# 2.5 Слабая сходимость. ЗБЧ. ЦПТ.

## Пререквизиты

### Сходимость. Слабая. По распределению.

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если для любой непрерывной функции $\phi(x)$ определенной на $\mathbb{R}$

$$\int_\Omega \phi(\xi_n(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \to \int_\Omega \phi(\xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega)$$

или

$$\int_\mathbb{R} \phi(x)\mu_n(dx) \to \int_\mathbb{R} \phi(x)\mu_n(dx)$$

или

$$\forall x F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x) \quad F_\mu(x) = \mu((-\infty, x))$$

### Сходимость. В среднем.

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0$$

### Характеристические функции

$$\chi_\xi(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi})$$

### Закон больших чисел Чебышева

Для **попарно независимых и одинаковораспределенных** $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ с конечными **вторыми** моментами

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1$$

### Закон больших чисел Хинчина

Для **в совокупности независимых и одинаковораспределенных** $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ с конечными **первыми** моментами

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1$$

### Закон больших чисел Маркова

Для **необязательно независимых и необязательно одинаковораспределенных** $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$, для которых $\sum_{i=1}^n \mathbb{D}(\xi_i) = o(n^2)$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1$$

### Усиленный Закон больших чисел Колмогорова

Для тех же условий, что и обычные ЗБЧ

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi_1$$

### Классическая ЦПТ

Для **в совокупности независимых и одинаковораспределенных** $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечными **вторыми** моментами удовлетворяет

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) - n\mathbb{E}(\xi_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(\xi_1)}} \to N(0,1)$$

### ЦПТ Линдеберга

Для независимых $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечными **вторыми** моментами и условия Линдеберга

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[\frac{(\xi_i - \mu_i)^2}{s_n^2} \mathbf{1}_{\{|X_i - \mu_i| > \varepsilon s_n\}}\Big]$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) - n\mathbb{E}(\xi_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(\xi_1)}} \to N(0,1)$$

## 2.5 Слабая сходимость. ЗБЧ. ЦПТ. Х-ские функции

### Практика

1. Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $g(x)$ - непрерывная функция. Докажите, что $g(\xi_n) \xrightarrow{d} g(\xi)$
2. Если $\xi_n \xrightarrow{d} const$, то $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} const$
3. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ - положительно определенные и $E|\xi_n - \xi| \to 0$. Сходится ли $E|\xi_n + k| \to E|\xi + k|$ для k из $\mathbb{R}_+$. Докажите, что в общем случае это не верно.
4. Найти характеристические функции для кубика и экспоненциального распределения.
5. (1)Пусть $\xi_n$ принимает значения $n$, $-n$, 0 с вероятностями: $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, $1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ Выполнен ли закон больших чисел?
6. Пусть $\xi_1 \sim N(0,1)$. Положим $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ и $\tau_n = \frac{\xi_{n+1}}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$ Найти предельное распределение величины $\tau$

# Домашка

1. (1)Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$. Доказать, тчо $\xi_n + \mu_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \xi + \mu$

2. (1)Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$. Для любой непрерывной функции f. $f(\xi_n, \mu_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} f(\xi, \mu)$

3. (2)Пусть $\alpha > 0$ и $E|\xi_n|^\alpha < \infty$ при всех n. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

   (a) $\xi_n \to \xi$ по вероятности и $E|\xi_n|^\alpha \to E|\xi|^\alpha < \infty$ при $n \to \infty$;

   (b) $E|\xi_n - \xi|^\alpha \to 0$ при $n \to \infty$.

4. (1)Вычислить характеристическую функцию распределения Лапласа.

5. (1)Пусть $\xi_n$ принимает значения $n^3$, $-n^3$, 0 с вероятностями:

   (a) $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, $1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

   (b) $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{n}$

   Выполнен ли закон больших чисел?

6. (2)Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ - последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р) случайных величин с конечной дисперсией. Доказать:

$$\frac{\max(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$$