2.6 Статитстика! Оценки. Эмпирическая функция.

Пререквизиты

Состоятельная оценка

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

Несмещенная оценка

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] \to \theta$$

Эмпирическая функция распределения

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i < x)}{n}$$

Параметры оценки

$$bias(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

$$se(\hat{\theta}) = \sqrt{\mathbb{D}[\hat{\theta}]}$$

$$MSE = bias(\hat{\theta})^2 + se(\hat{\theta})^2$$

2.6 Статитстика! Оценки. Эмпирическая функция.

Практика

1. Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\}$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины с конечными средним $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ и дисперсией $\sigma^2 = \mathbb{D}(X_1)$. Покажите, что величины

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{\mathbf{X}})^2.$$

являются *несмещенными* и *состоятельными* оценками среднего μ и дисперсии σ^2, т.е. что

   - $\mathbb{E}[\overline{\mathbf{X}}] = \mu$ и $\overline{\mathbf{X}} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu$,
   - $\mathbb{E}[\hat{S}_n^2] = \sigma^2$ и $\hat{S}_n^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \sigma^2$.

2. Для выборки из Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim U(0, \theta)$ проверить состоятельность и несмещённость оценки $\hat{\theta} = X_(n)$ - n-я порядковая статистика.

3. Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim Poisson(\ln \lambda), \hat{\lambda} = e^{\overline{\mathbf{X}}}$. Найдите bias, se и MSE этой оценки. Является ли оценка несмещенной оценкой параметра λ? Состоятельной?

4. Для выборки из распределения F найти: $\mathbb{E}[\hat{F}_n(x)]$, $\mathbb{D}[\hat{F}_n(x)]$

Домашка

1. (1)Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim U(0, \theta)$, $\hat{\theta} = 2\overline{\mathbf{X}}$. Найдите значения значения bias, se и MSE этой оценки. Является ли оценка несмещенной? Состоятельной?

2. (1)Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim U(a, b)$. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ несмещённой оценкой длины отрезка $\theta = b - a$? Состоятельной?

3. (1)Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim Poisson(\lambda)$. Для какого параметра $\theta = \theta(\lambda)$ оценка $\hat{\theta}\overline{X}e^{-\overline{X}}$ состоятельной? Является ли $\hat{\theta}$ несмещенной оценкой? Найдите bias, se и MSE этой оценки.

4. Для выборки из распределения F найти:

   (a) (1)$\mathbb{E}[\hat{F}_n(x)\hat{F}_n(y)]$

   (b) (1)$\mathbb{D}[\hat{F}_n(x) - \hat{F}_n(y)]$

5. (2)Доказать, что выборочное среднее и выборочная дис- персия некоррелированы, если третий момент выборки равен нулю. Указание: доказать, что

$$Cov(\overline{X}, \hat{S}_n^2) = \frac{n-1}{n^2}E[X_1^3]$$

6. (2)Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim (\mu, \sigma^2)$, $\theta = e^{\mu}$ и $\hat{\theta} = e^{\overline{\mathbf{X}}}$. Найдите аналитически плотность распределения $p_{\hat{\theta}}(x)$ оценки $\hat{\theta} = e^{\overline{\mathbf{X}}}$, математическое ожидание $\mathbb{E}(\hat{\theta})$, и дисперсию $\mathbb{E}(\hat{\theta})$, а также *bias*, *se*, *MSE* оценки $\hat{\theta}$. Является ли оценка $\hat{\theta}$ смещенной? Состоятельной?