Непрерывные марковские цепи. Диффуры.

1. Пусть некий программист пытается решить сложную задачу, а время решения задачи распределено по показательному закону с параметром λ. Найдите вероятность того, что программист решит задачу.

2. Пусть имеется 2 программиста, наперегонки решающие сложную задачу, а время реше- ния задачи распределено по показательному закону с параметром λ_i у каждого. Найдите вероятность того, что задача будет решена первым программистом.

3. Пусть некий программист пытается решить сложную задачу до того, как его уволят, а время решения задачи распределено по показательному закону с параметром λ, также имеется фирма, терпение которой распределено по показательному закону с параметром μ. Найдите вероятность того, что программист решит задачу раньше, чем будет уволен.

4. Предположим, что временные интервалы между последовательными приходами в магазин посетителей — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ. Постройте для состояний из $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (число посетителей) марковскую цепь с непрерывным временем. Найдите вероятность того, что к моменту времени 5 придут ровно k посетителей.

5. Предположим, что временные интервалы между последовательными приходами в мага- зин посетителей — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с пара- метром λ для женщин и μ для мужчин. Найдите распределение общего числа посетителей. Найдите вероятность того, что первые три посетителя будут мужчины. Найдите вероятность, что после того, как зашло ровно 421 покупателей, 422 -й покупатель зашел в течение минуты. Тот же вопрос, если 423 -й покупатель зашел меньше через 2 минуты после 421 -го.

6. Ласт, Самунь, Бэй и Корнев принимают экзамен по питону в группе гуманитариев. В каждый момент времени каждый из них разговаривает с не более чем одним студентом. Если очередной студент приходит в момент, когда все преподаватели заняты, студент отправляется на пересдачу. Гуманитарии просты и наивны, поэтому интервалы времени между последовательно приходящими студентами можно считать независимыми случайными величинами, распределёнными по показательному закону с параметром λ. Интервалы времени, в течение которых студент отвечает преподавателю будем полагать независимыми и имеющими экспоненциальное распределение с параметром μ. Предполагается, что студентов бесконечно много.

   - Постройте марковскую цепь с непрерывным временем, описывающую данный процесс.
   - Найдите распределение количества занятых преподавателей в момент времени t от начала экзамена.
   - Найдите стационарное распределение данного процесса.

Непрерывные марковские цепи. Диффуры.

1. (1) Машины проезжают мимо поста ГИБДД по экспоненциальному закону с параметром $\frac{1}{4}$. На посту ГИБДД двое, если хотя бы один из них не занят беседой, он тормозит первую же машину. Беседа занимает в среднем время 10, время распределено по экспоненциальному закону, для беседы достаточно одного постового. Пусть в момент времени 0 постовые оба не заняты, найдите вероятность того, что они оба не будут заняты в момент времени t.

2. (1) Пусть имеется 5 серверов, которые пытаются независимо друг от друга найти запись в базе данных, время поиска предположим распределенным по показательному закону с параметром λ_i у каждого. Найдите вероятность того, что первый отклик поступит от сервера 1.

3. (2) Некий вирус может находиться в одном из m штаммов, в каждом — случайное время распределенное по экспоненциальному закону с параметром λ_i, после чего с равными вероятностями мутирует в один из штаммов. Раз в секунду номер штамма этого вируса записывается отдельной строкой в лог-файл. Найдите марковскую цепь с дискретным временем, описывающую последнюю строку лога.

4. (2) Решите задачу про преподавателей с очередью, если очередь длины 1. (+1 балл) длины k

5. (2) Пусть имеется 5 программистов, которые пытаются независимо друг от друга решить сложную задачу до того, как их всех уволят, а время решения задачи распределено по показательному закону с параметром λ_i у каждого. Есть заказчик, терпение которого распределено по показательному закону с параметром ν, и фирма, терпение которой (пока есть заказчик) распределено по показательному закону с параметром μ, без заказчика ее терпение равно нулю, а увольняет она сразу и всех. Найдите вероятность того, что а) задача будет решена, б) задача будет решена первым программистом.

6. (3) В бюро приходят клиенты по закону Пуассона с параметром λ, немедленно попадая к одному из клерков (будем считать что их бесконечно много). На получение нужной справки затрачи- вается распреденное по экспоненциальному закону время (в среднем τ). С вероятностью q справка делается неправильно, в этом случае клиент не уходит, а идет к директору, и, при необходимости подождав в очереди, общается с директором распреденное по экспоненциальному закону время (в среднем θ). Покажите, что при $q\theta < \lambda$ у марковской цепи все вершины которой пронумерованы (r, s) (r - число занятых клерков, s - число клиентов в очереди) стационарное распределение можно представитьв виде $\frac{e^{-\alpha}\alpha^r}{r!}(1-\alpha)\alpha^s$.