

Automatique

TP5 Commande numérique : Réponse pile & Commande optimale

Sommaire

Introduction	1
I. Etude théorique	1
I.1 Régulation numérique avec correcteur proportionnel	1
I.1.1 Fonction de Transfert Numérique	1
I.1.2 Fonction de Transfert Boucle Fermé	1
I.1.3 Erreur Statique	1
I.1.4 Stabilité Limite	2
I.2 Régulation numérique par commande à réponse pile	2
I.3 Contrôle par approche LQ	2
II. Etude Expérimentale	3
II.1 Identification du procédé	3
II.2 Auto-oscillations	3
II.3 Mise en œuvre d'une commande à réponse pile	3
II.4 Mise en œuvre d'une commande LQ à horizon infini	4
Conclusion	4
Annexes	5
Annexe 1 : Schéma bloc de la commande LQ	5
Annexe 2 : Diagramme de Nyquist de la fonction Sensibilité S	5
Annexe 3 : Diagramme de Bode de la fonction Sensibilité S	6
Annexe 4 : Réponse du moteur à un échelon unitaire	6
Annexe 5 : Réponse du système identifié à un échelon unitaire	7
Annexe 6 : Courbe $K = f(T_e, \tau, Km)$ en stabilité limite	7
Annexe 7 : Réponse du système en limite de stabilité	8
Annexe 8 : Réponse du système pour $K=1$	8
Annexe 9 : Erreur statique pour $K=1$	8
Annexe 10 : Réponse en simulation avec la réponse Pile	9
Annexe 11 : Réponse en simulation avec la commande LQ	10
Annexe 12 : Réponse du système réel avec la commande LQ	11

Introduction

Le contrôle et la régulation de la vitesse de rotation d'un moteur électrique peuvent s'effectuer de différentes façons.

Dans cette manipulation, nous allons dans un premier temps étudier les performances d'une régulation numérique. Nous mettrons également en œuvre une commande à réponse pile, puis une commande LQ. Par l'intermédiaire du logiciel Simulink, nous effectuerons différentes simulations, avant d'appliquer les commandes sur le système réel.

I. Etude théorique

I.1 Régulation numérique avec correcteur proportionnel

La fonction de transfert de premier ordre du moteur est modélisée par l'expression :

$$G_c(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1+\tau*p} \quad [1]$$

I.1.1 Fonction de Transfert Numérique

Afin de calculer la fonction de transfert numérique $G(z)$ avec un convertisseur analogique numérique d'ordre zéro Bo(p) nous avons utilisé l'expression :

$$G(z) = Z[B_o(p) * G(p)] = \frac{z-1}{z} * Z\left[\frac{G_c(p)}{p}\right] \quad [2]$$

$$G(z) = K_m \left[\frac{1-e^{-T/\tau}}{z-e^{-T/\tau}} \right] \quad [3]$$

I.1.2 Fonction de Transfert Boucle Fermé

Afin de calculer la fonction de transfert en boucle fermée, pour un régulateur proportionnel K , nous avons utilisé l'expression injecté $G(z)$ [3] dans l'expression [4] :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \left[\frac{K * G(z)}{1 + K * G(z)} \right] \quad [4]$$

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{K * K_m * (1 - e^{-T/\tau})}{z - e^{-T/\tau} + K * K_m * (1 - e^{-T/\tau})} \quad [5]$$

I.1.3 Erreur Statique

L'erreur statique (Expression 8) pour une entrée échelon est calculée à partir de la différence entre la consigne $y_{c,k}$ et la valeur de la sortie du système y_k après beaucoup d'interactions k ($y_{c,\infty}$ et y_∞ respectivement). La consigne $Y_c(z)$ peut être illustré par la transformée Z (expression 6) où A est l'amplitude. Une manière de trouver cette valeur après diverses interactions est d'appliquer le théorème de la valeur finale dans les fonctions de transfert au domaine de z (expression 7).

$$Y_c(z) = \frac{A * z}{z-1} \quad [6]$$

$$f_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) * F(z) \quad [7]$$

$$e_{ss} = y_{c,\infty} - y_\infty = A - A * \left(\frac{K * K_m}{1 + K * K_m} \right) = A \left(1 - \left(\frac{K * K_m}{1 + K * K_m} \right) \right) \quad [8]$$

I.1.4 Stabilité Limite

La stabilité limite pour une fonction de transfert discrète est donnée quand le module d'un pôle est égal à 1 ($|\lambda| = 1$). D'après l'expression [5], nous pouvons obtenir les pôles en boucle fermée, donnés en [9]. Si on remplace la valeur de $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ on trouve les expressions 10 et 11 respectivement. La première (10) est indépendante de la période d'échantillonnage et la deuxième (11) est dépendante. Nous allons donc considérer l'expression [11] pour la stabilité limite.

$$\lambda - e^{-T/\tau} + K * K_m * (1 - e^{-T_e/\tau}) \quad [9]$$

$$K = -1/K_m \quad [10]$$

$$K = \frac{1 + e^{-T_e/\tau}}{(1 - e^{-T_e/\tau}) * K_m} \quad [11]$$

I.2 Régulation numérique par commande à réponse pile

Pour trouver le correcteur $R(z)$ qui donne la fonction de transfert de l'expression 12, il faut isoler $R(z)$ dans l'Expression 12, cela donne l'expression 13.

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \left[\frac{R(z) * G(z)}{1 + R(z) * G(z)} \right] = \frac{K_{damp}}{z^{d+1} - (1 - K_{damp})} \quad [12]$$

$$R(z) = \frac{K_{damp} * (z - e^{-T_e/\tau})}{K_m * (1 - e^{-T_e/\tau}) * (z^{d+1} - 1)} \quad [13]$$

I.3 Contrôle par approche LQ

Pour faire la commande Linéaire Quadratique (LQ) il faut trouver une représentation d'état. Le système étant d'ordre 1 les matrices A, B, C et D seront de dimension 1. Une solution simple est de considérer le vecteur d'état égal à la sortie, cela donne la représentation d'état ci-dessous. La représentation de la commande LQ se trouve en Annexe 1. Le gain K de la commande LQ qui minimise un critère quadratique est donné par l'expression 15. Les paramètres de choix sont alors les poids des matrices symétriques pour l'état $Q = Q^T$, la commande $R = R^T$. Le réglage du correcteur s'effectuera donc à partir de ces deux matrices.

$$\hat{x} = -\frac{1}{\tau} * x + \frac{K_m}{\tau} * u$$

$$y = x \quad [14]$$

$$K = R^{-1} * B^T * P \quad [15]$$

$$A^T * P + P * A - P * B * R^{-1} * B^T * P + Q = 0 \quad [16]$$

Si $Q = \rho$ et $R = 1$ nous pouvons résoudre les expressions 15 et 16 et trouver l'expression de K (17). Le réglage du gain K s'effectue en fonction de ρ . Si $\rho \gg 1$ on se concentre sur la minimisation de l'énergie du système, si $\rho \ll 1$ on minimise la commande.

$$K = \frac{\sqrt{1 + K_m^2 * \rho} - 1}{K_m} = \text{lqr}(A, B, Q, R) \quad [17]$$

Pour vérifier les marges de robustesse nous avons réalisé le diagramme de Nyquist de la fonction de sensibilité $S(s)$ (Expression 18). Avec la visualisation du diagramme de Nyquist et de Bode (Annexe 2 et 3 respectivement), nous pouvons conclure que $|S(s)| \leq 1$. Ainsi, la marge de module du système est supérieure ou égale à 1, la marge de gain est infinie, la marge de phase supérieure ou égale à 60° .

$$S(s) = (I + K * (s * I_n - A)^{-1} * B)^{-1} \quad [18]$$

II. Etude Expérimentale

II.1 Identification du procédé

Afin d'identifier le système nous avons injecté un échelon d'amplitude 1 au bloc CNA sur Simulink. Le système étant de premier ordre, l'identification est assez simple car il y a seulement deux variables à identifier τ et K_m . La sortie en fonction du temps est donnée par l'expression [20] :

$$Y(p) = \frac{K_m * A}{1 + \tau * p} \quad [19]$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = A * K_m (1 - e^{-t/\tau}) \quad [20]$$

$$K_m = y(\infty)/A = 1,450 \quad [21]$$

$$\tau = -\frac{t}{\ln(1 - \frac{y}{K_m * A})} = 0,7065 \quad [22]$$

La réponse du système à un échelon (Annexe 4), nous a permis d'identifier les paramètres du moteur K_m et τ .

Pour identifier la valeur de K_m nous avons injecté l'amplitude de la sortie en régime permanent (Annexe 4) dans l'expression 21. Pour identifier τ nous avons mesuré l'amplitude pour trois instants différents (0,5s, 1 s et 2 s) (Annexe 4). Nous avons ensuite remplacé les valeurs de A , K_m et t dans l'expression 22. La moyenne de ces trois τ correspond au τ qui sera utilisé pour modéliser le système. La réponse du système identifié est illustrée dans l'Annexe 5.

II.2 Auto-oscillations

Pour rappel, la valeur de K en fonction de T_e , τ et K_m est donné par l'équation [11] :

$$K = \frac{1 + e^{-T_e/\tau}}{(1 - e^{-T_e/\tau}) * K_m}$$

L'annexe 6 représente la courbe $K=f(T_e, \tau, K_m)$ pour les valeurs de τ et K_m identifiées pour le moteur. Cette courbe nous permet d'extraire la valeur $K_{lim} = 2,84$ pour une période d'échantillonnage $T=0,35s$. Nous pouvons valider la valeur de K_{lim} car avec cette valeur, le système est oscillant (Annexe 7).

Pour un gain $K = 1$, qui est inférieur à K_{lim} , le système est stable (Annexe 8) et nous pouvons comparer les erreurs statiques théoriques, simulées et réelles. L'erreur statique théorique à partir de l'expression [8] est de 41%, ce qui correspond à l'erreur statique simulée. En revanche, pour la réponse réelle l'erreur est de 52% (Annexe 9).

II.3 Mise en œuvre d'une commande à réponse pile

Pour rappel, le correcteur de la commande à réponse pile est donné par l'équation [13] :

$$R(z) = \frac{K_{damp} * (z - e^{-T_e/\tau})}{K_m * (1 - e^{-T_e/\tau}) * (z^{d+1} - 1)}$$

A partir des réponses obtenues en simulation (Annexe 10), nous avons extrait les résultats donnés dans la figure 1.

K_{damp}	0,5	0,8	1
Temps de réponse	2,8s	1,8s	1,4s

Figure 1 - Temps de réponse du système simulé en fonction de K_{damp}

La commande à réponse pile permet une grande précision, car l'erreur statique obtenue est proche de zéro quel que soit la valeur de K_{damp} .

Cependant, nous pouvons clairement observer que le système est plus rapide lorsque K_{damp} augmente.

Le paramètre $K_{damp} = 1$ semble donc être le meilleur.

La mise en œuvre de cette commande sur le système réel a rendu le système instable. Une explication possible est que l'identification du système (K_m et τ) n'a pas été suffisamment précise, et a directement impacté le calcul du correcteur $R(z)$ (voir eq.[13]).

II.4 Mise en œuvre d'une commande LQ à horizon infini

Pour rappel, le gain de retour K de la commande LQ est donné par l'équation [17] :

$$K = \frac{\sqrt{1 + K_m^2 \rho} - 1}{K_m}$$

A partir des réponses obtenues en simulation (Annexe 11), nous avons extrait les résultats donnés dans la figure 2.

ρ	0,5	2	5
Temps de réponse	2,35s	1s	0,5s
Erreur statique	1%	37%	57%

Figure 2 - Performances du système simulé en fonction de ρ

Nous pouvons observer que l'augmentation de ρ permet de diminuer le temps de réponse, mais augmente de manière très importante l'erreur statique. L'ajout d'un correcteur intégrateur pourrait être une solution intéressante pour améliorer cette réponse (en réduisant l'erreur statique).

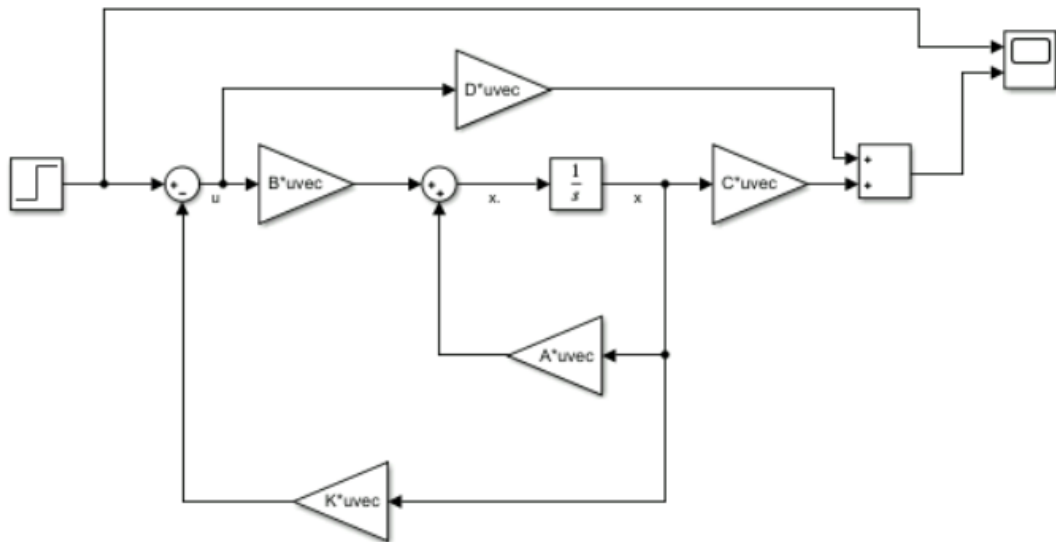
La mise en œuvre du correcteur LQ sur le système réel a entraîné une réponse instable pour $\rho=5$, et une réponse oscillante pour $\rho=2$. De la même manière, cette différence entre la simulation et le système réel peut provenir d'une identification (K_m et τ) imprécise. Les réponses du système réel avec la commande LQ sont disponibles en annexe 12.

Conclusion

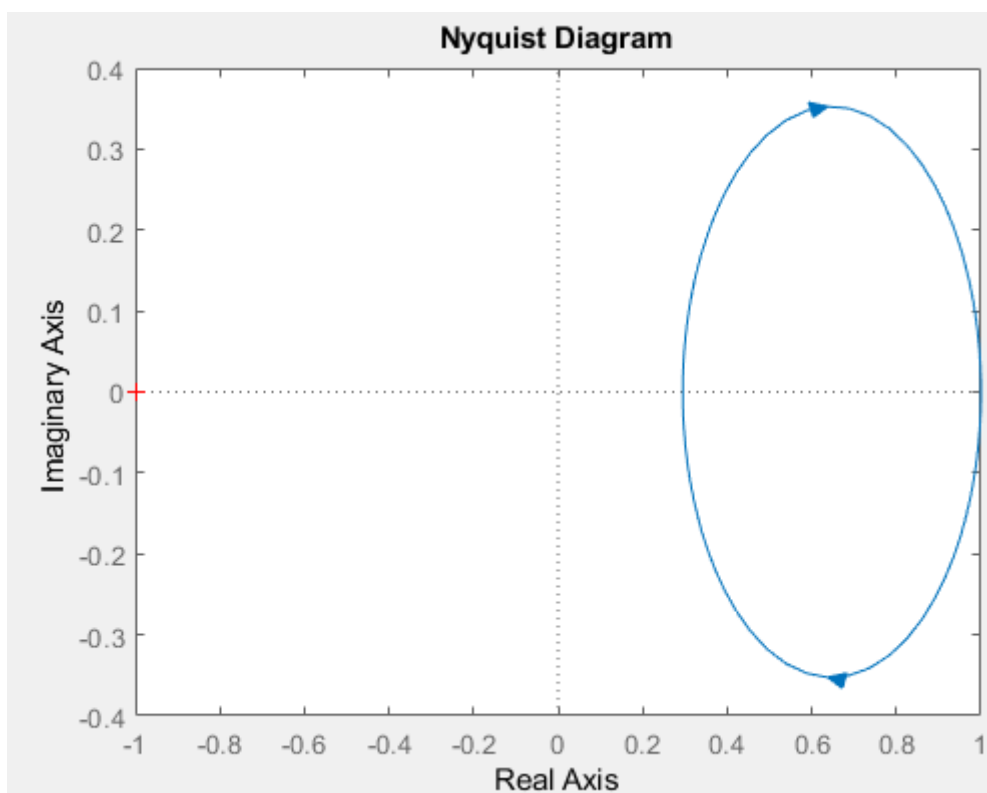
Cette manipulation a mis en valeur l'importance de l'identification du système, qui conditionne le bon fonctionnement du correcteur simulé après implantation en réel. Les commandes « Réponse pile » et « LQ » sont très intéressantes pour améliorer la performance du système (notamment sa rapidité), mais laissent apparaître des limites (de stabilité ou de précision) qu'il serait intéressant de compenser avec d'autres types de commandes.

Annexes

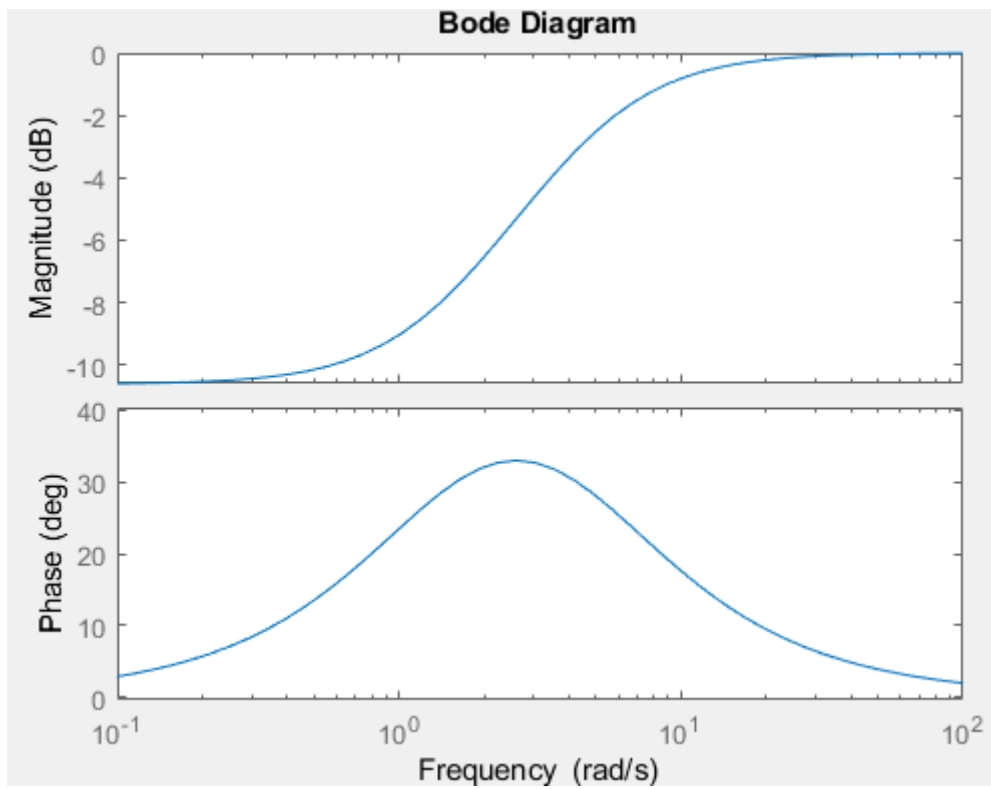
Annexe 1 : Schéma bloc de la commande LQ



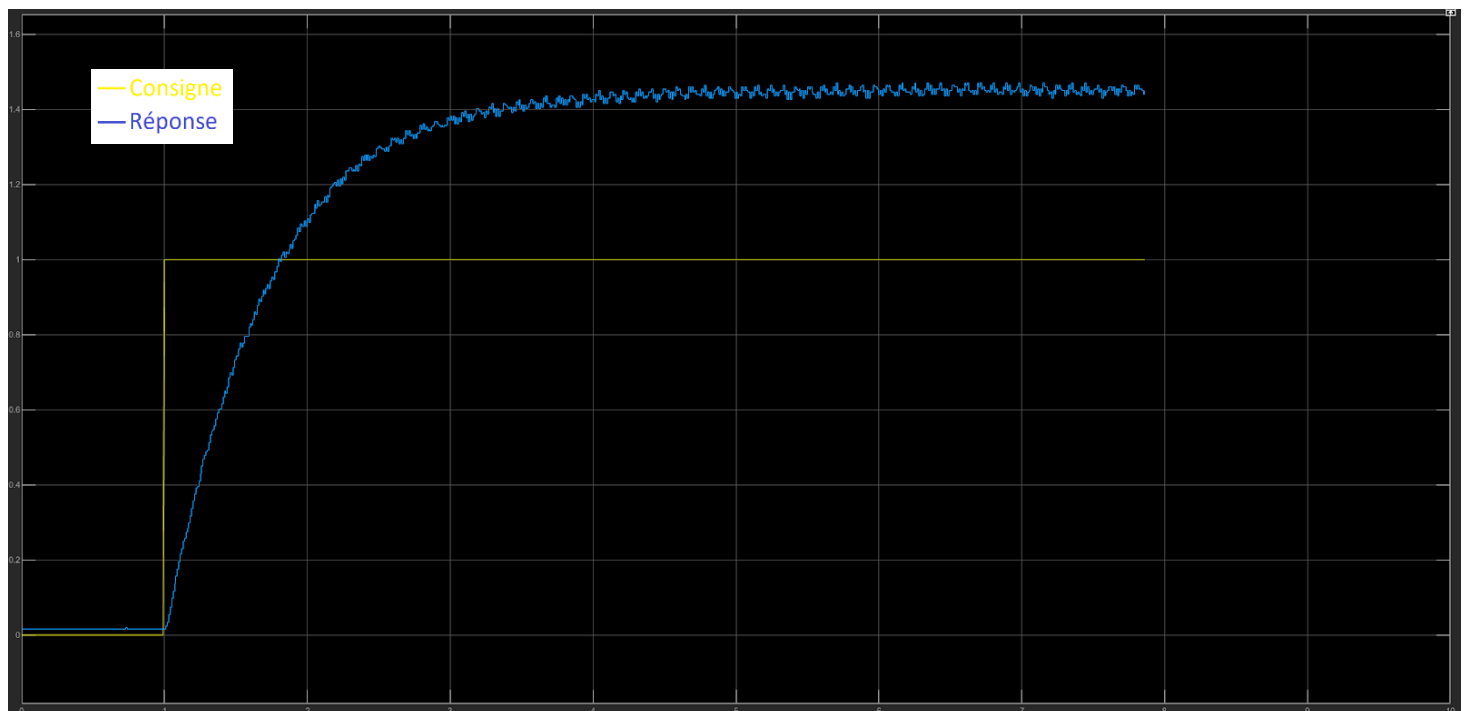
Annexe 2 : Diagramme de Nyquist de la fonction Sensibilité S



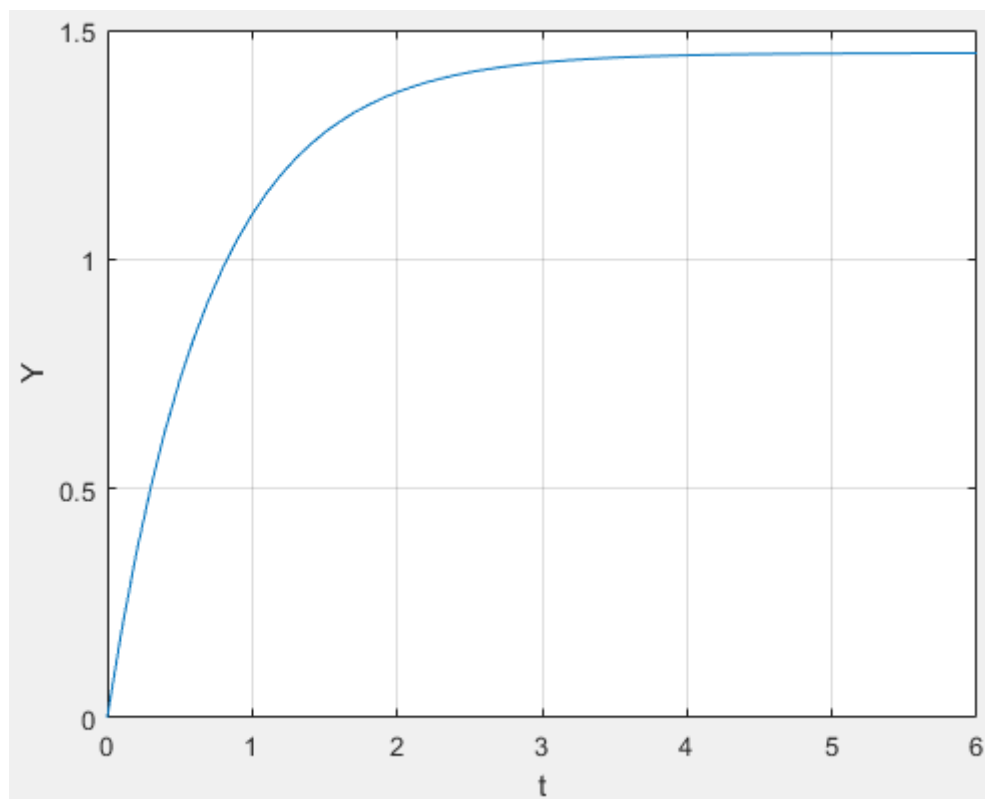
Annexe 3 : Diagramme de Bode de la fonction Sensibilité S



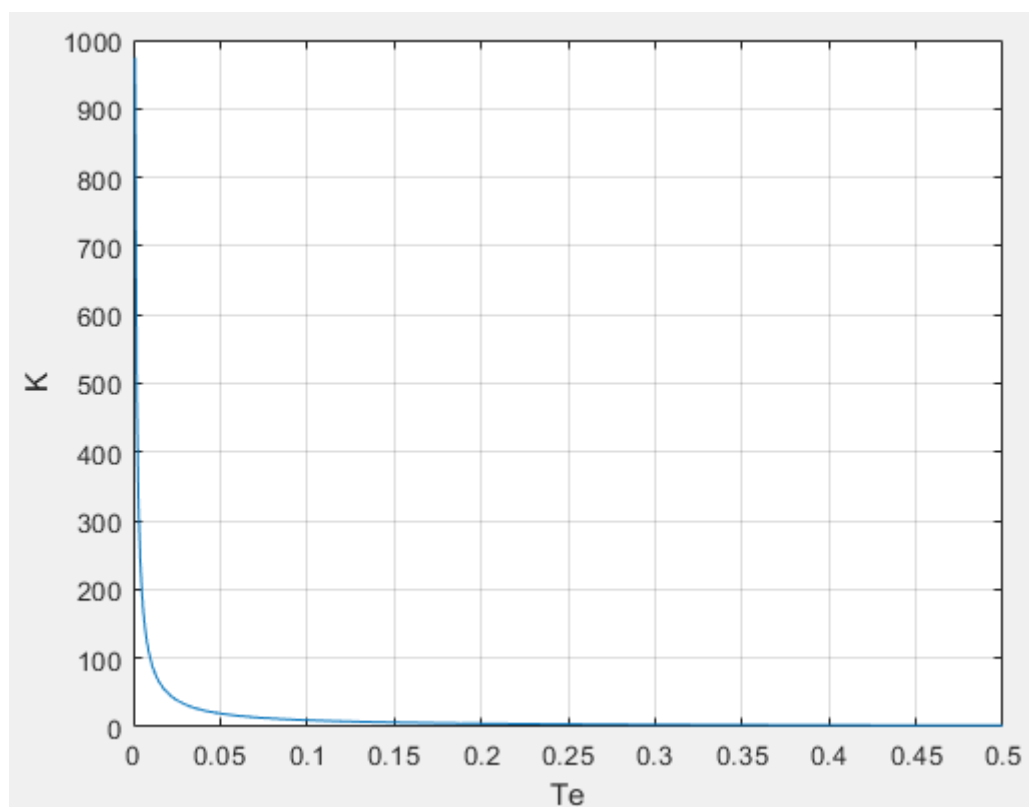
Annexe 4 : Réponse du moteur à un échelon unitaire



Annexe 5 : Réponse du système identifié à un échelon unitaire

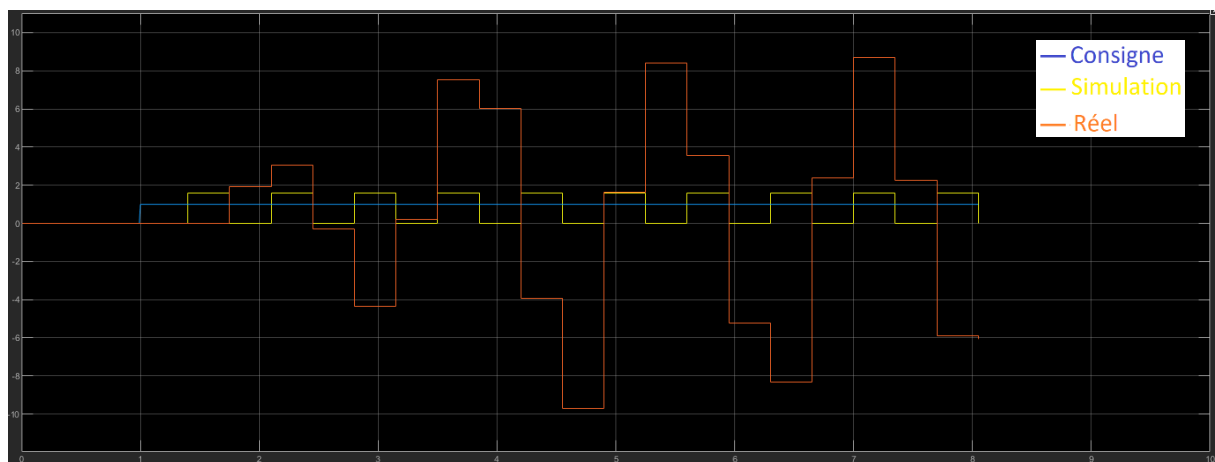


Annexe 6 : Courbe $K = f(T_e, \tau, K_m)$ en stabilité limite

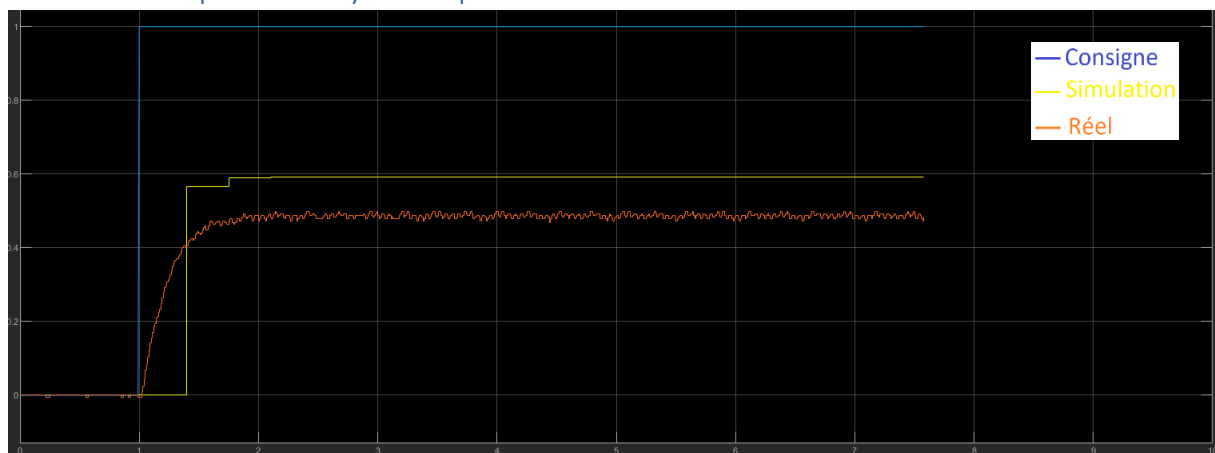


Courbe $K=f(T_e, \tau, K_m)$ pour les valeurs de τ et K_m identifiées pour le moteur

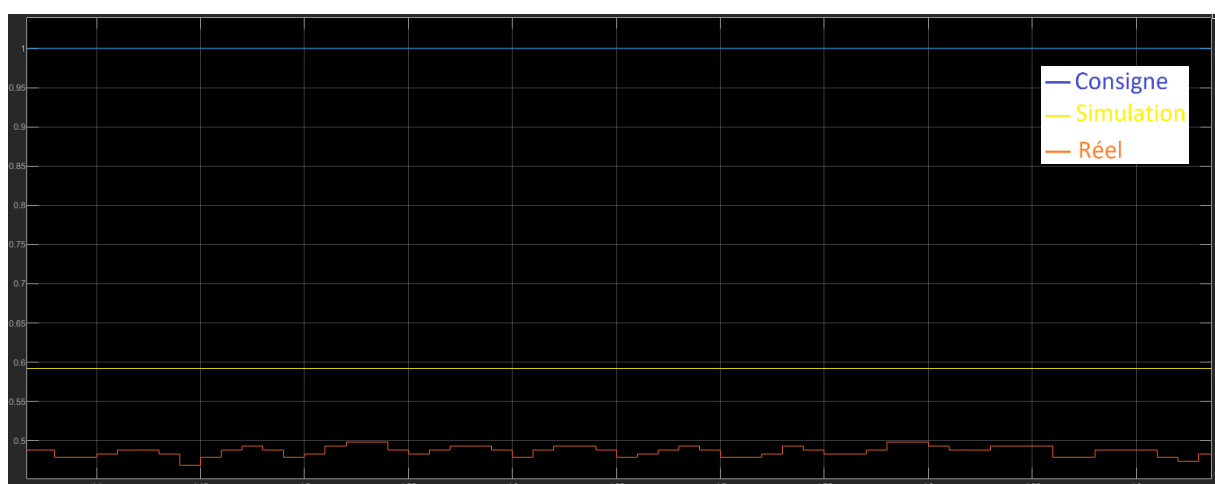
Annexe 7 : Réponse du système en limite de stabilité



Annexe 8 : Réponse du système pour K=1

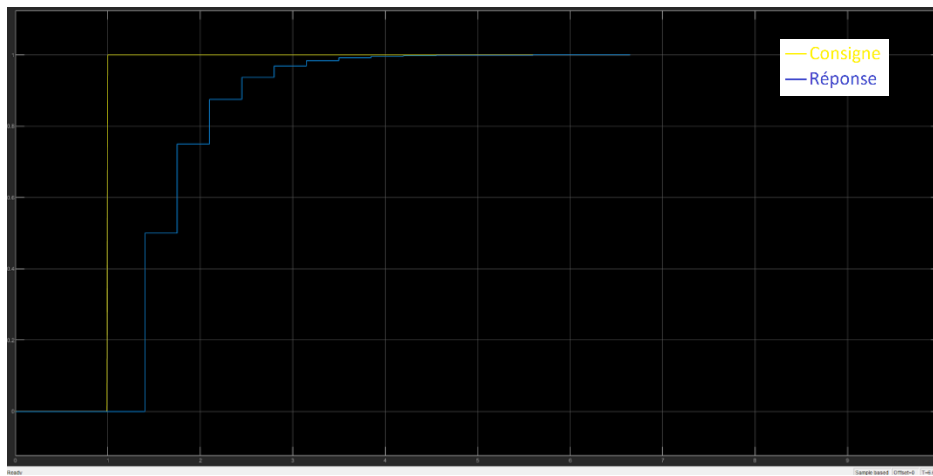


Annexe 9 : Erreur statique pour K=1



Annexe 10 : Réponse en simulation avec la réponse Pile

- $k_{\text{damp}}=0,5$



- $k_{\text{damp}}=0,8$

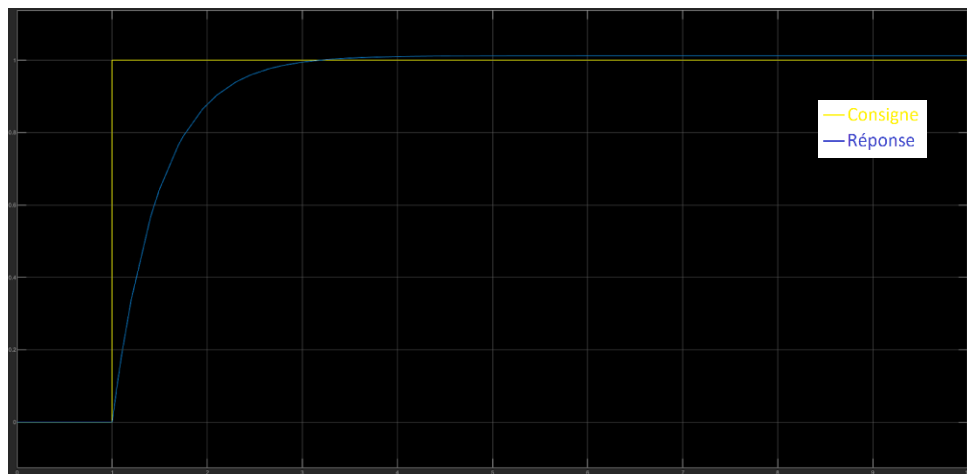


- $k_{\text{damp}}=1$

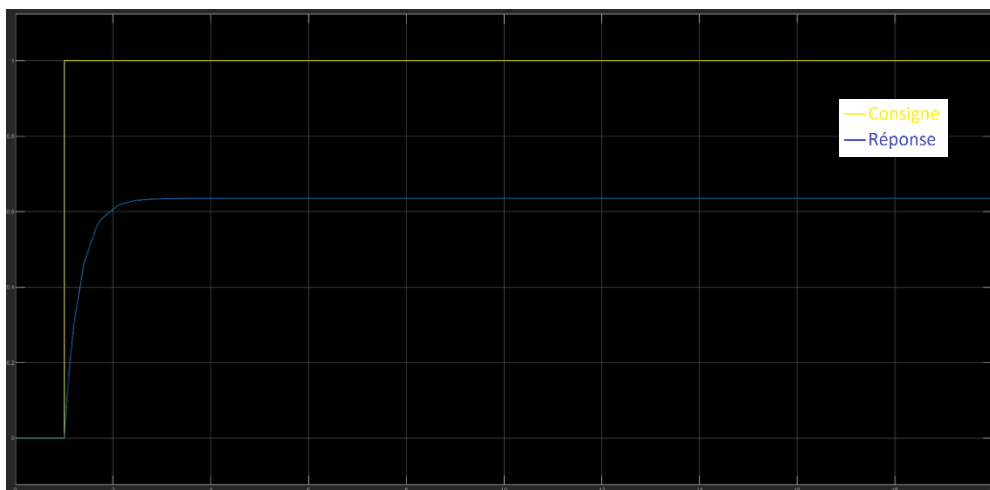


Annexe 11 : Réponse en simulation avec la commande LQ

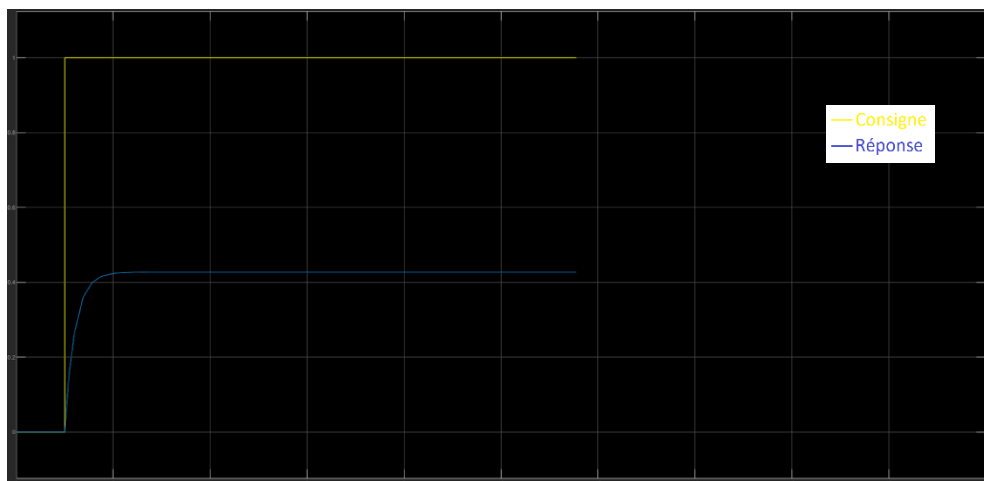
- $\rho = 0,5$



- $\rho = 2$

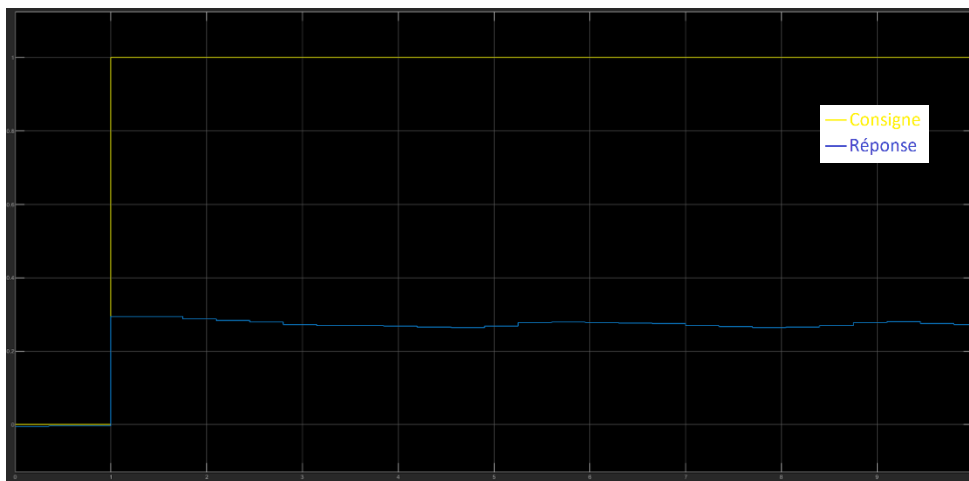


- $\rho = 5$

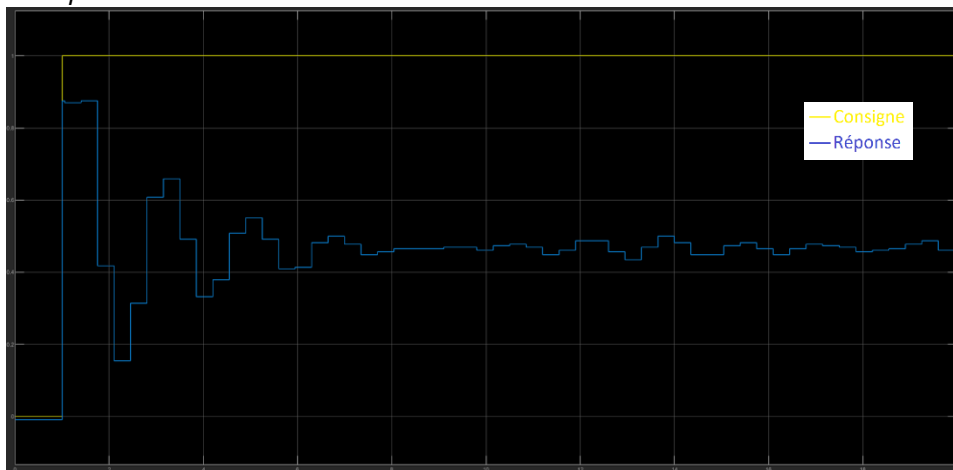


Annexe 12 : Réponse du système réel avec la commande LQ

- $\rho = 0,5$



- $\rho = 2$



- $\rho = 5$

