2.2 Неравенства Маркова/Чебышева. ЗБЧ

Пререквизиты

Выборочное среднее:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

Неравенство Маркова: Пусть ξ - неотрицательная, $E\xi$ - существует и конечно, $a > 0$ тогда

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{E\xi}{a}$$

Для неотрицательной, монотонно неубывающей ф-ии ϕ

$$P(\phi(\xi) \geq \phi(a)) \leq \frac{E\phi(\xi)}{\phi(a)}$$

Неравенство Чебышева: Пусть $E\xi$ и $D\xi$ - существуют и конечны, $a > 0$ тогда

$$P(|\xi - E\xi| \geq a) \leq \frac{D\xi}{a^2}$$

Закон Больших Чисел: Пусть $E\xi$ и $D\xi$ - существуют и конечны, $a > 0$ тогда

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - EX_1\right| \geq a\right) \leq \frac{DX_1}{na^2}$$

Неравенство Хёфдинга Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ принимают значения из некоторого отрезка длины d, имеют место неравенства Хёфдинга: для всех $c > 0$

$$P(|\overline{X} - \mathbb{E}X_1| \geq c) \leq 2e^{-2nc^2/d^2}$$

Нам хватит и такого:

$$P(\overline{X} - \mathbb{E}X_1 \geq c) \leq 2e^{-2nc^2/d^2}.$$

Граница Черновой Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ принимают значения из некоторого отрезка $[0; 1]$, и $M = E(X_1 + \ldots + X_n)$ то для всех $\delta > 0$

$$P(X_1 + \ldots + X_n \geq (1 + \delta)M) \leq e^{M(\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta))}$$

2.2 Неравенства Маркова/Чебышева. ЗБЧ

Практика

1. Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор:
   (a) более или равно 400
   (b) будет меньше 500.

2. Устройство состоит из n независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0,05. Вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов окажется меньше двух, равна 80%. Найдите n.

3. Оцените вероятность того, что в результате подбрасывания игральной кости в течение 500 раз относительная частота появления на верхней грани шестерки отклонится от вероятности этого события (по абсолютной величине) не более чем на 0,05.

4. Пусть $G(n, p)$ - случайный граф на n вершинах и вероятностью ребра p. Докажите:
   (a) что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{2}{3}} \to 0$ при $n \to +\infty$ в $G(n, p)$ асимптотически почти наверняка нет подграфов, изоморфных графу K_4.
   (b) что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{2}{3}} \to +\infty$ при $n \to +\infty$ в $G(n, p)$ асимптотически почти наверняка существует подграф, изоморфных графу K_4.
   (c) Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{5}{4}} \to 0$ при $n \to \infty$ асимптотически почти наверняка нет связных компонент, изоморфных графу-дереву-звезде на 5 вершинах.

Домашка

1. (1)Конспект по терверу объёмом 500 страниц содержит 50 опечаток (каждая из них равновероятно находится на одной из страниц). Оцените с помощью неравенств Маркова вероятность того, что на некоторой странице содержится

    (a) не менее 3 опечаток.

    (b) 0 опечаток.

2. (1) Правильная игральная кость подбрасывается 1000 раз. С помощью неравенства Чебышёва оцените вероятность того, что среднее арифметическое числа выпавших очков отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 0,3.

3. (2) Великий Морской путь сулит значительную прибыль. Однако из-за пиратов в среднем груз одного из 20 кораблей не достигает порта назначения. Чтобы скомпенсировать убытки n коммерсантов создали фонд, в который складывают 6% прибыли с каждого корабля, уходящего в плавание. При помощи неравенства Чебышева/Маркова найдите наименьшее n, при котором вероятность, что фонд не сможет возместить убытки не превышает 0.05.

4. (1) Передаётся слово длины n. В каждой позиции с вероятностью p независимо друг от друга происходит ошибка. При этом вероятность ошибки зависит от длины слова: $p = o(\frac{1}{n})$. Докажите, что при $n \to \infty$ ошибки происходят с вероятностью 0.

5. Пусть $G(n, p)$ - случайный граф на n вершинах и вероятностью ребра p. Докажите:

    (a) (1)что при вероятности ребра p такой, что $pn \to 0$ при $n \to +\infty$ в $G(n, p)$ асимптотически почти наверняка нет подграфов, изоморфных графу K_3.

    (b) (2)что при вероятности ребра p такой, что $pn \to +\infty$ при $n \to +\infty$ в $G(n, p)$ асимптотически почти наверняка существует подграф, изоморфный графу K_3.