2.4 ЦПТ. Локальная и интегральная т. Муавра-Лапласа

Пререквизиты

Локальная т. Муавра-Лапласа

Вероятность m успехов в схеме бернулли из n испытаний примерно равна:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\phi(x)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

чем ближе вероятность к 0.5, тем точнее результат

Интегральная т. Муавра-Лапласа

ξ - количество успехов в схеме Бернулли. Вероятность от k до m успехов в схеме бернулли из n испытаний примерно равна

$$P_n(k \le \xi \le m) \approx \Phi\Big(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ЦПТ

Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots,$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющих конечное математическое ожидание μ и дисперсию σ^2. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Тогда $Z_n = \frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}$ сходится к $N(0,1)$ по распределению при $n \to \infty$.

(локальная ЦПТ) Если распределение X_1 абсолютно непрерывно, то плотность f_{Z_n} существует и $f_{Z_n}(x) \to \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ для всех x.

(равномерная оценка: Неравенство Берри-Эссеена) Если $E|X^3| = \rho$ конечно, то для всех n, x

$$\Big|F_{Z_n}(x) - F_{N(0,1)}(x)\Big| = \Big|F_{Z_n}(x) - \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\Big| \le \frac{0,5\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

2.4 ЦПТ. Локальная и интегральная т. Муавра-Лапласа

Практика

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найдите вероятность того, что среди 1000 новорожденных окажется ровно 500 мальчиков.

2. В театре 1600 мест и 2 гардероба. Посетитель выбирает гардероб равновероятно. Сколько в них должно быть мест, чтобы их могло не хватить не чаще раз в месяц.

3. В рулетке есть 37 клеток. По 18 красных и черных и одна зеленая. При ставке выбирается либо черная, либо красная клетка и на нее ставится единичная ставка. В случае победы - ставка удваивается, в случае проигрыша - все теряется. Найти вероятность сохранить или преумножить свой капитал в рулетке если сделано 200 ставок.

4. На церемонию вручения дипломов в половине случаев приходят оба родителя выпускника, в трети случаев один из родителей, а с вероятностью $1/6$ не придет никто. В новом году будут вы- пускаться 600 человек. С какой вероятностью можно утверждать, что родителей будет больше, чем выпускников?

5. Найти оценку неравенством Бэрри-Эссена для задач с рулекткой и дипломами.

2.4 ЦПТ. Локальная и интегральная т. Муавра-Лапласа

Домашка

1. (1)Имеется 1000 параллепипедов, у каждого из которых длинакаждой стороны может принимать значения $\frac{1}{2}$ и 1 с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно. Пусть V - суммарный объем этих параллепипедов. Оценить вероятность того, что $580 < V < 605$.

2. (1)В стране насчитывается 10 млн. избирателей, из которых 5,5 млн. принадлежит к партии A, и 4,5 млн. принадлежит к партии B. Назначаются жребием 20000 выборщиков. Какова вероятность того, что большинство выборщиков окажется сторонниками партии B?

3. (1)Посмотрим еще раз на задачу с рулеткой из практики. При каком количестве ставок вероятность проигрыша будет меньше $\frac{1}{3}$/ меньше $\frac{1}{4}$

4. (1)Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку с вероятностью 0,5; в девятку — 0,3; в восьмерку — 0,1; в семерку— 0,05; в шестерку — 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Оцените вероятность того, что он набрал более 980 очков; более 950 очков?

5. (1)В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

6. (2)Найти оценку неравенством Бэрри-Эссена для задачи со стрелком и поездом.

7. (2)Мера длины фут, как видно из названия, — длина ступни. Но, как известно, размеры ног бывают разные. Немцы в XVI в. выходили из положения следующим способом. В воскрестный день ставили рядом 16 первых вышедших из церкви мужчин. Сумма длин их левых ступней делилась на 16 . Средняя длина и была «правильным и законным футом». Известно, что размер стопы взрослого мужчины — случайная величина, имеющая нормальное распределение со средним значением 262, 5 мм и квадратичным отклонением 12 мм. Найти вероятность того, что два "правильных и законных" значения фута, определенных по двум различным группам мужчин, отличаются более чем на 5 мм. Сколько нужно было бы взять мужчин для того, чтобы с вероятностью не менее 0, 99 средний размер их ступней отличался от 262, 5 мм менее чем на 0, 5 мм?