2.5 Слабая сходимость. ЗБЧ. ЦПТ.

Пререквизиты

Сходимость. Слабая. По распределению.

$$\int_\Omega \phi(\xi_n(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \to \int_\Omega \phi(\xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega)$$

или

$$\int_\mathbb{R} \phi(x)F_n(dx) \to \int_\mathbb{R} \phi(x)F_n(dx)$$

Очень полезная лемма

Если $\xi_n \xrightarrow{d} const$, то $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} const$

Сходимость. В среднем.

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0$$

Характеристические функции

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi})$$

Закон больших чисел.

Для **(необязательно независимых и необязательно одинаковораспределенных)** $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ с конечными **первыми** моментами

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Закон больших чисел Чебышева

Для **попарно независимых и одинаковораспределенных** $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ с конечными **вторыми** моментами

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1$$

Закон больших чисел Хинчина

Для **в совокупности независимых и одинаковораспределенных** $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ с конечными **первыми** моментами

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1$$

Усиленный Закон больших чисел Колмогорова

Для **независимых в совокупности и необязательно одинаковораспределенных** $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, если $\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{D}\xi_i}{n^2} < \infty$, то

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi_1$$

Классическая ЦПТ

Для **в совокупности независимых и одинаковораспределенных** $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечными **вторыми** моментами удовлетворяет

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) - n\mathbb{E}(\xi_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(\xi_1)}} \to N(0,1)$$

ЦПТ Линдеберга

Для независимых $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечными **вторыми** моментами и условия Линдерберга

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[\frac{(\xi_i - \mu_i)^2}{s_n^2} \mathbf{1}_{\{|X_i - \mu_i| > \varepsilon s_n\}}\Big]$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) - n\mathbb{E}(\xi_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(\xi_1)}} \to N(0,1)$$

2.5 Слабая сходимость. ЗБЧ. ЦПТ. Х-ские функции

Практика

1. Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $g(x)$ - непрерывная функция. Докажите, что $g(\xi_n) \xrightarrow{d} g(\xi)$
2. Пусть $E|\xi_n| \to E|\xi|$. Сходится ли $E|\xi_n + k| \to E|\xi + k|$?
3. Найти характеристические функции для кубика и экспоненциального распределения.
4. Пусть $\xi_1 \sim N(0,1)$. Положим $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ и $\tau_n = \frac{\xi_{n+1}}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$ Найти предельное распределение величины τ

Домашка

1. (1)Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$. Для любой непрерывной функции f. $f(\xi_n, \mu_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} f(\xi, \mu)$

2. (2)Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р) случайных величин с конечной дисперсией. Доказать:

$$\frac{\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$$

3. (2)Пусть $\alpha > 0$ и $E|\xi_n|^\alpha < \infty$ при всех n. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны: 1) $\xi_n \to \xi$ по вероятности и $E|\xi_n|^\alpha \to E|\xi|^\alpha < \infty$ при $n \to \infty$; 2) $E|\xi_n - \xi|^\alpha \to 0$ при $n \to \infty$.

4. (1)Вычислить характеристическую функцию распределения Лапласа.

5. (2)Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечными матожиданием μ и дисперсией σ^2. Положим $\eta_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}$. Доказать, что η_n сходится по вероятности и найти этот предел.