Контрольная 4. Распределения, сходимости.

1. (12) Пусть у нас есть процесс испытаний Бернулли с $n = 10000$ испытаниями и p - вероятностью успеха в этом процессе. Мы хотим оценить вероятности событий

   (a) (2) Выпало ровно 2000 успехов при $p = 0,25$

   (b) (2) Выпало ровно 7 успехов при $p = 0,001$

   (c) (2) Выпало от 1500 до 2100 успехов при $p = 0.2$

   (d) (2) Выпало больше 6 успехов при $p = 0,0005$

   (e) (2) Выпало ровно 9989 успехов при $p = 0.9997$

   (f) (2) Выпало меньше 1500 успехов при $p = 0.5$

   с помощью теорем Муавра-Лапласа, т.Пуассона, неравенств Чебышева и Маркова. Выберите нужную теорему и решите задачу.

2. (3) Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ распределена по экспоненциальному закону с параметром λ. По ЗБЧ $\frac{\sum \xi_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0, 1)$. Оценить неравенством Бэрри-Эссена скорость сходимости к нормальному распределению.

3. (3)Пусть $G(n, p)$ - случайный граф на n вершинах и вероятностью ребра p. Докажите: Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{5}{4}} \to 0$ при $n \to \infty$ асимптотически почти наверняка нет связных компонент, изоморфных графу-дереву-звезде на 5 вершинах.

4. (3) Пусть последовательность сл.в. $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют одинаковое невырожденное распределение с нулевым средним значением и с конечной дисперсией. Найти $D\xi_1$ если

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{\sqrt{n}} > 1) = \frac{1}{3}$$

5. (3)Пусть ξ_n принимает значения $n^{-\lambda}$ и $-n^{-\lambda}$ с вероятностью $1/2$ каждое. Выяснить, при каких значениях λ для последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнена ЦПТ.

6. (3) Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность случайных величин, причём ξ_n принимает значения $e^{-\alpha n}$ и $e^{\alpha n}$ с вероятностями $1 - e^{-\beta n}$ и $e^{-\beta n}$ соответственно. При каких значениях α и β имеет место сходимость $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$

7. (3) Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$, $\mu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ и $\nu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$. Доказать, что $\xi_n - \mu_n \cdot \nu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$