Контрольная 4. Распределения, сходимости.

1. (9) Пусть у нас есть процесс испытаний Бернулли с $n = 10000$ испытаниями и p - вероятностью успеха в этом процессе. Мы хотим оценить вероятности событий

   (a) (1.5) Выпало ровно 2000 успехов при $p = 0,25$

   (b) (1.5) Выпало ровно 7 успехов при $p = 0,001$

   (c) (1.5) Выпало от 1500 до 2100 успехов при $p = 0.2$

   (d) (1.5) Выпало больше 6 успехов при $p = 0,0005$

   (e) (1.5) Выпало ровно 9989 успехов при $p = 0.9997$

   (f) (1.5) Выпало меньше 1500 успехов при $p = 0.5$

   с помощью теорем Муавра-Лапласа или т.Пуассона. Выберите нужную теорему и решите задачу. Сравните ответ с реальным (посчитайте Сшку питоном или вольфрамом) и посмотрите на какой позиции возникает ошибка.

2. (3) Последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ распределена по экспоненциальному закону с параметром λ. По ЦПТ $Z_n = \frac{\sum \xi_n - \mathbb{E}(\sum \xi_n)}{\sqrt{\mathbb{D}(\sum \xi_n)}} \to N(0,1)$. Оценить неравенством Бэрри-Эссена скорость сходимости к нормальному распределению. Найти оценку для n=30, n=300, n=3000.

3. (3) Посчитать ассимптотику C_{kn}^{mn} при $n \to \infty$, где $m < k$ и эти параметры константы.

4. (3) Найти характеристическую функцию для гамма-распределения $\Gamma(k, \theta)$:
$$\rho(x) = x^{k-1} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k} \qquad x \geq 0$$

5. (3)Пусть $G(n,p)$ - случайный граф на n вершинах и вероятностью ребра p. Докажите: Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{5}{4}} \to 0$ при $n \to \infty$ асимптотически почти наверняка нет связных компонент, изоморфных графу-дереву-звезде на 5 вершинах.

6. (3) Пусть последовательность сл.в. $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют одинаковое невырожденное распределение с нулевым средним значением и с конечной дисперсией. Найти $D\xi_1$ если
$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{\sqrt{n}} > 1\right) = \frac{1}{3}$$

7. (3)Пусть ξ_n принимает значения 3^n , -3^n и 0 с вероятностями $3^{-(2n+2)}$, $3^{-(2n+2)}$ и $1-2\cdot 3^{-2n+2}$ соответственно. Выполнен ли ЗБЧ для последовательности ξ_n

8. (3) Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$, $\mu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ и $\nu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$. Доказать, что $\xi_n + \mu_n \cdot \nu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 2$

9. (3)(сложная) Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность случайных величин, причём ξ_n принимает значения $e^{-\alpha n}$ и $e^{\alpha n}$ с вероятностями $1-e^{-\beta n}$ и $e^{-\beta n}$ соответственно. При каких значениях α и β имеет место сходимость $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$

10. (3)(сложная) Пусть ξ_1 имеет стандартное нормальное распределение. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение величины $\frac{\eta_n}{\zeta_n}$, где

$$\eta_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_{2i+1}}{\xi_{2i+2}} \qquad \zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$