# Conclusiones y trabajo futuro

Se cumplió con el objetivo de establecer una metodología sistemática para la simulación estocástica de propiedades de redes de fracturas discretas en medios porosos. En particular, considerando las dependencias complejas de los objetos que representan a las fracturas discretas mediante la modelación de su función de distribución de probabilidad conjunta usando cópulas.

El enfoque de la cópula de Bernstein permite investigar estadísticamente y de manera muy flexible la estructura de dependencia complejas entre las variables, a diferencia de las restricciones de los modelos de regresión lineal. Este enfoque es dirigido por las características de los datos. En particular, la condición periódica presentada extiende el enfoque para incluir variables tales como la dirección de la fractura.

El uso de las cópulas, para modelar la estructura de dependencia, permite evitar el sesgo producido al transformar las variables aleatorias, involucradas en simulaciones, por ejemplo la transformación logarítmica de las longitudes de fractura.

Los enfoques no paramétricos utilizados para las distribuciones marginales y la cópula permitieron una muy buena coincidencia de la simulación de la red de fracturas discretas, incluso en presencia de asimetría en la distribución. Esto permite estimar, a través del análisis de simulaciones, propiedades de percolación más realistas de los medios porosos fracturados. Otra ventaja con este enfoque no paramétrico es la facilidad de uso, ya que no se requiere una prueba de bondad de ajuste.

Basándonos en la teoría de cópulas, la geometría estocástica, y la modelación geológica-petrofísica, se establecieron flujos de trabajo para la metodología propuesta con la finalidad de analizar, modelar y simular redes de fracturas discretas. Se mostraron flujos de trabajo generales y particulares. Como resultado de esta meotdología, a partir de un conjunto de datos de fracturas, se pueden obtener simulaciones de redes de fracturas discretas tomando en cuenta su estructura de dependencia. De manera más general, esta metodología se puede aplicar a los modelos booleanos.

Como otro resultado de esta tesis se creó un software en R que permite implementar la metodología propuesta paso a paso. Cabe mencionar que como parte del flujo de trabajo se ha incluido el análisis exploratorio de los datos, que a veces suele omitirse. En esta etapa es donde se entiende el comportamiento de los datos, que, a su vez, es un descriptor del fenómeno subyacente. Dicha comprensión permite validar las simulaciones.

Utilizar una función (modelo de dependencia), la cópula, para estudiar la dependencia de las variables aleatorias tiene más potencial que usar un estadígrafo. Como ejemplo, se mostró un caso combinando dos comportamientos diferentes. Aunque esto se puede hacer por separado, la cópula permite modelar ambos casos al mismo tiempo. Para la relación longitud-apertura, se utilizó una dependencia cuasi-monótona pero a la vez compleja. De esta manera se mostró la versatilidad de la cópula en la modelación de dependencias comúnmente utilizadas, así como en dependencias no frecuentemente mostradas en la literatura.

La metodología desarrollada para casos bivariados se pudo utilizar en un caso tri-variado de variables aleatorias con el enfoque de Vine copulas. En particular cuando hay independencia condicional, en el cual se mostró que la longitud es el enlace entre orientación y apertura. La independencia observada se mostró entre la orientación y la apertura.

A continuación y como **trabajo futuro** se mencionan algunas áreas del conocimiento en que los resultados se pueden generalizar, aplicar o reducir el tiempo de cómputo; que fueron detectadas a lo largo del desarrollo de la tesis.

Se pueden explorar otras definiciones de la función de distribución empírica univariada. Éstas tendrían la ventaja de que las simulaciones no estarían restringidas a valores entre el mínimo y el máximo de los datos.

Una de las desventajas de las cópulas de Bernstein es el tiempo de cómputo, el cual también se podría reducir, si se trabaja en un algoritmo que calcule la inversa de manera que considere las propiedades (por ejemplo, la monotonía) de las funciones de distribución univariada. Tal algoritmo podría ser el de bisección de manera que tome en cuenta el cómputo en paralelo.

Se ha demostrado que las cópulas de Bernstein no reproducen dependencia en las colas, por lo que agregar tal comportamiento de los datos, enriquecería la metodología y los resultados de esta tesis.

Las cópulas de Bernstein reproducen muy bien los datos, lo que puede llevar a un sobreajuste, es decir, las simulaciones solamente reproducen los datos utilizados y no pueden reproducir otros datos agregados en campañas de adquisición posteriores. Una mejora al método propuesto es reducir dicho sobreajuste.

El uso de cópulas paramétricas como las arquimedianas agrega valor a esta tesis, ya que ese tipo de cópulas tienen estructuras de dependencia monótonas o una combinación de este tipo de dependencias, lo cual hace más fácil la interpretación del fenómeno en estudio.

El caso trivariado directo, sin cópulas de Vine, también se podría implementar. Para obtener dichas simulaciones, se requiere obtener la inversa de una función de tres variables, lo cual podría tomar demasiado tiempo computacional. En el dado caso de existir datos orientados, también se tendría que implementar el cálculo del histograma multivariado.