

Questa eq. dice che (x,y) ha prodotto scalare nullo con (a,b), quindi $w=(a,b)$ è un qualunque vettore (non nullo) perpendicolare alla retta



Caso generale: se non passa per l'origine l'eq. è $ax+by=c$.
Ancora una volta $\vec{w}=(a,b)$ è un vettore $\perp$ alla direzione della retta.
L'equazione mi dice che tutti i punti della retta hanno lo stesso prodotto scalare con il vettore $\vec{w}$.



Se si pensano i vettori applicati nell'origine, il prodotto scalare tra un p.to della retta e $\vec{w}$ viene 1.

Verifica: $\vec{P}=(x,y)$ $\quad \vec{w}=(2,-1)$

$$\langle \vec{P},\vec{w}\rangle = \|\vec{P}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\theta$$
$$= \|\vec{w}\|\cdot\|\vec{P}\|\cdot\cos\theta = \|\vec{w}\|\cdot\boxed{OP\cdot\cos\theta}$$
$$= \underbrace{\|\vec{w}\|}_{\text{non dipende da } P}\ \boxed{OH}$$

precorso

non dipende da $\vec{P}$.

Quando $\vec{P}$ si sposta sulla retta, il prodotto scalare $\langle\vec{P},\vec{w}\rangle$ non cambia, ed è uguale al c dell'equazione $ax+by=c$.

$\boxed{\text{SPAZIO } \mathbb{R}^n}$

Vettori hanno n componenti $\quad (x_1, x_2, \dots, x_n)$
Somma e prodotto per una costante sono come in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x}=(x_1,\dots,x_n) \qquad \vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$$

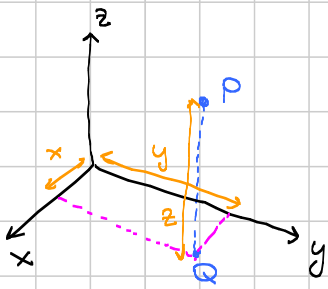
$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i = \text{prod. scalare}$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 = \text{norma}^2$$

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

Caso speciale: $n = 3$ (spazio)

Ogni punto ha 3 coordinate (x, y, z)



Una retta per l'origine nello spazio ha equazione parametrica $t\vec{v} = t(v_1, v_2, v_3)$ ← retta che passa per l'origine e ha direzione descritta dal vettore $\vec{v}$.

Una retta per un punto $\vec{P_0}$ con direzione $\vec{v}$ avrà equazione

$$\boxed{P_0 + t\vec{v}}$$

Piano nello spazio passante per l'origine

1° modo Prendo 2 vettori (con certe ipotesi che rendano la cosa non banale) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e poi considero tutti i vettori del tipo

$$\boxed{t\vec{u} + s\vec{v}}$$ equazione parametrica di un piano (servono 2 parametri t e s)

↑ combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$

2° modo Dato un vettore $\vec{w} = (a, b, c)$, cerco tutti i vettori (x, y, z) dello spazio che sono perpendicolari a $\vec{w}$. Ottengo l'equazione

$$\boxed{ax + by + cz = 0}$$ equazione cartesiana di un piano nello spazio.

Se il piano NON passa per l'origine:

$$\boxed{\vec{P_0} + t\vec{u} + s\vec{v}}$$ Parametrica

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$ Cartesiana

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 09

Titolo nota 11/10/2013

$\boxed{\text{Geometria nello spazio}}$ Come faccio per...

$\boxed{1}$ ... stabilire se 3 punti nello spazio sono allineati (stanno sulla stessa retta.

$P_1 = (1,2,3) \qquad P_2 = (2,1,5) \qquad P_3 = (-1,4,-1)$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Scrivo l'eq. della retta per P_1 e P_2 e controllo se P_3 ci appartiene

Retta per P_1 e P_2: $\boxed{P_1 + t\,(P_2 - P_1)}$ in forma parametrica

$\underbrace{(1,2,3)}_{P_1} + t\,\underbrace{(1,-1,2)}_{P_2-P_1}$ Vedo se esiste un valore di t per cui la retta passa per P_3

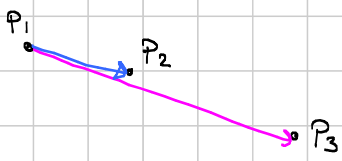
$(1,2,3) + t\,(1,-1,2) = (-1,4,-1)$

$(1+t,\ 2-t,\ 3+2t)$

$$\begin{cases} 1+t = -1 & t=-2 \\ 2-t = 4 & t=-2 \\ 3+2t = -1 & t=-2 \end{cases}$$

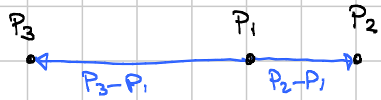
La retta passa per P_3, quindi P_1, P_2, P_3 sono allineati.

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Controllo se i vettori $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ sono "allineati", cioè uno multiplo dell'altro



$P_2 - P_1 = (1,-1,2) \qquad P_3 - P_1 = (-2,2,-4)$

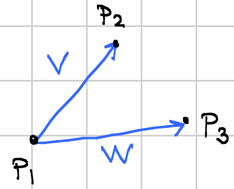
$P_3 - P_1$ è uguale a $P_2 - P_1$ moltiplicato per -2, quindi i 3 punti sono allineati.

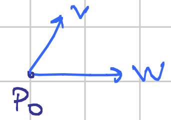


$\boxed{2}$ ..., scrivere l'equazione del piano che passa per 3 punti dati P_1, P_2, P_3 $\boxed{\text{NON}}$ allineati

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Se voglio ottenere l'equazione parametrica $\boxed{P_0 + t\,v + s\,w}$

$$\boxed{P_1 + t\,(P_2 - P_1) + s\,(P_3 - P_1)}$$





$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Se voglio l'equazione in forma cartesiana $\boxed{ax + by + cz = d}$ $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$
sostituisco i 3 punti nell'equazione e ottengo un sistema di 3 equazioni in 4 incognite.

Supponiamo di cercare l'eq. nella forma $ax + by + cz + d = 0$

$P_1 = (1,2,3)$ $P_2 = (2,1,5)$ $P_3 = (-1,4,1)$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ 2a + b + 5c + d = 0 \\ -a + 4b + c + d = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

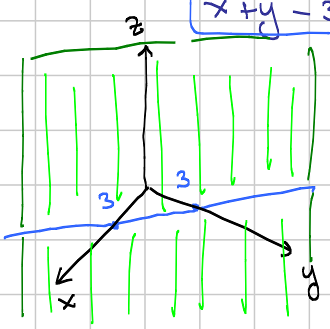
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ -3b - c - d = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = -2b - d = \frac{2}{3}d - d = -\frac{1}{3}d \\ b = -\frac{1}{3}c - \frac{1}{3}d = -\frac{1}{3}d \\ c = 0 \end{array}$$

Soluz. sistema: $a = -\frac{1}{3}d$, $b = -\frac{1}{3}d$, $c = 0$, d qualunque

Per comodità prendo $d = -3$ e ottengo $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, in conclusione

$$\boxed{x + y - 3 = 0}$$

→ Non dipende da z, quindi è un piano "verticale" che sul piano base xy taglia la retta $x + y - 3 = 0$



$\boxed{3}$ ... passare dalla forma parametrica alla forma cartesiana,

Nell' esempio precedente $P_1 + t\,(P_2 - P_1) + s\,(P_3 - P_1)$

$$(1,2,3) + t\,\underbrace{(1,-1,2)}_{v} + s\,\underbrace{(-2,2,-2)}_{w}$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Do dei valori a t ed s in modo da ottenere 3 punti del piano e poi procedo come sopra... (ad es: $t=0$ $s=0$, $t=1$ $s=0$, $t=0$ $s=1$)

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Il piano è dato da $(\underset{x}{\overset{\shortparallel}{1+t-2s}},\ \underset{y}{\overset{\shortparallel}{2-t+2s}},\ \underset{z}{\overset{\shortparallel}{3+2t-2s}})$

Sostituisco nell' eq. generale $ax + by + cz + d = 0$

$$a\,(1+t-2s) + b\,(2-t+2s) + c\,(3+2t-2s) + d = 0$$

$$\underbrace{(a+2b+3c+d)}_{=0} + t\,\underbrace{(a-b+2c)}_{=0} + s\,\underbrace{(-2a+2b-2c)}_{=0} = 0$$

e ho un sistema di 3 equazioni in 4 incognite (risolvere per esercizio!)

<u>Lemma</u> Supponiamo che un' espressione

$$\text{Mostro}_1 + \text{Mostro}_2 \cdot t + \text{Mostro}_3 \cdot s = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ogni $s \in \mathbb{R}$. Allora per forza $\text{Mostro}_1 = \text{Mostro}_2 = \text{Mostro}_3 = 0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Metto

$t=0$ $s=0$ $\rightsquigarrow$ $\text{Mostro}_1 = 0$

$t=1$ $s=0$ $\rightsquigarrow$ $\text{Mostro}_2 = 0$

$t=0$ $s=1$ $\rightsquigarrow$ $\text{Mostro}_3 = 0$

3° modo Il vettore (a, b, c) è un vettore perpendicolare al piano quindi basta che trovi un vettore perpendicolare.
Quindi devo trovare un vettore (a, b, c) che sia $\perp$ sia a V sia a W (V e W sono i 2 vettori che "generano" il piano).

Nell'esempio $V = (1, -1, 2)$ $W = (-2, 2, -2)$

Così facendo trovo (a, b, c) e mi manca d, che posso trovare sostituendo nell'equazione un qualunque p.to del piano, ad esempio il p.to base P_0.

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 10

Titolo nota 11/10/2013

Come faccio per ...

$\boxed{4}$ ... trovare un vettore perpendicolare a 2 vettori dati?

$\underbrace{(1,-1,2)}_{V}$, $\underbrace{(-2,2,-2)}_{W}$

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ Chiamo (a,b,c) questo vettore ed impongo che i 2 prodotti scalari vengano 0:

$$\begin{cases} a-b+2c=0 \\ -2a+2b-2c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b+2c=0 \\ 2c=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=b \\ c=0 \end{matrix}$$

Quindi le soluzioni sono $(a,a,0)$, ad esempio $(1,1,0)$

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Uso la FORMULA MISTERIOSA: se

$V=(x_1,y_1,z_1)$ $W=(x_2,y_2,z_2)$

allora un vettore perpendicolare sia a V sia a W è:

$$(y_1z_2-z_1y_2,\ -x_1z_2+x_2z_1,\ x_1y_2-x_2y_1)$$

Esercizio: verificare facendo i conti che effettivamente i 2 prodotti scalari vengono nulli.

Nell'esempio: $V=(1,-1,2)$ $W=(-2,2,-2)$. Allora

$$(a,b,c)=(2-4,+2-4,\ 2-2)=(-2,-2,0)$$

che in effetti è un multiplo del vettore $(1,1,0)$ trovato prima.

Oss. Per passare dalla forma parametrica a quella cartesiana di un piano
① Trovo (a, b, c) a partire da v e w con la formula misteriosa
② Trovo d sostituendo un p.to qualunque.

$\boxed{5}$ ... dati 2 piani, stabilire se sono
→ coincidenti
→ distinti ma paralleli
→ incidenti

Guardo le eq. cartesiane: $ax+by+cz+d=0$ $\quad \bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}z+\bar{d}=0$
- se sono l'una multipla dell'altra ⇝ coincidenti
- se $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ è multiplo di (a, b, c) ma $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ NON è multiplo di (a, b, c, d), allora sono distinti e paralleli.
- altrimenti sono incidenti.

Esempio $\quad 2x+4y-6z+8=0 \qquad \underbrace{3x+6y-9z+12=0}_{\frac{3}{2}\cdot\text{precedente} \rightsquigarrow \text{coincidenti}}$

$$2x+4y-6z+8=0 \qquad \underbrace{3x+6y-9z}_{\frac{3}{2}\cdot\text{precedente} \rightsquigarrow \text{paralleli}} + 11 = 0$$

NO $\frac{3}{2}\cdot$ precedente

$$\underbrace{2x+4y-6z}+8=0 \qquad \underbrace{3x+6y-10z}+12=0$$

Non sono multipli ⇝ incidenti

$\boxed{6}$ ... dati 2 piani che sappiamo essere incidenti, trovare la retta intersezione e l'angolo che formano.

Per la retta intersezione, basta mettere a sistema

$$\begin{cases} 2x+4y-6z+8=0 \\ 3x+6y-10z+12=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z=-4 \\ 3x+6y-10z=-12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z=-4 \\ -z=0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $z=0$ y libero $x=-4-2y$

$z=0$ $y=t$ $x=-4-2t$

$$(-4-2t,\ t,\ 0) = \underbrace{(-4,0,0)}_{\text{p.to base della retta}} + t\ \underbrace{(-2,1,0)}_{\text{velocità della retta}}$$

Oss. Vedere cosa succede considerando x come variabile libera...

L'angolo tra 2 piani è uguale all'angolo tra i vettori ad esso perpendicolari, quindi l'angolo tra $ax+by+cz+d=0$ e $\bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}z+\bar{d}=0$

è uguale all'angolo tra

(a,b,c) e $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

Per determinare l'angolo tra 2 vettori uso

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\theta$$

Nell'esempio $(a,b,c) = (2,4,-6)$ o meglio $(a,b,c) = (1,2,-3)$ e $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (3,6,-10)$

Quindi $$\cos\theta = \frac{3+6\cdot 2+(-10)\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+6^2+(-10)^2}} \leftarrow \text{prod. scalare}$$

$\boxed{7}$ ... data una retta ed un piano, stabilire se la retta
- → sta sul piano
- → è parallela al piano
- → è incidente al piano (ed in tal caso determinare il punto di intersezione e l'angolo che formano).

Supponiamo di avere il piano in forma cartesiana : $ax+by+cz+d=0$ e la retta in forma parametrica $\vec{P_0}+t\vec{v}$

Esempio $\quad 2x+3y-z+5=0 \qquad (2,1,3)+t(1,-1,2)$

Scrivo la retta come $(\underset{x}{2+t}, \underset{y}{1-t}, \underset{z}{3+2t})$

Sostituisco nell'equazione del piano e trovo

$$2(2+t)+3(1-t)-(3+2t)+5=0\;;\; 4+\cancel{2t}+3-\cancel{3t}-3-\cancel{2t}+5=0$$

$$-3t+9=0 \qquad t=3$$

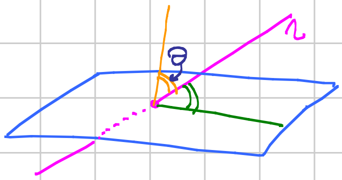
Brutalmente: un omino che si muove lungo la retta passa per il piano (cioè ne verifica l'equazione) solo per $t=3$

Quindi sono incidenti ed il punto di intersezione è $(2+3, 1-3, 3+2\cdot 3)$
$(5,-2,9)$

Se invece se ne andava la t ma non il termine noto, restava un'eq. del tipo $0\cdot t=$ numero $\neq 0$ che non ha soluz. $\Rightarrow$ parallela

Se se ne andava tutto e restava $0\cdot t=0$, allora la retta stava sul piano

E per l'angolo?
Quello che è facile trovare è l'angolo θ tra la retta e la perpendicolare al piano:



basta fare l'angolo tra il vettore (a,b,c) perpendicolare al piano e la direzione v della retta.

$\boxed{?}$ Stabilire se 2 rette sono coincidenti, parallele, incidenti, sghembe.

—o—o—

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 11

Titolo nota 16/10/2013

Strutture algebriche astratte:

- GRUPPO
- GRUPPO COMMUTATIVO
- ANELLO
- MODULO
- CORPO
- CAMPO
- SPAZIO VETTORIALE

Un campo (di numeri) è un insieme $\mathbb{K}$ (talvolta anche indicato con $\mathbb{F}$) sul quale sono definite due operazioni binarie (cioè funzioni che prendono in input 2 elementi e restituiscono un elemento) che di solito si indicano con $+$ e $\cdot$, che soddisfano le seguenti proprietà:

(S1) $a+b=b+a \quad \forall a\in\mathbb{K}, \forall b\in\mathbb{K}$ commutativa

(S2) $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a\in\mathbb{K}, \forall b\in\mathbb{K}, \forall c\in\mathbb{K}$ associativa

(S3) $\exists\, 0\in\mathbb{K}$ t.c. $a+0=(0+a)=a \quad \forall a\in\mathbb{K}$ esist. el. neutro per +

(S4) $\forall a\in\mathbb{K}\ \exists\, b\in\mathbb{K}$ t.c. $a+b=0$ esist. el. opposto

(P1) $a\cdot b=b\cdot a \quad \forall ..$

(P2) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \quad \forall ..$ stessi nomi di sopra riadattati

(P3) $\exists\, 1\in\mathbb{K}$ t.c. $a\cdot 1=1\cdot a=a \quad \forall a\in\mathbb{K}$

(P4) $\forall a\in\mathbb{K}$ con $a\neq 0\ \exists\, b\in\mathbb{K}$ t.c. $ab=1$

(D) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad \forall a\in\mathbb{K}, \forall b\in\mathbb{K}, \forall c\in\mathbb{K}$ Distributiva

Esempi classici: $\mathbb{K}=\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$. ← Considereremo sempre questi.
sono campi

$\mathbb{Z}$ non è un campo (manca la (P4))
$\mathbb{N}$ non è un campo (mancano (S4) e (P4))

$\boxed{\text{SPAZI VETTORIALI}}$ Uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme V in cui sono definite due operazioni

- una somma interna (INPUT: 2 elem. di V, OUTPUT: 1 elem. di V)
- un prodotto (INPUT: 1 el. di $\mathbb{K}$ e 1 el. di V, OUTPUT: 1 elem. di V)
  (il prodotto di un elemento di $\mathbb{K}$ per un elemento di V fa un elemento di V)

che verificano le seguenti proprietà:

(S1) $v+w = w+v \quad \forall v \in V, \forall w \in V.$

(S2) $u+(v+w) = (u+v)+w \quad \forall u \in V, \forall v \in V, \forall w \in V.$

(S3) $\exists\, 0 \in V$ t.c. $v+0 = 0+v = v \quad \forall v \in V$

(S4) $\forall v \in V\ \exists\, w \in V$ t.c. $v+w = 0 = w+v$.

(P1) $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

(P2) $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall b \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

(P3) $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ " " "

(P4) $a \cdot (v+w) = a \cdot v + a \cdot w \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall v \in V, \forall w \in V.$

<u>Osservazione</u> Occhio al diverso significato del simbolo + nelle varie formule. Quando scrivo

prodotto tra 1 el. di $\mathbb{K}$ ed un elemento di V.

$$(a+b) \odot v = a \odot v \oplus b \odot v$$

somma tra elem. di $\mathbb{K}$ — somma tra elem. di V

<u>Esempio 1</u> (esempio più importante)

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad V = \mathbb{R}^n =$ insieme dei vettori n-dimensionali $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Le operazioni sono: (esercizio: verificare le proprietà)

- sommare tra di loro 2 vettori, ottenendo un vettore
- moltiplicare un el. di $\mathbb{K}$ per un vettore ottenendo un vettore.

<u>Definizione</u> Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.
Un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice <u>sottospazio vettoriale</u> se
(i) $\forall v \in W$, $\forall w \in W$ si ha che $v+w \in W$ (chiuso rispetto alla somma, cioè la somma di 2 elementi di W sta ancora in W)
(ii) $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall v \in W$ si ha che $av \in W$ (chiuso rispetto al prodotto per elementi di $\mathbb{K}$, cioè se $w \in W$ allora tutti i multipli di w stanno in W).

$\boxed{\text{Oss.1}}$ Se W è un sottospazio vettoriale, allora è chiuso rispetto alle combinazioni lineari, cioè se w_1 e w_2 stanno in W e $a_1 \in \mathbb{K}$ e $a_2 \in \mathbb{K}$, allora

$$\underbrace{\underbrace{a_1 w_1}_{\text{sta in } W} + \underbrace{a_2 w_2}_{\text{sta in } W}}_{\text{la somma sta in } W.} \in W$$

perché sono multipli

$\boxed{\text{Oss.2}}$ Se W è un sottospazio vettoriale, allora W è a sua volta uno spazio vettoriale, considerando somma e prodotto "ereditati" da V.

<u>Esempio 2</u> L'insieme $M_{m\times n}$ delle matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni di
- somma di matrici
- prodotto di una matrice per un numero.

Dovrei verificare le 8 proprietà, che sono sostanzialmente ovvie.
In particolare, $\boxed{0}$ è la matrice nulla, cioè quella con tutti 0

0 come elemento di V — numero, cioè elemento di $\mathbb{K}$

Data una matrice $v \in M_{m\times n}$, l'inversa rispetto alla somma, cioè la matrice w t.c. $v+w=0$ è la stessa con tutti gli el. cambiati di segno.

matrice nulla

Esempio 3 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}[x]$ = insieme dei polinomi a coeff. reali

$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

L'insieme di tutti i polinomi è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni
- somma tra 2 polinomi
- prodotto tra un numero (elemento di $\mathbb{K}$) ed un polinomio.

Esempio 4 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ V = funzioni $f : \underbrace{[a,b]}_{\text{intervallo}} \to \mathbb{R}$

è uno spazio vettoriale rispetto a:
- somma tra funzioni
- prodotto di una funzione per un numero.

Osservazione In molti degli esempi precedenti, in V sono definite anche altre operazioni, ma ai fini della def. di spazio vettoriale non sono rilevanti, cioè non entrano nella definizione.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 12

Titolo nota 16/10/2013

Esempio 1 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$
= polinomi a coeff. reali di grado ≤ 4

Gli elementi di V sono del tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

V non solo è uno spazio vettoriale, ma è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

Esempio 2 I polinomi di grado = 4 sono un sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$?
NO!! Non è detto che la somma abbia lo stesso grado. Ad es.:

$v = x^4 + 3x^3 + x + 1$ $\quad w = -x^4 + x^2 + 1$
La somma $v+w$ non ha grado 4, ma solo ≤ 4.

Esempio 3 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ e prendiamo

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$$

Domanda: W è un sottospazio? Faccio le 2 verifiche

(i) Prendo $(x_1, y_1) \in W$ e $(x_2, y_2) \in W$. La somma sta ancora in W?

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Controllo

$$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = \underbrace{\boxed{2x_1 + 3y_1}}_{\substack{= 0 \\ \text{perché } (x_1,y_1) \in W}} + \underbrace{\boxed{2x_2 + 3y_2}}_{\substack{= 0 \\ \text{perché } (x_2,y_2) \in W}} = 0 + 0.$$

(ii) Prendo $(x_1, y_1) \in W$, prendo $a \in \mathbb{K}$ e controllo se $a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1) \in W$

$$2(ax_1) + 3(ay_1) = a\underbrace{(2x_1 + 3y_1)}_{} = 0 \quad \text{perché } (x_1, y_1) \in W.$$

Esempio 4 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = M_{2\times 2}$

$$W = \left\{ A \in M_{2\times 2} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

W = insieme delle matrici 2×2 che moltiplicate per $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ danno la matrice nulla.

W è un sottospazio? Sì!

(i) Prendo $A_1 \in W$ e $A_2 \in W$. Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

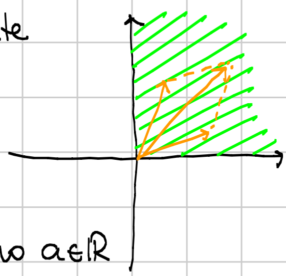
quindi $A_1 + A_2 \in W$.

(ii) Prendo $A_1 \in W$ e $a \in \mathbb{K}$. Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(a A_1) = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_1 = a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $a A_1 \in W$.

Esempio 5 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, W = primo quadrante



(i) La somma di 2 elementi di W sta ancora in W

(ii) il prodotto di un elemento $w \in W$ per un numero $a \in \mathbb{R}$ sta ancora in W se e solo se $a \geq 0$.

Se $a < 0$ non è vero.

Quindi W NON è un sottospazio vettoriale.

Oss. Si può dimostrare che i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono solo

- tutto $\mathbb{R}^2$
- $\{0\}$ = il sottospazio che contiene solo l'origine
- tutte le rette passanti per l'origine.

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ sottospazi banali

Def. 1 Sia V uno <u>spazio vettoriale</u>, e siano $v_1, \dots, v_n$ elementi di V. Una <u>combinazione lineare</u> è una scrittura del tipo

$$\boxed{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n}$$

comb. lineare di $v_1, \dots, v_n$ con coefficienti $a_1, \dots, a_n$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono elementi di $\mathbb{K}$.

Def. 2 I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se l'unica loro combinazione lineare che fa 0 è quella con tutti i coefficienti nulli, cioè se

$$\boxed{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \underset{\text{sta in } V}{0} \iff a_1 = a_2 = \dots = \underset{\text{sta in } \mathbb{K}}{0}}$$

Def. 3 I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono un <u>sistema di generatori</u> di V se ogni elemento di V si scrive come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$, cioè se

$$\boxed{\forall v \in V \ \exists a_1, \dots, a_n \text{ in } \mathbb{K} \text{ t.c. } v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n}$$

Def. 4 I vettori $v_1, \dots, v_n$ costituiscono una BASE di V se
(1) Sono linearmente indipendenti
(2) Sono un sistema di generatori.

Def. 5 Si dice che uno spazio vettoriale ha DIMENSIONE FINITA se ammette un insieme finito $v_1, \dots, v_n$ di generatori.

Esempio 1 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$(1,2,1) \qquad (1,1,-1) \qquad (3,4,-1)$$

Sono linearmente indipendenti?

Impongo che una loro combinazione lineare faccia 0 vettore

$$a\,(1,2,1) + b\,(1,1,-1) + c\,(3,4,-1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+b+3c=0 & \text{prima componente} \\ 2a+b+4c=0 & \text{seconda} \quad " \\ a-b-c=0 & \text{terza componente} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+3c=0 \\ -b-2c=0 \\ -2b-4c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b+3c=0 \\ b+2c=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b+3c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$$

c è libero, $b=-2c$, $a=-b-3c=2c-3c=-c$

Quindi la soluzione generale è: $(-c,-2c,c)$. Ad esempio posso prendere $c=-1$, $a=1$, $b=2$

Quindi c'è una soluzione in cui i coeff. non sono tutti nulli.

Quindi i vettori NON sono linearmente indipendenti, cioè sono LINEARMENTE DIPENDENTI, cioè

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{1}\,(1,2,1) + \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{2}\,(1,1,-1) + \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{(-1)}\,(3,4,-1) = (0,0,0)$$

Volendo questo dice che "posso ricavare uno dei 3 vettori in funzione degli altri", ad esempio

$$(3,4,-1) = (1,2,1) + 2\,(1,1,-1)$$

$$(1,1,-1) = \frac{1}{2}\,(3,4,-1) - \frac{1}{2}\,(1,2,1)$$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 13

Titolo nota 16/10/2013

Esempio 1 Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Siano

$v_1 = x^2+3$ $\qquad v_2 = x-1$ $\qquad v_3 = x^2+x$

Domanda: v_1, v_2, v_3 sono lin. indip.? Considero una loro combinazione lineare ed impongo che sia 0, cioè il polinomio nullo (quello con tutti i coeff. = 0).

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \qquad a(x^2+3) + b(x-1) + c(x^2+x) = 0$$

$$(a+c)x^2 + (b+c)x + (3a-b) = 0$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ 3a-b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \quad\; +c=0 \\ \quad b+c=0 \\ -b-3c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \quad\; +c=0 \\ \quad b+c=0 \\ \quad -2c=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a&=0 \\ b&=0 \\ \rightarrow c&=0 \end{aligned}$$

L'unica soluzione è $a=b=c=0$, quindi i vettori sono lin. indip. Questo vuol dire che non posso scrivere nessuno dei 3 polinomi come combinazione lineare degli altri 2.

— o — o —

Come faccio per... stabilire se un po' di vettori sono lin. indip. oppure no?

→ scrivo una loro comb. lineare con coeff. incogniti e la impongo di essere il vettore nullo

→ risolvo il sistema lineare che viene fuori

→ se l'unica soluzione è quella con tutte le variabili nulle, allora i vettori sono lin. indip. In caso contrario sono lin. dip.

— o — o —

Esempio 2 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i vettori
$v_1 = (1,0,0)$ $v_2 = (0,-5,0)$ $v_3 = (0,0,2)$

Dico che sono un sistema di generatori, cioè che ogni $v \in \mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.
Prendo un generico $v = (a,b,c)$. Allora

$$v = a\,(1,0,0) + \left(-\frac{b}{5}\right)(0,-5,0) + \frac{c}{2}\,(0,0,2)$$

Esempio 3 Come sopra
$v_1 = (1,0,0)$ $v_2 = (0,-5,0)$ $v_3 = (0,0,2)$ $v_4 = (1,1,1)$

Sono un sistema di generatori? Banalmente si! Ogni vettore (a,b,c) è combinazione lineare dei primi 3, quindi è anche comb. lineare dei primi 4 (basta che metta coeff. $=0$ a v_4 !!)

$$(a,b,c) = a\,(1,0,0) + \left(-\frac{b}{5}\right)(0,-5,0) + \frac{c}{2}\,(0,0,2) + 0\cdot(1,1,1)$$

Esempio 4 I vettori dell'esempio 2 sono lin. indip. ? SI!

Prendo una comb. lin. generica e impongo che faccia 0:

$$a\,(1,0,0) + b\,(0,-5,0) + c\,(0,0,2) = (0,0,0)$$
$$(a,-5b,2c) = (0,0,0) \iff a=b=c=0$$

Quindi v_1, v_2, v_3 sono lin. indip. e sono generatori, quindi sono una BASE di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 5 I vettori $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ (verifica immediata).
Si chiama BASE CANONICA

Altri esempi di base

① In $\mathbb{R}^n$ considero $e_k = (0, \dots, 0, \overset{\text{posizione } k}{1}, 0, \dots, 0)$

② In $M_{2\times 2}$ una base è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo dice che sono generatori. Per avere la lineare indip.

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $a = b = c = d = 0$.

③ Una base in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è $x^3, x^2, x, 1$

Teorema Supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ sia una base di uno spazio vettoriale V. Allora ogni elemento $v \in V$ si scrive in <u>modo unico</u> come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$, cioè $\forall v \in V$ esistono unici $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\boxed{v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n}$$

Dim. Poiché $v_1, \dots, v_n$ sono generatori esiste almeno un modo di scrivere v come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.
Devo dimostrare che il modo è unico. Supponiamo che ci siano 2 modi di farlo

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

Ma allora $(a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots + (a_n - b_n) v_n = 0$
Poiché $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono lin. indip., e poiché la comb. lin. di sopra è $= 0$, allora tutti i coeff. sono nulli, cioè

$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$, cioè

$a_1 = b_1, \; a_2 = b_2, \; \dots, \; a_n = b_n$

Esempio Considero un sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x+3y+z-w=0 \\ x-y+2z+w=0 \\ y+2w=0 \\ x+z+w=0 \end{cases} \qquad x\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Posso sempre pensarlo come combinazione lineare a coeff. incogniti di un po' di vettori colonna dati. Questi vettori colonna sono le colonne della matrice associata al sistema.

Quindi un sistema LINEARE OMOGENEO ha

- solo la soluzione con tutte le variabili nulle se e solo se le colonne sono linearmente indipendenti.

— o — o —

Consideriamo un sistema 3×3 NON omogeneo

$$\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ x-y=2 \\ x+y+z=-3 \end{cases} \qquad x\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}$$

Sto cercando di scrivere la colonna dei termini noti come comb. lineare delle colonne della matrice dei coeff. Quindi

1. Se le colonne della matrice dei coeff. sono un sistema di generatori, allora esiste almeno una soluzione qualunque sia la colonna dei termini noti.
2. Se le colonne sono una base, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni colonna dei termini noti

ALGEBRA LINEARE − LEZIONE 14

Titolo nota 18/10/2013

Spazi e sottosp. vettoriali, vettori linearmente indipendenti, generatori, basi.

<u>Def.</u> Un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ si dice lin. indip. se

$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$

Si dice che è un sistema di generatori per V se

$\forall v \in V \quad \exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

Si dice che è una base se è lin. ind. e genera V.

<u>Teorema</u> Se $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ è una base, allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come comb. lineare $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

unici

<u>Def.</u> Dato un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ si indica con Span$\{v_1, \dots, v_n\}$ l'insieme di tutti i vettori di V che sono combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$.

<u>Fatto facile</u> ① Span$\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sottospazio vettoriale di V, cioè è chiuso rispetto a somma e prodotto per costante

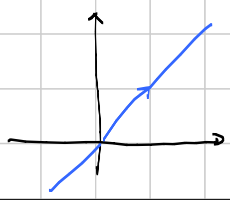
(<u>Verifica</u> $w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \qquad w_2 = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

Allora $w_1 + w_2 = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$

Analogamente $\lambda w_1 = \lambda (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = (\lambda a_1) v_1 + \dots + (\lambda a_n) v_n$)

② $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono generatori se e solo se $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^2 \qquad v_1 = (1,1)$. Allora span$\{v_1\}$ = tutti i vettori multipli di v_1 = retta $y = x$



Teorema di esistenza della base

Supponiamo che in uno sp. vett. V esista un insieme finito di generatori. Allora esiste anche una base.

Teorema (proprietà delle basi)

Supponiamo che in uno spazio vettoriale V esista una base.
Allora valgono i seguenti fatti.

1. Tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi.
   Questo numero si chiama DIMENSIONE dello spazio vettoriale.
2. Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_k\}$ sia un sistema di generatori (finito).
   Allora posso eliminare un po' di elementi in modo che quelli che restano siano una base.
3. Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_k\}$ siano linearmente indipendenti.
   Allora posso aggiungere un po' di elementi in modo che tutti insieme formino una base.

Teorema MISTERIOSO (Teorema di sostituzione)

Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_m\}$ siano linearmente indipendenti
e che $\{w_1, \dots, w_n\}$ siano generatori.

Allora valgono 2 fatti:

1. $m \leq n$
2. Posso sostituire m elementi dell'insieme $\{w_1, \dots, w_n\}$ con gli m elementi $v_1, \dots, v_m$ e avere ancora un sistema di generatori.

— o — o —

Dim. (esistenza della base) Ipotesi: $\{w_1, \dots, w_n\}$ generano V.
Considero tutti i possibili sottoinsiemi di $\{w_1, \dots, w_n\}$. Alcuni di questi sottoinsiemi saranno ancora generatori, altri magari no. Tra tutti i sottoinsiemi che sono ancora generatori, prendo quello (o uno di quelli) che ha il minor numero di elementi.
Sia questo $v_1, \dots, v_k$. Dico che questi sono una base.
Che generino è banale. Resta da verificare che sono lin. indip.

Supponiamo per assurdo che non lo siano. Allora esiste

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$$

con i coeff. non tutti nulli. Supponiamo, a meno di cambiare i nomi, che $a_1 \neq 0$. Allora posso ricavare v_1 in funzione degli altri

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \frac{a_3}{a_1} v_3 - \dots - \frac{a_k}{a_1} v_k$$

Ma allora $\{v_2, \dots, v_k\}$ sono ancora generatori, ma allora ho trovato un sistema di generatori con meno elementi.
Perché $\{v_2, \dots, v_k\}$ sono ancora generatori ?

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k = b_1 \left(-\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_k}{a_1} v_k\right) + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k$$

quindi quello che potevo scrivere usando $v_1, \dots, v_k$ lo posso scrivere usando solo $v_2, \dots, v_k$.

—o —o —

$\boxed{\text{Dim. proprietà delle basi}}$

② Appena dimostrato: basta eliminare il maggior numero possibile di elementi.

① Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ siano 2 basi.

lin. ind. — generatori — Teo. mist. $\Rightarrow$ $m \leq n$

generatori — lin. indip. — Teo. mist. $\Rightarrow$ $n \leq m$

$n = m$

③ Siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ lin. indip. e sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base

lin. indip. — generatori

Teo. mist. $\Rightarrow$ $k \leq n$ e posso sostituire un po' di w con i v

avendo ancora un sistema di generatori: $\{v_1, \dots, v_k + \underbrace{\text{sopravvissuti tra i } w}_{\text{in totale } n \text{ elem.}}\}$

Perchè questi ultimi sono lin. indip. ?
Se non lo fossero, per il punto ② potrei eliminare un po' di elementi ed ottenere una base, che però avrebbe meno di n elementi, il che è contro il punto ①.

— o — o —

Aggiunte al teo. con proprietà della base

④ Se $\dim V = n$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono lin. indip., allora sono una base

⑤ Se $\dim V = n$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono generatori, allora sono una base.

(se no potrei aggiungere / togliere elementi in maniera da ottenere una base con un numero di elementi $\neq n$).

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 15

Titolo nota 18/10/2013

<u>Esercizio 1</u> Dimostrare che $(1,2)$, $(3,-1)$ è una base di $\mathbb{R}^2$

Devo dim. che sono lin. ind. e che generano

$\boxed{\text{LIN. INDIP.}}$ $a(1,2)+b(3,-1)=(0,0)$

$$\begin{cases} a+3b=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+3b=0 \\ -7b=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix} \qquad \text{ok.}$$

$\boxed{\text{GENERATORI}}$ $\boxed{1^o \text{ modo}}$: usando la definizione

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$ esistono x e y (per ora incogniti) tali che

$$x(1,2)+y(3,-1)=(a,b) \qquad \begin{cases} x+3y=a \\ 2x-y=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=a \\ -7y=b-2a \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{y=-\frac{b-2a}{7}} \nearrow \boxed{x=a-3y=a+\frac{3}{7}(b-2a)}$$

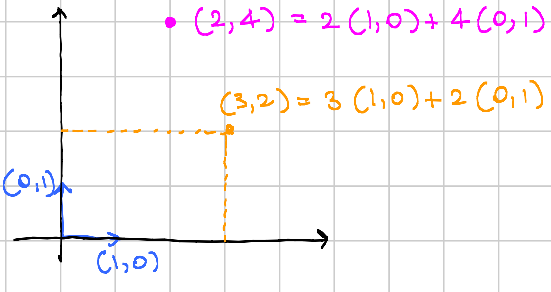
corretto dopo

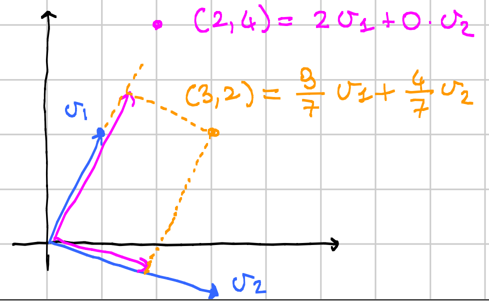
Dati a e b, riesco a trovare x e y, quindi generano!

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2. Se v_1 e v_2 sono lin. indip., allora sono automaticamente una base, ed in particolare generatori.

— o — o —

Interpretazione geometrica della base $(1,2)$, $(3,-1)$





A mano: scrivo $(3,2)$ come combinazione lineare di $(1,2)$ e $(3,-1)$

$(3,2) = x(1,2) + y(3,-1)$ $\qquad$ $3 = x+3y$
$2 = 2x - y$

$\begin{cases} x+3y=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ $\quad$ $x+3y=3$, $-7y=-4$ $\quad$ $x = 3-3y = 3-\frac{12}{7} = \frac{9}{7}$, $y=\frac{4}{7}$

— o — o —

Esercizio 2 Verificare che $(1,3,2)$, $(2,1,-1)$, $(1,0,7)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione: sono 3 elementi, $\mathbb{R}^3$ ha dim. 3, quindi se dimostro che sono lin. indip. automaticamente saranno una base.

$$a(1,3,2) + b(2,1,-1) + c(1,0,7) = (0,0,0)$$

$a + 2b + c = 0$
$3a + b = 0$ $\quad \rightsquigarrow$ risolvo $\rightsquigarrow$ se viene $a=b=c=0$, allora OK.
$2a - b + 7c = 0$

— o — o —

Esercizio 3 Dimostrare che x^2-1, $x+3$, x^2+2x sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ = polinomi di grado ≤ 2.

$\boxed{1^o \text{ fatto}}$ dim di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ è 3 e una base è $1, x, x^2$.
Devo fare 2 verifiche
(1) Sono lin. indip.: $a + bx + cx^2$ = polinomio nullo $\Leftrightarrow a=b=c$.
(2) Sono generatori: ogni pol. di grado ≤ 2 è comb. lin. di $1, x, x^2$.

(Oss.: in generale $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ ha dimensione $k+1$ e una base è $1, x, x^2, \dots, x^k$)

Per l'esercizio 3 basta quindi dim. che sono lin. indip.:

$$a(x^2-1)+b(x+3)+c(x^2+2x)=0 \leftarrow \text{polinomio nullo.}$$

$$(a+c)x^2+(b+2c)x+(-a+3b)=0$$

$$\begin{aligned} a+c&=0 \\ b+2c&=0 \\ -a+3b&=0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ risolvo e se l'unica soluzione è $a=b=c=0$ allora sono lin. indip. dunque (essendo lo stesso numero della dimensione) sono una base.

— o — o —

Esercizio 4 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1=(1,0,-1) \qquad v_2=(3,2,1) \qquad v_3=(1,2,3)$$

Determinare la dimensione di $\operatorname{Span}\{v_1,v_2,v_3\}$

Oss. 1 Se fossero lin. indip., sarebbero una base, quindi il loro span sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$.

$$a(1,0,-1)+b(3,2,1)+c(1,2,3)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a+3b+c&=0 \\ 2b+2c&=0 \\ -a+b+3c&=0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} a+3b+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a&=-c-3b=2c \\ b&=-c \end{aligned} \qquad c \text{ libero}$$

Quindi i vettori v_1, v_2, v_3 sono lin. dip.. Ad esempio con $c=1$ $a=2$ $b=-1$:

$$2v_1-v_2+v_3=0$$

Quindi posso ricavare ogni vettore in funzione degli altri:

$$v_2 = 2v_1 + v_3$$

Quindi $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Span}\{v_1, v_3\}$ perché posso sempre sostituire v_2 con una comb. lin. di v_1 e v_3.

Ora se v_1 e v_3 sono lin. indip., allora sono una base perché generano lo span.
Per vedere che sono lin. indip. potrei impostare il sistema, oppure osservare che non sono uno multiplo dell'altro
(se fossero lin. dip. avrei $av_1 + bv_3 = 0$, cioè $v_1 = -\frac{b}{a} v_3$)

Conclusione: span ha dimensione 2 e una base è $\{v_1, v_3\}$

<u>Osservazione</u> Altre basi erano $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_2, v_3\}$.
Infatti posso eliminare v_1 esprimendolo come $v_1 = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$ e posso eliminare v_3 in modo analogo.

— o — o —

<u>Esercizio 5</u> Dimostrare che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

sono una base di $M_{2\times 2}$, ed esprimere $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ come comb. lin. di v_1, v_2, v_3, v_4.

Si tratta di scrivere $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$

Viene fuori un sistema 4×4. Per dimostrare che sono una base, basta controllare la lineare indip. ($\dim M_{2\times 2} = 4$).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 16

Titolo nota 23/10/2013

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
Una funzione $f: V \to W$ si dice lineare se soddisfa le seguenti 2 proprietà

① $\underbrace{f(v_1+v_2)}_{\text{somma in } V} = \underbrace{f(v_1)+f(v_2)}_{\text{somma in } W} \quad \forall v_1 \in V, \forall v_2 \in V$

② $f(av) = \underbrace{a f(v)}_{\text{prodotto tra } a \in \mathbb{K} \text{ e } f(v) \in W} \quad \forall v \in V, \forall a \in \mathbb{K}$

Esempio 1 Siano $V = W = \mathbb{R} = \mathbb{K}$. Come sono fatte le funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineari?

Pongo $\lambda = f(1)$. Allora $f(x) = f(x \cdot 1) \underset{\text{uso linearità ②}}{=} x f(1) = \lambda x$

Quindi le funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineari sono tutte e sole quelle il cui grafico è una retta passante per l'origine.

Esempio 2 La funzione $f(x) = 2x+3$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non è lineare.

Basta osservare che $f(2) = 7$, $f(3) = 9$, ma
$f(2+3) = f(5) = 13 \neq f(2) + f(3)$

Oss. i valori 2 e 3 li ho scelti a caso, perchè per dimostrare che una funzione NON è lineare basta trovare una violazione di ① o ②.

Esempio 3 Come sono fatte tutte le funzioni $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineari?
INPUT: coppia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
OUTPUT: numero $\in \mathbb{R}$

Pongo $\lambda = f(1,0)$ e $\mu = f(0,1)$. Allora

$$f(x,y) = f((x,y)) = f(\underbrace{x(1,0)}_{v_1} + \underbrace{y(0,1)}_{v_2}) \qquad f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$$

$$= f(x(1,0)) + f(y(0,1))$$

$$= x\, f((1,0)) + y\, f((0,1))$$

$$= \lambda x + \mu y$$ (= multiplo della 1ª coordinata + multiplo della 2ª coordinata)

Si verifica che $f(x,y) = \lambda x + \mu y$ è lineare per ogni scelta delle costanti λ e μ.

— o — o —

Esempio 4 Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$. Sia $f: V \to V$ la derivata, cioè $f(p(x)) = p'(x)$.

Dico che f è lineare.

Devo verificare: ① $f(p_1+p_2) = f(p_1) + f(p_2)$

Ma $f(p_1+p_2) = (p_1+p_2)' \underset{\uparrow}{=} p_1' + p_2' = f(p_1) + f(p_2)$

derivata somma = somma delle derivate

② $f(a p_1) = a f(p_1)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, per ogni $p_1 \in V$

Ma $f(ap_1) = (ap_1)' \underset{\uparrow}{=} a p_1' = a f(p_1)$

derivata di cost. funz = cost. derivata funzione

<u>Proposizione</u> Le funzioni lineari mandano combinazioni lineari in combinazioni lineari.
Detto meglio: sia $f : V \to W$ lineare. Siano $v_1, \dots, v_n$ elementi di V, e siano $a_1, \dots, a_n$ elementi di $\mathbb{K}$.
Allora

$$\boxed{f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)}$$

Dim. $f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \underset{1}{=} f(a_1 v_1) + \dots + f(a_n v_n) \underset{2}{=}$

$= a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n).$

<u>Oss.</u> Il fatto che f(somma di n vettori) = somma delle n immagini andrebbe giustificato per induzione.

— o — o —

Teorema (Struttura delle applicazioni lineari)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $v_1, \dots, v_n$ una base di V.
Sia W un altro spazio vettoriale qualunque (anche di dim. non finita) e siano $w_1, \dots, w_n$ (stesso n) dei vettori qualunque di W.
Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che

$$f(v_i) = w_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$

Dim. Come si definisce $f(v)$ per un generico vettore $v \in V$?
Scrivo v come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$: posso farlo in modo unico perché $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V.

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

A questo punto pongo

$$f(v) = [\, f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) \,]$$
$$= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$$

" f (comb. lin. dei v_i) = corrispondente comb. lin. dei w_i "

Resta da verificare che f è lineare, cioè che soddisfa ① e ②.

Verifica di ② : $f(av) \overset{?}{=} a f(v)$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ $\qquad av = a a_1 v_1 + \dots + a a_n v_n$

$f(av) = a a_1 w_1 + \dots + a a_n w_n = a(a_1 w_1 + \dots + a_n w_n) = a f(v)$

Verifica di ① : $f(v + \hat{v}) = f(v) + f(\hat{v}) \qquad \forall v \in V, \ \forall \hat{v} \in V$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ $\qquad \hat{v} = \hat{a}_1 v_1 + \dots + \hat{a}_n v_n$

$v + \hat{v} = (a_1 + \hat{a}_1) v_1 + \dots + (a_n + \hat{a}_n) v_n$

$$\begin{aligned} f(v+\hat{v}) &= (a_1 + \hat{a}_1) w_1 + \dots + (a_n + \hat{a}_n) w_n \\ &= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n + \hat{a}_1 w_1 + \dots + \hat{a}_n w_n \\ &= f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + f(\hat{a}_1 v_1 + \dots + \hat{a}_n v_n) \\ &= f(v) + f(\hat{v}). \end{aligned}$$

— o — o —

Conseguenza. Un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume in una base di V: una volta che ho scelto dove finiscono $v_1, \dots, v_n$ so dove finiscono tutti gli altri $v \in V$.
Gli elementi della base posso mandarli dove mi pare.

Back to esempio 3 $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Una volta stabilito dove vanno $\underbrace{(1,0)}_{v_1}$ e $\underbrace{(0,1)}_{v_2}$ sono vincolato

$f(1,0) = \lambda$, $f(0,1) = \mu$, allora
$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x v_1 + y v_2) \\ &= x f(v_1) + y f(v_2) = \\ &= \lambda x + \mu y. \end{aligned}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 17

Titolo nota 23/10/2013

Esercizio Se $f: V \to W$ è lineare, allora $f(\underset{0 \text{ di } V}{0}) = \underset{0 \text{ di } W}{0}$.

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Esercizio Come sono fatte tutte le applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

INPUT: vettore (x,y,z) OUTPUT: vettore con 2 componenti

Una volta stabilito dove finisce una base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio la solita $\underset{e_1}{(1,0,0)}$, $\underset{e_2}{(0,1,0)}$, $\underset{e_3}{(0,0,1)}$ ho finito. Pongo quindi

$f(1,0,0) = f(e_1) = (a,b)$
$f(0,1,0) = f(e_2) = (c,d)$
$f(0,0,1) = f(e_3) = (e,f)$

Ma allora per forza

$$f(x,y,z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$
$$= x(a,b) + y(c,d) + z(e,f)$$
$$= (ax + cy + ez, bx + dy + fz)$$

dove a,b,c,d,e,f sono numeri dati.

Interpretazione del risultato

$$\underset{2\times\boxed{3}}{\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}} \underset{\boxed{3}\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} ax + cy + ez \\ bx + dy + fz \end{pmatrix}}$$

In generale: sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e sia $e_1, \dots, e_n$ una sua qualunque base;
sia W uno spazio vettoriale di dimensione m, e sia $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ una qualunque base di W;
sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare.

Considero $f(e_1) \in W$. Lo scrivo come combinazione lineare di $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$:

$$f(e_1) = \boxed{a_{1,1}}\, \varepsilon_1 + \boxed{a_{2,1}}\, \varepsilon_2 + \dots + \boxed{a_{m,1}}\, \varepsilon_m$$

Analogamente scrivo più in generale

$$f(e_k) = \boxed{a_{1,k}}\, \varepsilon_1 + \boxed{a_{2,k}}\, \varepsilon_2 + \dots + \boxed{a_{m,k}}\, \varepsilon_m .$$

Considero la matrice $m \times n$ che ha come elementi gli $a_{i,j}$.
In particolare:
→ la 1ª colonna sono le componenti di $f(e_1)$ rispetto ad $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$
→ la 2ª colonna " " " " $f(e_2)$ rispetto ad " "
...
→ la n-esima colonna " " " " $f(e_n)$ rispetto ad $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$.

Detta A tale matrice, si dice che A rappresenta la funzione f tra V con base $e_1, \dots, e_n$ e W con base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$.

<u>Proprietà fondamentale</u>. Se prendo un qualunque $v \in V$, e scrivo le sue componenti rispetto alla base $e_1, \dots, e_n$, cioè

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Allora $f(v) = y_1 \varepsilon_1 + \dots + y_m \varepsilon_m$, e

$$A x = y$$

matrice che rappresenta f

vettore colonna con componenti $x_1, \dots, x_n$

vettore colonna con componenti $y_1, \dots, y_m$.

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ $W = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$f: V \to W$ derivata

Base di V: $\underset{e_1}{x^3}, \underset{e_2}{x^2}, \underset{e_3}{x}, \underset{e_4}{1}$ Base di W: $\underset{\varepsilon_1}{x^2}, \underset{\varepsilon_2}{x}, \underset{\varepsilon_3}{1}$

$f(e_1) = 3x^2 = 3\varepsilon_1 = \boxed{3}\cdot\varepsilon_1 + \boxed{0}\cdot\varepsilon_2 + \boxed{0}\cdot\varepsilon_3$ → 1ª colonna

$f(e_2) = 2x = 2\varepsilon_2 = \boxed{0}\cdot\varepsilon_1 + \boxed{2}\cdot\varepsilon_2 + \boxed{0}\cdot\varepsilon_3$ → 2ª colonna

$f(e_3) = 1 = \varepsilon_3 = 0\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + 1\cdot\varepsilon_3$

$f(e_4) = 0 = 0\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + 0\cdot\varepsilon_3$

Matrice A: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{a} \\ \boxed{b} \\ \boxed{c} \\ \boxed{d} \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}}$ ← componenti di un vettore in arrivo.

↑ componenti di un vettore in partenza

$ax^3 + bx^2 + cx + d \in V$ la sua derivata è $3ax^2 + 2bx + c$

$\boxed{a}\,e_1 + \boxed{b}\,e_2 + \boxed{c}\,e_3 + \boxed{d}\,e_4$ $3a\cdot\varepsilon_1 + 2b\cdot\varepsilon_2 + c\cdot\varepsilon_3$

Costruita la matrice A, se la moltiplico per le componenti di un certo v rispetto alla base $e_1, \dots, e_n$, ottengo le componenti di $f(v)$ rispetto alla base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$

—o —o —

<u>Succo della costruzione</u>: gli elementi v dello spazio di partenza li posso pensare, dopo averli scritti nella base $e_1, \dots, e_n$, come vettori colonna. Stessa cosa posso fare in arrivo. La matrice A prende il vettore colonna di un certo $v \in V$ e restituisce il vettore colonna di $f(v) \in W$.

—o —o —

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ $W = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

Base di V: $x^3, x^2, x, 1$
$e_1 \; e_2 \; e_3 \; e_4$

Base di W: $x^3, x^2, x, 1$
$\varepsilon_1 \; \varepsilon_2 \; \varepsilon_3 \; \varepsilon_4$

$f(p(x)) \longrightarrow p(x+1)$

Input: polinomio $p(x) \in V$
Output: polinomio $p(x+1) \in W$
corretto dopo video

$$f(e_1) = f(x^3) = (x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 = \boxed{1}\cdot\varepsilon_1 + \boxed{3}\varepsilon_2 + \boxed{3}\varepsilon_3 + \boxed{1}\cdot\varepsilon_4$$
$$f(e_2) = f(x^2) = (x+1)^2 = x^2+2x+1 = \boxed{0}\cdot\varepsilon_1 + \boxed{1}\cdot\varepsilon_2 + \boxed{2}\cdot\varepsilon_3 + \boxed{1}\cdot\varepsilon_4$$
$$f(e_3) = f(x) = x+1 = 0\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + 1\cdot\varepsilon_3 + 1\cdot\varepsilon_4$$
$$f(e_4) = f(1) = 1 = 0\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + 0\,\varepsilon_3 + 1\cdot\varepsilon_4$$

Matrice A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Utilità: se ora voglio calcolare f (polinomio qualunque) =
$f(ax^3+bx^2+cx+d) =$
$f(\boxed{a}e_1 + \boxed{b}e_2 + \boxed{c}e_3 + \boxed{d}e_4)$

Quindi (a,b,c,d) sono le componenti di un generico $v \in V$.
Se moltiplico A per il vettore colonna con a,b,c,d ottengo un vettore colonna che rappresenta $f(v)$ nella base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a} \\ \boxed{3a+b} \\ \boxed{3a+2b+c} \\ \boxed{a+b+c+d} \end{pmatrix}$$

$$f(ax^3+bx^2+cx+d) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$$
$$= a(x^3+3x^2+3x+1) + b(x^2+2x+1) + c(x+1) + d$$
$$= \boxed{a}\,x^3 + \boxed{(3a+b)}\,x^2 + \boxed{(3a+2b+c)}\,x + \boxed{(a+b+c+d)}$$

$\boxed{\text{Oss.}}$ Non è vero che le applicazioni lineari sono matrici.
Detto meglio
→ data una $f: V \to W$ lineare
→ data una base di V
→ data una base di W
esiste un'unica matrice che rappresenta l'applicazione nel senso che prende in INPUT le componenti di $v \in V$ e restituisce le componenti di $f(v) \in W$ (le componenti sono pensate come vettori colonna).

$\boxed{\text{Oss.}}$ Un sistema lineare si può pensare come applicazione lineare in cui le incognite sono le componenti di un vettore nello spazio di partenza, i termini noti le componenti di un vettore nello spazio di arrivo.

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 18

Titolo nota 23/10/2013

$\boxed{\text{Idea importante 1}}$ Mediante una base si può associare ad ogni elemento di uno spazio vettoriale una serie di numeri (le componenti del vett. rispetto alla base)

$\boxed{\text{Idea importante 2}}$ Data una appl. lin., e fissate basi in partenza ed arrivo, la matrice dell'applicazione manda le comp. in partenza nelle comp. in arrivo pensate come vettori colonna.

<u>Esercizio</u> Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$f(x,y) = (2x-3y,\ x+y,\ -2y)$$

(a) Verificare che è lineare

(b) Scrivere la matrice associata ad f con le basi canoniche

(c) Scrivere la matrice associata ad f usando come basi

$$e_1 = (2,1) \qquad e_2 = (1,1)$$

$$\varepsilon_1 = (1,1,0) \qquad \varepsilon_2 = (0,1,1) \qquad \varepsilon_3 = (2,1,1)$$

(a) Devo verificare che $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ $\forall v_1 \in \mathbb{R}^2\ \forall v_2 \in \mathbb{R}^2$

$$v_1 = (x_1, y_1) \qquad v_2 = (x_2, y_2) \qquad v_1+v_2 = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$f(v_1+v_2) = f(x_1+x_2,\ y_1+y_2) =$$

$$\left(2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2),\ (x_1+x_2)+(y_1+y_2),\ -2(y_1+y_2)\right)$$

$$f(v_1) = f(x_1,y_1) = (2x_1-3y_1,\ x_1+y_1,\ -2y_1)$$

$$f(v_2) = f(x_2,y_2) = (2x_2-3y_2,\ x_2+y_2,\ -2y_2)$$

Stesso conto per la verifica che $f(av) = af(v)$.

(b) $f(1,0) = (2,1,0) = \boxed{2}(1,0,0) + \boxed{1}\cdot(0,1,0) + \boxed{0}\cdot(0,0,1)$

$f(0,1) = (-3,1,-2) = \boxed{-3}\cdot(1,0,0) + \boxed{1}\cdot(0,1,0)\boxed{-2}\cdot(0,0,1)$

A con le basi canoniche $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Riprova $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+y \\ -2y \end{pmatrix}$

(c) Base in partenza: $\overset{e_1}{(2,1)}, \overset{e_2}{(1,1)}$

(sono una base perché sono 2 elementi e sono lin. indip. poiché non sono uno multiplo dell'altro).

Base in arrivo: $\overset{\varepsilon_1}{(1,1,0)}, \overset{\varepsilon_2}{(0,1,1)}, \overset{\varepsilon_3}{(2,1,1)}$

(dovrei verificare che sono lin. indip.: dovrei far vedere che

$x(1,1,0) + y(0,1,1) + z(2,1,1) = (0,0,0) \iff x = y = z$

il che si riduce ad un sistema lineare)

$f(e_1) = f(2,1) = (1,3,-2) = \boxed{x}\cdot\varepsilon_1 + \boxed{y}\cdot\varepsilon_2 + \boxed{z}\cdot\varepsilon_3$ → 1°colonna

In generale, devo capire come un vettore (a,b,c) si scrive usando la base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Impongo

$x\cdot(1,1,0) + y\cdot(0,1,1) + z\cdot(2,1,1) = (a,b,c)$

$$\begin{cases} x + 2z = a \\ x + y + z = b \\ y + z = c \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = a \\ y - z = b-a \\ y + z = c \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = a \\ y - z = b-a \\ 2z = c-b+a \end{cases}$$

$z = \dfrac{c-b+a}{2}$ $\quad y = z + b - a = \dfrac{c-b+a}{2} + b - a = \dfrac{c+b-a}{2}$

$x = a - 2z = a - (c-b+a) = b - c$ $\quad (x,y,z) = \left(b-c, \dfrac{c+b-a}{2}, \dfrac{c-b+a}{2}\right)$

Le componenti di $(\underset{\uparrow a}{1}, \underset{\uparrow b}{3}, \underset{\uparrow c}{-2})$ sono $(+5, 0, -2)$ → 1ª colonna

Controllo: $(1,3,-2) \overset{?}{=} +5\,\varepsilon_1 - 2\,\varepsilon_3$
$$= 5\,(1,1,0) - 2\,(2,1,1)$$

$f(e_2) = f(1,1) = (\underset{\uparrow a}{-1}, \underset{\uparrow b}{2}, \underset{\uparrow c}{-2})$ ha comp. $\left(4, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Controllo! $(-1,2,-2) \overset{?}{=} 4\,\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 - \frac{5}{2}\,\varepsilon_3$

$$= \boxed{4}\,(1,1,0) + \boxed{\tfrac{1}{2}}\,(0,1,1) \boxed{-\tfrac{5}{2}}\,(2,1,1) \quad \text{ok.}$$

Quindi la matrice A con base e_1, e_2 in partenza e base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ in arrivo è

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

(b) calcolare l'immagine di $(5,3)$ usando la nuova matrice.

Devo scrivere $(5,3)$ usando la base e_1, e_2

$$(5,3) = \boxed{2}\cdot(2,1) + \boxed{1}\cdot(1,1)$$

(per trovare le componenti 2 e 1 avrei dovuto risolvere un sist. lin.)

Moltiplico la matrice per il vettore colonna $(2,1)$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{1}{2} \\ -4-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

→ componenti di $f(5,3)$ rispetto alla base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

Quindi $f(5,3) = 14\,\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 - \frac{13}{2}\,\varepsilon_3$

$$= 14\,(1,1,0) + \tfrac{1}{2}\,(0,1,1) - \tfrac{13}{2}\,(2,1,1) = (1, 8, -6)$$

Problema classico: ho le componenti di un vettore rispetto ad una base e voglio le componenti dello stesso vettore rispetto ad un'altra base.

Ci piacerebbe

comp. risp. 1ª base $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{BLACK BOX}}$ $\rightsquigarrow$ comp. risp. 2ª base

La black box è usare un'opportuna matrice che ha come colonne

j-esima colonna: le componenti del j-esimo vettore della prima base rispetto alla seconda base.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 19

Titolo nota 25/10/2013

Ker e immagine di una applicazione lineare

Sia $f: V \to W$ una applic. lineare (V e W sono sp. vett.)
Si dice $\operatorname{Ker}(f)$ o nucleo di f l'insieme

$$\operatorname{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = \underset{\uparrow\, 0 \text{ di } W}{0} \} \subseteq V$$

Si dice immagine di f l'insieme

$$\operatorname{Im}(f) = \{ f(v) : v \in V \} \subseteq W$$
$$= \{ w \in W : \exists\, v \in V \text{ per cui } w = f(v) \}$$

Proposizione $\operatorname{Ker}(f)$ è un sottospazio vettoriale di V.
$\operatorname{Im}(f)$ " " " " " W.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Caso del $\ker(f)$

Se $v_1 \in \ker$ e $v_2 \in \ker$, allora $f(v_1+v_2) \underset{\text{linearità}}{=} f(v_1)+f(v_2) \underset{\substack{v_1 \in \ker \\ v_2 \in \ker}}{=} 0+0=0$
$\Rightarrow v_1+v_2 \in \ker$

Se $v \in \ker$ e $a \in \mathbb{K}$, allora $f(av) \underset{\text{linearità}}{=} a f(v) \underset{v \in \ker}{=} a \cdot 0 = 0$ $\Rightarrow av \in \ker$

Caso dell'immagine $\operatorname{Im}(f)$

Se $w_1 \in \operatorname{Im}(f)$ e $w_2 \in \operatorname{Im}(f)$, allora esistono $v_1 \in V$ e $v_2 \in V$ t.c.
$w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$. Ma allora
$$w_1 + w_2 = f(v_1)+f(v_2) = f(v_1+v_2) \Rightarrow w_1+w_2 \in \operatorname{Im}(f)$$
Se $w \in \operatorname{Im}(f)$ e $a \in \mathbb{K}$, allora esiste $v \in V$ t.c. $f(v) = w$, ma allora
$$aw = a f(v) = f(av) \Rightarrow aw \in \operatorname{Im}(f).$$

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Dimensione di ker e Immagine)
Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.
Supponiamo che V abbia dimensione finita.
Allora

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim V}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $n = \dim V$, sia $k = \dim \ker$ (ovviamente $k \le n$)
Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $\ker f$.
Allora $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip. in V,
Per un teorema precedente posso aggiungere $n-k$ elementi in modo da ottenere una base di V. Siano $v_{k+1}, \dots, v_n$ questi aggiunti.
Dico che $\underbrace{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)}_{n-k \text{ elem. di } W}$ sono una base di $\operatorname{Im}(f)$.

Se lo dimostro ho finito.
Devo fare 2 verifiche

① Verifico che generano tutta l'immagine: prendo $w \in \operatorname{Im}(f)$,
per definizione $\exists\, v \in V$ t.c. $w = f(v)$. Scrivo v come comb. lin. di $\{v_1, \dots, v_n\}$: $\quad v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n$
Ma allora

$$w = f(v) = f(\dots) = \underbrace{a_1 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(v_1)}} + \dots + a_k \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(v_k)}}}_{\text{perché } v_1, \dots, v_k \,\in\, \ker} + a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n)$$

Quindi w è comb. lineare di $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$

② Verifico che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono lin. indip.
Considero una loro comb. lin. che sia nulla

$$a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$f(\underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n}_{\in \ker f}) = 0$$

$\in \ker f$, quindi è comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$, cioè
$a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k$, ma allora
$-b_1 v_1 - \dots - b_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = 0$, ma (essendo i v_i tutti lin. indip.) deve per forza essere $b_1 = \dots = b_k = 0 = a_{k+1} = \dots = a_n$.

— o — o —

Conseguenze del teorema

① Se $\dim(W) > \dim(V)$, allora f NON è surgettiva, cioè $\mathrm{Im}(f)$ NON può essere uguale a tutto W.

Dim. $\dim \ker + \dim \mathrm{Im} = \dim V$, quindi per forza $\dim \mathrm{Im} \leq \dim V$

② Se $\dim(W) < \dim(V)$, allora f NON è iniettiva

Lemma $f: V \to W$ è iniettiva se e solo $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

Dim. lemma Supponiamo che $\ker(f)$ non sia solo $\{0\}$. Allora $\exists\, v \neq 0$ t.c. $v \in \ker(f)$. Ma allora

$$f(v) = f(0) = 0$$

Questo dice che non è iniettiva (v e 0, diversi in partenza, vanno a finire nello stesso elemento).

Supponiamo che $\ker(f)$ sia solo $\{0\}$. Supponiamo che $f(v_1) = f(v_2)$.
Ma allora $f(v_1) - f(v_2) = 0$, cioè
$f(v_1 - v_2) = 0$, cioè $v_1 - v_2 \in \ker f$, ma se $\ker f = \{0\}$ vuol dire che $v_1 - v_2 = 0$, cioè $v_1 = v_2$, e questo dice che f è iniettiva.

—o —o —

Dim. di ② $\dim \ker + \dim \mathrm{Im} = \dim V$

In particolare

$$\dim \ker = \dim V - \dim \mathrm{Im} \geq \dim V - \dim W > 0$$

uso che $\dim \mathrm{Im} \leq \dim W$

Quindi $\dim \ker(f) > 0$, quindi $\ker(f) \neq \{0\}$.

(3) Supponiamo che $\dim V = \dim W$.
Allora f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f è surgettiva

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\dim \ker + \dim \operatorname{Im} = \dim V$ $(= \dim W)$

$\rightarrow$ Se è iniettiva, allora $\dim \ker = 0$, ma allora $\dim \operatorname{Im} = \dim W$
ma allora $\operatorname{Im} f = W$, cioè f surgettiva. $= \dim V$

$\rightarrow$ Se è surgettiva, allora $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$, ma allora
$\dim \ker = 0$, ma allora $\ker = \{0\}$, quindi f è iniettiva.

— o — o —

<u>Back to linear systems</u> Scriviamo un sistema nella forma

$$Ax = b$$

Pensiamo alla matrice A come un'applicazione lineare. Pensiamo che il sistema sia omogeneo, cioè $b = 0$. Allora le soluzioni del sistema sono il ker dell'applicazione.
Se il sistema è non omogeneo, allora ha soluzione se e solo se $b \in \operatorname{Im}$.
In tal caso la soluzione è unica se e solo se l'applicazione è iniettiva, il che accade se e solo se $\ker = \{0\}$.

Questione di ker ... e Im ...

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 20

Titolo nota 25/10/2013

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ lineare}} & W \\ \downarrow{\scriptstyle\text{fissata una base}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{fissata una base}} \\ \text{numeri} & \xrightarrow{\text{Matrice}} & \text{numeri} \end{array}$$

sp. vett. e applic. lineari

numeri e matrici

vettori colonna

<u>Domanda</u>: se ho le componenti di un vettore v rispetto ad una certa base, come trovo le componenti di v rispetto ad un'altra base.

<u>Altra domanda</u>: ho una applicazione, scelgo 2 basi e ottengo una certa matrice. Se cambio le basi, come cambia la matrice.

<u>Esempio pratico</u>: consideriamo la base di $\mathbb{R}^3$ data da
$(1,1,1)$, $(2,1,3)$, $(0,-1,2)$.
Quali sono le componenti di $(5,6,7)$ o in generale di (a,b,c) rispetto a questa nuova base?

Dovrei, con pazienza, risolvere:

$$x(1,1,1)+y(2,1,3)+z(0,-1,2)=(a,b,c)$$

cioè:

$$\begin{cases} x+2y = a \\ x+y-z = b \\ x+3y+2z = c \end{cases}$$

$\boxed{1^a \text{ osservazione}}$ Mi basta trovare le componenti di $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ rispetto alla nuova base. Trovate queste, quelle del vettore generico (a,b,c) si trova per linearità: $a \cdot$ comp di $(1,0,0)$ $+ b \cdot$ comp di $(0,1,0)$ $+ c \ldots$

In altre parole, il cambio di componenti è dettato da una MATRICE 3×3, detta MATRICE di CAMBIO di BASE.

Supponiamo, in uno spazio V, di avere 2 basi: $e_1, \dots, e_n$ e $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

$$\boxed{\text{comp. rispetto a } e_1, \dots, e_n} \rightsquigarrow \underset{\text{Matrice } M}{\blacksquare} \rightsquigarrow \boxed{\text{comp. rispetto a } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \rightsquigarrow \underset{\text{Altra matrice } N}{\blacksquare} \rightsquigarrow \boxed{\text{comp. risp. a } e_1, \dots, e_n}$$

lasciare tutto invariato, cioè matrice identità

<u>Matrice identità</u>: matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Perché si chiama matrice identità?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tutti i vettori vengono lasciati inalterati

x = comp. risp. $e_1, \dots, e_n$

$\downarrow$

Mx = comp. risp. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$

$\downarrow$

NMx = comp. risp. $e_1, \dots, e_n = x$

Quindi $NM = I$, cioè $N = M^{-1}$, cioè N = inversa della matrice M.

<u>Def.</u> Data una matrice $M \in M_{n\times n}$ ← quadrata, si definisce matrice inversa la matrice N tale che

$$NM = MN = I_n$$

Come si trova la matrice inversa?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

M di cui voglio fare l'inversa — Identità

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Id — M^{-1}

Verifica
$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

finire il conto

(stessa cosa a fattori invertiti)

Data la base $\overset{\varepsilon_1}{(1,1,1)}$, $\overset{\varepsilon_2}{(2,1,3)}$, $\overset{\varepsilon_3}{(0,-1,2)}$, che cosa rappresenta M, cioè la matrice che ha come colonne "i vettori" della base?
Rappresenta il cambio da base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ a base canonica

Infatti $M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1^a \text{ colonna} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} = \varepsilon_1$

sono le componenti risp. alla base canonica del vettore che ha componenti $(1,0,0)$ risp. ad $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

$M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2^a \text{ colonna} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \varepsilon_2$

$M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 3^a \text{ colonna} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \varepsilon_3$

Quindi se ho le componenti rispetto alla base canonica e voglio le componenti rispetto alla base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ devo usare M^{-1}!

Le componenti di $(5,6,7)$ rispetto alla base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ sono

$$M^{-1}\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}.$$

Supponiamo di avere 2 basi strane $\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$

$\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\} = \hat{\mathcal{B}}$

oltre alla base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$

Se conosco le componenti rispetto a $\mathcal{B}$, come ottengo le componenti rispetto a $\hat{\mathcal{B}}$?

Esempio $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (2,1,3), (0,-1,2)\}$

$\hat{\mathcal{B}} = \{(2,0,1), (1,3,3), (2,1,4)\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

M INPUT: comp. $\mathcal{B}$ OUTPUT: comp. canonica

N " " $\hat{\mathcal{B}}$ " " "

$N^{-1}M$ INPUT: componenti $\mathcal{B}$

OUTPUT: comp. $\hat{\mathcal{B}}$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 21

Titolo nota 30/10/2013

SISTEMI LINEARI $\boxed{Ax = b}$

A matrice $m \times n$: m equazioni (righe) in n incognite
x vettore colonna delle incognite (n)
b vettore colonna dei termini noti (m)

Possibili interpretazioni Siano $C_1, \dots, C_n$ le colonne della matrice A.

① Posso pensare il sistema come

$$\boxed{x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b}$$

cioè come un tentativo di scrivere b come comb. lineare di $C_1, \dots, C_n$
(in questo contesto gli x_i sono i coefficienti della combinazione)

② Posso pensare alla matrice A come una applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e risolvere il sistema lineare significa trovare tutti i vettori $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $L_A(x) = b$ (cioè tutti i vettori in partenza che vanno a finire in b).

Domande: ① Esiste una soluzione ?
② Se sì, come sono fatte tutte le soluzioni ?

— o — o —

Risposta alla domanda ①

Un sistema lineare ha soluzione se e solo se b è combinazione lineare delle colonne $C_1, \dots, C_n$, cioè se e solo se
$b \in \operatorname{Span}\{C_1, \dots, C_n\}$ (Punto di vista con le comb. lineari)

Equivalentemente, un sistema lineare ha soluzione se e solo se
$b \in \operatorname{Im}(L_A)$ (Punto di vista con le applicazioni lineari)

Caso speciale Se $b=0$, cioè se il sistema è omogeneo, allora di sicuro c'è almeno una soluzione, quella banale con $x=0$

Risposta domanda (2) Struttura delle soluzioni di un sistema lineare.

Caso del sistema omogeneo. $Ax=0$

L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale (volendo è il ker di L_A).

$\boxed{\text{Dim.}}$ • Se x_1 e x_2 sono soluzioni, allora $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0$ quindi x_1+x_2 è soluzione

• Se x è soluzione e $a \in \mathbb{K}$, allora $A(ax) = aAx = a \cdot 0 = 0$ quindi ax è soluzione

Una volta che so che l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale, so che tutti i suoi elementi si scrivono come comb. lineare degli elementi di una base. Detta $\{v_1, \dots, v_k\}$ con $k = \dim$ una base, tutte le soluzioni si scriveranno come

$$\boxed{x = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k}$$

dove $c_1, \dots, c_k$ sono "parametri liberi" ai quali posso assegnare il valore che voglio.

Caso del sistema non omogeneo $Ax=b$

Supponiamo che esistano soluzioni. Supponiamo che x_1 e x_2 siano due soluzioni

(È vero che x_1+x_2 è ancora soluzione? No! $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 2b$ e $2b \neq b$ se $b \neq 0$)

Però $x_1 - x_2$ è una soluzione del sistema OMOGENEO corrispondente

stessa matrice A, solo termini noti $=0$.

$A(x_1-x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$

Fatto generale Sia x_0 una soluzione qualunque del sistema non omogeneo, cioè $Ax_0 = b$.

Allora l'insieme di TUTTE le soluzioni del sistema non omogeneo si ottiene sommando a x_0 una qualunque soluzione del sistema omogeneo corrispondente.

Quindi la formula generale è del tipo

$$x = \underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k}_{\text{soluzione generale del sistema omogeneo}} + \underbrace{x_0}_{\text{soluzione qualunque del sistema non omogeneo}}$$

Conseguenza pratica Se io conosco una soluzione x_0 di un sistema non omogeneo, allora le conosco tutte.

Dim. fatto generale Sia x_0 la soluzione speciale, sia x_1 un'altra soluzione. Allora $x_1 - x_0$ è soluzione dell'omog.:

$A(x_1 - x_0) = Ax_1 - Ax_0 = b - b = 0$,

quindi $x_1 - x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$, quindi

$$x_1 = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + x_0$$

Viceversa: Se prendo una soluzione x_0 del non omogeneo e aggiungo una soluzione v dell'omogeneo ottengo una soluzione del non omogeneo.

$$A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b$$

— o — o —

Caso particolare Cosa succede se $C_1, \dots, C_n$ sono linearmente indipendenti?

① Se il sistema è omogeneo, allora la soluzione banale $x = 0$ è l'unica possibile. Se ci fosse un'altra soluzione, avrei una combinazione lineare di $C_1, \dots, C_n$ che fa 0 senza che tutti i coeff. siano nulli.

② Se il sistema è non omogeneo, allora la soluzione o non esiste, oppure se esiste è unica. La differenza risolverebbe l'omog.

Caso ultra-particolare Cosa succede se il sistema è $n \times n$ (quadrato) e $C_1, \dots, C_n$ sono lin. indip. ?

Ora le colonne sono n vettori $C_1, \dots, C_n$ di $\mathbb{R}^n$ e sono lin. indip., quindi sono una base ed in particolare generano, quindi ogni vettore b è loro combinazione lineare, quindi la soluzione c'è sempre ed è unica.

Quindi soluzione unica qualunque sia il termine noto b.

Altra interpretazione: $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim \ker} + \dim \operatorname{Im} = \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\dim \text{partenza}}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} = n = \dim.$ arrivo,
quindi tutto lo spazio di arrivo è nell'immagine.

FREGATURA: per calcolare uno span o stabilire la lineare indipendenza bisogna risolvere un sistema lineare!

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 22

Titolo nota 30/10/2013

Sia X uno spazio vettoriale, e siano V e W due sottospazi.

Domande:

① $V \cap W$ è ancora un sottospazio? SI

② $V \cup W$ è ancora un sottospazio? NO

$\boxed{\text{Dim. ①}}$ • Siano v_1 e v_2 in $V \cap W$. È ancora vero che $v_1 + v_2 \in V \cap W$?

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \in V \text{ e } v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V \text{ perché } V \text{ s.sp.} \\ v_1 \in W \text{ e } v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W \text{ perché } W \text{ s.sp.} \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 + v_2 \in V \cap W$$

• Siano $v \in V \cap W$ e $a \in \mathbb{K}$. È ancora vero che $av \in V \cap W$?

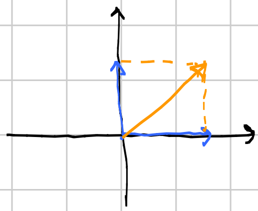
$$\left.\begin{array}{l} v \in V,\ a \in \mathbb{K} \Rightarrow av \in V \text{ perché } V \text{ s.sp.} \\ v \in W,\ a \in \mathbb{K} \Rightarrow av \in W \quad \text{"} \quad W \text{ s.sp.} \end{array}\right\} \Rightarrow av \in V \cap W.$$

— o — o —

Per vedere che in generale $V \cup W$ NON è un sottospazio basta fare un esempio.

$X = \mathbb{R}^2$, $V =$ asse x, $W =$ asse y

$V \cup W$ è l'unione dell'asse x e dell'asse y e non è un s.spazio perché non è chiuso rispetto alla somma



— o — o —

$\boxed{\text{Sottospazio SOMMA}}$ Si indica con $V+W$ l'insieme di tutti gli el. di X che sono somma di un elemento di V ed un elemento di W.

$$V + W = \{v + w : v \in V,\ w \in W\} \subseteq X$$

$\boxed{\text{Fatto semplice}}$ $V+W$ è un sottospazio vettoriale di X

$\boxed{\text{Dim.}}$ Siano $v_1 + w_1 \in V+W$ e $v_2 + w_2 \in V+W$. Allora

$$v_1 + w_1 + v_2 + w_2 = \underset{\substack{\cap \\ V}}{(v_1+v_2)} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{(w_1+w_2)} \in V+W$$

Sia $v+w \in V+W$ e sia $a \in \mathbb{K}$. Allora

$$a(v+w) = \underset{\substack{\cap \\ V}}{av} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{aw} \in V+W.$$

—o —o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ (FORMULA DI GRASSMANN) X sp. vett., V e W s.sp.
Allora

$$\boxed{\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $k = \dim(V \cap W)$
Sia $m = \dim V$
Sia $n = \dim W$

Sia $\underbrace{\{v_1, \dots, v_k\}}_{\text{stanno sia in } V \text{ sia in } W}$ una base di $V \cap W$

Posso completarla ad una base $v_1, \dots, v_k, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_m}_{\text{elementi aggiunti}}$ di V

Posso completarla ad una base $v_1, \dots, v_k, \underbrace{w_{k+1}, \dots, w_n}_{\text{elementi aggiunti}}$ di W

Dico che $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m, w_{k+1}, \dots, w_n$ sono una base di $V+W$. Quanti sono gli elementi? $\underbrace{m}_{\text{“i } v\text{”}} + \underbrace{n-k}_{\text{“i } w\text{”}}$

Se dimostro che sono una base ho finito.
La parte semplice è che generano. Infatti

$$\underset{\substack{\cap \\ V}}{v} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} = (a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) + (b_1 v_1 + \dots + b_k v_k + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_n w_n)$$

quindi ogni elemento di $V+W$ è comb. lineare dei $v_1, \dots, v_m$ e $w_{k+1}, \dots, w_n$

Vediamo che sono lin. indip.
Prendo una qualunque loro comb. lineare che sia nulla:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_m v_m + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_n w_n = 0$$

Voglio dim. che tutti i coeff. sono nulli. Porto i w a dx:

$$\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m}_{\in V} = \underbrace{-b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_n w_n}_{\in W} \qquad (\square)$$

Ma allora stanno entrambi in $V \cap W$, quindi sono entrambi comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$. In particolare

$$-b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_n w_n = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

Portando tutto dalla stessa parte, otteniamo una comb. lineare di $v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ che fa 0. Ma questi vettori sono una base di W, quindi tutti i coeff. devono essere nulli, quindi in particolare tutti i b_i devono essere nulli.
Tornando a $(\square)$ sappiamo ora che

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0,$$

ma essendo $v_1, \dots, v_m$ una base di V i coeff. devono essere tutti nulli, quindi anche gli a_i sono nulli.

— o — o —

<u>Conseguenze</u>. ① Se $V \cap W = \{0\}$, allora $\dim(V \cap W) = 0$, quindi
$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W$$

In questo caso si dice che la somma è <u>diretta</u> e si scrive

$$V \oplus W$$

Esempio Prendiamo 2 sottospazi di dimensione 3 in $\mathbb{R}^5$.
Allora la loro intersezione ha dimensione ≥ 1.

Infatti

$$\underbrace{\dim(V+W)}_{\leq 5} + \underbrace{\dim(V\cap W)}_{\text{è almeno } 1} = \underbrace{\dim(V)}_{=3} + \underbrace{\dim(W)}_{=3}$$

Prendiamo in $\mathbb{R}^3$ 2 piani passanti per l'origine (s.sp. vett. di dim 2). Allora l'intersezione ha dim ≥ 1

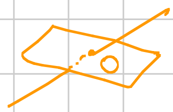
$$\underbrace{\dim(V+W)}_{=2,\,3} + \underbrace{\dim(V\cap W)}_{=2,\,1} = \underbrace{\dim(V)}_{=2} + \underbrace{\dim(W)}_{=2}$$

si realizzano solo
se i piani coincidono

Esempio In $\mathbb{R}^3$ prendiamo una $\underbrace{\text{retta per l'origine}}_{V}$ ed $\underbrace{\text{un piano per l'origine}}_{W}$

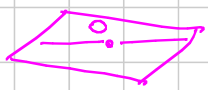
$$\underbrace{\dim(V+W)}_{=2,\,3} + \underbrace{\dim(V\cap W)}_{=1,\,0} = \underbrace{\dim V}_{=1} + \underbrace{\dim W}_{=2}$$

3+0: caso in cui l'intersezione è solo l'origine



In tal caso $\dim(V+W) = 3$, quindi
$V+W = \mathbb{R}^3$, cioè ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è somma di un vettore di V
e di un vettore di W.

2+1: caso in cui l'intersezione ha dim = 1, cioè la retta è
contenuta nel piano, quindi l'intersezione è la retta stessa
La somma $V+W$ ha dim. 2 ed è il piano stesso



$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Se $V \cap W = \{0\}$, cioè c'è somma diretta, allora ogni elemento $x \in V \oplus W$ si scrive in MODO UNICO come somma $v + w$ con $v \in V$ e $w \in W$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$. Allora

$$\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

Ma allora $v_1 - v_2$ e $w_2 - w_1 \in V \cap W$, ma allora sono nulli, cioè

$$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$
$$w_2 - w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2.$$

—o—o—

Notazione In caso di somma diretta v e w si chiamano le componenti di x rispetto a V e W.

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 23

Titolo nota 30/10/2013

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ (Teorema di sostituzione)

Sia V uno spazio vettoriale.

Sia $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ un insieme di vett. lin. indip.

Sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\} \subseteq V$ un insieme di generatori.

Allora

- $m \leq n$
- posso rimpiazzare m elementi di $\mathcal{B}$ con gli m elementi di $\mathcal{A}$ ottenendo ancora un insieme di generatori.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dimostriamo per induzione su m.

$\boxed{\text{Passo base: } m=1}$ $\mathcal{A} = \{v_1\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$.

È ovvio che $m \leq n$. Mostro che posso rimpiazzare uno dei w_i con v_1 ottenendo ancora dei generatori. Essendo $w_1, \dots, w_n$ generatori, posso scrivere

$$v_1 = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$$

Ora $v_1 \neq 0$ (se no $\mathcal{A}$ non sarebbe lin. indip.), quindi almeno uno degli a_i sarà $\neq 0$. A meno di cambiare i nomi, sia $a_1 \neq 0$.

Allora posso ricavare w_1

$$w_1 = \frac{1}{a_1} v_1 - \frac{a_2}{a_1} w_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} w_n \qquad (\Delta)$$

Quindi w_1 è combinazione lineare di $v_1, w_2, \dots, w_n$. Dico che $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori.

Ogni vettore che era comb. lin. di $w_1, w_2, \dots, w_n$ si può scrivere come comb. di $v_1, w_2, \dots, w_n$ (basta sostituire w_1 usando la formula (Δ)).

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ $\boxed{m-1 \Rightarrow m}$ Supponiamo che la tesi sia vera quando $\mathcal{A}$ ha $m-1$ elementi e dim. che la tesi è vera quando $\mathcal{A}$ ha m elementi.

$$\mathcal{A} = \{\underbrace{\boxed{v_1, \dots, v_{m-1}}}_{\mathcal{A}'}\ v_m\} \qquad \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Per ipotesi induttiva sappiamo che $m-1 \leq n$ e che posso sostituire $m-1$ elementi di $\mathcal{B}$, diciamo $w_1, \dots, w_{m-1}$, con quelli di $\mathcal{A}'$ in modo da avere ancora generatori $\{v_1, \dots, v_{m-1}, w_m, \dots, w_n\}$. Ora voglio sostituire un altro w_i con v_m.

Ne è rimasto qualcuno da sostituire? SI! Se non ne fosse rimasto nessuno, avremmo che $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ sono generatori, ma allora

$$v_m = a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1}$$

e portando tutto a sx avrei una comb. lin. dei v_i che fa 0 con un coeff. davanti a v_m che è $1 \neq 0$, quindi i v_i NON sarebbero lin. indip., il che è contro l'ipotesi.

Quindi $m \leq n$. Voglio fare la sostituzione. Come prima

$$v_m = a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1} + \underbrace{a_m w_m + \dots + a_n w_n}_{\text{uno dei coeff. qui deve essere } \neq 0 \text{ altrimenti come sopra i } v_i \text{ non sarebbero indipendenti}}$$

Diciamo che $a_m \neq 0$. Ma allora si procede come nel caso $m=1$ ricavando w_m in funzione del resto e facendo vedere che w_m si può sostituire con v_m, cioè

$$\{v_1, \dots, v_{m-1}, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$$

sono ancora generatori.

— o — o —

$\boxed{\text{Prodotto di matrici}}$ Sia A la matrice associata ad una applicazione lineare dopo aver scelto una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ in partenza ed una base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ in arrivo.

Le colonne $C_1, \dots, C_n$ della matrice sono le componenti di $f(e_1), \dots, f(e_n)$ rispetto alla base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$
(le colonne sono lunghe m)

$f(e_1) = C_1, \dots, f(e_n) = C_n$ $\qquad$ $f: \underset{\text{dim } n}{V} \longrightarrow \underset{\text{dim } m}{W}$

Dato un generico $x \in V$, scrivo $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ e ho

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$
$$= x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$$

Quindi $f(x)$ è comb. lineare di $C_1, \dots, C_n$ con gli stessi coeff. con cui x è comb. lin. di $e_1, \dots, e_n$.

$\boxed{\text{Prodotto di matrici} = \text{composizione di funzioni lineari}}$

$f: V \longrightarrow W \qquad g: W \longrightarrow U \qquad$ appl. lineari

$g \circ f: V \longrightarrow U$ funzione composta $\qquad g(f(v))$ occhio all'ordine

Se A rappresenta f e B rappresenta g, allora BA rappresenta $g \circ f$.

Il prodotto di matrici è definito in modo da rispettare la composizione. Nota: righe A = dim W
colonne B = dim W

Proprietà del prodotto   Se le dimensioni sono compatibili

- $A(BC) = (AB)C$ proprietà associativa che autorizza a scrivere ABC senza parentesi.
- $A(B+C) = AB + AC$
  $(A+B)C = AC + BC$
- $A(\lambda B) = \lambda AB$ $\lambda \in \mathbb{K}$
- $(AB)^t = B^t A^t$ (dimostrare per esercizio a partire dalla formula per il prodotto)

Proprietà falsa   In generale NON è vero che $AB = BA$.
In generale se esiste AB non è detto che esista BA.
Ma anche se A e B sono matrici $n \times n$ quadrate, dunque AB e BA esistono, non è detto che siano uguali.

- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ supposto che le inverse esistano

[Verifica : $(AB)(B^{-1}A^{-1}) \underset{\uparrow \text{associativa}}{=} A\underbrace{BB^{-1}}A^{-1} = \underbrace{A \cdot I}_{A} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$]

Analogamente : $(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$

Cambi di base $f : V \longrightarrow V$ A matrice associata nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$ in partenza ed arrivo.

Se cambio base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ la nuova matrice diventa

$$\boxed{B = M A M^{-1}}$$

Non posso semplificare M e M^{-1} perché non sono a contatto !!!

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 24

Titolo nota 06/11/2013

$\boxed{\text{DETERMINANTE}}$

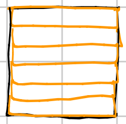
Obiettivo ①: ho n vettori in $\mathbb{R}^n$ e voglio sapere se sono linearmente indipendenti

Obiettivo ②: ho k vettori in $\mathbb{R}^n$ e voglio sapere $\dim \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$

Focalizziamoci su obiettivo 1, Il determinante si può vedere in due modi:

1 – come una funzione che prende in input n vettori di $\mathbb{R}^n$ e restituisce un numero: se il numero è 0 i vettori sono lin. DIP. se è $\neq 0$, i vettori sono lin. INDIP.

2 – come una funzione che prende in input una matrice $n \times n$ e restituisce un numero. La matrice va pensata come n vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono le sue righe.



$\boxed{\text{INDICE}}$

① **PROPRIETÀ BASIC**

Notazioni: voglio costruire $Det(v_1, \dots, v_n)$ dove $v_1, \dots, v_n$ sono n vettori di $\mathbb{R}^n$.

Chiamo $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$:

$e_1 = (1, 0, 0 \dots)$ $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$

Voglio che la funzione Det abbia queste proprietà:

(Det 1) $Det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ (in termini di matrici questo dice che $Det(Id) = 1$)

(Det 2) Se tra i vettori $v_1, \dots, v_n$ ce ne sono due uguali, diciamo $v_i = v_j$ per qualche $i \neq j$, allora

$Det(v_1, \dots, v_n) = 0$ (caso particolare in cui gli n vettori non sono indipendenti)

(Det 3) Se moltiplico uno degli n vettori per λ, allora "il λ esce fuori"

$$Det(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda \, Det(v_1, \dots, v_n)$$

(Det 4) Comportamento rispetto alla somma: metto $\bar{v}_i + \hat{v}_i$ al posto di v_i

$$Det(v_1, \dots, \bar{v}_i + \hat{v}_i, \dots, v_n) = Det(v_1, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_n) + Det(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

$\boxed{\text{Oss.}}$ Le proprietà (Det 3) e (Det 4) ci dicono che il Determinante, come funzione dell' i-esimo vettore, è un' applicazione lineare (qualunque sia l' indice i)

(2) Teorema (Esistenza e unicità).
Per ogni intero $n \geq 1$ esiste un'unica funzione che soddisfa le proprietà (Det 1), (Det 2), (Det 3), (Det 4).
Quella funzione si chiama determinante.

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } n=2}$ $v_1 = (a,b)$ $v_2 = (c,d)$ $\mathrm{Det}(v_1,v_2) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Intanto $v_1 = ae_1 + be_2$ $v_2 = ce_1 + de_2$

$$\mathrm{Det}(v_1,v_2) = \mathrm{Det}(ae_1+be_2, v_2) \underset{\text{(Det 4) su 1ª comp}}{=} \mathrm{Det}(ae_1,v_2) + \mathrm{Det}(be_2,v_2)$$

$$\underset{\text{(Det 3) su 1ª comp}}{=} a\,\mathrm{Det}(e_1,v_2) + b\,\mathrm{Det}(e_2,v_2)$$

$$= a\,\mathrm{Det}(e_1, ce_1+de_2) + b\,\mathrm{Det}(e_2, ce_1+de_2) \quad \rightsquigarrow \text{(Det 4) su 2ª comp.}$$

$$= a\,\mathrm{Det}(e_1, ce_1) + a\,\mathrm{Det}(e_1,de_2) + b\,\mathrm{Det}(e_2,ce_1) + b\,\mathrm{Det}(e_2,de_2)$$

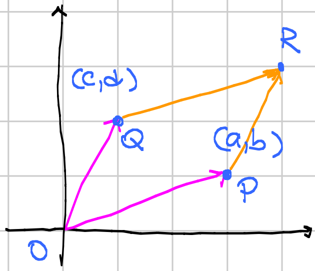
$$= ac\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_1,e_1)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{(Det 2)}} + ad\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_1,e_2)}_{\overset{\shortparallel}{1}\ \text{(Det 1)}} + bc\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_2,e_1)}_{\overset{\shortparallel}{-1}\ \text{vedremo dopo}} + bd\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_2,e_2)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{(Det 2)}}$$

$$= ad - bc.$$

Abbiamo così dimostrato che per $n=2$, se c'è una funzione che verifica le proprietà, questa è $ad-bc$.
Ora è facile verificare che questa funzione soddisfa (Det 1), ..., (Det 4) (esercizio) per cui per $n=2$ abbiamo il teorema di esistenza e unicità.

Geometricamente

$\mathrm{Det}((a,b),(c,d)) = \pm\, \text{Area}(OQRP) = ad-bc$

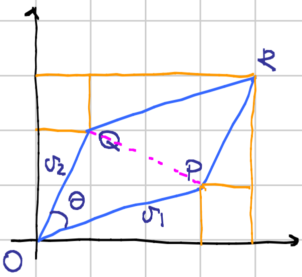


Quindi geometricamente il determinante svolge la sua funzione:
- se (a,b) e (c,d) sono lin. indip., il parallelogramma è "vero", quindi ha area $\neq 0$
- se (a,b) e (c,d) sono lin. dip., cioè essendo in 2 variabili sono uno multiplo dell'altro, allora il parallelogramma è degenere, quindi ha area nulla.

Concludendo: Det $= 0$ $\iff$ parallelogramma degenere
$\iff$ vettori lin. DIP.

$\boxed{\text{Dim. che Det = Area}}$

$\boxed{1^o \text{ modo}}$: scomporre la figura in tanti rettangoli e triangoli
Le coordinate sono note, quindi le aree si calcolano (fare per esercizio)
Questa dim. ha problemi di configurazione.



$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Area parallelogramma =

$$2 \text{ Area } (OQP) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} OQ \cdot OP \cdot \sin\theta$$

$$= \|OQ\| \cdot \|OP\| \cdot \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle^2}{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} = \ldots \text{ finire i conti}$$

$$= \sqrt{(ad-bc)^2}$$

Occhio quando si fa la radice:

$$\sqrt{(ad-bc)^2} = |ad-bc|$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 25

Titolo nota 06/11/2013

③ Conseguenze delle proprietà basic

(Det 5) Se scambio v_i e v_j, allora il determinante cambia di segno:

$$\mathrm{Det}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\mathrm{Det}(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$$

(Det 6) Se al posto di v_i metto la combinazione lineare di un po' di vettori, allora "la combinazione lineare esce fuori"

$$\mathrm{Det}(\dots, c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k, \dots) = c_1 \mathrm{Det}(\dots, w_1, \dots) + c_2 \mathrm{Det}(\dots, w_2, \dots) + \dots + c_k \mathrm{Det}(\dots, w_k \dots)$$

(Det 7) Se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathrm{Det}(v_1, \dots, v_n) = 0$.

$\boxed{\text{Dim di Det 5}}$ $\mathrm{Det}(\dots, \underset{\uparrow \text{ pos. } i}{v_i + v_j}, \dots, \underset{\uparrow \text{ pos. } j}{v_i + v_j}, \dots) = 0$ (Det 2)

$$= \mathrm{Det}(\dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots) + \mathrm{Det}(\dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots)$$

$$= \underbrace{\mathrm{Det}(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ (\text{Det } 2)} + \underbrace{\mathrm{Det}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \mathrm{Det}(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)}_{\overset{\shortparallel}{0}\text{, quindi sono uno l'opposto dell'altro}} + \underbrace{\mathrm{Det}(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ (\text{Det } 2)}$$

<u>Nota</u>: la (Det 5) si chiama ALTERNANZA: se inverto 2 variabili, cambia il segno.

Dim di (Det 6) "Si tirano prima fuori le somme con (Det 4), poi le costanti con (Det 3)"

Dim. di (Det 7) Supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ siano lin. DIP.
Allora uno dei vettori è comb. lineare degli altri
(scrivo una comb. lineare $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ e se i coeff. non sono tutti nulli, posso ricavare un vettore in funzione degli altri). Facciamo finta che sia v_1:

$$v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_n v_n.$$

Ma allora

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \mathrm{Det}(c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, v_2, \dots, v_n) \\ &= c_2 \mathrm{Det}(v_2, v_2, \dots, v_n) + \dots + c_n \mathrm{Det}(v_n, v_2, \dots, v_n)\end{aligned}$$

sono tutti nulli perché ci sono sempre 2 vettori uguali

$$= 0.$$

— o — o —

Oss. Nel caso $n = 2$ abbiamo usato che $\det(e_2, e_1) = -1$.
Questo segue dall'alternanza: $\det(e_2, e_1) \underset{\text{alt.}}{=} -\det(e_1, e_2) \underset{(\text{Det } 1)}{=} -1$

— o — o —

Caso $n = 3$

$$\begin{aligned} v_1 &= (a, b, c) = a e_1 + b e_2 + c e_3 \\ v_2 &= (d, e, f) = d e_1 + e e_2 + f e_3 \\ v_3 &= (g, h, i) = g e_1 + h e_2 + i e_3 \end{aligned} \qquad \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(v_1, v_2, v_3) &= \mathrm{Det}(a e_1 + b e_2 + c e_3, v_2, v_3) \\ &= a \,\mathrm{Det}(e_1, v_2, v_3) + b\, \mathrm{Det}(e_2, v_2, v_3) + c\, \mathrm{Det}(e_3, v_2, v_3) \\ &= a\, \mathrm{Det}(e_1, d e_1 + e e_2 + f e_3, v_3) + b \dots + c \dots \\ &= a d \underbrace{\mathrm{Det}(e_1, e_1, v_3)}_{0 \text{ perché ci sono } 2\, e_1} + a e\, \mathrm{Det}(e_1, e_2, v_3) + a f\, \mathrm{Det}(e_1, e_3, v_3) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

in totale sono venuti 9 termini

Ottenuti i 9 termini, sostituisco v_3, sviluppo e ottengo 27 termini, di cui però molti sono nulli perché hanno 2 vettori uguali. Fatti i conti (esercizio) resta

$$\boxed{\begin{aligned} &aei \operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3) + bfg \operatorname{Det}(e_2,e_3,e_1) + cdh \operatorname{Det}(e_3,e_1,e_2) + \\ &+ ceg \operatorname{Det}(e_3,e_2,e_1) + bdi \operatorname{Det}(e_2,e_1,e_3) + afh \operatorname{Det}(e_1,e_3,e_2) \end{aligned}}$$

Sostanzialmente ci sono e_1, e_2, e_3 disposti in tutti i modi possibili

$\operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3) = 1$ (Det 1)

$\operatorname{Det}(e_3,e_2,e_1) \underset{\text{alt}}{=} -\operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3) \underset{\text{Det 1}}{=} -1$

$\operatorname{Det}(e_2,e_1,e_3) = -\operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3) = -1 = \operatorname{Det}(e_1,e_3,e_2)$

$\operatorname{Det}(e_2,e_3,e_1) = -\operatorname{Det}(e_2,e_1,e_3) = +\operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3) = 1$

$\operatorname{Det}(e_3,e_1,e_2) = -\operatorname{Det}(e_3,e_2,e_1) = +\operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3) = 1$

Conclusione:

$$\boxed{\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh}$$

FORMULA DI SARRUS PER DETERMINANTE 3×3

① Si verifica che questa funzione ha le proprietà (Det 1), ..., (Det 4) quindi questo dimostra il teo. di esistenza e unicità nel caso 3×3.

② $\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$

Achtung! Vale solo per il determinante 3×3 e 2×2.

Da $n = 4$ in poi NON FUNZIONA!!

③ Interpretazione geometrica

Il Det 3×3 è il volume di un "parallelepipedo storto"

Se i vettori sono lin. DIP, il parallelepipedo degenera ed il volume viene 0.

Questo è un se e solo se

— o — o —

④ Determinante e algoritmo di Gauss

Cosa succede al Det se faccio operazioni alla Gauss?

→ Se scambio 2 righe, il determinante cambia di segno

→ Se sostituisco v_i con $a v_i + b v_j$, ho che

$$\text{Det}(\ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } i}}{a v_i + b v_j}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } j}}{v_j}, \ldots) = a\,\text{Det}(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) + b\,\underbrace{\text{Det}(\ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots)}_{=0}$$

$$= a\,\text{Det}(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots)$$

Quindi se faccio l'operazione vetero-ortodossa con $a=1$, il determinante non cambia, altrimenti viene moltiplicato per a.

Idea: con l'algoritmo di Gauss si semplifica la matrice fino ad ottenerne una per cui so calcolare il determinante.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 26

Titolo nota 06/11/2013

Determinante di matrici DIAGONALI

Una matrice diagonale è fatta così $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono numeri dati arbitrari (anche 0). Il resto sono tutti zeri. In questo caso

$$\text{Det}(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Dim.
$$\begin{aligned}
\text{Det}(D) &= \text{Det}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n) \\
&= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n) \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, \lambda_3 e_3, \dots, \lambda_n e_n) \\
&= \dots \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \underbrace{\text{Det}(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{= 1 \text{ per (Det 1)}}
\end{aligned}$$

Determinante di matrici TRIANGOLARI SUPERIORI

Matrici con tutti 0 "sotto la diagonale" $\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ & \lambda_2 & \text{roba} & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$

$$\boxed{\text{Det}\, T = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n}$$ "E' come se fosse diagonale"

Dim. $\text{Det}\, T = \text{Det}(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(\lambda_1 e_1 + w_1, v_2, \dots, v_n)$

Ho scritto $v_1 = \lambda_1 e_1 + \underbrace{c_2 e_2 + c_3 e_3 + \dots + c_n e_n}_{w \text{ e ha componenti solo rispetto a } e_2, \dots, e_n}$

$$\text{Det}\, T = \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n) + \underbrace{\text{Det}(w_1, v_2, \dots, v_n)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

Dove stanno i vettori $w_1, v_2, \dots, v_n$? Stanno nel sottospazio generato da $e_2, \dots, e_n$ (perché hanno 0 come prima componente).
Quindi sono n vettori in uno spazio di dimensione $(n-1)$, quindi sono linearmente dipendenti, quindi il loro Det è 0.

Procedendo allo stesso modo [fare ancora un passaggio a mano per verificare di aver capito il trucco]

$$\operatorname{Det} T = \lambda_1 \operatorname{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda_1 \lambda_2 \operatorname{Det}(e_1, e_2, v_3, \dots, v_n)$$
$$= \dots = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \underbrace{\operatorname{Det}(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{=1.}$$

— o — o —

<u>Conseguenza</u>: data una matrice qualunque, con Gauss arrivo in forma triangolare. Allora

$$\operatorname{Det}(\text{matrice iniziale}) = \operatorname{Det}(\text{triangolare finale}) \cdot (\pm 1)$$

a seconda di quanti scambi di riga ho fatto.

Occhio: serve GAUSS ULTRA-ORTODOSSO

⇝ Metodo di calcolo dei determinanti pratico
⇝ Dimostrazione del teorema di unicità in generale (SE esiste una funzione con le proprietà (Det 1), ..., (Det 4), allora il suo valore è ben determinato e si calcola in questo modo).

<u>Oss.</u> Facendo l'algoritmo di Gauss in tanti modi posso ottenere matrici ∇ finali diverse, ma tutte avranno uguale il prodotto degli elementi sulla diagonale.

— o — o —

SVILUPPI DI LAPLACE PER COLONNE

MINORI Un <u>minore</u> di una matrice è una qualunque sottomatrice ottenuta cancellando un po' di righe ed un po' di colonne dalla matrice originaria.

<u>Esempio</u>
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$ è un minore 2×2

<u>Notazione</u> Data una matrice $n \times n$ A, si indicano con a_{ij} i suoi elementi, e con $A_{i,j}$ i minori $(n-1) \times (n-1)$ ottenuti cancellando la riga i e la colonna j.

<u>Esempio</u> $n=4$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$a_{3,2} = 6$

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli sviluppi di LAPLACE permettono di calcolare il Det di una matrice $n \times n$ a patto di saper fare i determinanti $(n-1) \times (n-1)$.

<u>Sviluppo di Laplace rispetto alla 1° colonna</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A \qquad \text{Det } A = a_{1,1} \cdot \text{Det } A_{1,1} - a_{2,1} \cdot \text{Det } A_{2,1} + a_{3,1} \cdot \text{Det } A_{3,1}$$

$$= 1 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 10 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + 2 \text{ Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 - 10 \cdot 10 + 2(8-3) = 5 - 100 + 10 = -85$$

(controllare che venga la stessa cosa con SARRUS e GAUSS)

Sviluppo di Laplace rispetto alla 3ª colonna

$$\text{Det } A = a_{1,3} \cdot \text{Det } A_{1,3} - a_{2,3} \cdot \text{Det } A_{2,3} + a_{3,3} \cdot \text{Det } A_{3,3}$$

$$= 3 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3(-2) - 4 \cdot (-4) + 5 \cdot (1-20) = -6 + 16 - 95 = -85$$

Morale: gli sviluppi di LAPLACE li posso fare rispetto ad una qualunque colonna, ma anche rispetto ad una qualunque riga. Viene sempre il determinante !!!

Come metto i segni: secondo questo schema.

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \end{matrix}$$

Detto formalmente: davanti a $a_{ij} \text{ Det } A_{ij}$ metto $(-1)^{i+j}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Sviluppando secondo la 2ª riga:

$$-10 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

controllare che venga -85.

— o — o —

Dando per buoni gli sviluppi di LAPLACE è immediato che

$$\text{Det } A = \text{Det } A^t$$

Dim. Gli sviluppi per riga di A sono quelli per colonna di A^t.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 27

Titolo nota 08/11/2013

Determinante Proprietà basic: (Det 1), ..., (Det 4)

$\Downarrow$

Alternanza, Det = 0 se i vettori sono lin. DIP.

$\Downarrow$

Le operazioni dell'algoritmo di Gauss ultra-ortodosso cambiano al ± il segno del determinante, determinante delle matrici triangolari superiori

$\Downarrow$

Procedura operativa per il calcolo del Determinante (posto che esista una funzione che verifica le proprietà basic)

$\Downarrow$

Unicità del Determinante

— o — o —

Cosa è rimasto? (1) Che esiste effettivamente una funzione che soddisfa le basic

(2) Se i vettori sono lin. INDIP. $\Rightarrow$ Det $\neq 0$

— o — o —

Come si dimostra l'esistenza? Per induzione usando gli sviluppi di LAPLACE per colonne.

Teorema misterioso Lo sviluppo di LAPLACE rispetto alla prima colonna fornisce una funzione che verifica (Det 1), ..., (Det 4) in ogni dimensione.

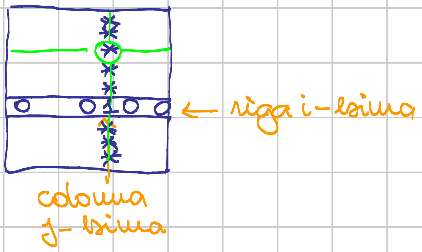
Più in generale, lo sviluppo rispetto ad una qualunque colonna verifica (Det 1), ..., (Det 4).

— o — o —

Corollario Dim. il teo. mist, per forza tutti gli sviluppi rispetto alle colonne danno lo stesso risultato (perché per unicità c'è al max. una funzione che verifica le basic)

$\boxed{\text{Teorema}}$ Tutti gli sviluppi per riga danno come risultato il Det, quindi in particolare danno tutti lo stesso risultato.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{Caso più semplice}}$ Caso in cui faccio lo sviluppo rispetto ad una riga che contiene tutti 0 ed un 1.



Sviluppo diventa:

$$\boxed{\underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{segno}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ a_{i,j}}}{1} \cdot \det A_{ij}}$$

Per calcolare il Det, faccio lo sviluppo secondo la colonna j-esima:

$$\underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{segno}} \cdot \underbrace{1}_{a_{ij}} \cdot \det A_{ij} + \sum_{k \neq i} (-1)^{k+j} a_{k,j} \underbrace{\operatorname{Det} A_{k,j}}_{\substack{0 \text{ perché la matrice } A_{kj} \text{ ha} \\ \text{una riga di tutti 0.}}}$$

Quindi nel caso semplice, Det coincide con lo sviluppo rispetto a quella riga.

$\boxed{\text{Caso semi semplice}}$ Caso in cui la riga è del tipo $0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots, 0$.
Stesso discorso, solo che al posto di 1 c'è λ (oppure volendo: le costanti escono fuori).

$\boxed{\text{Caso generale}}$ Se la riga contiene tanta roba: $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$
Allora il Det è uguale alla somma dei determinanti delle varie matrici in cui lascio un termine e metto gli altri $=0$.

$$\operatorname{Det} \begin{bmatrix} \\ a_{i,1}, a_{i,2}, \dots \\ \\ \end{bmatrix} = \operatorname{Det} \begin{bmatrix} \\ a_{i,1}, 0\,0\,0\,0 \\ \\ \end{bmatrix} + \operatorname{Det} \begin{bmatrix} \\ 0\ a_{i,2}\ 0 \_ 0 \\ \\ \end{bmatrix} + \dots$$

e così ottengo lo sviluppo per riga.

— o — o —

Conseguenze degli sviluppi di LAPLACE

① $\operatorname{Det} A = \operatorname{Det} A^t$

② Metodo operativo per il calcolo dei determinanti, oltre a Gauss.

Esempio

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 9 & 4 & 1 \\ 22 & 0 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppo rispetto 3ª riga

$$= -\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 0 & 9 & 1 \\ 22 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{2ª colonna}}{=} -5\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 13 & 8 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 22 & 10 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{3ª colonna}}{=} 5\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 22 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= 5\,(13\cdot 10 - 22\cdot 8) = \dots$$

— o — o —

Sviluppi di LEIBNITZ

2×2: $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

3×3: $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \boxed{aei} + \boxed{bfg} + cdh - ceg - bdi - afh$

In ogni prodotto c'è sempre un elemento di ogni riga ed un elemento di ogni colonna. Non solo: ci sono tutti i possibili prodotti di questo tipo, che sono $n!$ (ho a disposizione n elementi della 1ª riga, poi $n-1$ della 2ª diversi dal precedente, $n-2$ nella 3ª, e così via)

Supponiamo nel 3×3 di sviluppare il formulone

$$\mathrm{Det}(ae_1+be_2+ce_3,\ de_1+e\,e_2+fe_3,\ g\,e_1+h e_2+i\,e_3)$$

vengono 27 termini ciascuno composto da un coeff della 1ª riga, uno della 2ª e 1 della terza, il tutto moltiplicato per $\mathrm{Det}(e_i, e_j, e_k)$.
Sopravvivono, con coeff. $\neq 0$, solo quelli con 3 indici diversi.
I sopravvissuti sono $+$ o -1 a seconda che diventano la base canonica con un numero pari o dispari di scambi.

Ad esempio: $bfg\,\mathrm{Det}(e_2, e_3, e_1) = -bfg\,\mathrm{Det}(e_1, e_3, e_2)$
$= bfg\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_1, e_2, e_3)}_{=1}$.

$$bdi\,\mathrm{Det}(e_2, e_1, e_3) = -bdi\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_1, e_2, e_3)}_{=1}$$

In generale: • in un determinante $n \times n$ compaiono $n!$ addendi
- ogni addendo è il prodotto di n elementi della matrice, presi uno per riga ed uno per colonna
- il segno $+$ o $-$ dipende da quanti scambi servono per trasformare i corrispondenti vettori della base nella base canonica.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 28

Titolo nota 08/11/2013

Applicazioni del Det: (1) Formula per matrice inversa
(2) Formula di CRAMER
(3) Formula per vettori perpendicolari

(1) $\boxed{\text{MATRICE INVERSA}}$ Data una matrice A $n \times n$, trovare la matrice inversa (posto che esista)

<u>1° modo già visto</u>: $(A \mid I)$ e lavoro alla Gauss fino ad ottenere qualcosa del tipo $(I \mid B)$.
Allora $B = A^{-1}$. Se strada facendo viene una riga nulla, allora l'inversa non esiste.

<u>2° modo</u>: con i determinanti. Intanto esiste l'inversa se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Come si calcola l'inversa:
1 – A_{ij}
2 – Aggiusto i segni
3 – Trasposta
4 – Divido per Det A

Data la matrice $A = \{a_{i,j}\}$, costruisco la matrice $\{\det A_{ij}\}$, quindi al posto di $a_{i,j}$ metto $\text{Det}(A_{i,j})$.
Poi cambio i segni con la solita regola $\begin{smallmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{smallmatrix}$
Faccio la trasposta
Divido per det A

<u>Esempio</u> 2×2 $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}}_{\det A_{ij}} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}_{\text{segni a posto}} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}_{\text{trasposta}} \rightsquigarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esempio 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Det: } 2+0+2-0-0-1=3$$

$$\underset{\text{Det } A_{ij}}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underset{\text{Segni ok}}{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underset{\text{Trasposta}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underset{\text{Divido per Det}}{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Controllare che venga uguale con Gauss.

— o — o —

$\boxed{\text{FORMULA DI CRAMER}}$ Consideriamo un sistema lineare $n \times n$ $Ax = b$, con A matrice $n \times n$ (sistema quadrato).

Per fatti già detti, c'è soluzione unica se e solo se le colonne di A sono linearmente indip. Ora questo è equivalente a $\det A \neq 0$. In questo caso la soluzione è del tipo

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

dove

$$x_i = \frac{\text{Det } A_i}{\text{Det } A}$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con b.

Esempio

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + y - z = -1 \\ x - y + 5z = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\text{Det}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 1 & -1 \\ \boxed{2} & -1 & 5 \end{pmatrix}}{\text{Det } A} \qquad y = \frac{\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 3 \\ 1 & \boxed{-1} & -1 \\ 1 & \boxed{2} & 5 \end{pmatrix}}{\text{Det } A} \qquad z = \frac{\ldots}{\ldots}$$

— o — o —

$\boxed{\text{FORMULA PER VETTORI PERPENDICOLARI}}$

Prendo 2 vettori in $\mathbb{R}^3$: (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2)

Obiettivo: produrre un vettore perpendicolare ad entrambi.
Penso FORMALMENTE al determinante

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

Penso allo sviluppo di Laplace rispetto alla 1ª riga

$$e_1(y_1z_2 - z_1y_2) - e_2(x_1z_2 - z_1x_2) + e_3(x_1y_2 - y_1x_2)$$

$$= (\underbrace{y_1z_2 - z_1y_2}_{\det A_{11}}, \underbrace{-x_1z_2 + z_1x_2}_{-\det A_{1,2}}, \underbrace{x_1y_2 - y_1x_2}_{\det A_{1,3}})$$

$$\underbrace{x_1 \cdot \det A_{11} - y_1 \det A_{1,2} + z_1 \det A_{1,3}}_{\text{prod. scalare tra } (x_1,y_1,z_1) \text{ e vett. mist.}} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0$$

sviluppo rispetto alla 1ª riga

2 righe uguali

Analogamente: prod. scalare tra (x_2, y_2, z_2) e vett. mist. =

$$= x_2 \cdot \det A_{11} - y_2 \cdot \det A_{1,2} + z_2 \cdot \det A_{1,3} = \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0$$

sviluppo risp. 1ª riga.

Lo stesso discorso vale in ogni dimensione; supponiamo che in $\mathbb{R}^4$ voglio trovare un vettore perp. a 3 vettori dati

(x_1, y_1, z_1, w_1)
(x_2, y_2, z_2, w_2)
(x_3, y_3, z_3, w_3)

$$\begin{array}{l} (e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \;\; e_4) \\ (x_1, y_1, z_1, w_1) \\ (x_2, y_2, z_2, w_2) \\ (x_3, y_3, z_3, w_3) \end{array}$$

Le 4 componenti del vettore saranno

$$(\text{Det } A_{1,1}, -\text{Det } A_{1,2}, \text{Det } A_{1,3}, -\text{Det } A_{1,4})$$

Fare il prodotto scalare tra vett. trovato ed uno dei 3 dati viene 0 perché è come sviluppare il Det della matrice 4×4 in cui la prima riga è il vettore dato in considerazione

— o — o —

$\boxed{\text{Perché funziona CRAMER}}$ Indichiamo con $C_1, \dots, C_n$ le colonne della matrice A.

Supponiamo che $(x_1, \dots, x_n)$ sia soluzione, cioè

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b$$

$$A = \big(C_1 \,|\, C_2 \,|\, \cdots \,|\, C_n \big) \qquad A_i = \big(\cdots \,|\, \underset{\uparrow \atop \text{colonna } i}{b} \,|\, \cdots \big)$$

quindi

$$\text{Det } A_i = \text{Det} \Big(C_1 \,\Big|\, C_2 \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \overset{\text{colonna } i}{\underbrace{x_1 C_1 + \dots + x_n C_n}_{\text{comb. lineare che esce fuori}}} \,\Big|\, C_{i+1} \,\Big|\, \dots \; C_n \Big)$$

$$= x_1 \text{Det}(C_1 | C_2 | \dots | C_1 | \dots C_n) + x_2 \text{Det}(C_1 | C_2 | \dots | C_2 | \dots C_n) + \dots$$

questi sono tutti nulli tranne quello i-esimo, che viene det A

Ho ottenuto che $\quad \text{Det } A_i = x_i \cdot \text{Det } A$, da cui ricavo x_i.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 29

Titolo nota 15/11/2013

RANGO di una matrice

Def. Sia $A \in M_{m\times n}$ una matrice (dimensioni qualunque). Si definisce
- R-rango il massimo numero di righe lin. indip.
- C-rango " " " colonne " "
- D-rango il più grande k per cui A ammette un minore k×k con determinante ≠ 0.

Proprietà semplici L'R-rango è uguale
(i) il più grande k per cui A ammette k righe lin. indip.
(ii) la dimensione del sottospazio generato dalle righe. Cioè, dette $R_1, \dots, R_m$ le righe dim (Span ($R_1, \dots, R_m$))
(iii) la dimensione dell'immagine dell'applic. ... matrice A^t.

Il C-rango è uguale
(i) il più grande k per cui A ammette k colonne lin. indip.
(ii) dette $C_1, \dots, C_n$ le colonne C-rango = dim Span ($C_1, \dots, C_n$)
(iii) la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A

Osservazione $\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{\text{C-rango }(A)} + \dim(\ker(A)) = \underbrace{n}_{\text{dim. sp. partenza}}$

Fatti importanti (rango e algoritmo di Gauss)
(1) Le operazioni dell'algoritmo di Gauss non cambiano il rango
(2) Se A è una matrice a scala, allora

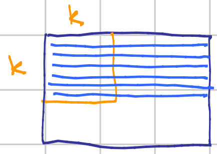
R-rango = C-rango = D-rango = numero di righe non nulle
= numero dei PIVOT.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Per ogni matrice A si ha che

R-rango = C-rango = D-rango = numero di righe non nulle al termine dell'alg. di Gauss.

Ovvio: Se A è $m \times n$, allora il suo rango al max vale il più piccolo tra m ed n.

$\boxed{\text{Dim. che R-rango} \geq \text{D-rango}}$ Indichiamo R-rango $= r$. Voglio dim. che D-rango è $\leq r$. Prendiamo un minore $k \times k$ con $k \geq r+1$. Questo minore ha almeno $r+1$ righe. Queste non possono essere tutte lin. indip., quindi il det del minore è 0.



} queste righe sono lin. dip. come righe della matrice grande, quindi sono lin. dip. anche come righe della matrice piccola.

$\boxed{\text{Dim. che C-rango} \geq \text{D-rango}}$ Stessa cosa, scambiando righe con colonne.

$\boxed{\text{Dim. che alg. di Gauss non cambia R-rango}}$

① Scambiare 2 righe non può cambiare l'R-rango

② Siano $R_1, \ldots, R_m$ le righe della matrice. Sostituisco R_1 con $\hat{R}_1 = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \ldots + a_m R_m$ purché $a_1 \neq 0$. Allora

$$\underbrace{\text{Span}(R_1, R_2, \ldots, R_m)}_{\text{R-rango prima}} = \underbrace{\text{Span}(\hat{R}_1, R_2, \ldots, R_m)}_{\text{R-rango dopo}}$$

Sia $w \in \text{Span}(\hat{R}_1, R_2, \ldots, R_m)$. Questo vuol dire che

$$\begin{aligned} w &= c_1 \hat{R}_1 + c_2 R_2 + \ldots + c_m R_m \\ &= c_1 (a_1 R_1 + \ldots + a_m R_m) + c_2 R_2 + \ldots + c_m R_m \\ &= c_1 a_1 R_1 + (c_1 a_2 + c_2) R_2 + \ldots + (c_1 a_m + c_m) R_m \end{aligned}$$

$\Rightarrow w \in \text{Span}(R_1, R_2, \ldots, R_m)$

Viceversa, se $w \in \mathrm{Span}(R_1, R_2, \dots, R_m)$, allora

$w = c_1 R_1 + c_2 R_2 + \dots + c_m R_m$ $\qquad R_1 = \frac{1}{a_1}\hat{R}_1 - \frac{a_2}{a_1} R_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} R_m$

$$= c_1\left(\frac{1}{a_1}\hat{R}_1 - \frac{a_2}{a_1} R_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} R_m\right) + c_2 R_2 + \dots + c_m R_m$$

$$= \frac{c_1}{a_1}\hat{R}_1 + \left(c_2 - c_1\frac{a_2}{a_1}\right) R_2 + \dots + \left(c_m - c_1\frac{a_m}{a_1}\right) R_m$$

$\Rightarrow w \in \mathrm{Span}(\hat{R}_1, R_2, \dots, R_m)$

Dim. che alg. di Gauss non cambia C-rango

Sia A una matrice, e sia A' ottenuta da A mediante operazioni alla Gauss

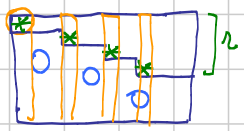
$$C\text{-rango}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = n - \dim(\underline{\ker(A)})$$

$\ker(A)$ = soluzioni di $Ax = 0$
$\parallel$
soluzioni di $A'x = 0$ perché Gauss non cambia le soluzioni del sistema

$$= n - \dim(\ker(A')) = \dim(\mathrm{Im}(A')) = C\text{-rango}(A').$$

Dim che C-rango = R-rango = numero di righe non nulle per le matrici a scala.

Prendiamo una matrice a scala con r righe non nulle.



È del tutto ovvio che R-rango $\leq r$. Resta da dimostrare che $R_1, \dots, R_r$ sono lin. indip. Questo è vero perché una qualunque comb. lin. di che sia 0 deve avere coeff. 0 su R_1, ma allora deve esserci coeff. 0 anche sulla seconda riga, e così via.

Dim. che C-rango $\leq r$. Infatti

C-rango $= \dim(\mathrm{Span}(c_1, \dots, c_n))$, ma $\mathrm{Span}(c_1, \dots, c_n) \subseteq \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_r)$
dove $e_1, \dots, e_r$ sono i primi r vettori canonici.

Ora devo trovare r colonne lin. indip.
Basta prendere le r colonne con i pivot.
Qui vale lo stesso discorso fatto prima per le righe. Volendo:
"girando" quelle colonne si ottiene a sua volta una matrice a scala.

ALGEBRA LINEARE − LEZIONE 30

Titolo nota 15/11/2013

Abbiamo visto:

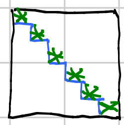
- R-rango e C-rango non cambiano facendo Gauss
- R-rango = C-rango per le matrici a scala (= numero righe $\neq 0$)
- D-rango $\leq$ R-rango e D-rango $\leq$ C-rango sempre.

Da queste segue che D-rango $\leq$ R-rango = C-rango sempre.

Resta da vedere che D-rango $\geq$ R-rango.
Per far questo devo dimostrare il seguente enunciato:
se in una matrice ci sono almeno r righe lin. indip., allora c'è almeno un minore $r \times r$ con det $\neq 0$.

— o — o —

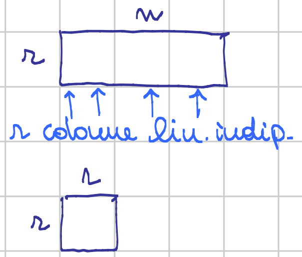
Parentesi: prendiamo una matrice quadrata $n \times n$ con n righe lin. indip.
Questa matrice ha R-rango $= n$,
Quindi quando la riduco a scala vengono tutti gradini da uno, cioè c'è un pivot su ogni colonna.
Quindi Det = prodotto pivot $\neq 0$.



— o — o —

$\boxed{\text{Dimostro enunciato iniziale}}$

Elimino le altre righe e trovo un minore $r \times n$ con r righe lin. indip.



Questa matrice ha R-rango $= r$, quindi ha C-rango $= r$ quindi ha r colonne lin. indip. Elimino le altre colonne e resta una $r \times r$ con r colonne lin. indip., quindi anche r righe lin. indip., quindi det $\neq 0$.

D'ora in poi parliamo di rango senza precisare R–C–D.

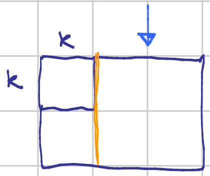
Come si calcola il rango:

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$: algoritmo di Gauss

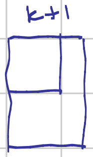
$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$: usando il D-rango: se trovo un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$ allora il rango è $\geq k$ e passo ai minori $(k+1) \times (k+1)$.

<u>Fatto</u>: Supponiamo di aver trovato un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$, e supponiamo che rango $\geq k+1$.
Allora esiste un minore $(k+1) \cdot (k+1)$ con $\det \neq 0$ che contiene il precedente.

$\boxed{\text{Dim.}}$



Le colonne del minore sono lin. indip., quindi le colonne della matrice grande con. sono lin. indip.
Se rango $\geq k+1$, vuol dire che c'è un'altra colonna indipendente da queste



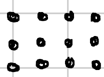
$\to$ ha C-rango $k+1$, quindi ha R-rango $k+1$, quindi ha $k+1$ righe lin. indip.
Cancellando il resto ho ottenuto il minore voluto.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Quanti sono i minori 2×2 di una 2×3?

Devo cancellare una colonna su 3, quindi 3 possibilità.

Quanti sono i minori 2×2 di una 3×4?



Devo cancellare 1 riga su 3 $\to$ 3 possibilità
" " 2 colonne su 4 $\to$ $\binom{4}{2}$ possibilità
$\Big\}$ $3 \cdot 6 = 18$

Quanti sono i minori $R \times k$ di una $m \times n$? $\binom{m}{R} \cdot \binom{n}{k}$

scegliere R righe su m — scegliere k colonne su n

BACK TO LINEAR SYSTEMS

$Ax = b$. Il sistema ha soluzione $\Leftrightarrow$ $b \in$ Span colonne di A.

Consideriamo la <u>matrice completa</u> $A' = (A \mid b)$

<u>Fatto generale</u> $\mathrm{rank}(A') = \begin{cases} \nearrow \mathrm{rank}(A) \\ \searrow \mathrm{rank}(A)+1 \end{cases}$

(se attacco una colonna il rango o resta invariato, o sale di 1. Idem se attacco una riga)

Teorema di ROUCHÉ-CAPELLI

Un sistema lineare ammette soluzione $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$

Quando il sistema ammette soluzioni, l'insieme delle soluzioni dipende da un certo numero di parametri uguale alla $\dim(\ker(A))$
Quindi il numero dei parametri è

$$\dim(\ker(A)) = n - \dim(\mathrm{Im}(A)) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero variabili}}}{n} - \mathrm{rango}(A)$$

<u>Esercizio</u> Studiare, al variare di λ, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2\lambda z = 2 \\ x + z = \lambda \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2\lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det = 1

rango $(A) \geq 2$.
$\mathrm{Det}(A) = -\lambda + 2\lambda + 2 - 1 = \lambda + 1$
Se $\lambda \neq -1 \rightsquigarrow$ rango $(A) = 3 \Rightarrow$ rango $(A') = 3 \Rightarrow$ soluzione che è pure unica per via delle dimensioni
Se $\lambda = -1 \rightsquigarrow$ sostituisco e risolvo.

<u>Esercizio</u> Consideriamo in $\mathbb{R}^4$

$$V = \text{span}\{(1,0,-1,2),\ (2,3,1,4)\}$$
$$W = \text{span}\{(0,1,0,1),\ (0,2,2,2),\ (1,0,2,3)\}$$

$\dim V$, $\dim W$, $\dim(V+W)$, $\dim(V\cap W)$

$$\dim V = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim W = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\dim(V+W) = \dim(\text{span}\,(5 \text{ vettori})) = \text{rango}\ 5\,\overset{4}{\boxed{\quad}}$$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 31

Titolo nota 20/11/2013

BASI ORTOGONALI MATRICI ORTOGONALI
BASI ORTONORMALI

Def. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice ortogonale se i vettori che la compongono sono a 2 a 2 ortogonali, cioè se
$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad \text{per ogni } i \neq j$$
La base si dice ortonormale se è ortogonale ed i vettori che la compongono hanno norma unitaria, cioè
$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad \text{per ogni } i \neq j$$
$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

Notazione Si pone per definizione
$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Con questa notazione una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è ortonormale se
$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} \qquad \text{per ogni } i \text{ e } j \text{ (uguali o diversi)}$$

Oss. La matrice $\{\delta_{i,j}\}$ è la matrice identica $n \times n$.

Esempi ① La base canonica in $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

② La base $\{\underbrace{(1,2)}_{v_1}, \underbrace{(-2,1)}_{v_2}\}$ di $\mathbb{R}^2$ è ortogonale in quanto $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Non è ortonormale perché $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 5$

③ La base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\}$ di $\mathbb{R}^2$ è ortonormale ed è stata ottenuta dalla precedente dividendo ogni vettore per la sua norma.

Fatto generale Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$, allora $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se ne prendo 2 diversi

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{le costanti} \\ \text{escono fuori}}}{=} \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \frac{1}{\|v_j\|} \cdot \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{perchè erano} \\ \text{ortogonali}}} = 0 \qquad \text{per ogni } i \neq j.$$

Se invece $i = j$: $\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|^2} \overbrace{\langle v_i, v_i \rangle}^{\|v_i\|^2} = 1.$

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, e sia $v \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

cioè quando vado a scrivere v come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$ il coefficiente davanti ad un certo v_i è proprio $\langle v, v_i \rangle$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Essendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base possiamo scrivere in modo unico

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

per opportuni coeff. $a_1, \dots, a_n$. Ora calcolo $\langle v, v_i \rangle$:

$$\boxed{\langle v, v_i \rangle} = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, v_i \rangle \qquad \text{(uso linearità prod. scal.)}$$

$$= a_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_n \langle v_n, v_i \rangle$$

sono tutti nulli tranne quello con indice i, che viene 1

$$= a_i \langle v_i, v_i \rangle = \boxed{a_i}$$

— o — o —

Variante del teorema Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base ortogonale, allora

$$v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n.$$

Dim. Come sopra $\langle v, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle \Rightarrow a_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\boxed{\langle v_i, v_i \rangle}} \to \|v_i\|^2.$

<u>Domanda</u>: dato un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, come trovo una base ortonormale?

<u>Risposta</u>: procedimento di $\boxed{\text{ORTOGONALIZZAZIONE di GRAM SCHMIDT}}$

Questo procedimento prende
- in INPUT un sistema di vettori $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\mathbb{R}^n$ lin. indip.
- in OUTPUT un sistema di vettori $\{w_1, \dots, w_k\}$ di $\mathbb{R}^n$ lin. indip. che sono ortogonali e t.c. $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$

Quindi se $\{v_1, \dots, v_k\}$ generavano un certo sottospazio, anche $\{w_1, \dots, w_k\}$ generano lo stesso sottospazio.
Una volta ottenuta la base ortogonale, è facile averla ortonormale.
Il procedimento è tale che

$$\underbrace{\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_\ell\}}_{\text{Span dei primi } \ell} = \underbrace{\operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_\ell\}}_{\text{Span dei primi } \ell} \quad \text{per ogni } \ell \le k$$

Come funziona?

- Si pone $\boxed{w_1 = v_1}$. È chiaro che $\operatorname{Span}\{v_1\} = \operatorname{Span}\{w_1\}$.

- Si pone $\boxed{w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1}$ Vediamo perché.

Poniamo in generale $w_2 = v_2 + a w_1$. È chiaro che

$$\operatorname{Span}\{w_2, w_1\} = \operatorname{Span}\{v_2 + a v_1, v_1\} = \operatorname{Span}\{v_2, v_1\}$$

perché lo span non cambia se cambio 1 vettore con una combinazione di lui + un po' degli altri.

Cerco a in modo tale che $\langle w_2, w_1\rangle = 0$. Allora
$0 = \langle v_2 + a w_1, w_1\rangle = \langle v_2, w_1\rangle + a\langle w_1, w_1\rangle$ da cui

$$a = -\frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}$$

- Si pone $$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

Perché funziona? Poniamo in generale $w_3 = v_3 + a w_1 + b w_2$.
Allora
$$\begin{aligned} \mathrm{Span}\{w_1, w_2, w_3\} &= \mathrm{Span}\{w_1, w_2, v_3 + a w_1 + b w_2\} \\ &= \mathrm{Span}\{w_1, w_2, v_3\} \\ &= \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}. \end{aligned}$$
Più importante: voglio che $\langle w_3, w_1 \rangle = \langle w_3, w_2 \rangle = 0$. Allora

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_3, w_1 \rangle &= \langle v_3 + a w_1 + b w_2, w_1 \rangle \\ &= \langle v_3, w_1 \rangle + a \langle w_1, w_1 \rangle + b \underbrace{\langle w_2, w_1 \rangle}_{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}.$$ Analogamente

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_3, w_2 \rangle &= \langle v_3 + a w_1 + b w_2, w_2 \rangle \\ &= \langle v_3, w_2 \rangle + a \underbrace{\langle w_1, w_2 \rangle}_{0} + b \langle w_2, w_2 \rangle \end{aligned}$$

da cui $$b = -\frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}$$

- In generale, supponendo di aver definito $w_1, \dots, w_k$ si pone

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k$$

$$= \boxed{v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 31

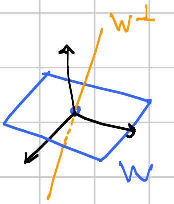
Titolo nota 20/11/2013

ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO

Def. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale.
Si definisce ortogonale di W l'insieme

$$W^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \text{ per ogni } w \in W \}$$

Esempio Sia W un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine.
Allora $W^\perp$ è la retta per l'origine $\perp$ a W.
Viceversa, se W è una retta per l'origine, allora $W^\perp$ è il piano per l'origine perpendicolare alla retta.



Teorema Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale e sia $W^\perp$ il suo ortogonale.
Allora

(i) $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale

(ii) $W^\perp \cap W = \{0\}$

(iii) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

(iv) $(W^\perp)^\perp = W$.

Dim. (i) Se $v_1 \in W^\perp$ e $v_2 \in W^\perp$, è ancora vero che $v_1 + v_2 \in W^\perp$?
Sì perché

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle v_1, w \rangle}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle v_2, w \rangle}} = 0 + 0 \quad \text{per ogni } w \in W$$

Se $v \in W^\perp$ e $a \in \mathbb{R}$, è ancora vero che $av \in W^\perp$?
Sì perché

$$\langle av, w \rangle = a \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle v, w \rangle}} = 0$$

(ii) Se $v \in W^\perp \cap W$, vuol dire che v è ortogonale a tutti gli elementi di W, quindi anche a v stesso!

$$\langle \underset{\in W^\perp}{v}, \underset{\in W}{v} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \|v\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

(iii) e (iv) ⇝ Non le dimostro...

—o—o—

<u>Esercizio</u> Considero in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0, \; x + z = 0\}.$$

Trovare $W^\perp$.

Per trovare W risolvo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

z libero e ricavo x e y.

Pongo $z = t$, e ottengo $y = t$, $x = z - 2y = -t$.

Quindi la soluzione del sistema è

$$t \underbrace{(-1, 1, 1)}_{\text{base di } W}$$

$W^\perp$ è il piano perpendicolare al vettore $(-1, 1, 1)$, cioè il piano

$$-x + y + z = 0$$

<u>Esercizio</u> Trovare una base ortonormale di $W^\perp$, cioè del sottospazio

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0\}$$

Procedimento: ① trovo una base qualunque

② ortogonalizzo con GS

③ ortonormalizzo.

① Volendola fare complicata, risolvo il sistema $-x + y + z = 0$.

Pongo $z = t$, $y = s$ (due variabili libere) e ottengo $x = t + s$.

Quindi la soluzione del sistema è

$$(t+s, s, t) = t\underbrace{(1,0,1) + s\,(1,1,0)}_{\text{base di } W^\perp}$$

(Nota: altre basi sono: $(1,1,0)$, $(0,1,-1)$
$(2,3,-1)$, $(1,5,-4)$)

② Applico GS alla base $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$

$w_1 = v_1 = (1,0,1)$. $\qquad w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$

$$= (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1)$$

$$= (1,1,0) - \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}\right)$$

③ Ortonormalizzo: $\dfrac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$ $\qquad \dfrac{\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{2}(1,2,-1)\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$\boxed{\text{Verifica finale}}$ Controllare che siano ortonormali e stiano nello spazio, cioè $-x+y+z=0$.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Sia $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 ;\ x+y = x-3y+z+w = 0\}$
Trovare $W^\perp$ e basi ortonormali per W e $W^\perp$.

① Trovo una base di W
② Trovo una base di $W^\perp$
③ GS sulle 2 basi
④ Ortonormalizzazione finale ← facile, basta dividere per le norme

① Risolvo $\begin{cases} x+y = 0 \\ x-3y+z+w = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x+y = 0 \\ -4y+z+w = 0 \end{cases}$

z e w libere

$z = t$, $w = s$, $y = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}s$, $x = -y = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}s$

Quindi $(x, y, z, w) = t\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right) + s\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 1\right)$

Quindi una base di W è $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 1\right)$

Meglio: una base è

$(-1, 1, 4, 0)$, $(-1, 1, 0, 4)$ (⇝ verificare che risolvono)

② $W^\perp$ sono tutti i vettori $\perp$ a quelli di W. Basta controllare che siano $\perp$ ad una base.

Prendo il generico vettore (x, y, z, w) e impongo i 2 prod. scalari:

$$\begin{cases} -x + y + 4z = 0 \\ -x + y + 4w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + 4z = 0 \\ -4z + 4w = 0 \end{cases}$$

y e w libere: $y = t$, $w = s$, da cui $z = s$, $x = y + 4z = t + 4s$

Quindi la soluzione generale è

$$(t + 4s, t, s, s) = t\underbrace{(1, 1, 0, 0)}_{\text{base di } W^\perp} + s\underbrace{(4, 0, 1, 1)}$$

③ GS su $\underbrace{(-1, 1, 4, 0)}_{v_1}$, $\underbrace{(-1, 1, 0, 4)}_{v_2}$

$w_1 = v_1 = \boxed{(-1, 1, 4, 0)}$ $\qquad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 =$

$$= (-1, 1, 0, 4) - \frac{1 + 1 + 0 + 0}{1 + 1 + 16 + 0}(-1, 1, 4, 0) = \boxed{(-1, 1, 0, 4) - \frac{1}{9}(-1, 1, 4, 0)}$$

⇝ conto

GS su $(1, 1, 0, 0)$, $(4, 0, 1, 1)$

$w_1 = \boxed{(1, 1, 0, 0)}$, $\qquad w_2 = (4, 0, 1, 1) - \frac{4}{2}(1, 1, 0, 0)$

$= (4, 0, 1, 1) - (2, 2, 0, 0) = \boxed{(2, -2, 1, 1)}$

I 4 vettori indicati costituiscono una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ (verifica!).

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 33

Titolo nota 20/11/2013

MATRICI ORTOGONALI

Def. Una matrice $A \in M_{n\times n}$ (quindi quadrata) si dice ortogonale se

$$\boxed{AA^t = A^tA = \text{Identità}}$$

Questo è equivalente a richiedere che $\boxed{A^t = A^{-1}}$.

Teorema (Proprietà delle matrici ortogonali)

(1) Una matrice A è ortogonale se e solo se le sue colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

(2) Stessa cosa per le righe.

(3) Il prodotto di 2 matrici ortogonali è una matrice ortogonale

(4) Det di una matrice ortogonale è ± 1.

(5) L'inversa di una matrice ortogonale è ortogonale.

Achtung! La somma di matrici ortogonali NON è ortogonale
Il prodotto di una ortogonale per un numero NON è in generale ortogonale.

Dim. (4) Il determinante dell'inversa di A è l'inverso del Det.

$$A \cdot A^{-1} = Id$$

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}) \underset{\text{BINET}}{=} \det(A\cdot A^{-1}) \underset{\text{ug. di sopra}}{=} \det(I) \underset{\text{def. di Det}}{=} 1$$

Quindi

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Se A è ortogonale, allora per definizione $A^t = A^{-1}$, ma allora

$$\det(A) \underset{\text{propr. det.}}{=} \det(A^t) \underset{A \text{ è ortog.}}{=} \det(A^{-1}) \underset{\text{propr. det.}}{=} \frac{1}{\det(A)}$$

Quindi $[\det(A)]^2 = 1$, cioè $\det(A) = \pm 1$.

(3) Siano A e B ortogonali, cioè $A^t = A^{-1}$ e $B^t = B^{-1}$.
Allora

$$(AB)^t \underset{\substack{\text{proprietà}\\ \text{trasposta}}}{=} B^t \cdot A^t \underset{\substack{A \text{ e } B\\ \text{ortogonali}}}{=} B^{-1} \cdot A^{-1} = (AB)^{-1}$$

Quindi $(AB)^t = (AB)^{-1}$, quindi AB è ortogonale

(5) Sia A ortogonale, cioè $A^t = A^{-1}$.
Allora

$$(A^{-1})^t \underset{\substack{\text{proprietà}\\ \text{della trasposta}}}{=} (A^t)^{-1} \underset{A \text{ è ortogonale}}{=} (A^{-1})^{-1}$$

Quindi $(A^{-1})^t = (A^{-1})^{-1}$, quindi A^{-1} è ortogonale

[Parentesi: perché l'inversa della trasposta è la trasposta dell'inversa?
Devo verificare che

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = \text{Identità}$$

Partiamo da $A \cdot A^{-1} = Id$. Faccio il trasposto a dx e sx:

$$(A \cdot A^{-1})^t = Id^t$$
$$(A^{-1})^t \cdot A^t = Id$$

questo è come dire che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.]

(1) Cosa vuol dire che $A \cdot A^t = \boxed{A^t \cdot A = Id}$?

$$A = \left(c_1 \middle| c_2 \middle| \dots \middle| c_n \right) \qquad A^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ \hline c_2 \\ \hline \vdots \\ \hline c_n \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_m} \end{pmatrix} \left(c_1 \middle| c_2 \middle| \dots \middle| c_n \right)} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

Quando calcolo questo prodotto, il termine di posto i, j è proprio $\langle c_i, c_j \rangle$.
Se il prodotto deve venire la matrice identica, vuol dire che $\langle c_i, c_j \rangle = \delta_{i,j}$, cioè che le colonne sono una base ortonormale.

[Oss.: se le colonne di A sono una base ortogonale, ma non necessariamente ortonormale, allora $A^t A$ diventa una matrice diagonale]

(2) Stesso discorso con le righe: $A = \begin{pmatrix} \overline{R_1} \\ \overline{R_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$ $A^t = \left(R_1 \middle| R_2 \middle| \dots \right)$

$A \cdot A^t$ ha come elemento i,j il prod. scalare $\langle R_i, R_j \rangle$ e se è l'identità ho finito.

— o — o —

$\boxed{\text{Osservazione importante}}$ Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
Costruisco la matrice M in cui i v_i sono le colonne.
Allora M è la matrice di cambio di base

{comp. base $v_1, \dots, v_n$} $\to$ {comp. base canonica $e_1, \dots, e_n$}

e si tratta di una matrice ortogonale.
Visto che di solito serve M^{-1}, che manda le comp. risp. alla canonica nelle comp. risp. a $v_1, \dots, v_n$, ora M^{-1} si calcola semplicemente facendo la trasposta.

— o — o —

Esercizio $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z - 2w = 0\}$
Trovare basi ortonormali per W e $W^\perp$.

① Produco una base di W: $(0,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$, $(2,0,0,1)$
Un'altra base $(1,1,-1,0)$, $(2,1,-2,0)$, $(0,0,2,1)$

② Produca una base di $W^\perp$, che avrà dimensione 1.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Impongo i 3 prodotti scalari nulli e risolvo:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2z+w=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y=0 \\ -x+z=0 \\ 2x+w=0 \end{cases}$$

e risolvo.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Uso la formula per produrre un vettore $\perp$ a 3 dati:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppando rispetto alla 1ª riga trovo le comp.

$$e_1 \cdot \det(A_{11}) - e_2 \det(A_{12}) + e_3 \det(A_{13}) - e_4 \det(A_{14})$$

③ GS sulla prima base

$$w_1 = \boxed{(0,1,0,0)}, \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

$$= (-1,0,1,0) - 0 = \boxed{(-1,0,1,0)}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

$$= (2,0,0,1) - 0 - \frac{-2}{2}(-1,0,1,0)$$

$$= (2,0,0,1) + (-1,0,1,0) = \boxed{(1,0,1,1)}$$ Verifica.

[Controllare che i 4 vettori messi in colonna diano una matrice ortogonale].

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 34

Titolo nota 23/11/2013

Sottospazi vettoriali → presentazione cartesiana → equazioni
→ presentazione parametrica → Span

Esempio 1 $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \boxed{2x-y+z=0}\}$ ← equazione

Esercizio banale: verificare che si tratta di un s.sp. vett.
Trovare una parametrizzazione vuol dire trovare una base e scrivere l'el. generico come comb. lineare

$z = t,\ y = s,\quad x = \frac{1}{2}(y-z) = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$

Elemento generico: $\left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, s, t\right) = \boxed{t\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) + s\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)}$

rappr. parametrica di V

Un'altra rappresentazione sarebbe:

$$t(1,0,-2) + s(1,2,0)$$

$V = \mathrm{Span}\{(1,0,-2), (1,2,0)\}$

Esempio 2 $V = \mathrm{Span}\{(1,1,-2), (0,1,3)\}$

$= t(1,1,-2) + s(0,1,3) \qquad t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}$

Se voglio una rappr. cartesiana $ax+by+cz=0$ ho 2 possibilità

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Sostituisco la parametrica nella cartesiana a coeff. incogniti

$(t, t+s, -2t+3s)$

$$ax+by+cz=0$$
$$at + b(t+s) + c(-2t+3s) = 0$$
$$\underbrace{at}+\underbrace{bt}+\underbrace{bs}-\underbrace{2ct}+\underbrace{3cs}=0$$

$\begin{cases} a+b-2c=0 \\ b+3c=0 \end{cases}$ $\qquad c$ libero, $b=-3c$, $a = 2c-b = 2c+3c = 5c$

$$5cx - 3cy + cz = 0$$

Do un valore che mi piace a c (vanno bene tutti meno $c=0$):

$c=1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{5x-3y+z=0}$

(a,b,c) deve essere un vettore $\perp$ al sottospazio V.
Cerco (a,b,c) perpendicolare a $(1,1,-2)$ e $(0,1,3)$. Lo posso fare (2º modo) con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (5,-3,1) \rightsquigarrow 5x-3y+z=0$$

— o — o —

Esempio 3 $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \boxed{\begin{matrix} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{matrix}} \right\}$

rappr. cartesiana

Se voglio la parametrica risolvo il sistema

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+3z=0 \end{cases} \quad z=t,\ y=t,\ x=0$$

$(0,t,t) = t(0,1,1)$ rappresentazione parametrica $\mathrm{Span}\{(0,1,1)\}$

Esempio 4 $V = \mathrm{Span}\{(1,2,3)\}$ = retta per l'origine in $\mathbb{R}^3$
= s.sp. vett. di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.

Trovare una rappr. cartesiana vuol dire scriverla come intersezione di 2 piani. La rappresentazione non sarà per nulla unica.
Cerco i piani che contengono la retta data:

$ax+by+cz=0 \qquad t(1,2,3) = (t,2t,3t)$

$at+2bt+3ct=0 \rightsquigarrow a+2b+3c=0$

Questa è un'eq. in a,b,c che avrà soluzioni dipendenti da 2 parametri: fisso b e c come mi pare e trovo a di conseguenza

$b=0,\ c=1 \rightsquigarrow a=-3 \rightsquigarrow \boxed{-3x+z=0}$
$b=1,\ c=0 \rightsquigarrow a=-2 \rightsquigarrow \boxed{-2x+y=0}$

Sono 2 piani la cui intersezione è la retta

$b=2,\ c=3 \rightsquigarrow a=-13 \rightsquigarrow \boxed{-13x+2y+3z=0}$
$b=-1,\ c=4 \rightsquigarrow a=-10 \rightsquigarrow \boxed{-10x-y+4z=0}$

Altri 2 piani la cui interes. è la retta

<u>Esempio 5</u> $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+2w = 0\}$

$$\boxed{\begin{matrix} x+y=0 \\ z+2w=0 \end{matrix}}$$ Rappresentazione cartesiana di un ssp. vett. di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2

Se risolvo il sistema ottengo una rappr. parametrica

$$\begin{matrix} x+y \quad = 0 \\ z+2w = 0 \end{matrix} \qquad y=t, \; w=s, \; z=-2s, \; x=-t$$

$$(-t, t, -2s, s) = t(-1,1,0,0) + s(0,0,-2,1)$$ rappr. parametrica

<u>Esempio 6</u> $W = \mathrm{Span}\{(2,-2,2,-1), (1,2,1,0)\}$
$=$ s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

Se volessi una rappr. cartesiana, cerco $ax+by+cz+dw=0$ in modo che si annulli su tutti i vettori di W. Basta che si annulli su una base, quindi:

$$\begin{cases} 2a-2b+2c-d=0 \\ a+2b+c \quad =0 \end{cases}$$

Risolvo il sistema assegnando 2 coppie di valori "a caso" alle variabili libere c e d (ad esempio $c=0, d=1$ e poi $c=1, d=0$) e ottengo 2 equazioni che descrivono W.

Trovare $\dim(V+W)$ e $\dim(V \cap W)$

$$\dim(V+W) = \dim \mathrm{Span}\{\underbrace{\underbrace{(-1,1,0,0),(0,0,-2,1)}_{\text{base di } V}, \underbrace{(2,-2,2,-1),(1,2,1,0)}_{\text{base di } W}}_{\text{generatori di } V+W\text{, ma non nec. base}}\}$$

Per sapere la dimensione il modo più comodo è fare il rango della matrice 4x4 che ha i 4 vettori come righe o come colonne. In questo caso il rango è 3 (si vede alla Gauss o facendo det = 0 e cercando un minore 3x3 con det $\neq 0$)

Una volta che $\dim(V+W) = 3$, per forza $\dim(V \cap W) = 1$.

Altra domanda: determinare una base di $V+W$ e una di $V \cap W$.

Per avere una base di $V+W$ basta cercare un minore 3×3 con det $\neq 0$ della matrice e prendere le righe o colonne corrispondenti.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ righe lin. indip. (perché il rango della } 3\times 4 \text{ è } 3) \\ \leftarrow \text{ quindi sono una base di } V+W. \\ \leftarrow \end{array}$$

minore con det $\neq 0$

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 35

Titolo nota 23/11/2013

Come determinare una base per l'intersezione di 2 sottospazi.

Esempio $V = \text{Span}\{(1,0,1,0), (0,2,1,3)\}$
$W = \text{Span}\{(2,2,3,3), (0,1,1,1)\}$

Dim. e base per $\underbrace{V, W}_{\text{facili}}$, $\underbrace{V+W}_{\text{meglio}}$, $\boxed{V \cap W}$ → dim. facile dal teo. dim.
→ base più difficile.

meglio → dimensione = rango matrice
→ base = si vede dalla matrice

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Scrivo eq. cartesiane per V e W. Allora le eq. cartesiane per $V \cap W$ sono il sistema costituito dalle eq. di V e le eq. di W. (dopo video)
Quindi ottengo un sistema di 4 eq. in 4 incognite le cui soluzioni sono proprio $V \cap W$.

V: $ax + by + cz + dw = 0$ $\qquad \begin{cases} a + c = 0 \\ 2b + c + 3d = 0 \end{cases}$

$c = 0 \quad d = 1 \rightsquigarrow a = 0 \quad b = -\frac{3}{2} \qquad -\frac{3}{2}y + w = 0$
$c = 1 \quad d = 0 \rightsquigarrow a = -1 \quad b = -\frac{1}{2} \qquad -x - \frac{1}{2}y + z = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} -3y + 2w = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{array}}$ V

W: $ax + by + cz + dw = 0$ $\qquad \begin{cases} 2a + 2b + 3c + 3d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$

$c = 0,\ d = 1 \rightsquigarrow b = -1,\ a = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}x - y + w = 0$
$c = 1,\ d = 0 \rightsquigarrow b = -1,\ a = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}x - y + z = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x + 2y - 2w = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}}$ W

Eq. per $V \cap W$:
$$\begin{array}{l} -3y + 2w = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - 2w = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 & 4^a \\ 2z - 2w = 0 & 3^a - 4^a \\ -3y + 2z = 0 & 2^a - 2\cdot 4^a \\ -3y + 2w = 0 & 1^a \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 & 1^a \\ -3y + 2z = 0 & 3^a \\ 2z - 2w = 0 & 2^a \\ \boxed{2z - 2w = 0} & 3^a - 4^a \end{cases}$$

Questo doveva succedere se uno sapeva che $\dim(V+W) = 3$

w variabile libera $w = t$, $z = t$, $y = \frac{2}{3}t$, $x = 2z - 2y = 2t - \frac{4}{3}t = \frac{2}{3}t$

$\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t, t, t\right) = t\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1\right)$ Una base è $(2,2,3,3)$

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ $V = a(1,0,1,0) + b(0,2,1,3)$ a, b parametri
$W = c(2,2,3,3) + d(0,1,1,1)$ c, d parametri

Ora metto a sistema:

$$\underbrace{a(1,0,1,0) + b(0,2,1,3)}_{\text{generico vettore di } V} = \underbrace{c(2,2,3,3) + d(0,1,1,1)}_{\text{generico vettore di } W}$$

$$\begin{array}{l} a = 2c \\ 2b = 2c + d \\ a + b = 3c + d \\ 3b = 3c + d \end{array} \qquad \begin{cases} a - 2c = 0 \\ 2b - 2c - d = 0 \\ a + b - 3c - d = 0 \\ 3b - 3c - d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - 2c = 0 \\ 2b - 2c - d = 0 \\ b - c + d = 0 \\ 3b - 3c - d = 0 \end{cases}$$

$-d$: corretto dopo video: cambia il futuro, ma non la sostanza.

$$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ b - c + d = 0 \\ -3d = 0 \\ -4d = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a - 2c = 0 \\ b - c = 0 \\ d = 0 \end{array}$$

c variabile libera $d = 0$
$b = c$ $a = 2c$

Ad esempio: $c = 1$, $b = 1$, $a = 2$, $d = 0$

$a(1,0,1,0) + b(0,2,1,3) = (2,2,3,3)$ ← genera l'intersezione

$\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{c}(2,2,3,3) + \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{d}(0,1,1,1) = (2,2,3,3)$

Esempio ? Consideriamo in $\mathbb{R}^3$

$V = \{(x,y,z) : x-y+2z=0\}$

$W = \text{Span}\{\underbrace{(1,2,3)}_{v_3}\}$

(a) Dimostrare che $V \oplus W = \mathbb{R}^3$

(b) Dim. che esiste un'unica appl. lin. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$f(v) = 2v$ per ogni $v \in V$

$f(w) = 3w$ " " $w \in W$

(c) Scrivere la matrice di f nella base canonica.

Scrivo una base di V $\qquad V = \text{Span}\{\overbrace{(-2,0,1)}^{v_1}, \overbrace{(1,1,0)}^{v_2}\}$

$$\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -6+2-1 = -5$$

$\Rightarrow$ vett. lin. indip.

$\Rightarrow \dim(V+W) = 3$

$\Rightarrow \dim(V \cap W) = 0$.

(b) Mi serve una funzione lineare t.c.

$f(v_1) = 2v_1 \qquad f(v_2) = 2v_2 \qquad f(v_3) = 3v_3$

Teo. fond. delle applic. lineari dice che esiste un'unica applic. lineare che manda una base dove mi pare.

(c) Quello che è facile è scrivere la matrice di f usando la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in partenza e arrivo. La matrice in tal caso è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Per avere la matrice dalla canonica alla canonica devo fare un cambio di base

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

INPUT: comp. risp. $\{v_1, v_2, v_3\}$

OUTPUT: comp. risp. canonica

Comp. canonica $\xrightarrow{M^{-1}}$ Comp. $\{v_1, v_2, v_3\}$ $\xrightarrow{A}$ Comp. $\{v_1, v_2, v_3\}$ $\xrightarrow{M}$ Comp. canon.

Quindi alla fine la matrice richiesta è

$$M\,A\,M^{-1}$$

quella che si fa per prima

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 36

Titolo nota 23/11/2013

Esercizio 1 $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$

(a) Trovare $V^\perp$

(b) Scrivere nella base canonica la matrice dell'applic. lineare che rappresenta la proiezione su V

$\boxed{\text{Punto (a)}}$ Non serve, ma trovo una base di V

$V = \text{Span}\{(1,0,1), (0,1,0)\}$ variabili libere y e z

Ora $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^3$, quindi $V^\perp$ ha dimensione 1. Quindi devo trovare un vettore che sia $\perp$ ai 2 della base di V.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Lo scrivo come (a,b,c), impongo 2 prod. scal. $= 0$, sistema, ...

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Formula misteriosa

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Era il piano $x - z = 0$, quindi sarà $(1,0,-1)$

Quindi $V = \text{Span}\{\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{v_2}\}$ $\quad V^\perp = \text{Span}\{\underbrace{(1,0,-1)}_{v_3}\}$.

$\boxed{\text{Punto (b)}}$ Proiezione di un vettore rispetto ad una somma ortogonale.

Se $\underset{\text{sp. vett.}}{X} = \underset{\text{s. sp. vett.}}{W_1 \oplus W_2}$, allora ogni $x \in X$ si scrive in MODO UNICO come somma $x = \underset{\in W_1}{w_1} + \underset{\in W_2}{w_2}$

w_1 e w_2 si dicono le componenti di x rispetto alla somma diretta.

In particolare

- w_1 è la proiezione di x sul sottospazio W_1
- w_2 " " " " " " " W_2.

Se la decomposizione è del tipo $X = V \oplus V^\perp$, allora si parla di proiezione ortogonale.

Nel nostro esempio avremo che, detta $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione,

$$f(v_1) = v_1 \qquad f(v_2) = v_2 \qquad f(v_3) = 0.$$

Allora la matrice di f dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in $\{v_1, v_2, v_3\}$ è

$$A = \begin{array}{ccc} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} \end{array}$$

← Questa matrice rappresenta f avendo in partenza la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ ed in arrivo la base canonica

Qual è la matrice di f avendo in partenza $\{v_1, v_3, v_2\}$ ed in arrivo $\{v_3, v_2, v_1\}$?

$$\begin{array}{c} \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_3) & f(v_2) \end{matrix} \end{array}$$

Io però voglio f dalla canonica alla canonica, quindi mi serve la matrice di cambio di base

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Manda comp. $\{v_1, v_2, v_3\}$ → comp. rispetto alla canonica]

$\boxed{M A M^{-1}}$ → rappresenta f dalla canonica alla canonica.

In alternativa posso fare $\boxed{B \underbrace{M^{-1}}}$

B: comp. $\{v_1, v_2, v_3\}$ $\xrightarrow{f}$ base canonica

M^{-1}: comp. canonica → comp. $\{v_1, v_2, v_3\}$

Verificare che venga la stessa cosa.

Esercizio In $\mathbb{R}^4$ consideriamo

$$V = \{(x,y,z,w) : x-y = z+3w\}$$

Dimostrare che esiste un'unica $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare t.c.

$$f(1,1,1,1) = (5,4,3,2) \quad \text{e} \quad \ker f = V$$

Scrivere la matrice ... base canonica.

$\dim V = 3$. Sia v_1, v_2, v_3 una base di V, sia $v_4 = (1,1,1,1)$.

Allora v_1, v_2, v_3, v_4 è una base di $\mathbb{R}^4$

basta verificare che non sta in V.

A questo punto f dovrà soddisfare

$$f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = 0 \qquad f(v_4) = (5,4,3,2),$$

quindi esiste ed è unica.

Trovo la base
$$v_1 = (1,1,0,0)$$
$$v_2 = (1,0,1,0)$$
$$v_3 = (3,0,0,1)$$
$$v_4 = (1,1,1,1)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array} \end{array}$$

Questa matrice rappresenta f avendo in partenza v_1, v_2, v_3, v_4 e in arrivo la canonica

Nota: se avessi voluto usare la $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in partenza ed arrivo avrei dovuto mettere nell'ultima colonna a, b, c, d determinati risolvendo $(5,4,3,2) = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$

Se voglio f dalla canonica alla canonica devo usare

$$A M^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variante: scrivere tutte le matrici che rappresentano $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $\ker(f) = V$

quello precedente

Idea: ① L'applicazione è univocamente determinata una volta che so dove vanno v_1, v_2, v_3, v_4

② v_1, v_2, v_3 vanno per forza in 0, v_4 non ha vincoli

③ Quindi mi restano 4 gradi di libertà

E se chiedessi che l'immagine di f sia (contenuta in) V.
$f(v_i)$ deve essere una comb. lin. di v_1, v_2, v_3 e basta per ogni $i = 1, 2, 3, 4$, quindi ho 12 gradi di libertà.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 37

Titolo nota 27/11/2013

FORME CANONICHE di appl. lineari

1. Autovalori e autovettori
2. Diagonalizzazione
3. Polinomio minimo e pol. caratteristico
4. Teorema spettrale
5. Forma di JORDAN.

— o — o —

Motivazioni Sia $f: V \to W$ applic. lineare. Scelta una base di V e scelta una base di W, si associa ad f una matrice.
Cambiando la base in partenza ed arrivo, la matrice cambia, anche se f rimane sempre la stessa.
Domanda: scegliendo bene le basi, posso fare in modo che la matrice sia "bella", cioè particolarmente semplice?

— o — o —

Caso banale Sia V spazio di dim. n, sia W uno sp. di dim m.
Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare di rango r, cioè con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = r$.
Allora posso scegliere una base $v_1, \dots, v_n$ di V ed una base $w_1, \dots, w_m$ di W tali che la matrice associata ad f sia della forma

$$\underbrace{\begin{array}{c c} & r \\ r & \left.\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} m \end{array}}_{n}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Consider $\ker(f)$. La sua dim. è $n-r$ per il teo. della dim.
Prendo una base di $\ker(f)$ e la completo ad una base di V.
Ottengo $\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{completamento}}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{base di } \ker(f)}$

Per quanto visto a suo tempo $w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r)$ sono r vettori che costituiscono una base di $\mathrm{Im}(f)$ (vedi dim. del teo. della dim.). Li completo ad una base di W:

$$\underbrace{w_1, \dots, w_r}_{\text{base di } \mathrm{Im}(f)}, \underbrace{w_{r+1}, \dots, w_n}_{\text{completamento a base di } W}$$

Qual è la matrice che rappresenta f con questa scelta delle basi?
Esattamente quella prevista

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots\ 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_r) & f(v_{r+1}) \end{array}$$

il resto sono tutti zeri.

— o — o —

$\boxed{\text{Caso "serio"}}$ Lo spazio di partenza coincide con quello di arrivo, cioè $f: V \to V$ e voglio usare la STESSA BASE in partenza ed arrivo.

<u>Interpretazione in termini di matrici</u>. Sia $f: V \to V$. Sia A la matrice associata ad f rispetto ad una certa base.
Se cambio base la nuova matrice sarà

$$MAM^{-1}$$

dove M è la matrice di <u>cambio di base</u>, cioè la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori della nuova base rispetto alla vecchia base. Occhio: la matrice M è invertibile.

In termini di matrici: data A, trovare M invertibile tale che MAM^{-1} sia particolarmente semplice.

<u>Definizione</u> Una matrice A quadrata si dice <u>simile</u> ad una matrice B delle stesse dimensioni, se $B = MAM^{-1}$ per un'opportuna M invertibile.
Moralmente: A e B rappresentano la stessa f solo in basi diverse.

Oss. Se $B = MAM^{-1}$, allora $A = M^{-1}BM$

[$B = MAM^{-1}$ ⇝ molt. a dx per M ⇝ $BM = MA\underbrace{M^{-1}M} = MA$
⇝ moltiplico a sx per M^{-1} e ottengo $M^{-1}BM = A$]

Quindi se A è simile a B, anche B è simile ad A.

Forme canoniche = trovare matrice "bella" simile ad una A data.

— o — o —

Ancora sui cambi di base

Caso più generale: $f: V \to W$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V
$\{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

A = matrice che rappresenta f in queste basi

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ nuova base di V
$\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ nuova base di W
Domanda: chi è la nuova matrice?
Costruisco le 2 matrici di cambio di base
M matrice $n \times n$ che ha come colonne le componenti di $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ rispetto a $\{v_1, \dots, v_n\}$ (cambio di base in V)
N matrice $m \times m$ che fa la stessa cosa con $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$.
Allora

N^{-1}: dopo video M: corretto dopo video

nuova matrice = NAM^{-1}

qui ok → vecchia di W ↓ nuova di W

nuova base di V ↓ vecchia base di V ← qui ok

vecchia di V $\xrightarrow{f}$ vecchia di W

Correzioni dopo video: per come sono definite
- M manda le comp. risp. a $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ nelle comp. risp. a $\{v_1, \dots, v_n\}$
- N " $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ " $\{w_1, \dots, w_m\}$

Caso banale in termini di matrici: data una matrice A $m \times n$ di rango r, esistono matrici invertibili M ed N di dim. opportune, tali che

NAM^{-1} sia del tipo $\underbrace{\left.\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} m}_{n}$

Cambi di base e algoritmo di Gauss

Lavorare alla Gauss su una matrice A è equivalente a moltiplicare A a sinistra per una certa N invertibile, quindi è equivalente a cambiare base in arrivo.

Per esempio, se voglio scambiare le prime 2 righe di A, moltiplico a sx per

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{A}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

Se voglio sostituire la seconda riga con la somma delle prime 2, moltiplico a sx per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

ricopia le righe dalla 2 in poi

Gauss tradotto: data una qualunque matrice A $m \times n$ esiste una matrice N $m \times m$ invertibile tale che

NA

sia una matrice a scala

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 38

Titolo nota 27/11/2013

Autovalori e autovettori

Def. Sia V uno sp. vettoriale, e sia $f : V \to V$ un'applic. lineare

stesso spazio

Si dice che un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ è AUTOVALORE di f se esiste $v \in V$ tale che $\boxed{v \neq 0}$ e

$$f(v) = \lambda v$$

Oss. Se consentissi di usare $v = 0$, allora tutti i λ sarebbero autovalori!!

Def. Se λ è autovalore, allora

- tutti i $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$ si dicono autovettori relativi all'autovalore λ
- più in generale, l'insieme $\{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ si dice autospazio relativo a λ.

Oss. L'autospazio contiene tutti gli autovalori più lo 0.
Inoltre l'autospazio è un sottospazio vettoriale (facile verifica)

[Se $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$, allora $f(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$
$= \lambda (v_1 + v_2)$

Se $f(v) = \lambda v$ e $a \in \mathbb{K}$, allora $f(av) = a f(v) = a \lambda v = \lambda (av)$]

Oss. Supponiamo che v sia autovettore di f e supponiamo che v sia incluso in una base di V $= \{\dots, v, \dots\}$.
Allora la corrispondente colonna della matrice associata ad f sarà

$$\begin{pmatrix} \dots & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \dots \end{pmatrix}$$

$f(v)$

cioè con tutti 0 e un solo valore λ nella posizione in cui la colonna incontra la diagonale.

Oss. Se una base fosse fatta da tutti autovettori, anche con autovalori diversi, la matrice sarebbe DIAGONALE con sulla diagonale i corrispondenti autovalori.

Domanda: come trovare autovalori e autovettori?

Oss. Cosa vuol dire che 0 è autovalore?
Vuol dire che esiste $v \neq 0$ t.c. $f(v) = 0 \cdot v = 0$, cioè che $v \in \ker(f)$, cioè che $\dim(\ker(f)) \geq 1$, cioè che rango di f (e di ogni matrice associata ad f) non è il max possibile, cioè $\det = 0$.

Ricerca di autovalori Un certo λ è autovalore di una matrice A se e solo se $\operatorname{Det}(A - \lambda \underbrace{Id}_{\text{matrice identica}}) = 0$

Esempio Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Voglio trovare gli autovalori, posto che esistano.

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{ho tolto } \lambda \text{ alla diagonale}}$$

$$\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - \lambda - 4\lambda + 4 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \iff (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$
$$\iff \lambda = 2 \text{ oppure } \lambda = 3$$

Quindi $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ sono gli autovalori.
Chi sono gli autospazi corrispondenti?

$\boxed{\lambda = 2}$ Cerco i vettori v t.c. $Av = 2v$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x + 2y = 2x \\ -x + 4y = 2y \end{matrix} \qquad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

y è variabile libera, quindi le soluzioni sono $y = t$, $x = 2t$ cioè $(x,y) = t(2,1)$. Quindi autospazio di $\lambda = 2$ è $\text{Span}\{(2,1)\}$.

$\boxed{\lambda = 3}$ Mi riduco $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = 3x \\ -x + 4y = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Deve succedere che il sistema omogeneo finale non ha rango massimo, quindi ha soluzioni diverse a quella banale $(0,0)$.

La soluzione è $(x,y) = (t,t) = t(1,1)$
Quindi autospazio di $\lambda = 3$ è $\text{Span}\{(1,1)\}$.

Se ora uso come base $v_1 = (2,1)$ $v_2 = (1,1)$ ho diagonalizzato la matrice. Verifica diretta

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Comp. base $\{v_1, v_2\}$ $\to$ Comp. base canonica

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ In generale $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

c'è qualcosa che non va... infatti ho invertito M ed M^{-1}.
Il conto giusto è $M^{-1}AM$ che produce la matrice dalla base nuova alla base vecchia

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 39

Titolo nota 27/11/2013

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{2013}. Servirebbe una scorciatoia per evitare di moltiplicare 2013 volte.

Se A fosse diagonale sarebbe banale

<u>Fatto generale</u> Se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, allora $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

[Si dimostra facilmente per induzione su k a partire da un fatto ancora più generale: il prodotto di 2 matrici diagonali è la matrice diagonale ...]

Ora sappiamo che $M^{-1}AM = D \leftarrow$ diagonale, ma allora

$$M^{-1}A^2M = \underbrace{M^{-1}AM}\underbrace{M^{-1}AM} = D^2. \quad \text{Analogamente}$$

$$M^{-1}A^3M = \underbrace{M^{-1}AM}_{D}\underbrace{M^{-1}AM}_{D}\underbrace{M^{-1}AM}_{D} = D^3 \quad \text{e in generale}$$

$M^{-1}A^kM = D^k$. Ma allora

$$M^{-1}A^{2013}M = D^{2013} = \begin{pmatrix} 2^{2013} & 0 \\ 0 & 3^{2013} \end{pmatrix} \quad \text{e quindi}$$

$$A^{2013} = M D^{2013} M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2013} & 0 \\ 0 & 3^{2013} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

— o —

<u>Definizione</u> Data A matrice $n \times n$ si definisce polinomio caratteristico di A il polinomio

$$p(\lambda) = \operatorname{Det}(A - \lambda \mathrm{Id})$$

Viene sempre un polinomio di grado n nella variabile λ.

Teorema λ è autovalore di $A \iff \lambda$ è una radice del polinomio caratteristico.

$\boxed{\text{Dim.}}$ λ è autovalore di $A \iff$ (definizione di autovalore)

$\exists\, v \neq 0$ t.c. $Av = \lambda v \iff$ (ovvietà)

$\exists\, v \neq 0$ t.c. $Av - \lambda v = 0 \iff$ (ovvietà)

$\exists\, v \neq 0$ t.c. $(A - \lambda Id)\, v = 0 \iff$

$\ker (A - \lambda Id) \neq \{0\} \iff$

$\dim (\ker (A - \lambda Id)) \geq 1 \iff$

$\dim (\operatorname{Im} (A - \lambda Id)) \leq n-1 \iff$

$\operatorname{Det} (A - \lambda Id) = 0$, cioè λ è radice del polinomio caratteristico

Osservazione Quando sappiamo che λ è autovalore, gli autovettori li cerchiamo risolvendo $Ax = \lambda x$, cioè $(A - \lambda Id)\, x = 0$, cioè cerchiamo il ker di $A - \lambda Id$, che è non banale perché rango $(A - \lambda Id) \leq n-1$.

Corollario Una matrice $n \times n$ ha al massimo n autovalori
— o — o —

Supponiamo che una matrice $n \times n$ abbia esattamente n autovalori reali distinti. Allora, se i corrispondenti autovettori fossero lin. indip., la matrice sarebbe diagonalizzabile.

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

$\boxed{\text{Quindi } n \text{ autovalori reali distinti} \Rightarrow \text{diagonalizzabile}}$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, cioè esiste M matrice 4×4 invertibile t.c. $M A M^{-1}$ = Diagonale.

Infatti $\text{Det}(A-\lambda Id) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = $ pol. caratt.,

Det triangolare sup = prodotto elem. sulla diagonale

quindi gli autovalori son $\lambda = 1, 2, -1, 3$. Questi avranno degli autovettori che usati come base diagonalizzano la matrice.

— o — o —

MOLTEPLICITÀ

Molteplicità della radice di un polinomio. Sia $p(x)$ un polinomio e sia α una sua radice (reale o complessa), cioè $p(\alpha)=0$. Allora per il teorema di Ruffini si ha che $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$ cioè

$$p(x) = (x-\alpha)\underbrace{q(x)}_{\text{polinomio}}$$

Si dice molteplicità di α il più grande intero m t.c. $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^m$, cioè l'esponente di $(x-\alpha)$ nella fattorizzazione di $p(x)$.

Fatto generale Un polinomio di grado n si scrive sempre come prodotto di n fattori di 1° grado su $\mathbb{C}$

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici, eventualmente complesse, di $p(x)$. Le radici potrebbero non essere tutte distinte: una radice compare tante volte quante è la sua molteplicità.

Def. Si definisce molteplicità algebrica di un autovalore la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico. Si definisce molteplicità geometrica di un autovalore la dimensione del suo autospazio, cioè

$$\dim(\ker(A-\lambda Id)).$$

Oss. La molteplicità algebrica e quella geometrica sono ≥ 1.

Oss. Se una matrice ha n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti, allora le molteplicità algebriche sono tutte uno e quelle geometriche pure, perchè ho almeno n autovettori corrispondenti $v_1, \dots, v_n$ e questi sono già una base.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 40

Titolo nota 29/11/2013

Forme canoniche $\rightsquigarrow$ forma diagonale $\rightsquigarrow$ autovalori ed autovettori $\rightsquigarrow$ polinomio caratteristico.

Teorema (proprietà del polinomio caratteristico)
Sia A una matrice $n \times n$ e sia $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ il suo polinomio caratteristico.
Allora valgono i seguenti fatti.
(1) Se A è simile a B, allora $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ (quindi il polinomio caratteristico dipende dall'applic. lin. e non dalla matrice particolare che lo rappresenta)
(2) le radici di $p_A(\lambda)$ sono tutti e soli gli autovalori di A (quindi due matrici simili hanno gli stessi autovalori)
(3) Il termine di grado max di $p_A(\lambda)$ è $(-1)^n \lambda^n$,
(4) Il termine noto di $p_A(\lambda)$ è $\det(A)$,
(5) Il coeff. di λ^{n-1} nel polinomio caratteristico è $(-1)^{n+1}$ moltiplicato la traccia della matrice A (la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale).

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$\operatorname{Tr} A = 1+5 = 6$

$$\begin{aligned} &= (1-\lambda)(5-\lambda) + 3 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 5\lambda + 5 + 3 \\ &= \lambda^2 - \underbrace{6}_{\operatorname{Tr}(A)}\lambda + \underbrace{8}_{\operatorname{Det}(A)} \end{aligned}$$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad p_B(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{9}_{\operatorname{Tr} B}\lambda + \underbrace{9}_{\operatorname{Det} B}$

Chi sono gli autovalori di A?

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$ $\quad$ Autovalori: $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ È sempre vero che

tr (A) = somma degli autovalori di A

det (A) = prodotto degli autovalori di A

$\boxed{\text{Dim.}}$ Segue da proprietà generali dei polinomi:
se il polinomio è MONICO (cioè il coeff. del termine di grado max è 1), allora

- somma radici = − coeff. del termine successivo a quello di grado max. = − coeff. di x^{n-1}
- prodotto radici = $(-1)^{n}$ termine noto.
  grado

Esempio $x^{37} - 12x^{36} + \dots + 20x - 7$ allora

somma radici = 12

prod. radici = $(-1)^{37} \cdot (-7) = 7$

Achtung! Quando si parla di somma o prodotto delle radici si intende che

- stiamo parlando delle n radici COMPLESSE
- ogni radice si conta ripetuta a seconda della sua molteplicità.

Oss. Se il polinomio non è monico in partenza, basta renderlo tale dividendo per il coeff. di x^n.
Occhio che i polinomi caratteristici sono monici solo se n è pari, altrimenti bisogna cambiare i segni.

[Dim. del fatto polinomiale

$\boxed{n=2}$ Se a e b sono le radici, $p(x) = (x-a)(x-b)$
$= x^2 - (a+b)x + ab$

$\boxed{n=3}$ $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - \underbrace{(a+b+c)}_{\text{somma radici}}x^2 + (ab+bc+ca)x - \underbrace{abc}_{\text{prod. radici}}$

Il caso generale è analogo.]

Oss. Dal teorema cruciale segue anche che due matrici simili hanno

- stesso polinomio caratteristico
- stessi autovalori
- stesso determinante
- stessa traccia

Oss. Senza passare dal teo. cruciale è facile vedere che

$$A \text{ simile a } B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$$

[Dim. A simile a B vuol dire $B = MAM^{-1}$, quindi

$$\det(B) = \det(MAM^{-1}) \underset{\text{BINET}}{=} \cancel{\det(M)} \cdot \det(A) \cdot \underbrace{\det(M^{-1})}_{= \frac{1}{\cancel{\det(M)}}} = \det(A)$$]

Dim. teo. cruciale

(1) Sia A simile a B, cioè $B = MAM^{-1}$. Allora

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\
&= \det(MAM^{-1} - \boxed{\lambda I}) \\
&= \det(MAM^{-1} - \boxed{\lambda M I M^{-1}}) \\
&= \det M(A - \lambda I)M^{-1} \\
&= \det M \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det M^{-1} \\
&= \cancel{\det M} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \frac{1}{\cancel{\det M}} \\
&= \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)
\end{aligned}$$

(2) Dim. volta precedente [$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists\, v \neq 0$ t.c. $Av - \lambda v = 0$

$\Rightarrow \lambda$ autovalore].

(4) Termine noto di $p_A(\lambda) = p_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$

(3) Volendo si dimostra per induzione.

Vero per matrici 1×1 e per matrici 2×2.

Passando da $n-1$ ad n:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots, \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots, \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Se lo sviluppo rispetto alla 1ª riga ottengo

$$(a_{11}-\lambda)\det\begin{pmatrix} a_{22}-\lambda & \dots & \\ \dots & a_{33}-\lambda & \dots \\ - & - & - \end{pmatrix} + \boxed{\text{numero} \cdot \det(\text{matrice con } n-2\ \lambda \text{ in giro})}$$

il grado di tutto ciò è al max $n-2$

$$= (a_{11}-\lambda)\cdot[\underbrace{(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}}_{\text{per ipotesi induttiva}} + \text{roba}] + \text{roba di grado} \leq n-2$$

$$= (-1)^n \lambda^n + \text{roba di grado} \leq (n-1)$$

(5) Per la traccia è induzione simile.

Vero per matrici 1×1 e 2×2

e quando passo da $n-1$ ad n sviluppando come sopra:

termini di grado $(n-1)$ resta solo

$$(a_{11}-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22}-\lambda & \dots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}-\lambda)\left((-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n \operatorname{Tr}\ \lambda^{n-2}\right) + \text{roba}\dots$$

svolgendo i conti resta $(-1)^n(a_{11}+\operatorname{Tr})$

$$= (-1)^n(a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots).$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 41

Titolo nota 29/11/2013

MOLTEPLICITÀ

Def. Sia λ un autovalore di A. Allora
- la molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$ = molteplicità di λ come radice di $p_A(\lambda)$
- la molteplicità geometrica $m_g(\lambda)$ = dim. autospazio
  $= \dim(\ker(A-\lambda I))$
  $= n - \text{rango}(A-\lambda I)$

Teorema Si ha sempre che $1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$.

Conseguenza Se A ha n autovalori distinti, allora tutti gli autovalori hanno $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$.

Teorema Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Conseguenza Se A ha n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.

[Dim.: siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori. Siano $v_1, \dots, v_n$ autovettori corrispondenti (cioè $Av_i = \lambda_i v_i$). Questi sono n e sono lin. indip., quindi sono una base. Usando la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ in partenza ed arrivo A diventa diagonale].

Oss. Se gli autovalori non sono distinti, allora non è detto che A sia diagonalizzabile.
Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$p_A(\lambda) = (\lambda-7)^2$ che ha come radici $\lambda = 7$ di molteplicità 2, quindi $m_a(7) = 2$

$$m_g(7) = \dim(\ker(A - 7I)) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

Se A fosse diagonalizzabile, sulla diagonale dovrebbero esserci gli autovalori, cioè 7 e 7, ma allora vorrebbe dire che esiste una base composta da autovettori di 7, ma allora l'autospazio dovrebbe avere dim 2, il che non è.

<u>Teorema</u> A è diagonalizzabile se e solo se per ogni suo autovalore λ si ha $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

$\boxed{\text{ACHTUNG!}}$ Gli autovalori possono stare in $\mathbb{C}$ oppure in $\mathbb{R}$.

- Se stanno tutti in $\mathbb{R}$ c'è speranza di diagonalizzare in $\mathbb{R}$, cioè

$$M^{-1} A M = D$$

matrici reali   diagonale in $\mathbb{R}$

- se invece gli autovalori stanno solo in $\mathbb{C}$, allora si può al più diagonalizzare in $\mathbb{C}$, cioè

$$M^{-1} A M = D$$

matrici complesse   diagonale in $\mathbb{C}$

<u>Esempio 1</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Chi sono gli autovalori?

somma autov. $= \mathrm{Tr}(A) = 7$

prod. autov. $= \mathrm{Det}(A) = 12$

Autovalori: $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$ $\Rightarrow$ diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

Trovo gli autovettori $\quad Av = 3v \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x - y = 3x \\ 2x + 5y = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Una possibilità è $\boxed{(1,-1)}$

$$Av = 4v \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - y = 4x \\ 2x + 5y = 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{(1,-2)}$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ Manda componenti base nuova $\rightsquigarrow$ comp. base vecchia

Quindi $M^{-1} A M = D$ $\quad M^{-1} = -1 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Esempio 2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = B$

$$P_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i$ $\rightarrow$ autovalori complessi distinti

$\rightarrow$ diagonalizzabile su $\mathbb{C}$

Quindi esiste una matrice M t.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1+3i & 0 \\ 0 & 1-3i \end{pmatrix}$$

M come prima si ottiene dagli autovettori, che però saranno complessi

$Av = (1+3i)v \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+3i)x \\ (1+3i)y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 3y = (1+3i)x \\ -3x + y = (1+3i)y \end{cases} \quad \begin{cases} -3ix + 3y = 0 \\ -3x - 3iy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = ix \\ x + iy = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{(1, i)}$$

$$\begin{cases} x + 3y = (1-3i)x \\ -3x + y = (1-3i)y \end{cases} \quad \begin{cases} 3ix + 3y = 0 \\ -3x + 3iy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -ix \\ -x + iy = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{(1, -i)}$$

Osservazione Se una matrice reale ha autovalori complessi, allora
- gli autovalori complessi sono coniugati a coppie,
- i corrispondenti autovettori sono coniugati a coppie.

La diagonalizzazione su $\mathbb{C}$ è data dal cambio di variabili

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Controllare per esercizio che $M^{-1} A M$ = Diagonale prevista.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. che } m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \Rightarrow \text{diagonalizzabilità}}$

lin. ind.

Per ogni autovalore, posso trovare tanti autovettori quanta è la sua molteplicità geometrica.

Visto che $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni λ, in questo modo ho che

$$\sum_\lambda m_g(\lambda) = \sum_\lambda m_a(\lambda) = n$$

in un polinomio la somma delle molteplicità delle radici fa il grado

Quindi ho trovato esattamente n autovettori $v_1, \dots, v_n$.

Avrei finito se fossero lin. indip.

Suppongo che non lo siano, quindi esiste una comb. lin.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

Raggruppando tutti quelli che sono relativi allo stesso autovalore trovo una somma del tipo

$$w_1 + \dots + w_k = 0$$

Questi sono relativi ad autov. diversi, quindi sono nulli: $w_1 = \dots = w_k = 0$

Ora si conclude osservando che $w_1 = 0 \Rightarrow$ tutti i coeff. dei v_i confluiti in w_1 sono nulli e così via.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 42

Titolo nota 30/11/2013

Teorema spettrale

Def. Una matrice A quadrata $n \times n$ si dice simmetrica se $\boxed{A = A^t}$

Esempi $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 7 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Praticamente: posso mettere quello che voglio sulla diagonale nel triangolo superiore, e a quel punto sono costretto a ricopiare nel triangolo inferiore

Fatto semplice L'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche è un sottospazio vettoriale di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$

[Dim: quanti parametri posso scegliere

$$\underset{1^a \text{ riga}}{n} + \underset{2^a \text{ riga}}{(n-1)} + \underset{3^a \text{ riga}}{(n-2)} + \ldots + \underset{\text{ultima riga}}{1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2° modo: posso scegliere tutta la diagonale $\rightsquigarrow n$
+ metà dei rimanenti $\rightsquigarrow \frac{n^2-n}{2}$

Sommando: $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.]

Matrici simmetriche e prodotto scalare

Una matrice A è simmetrica se e solo se

$\boxed{\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle}$ per ogni scelta di u e v

Prodotto scalare, vettori riga e vettori colonna

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = u^t v$$

Fare il prodotto scalare tra 2 vettori colonna u e v è equivalente a fare $u^t v$ oppure $v^t u$.

Quindi

$$\langle Au, v \rangle = (Au)^t v = \boxed{u^t A^t v}$$

$$\langle u, Av \rangle = \boxed{u^t A v}$$

Se $A = A^t$, allora per forza $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$.

In realtà vale anche il viceversa, cioè se

$$u^t A^t v = u^t A v$$

per ogni u e v, allora per forza $A = A^t$.

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMA SPETTRALE}}$ Sia A una matrice simmetrica. Allora A è diagonalizzabile mediante una base ortonormale. Vale anche il viceversa, cioè se A è diagonalizzabile mediante una base ortonormale, allora A è simmetrica.

Detto in altro modo: A è simmetrica $\iff \exists\, M$ ortogonale $(M^{-1} = M^t)$ tale che $\underbrace{M^{-1} A M}_{M^t A M} =$ Diagonale

Nota: diagonalizzabile sui REALI

Conseguenza Sia A una matrice reale simmetrica. Allora

1. tutti gli autovalori di A sono reali e hanno molt. algebrica uguale alla molteplicità geometrica.
2. possiamo trovare una base ortonormale fatta di autovettori

— o — o —

$\boxed{\text{Fatto 1 (semplice)}}$ Se A si diagonalizza mediante matrice ortogonale, allora A è simmetrica.

Dim. per ipotesi esiste M ortogonale (cioè $M^{-1} = M^t$) t.c.

$$M^{-1} A M = D \leftarrow \text{diagonale}$$

o meglio

$$M^t A M = D.$$

Da qui ottengo che $A = MDM^{-1} = MDM^t$. Ma allora

$$A^t = (MDM^t)^t = \underbrace{(M^t)^t}_{M} \underbrace{D^t}_{D} M^t = MDM^t = A$$

$\boxed{\text{Fatto 2 (semplice)}}$ Se A è simmetrica, allora autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

Dim.: Siano λ e μ due autovalori distinti $\lambda \neq \mu$ e siano v e w autovettori corrispondenti, cioè

$$Av = \lambda v \qquad Aw = \mu w.$$

Allora

$$\lambda \langle v, w \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. prod. scalare}}}{=} \langle \lambda v, w \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ Av = \lambda v}}{=} \langle Av, w \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SIMMETRIA}}}{=} \langle v, Aw \rangle$$

$$= \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle.$$

Ho così ottenuto che $\lambda \langle v, w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$, cioè $\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle v, w \rangle = 0$. Quindi l'unica possibilità è che sia $\langle v, w \rangle = 0$.

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ (un po' meno semplice). Sia A ortogonale, sia λ un autovalore, e sia v un autovettore, cioè $Av = \lambda v$.
Sia W l'insieme dei vettori ortogonali a v.
Allora $Aw \in W$ per ogni $w \in W$,
cioè A manda vettori ortogonali a v in vettori ortogonali a v.

Dim. Sia $w \in W$, cioè $\langle w, v \rangle = 0$.
Voglio dimostrare che $Aw \in W$, cioè che $\langle Aw, v \rangle = 0$.
Ma

$$\langle Aw, v \rangle \underset{\text{SIMMETRIA}}{=} \langle w, Av \rangle \underset{v \text{ autovett.}}{=} \langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = 0$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 43

Titolo nota 30/11/2013

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ (meno semplice) Se A è una matrice simmetrica, allora A ammette almeno un autovalore reale.

Dando per buono il fatto 4, il teorema spettrale segue per induzione.

$\boxed{n=1}$ Banale

$\boxed{\text{Passaggio induttivo } n-1 \Rightarrow n}$ Ipotesi: ogni matrice $(n-1)\times(n-1)$ simmetrica si diagonalizza

Tesi: stessa cosa per matrici $n \times n$.

Sia A $n\times n$ simmetrica. Per il Fatto 4, A ammette almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia v un corrispondente autovettore, cioè $Av=\lambda v$, che posso assumere di norma 1.
Prendo una base in cui il primo vettore è v e i restanti $n-1$ vettori sono perpendicolari a v, cioè stanno in quello che nel fatto 3 si chiamava W: $\{v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$
Cosa diventa A in questa nuova base?

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & B & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
$Av=\lambda v$

Le colonne dopo la prima sono $Aw_1, Aw_2, \dots, Aw_{n-1}$ e tutti questi vettori sono $\perp$ a v, quindi hanno la prima componente uguale a zero.
Resta una matrice B $(n-1)\times(n-1)$ che è ancora simmetrica perché rappresenta la restrizione di A al sottospazio W. Per ipotesi induttiva, B si diagonalizza.

— o — o —

$\boxed{\text{Fatto 4.1}}$ Se A è una matrice reale, anche non simmetrica, e $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore e v è autovettore $Av = \lambda v$, allora $\bar{\lambda}$ è ancora autovalore e $\boxed{\bar{v}}$ è il corrispondente autovettore.

vettore che ha come componenti i coniugati delle componenti

[Dim. $\overline{Av} = \bar{A}\,\bar{v} = A\bar{v}$. Quindi se $Av = \lambda v$, faccio il coniugato a dx e sx e ottengo

$A\bar{v} \underset{\text{sopra}}{=} \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\,\bar{v}$, da cui $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$, quindi $\bar{\lambda}$ è autovalore e $\bar{v}$ è un corrispondente autovettore

$\boxed{\text{Fatto 4.2}}$ $\langle v, \bar{v} \rangle$

$v = (z_1, \dots, z_n)$ $\bar{v} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, quindi

$\langle v, \bar{v} \rangle = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \neq 0$ se $v \neq 0$

$\boxed{\text{Dim. fatto 4}}$ Sia A reale e simmetrica, e sia λ autovalore. Allora λ è reale.

Infatti, sia v un autovettore corrispondente (non so che λ e v sono reali per ora).

$$\lambda\langle v, \bar{v}\rangle = \langle \lambda v, \bar{v}\rangle = \langle Av, \bar{v}\rangle \underset{\text{uso simm.}}{=} \langle v, A\bar{v}\rangle \underset{4.1.}{=} \langle v, \bar{\lambda}\bar{v}\rangle$$

$$= \bar{\lambda}\langle v, \bar{v}\rangle$$

Ho ottenuto che $\lambda\langle v,\bar{v}\rangle = \bar{\lambda}\langle v,\bar{v}\rangle$, cioè

$(\lambda - \bar{\lambda})\underbrace{\langle v, \bar{v}\rangle}_{\neq 0 \text{ per fatto 4.2 e perché autovettori non possono essere nulli}} = 0$. Quindi per forza $\lambda = \bar{\lambda}$, e dunque λ è reale.

— o — o —

Punto della situazione:

A simmetrica
$\Updownarrow$
base ortonormale di autovettori
$\Updownarrow$
diagonalizzabile con M ortogonale
$$M^t A M = D$$
$$M^t = M^{-1}$$

Tutto questo avviene sui reali

A diagonalizzabile su $\mathbb{R}$
$\Updownarrow$
base di autovettori in $\mathbb{R}$
$\Updownarrow$
$M^{-1}AM = D$ (M matrice reale)
$\Updownarrow$
tutti gli autovalori sono reali e hanno molt. alg. = molt. geom.
$\boxed{\Uparrow}$ Non quella opposta
tutti gli autovalori sono reali e DISTINTI

A diagonalizzabile su $\mathbb{C}$
$\Updownarrow$
base di autovettori in $\mathbb{C}$
$\Updownarrow$
$M^{-1}AM = D$ → complesse
$\Updownarrow$
tutti gli autovalori hanno molt. alg. = molt. geom
$\Uparrow$
tutti gli autovalori sono DISTINTI.

Esempio
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A$$

A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$? Sì, autovalori reali e distinti: 1, 7, 5
" " " " $\mathbb{C}$? Ovvio dal precedente
A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale? No perché per il teo. spettrale dovrebbe essere simmetrica
In particolare esiste una base di autovettori, che però non sarà ortonormale. Trovarla è semplice: $Av = v$, $Av = 7v$, $Av = 5v$

<u>Esempio</u> $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = B$ È diagonalizzabile in $\mathbb{R}$? È diagonalizzabile in $\mathbb{C}$?

Autovalori: 2, 2, 5. Autovalore 5 ha molt. algebrica 1, e quindi molt. geom. = 1 $(1 \leq m_g \leq m_a)$

Autovalore $\lambda = 2$ ha molt. algebrica 2. $m_g(2) = \begin{smallmatrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{smallmatrix}$

Ora $m_g(2) = \dim \operatorname{Ker}(A - 2I) = 3 - \operatorname{rango}(A - 2I)$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ rango = 2, quindi $m_g = 1$

$\Rightarrow$ ADDIO DIAGONALIZZABILITÀ

— o — o —

$\boxed{\text{TRIANGOLARIZZAZIONE}}$

A è triangolarizzabile $\Leftrightarrow \exists M$ t.c. $M^{-1}AM = T$

triangolare superiore

$\boxed{\text{Teorema}}$
- Una matrice reale A è triangolabile, addirittura mediante una matrice ortogonale, se e solo se ha tutti gli autovalori reali.
- Una matrice complessa A è sempre triangolabile.

<u>Oss.</u> Ovviamente quando triangolarizzo chi finisce sulla diagonale sono gli autovalori.

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 44

Titolo nota 30/11/2013

FORMA CANONICA DI JORDAN

Def. Un blocco di Jordan $k \times k$ è una matrice fatta così:
- un numero λ sulla diagonale
- tutti 1 sopra
- tutto il resto 0.

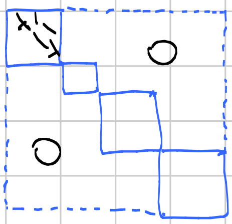
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{k} \Big] k$$

Esempi

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{1\times 1}{(5)} \quad \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}} \quad \underset{3\times 3 \text{ con } \lambda = 0}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{3\times 3 \text{ con } \lambda = 1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

In un blocco di Jordan $k \times k$ ci sono $k-1$ uni.

Def. Una matrice di JORDAN è una matrice ottenuta collegando sulla diagonale dei blocchi di Jordan di varie dimensioni. Il resto sono zeri. Il numero λ sulla diagonale dei vari blocchi può essere uguale o diverso a seconda del blocco.



Esempi Una matrice diagonale è una matrice di Jordan con tutti blocchi 1×1.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}$$

Teorema (Forma di Jordan su $\mathbb{C}$).
Ogni matrice A $n \times n$ (a coeff. reali o complessi) è simile ad una matrice di Jordan, cioè esiste M t.c.

$$M^{-1} A M = J \leftarrow \text{matrice alla JORDAN.}$$

Ovviamente chi compare sulla diagonale sono gli autovalori.
Una matrice A a coeff. reali è simile ad una matrice di Jordan se e solo se ha tutti gli autovalori reali.

Esempio $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$ $\quad Tr(A) = 4 \quad Det(A) = 4$
Autovalori: $2, 2$

Quindi diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ $\iff m_a = 2 = m_g$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rango } 1 \rightsquigarrow m_g = 1 \rightsquigarrow \text{addio diag.}$$

Tuttavia, essendo gli autovalori reali, sarà jordanizzabile su $\mathbb{R}$, quindi esiste M t.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale deve esserci 2, 2.
Se fossero 2 blocchi da 1 sarebbe diagonalizzabile, quindi è 1 blocco da 2.

Come trovo la base jordanizzante (e quindi M). Sarà del tipo $\{v, w\}$, dove

$$Av = 2v \qquad \text{(quindi } v \text{ è l'autovettore di 2)}$$
$$Aw = 2w + v \qquad \text{(e noto } v \text{ questo si risolve).}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = B$$

Abbiamo visto che non è diagonalizzabile. Ora sappiamo che è jordanizzabile su $\mathbb{R}$ e diventa

$$\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{5} \end{matrix}$$

$\boxed{\text{Forma di Jordan reale}}$ Sia A una matrice $n \times n$ reale.
Allora si jordanizza in $\mathbb{C}$.
Ora i blocchi con λ reale vanno bene anche su $\mathbb{R}$.
I blocchi con λ "veramente in $\mathbb{C}$" vengono a coppie (se c'è un blocco con λ c'è un blocco della stessa dimensione con $\bar{\lambda}$).
Posso sostituire questi 2 blocchi $k \times k$ con un unico blocco $2k \times 2k$ fatto così $(\lambda = a + ib)$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Invece di k volte λ e k volte $\bar{\lambda}$
ho k volte $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Invece dei k uni ripetuti 2 volte ho k volte $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Teorema</u> Ogni matrice reale si può portare nella forma di Jordan reale (cioè con blocchi normali con un numero reale sulla diagonale o con i blocchi fatti da sottoblocchetti 2×2).

<u>Esempio</u> $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = A \qquad p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 7 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) + 14 = \lambda^2 - 4\lambda + 17$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-17} = 2 \pm \sqrt{-13} = 2 + i\sqrt{13}$$

Su $\mathbb{C}$ la matrice A è diagonalizzabile, dunque esiste M complessa t.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2+i\sqrt{13} & 0 \\ 0 & 2-i\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

Questa è anche la jordanizzazione complessa (2 blocchi da 1, uno è il coniugato dell'altro).
Sui reali la forma canonica è $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{13} \\ -\sqrt{13} & 2 \end{pmatrix}$, cioè esiste una matrice M reale t.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{13} \\ -\sqrt{13} & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Esempi di passaggio da Jordan $\mathbb{C}$ ⇝ Jordan in $\mathbb{R}$</u>

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i & 1 \\ 0 & 0 & & 1-2i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Qual è il polinomio caratteristico di questa matrice?
Deve essere (intanto lo stesso per tutte e 2 ...)

$$[\lambda-(1+2i)]^2[\lambda-(1-2i)]^2 = [(\overbrace{\lambda-1}^{A}-\overbrace{2i}^{B})(\overbrace{\lambda-1}^{A}+\overbrace{2i}^{B})]^2$$
$$= (\lambda^2-2\lambda+1+4)^2 = (\lambda^2-2\lambda+5)^2$$

— o — o —

<u>Esempio</u> Una matrice reale A ha polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2+4)(\lambda+3)$$

Chi è la forma canonica di A?

su $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$ su $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 45

Titolo nota 04/12/2013

Geometria affine – Trasformazioni affini – Isometrie

$\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali "passano per l'origine" e sono del tipo $\text{Span}\{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\uparrow \text{ lin. indip.}}\} = \{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^n$ spazio affine. Sottospazi affini sono come i sottospazi vett. solo che non passano necessariamente per l'origine.

In generale, un sottospazio affine di dim. k di $\mathbb{R}^n$ si presenta nella forma

$$\underbrace{w_0}_{\text{p.to base}} + \underbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k}_{\text{sott. vett. detto GIACITURA del sottosp. affine}}$$

dove $v_1, \dots, v_k$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$ lin. indip., $c_1, \dots, c_k$ sono numeri reali qualunque, $w_0 \in \mathbb{R}^n$ è un "punto base" fissato

Esempi $n=2$ $k=1$ otteniamo $w_0 + \underset{\text{libero}}{c_1} v_1$ $w_0 \in \mathbb{R}^2, v_1 \in \mathbb{R}^2$

è la parametrizzazione di una retta in $\mathbb{R}^2$ $\vec{P}_0 + t\vec{v}$

La giacitura della retta sarebbe la parallela alla retta stessa passante per l'origine, pensata come sottosp. vett. di $\mathbb{R}^2$.

$n=3$ $k=1$ otteniamo $w_0 + c_1 v_1$ $w_0 \in \mathbb{R}^3, v_1 \in \mathbb{R}^3$

$\vec{P}_0 + t\vec{v}$

$n=3$ $k=2$ otteniamo $w_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2$ $w_0 \in \mathbb{R}^3, v_1 \in \mathbb{R}^3, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$\vec{P}_0 + t\vec{v} + s\vec{w}$

parametri

$\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono una base della giacitura del sottosp. affine.

Def. Due sottospazi affini della stessa dimensione sono paralleli (o coincidenti) se hanno la stessa giacitura.
Se hanno dim. diversa sono paralleli (o uno contenuto nell'altro) se la giacitura di quello di dim. + grande contiene l'altra giacitura.

— o — o —

Trasformazioni affini Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice affine se è del tipo

$$\boxed{f(x) = Ax + b}$$

dove A è una matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Oss. La composizione di due trasformazioni affini è ancora una trasformazione affine.

$$f(x) = A_1 x + b_1 \qquad g(x) = A_2 x + b_2$$

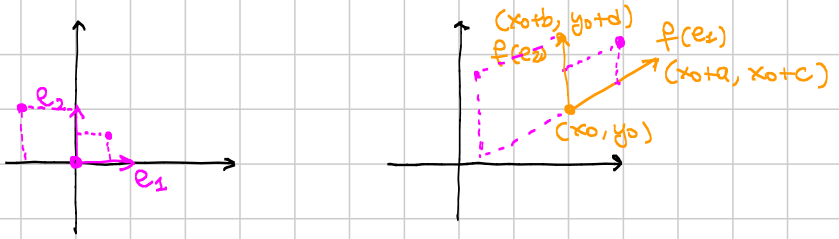
$$\begin{aligned} g(f(x)) = A_2(f(x)) + b_2 &= A_2(A_1 x + b_1) + b_2 \\ &= \boxed{A_2 A_1} x + \boxed{A_2 b + b_2} \\ &= A_3 x + b_3 \end{aligned}$$

Esercizio Chiarire bene "da dove a dove" sono definite $f(x)$ e $g(x)$ e le dim. delle matrici e dei vettori coinvolti.

Esempio $f(x) = Ax + p \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + x_0 \\ cx + dy + y_0 \end{pmatrix}$$



Stabilito dove finiscono l'origine e la base canonica, ho stabilito dove finiscono tutti gli altri punti.

Esempio $f(x,y) = (2x+3y+1,\ x-y+2)$

Scritta in termini di matrici $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domande:

- dove finisce $(1,-3)$? Sostituisco $\rightsquigarrow (-6,6)$
- dove finisce la retta $(2,1)+t(1,0)$?

  Basta sostituire la parametrizzazione della retta nell'affinità

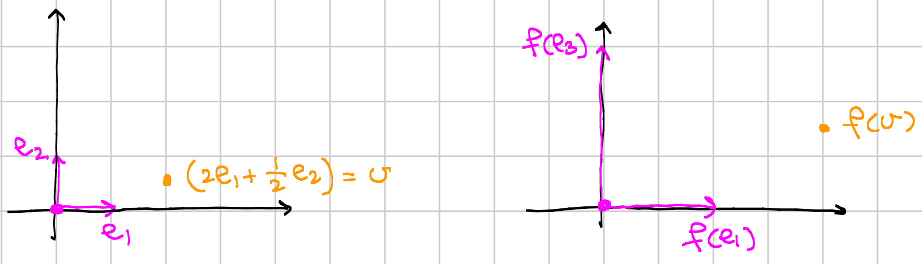
  $(2+t,1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2t+3 \\ 2+t-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 8+2t \\ 3+t \end{pmatrix} = (8,3)+t(2,1)$

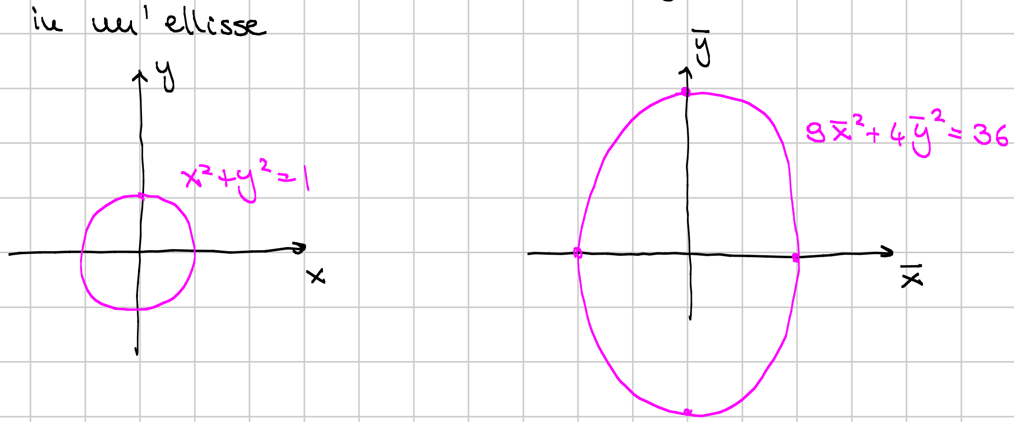
Casi particolari

- A = identità $\rightsquigarrow f(x) = x+p \rightsquigarrow$ traslazione di p
- $A = \lambda \cdot$ identità, $p=0 \rightsquigarrow f(x) = \lambda x \rightsquigarrow$ omotetia di fattore λ
- A = matrice diagonale, $p=0 \rightsquigarrow$ gli assi vanno negli assi, ma con un fattore di dilatazione diverso su ogni asse

in $\mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (2x,3y)$



La circonferenza con centro nell'origine $x^2+y^2=1$ va a finire in un'ellisse



$\bar{x} = 2x$ $\quad x^2+y^2=1 \quad x = \frac{1}{2}\bar{x} \quad y = \frac{1}{3}\bar{y}$

$\bar{y} = 3y$

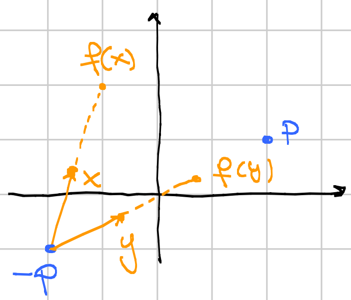
sostituisco e trovo $\frac{1}{4}\bar{x}^2 + \frac{1}{9}\bar{y}^2 = 1$, $9\bar{x}^2+4\bar{y}^2=36$

- $A = 2$ Identità $\quad p \neq 0 \quad f(x) = 2x+p$

Quale p.to resta fisso? $f(x) = x$, cioè $2x+p = x$, cioè $x=-p$

$f(x) = 2x+p = 2(x+p)-p$

$f(x) =$ omotetia di fattore 2 rispetto al punto $-p$



ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 46

Titolo nota 04/12/2013

Isometrie

Def. Una funzione qualunque $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice ISOMETRIA se conserva le distanze, cioè se
$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x,y)$$
per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono tutte sole le affinità
$$f(x) = Ax + b$$
con A matrice $n \times n$ ortogonale.

Dim. **Fatto 1** Tutte le affinità con matrice ortogonale sono isometrie.

Devo dim. che $\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x,y)$, cioè
$$\text{dist}(Ax+b, Ay+b) = \text{dist}(x,y)$$
Posso elevare al quadrato e ottengo le norme

$$\begin{aligned}
\text{dist}^2(Ax+b, Ay+b) &= \|(Ax+b)-(Ay+b)\|^2 \\
&= \|A(x-y)\|^2 \qquad \langle v,w\rangle = v^t w \\
&= \langle A(x-y), A(x-y)\rangle \\
&= [A(x-y)]^t A(x-y) \\
&= (x-y)^t \underbrace{\boxed{A^t A}}_{= \text{Id perché } A \text{ è ortogonale}} (x-y) \\
&= (x-y)^t (x-y) \\
&= \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \|x-y\|^2 \\
&= \text{dist}^2(x,y).
\end{aligned}$$

Oss. C'è sotto questo fatto ancora più generale:
se A è ortogonale, allora $\|Av\| = \|v\|$.
Infatti

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = (Av)^t (Av) = v^t \underbrace{A^t A}\, v = v^t v = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'isometria, e in aggiunta $f(0)=0$, allora f conserva le norme, cioè

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\|f(x)\| = \text{dist}\,(f(x), 0) \underset{\substack{\uparrow \\ f(0)=0}}{=} \text{dist}\,(f(x), f(0)) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ isometria}}}{=} \text{dist}\,(x, 0) = \|x\|$$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'isometria, e in aggiunta $f(0)=0$, allora f conserva i prodotti scalari, cioè

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$$

Si parte dall'identità di polarizzazione:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right)$$

$$\cancel{\|u\|^2} + \cancel{\|v\|^2} + 2\langle u, v \rangle - \cancel{\|u\|^2} - \cancel{\|v\|^2}$$

La applico con $u = f(x)$ e $v = f(y)$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2} \left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$$

$$= \langle x, y \rangle$$

..., vediamo dopo ...

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è isometria, e in aggiunta $f(0)=0$, allora $f(x) = Ax$ con A ortogonale.

Prendo la base canonica $e_1, \ldots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$. Per i fatti precedenti abbiamo che $\underbrace{f(e_1)}_{\overline{e}_1}, \ldots, \underbrace{f(e_n)}_{\overline{e}_n}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Infatti

- se $i \neq j$, allora $\langle \overline{e}_i, \overline{e}_j \rangle \underset{\text{def.}}{=} \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \underset{\text{Fatto 3}}{=} \langle e_i, e_j \rangle \underset{\text{base canonica}}{=} 0$
- se $i = j$, allora $\langle \overline{e}_i, \overline{e}_i \rangle = \langle f(e_i), f(e_i) \rangle = \langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Ma allora sia x un vettore qualunque. Allora

$$x = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n$$

con $c_i = \langle x, e_i \rangle$ (fatto generale sui coeff quando la base è ortonormale)

Analogamente $f(x) = a_1 \overline{e}_1 + \ldots + a_n \overline{e}_n$ dove $a_i = \langle f(x), \overline{e}_i \rangle$

Ma

$$a_i = \langle f(x), \overline{e}_i \rangle = \langle f(x), f(e_i) \rangle \underset{\text{Fatto 3}}{=} \langle x, e_i \rangle = c_i$$

Ma allora abbiamo dimostrato che

$$x = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n \implies f(x) = c_1 f(e_1) + \ldots + c_n f(e_n)$$

quindi f è lineare, e la matrice corrispondente è ortogonale perché manda la base canonica $e_1, \ldots, e_n$ nella base ortonormale $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$.

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è isometria, allora $f(x) = Ax + b$ con A ortogonale.

Pongo $g(x) = f(x) - f(0)$. È facile vedere che $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è isometria e $g(0) = 0$. Per il fatto 4 ho che $g(x) = Ax$ con A ortogonale, quindi $f(x) = g(x) + f(0) = Ax + \underbrace{f(0)}_{b}$

$\boxed{\text{Back to Fatto 3}}$ Dal fatto 2 sappiamo che f conserva le norme.

$$\|f(x)-f(y)\|^2 = \|x-y\|^2$$ perchè conserva le distanze

$$\cancel{\|f(x)\|^2}+\cancel{\|f(y)\|^2}-2\langle f(x),f(y)\rangle = \cancel{\|x\|^2}+\cancel{\|y\|^2}-2\langle x,y\rangle$$

Ho semplificato perchè conserva le norme e ottengo

$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$, cioè conserva i prodotti scalari.

— o — o —

$\boxed{\text{Isometrie di } \mathbb{R}^2}$ $f(x) = Ax+b$ con A matrice 2×2 ortogonale.

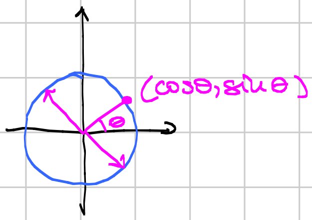
Come sono fatte le 2×2 ortogonali?

Le colonne devono essere ortonormali

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & * \\ \sin\theta & * \end{pmatrix}$$

serve vettore di norma 1, cioè sulla circ. trigonometrica, cioè del tipo $(\cos\theta, \sin\theta)$

deve essere $\perp$ al prec. e sulla circ. trigonometrica



Ho 2 possibilità

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

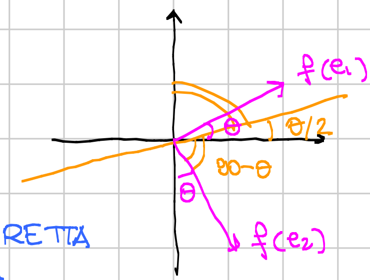
Le possibili matrici ortogonali su $\mathbb{R}^2$ sono del tipo

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad\quad\quad \uparrow \\ Ae_1 \quad\quad Ae_2 \end{array}$$

ROTAZIONE DI ANGOLO θ rispetto all'origine

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

SIMMETRIA RISPETTO ALLA RETTA CON ANGOLO $\frac{\theta}{2}$.



ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 47

Titolo nota 04/12/2013

Isometrie in $\mathbb{R}^2$

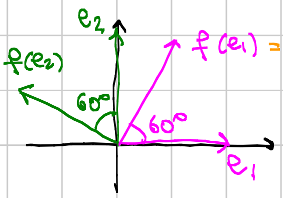
Esempio 1 Scrivere la trasformazione che rappresenta la rotazione di 60° rispetto all'origine.

↑ antioraria

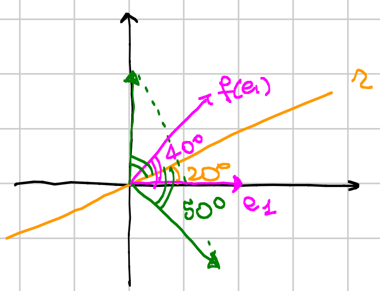
Con il senno di poi $f(x) = Ax$ con
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos 60° \\ \sin 60°\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin 60° \\ \cos 60°\end{matrix}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

In componenti $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{3}\,y,\ \sqrt{3}\,x + y\right)$

Capiamo meglio:



Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto alla retta che passa per l'origine e forma un angolo di 20° con il semiasse positivo delle x.



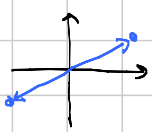
$$\begin{pmatrix} \cos 40° & \sin 40° \\ \sin 40° & -\cos 40° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 40° & \sin 40° \\ \sin 40° & -\cos 40° \end{pmatrix}$$

↑ sarebbe $\cos(-50°)$, $\sin(-50°)$

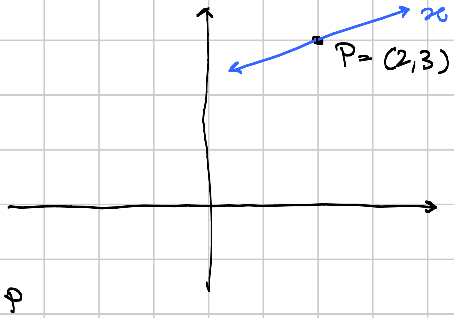
Esempio 3 Scrivere la simmetria centrale rispetto al punto $P = (2,3)$

Se fosse rispetto all'origine sarebbe $(x,y) \to (-x,-y)$

quindi con matrice associata $-Id$



Rispetto ad un punto P.
Strategia



$x \rightsquigarrow (x-P) \rightsquigarrow$ capovolgo

$\downarrow$

aggiungo di nuovo P

$$x \rightsquigarrow x-P \rightsquigarrow P-x \rightsquigarrow 2P-x$$

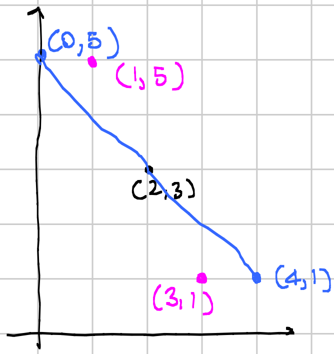
Componendo ottengo $f(x) = 2P-x = -Id \cdot x + 2P$

In componenti

$$f(x,y) = (-x,-y) + (4,6) = \boxed{(-x+4,-y+6)}$$

Controllino $f(4,1) = (0,5)$

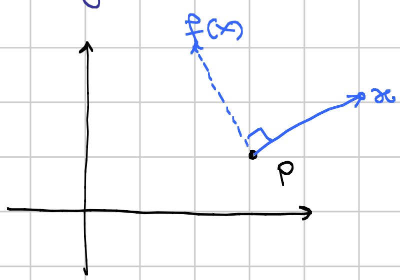
$f(3,1) = (1,5)$



Nota bene: matrice $-Id$ = rotazione di 180°

<u>Esempio 4</u> Scrivere l'applicazione che rappresenta la rotazione di 90° rispetto al punto $(3,1) = P$.

Strategia: $x \rightsquigarrow x-P \rightsquigarrow$ ruoto di 90° $\rightsquigarrow$ aggiungo di nuovo P



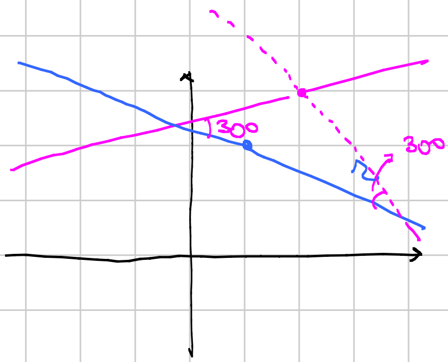
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{\text{tolgo } P}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}}_{\text{rotazione di } 90°} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \underset{\text{aggiungo } P}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+4 \\ x-2 \end{pmatrix}$$

$f(x,y) = (-y+4, x-2)$ Controllino: $f(5,2) = (2,3)$ ed è ragionevole.

Esempio 3 Consideriamo la retta r di eq. parametrica $(1,2) + t(5,-3)$

Domanda: scrivere la retta che passa per $(2,3)$ e forma un angolo di $30°$ rispetto alla precedente.



I punti base non intervengono, almeno non subito.
Quello che conta sono i vettori direzione.

IL VETTORE DIREZIONE DELLA NUOVA RETTA È QUELLO VECCHIO RUOTATO DI $30°$ (O $-30°$ SE VOGLIO QUELLA TRATTEGGIATA)

$$\text{Nuovo vett. direz.} = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & -\frac12 \\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt3+3}{2} \\ \frac{5-3\sqrt3}{2} \end{pmatrix}$$

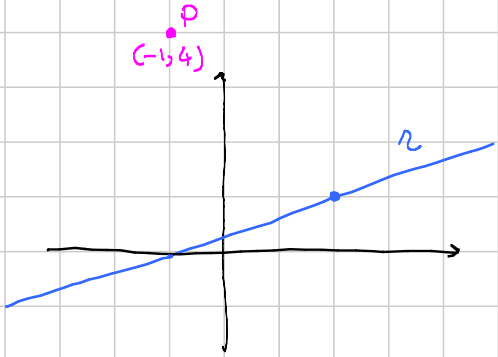
L'eq. parametrica della nuova retta sarà

$$\underset{\uparrow}{(2,3)} + t\left(\frac{5\sqrt3+3}{2}, \frac{5-3\sqrt3}{2}\right) \underset{\uparrow}{=} (2,3) + t(5\sqrt3+3, 5-3\sqrt3)$$

Nuovo punto base

posso moltiplicare il vettore direzione per una costante.

Esempio 6 Consideriamo la retta $r: (2,1)+t(3,1)$.
Facciamo la rotazione di $-45°$ rispetto al punto $(-1,4)$.
Dove va a finire r?



Basta scrivere la trasformazione che rappresenta la rotazione voluta

$x \rightsquigarrow x-P \rightsquigarrow$ ruoto $\rightsquigarrow$ aggiungo P

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}}_{\text{ruoto } (x-P)} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{aggiungo } P}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x+y-3 \\ -x+y-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{3\sqrt{2}}{2}-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{5\sqrt{2}}{2}+4\right)}_{\text{rotazione di } -45° \text{ intorno al punto } (-1,4)}$$

Se voglio sapere dove finisce la retta r devo sostituire (x,y) con $(2+3t, 1+t)$. Ottengo:

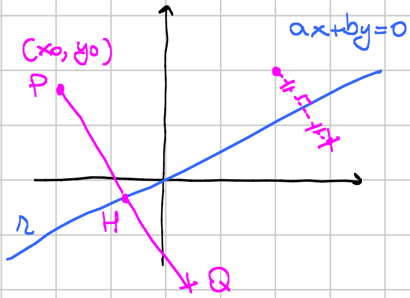
$$\left(\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{3\sqrt{2}}{2}-1,\ -\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{5\sqrt{2}}{2}+4\right)$$

Volendo lo scrivo del tipo $\underbrace{(A,B)}_{\text{nuovo pto base}} + t\underbrace{(C,D)}_{\text{nuovo vettore direzione}}$,

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 048

Titolo nota 06/12/2013

Come scrivere la simmetria rispetto ad una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^2$?



$\boxed{1° \text{ modo}}$ "Con le mani". Sia (x_0, y_0) il punto di partenza. Scrivo la retta per (x_0,y_0) e $\perp$ alla retta r data.

In eq. parametrica diventa

$$(x_0,y_0)+t\,(a,b)$$

Interseco questa con r. Sostituisco la param. nell' eq. cartesiana di r:

$$a\,(x_0+ta)+b\,(y_0+tb)=0$$

$$ax_0+a^2t+by_0+b^2t=0 \rightsquigarrow (a^2+b^2)\,t=-ax_0-by_0$$

$$\rightsquigarrow t=-\frac{ax_0+by_0}{a^2+b^3}, \text{ quindi } H=(x_0,y_0)-\frac{ax_0+by_0}{a^2+b^2}(a,b)$$

Ora cerco $Q=(x_1,y_1)$. Dovrà essere $H=\frac{P+Q}{2}=\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}(x_0,y_0)-\frac{ax_0+by_0}{a^2+b^2}(a,b)=\cancel{\frac{1}{2}(x_0,y_0)}+\frac{1}{2}(x_1,y_1)$$

Quindi $(x_1,y_1)=(x_0,y_0)-2\,\frac{ax_0+by_0}{a^2+b^2}(a,b)$

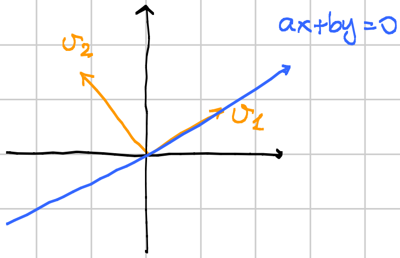
$$=\left(\frac{\cancel{a^2x_0}+b^2x_0-\cancel{2}a^2x_0-2aby_0}{a^2+b^2},\ \frac{a^2y_0+\cancel{b^2y_0}-2abx_0-\cancel{2}b^2y_0}{a^2+b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\left((b^2-a^2)x_0-2aby_0,\ (a^2-b^2)y_0-2abx_0\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}b^2-a^2 & -2ab\\ -2ab & -(b^2-a^2)\end{pmatrix}}_{\text{Matrice della simmetria: è del tipo}}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Prendo, invece della base canonica, una base ortogonale come in figura.



Ad esempio posso prendere:

$v_1 = (-b, a) \qquad v_2 = (a, b)$

La simmetria S come funziona in questa base

$S(v_1) = v_1$

$S(v_2) = -v_2$

Questo dice che S è diagonalizzabile con autovalori ± 1 e autovett. v_1 e v_2

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: matrice di S nella base $\{v_1, v_2\}$ in partenza e arrivo

Se voglio la matrice di S nella base canonica basta che faccia il cambio di base

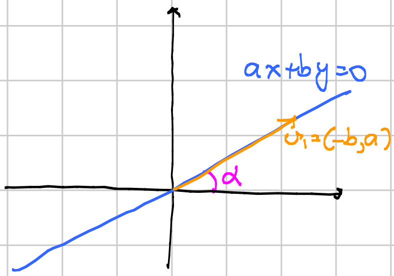
$$\underbrace{\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}}_{\text{dalla nuova alla canonica}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{dalla canonica alla nuova}}$$

: S dalla canonica alla canonica

$$\frac{-1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Facendo il conto viene la stessa matrice di prima.

$\boxed{3^o \text{ modo}}$ La matrice di una simmetria è del tipo



$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ dove θ è il doppio dell'angolo α che la retta r forma con l'asse x.

Ora

$\tan\alpha = -\frac{b}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Quindi $\cos\theta = \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\frac{b^2}{a^2+b^2} - 1 = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$

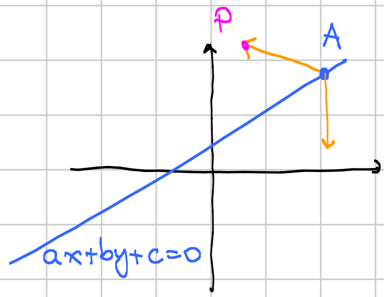
$\sin\theta = \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{-2ab}{a^2+b^2}$. Stesso risultato!

— o — o —

E se la retta non passa per l'origine?

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ Si ricicla allo stesso modo

Osservazione: calcolando $\|PH\|$ si ottiene la formula per la distanza di un p.to da una retta.



$\boxed{2^o \text{ e } 3^o \text{ modo}}$ Scelgo un punto A sulla retta.
Poi per calcolarmi il simmetrico di un certo $P \in \mathbb{R}^2$, faccio nell'ordine

- $P \rightsquigarrow P - A$
- simmetrico di $P-A$
- aggiungo nuovamente A

Quindi $\text{Simm}(P) = A + \text{Simm}(P-A)$

Per trovare un punto A della retta sostituisco per esempio $x = 0$ e trovo

$$A = \left(0, -\frac{c}{b}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{matrice di prima in funzione di } a \text{ e } b} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y + \frac{c}{b} \end{pmatrix}}_{P-A \,\to\, \binom{x}{y}}$$

Simmetria rispetto alla retta $ax + by + c = 0$

Esercizio Controllare che venga lo stesso risultato nei 2 modi

— o — o —

Esercizio Quali sono gli autovalori di una rotazione nel piano?

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \text{Det} &= 1 \\ \text{Tr} &= 2\cos\theta \end{aligned}$$

Se gli autovalori sono reali, allora sono del tipo $\lambda, \frac{1}{\lambda}$.
D'altra parte vale il

$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ Se una matrice ortogonale ha autovalori reali, allora questi sono ± 1.

Dim. Se A è ortogonale, allora $\|Av\| = \|v\|$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, cioè A conserva le norme. Sia λ un autovalore e sia v un suo autovettore. Allora

$$\|Av\| = \|v\|$$
$$\|\lambda v\|$$
$$|\lambda| \cdot \|v\|$$

Semplificando $\|v\|$ (che è $\neq 0$ perché gli autovettori non possono essere nulli) ottengo $|\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$.

— o —

Quindi ci sono 2 possibilità per autovalori reali di una rot.:
① $\lambda = \frac{1}{\lambda} = 1$, ma allora è l'identità, cioè $\theta = 0$
② $\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1$, ma allora è $-$Identità, cioè $\theta = \pi$ (180°)

In tutti gli altri casi gli autovalori sono complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$.
Ma allora Traccia $= 2\alpha$, quindi $\alpha = \cos\theta$ e quindi $\beta = \sin\theta$.

In tutti i casi gli autovalori di una rotazione sono $\underbrace{\cos\theta \pm i \sin\theta}_{e^{i\theta}}$, quindi volendo sui complessi è diagonalizzabile.

Oss. Basta cambiare un segno e si ottiene $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
che ha come autovalori $+1$ e -1 sempre!!!

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 49

Titolo nota 06/12/2013

Classificazione delle isometrie in $\mathbb{R}^2$

Già visto: teorema di struttura che vale in $\mathbb{R}^n$ e dice che sono del tipo

$$Ax + b$$

matrice ortogonale

Geometricamente la classificazione si basa sul luogo dei p.ti fissi, cioè sull'insieme dei p.ti $x \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$Ax + b = x$$

Trovarli si riduce al sistema lineare

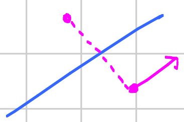
$$\boxed{(A - Id)\, x = -b}$$

Ci sono 4 possibilità:

- nessuna soluzione
- soluzione unica (x_0, y_0)
- infinite soluz. dipendenti da un parametro (una retta)
- " " " " 2 parametri (tutto il piano)

Risalendo all'isometria, abbiamo 4 casi:

1. tutto il piano fisso: l'isometria è l'identità $(A = I,\ b = 0)$
2. una retta fissa: l'isometria è la simmetria risp. a quella retta
3. un p.to fisso: rotazione di un angolo θ rispetto al p.to
4. → 4.1 traslazione (A = Identica, $b \neq 0$)
   ↳ 4.2 simmetria risp. ad una retta + traslazione in direzione parallela alla retta stessa



Esempi di isometrie in $\mathbb{R}^3$

Volendo procedere con una classificazione analoga

① tutto $\mathbb{R}^3$ fisso: Identità $(A = Id,\ b = 0)$
② un piano fisso: simmetria rispetto al piano
③ una retta fissa: rotazioni di un certo angolo intorno alla retta
④ un pto fisso: rotazione rispetto ad una retta + simmetria rispetto ad un piano $\perp$ alla retta
⑤ nessun p.to fisso: (5.1) traslazioni
(5.2) simmetria risp. piano + traslazione lungo il piano
(5.3) rotazione intorno ad un asse + + traslazione lungo l'asse.

Esempio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano di eq.

$$2x + y - 3z = 0.$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Parto da $P = (x_0, y_0, z_0)$. Scrivo la retta per P $\perp$ al piano:

$$(x_0, y_0, z_0) + t(2, 1, -3).$$

Interseco retta e piano e trovo H (la proiezione di P sul piano) (volendo $\|PH\|$ sarebbe la distanza di P dal piano).

A questo pto il simmetrico Q è il pto t.c. $\frac{P+Q}{2} = H$, cioè $Q = 2H - P$.

[Esercizio: svolgere i conti come prima in $\mathbb{R}^2$]

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Scelgo una base di $\mathbb{R}^3$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ con v_1 e v_2 appartenenti al piano e v_3 ortogonale al piano.

In tale base la simmetria è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Una tale base è $v_1 = (1, -2, 0)$
$v_2 = (0, 3, 1)$
$v_3 = (2, 1, -3)$

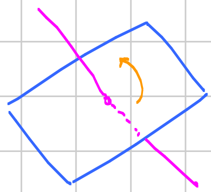
Quindi la matrice della simmetria è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Esercizio: capire ognuna di queste matrici cosa fa.

— o — o —

Esempio 2 Scrivere la matrice che rappresenta la rotazione di 90° rispetto alla retta per l'origine perpendicolare al piano $2x+y-3z=0$



Achtung! Bisogna specificare il verso !!!
Diciamo verso antiorario per un omino che sta in piedi nel semispazio verso le z positive.

Problema molto più facile: ruotare di un angolo θ intorno all'asse z.
È fatta così

ruota in (x,y)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

z invariato

Il problema generale è lo stesso, solo in una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ con

- v_3 nella direzione della retta
- v_1, v_2 nel piano per l'origine $\perp$ alla retta e base ortonormale.

Operativamente trovo v_1, v_2, v_3 intanto ortogonali

$\hat{v}_3 = (2,1,-3)$
$\hat{v}_1 = (1,-2,0)$
Per v_2 applico GS (bananizzazione) a partire da v_1

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$ (viene da GS)

$$= (0,3,1) - \frac{\langle (0,3,1), (1,-2,0)\rangle}{\langle (1,-2,0), (1,-2,0)\rangle} (1,-2,0)$$

$$= (0,3,1) - \frac{-6}{5} (1,-2,0) = (0,3,1) + \frac{6}{5}(1,-2,0)$$

$$= \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$$

Quindi la nuova base ortogonale è

$$v_1 = (1,-2,0)$$
$$v_2 = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$$
$$v_3 = (2,1,-3)$$

Ora devo renderli di norma 1 dividendo per le norme (radici...) e infine fare il cambio di base.

$$\left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rotazione di } 90^\circ \\ \text{in base } \{v_1, v_2, v_3\}}} \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right)^{-1}$$

— o — o —

Esercizio Se A è matrice 3×3 ortogonale, allora almeno uno tra ± 1 è autovalore.

[Dim. Il pol. caratt. ha grado 3, quindi almeno una radice reale, quindi almeno 1 autovalore reale, e questo essendo A ortogonale può essere solo ± 1].

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 50

Titolo nota 11/12/2013

FORME QUADRATICHE E PRODOTTI SCALARI

Forma quadratica È una somma di monomi di secondo grado in un po' di variabili.

Esempi $\boxed{n=2}$ $q(x,y) = 3\boxed{x^2} - 6\boxed{xy} + 5\boxed{y^2}$

In generale $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

$\boxed{n=3}$ $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz$

(si intende che x, y, z sono le variabili, e $a, b, \ldots, f$ sono coeff. dati)

Def. Una forma quadratica si dice

- definita positiva se $q(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(x,y) \geq 0$ per ogni (x,y)
- definita negativa se $q(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \neq 0$
- semidefinita negativa ... $q(x,y) \leq 0$ ...
- indefinita o non definita se esiste (x,y) t.c. $q(x,y) > 0$ ed esiste (x,y) t.c. $q(x,y) < 0$.

La definizione è del tutto analoga per forme che dipendono da più di 2 variabili.

Esempio 1 $q(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2 \geq 0$ sempre e $q(x,y) = 0$ se e solo se $x+y=0$ e $y=0$, cioè se e solo se $x=y=0$. Quindi q è definita positiva (sempre >0 per $(x,y) \neq (0,0)$).

Esempio 2 $q(x,y) = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 \geq 0$ sempre e
$q(x,y)=0$ se e solo se $y=-x$.
Quindi è semidefinita positiva: $q(x,y) \geq 0$ sempre, ma
$q(x,y)$ può fare 0 anche per $(x,y) \neq (0,0)$
(in questo caso $q(3,-3)=0$)

Esempio 3 $q(x,y) = x^2+3xy+y^2$. Osservazioni:
$\left.\begin{array}{l} q(1,0) = 1 \\ q(1,-1) = -1 \end{array}\right\}$ questi 2 valori sostituiti implicano che $q(x,y)$ è indefinita

Domanda: come stabilisco di che tipo è la forma?

Matrice associata ad una forma quadratica

Una forma quadratica, in un numero qualunque di variabili, si può sempre scrivere nella forma

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore} \\ \text{di } n \text{ variabili}}}{q(v)} = v^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice } n\times n \\ \text{SIMMETRICA}}}{B} v}$$

Esempi $q(x,y) = x^2+3xy+2y^2 = (x \ \ y)\begin{pmatrix} 1 & +\frac{3}{2} \\ +\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Più in generale

$$q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2 = \underbrace{(x \ \ y)}_{v^t}\underbrace{\begin{pmatrix} a & +\frac{b}{2} \\ +\frac{b}{2} & c \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{v}$$

$$(x \ \ y)\begin{pmatrix} ax+\frac{b}{2}y \\ +\frac{b}{2}x+cy \end{pmatrix}$$

$$ax^2+\frac{b}{2}xy+\frac{b}{2}xy+cy^2$$

$$ax^2+bxy+cy^2$$

Esempio $\boxed{n=3}$ $q(x,y,z) = x^2 - y^2 + 4z^2 - 2xy + 3xz - 6yz$

La matrice associata è:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -3 \\ \frac{3}{2} & -3 & 4 \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -3 \\ \frac{3}{2} & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

In questo caso la forma è indefinita. Basta osservare che $q(1,0,0) = 1$, $q(0,1,0) = -1$.

Osservazione Se ci sono termini puri con coeff. >0 e termini puri con coeff. <0, allora di sicuro la forma è indefinita.

Esempio

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow q(x,y,z) = y^2 + 3z^2 - 4xz + 8yz$$

— o — o —

Metodi per stabilire la segnatura (cioè definita positiva, ...)

1. Completamento dei quadrati
2. Autovalori
3. SYLVESTER
4. CARTESIO

— o — o —

$\boxed{\text{Metodo } ②}$ Trovo gli autovalori della matrice B, che essendo simmetrica ha n autovalori reali, se contati con molteplicità.
Allora

- se sono tutti >0, la forma è definita positiva
- " " " ≥ 0 " " " semidefinita "
- " " " <0 " " " definita negativa
- " " " ≤ 0 " " " semidefinita "
- se sono un po' e un po', la forma è indefinita.

$\boxed{\text{Metodo } ①}$ Ogni forma quadratica si può scrivere (in vari modi, non in modo unico) come somma o differenza di quadrati di termini linearmente indipendenti.

Esempi $\quad x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$ SOMMA DI 2 QUADRATI

$x^2+xy+\frac{y^2}{4}$

Una volta che è somma di 2 quadrati, è di sicuro ≥ 0 sempre, e vale 0 se e solo se $x+\frac{y}{2}=0$ e $y=0$, cioè se e solo se $x=y=0$, quindi è definita positiva.

$x^2+3xy+y^2 = \left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}y^2$ DIFFERENZA DI 2 QUADRATI

$x^2+3xy+\frac{9}{4}y^2$

Se lo voglio negativo, basta prendere $y=1$, $x=-\frac{3}{2}$

Se lo voglio positivo, basta prendere $y=0$, $x=22$

$$x^2+3xy+y^2 = \underbrace{x^2+3xy+\frac{9}{4}y^2}\underbrace{-\frac{9}{4}y^2+y^2} = \left(x+\frac{3}{2}y\right)^2-\frac{5}{4}y^2$$

$$2x^2+3xy+y^2 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}xy+\frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= 2\left(\underbrace{x^2+\frac{3}{2}xy+\frac{9}{16}y^2}-\frac{9}{16}y^2+\frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= 2\left(x+\frac{3}{4}y\right)^2-\frac{1}{8}y^2 \qquad \text{NON DEFINITA}$$

Se la voglio negativa posso prendere $x=-\frac{3}{4}$ $\quad y=1$

In alternativa potevo usare la matrice $\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ Det: $2-\frac{9}{4} = -\frac{1}{4} < 0$

$\Rightarrow$ autovalori: + e −.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 51

Titolo nota 11/12/2013

Esempio $x^2 - 4xy + y^2 + 3z^2 - 5xz = q(x,y,z)$

Al primo passo faccio fuori TUTTE le x

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 + y^2 + 3z^2 - 4y^2 - \frac{25}{4}z^2 - 2yz$$

$$x^2 + 4y^2 + \frac{25}{4}z^2 - 4xy - 5xz + 10yz$$

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 - 3y^2 - \frac{13}{4}z^2 - 10yz$$

Ora provo a sistemare y e z

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 - 3\left(y^2 + \frac{13}{12}z^2 + \frac{10}{3}yz\right)$$

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 - 3\left[\left(y + \frac{5}{3}z\right)^2 - \frac{25}{9}z^2 + \frac{13}{12}z^2\right]$$

$$y^2 + \frac{25}{9}z^2 + \frac{10}{3}yz$$

$$-\frac{25}{9} + \frac{13}{12} = \frac{-100+39}{36} = -\frac{61}{36}$$

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 - 3\left(y + \frac{5}{3}z\right)^2 + \frac{61}{12}z^2$$

[Fare la verifica espandendo tutto ... e se i conti sono giusti ...]
la forma quadratica risulta non definita.
Se la voglio positiva posso prendere un termine puro: $q(1,0,0) = 1$
Se la voglio negativa posso prendere

$$\begin{cases} x - 2y - \frac{5}{2}z = 0 \\ y + \frac{5}{3}z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Il sistema è per forza a scala perchè ho eliminato una variabile per volta.

L'unico inghippo è che ad un certo punto possono restare solo termini misti!

Esempio $q(x,y) = xy$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

In questi casi si fanno comparire i quadrati così:

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

quindi i termini misti diventano diff. di quadrati.

— o — o —

Punto della situazione:

metodo 2: Ok, ma bisogna trovare gli autovalori, che per gradi alti è un problema

metodo 1: comodo anche in dim. alta, ma vuol dire "navigare a vista", quindi scomodo da programmare.

— o — o —

③ $\boxed{\text{SYLVESTER}}$ Metodo dei MINORI ORLATI

Esempio $\quad x^2 - 4xy + y^2 + 3z^2 - 5xz$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{5}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $(1, 2, 3)$

Calcolo il det dei 3 minori

$\text{Det}_1 = 1$, $\text{Det}_2 = -3$, $\text{Det}_3 = 3 - \frac{25}{4} - 12 = -9 - \frac{25}{4} < 0$

Ora scrivo un segno +, seguito dai segni dei 3 determinanti

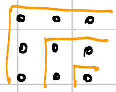
$$\underset{\substack{\text{segno +} \\ \text{iniziale}}}{+} \xrightarrow{P} \underset{\substack{\text{segno} \\ \text{Det}_1}}{+} \xrightarrow{V} \underset{\substack{\text{segno} \\ \text{Det}_2}}{-} \xrightarrow{P} \underset{\substack{\text{segno} \\ \text{Det}_3}}{-}$$

Conto le permanenze e le variazioni di segno: $\underbrace{\text{2 permanenze}}_{\text{2 autov. +}}$, $\underbrace{\text{1 variazione}}_{\text{1 autov. −}}$

<u>Oss.</u> 1 – Come si ricorda Sylvester: pensare che la matrice sia diagonale. In questo caso il Det_k è il prodotto dei primi k autovalori: questo ha lo stesso segno di Det_{k-1} se e solo se il k-esimo autovalore è positivo.

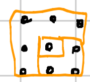
2 – Quando NON funziona Sylvester?
Quando strada facendo trovo un $\mathrm{Det} = 0$. In quel caso non posso concludere nulla.

3 – Posso procedere anche al contrario

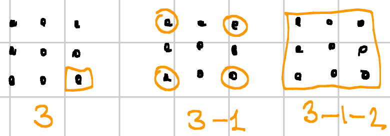


$(3,2,1)$

o anche in maniera più complessa in questo modo: prendo una qualunque permutazione degli indici $(1, 2, \dots, n)$, ad esempio nel nostro caso $(2,3,1)$



$(3,1,2)$



In particolare, se non incontro zeri, il risultato non dipende dalla direzione presa.
Nell'esempio, il $(3,1,2)$ porta a fare

Det_1: 3 $\qquad$ Det_2: $3 - \frac{25}{4}$ $\qquad$ Det_3: $-3 - \frac{25}{4}$

$+ \xrightarrow{P} + \xrightarrow{V} - \xrightarrow{P} -$

<u>Esercizio</u> Provare nell'esempio tutte le 6 possibili permutazioni.

— o — o —

④ $\boxed{\text{CARTESIO}}$ Prendo il polinomio caratteristico della matrice.
Sia questo $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_k\lambda^k$ dove $k \geq 0$ e $a_k \neq 0$.
Allora

- il numero degli autovalori nulli è uguale a k.
- il numero degli autovalori + è uguale al numero di variazioni di segno nella successione dei coeff. non nulli del polinomio caratteristico
- Il numero degli autovalori − è uguale a ciò che si ottiene per differenza.

Occhio: funziona anche se ci sono coeff. NULLI, basta non metterli nella successione.

<u>Esempio</u>
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 9(2-\lambda) - 4(-1-\lambda) \\ &= -(2-3\lambda+\lambda^2)(\lambda+1) - 18 + 9\lambda + 4 + 4\lambda \\ &= -2\lambda - 2 + 3\cancel{\lambda}^2 + 3\lambda - \cancel{\lambda^3} - \cancel{\lambda}^2 - 14 + 13\lambda \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 14\lambda - 16 \end{aligned}$$
($\lambda = 0$ non è soluz.)

Il segno dei coeff. è: $- \overset{V}{\frown} + \overset{P}{\frown} + \overset{V}{\frown} -$: 2 autovalori +
1 autovalore −

Se facevo con Sylvester: (3-2-1)

$\text{Det}_1 = -1$ $\qquad \text{Det}_2 = -2$ $\qquad \text{Det}_3 = -16$

$+ \overset{V}{\frown} - \overset{P}{\frown} - \overset{P}{\frown} -$

2 permanenze = 2 autovalori +
1 variazione = 1 autovalore −

—o—o—

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 52

Titolo nota 11/12/2013

$\boxed{\text{Scorciatoie per il caso } n=2}$ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $q(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2$

- Se Det $B < 0$, allora gli autovalori sono di sicuro $+$ e $-$, quindi la forma non è definita
- Se Det $B > 0$, allora gli autovalori possono essere $++$ o $--$ e guardando la traccia decido
  - se Traccia $B > 0$, allora sono $++$ ($\rightsquigarrow$ def. positiva)
  - se Traccia $B < 0$, allora sono $--$ ($\rightsquigarrow$ def. negativa)
- Se Det $B = 0$, allora c'è almeno un autovalore nullo e per sapere il segno del restante guardo la traccia ($\rightsquigarrow$ semidef. positiva o semidefinita negativa)

ACHTUNG! Tutto questo vale solo per $n = 2$.

Oss. Quando Det $B > 0$, allora la forma è
- def positiva se sulla diagonale c'è almeno un numero positivo
- def. negativa " " " " " " " negativo

[Questo è sostanzialmente Sylvester applicato al 2x2. Ci sono 2 modi di farlo (1−2) (2−1)

$+$ $\pm$ $+$

$\uparrow$ iniziale; $\uparrow$ a seconda dell'elemento scelto della diagonale; $\uparrow$ Det (B)

Se sulla diagonale c'è un tizio $+$, allora ho 2 permanenze, se c'è un tizio $-$, allora ho 2 variazioni]

[In alternativa: Det B = Det $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2$, quindi se Det $B>0$, di sicuro i 2 termini sulla diagonale non sono $+$ e $-$].

Oss. Uno sulla diagonale non può essere nullo se Det $B > 0$.

Perchè il segno degli autovalori ha a che fare con la segnatura

Prendiamo una forma quadratica $q(v) = v^t B v$
dove v è un vettore (colonna) di n componenti e
B è una matrice $n \times n$ simmetrica.

Per il teorema spettrale B si diagonalizza mediante una matrice ortogonale

$$M^{-1} B M = \underset{\uparrow \text{ diagonale}}{D} \qquad B = M D M^{-1}$$

Essendo M ortogonale, abbiamo che $M^{-1} = M^t$, quindi

$$M^t B M = D \quad , \quad \text{e anche} \qquad B = M D M^t$$

Da questo ricavo che

$$q(v) = v^t B v = v^t M D M^t v = (M^t v)^t D \, (M^t v)$$

Quindi $q(v) = \overbrace{(M^t v)^t}^{w^t} \underbrace{D}_{\text{nuova } B} \overbrace{(M^t v)}^{w} = w^t D w$

quindi calcolare $q(v)$ equivale a calcolare una forma quadratica con matrice diagonale non sul vettore v, ma sul vettore $M^t v$.

Esempio $q(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ Det: 8, Tr: 6 $\quad +,+$

Questa è definita positiva. Diagonalizzo B. Gli autovalori sono $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$. Calcolo gli autospazi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 3x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix} \qquad (1,-1)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 3x + y = 4x \\ x + 3y = 4y \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = y \\ x = y \end{matrix} \qquad (1,1)$$

Quindi $(1,-1)$ e $(1,1)$ è una base ortogonale di autovettori.
Ortonormalizzando ottengo la base

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{da cui} \qquad M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da nuova a canonica

$$M^{-1} B M = D$$

l'inversa è la trasposta

Riprova
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Da $M^{-1} B M = D$ troviamo che $B = M D M^t$

quindi
$$\underbrace{(x \ y)}_{v^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{(x \ y)\, M}_{w^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D}\underbrace{M^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{w}$$

$$M^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = w$$

Quindi
$$q(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y \quad x+y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(2(x-y)^2 + 4(x+y)^2\right)}_{\text{Essendo la matrice diagonale, ho solo termini puri}} = (x-y)^2 + 2(x+y)^2$$

Conclusione Alla fine ho scritto $q(x,y)$ come somma di quadrati, in maniera diversa da quello che avrei fatto completando i quadrati.

I due termini che ho fatto al quadrato sono le componenti di (x, y) rispetto ad una nuova base ortonormale, più precisamente la base data dagli autovettori di B, cioè $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

$$\left[\ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underbrace{\overset{M^{-1}}{\overset{\shortparallel}{M^t}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}\ \right]$$

componenti rispetto base canonica

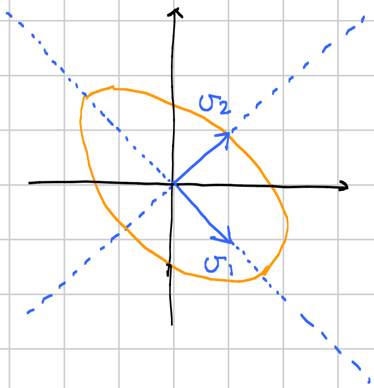
componenti rispetto alla base nuova che sta nelle colonne di M

Domanda: cosa rappresenta $3x^2+2xy+3y^2 = 25$ nel piano cartesiano?

Nella base nuova è come scrivere $2x^2+4y^2=25$, che è un'ellisse!

comp. risp. a v_1

comp. risp. v_2



Diagonalizzando, restano solo termini puri! (rispetto ad una base strana).

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 53

Titolo nota 13/12/2013

Prodotto scalare classico : $\langle x, y \rangle = x^t y$ pensando x e y come colonne

Norma classica : $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^t x$

Prodotto scalare generale : $\langle x, y \rangle_B = x^t B y$

Forma quadratica : $q(x) = x^t B x$ (se B = Id, è la norma)

simmetrica

<u>Esempio in $\mathbb{R}^2$</u> $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$ $\langle x, y \rangle_B = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 2 & \boxed{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - 3y_2 \end{pmatrix}$

$= \boxed{1} x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 \boxed{-3} x_2 y_2$

Forma quadratica associata: pongo $x = y$ e viene

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$$

— o — o —

<u>Def.</u> Dato uno spazio vettoriale V qualunque, un <u>prodotto scalare</u> su V è una funzione

$$b : \underbrace{V \times V}_{\text{input: coppie di vettori}} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{output: numero reale}}$$

che verifica le seguenti proprietà:

(i) $b(v, w) = b(w, v)$ per ogni $v \in V$, $w \in W$ (simmetria)

(ii) $b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b(v_2, w)$ per ogni ...

(iii) $b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w)$ per ogni ...

linearità nella 1ª variabile

(iv) $b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2)$ ...

(v) $b(v, \lambda w) = \lambda b(v, w)$ ...

linearità nella 2ª variabile.

<u>Oss.</u> (iv) e (v) seguono dalla simmetria e da (ii) e (iii).

<u>Fatto fondamentale</u> Se conosco il prodotto scalare tra vettori di una base qualunque di V, allora lo conosco per ogni coppia di vettori

<u>Dim. nel caso in cui V ha dim 2</u> Sia $\{v_1, v_2\}$ una base di V.
Siano $x \in V$ e $y \in V$. Allora

$$x = a v_1 + b v_2 \qquad y = c v_1 + d v_2$$

Allora

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b(a v_1 + b v_2, c v_1 + d v_2) \\ &= b(a v_1, c v_1 + d v_2) + b(b v_2, c v_1 + d v_2) \\ &= a\, b(v_1, c v_1 + d v_2) + b\, b(v_2, c v_1 + d v_2) \\ &= ac \underbrace{b(v_1, v_1)}_{\text{NOTI}} + ad \underbrace{b(v_1, v_2)}_{\text{NOTI}} + bc \underbrace{b(v_2, v_1)}_{\text{NOTI}} + bd \underbrace{b(v_2, v_2)}_{\text{NOTI}} \end{aligned}$$

— o — o —

Osservazione decisiva:

$$b(x,y) = (a \ b) \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & b(v_1,v_2) \\ b(v_2,v_1) & b(v_2,v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Quindi un prodotto scalare qualunque si rappresenta sempre nella forma

$$b(x,y) = x^t B y$$

dove B è la matrice in cui l'elemento i,j è $b(v_i, v_j)$ cioè il prodotto scalare generalizzato tra 2 elementi qualunque della base, e x e y sono vettori pensati come componenti rispetto alla stessa base.

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \text{ sono in } \mathbb{R}\}$

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi. Definisco il loro prodotto scalare come

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x) \, dx$$

Questo è un prodotto scalare perché verifica le 5 proprietà:

(i) la simmetria è ovvia

(ii)

$$\langle p_1(x)+p_2(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1}[p_1(x)+p_2(x)]\cdot q(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} p_1(x)\,q(x)\,dx + \int_{-1}^{1} p_2(x)\,q(x)\,dx$$

$$= \langle p_1(x), q(x)\rangle + \langle p_2(x), q(x)\rangle$$

Idem per la verifica delle altre.

Domanda: qual è la matrice B associata a questo prodotto scalare rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.

È la matrice che ha come elementi i prodotti scalari tra gli elementi della base

$$B = \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Conseguenza: quanto fa $\langle \underbrace{a+bx+cx^2}_{v}, \underbrace{d+ex+fx^2}_{w}\rangle$?

Con la matrice diventa

$$\underbrace{(a\ b\ c)}_{\text{comp. di } v} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}}_{\text{matrice risp. alla base.}} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

componenti di w rispetto alla base

<u>Esercizio</u> Calcolare il prodotto scalare usando l'integrale e vedere che coincide con quello fatto usando la matrice.

La forma quadratica associata al prodotto scalare dato è

$$q\,(p(x),p(x)) = \int_{-1}^{1} [p(x)]^2\,dx$$

Questa forma è ovviamente definita positiva perchè è integrale di un quadrato.
Volendo si vedeva dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \qquad \underset{\text{d'ufficio}}{+} \xrightarrow{P} \underset{\substack{\mathrm{Det}_1 \\ \| \\ 2}}{+} \xrightarrow{P} \underset{\substack{\mathrm{Det}_2 \\ \| \\ \frac{4}{3}}}{+} \xrightarrow{P} \underset{\substack{\mathrm{Det}_3 \\ \frac{8}{15}-\frac{8}{27}}}{+}$$

$3P = 3$ autov. $+$
$=$ def. pos.

—o—o—

Una volta che abbiamo un prodotto scalare, e questo è <u>definito positivo</u> abbiamo le basi ortonormali.
Per ottenere le basi ortonormali, parto da una base qualunque e applico GS rispetto al prodotto scalare strano.
Nell' esempio partiamo da $\{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2}\}$.
La ortogonalizziamo con GS.

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle_B}{\langle w_1, w_1\rangle_B}\, w_1 = x - \frac{\overset{0}{\langle x, 1\rangle}}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 = x$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle_B}{\langle w_1, w_1\rangle_B}\, w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle_B}{\langle w_2, w_2\rangle_B}\, w_2$$

$$= x^2 - \frac{\overset{2/3}{\boxed{\langle x^2, 1\rangle}}}{\underset{2}{\boxed{\langle 1, 1\rangle}}}\cdot 1 - \underset{0}{\boxed{\frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}}}\, x = x^2 - \frac{1}{3}$$

Conclusione: $\{1, x, x^2-\frac{1}{3}\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ rispetto al prodotto scalare introdotto nell' esempio.

—o—o—

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 54

Titolo nota 13/12/2013

In generale

prodotti scalari → matrice associata scelta una base
↘ forma quadratica associata
↓ ← se è definita positiva
basi ortonormali rispetto al prodotto scalare "strano"

Cosa succede se cambio base? Come cambia la matrice associata al prodotto scalare?

Sia V uno spazio vettoriale, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base, e sia B la matrice associata ad un prodotto scalare rispetto a questa base.
Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una seconda base, e sia C la matrice associata al prodotto scalare rispetto a questa nuova base.
Sia M la matrice di cambio di base, scelta in maniera che
M prende INPUT: componenti rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$
OUTPUT: componenti rispetto alla base $\{w_1, \dots, w_n\}$.
Siano x e y le componenti di 2 vettori risp. $\{v_1, \dots, v_n\}$.
Allora il prodotto scalare diventa

$$\boxed{x^t B y}$$

Le componenti degli stessi vettori risp. a $\{w_1, \dots, w_n\}$ sono Mx, My, quindi rispetto alla seconda base il prodotto scalare degli stessi due vettori diventa

$$(Mx)^t C (My) = \boxed{x^t M^t C M y}$$

Di conseguenza la relazione tra B e C è data da

$$\boxed{B = M^t C M}$$

dove M è invertibile
(è la matrice di cambio di base)

Achtung! Le matrici associate alle applicazioni lineari e quelle associate ai prodotti scalari sono "diverse", ad esempio hanno una legge di trasformazione diversa quando cambio base.

— o — o —

Def. Sia V uno spazio vettoriale, sia $b: V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare, e sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare.
Per semplicità poniamo $b(v, w) = \langle v, w \rangle_B$.
Si dice che f è SIMMETRICA se

$$\boxed{\langle f(x), y \rangle_B = \langle x, f(y) \rangle_B}$$

"f migra nei prodotti scalari"

Fatto 0 Fissiamo una base di V. Sia B la matrice associata al prodotto scalare, e sia A la matrice associata ad f.
Cosa di dice la relazione precedente?

$$f(x)^t B\, y = x^t B\, f(y)$$

$$(Ax)^t B\, y = x^t B A\, y$$

$$x^t \boxed{A^t B}\, y = x^t \boxed{BA}\, y$$

Quindi per forza $\boxed{A^t B = BA}$ relazione che deve soddisfare la matrice di un'applicazione simmetrica rispetto ad un prodotto scalare

Oss. Se il prodotto scalare è quello canonico e la base è quella canonica, allora $B = Id$ e ritroviamo $A^t = A$ come due settimane fa.
Più in generale, si ha $B = Id$ se e solo se la base scelta è ortonormale rispetto al prodotto scalare.
Quindi, se la base è ortonormale, allora

$$\underbrace{f \text{ simmetrica}}_{\text{migra nei prodotti scalari}} \iff \underbrace{\text{la matrice } A \text{ associata è simmetrica}}_{A = A^t}$$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Sia f simmetrica e siano λ e μ due autovalori di f diversi ($\lambda \neq \mu$). Siano v e w due autovettori corrispondenti. Allora

$$\langle v, w \rangle_B = 0$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$\lambda \langle v, w \rangle_B \underset{\substack{\text{propr.}\\ \text{prod. scal.}}}{=} \langle \lambda v, w \rangle_B \underset{\substack{v \text{ autov.}\\ \lambda \text{ autov.}}}{=} \langle f(v), w \rangle_B \underset{f \text{ simmetrica}}{=}$$

$$= \langle v, f(w) \rangle_B = \langle v, \mu w \rangle_B = \mu \langle v, w \rangle_B$$

Abbiamo ottenuto che $\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle v, w \rangle_B = 0$, quindi per forza

$\langle v, w \rangle_B = 0$.

— o — o —

Procedendo come a suo tempo si arriva al

$\boxed{\text{Teorema B-spettrale}}$ Sia V uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare $\boxed{\text{definito positivo}}$.
Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare simmetrica.
Allora esiste una base ortonormale composta da autovettori di f.

$\boxed{\text{Oss.}}$ Rispetto a tale base
- la matrice che rappresenta f è diagonale e ha sulla diagonale gli autovalori di f
- la matrice che rappresenta il prodotto scalare è identica.

— o — o —

Stesso enunciato usando solo le matrici

Ipotesi: B matrice simmetrica def. positiva (rappresenta il prod. scalare)
A matrice (che rappresenta f) tale che $\underbrace{A^t B = BA}_{\text{questo dice che } f \text{ è simmetrica.}}$

Allora esiste una matrice di cambio di base M invertibile
(M : componenti base nuova $\rightsquigarrow$ componenti base vecchia)
tale che

$M^{-1}AM = D$ ← f nella base nuova, quindi diagonale
$M^t BM = Id$ ← prodotto scalare nella base nuova, che è l'identità perchè la base nuova è ortonormale.

Cosa succede se $B = Id$? Ipotesi: $A^t = A$
Tesi: $M^{-1}AM = D$
$\boxed{M^t M = Id}$
↑ M matrice ortogonale

$\boxed{\text{Osservazione}}$ Il teorema B-spettrale si enuncia talvolta come teo. di diagonalizzazione simultanea, cioè parto con A e B opportuno e arrivo con 2 matrici diagonali:

$M^{-1}AM = D$ ← Matrice di applicazione.
$M^t BM = Id$ ← Matrice di prodotto scalare.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 55

Titolo nota 18/12/2013

POLINOMI E MATRICI

Sia $p(x)$ un polinomio : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$
Sia A una matrice $n \times n$.
Voglio calcolare $p(A)$. Questo ha senso perché

$$p(A) = \underbrace{a_0 \, Id + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k}_{\text{combinazione lineare di potenze di } A}$$

potenze di A

Domanda: esistono polinomi $p(x)$ tali che $p(A) = 0$

matrice $n \times n$ nulla

Teorema (Polinomi e matrici) Sia
$\mathcal{P} = \{ p(x) \text{ polinomi} : p(A) = 0 \}$.
Allora valgono i seguenti fatti.
(1) $\mathcal{P} \neq \emptyset$, quindi c'è almeno un polinomio che annulla la matrice.
(2) Nell'insieme $\mathcal{P}$ esiste un polinomio $m_A(x)$ di grado minimo e tutti gli altri elementi di $\mathcal{P}$ sono multipli di $m_A(x)$.

Dim (1) Consideriamo le matrici
$Id, A^1, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2}$
Si tratta di (n^2+1) matrici $n \times n$. Ora lo spazio delle matrici $n \times n$ ha dimensione n^2. Essendo n^2+1 elementi, saranno linearmente dip., quindi esistono coeff. $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$, non tutti nulli, tali che

$$a_0 \, Id + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \ldots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$

Quindi $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$ annulla la matrice, quindi sta in $\mathcal{P}$.

— o — o —

Def. Il polinomio $m_A(x)$ si chiama polinomio minimo di A, ed è il polinomio di grado più piccolo tra tutti quelli che annullano A.

Oss. Se due matrici A e B sono simili, allora hanno lo stesso insieme $\mathcal{P}$, quindi anche lo stesso polinomio minimo.

Fatto fondamentale Se $B = M^{-1} A M$ con M invertibile, allora
$$p(B) = M^{-1} p(A) M$$
cioè $p(B)$ è simile a $p(A)$.
Infatti già sappiamo che $B^k = M^{-1} A^k M$, ma allora

$$\begin{aligned} p(B) &= a_0 Id + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_k B^k \\ &= a_0 M^{-1} M + a_1 M^{-1} A M + a_2 M^{-1} A^2 M + \dots + a_k M^{-1} A^k M \\ &= M^{-1} (a_0 Id + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k) M \\ &= M^{-1} p(A) M. \end{aligned}$$

Quindi $p(B) = 0 \iff p(A) = 0$.

— o — o —

Oss. Questo ci autorizza a parlare di polinomio minimo di un'applicazione e non solo di una matrice.

— o — o —

STRUTTURA DEL POLINOMIO MINIMO

Teorema misterioso (HAMILTON - CAYLEY)
Il polinomio caratteristico di A, cioè $p(x) = \mathrm{Det}(A - x Id)$, sta nell'insieme $\mathcal{P}$, cioè annulla la matrice A.

Detto altrimenti, se sostituisco la matrice A nel suo polinomio caratteristico ottengo la matrice nulla.

Conseguenza: poiché tutti gli elementi di $\mathcal{P}$ sono multipli di $m_A(x)$, ne segue che il polinomio caratt. è multiplo di $m_A(x)$, cioè il polinomio minimo è un divisore del polinomio caratteristico.

Poiché il pol. caratt. ha grado SICURAMENTE n, il pol. minimo avrà grado $\leq n$.

Achtung! Dimostrazione ASSURDA ma accattivante di H-C:

$$p(A) = \text{Det}\,(A - A \cdot Id) = 0$$

Funzionerebbe anche con Traccia invece di Det, mentre in quel caso è falsa.

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Struttura del polinomio minimo)

(1) Tutti gli autovalori di A sono radici del polinomio minimo, però possono avere molteplicità più piccola (vale anche per gli autovalori complessi)

(2) Se tutti gli autovalori sono distinti, cioè hanno molt. 1, allora il pol. minimo coincide con quello caratteristico.
(Facile conseguenza di (1))

(3) Se un autovalore ha molteplicità algebrica ≥ 2, allora la sua molteplicità come radice del polinomio minimo è la dimensione del più grande blocco di JORDAN relativo a quell'autovalore.

— o — o —

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda = 1 \rightsquigarrow m_a = 2 \quad m_g = 1$

$\lambda = 2 \rightsquigarrow m_a = m_g = 1$

m_g dell'autovalore 1 è 1 perché rango $(A - 1 \cdot Id) = 2$.

Polinomio caratteristico: $(x-1)^2(x-2)$ (a meno del segno)

Forma canonica: $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Polinomio minimo: $(x-1)^2(x-2)$ perché il blocco di Jordan più grande relativo a $\lambda = 1$ ha dim. 2.

<u>Conseguenza</u> Una matrice è diagonalizzabile se e solo se tutte le radici del suo polinomio minimo hanno molteplicità 1.

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

pol. caratt.: $(x-2)^2(x-3)$

pol. minimo: $(x-2)^1(x-3)^1$

<u>Esempio</u> Come sono fatte tutte le matrici 4×4 tali che $A^2 = A$?

La condizione è come dire che $A^2 - A = 0$, cioè il polinomio $q(x) = x^2 - x$ annulla la matrice.

Ma allora il polinomio minimo deve essere un divisore di $q(x)$

$$q(x) = x^2 - x = x(x-1).$$

Ma allora ci sono 3 casi:

① $m_A(x) = x$, ma allora $A = 0$

② $m_A(x) = x-1$, ma allora $A - Id = 0$, cioè $A = Id$

③ $m_A(x) = x(x-1)$, ma allora A è una matrice diagonalizzabile che ha come autovalori solo $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

Quindi la sua forma canonica è una di queste

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

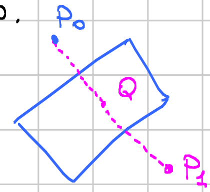
Queste sono tutte matrici di proiezione su un sottospazio.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 56

Titolo nota 18/12/2013

Dato un p.to $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\mathbb{R}^3$ ed un piano di equazione $ax+by+cz+d=0$, trovare la proiezione di P_0 sul piano.



$\boxed{\text{Piano}}$ Intersecare il piano con la retta passante per P_0 e $\perp$ al piano stesso.

Posto $w = (a,b,c)$, l'eq. del piano la scrivo come $\langle w, \underset{\text{vettore}}{x} \rangle + d = 0$

La retta è $P_0 + tw$.

Sostituendo ottengo $\langle w, P_0 + tw \rangle + d = 0$, cioè

$$\langle w, P_0 \rangle + t \langle w, w \rangle + d = 0$$

cioè

$$t = \frac{-d - \langle w, P_0 \rangle}{\langle w, w \rangle} = -\frac{d + \langle w, P_0 \rangle}{\|w\|^2}$$

Questo valore di t, sostituito nella param. della retta, mi dà Q:

$$Q = P_0 - \frac{d + \langle w, P_0 \rangle}{\|w\|^2} \cdot w$$

Distanza di P_0 dal piano = distanza di P_0 da Q, quindi

$$\text{dist}(P_0, Q) = \|P_0 - Q\| = \Bigg\| \underbrace{\boxed{\frac{d + \langle w, P_0 \rangle}{\|w\|^2}}}_{\text{Numero}} \cdot w \Bigg\| = \frac{|d + \langle w, P_0 \rangle|}{\|w\|^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\|w\|}$$

$$= \frac{|d + \langle w, P_0 \rangle|}{\|w\|}$$

Tornando in notazione con le componenti trovo:

$$\text{dist}(P_0, \text{piano}) = \frac{|d + ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Se volessi il simmetrico di P_0 rispetto al piano ?
Basta che cerchi il punto P_1 tale che

$$\frac{P_1+P_0}{2} = Q$$

cioè $P_1+P_0 = 2Q$, cioè $P_1 = 2Q - P_0$, cioè

$$P_1 = P_0 - 2\,\frac{d+\langle w, P_0\rangle}{\|w\|}$$

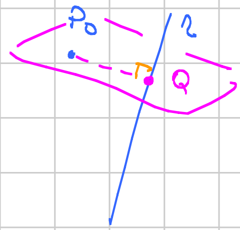
In componenti:

$$\boxed{P_1 = (x_0, y_0, z_0) - 2\,\frac{d+ax_0+by_0+cz_0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

— o — o —

<u>Esercizio</u> Calcolare, in $\mathbb{R}^3$, la distanza del punto $P_0 = (1,2,3)$ dalla retta di eq. parametrica $(1,-1,0)+t\,(0,1,4)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Scrivo il piano per P_0 che sia $\perp$ alla retta, interseco e trovo un certo Q. Poi faccio la dist. tra P_0 e Q



Il piano sarà del tipo $0\cdot x + 1\cdot y + 4\cdot z + d = 0$, trovo d imponendo il passaggio per P_0: $2+12+d=0 \Rightarrow d = -14$
Piano: $y+4z-14=0$.
Intersezione retta - piano: sostituisco $(1, -1+t, 4t)$ nell'eq. del piano:

$$-1+t+16t-14=0 \qquad 17t = 15 \qquad t = \frac{15}{17}$$

Quindi $Q = \left(1, -1+\frac{15}{17}, \frac{60}{17}\right) = \left(1, -\frac{2}{17}, \frac{60}{17}\right)$

Non resta che fare le distanze.

— o — o —

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Scrivo la distanza (al quadrato) tra P_0 ed il generico punto della retta e minimizzo

$$\text{dist}^2(\underbrace{(1,2,3)}_{P_0}, \underbrace{(1,-1+t,4t)}_{\text{generico p.to retta}}) = (1-1)^2 + (2+1-t)^2 + (3-4t)^2$$
$$= (3-t)^2 + (3-4t)^2$$
$$= 9-6t+t^2+9-24t+16t^2$$
$$= 17t^2-30t+18$$

Cerco il valore di t che minimizza : $34t-30=0$ $\quad t=\frac{30}{34}=\frac{15}{17}$

Sostituendo il valore di t

→ nella retta trovo Q

→ nel polinomio di 2° grado trovo il valore della distanza al quadrato

— o — o —

Mutua posizione di 2 rette nello spazio

Date 2 rette nello spazio (definite in vari modi), stabilire se sono

- coincidenti
- parallele (e allora trovare la distanza)
- incidenti (e allora trovare p.to incontro, angolo, piano che le contiene)
- sghembe (e allora trovare la minima distanza)

Siano le 2 rette
$$r_1 : P_1 + t\,v_1$$
$$r_2 : P_2 + t\,v_2$$

Vado a vedere se v_1 e v_2 sono lin. indip., cioè faccio il rango della matrice che ha v_1 e v_2 come righe.

→ Se sono lin. dip., allora sono coincidenti o parallele
  - Se P_2-P_1 è a sua volta multiplo di v_1 e v_2, allora sono coincidenti
  - Se P_2-P_1 è indip. da v_1 e v_2, allora sono parallele (fare la distanza è banale: basta fare la distanza tra P_1 ed r_2)

→ Se v_1 e v_2 sono lin. indip., allora sono incidenti o sghembe

1° modo: provo a calcolare l'intersezione: impongo
$$P_1 + t\,v_1 = P_2 + s\,v_2 \qquad \text{due parametri diversi}$$
Ho 2 incognite e 3 equazioni (x,y,z) quindi può esserci soluzione oppure no.

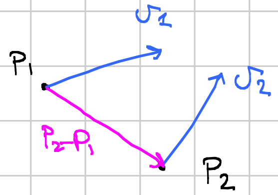
C'è soluzione se e solo se $tv_1 - sv_2 = P_2 - P_1$, cioè se e solo se $P_2 - P_1$ è comb. lin. di v_1 e v_2, cioè se e solo se $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, P_2-P_1\}$ ha dim. 2.

Regola in commercio:

$$\mathrm{Rango}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2 \quad e \quad \mathrm{Rango}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ P_2-P_1 \end{pmatrix} = 2 \implies \text{incidenti}$$

$$\text{"} \quad e \quad \mathrm{Rango}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ P_2-P_1 \end{pmatrix} = 3 \implies \text{sghembe}$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Le rette sono incidenti se e solo se v_1, v_2, P_2-P_1 sono nello stesso piano, cioè generano uno spazio di dimensione 2



Come determino la distanza tra 2 rette sghembe

$$r_1 = (1,2,3) + t\,(0,1,2)$$
$$r_2 = (1,-1,2) + t\,(1,3,4)$$

lin. indip

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0 \implies$ sghembe.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Cerco P sulla prima retta e Q sulla seconda retta in maniera tale che PQ sia $\perp$ alle due rette.

$P = (1, 2+t, 3+2t) \qquad Q = (1+s, -1+3s, 2+4s)$

Impongo che $Q-P = (s, -1+3s-2-t, 2+4s-3-2t)$
$= (s, -3+3s-t, -1+4s-2t)$

sia $\perp$ ai 2 vettori direzione:

$$\begin{cases} -3+3s-t-2+8s-4t=0 & \langle Q-P, v_1\rangle \\ s-9+9s-3t-4+16s-8t=0 & \langle Q-P, v_2\rangle \end{cases}$$

Risolvo $\rightsquigarrow$ trovo t ed s, quindi P e Q e faccio la distanza.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 57

Titolo nota 18/12/2013

Dalla lezione precedente:

$P = (1, 2+t, 3+2t)$ $\qquad Q = (1+s, -1+3s, 2+4s)$

$$\begin{cases} -3+3s-t-2+8s-4t=0 \\ s-9+9s-3t-4+16s-8t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11s-5t=5 \\ 25s-11t=8 \end{cases}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ per fare la distanza tra 2 rette sghembe.

Faccio $\text{dist}^2(P,Q)$ e vedo per quali valori di t ed s risulta minima.

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(P,Q) &= (1+s-1)^2+(-1+3s-2-t)^2+(2+4s-3-2t)^2 \\ &= s^2+(3s-t-3)^2+(4s-2t-1)^2 \\ &= \cancel{s^2}+\cancel{9s^2}+\cancel{t^2}+9-\cancel{6st}-18s+6t+\cancel{16s^2}+\cancel{4t^2}+1-\cancel{16st}-8s+4t \\ &= 26s^2+5t^2-22st-26s+10t+10 \end{aligned}$$

Ora dovrei cercare i valori di s e t per cui l'espressione risulta minima. Ora questa espressione è somma di quadrati.
Lo posso realizzare sistemando le s con il 1° quadrato e le t con il 2°

$$26\left(s^2-\frac{22}{26}st-s\right)+5t^2+10t+10$$

$$=26\left(\left(s-\frac{11}{26}t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{26}\right)^2t^2-\frac{1}{4}-\frac{11}{26}t\right)+5t^2+10t+10$$

$= 26\cdot$ quadrato + polinomio di 2° grado in t
che posso ancora scrivere come somma di $\square$.
Imponendo i 2 quadrati $=0$, ottengo i valori di s e t.

<u>Esercizio</u> $r_1 = (1,2,3) + t\,(0,1,2) = P_1 + t v_1$

$r_2 = (1,-1,2) + t\,(1,3,4) = P_2 + t v_2$

Esercizio: trovare piano passante per P_2 e parallelo a r_1 e che contenga r_2.

Come sarà fatto il piano?

$P_2 + t w_1 + s w_2$

Dovendo contenere r_2 uso $w_1 = v_2$: $P_2 + t v_2 + s w_2$?

Se come w_2 uso v_1, allora il piano è // ad r_1

$$\boxed{P_2 + t v_2 + s v_1}$$

Piano che contiene r_2 ed è parallelo a r_1

$\boxed{\text{1a verifica}}$ Questo piano non interseca r_1. Per calcolare l'intersezione dovrei risolvere

$$P_2 + t v_2 + s v_1 = P_1 + r v_1$$

cioè

$$t v_2 + (s-r) v_1 + 1(P_2 - P_1) = 0$$

Se riuscissi a risolvere il sistema, vorrebbe dire che v_2, v_1, P_2-P_1 non sono lin. indip. perché avrei una loro combinazione lineare che fa 0 e ha un coeff. uguale a 1. Ma essendo le rette sghembe, per forza devono essere lin. indip.

$\boxed{\text{2o verifica (equivalente)}}$ Un piano ed una retta sono paralleli se e solo se la giacitura della retta è contenuta nella giacitura del piano, ma essendo la giacitura di r_1 lo span di v_1, per forza v_1 deve essere contenuto nella giacitura del piano.

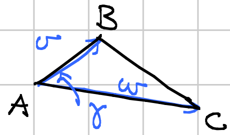
Osservazione La distanza tra r_1 ed r_2 è uguale alla distanza tra un qualunque punto di r_1 ed il piano appena trovato.

— o — o —

$\boxed{\text{Aree e prodotti vettori}}$

Esercizio Calcolare l'area del triangolo con vertici in

$$A=(1,0,1) \qquad B=(2,-1,3) \qquad C=(1,2,0)$$



Percorso: $\text{Area} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot \sin\gamma$

$$|AB| = \|B-A\| = \|\overbrace{(1,-1,2)}^{v}\| = \sqrt{6}$$
$$|AC| = \|C-A\| = \|\underbrace{(0,2,-1)}_{w}\| = \sqrt{5}$$

Mi serve $\sin\gamma$, che deduco da $\cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \frac{-2-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}} = \frac{-4}{\sqrt{30}}$$

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{16}{30}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{30}}$$

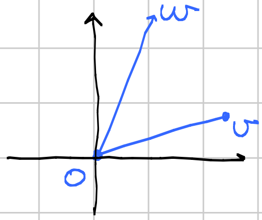
$$\text{Area} = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{6}}\cdot\cancel{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\cancel{\sqrt{30}}} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ A partire da v e w, costruisco con la formula misteriosa, "il" vettore perpendicolare a v e w

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-3,1,2) \qquad \text{La norma di questo è } \sqrt{14}$$

Quindi area triangolo $= \frac{1}{2}$ norma del vettore prodotto dalla formula misteriosa.

Esercizio Prendiamo un triangolo con un vertice nell'origine, un vertice in v ed un vertice in w.



Alla precorso l'area diventa

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\|v\|\cdot\|w\| \sin\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\|v\|\cdot\|w\|\cdot\sqrt{1-\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2\cdot\|v\|^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\|w\|^2\cdot\|v\|^2 - \langle v,w\rangle^2}$$

Se $v = (x_1, y_1, z_1)$ e $w = (x_2, y_2, z_2)$, allora

$$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}}$$

Nell'altra maniera produco il vettore perpendicolare

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (y_1z_2-z_1y_2, -x_1z_2+x_2z_1, x_1y_2-x_2y_1)$$

Nel secondo modo l'area diventa la norma del vettore : 2, quindi

$$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(-x_1z_2+x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}}$$

Per dimostrare che funziona, non resta che svolgere e vedere che vengono uguali.

— o — o —

Il vettore misterioso è il prodotto vettore di v e w e si indica con $v \wedge w$
INPUT: 2 vettori di $\mathbb{R}^3$, OUTPUT: il vettore di $\mathbb{R}^3$ perpendicolare a v e w e di lunghezza = 2 $\cdot$ area triangolo di vertici O, v, w

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 58 (-2)

Titolo nota 20/12/2013

Rapporti tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}$

Esercizio Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Problema: determinare la forma canonica e la matrice di cambio base che porta A in forma canonica.

Polinomio caratt.: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \underset{\uparrow \, Tr(A)}{4}\lambda + \underset{\uparrow \, Det\, A}{13} = 0 = \text{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -5 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

Radici di $p_A(\lambda)$: $2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$

Quindi A ha 2 autovalori complessi coniugati.
Su $\mathbb{C}$ la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix} = D$$

Voglio trovare M invertibile t.c. $D = M^{-1}AM$.
La base sarà costituita da autovettori di A, che saranno complessi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2+3i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= (2+3i)x \\ -5x + 3y &= (2+3i)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= (1+3i)x \\ -5x &= (-1+3i)y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (1+3i)x - 2y &= 0 \\ -5x + (1-3i)y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1+3i & -2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \text{ ha Det } = 0$$

$\boxed{x = 1 \quad y = \frac{1+3i}{2}}$ Questa scelta risolve anche la 2ª equazione:
autovett. relativo a $(2+3i)$

$$-5 + (1-3i)\frac{(1+3i)}{2} = -5 + \frac{10}{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2-3i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x+2y &= (2-3i)x \\ -5x+3y &= (2-3i)y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x(1-3i) - 2y &= 0 \\ -5x + (1+3i)y &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{x=1 \quad y=\frac{1-3i}{2}}$

Era prevedibile? Sì, perchè l'autovettore relativo a $(2-3i)$ deve essere il coniugato di quello relativo a $(2+3i)$.

Altra possibile scelta: $(2, 1+3i)$, $(2, 1-3i)$. Quindi

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+3i & 1-3i \end{pmatrix}$$

Input: comp. base nuova
Output: comp. base canonica

$M^{-1}AM$ deve essere D. $\quad \mathrm{Det}\, M = 2-6i-2-6i = -12i$

Verifica

$$\frac{-1}{12i}\begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ -1-3i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+3i & 1-3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+2+6i & 2+2-6i \\ -10+3+9i & -10+3-9i \end{pmatrix}$$

$$\frac{-1}{12i}\begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ -1-3i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4+6i & 4-6i \\ -7+9i & -7-9i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4+6i-12i+18+14 \overset{-}{+} 18i & 4\cancel{-6i}\cancel{-12i}+18 \overset{+}{-} 14\cancel{+18i} \\ \cancel{-4}-6i-12i\cancel{+18}\cancel{-14} \overset{+}{-} 18i & -4+6i-12i-18-14-18i \end{pmatrix}$$

Ci deve essere un errore di segno.... (segni corretti dopo video: così torna!)

— o — o —

Qual è la forma canonica sui reali? Se gli autovalori sono $2\pm 3i$, la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Se sono } \alpha \pm i\beta \text{ è} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Come trovo la matrice M?
Come deve essere fatta la nuova base $\{v_1, v_2\}$. Deve accadere che

$$\left.\begin{aligned} Av_1 &= 2v_1 - 3v_2 \\ Av_2 &= 3v_1 + 2v_2 \end{aligned}\right] \quad v_1 \text{ e } v_2 \text{ mi servono REALI}$$

Cosa so? Che ci sono autovettori complessi v e $\bar{v}$ tali che

$$Av = (2+3i)v$$
$$A\bar{v} = (2-3i)\bar{v}$$

Scrivo $\underset{\text{complesso}}{v} = \underset{\text{reali}}{v_1 + i\, v_2}$

$$A v = A(v_1 + i v_2) = A v_1 + i A v_2$$
$$(2+3i) v = (2+3i)(v_1 + i v_2) = 2v_1 + 2i v_2 + 3i v_1 - 3v_2$$
$$= (2v_1 - 3v_2) + i(3v_1 + 2v_2)$$

Abbiamo così dimostrato che $\boxed{A v_1} + i \boxed{A v_2} = \boxed{(2v_1 - 3v_2)} + i \boxed{(3v_1 + 2v_2)}$

Quindi la base $\{v_1, v_2\}$ che porta A nella forma canonica REALE è costituita dalla parte reale e dalla parte immaginaria degli autovettori complessi.

Se la base che diagonalizzava sui complessi era

$(2, 1+3i)$, $(2, 1-3i)$ $\qquad (2,1) \pm i(0,3)$

allora la base buona sui reali è

$(2,1)$, $(0,3)$ ← parte reale e parte immaginaria degli autovett. complessi

SE i conti fossero giusti:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e dovrebbe succedere che $\qquad M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(Provare a fare la verifica!)

— o — o —

<u>Esempio collegato</u> $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Domanda: è simile alla precedente?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Basta guardare se hanno la stessa forma canonica!
In questo caso sì, perché $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$ è lo stesso di A, quindi stessa forma canonica!

Achtung! In generale, stesso pol. caratt. $\not\Rightarrow$ stessa forma canonica !!!
È vero in questo caso perchè è diagonalizzabile !!!

Ad esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

hanno stesso pol. car., ma forme canoniche diverse.

Come determino M tale che $M^{-1}AM = B$? M invertibile
(so che esiste perchè sono simili)

Io so andare da A alla canonica e da B alla canonica.

$C = M_1^{-1} A M_1$ $C = M_2^{-1} B M_2$ M_1 e M_2 le so trovare

Confrontando le 2 ho che $M_1^{-1} A M_1 = M_2^{-1} B M_2$
Ora ricavo B:

$$B = M_2 M_1^{-1} A M_1 M_2^{-1}$$

$$= (M_1 M_2^{-1})^{-1} A (M_1 M_2^{-1})$$

Quindi cerco $M = M_1 M_2^{-1}$ Sono andato da A a B passando per C.

— o — o —

Domanda: $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$? Sì, di dim = 2.
Una base è $1, i$ (ogni complesso si scrive come $a+bi$ con a e b reali)
$\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$? Sì, di dim. 1
Una base è 1 (o anche $3+7i$) (ogni complesso si scrive come $a \cdot 1$, con $a \in \mathbb{C}$)

$\mathbb{C}^2$ è uno sp. vett. reale di dim 4. Una base è $(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$

$\mathbb{C}^2$ è uno sp. vett. complesso di dim. 2. Una base è $(1,0), (0,1)$
ma anche $(1+2i, 0), (1, 3-5i)$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 59 (−1 ;)

Titolo nota 20/12/2013

$\boxed{\text{COSE STRANE}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ Calcolare e^A oppure $\sin A$

Finora sappiamo fare le potenze di A : $A^0, A^1, A^2, A^3, \ldots$

Per la formula di Taylor di analisi, le funzioni strane sono serie di potenze... quindi

e^A la possiamo definire come $Id + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \ldots$

Le potenze le sappiamo fare, le serie pure...
Ogni coeff. diventa somma di una serie e bisogna solo vedere a cosa converge.
SE la matrice è diagonale, posso fare le potenze facendo le potenze dei singoli elementi. Nel caso dell'esempio, la forma canonica di A è diagonale con autovalori: $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$, quindi

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M^{-1}AM = D \rightsquigarrow A = MDM^{-1}$

Ma allora $M^{-1}A^kM = D^k$ come visto tante volte, quindi

$$\left(Id + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots\right) = MM^{-1} + MDM^{-1} + \frac{1}{2}MD^2M^{-1} + \frac{1}{6}MD^3M^{-1} + \ldots$$

$$= M\left(Id + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \ldots\right)M^{-1} = M\,e^D\,M^{-1}$$

si calcola facilmente

$e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$. A questo punto si torna indietro

$e^A = M^{-1}e^D M = M^{-1}\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} M$

M o M^{-1} (controllare quale) ha per colonne una base di autovettori.

— o — o —

Cambi di base e algoritmo JPEG

Immagine: 800×600 pixel
Ogni pixel sono 3 byte: RGB
R, G e B sono numeri compresi tra 0 e 255
Semplificazione: immagine in bianco e nero: in ogni pixel c'è
un solo numero da 0 a 255
↑ nero ↑ bianco

Primo passo: scomporre in sottoquadrati 8×8
Ci riduciamo a considerare matrici 8×8
Queste sono uno sp. vettoriale di dim. 64 e una base canonica
è quella con un 1 e 63 volte 0.
Maniera BOVINA di trasmettere la matrice = trasmettere i 64 numeri.
Se voglio comprimere il file 16 volte, che posso fare?

$\boxed{\text{1ª proposta}}$ Passare da 8×8 a 2×2
e in ogni sottoblocco spedisco la
media. Risultato: schifezza!!

4×4	4×4
4×4	4×4

$\boxed{\text{2ª proposta}}$ Cambio il campionamento.
In ogni pixel ho un numero da 0 a 255. Lo divido in 16 blocchi
e poi
da 0 a 7 ⇝ spedisco 4
da 8 a 15 ⇝ " 12
da 16 a 23 ⇝ " 20
e così via. Invece di 256 possibilità, ne restano 16.
Risultato: schifezza!!

$\boxed{\text{3ª proposta}}$ Cambio base nello spazio (di dim. 64) delle matrici 8×8.
Sarebbe bello avere una nuova base ortogonale, o meglio
ortonormale.

Il miglior modo di cercare una base ortonormale è come autovettori di un'applicazione simmetrica 64×64

<u>Modellino semplice</u>: invece di spedire matrici 8×8, voglio spedire vettori lunghi 8

Una possibile base dell' 8×1 sarebbe la canonica.
Invece si usa questa

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\cos\frac{\pi}{16} & \cos\frac{3\pi}{16} & \cos\frac{5\pi}{16} & \cos\frac{7\pi}{16} & & & & \cos\frac{15\pi}{16} \\
\cos\frac{\pi}{16}\cdot 2 & \cos\frac{3\pi}{16}\cdot 2 & & & & & & \cos\frac{15\pi}{16}\cdot 2 \\
\cos\frac{\pi}{16}\cdot 3 & \cos\frac{3\pi}{16}\cdot 3 & & ---- , & & & & \cos\frac{15\pi}{16}\cdot 3 \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Questa (miracolo!) è una base ortogonale e sono tutti autovettori di questa matrice 8×8 (non è verissimo, ma quasi)

$$(a, b, c, d, e, f, g, h) \rightsquigarrow (b+h, a+c, b+d, c+e, \ldots, g+a)$$

Che matrice ha? $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Gli autovettori di questa matrice sono proprio quei coseni.