

2.4 ЦПТ. Локальная и интегральная т. Муавра-Лапласа

Пререквизиты

Локальная т. Муавра-Лапласа

Вероятность m успехов в схеме бернулли из n испытаний примерно равна:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x = \frac{m - n}{\sqrt{npq}}$$

чем ближе вероятность к 0.5, тем точнее результат

Интегральная т. Муавра-Лапласа

ξ - количество успехов в схеме Бернулли. Вероятность от k до m успехов в схеме бернулли из n испытаний примерно равна

$$P_n(k \leq \xi \leq m) \approx \Phi\left(\frac{m - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ЦПТ

Пусть X_1, \dots, X_n, \dots , — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющих конечное математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 . Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Тогда $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ сходится к $N(0, 1)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.

(локальная ЦПТ) Если распределение X_1 абсолютно непрерывно, то плотность f_{Z_n} существует и $f_{Z_n}(x) \rightarrow \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ для всех x .

(равномерная оценка: Неравенство Берри-Эссеена) Если $E|X^3| = \rho$ конечно, то для всех n, x

$$\left| F_{Z_n}(x) - F_{N(0,1)}(x) \right| = \left| F_{Z_n}(x) - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \right| \leq \frac{0,5\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

2.4 ЦПТ. Локальная и интегральная т. Муавра-Лапласа

Практика

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найдите вероятность того, что среди 1000 новорожденных окажется ровно 500 мальчиков.
2. В театре 1600 мест и 2 гардероба. Посетитель выбирает гардероб равновероятно. Сколько в них должно быть мест, чтобы их могло не хватить не чаще раз в месяц.
3. В рулетке есть 37 клеток. По 18 красных и черных и одна зеленая. При ставке выбирается либо черная, либо красная клетка и на нее ставится единичная ставка. В случае победы - ставка удваивается, в случае проигрыша - все теряется. Найти вероятность сохранить или преумножить свой капитал в рулетке если сделано 200 ставок.
4. На церемонию вручения дипломов в половине случаев приходят оба родителя выпускника, в трети случаев один из родителей, а с вероятностью $1/6$ не придет никто. В новом году будут выпускаться 600 человек. С какой вероятностью можно утверждать, что родителей будет больше, чем выпускников?
5. Найти оценку неравенством Бэрри-Эссена для задач с рулеткой и дипломами.

2.4 ЦПТ. Локальная и интегральная т. Муавра-Лапласа

Домашка

1. (1) Имеется 1000 параллелепипедов, у каждого из которых длина каждой стороны может принимать значения $\frac{1}{2}$ и 1 с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно. Пусть V - суммарный объем этих параллелепипедов. Оценить вероятность того, что $580 < V < 605$.
2. (1) В стране насчитывается 10 млн. избирателей, из которых 5,5 млн. принадлежит к партии А, и 4,5 млн. принадлежит к партии В. Назначаются жребием 20000 выборщиков. Какова вероятность того, что большинство выборщиков окажется сторонниками партии В?
3. (1) Посмотрим еще раз на задачу с рулеткой из практики. При каком количестве ставок вероятность проигрыша будет меньше $\frac{1}{3}$ / меньше $\frac{1}{4}$
4. (1) Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку с вероятностью 0,5; в девятку — 0,3; в восьмерку — 0,1; в семерку — 0,05; в шестерку — 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Оцените вероятность того, что он набрал более 980 очков; более 950 очков?
5. (1) В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).
6. (2) Найти оценку неравенством Бэрри-Эссена для задачи со стрелком и поездом.
7. (2) Мера длины фут, как видно из названия, — длина ступни. Но, как известно, размеры ног бывают разные. Немцы в XVI в. выходили из положения следующим способом. В воскресный день ставили рядом 16 первых вышедших из церкви мужчин. Сумма длин их левых ступней делилась на 16. Средняя длина и была «правильным и законным футом». Известно, что размер стопы взрослого мужчины — случайная величина, имеющая нормальное распределение со средним значением 262,5 мм и квадратичным отклонением 12 мм. Найти вероятность того, что два «правильных и законных» значения фута, определенных по двум различным группам мужчин, отличаются более чем на 5 мм. Сколько нужно было бы взять мужчин для того, чтобы с вероятностью не менее 0,99 средний размер их ступней отличался от 262,5 мм менее чем на 0,5 мм?