1 Тервер Мин

1.1 Комбинаторика

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

1.2 Классическая вероятность

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\sum_{\omega\in\Omega} 1_{\omega\in A}}{|\Omega|} = \frac{\text{Кол-во хороших элементарных событий}}{\text{Кол-во всех элементарных событий}}$$

A и B - несовместны $\Leftrightarrow P(AB) = 0$
A и B - независимы $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

1.3 Геометрическая вероятность

$$P(A) = \frac{\text{Площадь покрывающая событие A}}{\text{Вся площадь}}$$

1.4 Колмогоровская вероятность

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

$$\rho_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}$$

$$F_\xi(x) = \int_{\infty}^{\infty} \rho(x)dx$$

1.5 Свойства матожидания и дисперсии

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p(\xi = x_i)$$

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(\xi = x)dx$$

$$\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\mu) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\mu$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$$

$$\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\mu) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\mu$$

$$cov(\xi, \mu) = \mathbb{E}\xi\mu - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\mu$$

$$\mathbb{D}(\alpha\xi) = \alpha^2\mathbb{D}\xi$$

$$\mathbb{D}(\xi + \mu) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\mu + cov(\xi, \mu)$$

1.5.1 Для независимых

$$\mathbb{E}\xi\mu = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\mu$$

$$cov(\xi, \mu) = 0$$

$$\mathbb{D}(\xi + \mu) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\mu$$

2 Условная вероятность

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Если H_i - попарно несовместны.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

$$\mathbb{E}(\xi|A) = \frac{\mathbb{E}(\xi 1_A)}{P(A)}$$

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi|H_i)P(H_i)$$

3 Биноминальное распределение

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\mathbb{E}\xi = np \quad \mathbb{D}\xi = npq$$

4 Распределение Пуассона

$$C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{(np)^{-k} e^{-np}}{k!} = \frac{\lambda^{-k} e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\mathbb{E}\xi = \lambda \quad \mathbb{D}\xi = \lambda$$

5 Экспоненциальное распределение

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\rho_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\mathbb{E}\xi = \lambda^{-1} \quad \mathbb{D}\xi = \lambda^{-2}$$

6 Нормальное распределение

$$\rho_{\xi \sim N(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}\xi = \mu \quad \mathbb{D}\xi = \sigma^2$$

7 Неравенства

7.1 Маркова

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{E\xi}{a}$$

7.2 Чебышева

$$P(|\xi - E\xi| \geq a) \leq \frac{D\xi}{a^2}$$

8 Простой ЗБЧ. Закон Больших Чисел

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - EX_1\right| \geq a\right) \leq \frac{DX_1}{na^2}$$

9 Леммы Борелля-Кантелли

9.1 1-я

Пусть есть последовательность (необязательно независимых) событий $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Обозначим событие

$$A = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

Пусть ряд сходится

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$$

Тогда

$$P(A) = 0$$

9.2 2-я

Пусть есть последовательность совместно независимых событий $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Обозначим событие

$$A = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

Пусть ряд расходится

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \to \infty$$

Тогда

$$P(A) = 1$$

10 Сходимости

10.1 Почти наверное

$$\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$$

Если

$$P(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega)\}) = 1$$

или

$$P(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\not\to} \xi(\omega)\}) = 0$$

или эквивалентно

$$\forall\varepsilon > 0 : P(\{\omega \in \Omega : \sup_{k\geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

10.2 По вероятности

$$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$$

Если

$$\forall\varepsilon > 0 : P(\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

10.3 В p-среднем

$$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \quad p > 0$$

Если

$$\mathbb{E}|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

10.4 Слабая. По распределению

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$$

Если $\forall y \in \mathbb{R}$, в которых $F_\xi(y)$ непрерывна

$$F_{\xi_n}(y) \underset{n\to\infty}{\to} F_\xi(y)$$

При этом:
Почти наверное $\Rightarrow$ По вероятности
В среднем $\Rightarrow$ По вероятности
По вероятности $\Rightarrow$ Слабая

11 т. Муавра-Лапласа

$$P(\xi_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(\frac{m - np}{\sqrt{npq}})$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P(k \leq \xi_n \leq m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\Big(\Phi(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k-np}{\sqrt{npq}})\Big)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$