2.7 Построение оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия

1 Практика

1. Используя метод моментов, оцените параметр θ равномерного распределения на отрезке:
   - $[\theta - 1; \theta + 1]$, $\theta \in R$
   - $[-\theta; \theta]$, $\theta > 0$.
2. Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением с плотностью $f(x)$:

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, x \geq \alpha \\ 0, x < \alpha \end{cases}$$

   Здесь $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. С помощью метода максимального правдоподобия постройте оценку параметров α и β.
3. Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением с плотностью $f(x)$:

   $$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x-\beta)}, x \geq \beta \\ 0, x < \beta \end{cases}$$

   Здесь $\alpha > 0$. Постройте оценки параметров α и β с помощью метода моментов и метода максимального правдоподобия.
4. Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением:

   $$\begin{cases} P(X_i = 1) = p_1 \\ P(X_i = 2) = p_2 \\ P(X_i = 3) = p_3 \end{cases}$$

   $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Постройте оценку параметров p_1, p_2, p_3 методом максимального правдоподобия.

2 Домашка

1. (1 балл) Используя метод моментов, постройте оценку $\lambda > 1$ по выборке из распределения Пуассона с параметром $\ln\lambda$.

2. (1 балл) Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением с плотностью $f(x)$:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$$
Параметр a может принимать значения 1 или 2. Найдите оценку максимального правдоподобия параметра a.

3. (1 балл) Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением с плотностью $f_\theta(x)$: $f_\theta(x) = f(x - \theta)$, где функция $f(x)$ имеет единственный максимум в точке $x = 0$. Постройте оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра сдвига θ по одному наблюдению X_1.

4. (1 балл) Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением с плотностью $f(x)$:
$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$$
Постройте оценку максимального правдоподобия для вектора параметров (μ, σ).

5. Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена равномерным на отрезке $[\theta; 2\theta]$ распределением. Постройте оценку параметра θ:
   - (1 балл) Методом моментов.
   - (1 балл) Методом максимального правдоподобия.

3 Домашка 2

1. (2 балла, по одному на каждый метод) Найти оценку максимального правдоподобия и метода моментов параметра $p \in (0, 1)$ геометрического распределения.

2. (1 балл) Пусть дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\alpha(y) = \begin{cases} 3y^2\alpha^{-3}e^{-(\frac{y}{\alpha})^3} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

   Построить оценку параметра $\alpha > 0$ с помощью метода моментов используя k-ый момент $g(y) = y^k$

3. (1 балл) Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением с плотностью $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$$

   Постройте оценку методом моментов для вектора параметров (μ, σ).

4. (2 балла, по одному на каждый метод) Постройте оценки параметров с помощью метода моментов и метода правдоподобия для Гамма-распределения с двумя параметрами:

$$f_{k,\theta}(y) = \begin{cases} x^{k-1}\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k\Gamma(k)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

5. (2 балла) Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением:

$$\begin{cases} P(X_i = 1) = p_1 \\ P(X_i = 2) = p_2 \\ P(X_i = 3) = p_3 \\ P(X_i = 4) = p_4 \end{cases}$$

   $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Постройте оценку параметров p_1, p_2, p_3, p_4 методом максимального правдоподобия.

6. (3 балла) Пусть выборка $X_1, ..., X_n$ порождена распределением Коши. Доказать, что медиана - оценка метода максимального прадободобия. (P.S. - Не забудьте, что у распределения Коши не существует матожидания:))