Контрольная 4. Распределения, сходимости.

1. Пусть $\hat{F}(x)$ — эмпирическая функция распределения. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Найдите ковариацию $Cov(\hat{F}(x), \hat{F}(y))$.

2. Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ у распределения с плотностью

$$f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1} \quad y \in [0, 1]$$

3. Найти методом моментов и методом максимального правдоподобия оценки параметров распределениея Вейбула

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{k-1} e^{-(\frac{x}{\lambda})^k} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

4. Распределение Кэптейна определяется плотностью

$$f_\theta(y) = \frac{g^{'}(y)}{\sqrt{2pi}} e^{-\frac{(\theta - g(y))^2}{2}}$$

   где $g(y)$ — неубывающая дифференцируемая функция. Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ.

5. Пусть $\{X1, \ldots, X_n\}$ — выборка из распределения Бернулли с параметром p. Является ли статистика $\hat{p} = (\overline{X})^2$ несмещённой оценкой параметра p? Состоятельной?

6. Пусть $\{X1, \ldots, X_{3n}\}$ — выборка объёма 3n из нормального распределения со средним a и единичной дисперсией. Проверить несмещённость и состоятельность следующих оценок параметра a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} X_i$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{3i}$$

7. Пусть $\{X1, \ldots, X_n\}$ — выборка из равномерного распределе- ния на отрезке $[0, \theta]$. Проверить состоятельность и несмещённость следующих оценок параметра θ

$$(n+1)X_{(1)}$$

$$\frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

8. Пусть $\{X1, \ldots, X_n\}$ — выборка из равномерного распреде- ления на отрезке $[0, \theta]$. Является ли оценка $(n+1)X_{(1)}$ асимптотически нормальной оценкой параметра θ?