# 2.3 Сходимости случайных величин.

## Пререквизиты

### Леммы Бореля-Кантелли

**1-я**
Пусть есть последовательность (необязательно независимых) событий $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$
Обозначим событие $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$
Пусть ряд сходится $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$
Тогда $P(A) = 0$
**2-я**
Пусть есть последовательность совместно независимых событий $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$
Обозначим событие $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$
Пусть ряд расходится $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \to \infty$
Тогда $P(A) = 1$

### Сходимости

**Почти наверное**

$$\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$$

Если

$$P(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega)\}) = 1$$

или

$$P(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\not\to} \xi(\omega)\}) = 0$$

или эквивалентно

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\{\omega \in \Omega : \sup_{k\geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

**По вероятности**

$$\xi_n \overset{\mathbb{P}}{\to} \xi$$

Если

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

### Усиленный Закон больших чисел

Говорят, что последовательность случайных величин (возможно разнораспределенных) $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечными первыми моментами удовлетворяет закону больших чисел (ЗБЧ), если

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i}{n} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$$

## 2.3 Сходимости случайных величин.

### Практика

1. Точка путешествует по целым числам. Каждый раз она шагает на 1, с вероятностью $p$ — вправо, с вероятностью $1-p$ — влево. Докажите, что при $p \neq \frac{1}{2}$ вероятность того, что она вернется в исходное положение бесконечное число раз равна 0.

2. Пусть $\xi_n \to \xi$ п.н и $g(x)$ - непрерывная функция. Докажите, что $g(\xi_n) \to g(\xi)$ п.н.

3. Пусть $(\xi_n - \xi)^2 \to 0$ п.н. Доказать, что $\xi_n \to \xi$ п.н.

4. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ и $g(x)$ - непрерывная, дифференцируемая и монотонно возрастающая функция. Докажите, что $g(\xi_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\xi)$.

5. Пусть $\xi_n$ принимает значения $2^n$, $-2^n$ и 0 с вероятностями $2^{-(2n+1)}$, $2^{-(2n+1)}$ и $1-2^{-2n}$ соответственно. Докажите, что для $\xi_n$ выполняется ЗБЧ.

## Домашка

1. (2) Точка путешествует по целым числам. Каждый раз она шагает на 1, с вероятностью $p$ — вправо, с вероятностью $1-p$ — влево. Докажите, что при $p=\frac{1}{2}$ вероятность того, что она вернется в исходное положение бесконечное число раз равна 1.

2. Пусть $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} 1$ и $\mu_n \overset{\text{п.н.}}{\to} 1$. Тогда

   (a) (1)$\xi_n + \mu_n \overset{\text{п.н.}}{\to} 2$

   (b) (1)$\xi_n \mu_n \overset{\text{п.н.}}{\to} 1$

3. (2)Пусть $\xi_n$ - последовательность независимых и равномерно распределенных на [0,1] случайных величин. Найдите распределение случайной величины $m_n = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Докажите, что $m_n$ стремится почти наверное к 0

4. (1) Пусть $\xi_n$ принимает значения $n$, $-n$ и 0 с вероятностями $\frac{1}{2n^2}$, $\frac{1}{2n^2}$ и $1-\frac{1}{n^2}$. Выполнен ли для этой последовательности закон больших чисел?

5. (1)Пусть $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} 1$ и $\mu_n \overset{\text{п.н.}}{\to} 1$. Тогда $\frac{1}{\xi_n+\mu_n} \overset{\mathbb{P}}{\to} \frac{1}{2}$

6. (Теорема Пойа) (2) Точка начинает путешествие по целочисленной решетке в $\mathbb{R}^2$ с одинаковыми вероятностями пойти в любое направление. Докажите что с вероятностью 1, точка когда-нибудь вернется в начальную точку.

7. (2) Докажите, что для $\mathbb{R}^3$ предыдущее утверждение неверно.