

2.8 Построение оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия

1 Практика

1. Используя метод моментов, оцените параметр θ равномерного распределения на отрезке:

- $[\theta - 1; \theta + 1], \theta \in R$
- $[-\theta; \theta], \theta > 0.$

2. Пусть выборка X_1, \dots, X_n порождена распределением с плотностью $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, & x \geq \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. С помощью метода максимального правдоподобия постройте оценку параметров α и β .

3. Пусть выборка X_1, \dots, X_n порождена распределением с плотностью $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x-\beta)}, & x \geq \beta \\ 0, & x < \beta \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 0$. Постройте оценки параметров α и β с помощью метода моментов и метода максимального правдоподобия.

4. Пусть выборка X_1, \dots, X_n порождена распределением:

$$\begin{cases} P(X_i = 1) = p_1 \\ P(X_i = 2) = p_2 \\ P(X_i = 3) = p_3 \end{cases}$$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Постройте оценку параметров p_1, p_2, p_3 методом максимального правдоподобия.

2 Домашка 2

1. (2 балла, по одному на каждый метод) Найти оценку максимального правдоподобия и метода моментов параметра $p \in (0, 1)$ геометрического распределения.
2. (1 балл) Пусть дана выборка из распределения с плотностью

$$f_{\alpha}(y) = \begin{cases} 3y^2\alpha^{-3}e^{-(\frac{y}{\alpha})^3} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Построить оценку параметра $\alpha > 0$ с помощью метода моментов используя k -ый момент $g(y) = y^k$

3. (1 балл) Пусть выборка X_1, \dots, X_n порождена распределением с плотностью $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$$

Постройте оценку методом моментов для вектора параметров (μ, σ) .

4. (2 балла, по одному на каждый метод) Постройте оценки параметров с помощью метода моментов и метода правдоподобия для Гамма-распределения с двумя параметрами:

$$f_{k,\theta}(y) = \begin{cases} x^{k-1} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

5. (2 балла) Пусть выборка X_1, \dots, X_n порождена распределением:

$$\begin{cases} P(X_i = 1) = p_1 \\ P(X_i = 2) = p_2 \\ P(X_i = 3) = p_3 \\ P(X_i = 4) = p_4 \end{cases}$$

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Постройте оценку параметров p_1, p_2, p_3, p_4 методом максимального правдоподобия.

6. (3 балла) Пусть выборка X_1, \dots, X_n порождена распределением Коши. Доказать, что медиана - оценка метода максимального правдоподобия. (P.S. - Не забудьте, что у распределения Коши не существует математического ожидания:))