

Automatique

TP6 Commande optimale : le pendule inversé

Sommaire

Introduction	1
I. Commande par retour d'état (LQ)	1
I.1 Définition du modèle d'état du système	1
I.2 Obtention des matrices Q et R les plus pertinentes	1
II. Commande par retour d'état avec action intégrale	2
III. Commande par placement de pôles	2
IV. Placement de pôles avec action intégrale	3
Conclusion	4
Annexes	5
Annexe 1 : Schéma Simulink de la commande par retour d'état.....	5
Annexe 2 : Récapitulatif des réponses obtenues en fonction des valeurs de Q et R.....	5
Annexe 3 : Réponse du système simulé (angle Ψ) avec commande par retour d'état (Q et R optimaux)	6
Annexe 4 : Évolution de l'angle Ψ du robot avec la commande par retour d'état (réel)	6
Annexe 5 : Dérive du robot selon l'axe y (commande par retour d'état)	7
Annexe 6 : Réponses obtenues selon différentes valeurs de K_i (Retour d'état avec action intégrale)	7
Annexe 7 : Réponse du système simulé (angle Ψ) avec le deuxième pôle en -1	8
Annexe 8 : Réponse du système simulé (angle Ψ) avec le deuxième pôle en -2	8
Annexe 9 : Réponse selon l'axe y pour le meilleur placement de pôle (réel)	8
Annexe 10 : Réponse du système réel (angle Ψ) pour le meilleur placement de pôle.....	9
Annexe 11 : Réponse du système avec les deux derniers pôles à -0.76-0.5i et -0.76+0.5i (pôles non modifiés).....	9
Annexe 12 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -2 et -2.1.....	10
Annexe 13 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -3 et -3.1.....	11
Annexe 14 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -1.3 et -1.2.....	12
Annexe 15 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -0.5 et -0.6.....	13
Annexe 16 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -0.3 et -0.4.....	14
Annexe 17 : Réponse en réel du robot (axe Y) pour le meilleur placement de pôle avec action intégrale	15
Annexe 18 : Réponse en réel du robot (angle ψ) pour le meilleur placement de pôle avec action intégrale	15

Introduction

La manipulation « Commande optimale : le pendule inverse » consiste à mettre en place la commande de régulation du robot Lego EV3. Ce robot se comporte comme un pendule inversé, qui est donc naturellement instable. Afin de maintenir le robot sur ses deux roues en position verticale, nous utiliserons plusieurs types de commandes (commande LQ, commande par action intégrale, commande par placement de pôles, et enfin une commande par placement de pôles avec action intégrale). Ces commandes seront dans un premier temps vérifiées par simulation, avant d'être implémentées sur le robot.

I. Commande par retour d'état (LQ)

La première commande mise en place est de type retour d'état (figure 1). Le principe de commande LQ (correspondant aux matrices Q et R) est utilisé afin de déterminer le gain de retour d'état K en minimisant un critère quadratique.

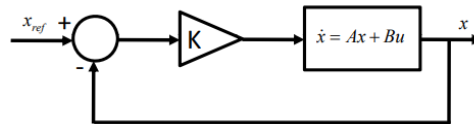


Figure 1 – Schéma bloc de la commande par retour d'état

I.1 Définition du modèle d'état du système

Soit θ l'angle des roues (en degrés), Ψ l'angle d'inclinaison du robot par rapport à l'axe z (en degrés), v_L et v_R les vitesses de rotation des roues gauche et droite respectivement.

Le vecteur d'état x est : $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}$ Le vecteur de sortie y est : $y = [v_L \quad v_R]$

I.2 Obtention des matrices Q et R les plus pertinentes

La matrice Q est de taille $n \times n$ ($n = 4$: ordre du système), donc de taille 4×4 .

La matrice R est de taille 2×2 si l'on considère deux sorties (c'est le cas dans notre simulation). Si l'on considère que le couple des moteurs est le même pour chaque roue (on travaille en ligne droite), le système ne possède qu'une seule entrée. Ainsi la matrice R est de taille 1×1 .

A l'aide de la commande `lqr` de Matlab, nous pouvons obtenir le gain K à partir des matrices Q et R. La commande par retour d'état sur Simulink est disponible en Annexe 1. Un tableau illustrant les caractéristiques de la réponse en fonction de différentes valeurs de Q et R est donné en Annexe 2.

Nous conserverons les valeurs de Q et R illustrées en Figure 2 :

```
% Servo Gain Calculation using Optimal Regulator
QQ = [ 1 0 0 0;
       0 1000 0 0;
       0 0 1 0;
       0 0 0 1];
RR = [5 0;
      0 5];

KK = lqr(A1,B1,QQ,RR);
```

Figure 2 – Matrices Q et R utilisées pour le calcul du gain de retour d'état K

Le coefficient encadré en rouge sur la figure 2 a une grande importance pour atténuer les oscillations du système. Les coefficients en bleus sont plus importants pour améliorer la rapidité (temps de réponse). Ces valeurs (figure 2) semblent être les plus intéressantes en termes de stabilité, de dépassement et de temps de réponse. La réponse du système avec ces valeurs de Q et R est illustrée en Annexe 3.

Avec cette commande le robot (en réel) est très stable. Les oscillations sont assez légères conformément à la simulation. Après une perturbation (d'intensité modérée), le robot parvient à retrouver une bonne stabilité. La réponse en réel est illustrée en annexe 4. Nous pouvons ainsi valider cette commande.

II. Commande par retour d'état avec action intégrale

La commande précédente permet de stabiliser le robot en position verticale, mais entraîne une dérive de ce dernier selon l'axe y (Annexe 5). Afin de corriger cette dérive, nous ajoutons une action intégrale sur l'angle θ :

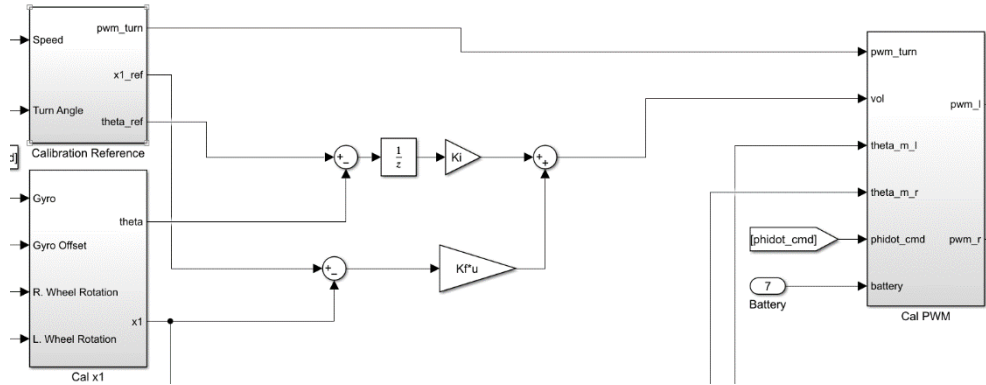


Figure 3 – Commande par retour d'état avec action intégrale

Les matrices du système augmenté sont :

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_{aug} & 0 \end{bmatrix} \quad B_{aug} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_{aug} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le 1^{er} coefficient de C_{aug} correspond à θ , l'angle que nous voulons intégrer. Les simulations obtenues avec des valeurs de K_i différentes sont disponibles en annexe 6.

Nous conserverons la valeur $K_i = -0.7071$, qui semble optimale pour diminuer les oscillations et supprimer la dérive du robot selon l'axe y. Sur le robot (en réel), cette commande permet en effet de supprimer la dérive, et donc de maintenir le robot dans une zone (d'environ 15cm). Cependant, cette action intégrale rend le système plus oscillant. Les perturbations provoquent des oscillations plus importantes.

III. Commande par placement de pôles

Jusqu'ici, le réglage du gain K était indépendant des valeurs propres du système. Afin de mieux comprendre la dynamique du système et de pouvoir la modifier, nous allons analyser les valeurs propres de la matrice dynamique en boucle fermée, qui sont calculées à partir de l'Expression [1]. Pour trouver les valeurs propres de cette matrice, il faut utiliser la commande « eig(A_{bf}) » sur MATLAB.

$$A_{bf} = A - BK \quad [1]$$

Les valeurs propres calculées par cette fonction sont : [-197.58 -0.53 -10.09 -4.77].

Nous pouvons remarquer qu'il y a quatre pôles négatifs, le système est donc stable comme vu dans la partie précédente (Annexe 3). Afin d'améliorer la réponse du système nous pouvons utiliser la méthode de placement de pôle. Nous devons placer les pôles manuellement à l'aide de la fonction « place(A , B, pôles) ». Comme le pôle dominant est le pôle le plus lent (plus proche de l'axe imaginaire), nous allons le modifier (le deuxième qui vaut -0,53). Afin d'obtenir une réponse plus rapide, son module sera augmenté. Après plusieurs essais, la meilleure réponse est obtenue avec ce pôle placé en -1 (Annexe 7). Avec des valeurs plus grandes (par exemple -2), le système commence à être plus oscillatoire pour l'angle Ψ (Annexe 8). Ces résultats sont bien illustrés dans le Tableau 1.

Tableau 1 - Placement de pôles et résultats obtenus

Pôles	K	Résultats	Annexe
[-197.58 -0.53 -10.09 -4.77]	-0.3162 -32.0810 - 1.2156 -3.0408	Sans oscillations en Ψ	3
[-197.58 -1 -10.09 -4.77]	-0.0313 -14.2276 - 0.6122 -1.6076	Sans oscillations et plus rapide en Ψ	7
[-197.58 -2 -10.09 -4.77]	-0.0627 -16.1919 - 0.6786 -1.7652	Avec oscillations et plus rapide en Ψ	8
[-197.58 -3 -10.09 -4.77]	-0.0940 -18.1562 - 0.7449 -1.9229	Avec oscillations et plus rapide en Ψ	

Ainsi, le meilleur placement de pôle trouvé est : [-197.58 -1 -10.09 -4.77]. Nous avons observé que le système réel a plus de perturbations, ainsi qu'une erreur stationnaire pour la position Y (Annexe 9) et l'angle Ψ (Annexe 10), comparé au cas de la simulation.

IV. Placement de pôles avec action intégrale

De manière similaire au placement de pôle précédent, nous avons réalisé un placement de pôle avec action intégrale. Nous utilisons maintenant les matrices A_{aug} et B_{aug} qui sont les matrices du système augmenté. De plus, la fonction place retourne la matrice K avec une colonne supplémentaire. Cette dernière colonne correspond au gain K_i , les autres colonnes correspondent au gain K_f .

A partir de l'Expression [1] nous avons calculé les valeurs propres de la matrice et nous avons trouvé [-257.82 -13.08 -4.05 -0.76-0.5i -0.76+0.5i]. Il est possible de voir que toutes les valeurs propres sont négatives donc le système est stable et il y a deux pôles complexes conjugués dominants. Afin d'obtenir une réponse plus amortie, nous avons modifié ces deux pôles et nous avons placé deux pôles sur l'axe réel. Après divers essais nous avons obtenu le Tableau 2.

Tableau 2 - Placement de pôles avec action intégrale et résultats obtenus

Pôles	Ki	Résultats	Annexe
$[-257.82 -13.08 -4.05 -0.76-0.5i -0.76+0.5i]$	-0.7071	Oscillations en Y et Ψ	11
$[-257.82 -13.08 -4.05 -2 -2.1]$	-3.6313	Moins d'oscillations en Y et plus d'oscillations en Ψ	12
$[-257.82 -13.08 -4.05 -3 -3.1]$	-8.0407	Moins d'oscillations en Y et encore plus d'oscillations en Ψ	13
$[-257.82 -13.08 -4.05 -1.3 -1.2]$	-1.3488	Oscillations en Y et Ψ	14
$[-257.82 -13.08 -4.05 -0.5 -0.6]$	-0.2594	Sans oscillations en Y, faibles oscillations en Ψ	15
$[-257.82 -13.08 -4.05 -0.3 -0.4]$	-0.1038	Oscillations en Y et faibles oscillations en Ψ	16

À partir du tableau 2 nous observons que la réponse en Annexe 15 est la meilleure. Nous avons donc implémenté cette commande en réel sur le robot. La réponse en Y (Annexe 17) est plus oscillatoire que dans la simulation, mais elle est assez proche de 100 (l'erreur statique avec l'intégrateur est plus petite que pour le cas sans intégrateur). De plus, la réponse de Ψ (Annexe 18) est plus oscillatoire que dans la simulation. L'intégrateur a augmenté les oscillations de Ψ .

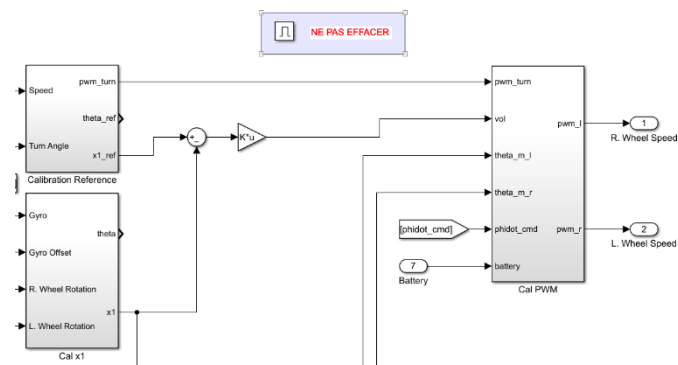
Conclusion

Ce travail pratique a été important pour étudier la technique de commande optimale LQ qui est assez robuste et qui ne demande pas de choisir nous-même des valeurs propres. La réponse du système varie beaucoup selon la valeur des matrices Q et R, donc le choix de ces matrices joue un rôle très important. Toutefois, la simple commande LQ sans action intégrale génère une erreur statique qui augmente avec le temps la position Y du robot. Pour solutionner ce problème, la commande avec l'action intégrale a été réalisée. L'action intégrale a évité la dérive sur l'axe y, mais a augmenté les oscillations de Ψ . Afin d'améliorer la réponse du système nous avons fait une commande par placement de pôles à partir de la dynamique générée par la commande LQ. Cette technique a permis d'obtenir une réponse plus rapide pour le cas sans action intégrale, une réponse avec une erreur statique et des oscillations très faibles en Y, et moins oscillatoire en Ψ par rapport à l'action intégrale calculée par la commande LQ.

La comparaison du système réel avec le système simulé a été assez difficile à réaliser, car il est presque impossible d'effectuer des mesures précises sur le robot en mouvement. Cependant, nous avons pu constater le bon fonctionnement des différentes commandes.

Annexes

Annexe 1 : Schéma Simulink de la commande par retour d'état



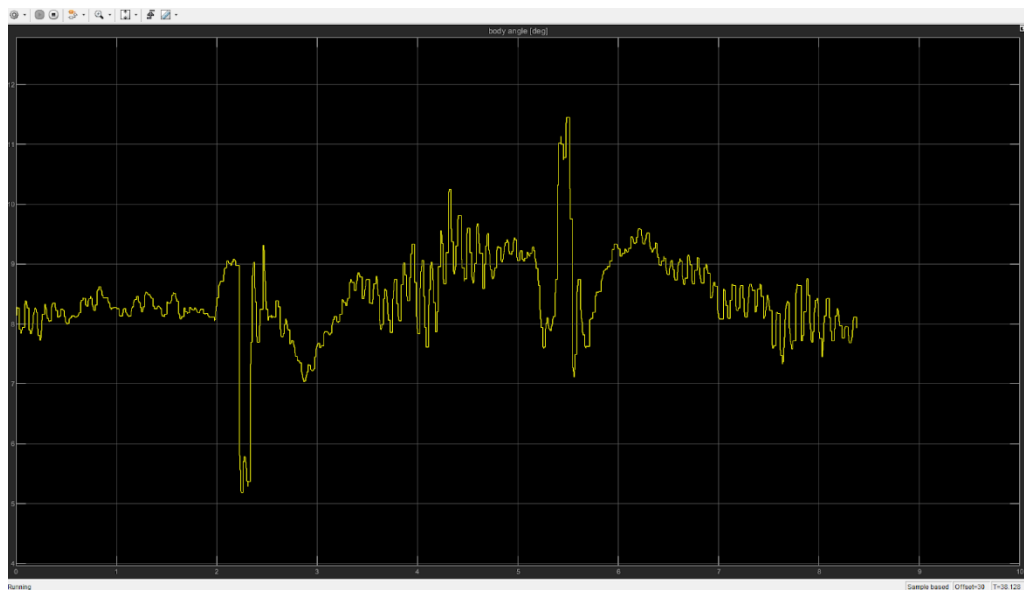
Annexe 2 : Récapitulatif des réponses obtenues en fonction des valeurs de Q et R

Matrices Q et R	Réponse obtenue (angle Ψ)	Caractéristiques de la réponse
$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$ $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$		Système stable mais très oscillant
$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$ $R = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix};$		Système très stable, temps de réponse de 8s
$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$ $R = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix};$		Système très stable, temps de réponse inférieur au précédent ($t_r=6s$)

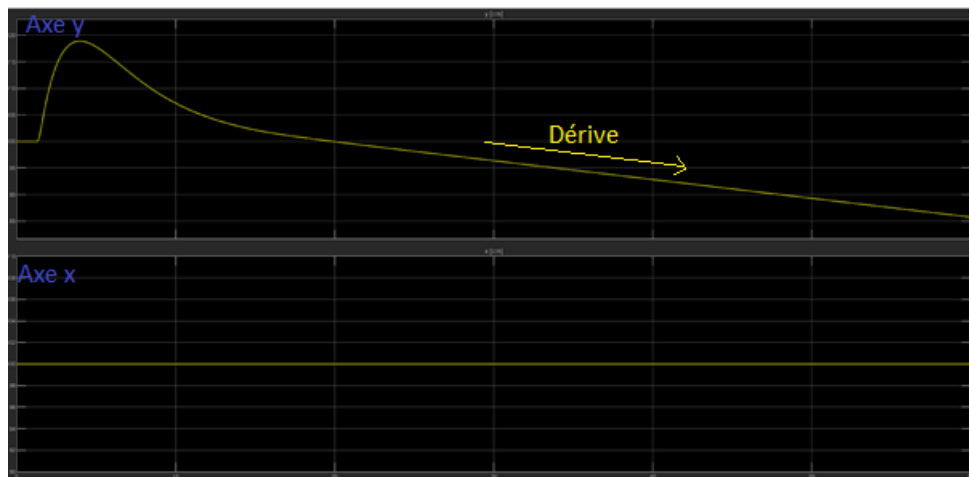
Annexe 3 : Réponse du système simulé (angle Ψ) avec commande par retour d'état (Q et R optimaux)



Annexe 4 : Évolution de l'angle Ψ du robot avec la commande par retour d'état (réel)



Annexe 5 : Dérive du robot selon l'axe y (commande par retour d'état)



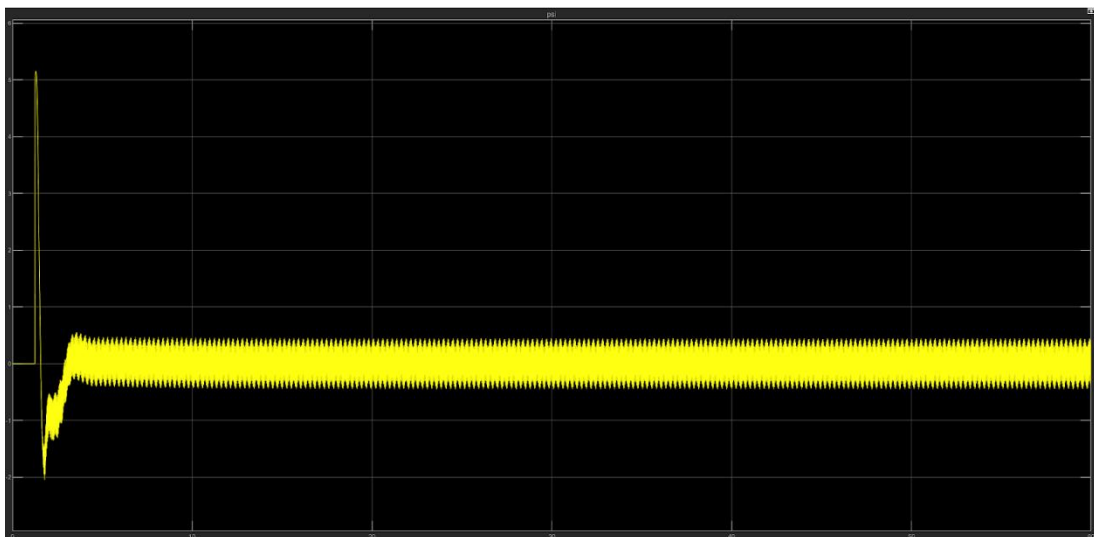
Annexe 6 : Réponses obtenues selon différentes valeurs de K_i (Retour d'état avec action intégrale)

Valeur de K_i	Réponse obtenue (déplacement sur l'axe y)	Caractéristiques de la réponse
$K_i = -5$		Système très oscillant, mais aucune dérive observable
$K_i = -0,1$		Oscillations assez faibles, mais on peut observer une légère dérive
$K_i = -0.7071$		Système très stable, oscillations légères, aucune dérive

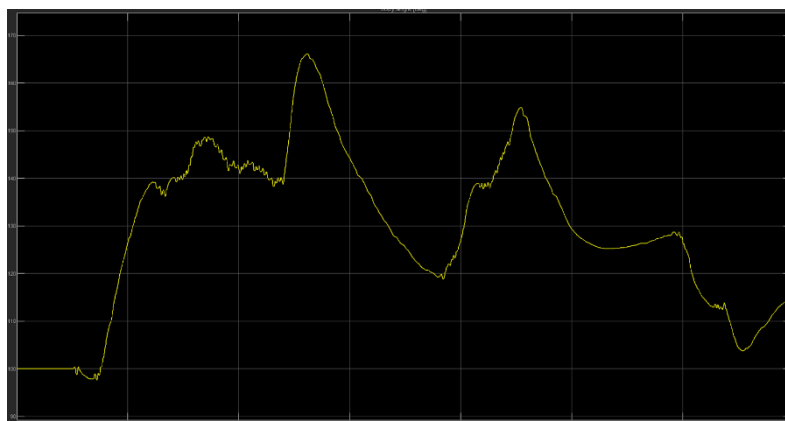
Annexe 7 : Réponse du système simulé (angle Ψ) avec le deuxième pôle en -1



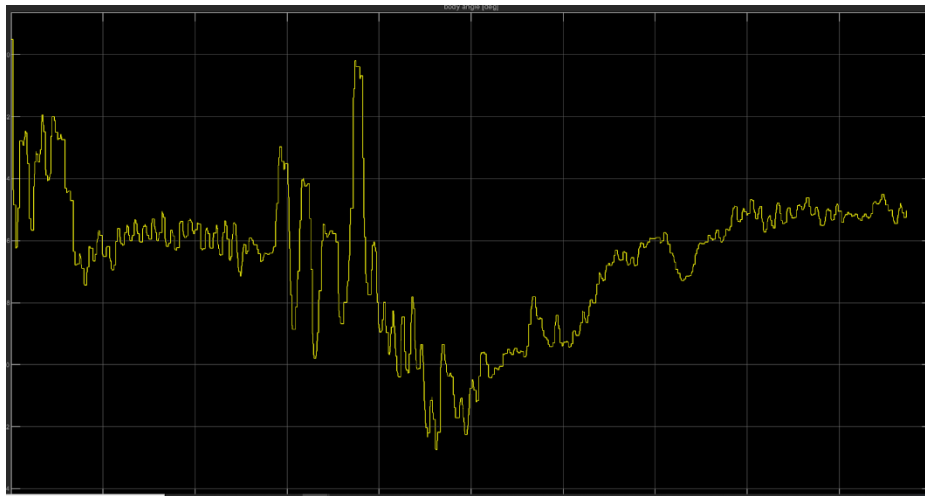
Annexe 8 : Réponse du système simulé (angle Ψ) avec le deuxième pôle en -2



Annexe 9 : Réponse selon l'axe y pour le meilleur placement de pôle (réel)

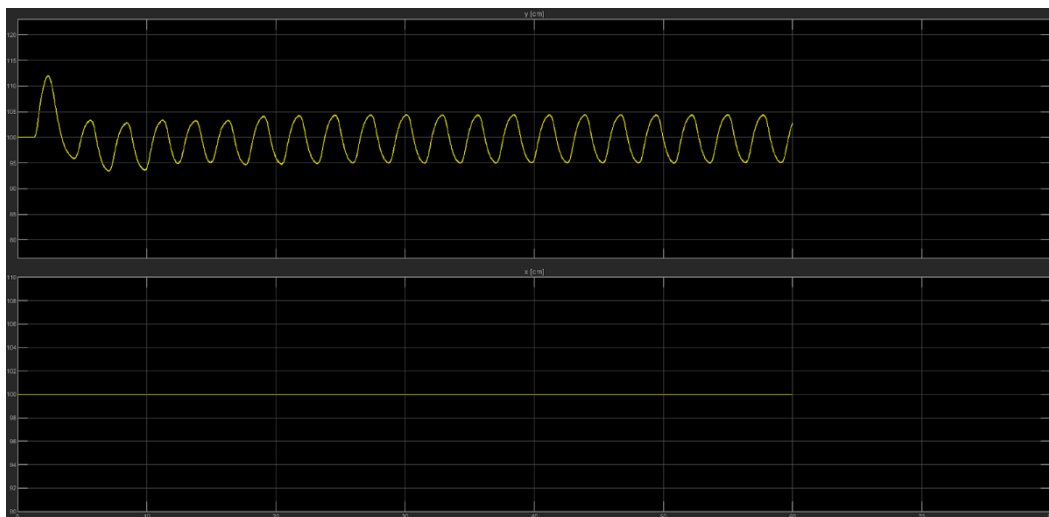


Annexe 10 : Réponse du système réel (angle Ψ) pour le meilleur placement de pôle

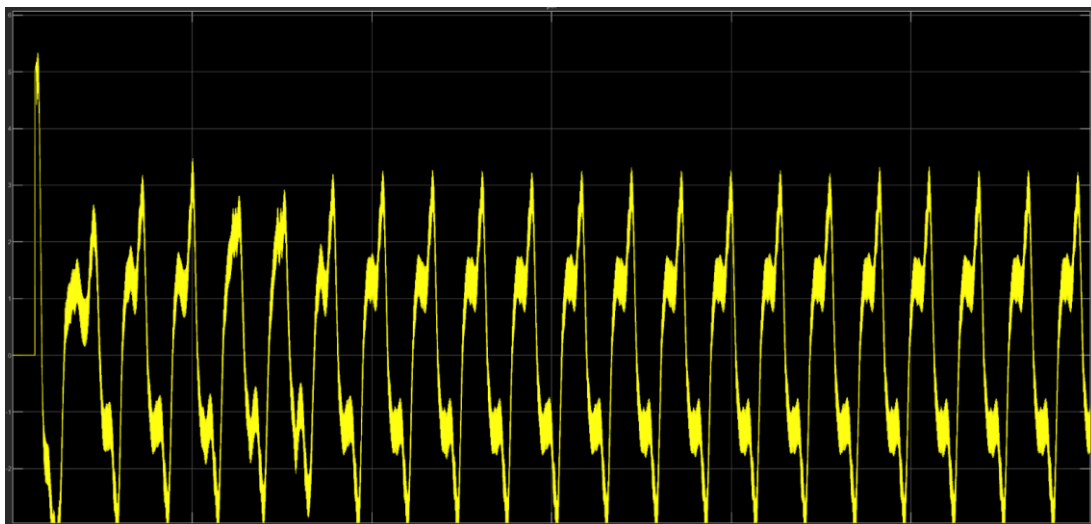


Annexe 11 : Réponse du système avec les deux derniers pôles à $-0.76-0.5i$ et $-0.76+0.5i$ (pôles non modifiés)

X et Y

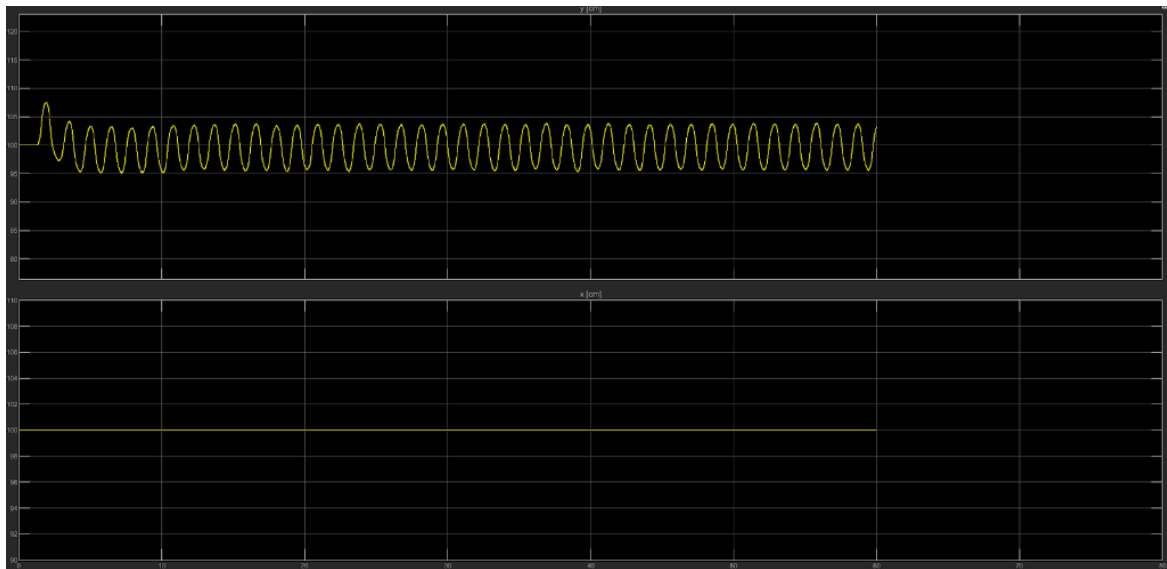


Ψ

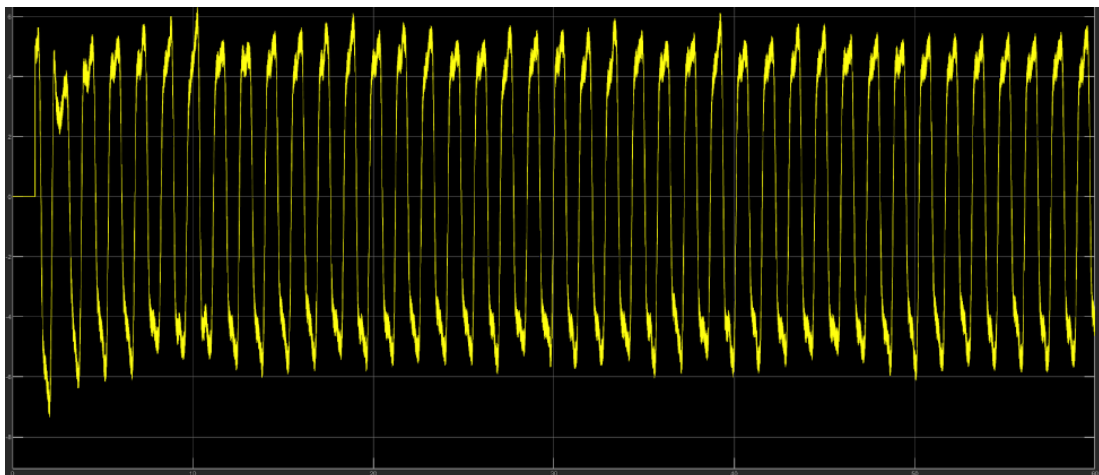


Annexe 12 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -2 et -2.1

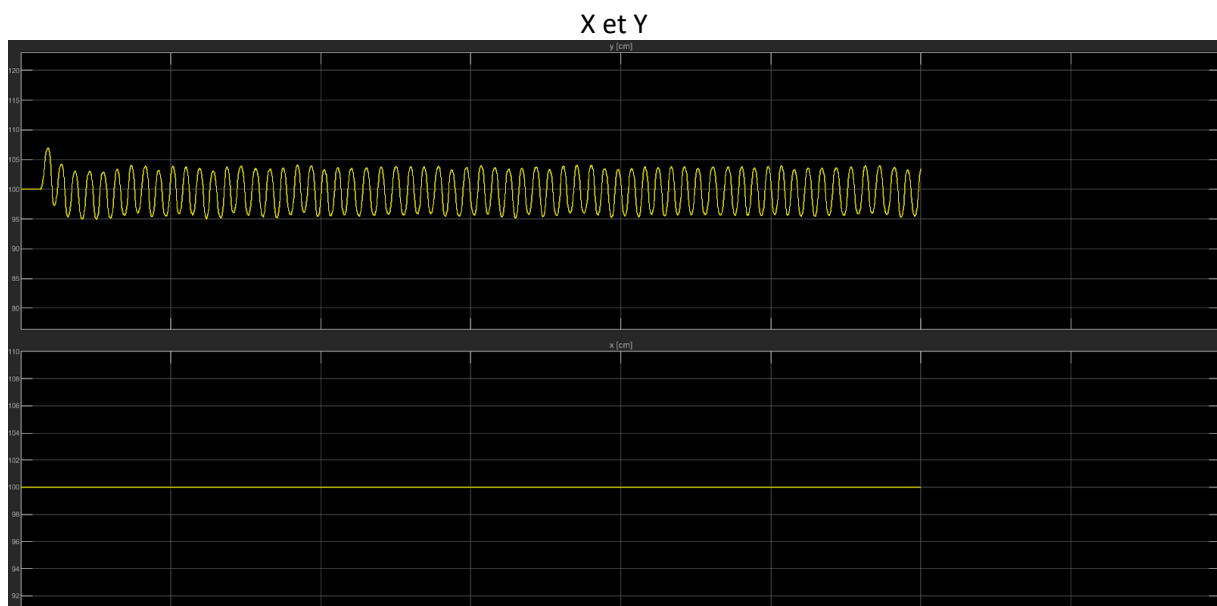
X et Y



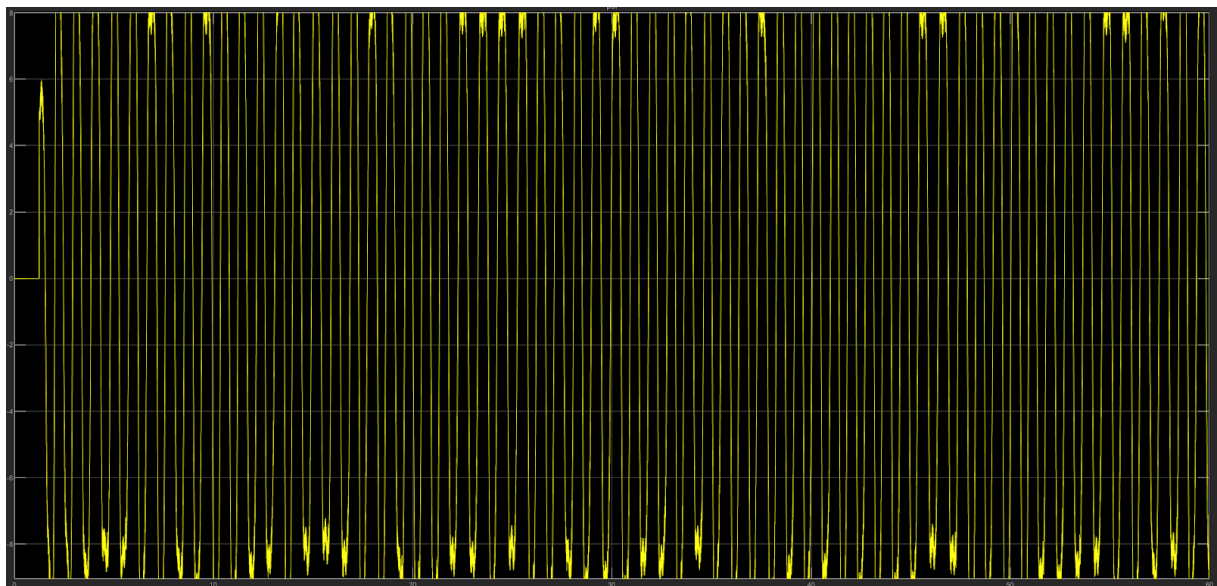
ψ



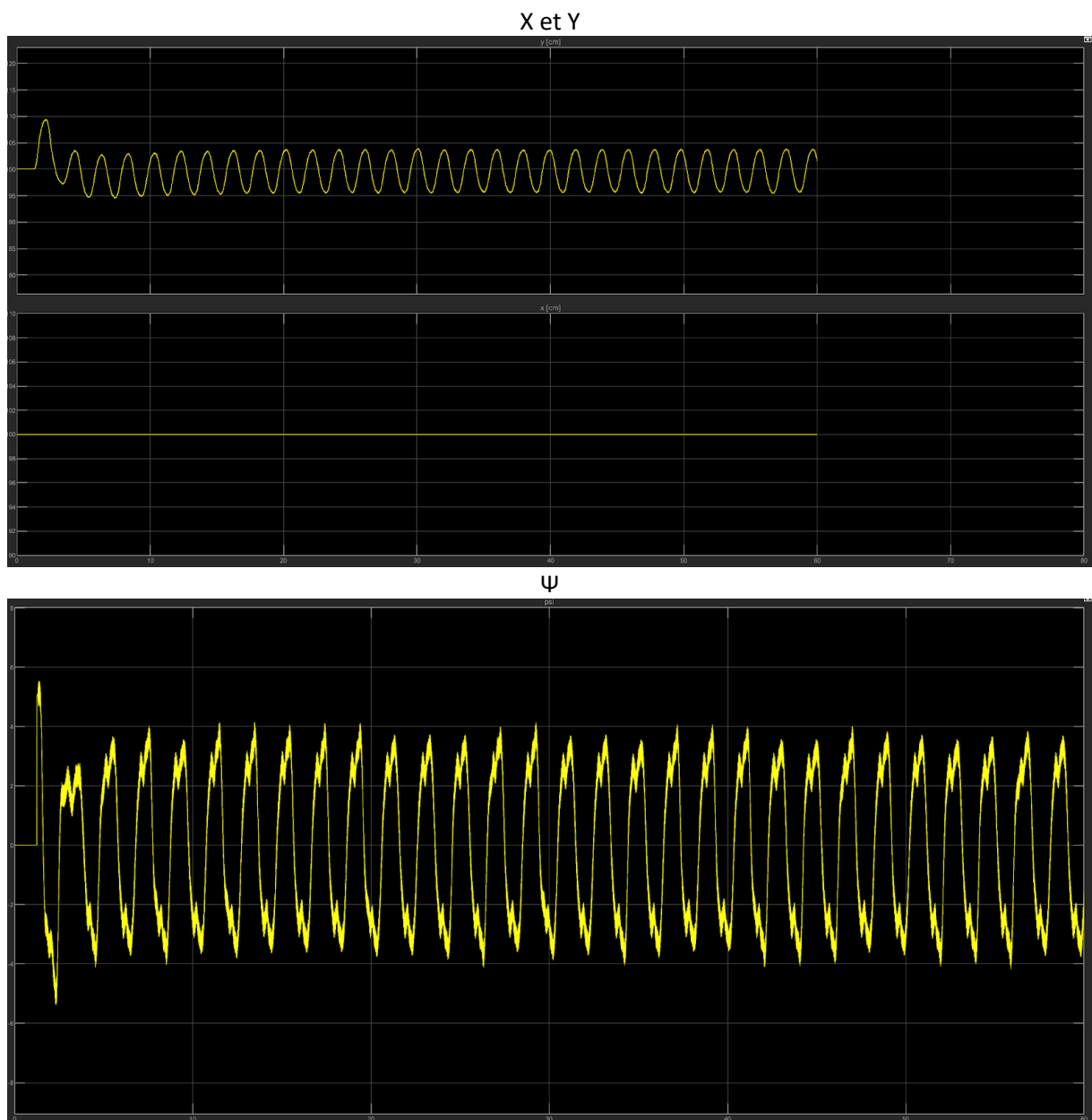
Annexe 13 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -3 et -3.1



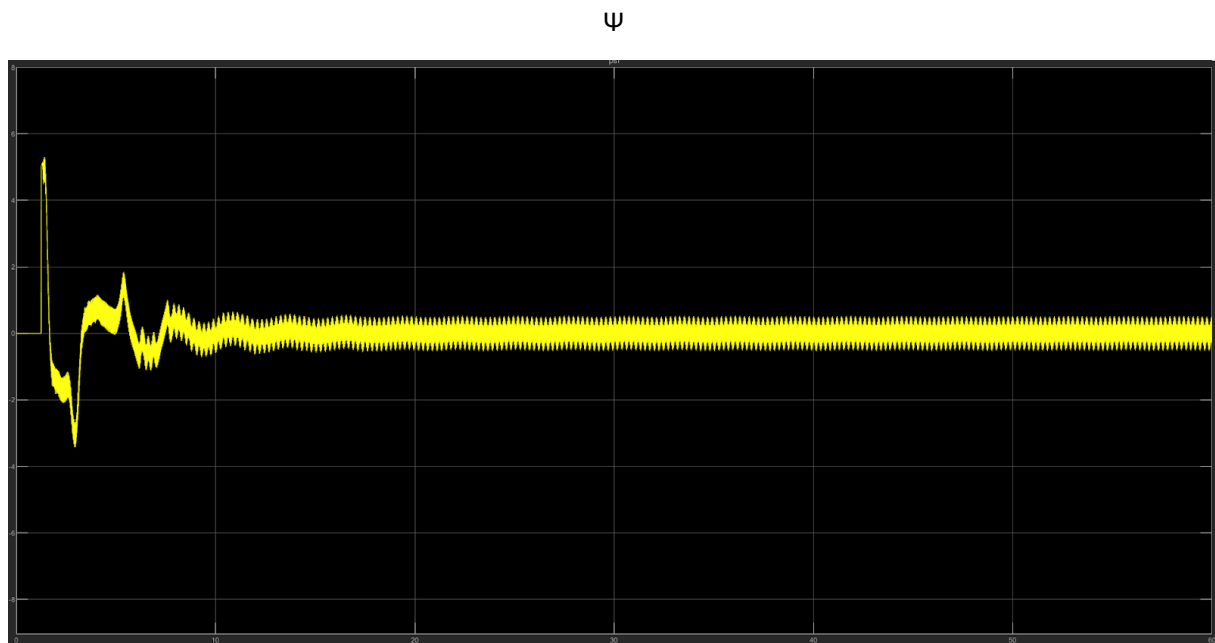
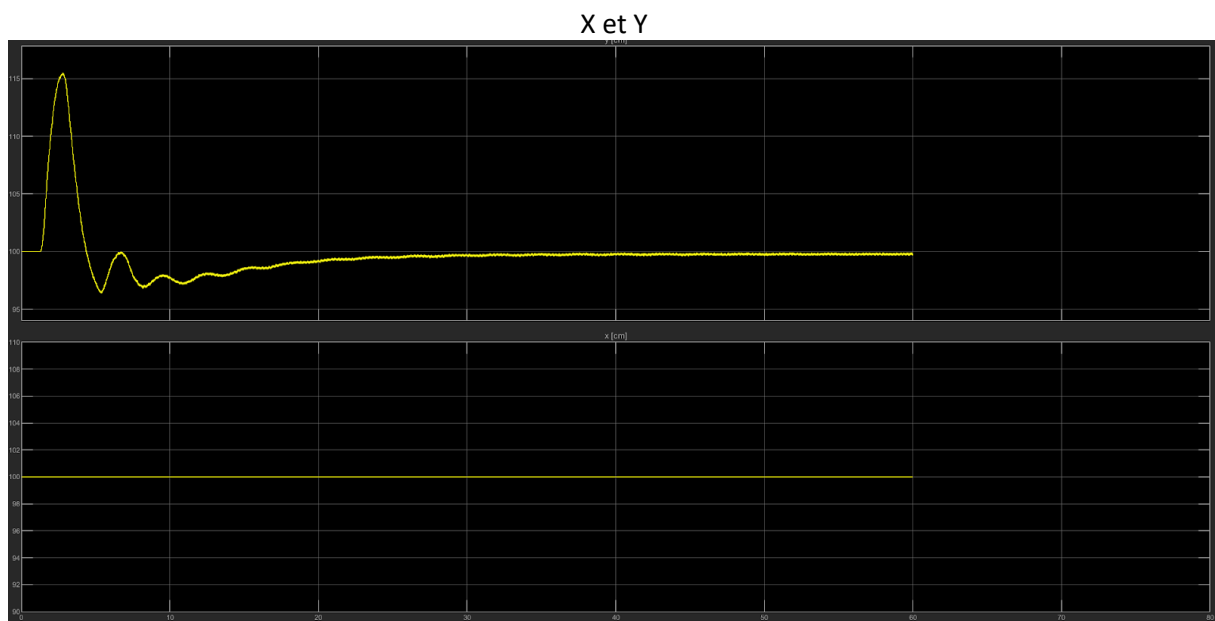
ψ



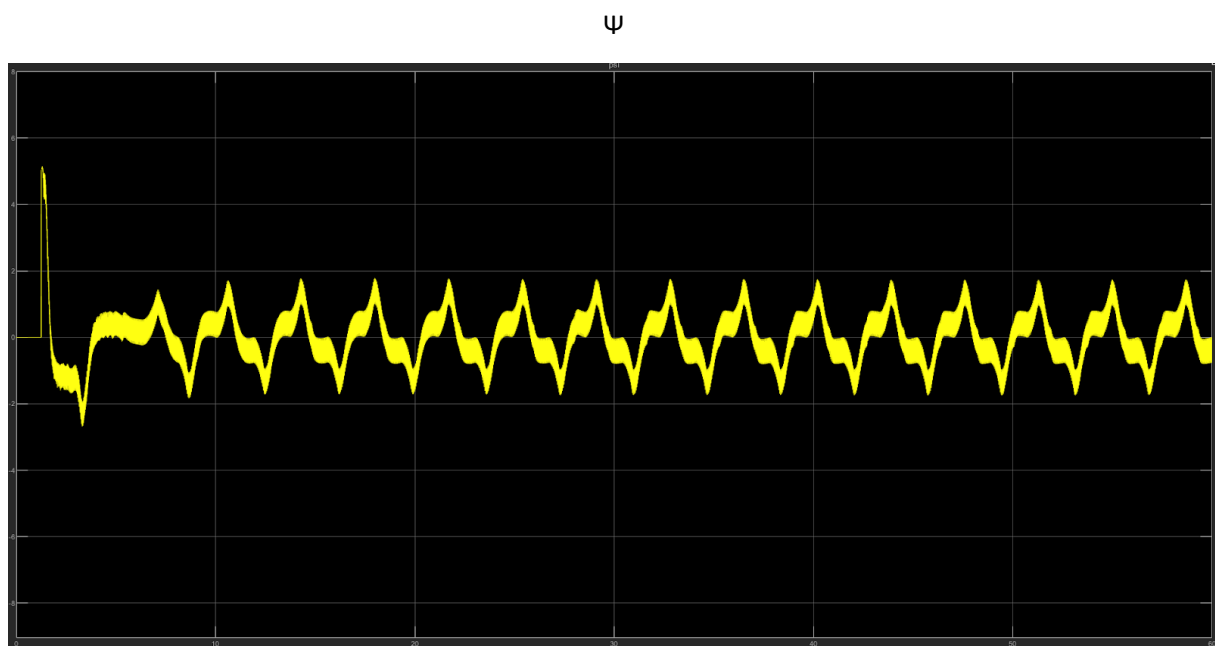
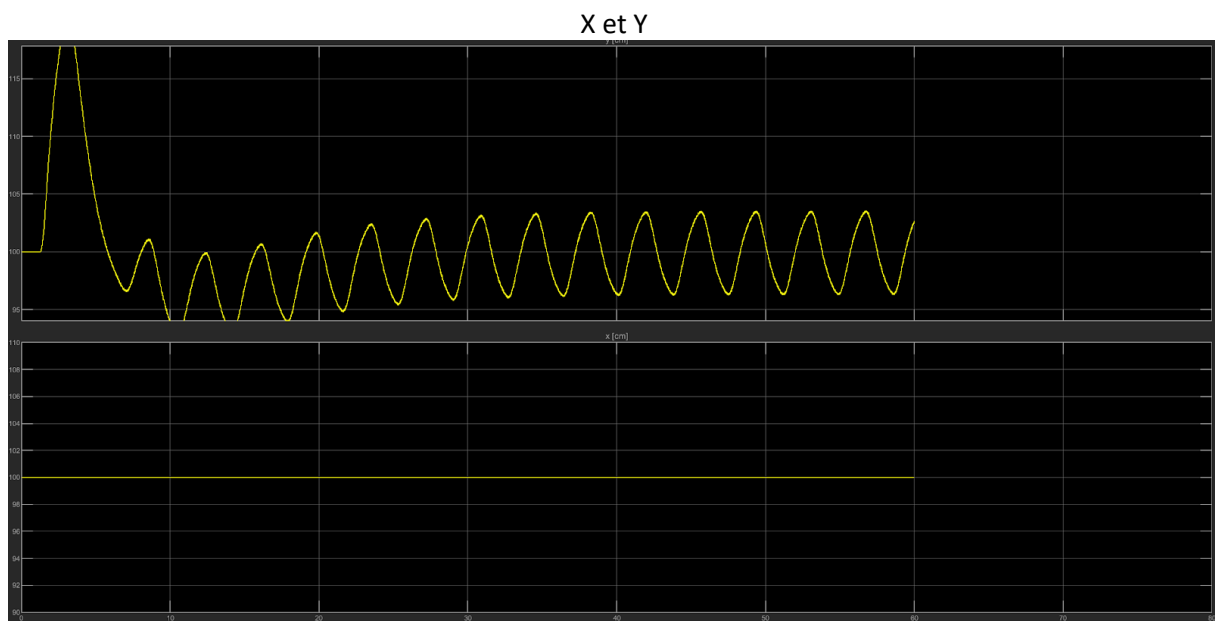
Annexe 14 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -1.3 et -1.2



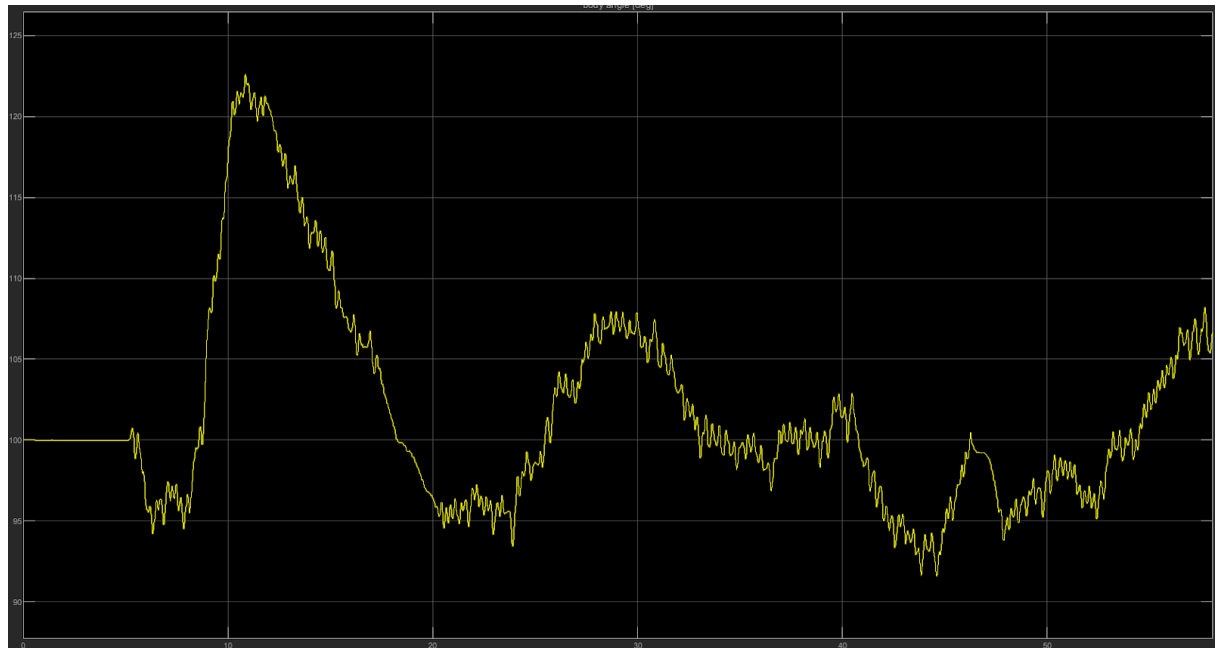
Annexe 15 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -0.5 et -0.6



Annexe 16 : Réponse du système avec les deux derniers pôles en -0.3 et -0.4



Annexe 17 : Réponse en réel du robot (axe Y) pour le meilleur placement de pôle avec action intégrale



Annexe 18 : Réponse en réel du robot (angle ψ) pour le meilleur placement de pôle avec action intégrale

