2.6 Статистика! Оценки. Эмпирическая функция.

Пререквизиты

Состоятельная оценка

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

Несмещенная оценка

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

Эмпирическая функция распределения

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x)}{n}$$

Параметры оценки

$$bias(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

$$se(\hat{\theta}) = \sqrt{\mathbb{D}[\hat{\theta}]}$$

$$MSE = bias(\hat{\theta})^2 + se(\hat{\theta})^2$$

2.6 Статистика! Оценки. Эмпирическая функция.

Практика

1. Для выборки из распределения F найти: $\mathbb{E}[\hat{F}_n(x)]$, $\mathbb{D}[\hat{F}_n(x)]$

2. Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\}$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины с конечными средним $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ и дисперсией $\sigma^2 = \mathbb{D}(X_1)$. Покажите, что величины

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{\mathbf{X}})^2.$$

   являются *несмещенными* и *состоятельными* оценками среднего μ и дисперсии σ^2, т.е. что

   - $\mathbb{E}[\overline{\mathbf{X}}] = \mu$ и $\overline{\mathbf{X}} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu$,
   - $\mathbb{E}[\hat{S}_n^2] = \sigma^2$ и $\hat{S}_n^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \sigma^2$.

3. Для выборки из $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim U(0, \theta)$ проверить состоятельность и несмещённость оценки $\hat{\theta} = X_{(n)}$ - n-я порядковая статистика.

4. Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim Poisson(\ln \lambda) \quad \lambda > 0$, введем оценку $\hat{\lambda} = e^{\overline{\mathbf{X}}}$. Найдите bias, se и MSE этой оценки. Является ли оценка несмещенной оценкой параметра λ? Состоятельной?

2.6 Статистика! Оценки. Эмпирическая функция.

Домашка

1. Для выборки из распределения F найти:

   (a) (1)$\mathbb{E}[\hat{F}_n(x)\hat{F}_n(y)]$

   (b) (1)$\mathbb{D}[\hat{F}_n(x) - \hat{F}_n(y)]$

2. (1)Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim U(a, b)$. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ несмещённой оценкой длины отрезка $\theta = b - a$? Состоятельной?

3. (1)Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\} \sim Poisson(\lambda)$. Для какого параметра $\theta = \theta(\lambda)$ оценка $\hat{\theta}\overline{X}e^{-\overline{X}}$ состоятельной? Является ли $\hat{\theta}$ несмещенной оценкой? Найдите bias, se и MSE этой оценки.

4. (1)$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\}$ — выборка из показательного распределения с параметром $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Является ли оценка $\alpha = (\overline{X})^2$ несмещённой оценкой параметра α? Состоятельной? Найти $bias$, se, MSE оценки.

5. (2)Доказать, что выборочное среднее и выборочная дисперсия некоррелированы, если третий момент выборки равен нулю. Указание: доказать, что

$$Cov(\overline{X}, \hat{S}_n^2) = \frac{n-1}{n^2}E[X_1^3]$$

6. (2)Производится n измерений неизвестного диаметра d круга. В первом приближении считается, что измерения $X_i = d + \xi_i$ производятся с независимыми случайными ошибками ξ_i , имеющими одинаковое нормальное распределение с нулевым средним и неизвестной дисперсией σ^2 . Найти $bias$, se, MSE оценки. Проверить несмещённость и состоятельность следующей оценки площади круга:

$$s* = \frac{\pi}{4}\Big((\overline{X})^2 - \frac{S_0^2}{n}\Big)$$

   $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ - смещенная оценка дисперсии