

TP5

Commande numérique : réponse pile et Commande optimale

Automatique I. Introduction → voir p5.

II Étude théorique

1] Régulation numérique avec correcteur proportionnel.

▷ Foncten de transfert bloqueur d'ordre 0 + moteur :

$$\begin{aligned} G(z) &= Tz [B_0(\lambda) G(\lambda)] = \frac{z-1}{z} Tz \left[\frac{G(\lambda)}{\lambda} \right] \quad \text{or } G(\lambda) = \frac{k_m}{1+\tau\lambda} \\ &= \frac{z-1}{z} Tz \left[k_m \times \frac{\frac{1}{\tau}}{(\frac{1}{\tau} + \lambda)\lambda} \right] \\ &= k_m \times \frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{z-e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad \text{avec } T=T_E \end{aligned}$$

▷ En boucle fermée avec un gain : $H(z) = \frac{KG(z)}{1+KG(z)} = \frac{KK_m(1-e^{-\frac{T}{\tau}})}{z-e^{-\frac{T}{\tau}}+KK_m(1-e^{-\frac{T}{\tau}})}$

▷ Erreur statique : On place un échelon d'amplitude a en entrée.

$$Y_c(z) = \frac{az}{z-1}$$

La sortie est donc : $Y(z) = H(z) \times Y_c(z) = \frac{a z k k_m (1-e^{-\frac{T}{\tau}})}{(z-1)(z-e^{-\frac{T}{\tau}}+k k_m (1-e^{-\frac{T}{\tau}}))}$

Théorème de la valeur finale : $Y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y(z)$

Ainsi : $Y_\infty = \frac{a k k_m (1-e^{-\frac{T}{\tau}})}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}+k k_m (1-e^{-\frac{T}{\tau}})}$ et $Y_{\infty} = a$

L'erreur statique est donc : $\varepsilon_\infty = |Y_\infty - Y_{\infty}| = \left| a \left(1 - \frac{k k_m (1-e^{-\frac{T}{\tau}})}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}+k k_m (1-e^{-\frac{T}{\tau}})} \right) \right|$

▷ Conditions de stabilité limite :

Le seul pôle de notre fonction de transfert en BF est $z = -k k_m (1-e^{-\frac{T}{\tau}}) + e^{-\frac{T}{\tau}}$
Pour être stable, il faut :

$$\begin{aligned} -1 &< -k k_m (1-e^{-\frac{T}{\tau}}) + e^{-\frac{T}{\tau}} < 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1+e^{-\frac{T}{\tau}}}{k_m(1-e^{-\frac{T}{\tau}})} &> k > \frac{-1+e^{-\frac{T}{\tau}}}{k_m(1-e^{-\frac{T}{\tau}})} \\ \Leftrightarrow \frac{1+e^{-\frac{T}{\tau}}}{k_m(1-e^{-\frac{T}{\tau}})} &> k > -\frac{1}{k_m} \end{aligned}$$

2) Régulation numérique par commande à réponse pile

$$\text{On a : } \frac{RG}{1+RG} = \frac{h_{\text{damp}}}{z^{d+1} - (1-h_{\text{damp}})}$$

$$\Leftrightarrow RG = \frac{h_{\text{damp}}}{z^{d+1} - (1-h_{\text{damp}})} + R \frac{G h_{\text{damp}}}{z^{d+1} - (1-h_{\text{damp}})}$$

$$\Leftrightarrow RG \left(1 - \frac{h_{\text{damp}}}{z^{d+1} - (1-h_{\text{damp}})} \right) = \frac{h_{\text{damp}}}{z^{d+1} - (1-h_{\text{damp}})}$$

$$\Leftrightarrow R(z) = \frac{h_{\text{damp}}}{G(z)(z^{d+1} - 1)}$$

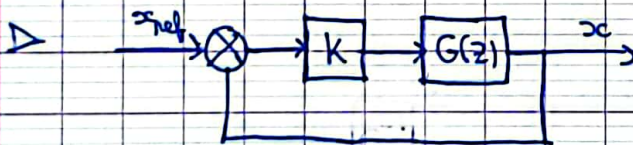
Ainsi dans notre cas : $d=0$ et $G(z) = K_m \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{z - e^{-\frac{T}{\tau}}}$

$$\text{Donc } R(z) = \frac{h_{\text{damp}} (z - e^{-\frac{T}{\tau}})}{K_m (1 - e^{-\frac{T}{\tau}})(z - 1)}$$

3) Contrôle par approche LQ

$$\triangleright \text{On a } G(s) = \frac{K_m}{1 + \tau s} = \frac{\frac{K_m}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + s}$$

Ainsi, une représentation d'état est : $\dot{x} = -\frac{1}{\tau} x + \frac{K_m}{\tau} u$
 $y = x$



$$\triangleright \text{On montre que } K = R^{-1} B^T P = \frac{K_m}{\tau} P$$

P est solution de l'équation algébrique de Riccati.

Les paramètres de l'approche LQ sont alors la matrice R et la matrice Q .

$$\text{On pose } R = I_m \text{ et } Q = p I_m$$

p est le paramètre de réglage du correcteur. Plus p est petit, plus on favorise l'économie d'énergie par rapport à l'erreur statique.

III Étude expérimentale

1. Identification des paramètres.

On injecte dans notre moteur un échelon d'amplitude 4. Grâce à la réponse observée (annexe 1), on peut en déduire les paramètres τ et K_m de notre moteur (1^{er} ordre).

Graphiquement, on obtient: $K_m = \frac{6,990}{4} = 1,7475$

$$3\tau = 1,766 \Rightarrow \tau = 1,766 \text{ s}$$

2. Auto-oscillations (avec un régulateur proportionnel numérique)

La courbe $K = f(T_e, \tau, K_m)$ est donnée en annexe 2.

$$K = \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau}}}{K_m(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}})} > 0$$

On fixe $T_e = 0,35 \text{ s}$. Pour cette valeur, on trouve un $K_{lim} = 1,9816$.
Ce K_{lim} correspond au K nécessaire pour avoir des auto-oscillations.

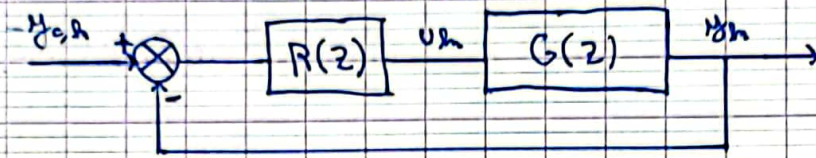
On vérifie donc sur Simulink et expérimentalement que l'on a bien des auto-oscillations. Sur Simulink, on peut l'observer sur l'annexe 3. Expérimentalement, on voit bien que le moteur tourne dans un sens puis dans l'autre, toujours à la même vitesse et pendant le même temps. On a bien des auto-oscillations. Le schéma Simulink utilisé pour le test expérimental est donné en annexe

4.

Pour $K = 1$ ($K < K_{lim}$), on cherche à observer l'erreur statique. Sur Simulink et expérimentalement, on observe quasiment la même erreur statique. Cette erreur statique est de $4 - 2,544 = 1,456$. On observe cette erreur statique sur l'annexe 5.

3. Mise en œuvre d'une commande à réponse plus

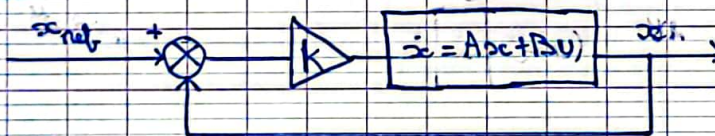
$$\text{On a } R(z) = \frac{I_{ndamp} (z - e^{-\frac{T}{\tau}})}{K_m (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) (z - 1)}$$



On simule avec $I_{ndamp} = 0,5 / 0,8 / 1$. Les résultats des simulations sont présentés en annexe 6. On remarque que plus I_{ndamp} est proche de 1 (valeur idéal si le système est parfait), plus la réponse est rapide.

Cependant expérimentalement, le I_{ndamp} observé n'est pas exactement 1. Cela est tout simplement dû au fait que notre modèle n'est pas idéal, il faut l'adapter.

4. Mise en œuvre d'une commande LQ à horizon infini



Pour appliquer la commande LQ, il faut calculer ce coefficient K . Pour cela, on utilise le script Matlab fourni en annexe du sujet. Le calcul de K dépend d'un facteur p (voir préparation). On teste donc plusieurs valeurs de p : On remarque que pour des grandes valeurs de p (au dessus de 8 environ) le système est instable car le système sature (commande > 10). Pour $p=5$, on a un système effectivement stable (annexe 7). De même pour $p=1$ (annexe 8). On remarque que plus p est petit, plus on minimise la commande.

IV Conclusion

Durant ce TP, nous avons pu asservir notre moteur avec différents correcteurs à la fois théoriquement et expérimentalement.

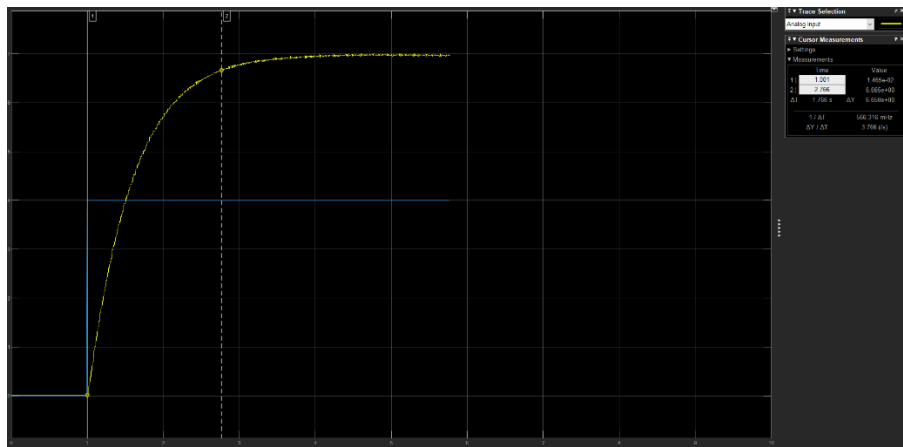
Ce TP constitue une première approche de ce qui est un correcteur LQ même si dans le cas présent son utilité n'est pas très importante, un correcteur proportionnel est tout aussi efficace. Nous avons pu retrouver par simulation les mêmes problèmes pour les correcteurs implémentés : la limitation intrinsèque du temps de réponse du moteur lié à la saturation de la tension de commande, et la nécessité d'avoir tout de même un fort gain pour limiter l'erreur statique.

* I Introduction

Dans ce TP, nous allons observer un moteur en tension à l'aide d'une commande à réponse pile et d'une commande LQ, après avoir reproduit le phénomène d'auto-oscillations avec un gain limité. Il s'agit ici de vérifier la théorie en la comparant à la pratique, par l'intermédiaire de Simulink et xPC Target. Les différents correcteurs utilisés seront également comparés entre eux.

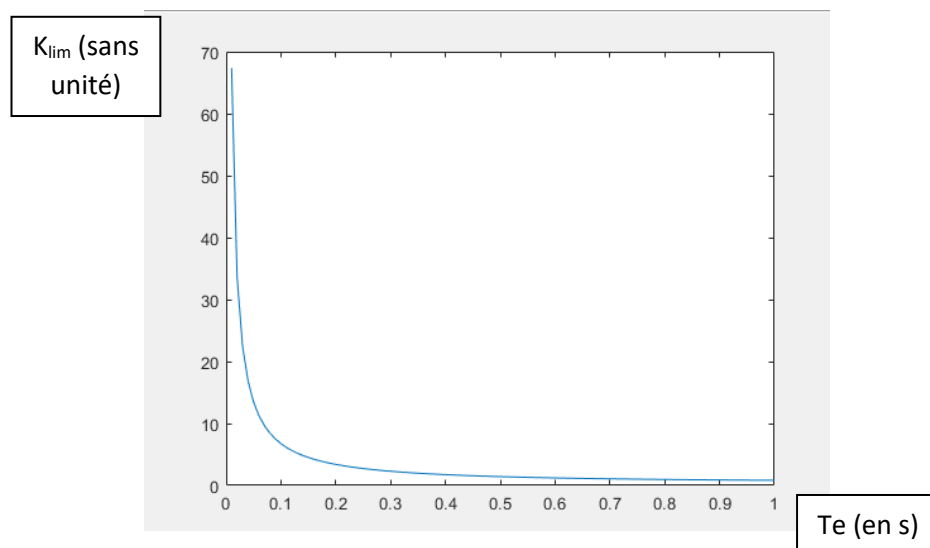
Annexes

Annexe 1 : Réponse à un échelon de notre système.

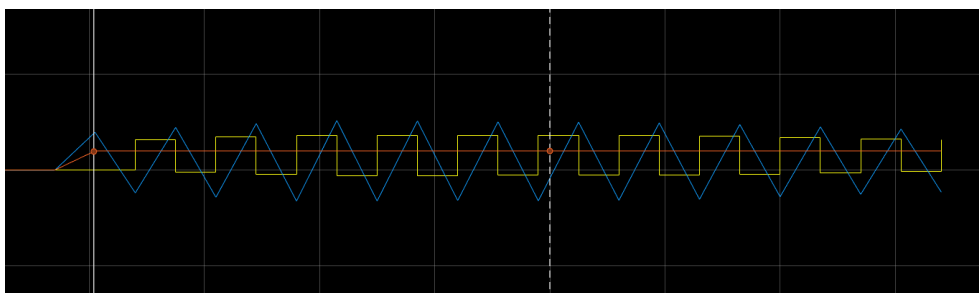


Bleu : Echelon de commande Jaune : Réponse du moteur

Annexe 2 : Evolution de K_{lim} en fonction de T_e

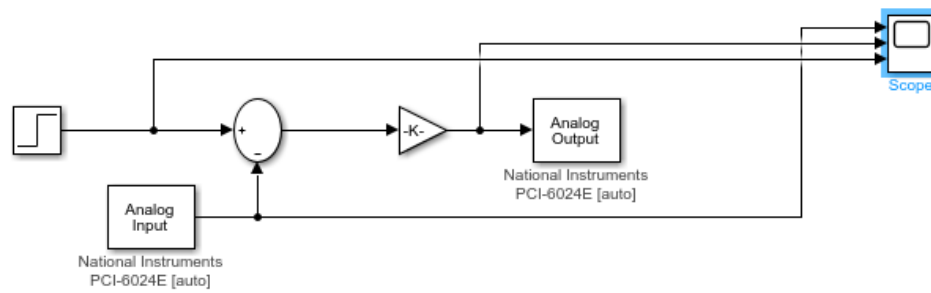


Annexe 3 : Auto-oscillations en simulation

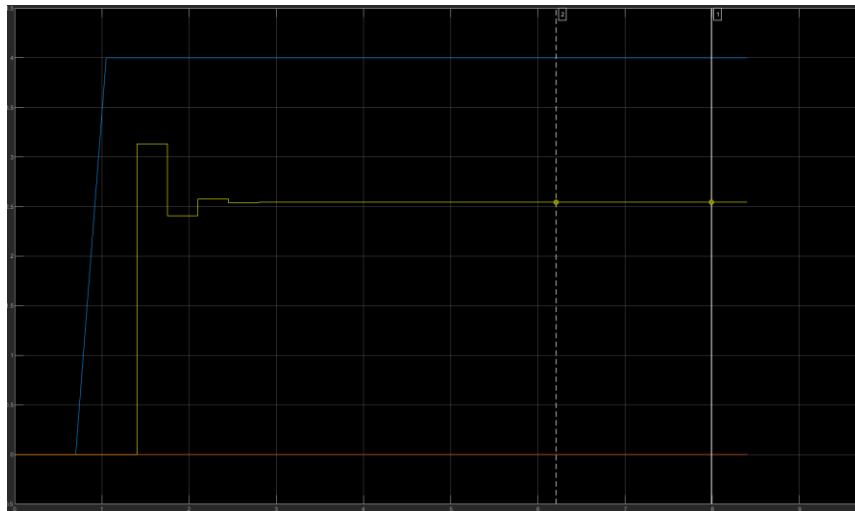


Rouge : Echelon de commande Jaune : Tension du moteur
Bleu : Tension de commande en sortie du moteur

Annexe 4 : Schéma Simulink utilisé pour les auto-oscillations expérimentales



Annexe 5 : Erreur statique pour K=1



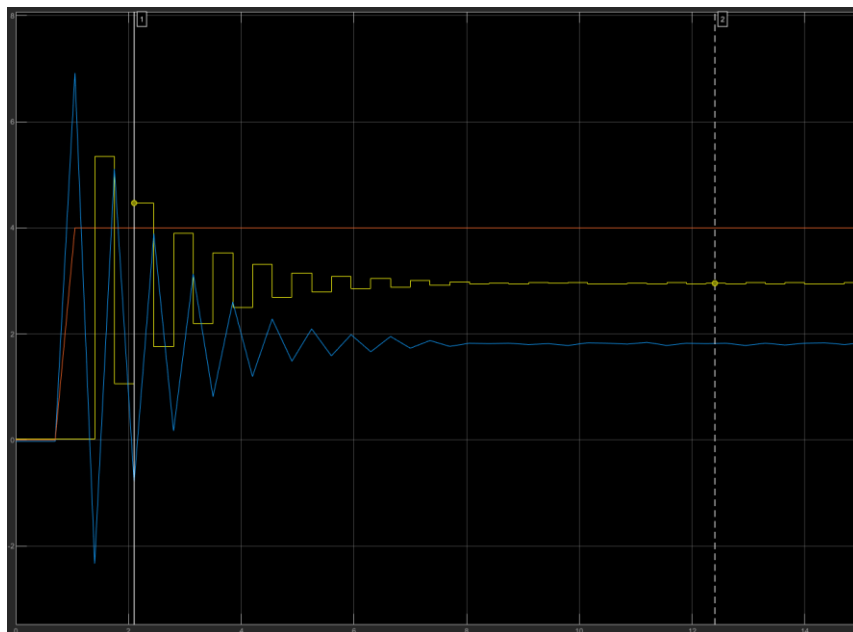
Rouge : Echelon de commande Jaune : Tension du moteur
Bleu : Tension de commande en sortie du moteur

Annexe 6 : Réponse à un step avec des valeurs de k_{damp} différentes.



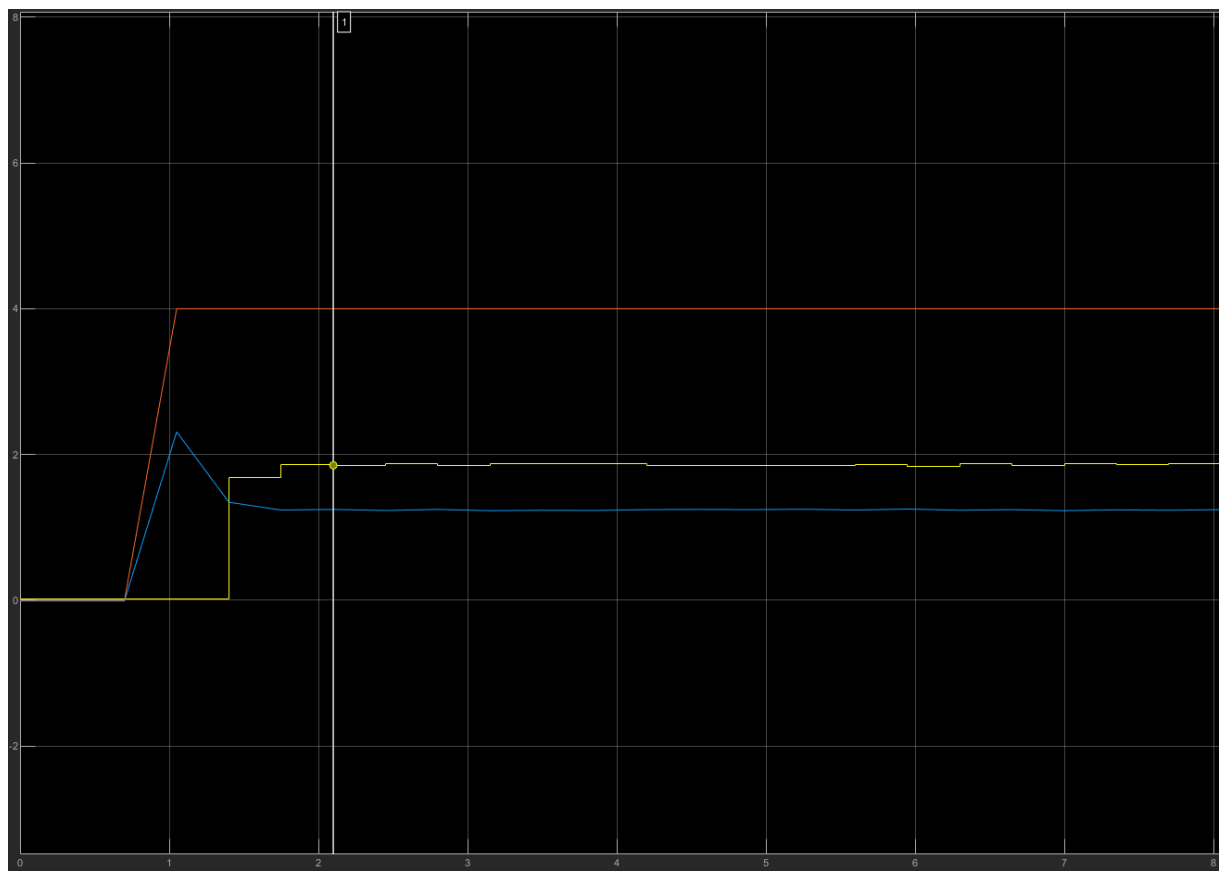
En vert, $k_{damp}=1$ En rouge, $k_{damp}=0.8$ En jaune, $k_{damp}=0.5$

Annexe 7 : Réponse indicielle avec $\rho=5$



Rouge : Echelon de commande Jaune : Tension du moteur
Bleu : Tension de commande en sortie du moteur

Annexe 8 : Réponse indicielle avec $\rho=1$



Rouge : Echelon de commande Jaune : Tension du moteur
Bleu : Tension de commande en sortie du moteur