나 혼자만의 필승전략!

추가 읽기 자료

Contents

1 Nim Game

흔히 베스킨라빈스 31이라고도 알려져 있는 이 게임의 규칙은 단순하다.

1. 돌 31개가 있다.
2. 선공부터 돌아가면서 돌 1개, 2개, 또는 3개를 가져간다.
3. 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다.

아마 여러분 모두 필승전략을 알고 있을 것이다. 상대가 가져간 돌의 개수에 관계없이 항상 **합이 4개가 되도록** 가져갈 수 있고, 이렇게 하면 남는 **돌의 개수를 4로 나눈 나머지를 일정하게 유지할** 수 있어서 항상 이길 수 있다.
이제 이 게임을 수학적으로 분석해보자. Grundy Number를 사용할 것인데, 먼저 기본 아이디어를 이해해보자.

1.1 아이디어?

수학적으로 게임을 분석하는 가장 쉬운 방법은 점화식을 사용하는 것이다. 게임판의 가능한 모든 상태들의 집합을 생각하자. 여기서 상태라 하면 게임판의 모양을 수학적으로 나타낸 것이라고 생각하면 좋다. 예를 들어 베스킨라빈스 31에서는 간단히 0 이상 31 이하의 정수로 상태들을 표현할 수 있을 것이다.
이제 A_i를 상태가 i인(돌이 i개 있는) 게임판에서 이기는지 여부를 나타내는 정수(수열)로 두자. 만약 이긴다면 $A_i = 1$이고 진다면 $A_i = 0$이다. 그러면 다음과 같은 점화관계를 생각해낼 수 있다.

상태 i에서 이동할 수 있는 모든 상태의 집합 S_i에 대해 $j \in S_i$이고 $A_j = 0$인 j가 존재하면 $A_i = 1$이고, 존재하지 않으면 $A_i = 0$이다.

자명하다! 선공이 어떤 행동을 해 만들 수 있는 다른 게임판들 중에서 자신이 그 게임판에서 선일때 지는 경우가 있다면 그 게임판을 만들어 후공에게 넘기면 되기 때문이다. 만약 그런 경우가 없다면 어떤 행동을 하던지 후공이 이기므로 진다. 이 점화식을 베스킨라빈스 31에 적용하면 아래 식을 얻는다.

$$A_i = A_{i-1}, A_{i-2}, A_{i-3} \text{ 중에 0인 것의 존재 여부} \quad (i \geq 3)$$

$A_0 = 0$, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$임을 생각하고 점화식을 전개해보자. 수학적 귀납법으로 $A_{4k} = 0$이고 나머지 경우는 모두 1임을 알 수 있을 것이다. 즉, 돌의 개수가 4의 배수인지 여부로 승패를 쉽게 알 수 있다.
그렇다면 필승 전략도 알아낼 수 있을까? A_{4k+r} $(r = 1, 2, 3)$ 꼴에 대해 $A_{i-1}, A_{i-2}, A_{i-3}$ 중 0인 것인 상태로 수를 두면 이긴다. 즉 A_{i-r}을 고르면 이기므로 항상 r개를 가져가면 된다.

1.2 Grundy Number

이 정리는 다음 특징을 만족하는 게임에 대해서만 다룬다.

- 두 명의 플레이어가 게임을 진행해야 한다.
- 두 사람이 차례를 가지고 번갈아가며 진행해야 한다. (순차적 게임)
- 모든 참가자가 게임에 대한 정보를 공유해야 한다. (완전 정보 게임)
- 자신의 차례에 할 수 있는 행동이 하나도 없으면 패배한다. (일반 게임)

- 게임이 무한히 진행되지 않는다. 즉, 언제나 무승부가 없고 승패가 결정되어야 한다.

이제 그런디 수의 정의를 살펴보자.

Definition 1. (Grundy Number) 게임판의 상태를 각각 하나의 자연수로 치환할 수 있다. 이 자연수를 그런디 수(Grundy Number)라고 한다. 그런디 수는 다음과 같이 정하면 된다.

- 아무것도 할 수 없는 게임판의 그런디 수는 0이다.
- 어떤 게임판의 상태 x에서 이동할 수 있는 다른 상태들의 그런디 수의 집합 S에 대해 상태 x의 그런디 수는 **S에 속하지 가장 작은 음 아닌 정수(mex)**이다. (Minimum Excluded Number)

사실 직관적으로 매우 쉽게 이해할 수 있다. x의 상태에서 이동할 수 있는 상태들 중, 그런디 수가 0인 상태가 있다면 x의 상태에서 선을 가진 사람이 이긴다. 그런디 수가 0인 상태로 후공에게 넘기면 되기 때문이다. 즉, 그런디 수가 0보다 크면 선공이 이긴다.
만약 x의 상태에서 이동할 수 있는 상태들 중, 그런디 수가 0인 상태가 없다고 해보자. 그러면 어떤 행동을 하여도 후공이 이길 수밖에 없으므로 선공이 진다. 또한, 이 상태의 그런디 수는 정의에 의해 0이다. 즉, 그런디 수가 0이면 후공이 이긴다.
이제 그런디 수로 위에서 봤던 베스킨라빈스 31을 설명해보자. G_i를 상태가 i인(돌이 i개 있는) 게임판의 그런디 수라고 하자. 그러면 정의에 의해 $G_0 = 0$이다. 이제 차례대로 $G_1, G_2, \cdots$를 계산하는 과정을 보자.

- mex(minimum excluded number)는 집합에 속하지 않는 가장 작은 음 아닌 정수이다.
- 상태 1에서는 상태 0으로만 갈 수 있으므로 G_1은 $\{G_0\} = \{0\}$의 mex이다. 즉, $G_1 = 1$
- 상태 2에서는 상태 0, 1로 갈 수 있으므로 G_2은 $\{G_0, G_1\} = \{0, 1\}$의 mex이다. 즉, $G_2 = 2$
- 상태 3에서는 상태 0, 1, 2로 갈 수 있으므로 G_3은 $\{G_0, G_1, G_2\} = \{0, 1, 2\}$의 mex이다. 즉, $G_3 = 3$
- 상태 4에서는 상태 1, 2, 3로 갈 수 있으므로 G_4은 $\{G_1, G_2, G_3\} = \{1, 2, 3\}$의 mex이다. 즉, $G_4 = 0$
- 상태 5에서는 상태 2, 3, 4로 갈 수 있으므로 G_5은 $\{G_2, G_3, G_4\} = \{0, 2, 3\}$의 mex이다. 즉, $G_5 = 1$

수학적 귀납법 등으로 증명하면 점화식을 통한 접근과 동일한 결과를 얻는다. $G_{4k} = 0$이고, $G_{4k+r} > 0$ $(r = 1, 2, 3)$이다. 필승전략을 찾는 것도 유사한데, 그런디 수가 0이 되는 상태를 후공에게 넘기는 방식으로 플레이하면 된다. 베스킨라빈스 31로 예를 들면, G_{4k+r}에서는 G_{4k}로 상태를 넘겨야 하므로, r개의 돌을 가져가면 된다.

1.3 Sprague–Grundy theorem

사실 그런디 수의 힘은 Sprague–Grundy theorem에서 드러난다.

Theorem 1. (Sprague–Grundy theorem) n개의 게임판이 있고, 각 게임판의 그런디 수가 G_i이면 n개의 게임을 동시에 진행할 때 현재 상태의 그런디 수는

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$$

이다. 여기서 $\oplus$는 Bitwise XOR[1]이다.

[1] 두 수를 이진수로 바꾸어 각 자리수를 비교해 값이 같으면 0, 다르면 1로 계산하는 연산. 예를 들어 $3 = 11_{(2)}$와 $6 = 110_{(2)}$의 XOR 연산 결과는 $5 = 101_{(2)}$가 된다.

스프라그-그런디 정리를 사용하면 n개의 돌무더기가 있고, 각 돌무더기에 31개의 돌이 있으며 한 돌무더기에서 한 개, 두 개, 또는 세 개를 가져가는 규칙의 게임의 승패도 쉽게 파악할 수 있다. $n = 1$일 때 $G_{31} = 3$이고 $3 \oplus 3 = 0$이므로 n이 짝수이면 그런디 수가 0이고, n이 홀수이면 그런디 수가 3이다. 즉, 선공이 이길 필요충분조건은 n이 홀수인 것이다.

2 Dot and Boxes

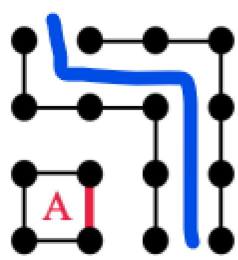
이 게임의 규칙은 다음과 같다.

1. 5×6의 격자를 그린다. (사실 아무 크기여도 된다)
2. 선공부터 돌아가며 상하좌우로 인접한 두 격자점을 잇는다.
3. 단위 정사각형의 마지막 네 번째 변을 이으면 그 정사각형은 자신의 땅이 되고 선분을 한 번 더 그을 수 있다.
4. 마지막에 먹은 상자가 더 많은 사람이 이긴다.

일단 이 게임은 순차적 게임이 아니며, 무승부가 있으므로 그런디 수를 사용할 수 없다. 하지만 이 게임에는 *greedy*와 *double-crossing*이라고 불리는 전략이 존재하는데, 이 게임에 대한 몇 가지 관찰을 토대로 이 전략을 이해해보자.

2.1 체인

기본적으로 정사각형의 세 번째 변을 이으면 상대에게 사각형을 주게 되므로 좋지 않다. 즉, 가장 단순하게 생각할 수 있는 전략은 정사각형의 세 번째 변을 긋지 않는 것이다. 이 전략을 토대로 어느 정도 게임이 진행을 하고 나면, 하나라도 선분을 그으면 상대가 연속해서 쭉 먹을 수 있는 "체인"과 같은 것이 나타남을 확인할 수 있다.



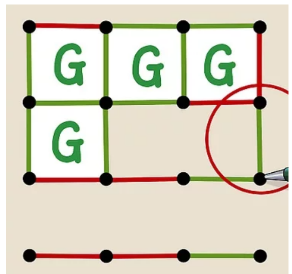
위 그림에서 파란색 선으로 연결된 통로를 보자. 그 통로에서 하나라도 선분이 그어지는 순간 그 선을 지나가는 정사각형 칸을 모두 먹을 수 있다.

2.2 그리디 전략

위의 체인의 관점에서 보면 홀짝성이 상당히 중요함을 파악할 수 있다. 두 사람 모두 단순하게 각 체인을 모두 먹는 *greedy* 전략을 취한다고 생각해보자. 그러면 매 순간 선 플레이어가 가장 짧은 것을 상대에게 줄 것이다. 이를 반복한다고 생각해보면 길이 $L_1 \leq L_2 \leq L_3 \cdots$의 체인이 있으면 선 플레이어는 $L_2, L_4, \cdots$를 가져가고, 후 플레이어는 $L_1, L_3, \cdots$를 가져가게 될 것이다. 즉, 선공과 후공에 따라 승패가 결정된다.

2.3 더블크로싱 전략

만약 그리디 전략을 사용할 때 선 플레이어가 진다고 생각해보자. 이럴 때 승패를 정말 뒤집을 수 없을까? 선 플레이어는 상대방이 그리디하게 체인을 먹으라고 선분을 그려주었을 때 정사각형을 만들어 땅을 먹는 것이 아니라, 정사각형이 만들어지지 않게 가운데에 선분을 그어 상대에게 턴을 넘길 수 있다. 만약 이 행동을 해 가장 긴 체인을 자신이 먹을 수 있다면 이 전략으로 오히려 승리할 수 있을 수도 있다.



위 그림에서 길이 2의 체인과 길이 3의 체인이 있다. 단순히 그리디 전략을 쓰면 선 플레이어가 길이 2의 체인을 가져가고 후 플레이어가 길이 3의 체인을 가져가겠지만, 위와 같은 더블크로싱 전략을 써 길이 2의 체인을 먹지 않으면, 반대로 길이 3의 체인을 선 플레이어가 가져갈 수 있다.

3 Ultimate Tic Tac Toe

이 게임의 규칙은 다음과 같다.

1. 9×9의 틱택토 판이 있다. 전체 판은 3×3의 미니 틱택토 판 9개로 이루어져 있다.
2. 한 미니 틱택토 판의 i행 j열에 수를 두었다면, 전체 택택토 판에서 i행 j열에 있는 미니 틱택토 판에 수를 놓아야 한다.
   (a) 엄밀하게 말하면 행 번호가 $[3i-2, 3i]$이고 열 번호가 $[3j-2, 3j]$인 칸에만 수를 놓을 수 있다.
   (b) 만약 i행 j열에 있는 미니 틱택토 판이 이미 두 플레이어 중 한 명의 소유라면, 빈 칸 중 아무 곳에 수를 놓을 수 있다.
3. 한 미니 틱택토 판에서 하나의 가로줄, 세로줄, 또는 대각선에 모두 자신의 모양을 놓으면 그 판을 가져간다.
4. 전체 틱택토 판에서 자신이 가져간 3개의 미니 틱택토 판이 하나의 가로줄, 세로줄, 또는 대각선을 이루면 승리한다.

틱택토는 무승부가 있기 때문에 그런디 수를 사용해서 필승전략을 알아낼 수 없다. 이러한 경우에는 모든 경우를 시도해서 필승전략을 찾아내야 하는데, 그것은 사실상 불가능하므로 (가능한 상태만 2^{81}개) 다음 절에서 AI를 사용해 알아낸 몇 가지 전략들만 소개하려고 한다.[2]

3.1 경험적 전략

수학적인 분석은 많이 어려우므로 AI를 통해 학습한 결과를 이용하자. AI는 경험적으로 학습하므로 아래 소개된 전략들은 모두 다양하게 오랫동안 게임을 해 봤다면 알아낼 법한 전략들이다.

[2]https://www.uttt.ai/blog

- **첫 수는 가운데 미니 틱택토 판의 가운데 칸**이 가장 좋다.
- 첫 수 이후에 두어지는 여덟개의 수는 모두 **네 코너**에 두는게 가장 좋다.
- 더 이상 코너에 두지 않게 되면, 이후에는 코너가 아닌 엣지에 두는게 가장 좋다.
- 이 게임은 생각보다 길다. **각 미니 게임판의 균형을 잘 맞추는데 집중하자.**
- 이미 한 명의 소유가 된 틱택토 판에 수를 두는 것은 상대방에게 큰 어드벤티지를 준다. 후반에는 **상대방이 빈 칸 중 아무 곳에 수를 놓을 수 없게 하는 것**이 매우 중요하다.

다음은 우리가 직접 게임을 하면서 알아낸 추가적인 전략들이다.

- **내가 두고 싶은 게임판을 정하려면 상대가 특정 위치에 두어야 하는** 굉장히 이상한 게임이다. 상대방에 입장에서도 생각해보자.
- 상대방에게 중앙을 둘 기회를 주는 것은 상대방에게 큰 어드벤티지를 준다. 최대한 미니 틱택토 판에서 **가운데에 두는 것은 최대한 피하자.**
- 비슷하게, 중요한 게임판에 집중하자. **5개의 미니 틱택토 판에서 이기고도 전체 게임을 지는 경우**가 꽤 많다.

Remark. 이 게임의 흥미로운 점은 2(b)의 규칙이 i행 j열에 있는 미니 틱택토 판이 **꽉 차있을 경우에만** 빈 칸 중 아무 곳에 수를 놓을 수 있도록 바뀐다면 필승전략이 있다.[3]

4 Hackenbush

이 게임의 규칙은 다음과 같다.

1. 그래프[4]가 주어진다.
2. 간선 하나를 끊는다. 이때 바닥과 연결되어 있지 않은 정점은 모두 지워진다. 다른 말로 바닥과 연결된 컴포넌트[5]만 남는다.
3. 더 이상 끊을 수 있는 간선이 없는 플레이어가 패배한다.

이 게임은 그래프의 그런디 수를 찾음으로서 수학적으로 필승전략을 논의할 수 있다.[6] 순차적으로 선형 그래프, 트리, 모든 그래프 순으로 이어가며 설명하겠다. **바닥은 0번 정점으로 생각한다.**

4.1 선형 그래프

i번 정점과 $i+1$번 정점이 연결된 선형 모양의 그래프를 생각하자. 정점의 개수가 $n+1$개인 선형 그래프는 유일하므로, 상태를 간단히 바닥을 제외한 정점의 개수 n으로 표현하자. 그러면 종결 상태는 0번 상태이므로 $G_0 = 0$이다.
이제 G_i를 계산해보자. i번 상태에서는 어떤 간선을 끊는지에 따라 $0, 1, 2, \cdots, i-1$번 상태 모두에 도달할 수 있다. 따라서 $G_n = n$임을 보알 수 있다. 수학적 귀납법을 쓰자.

[3] https://arxiv.org/abs/2006.02353

[4] 연결성을 나타내는 구조. 여러 개의 정점과 정확히 두 개의 정점을 연결하는 여러 개의 간선으로 이루어져 있음.

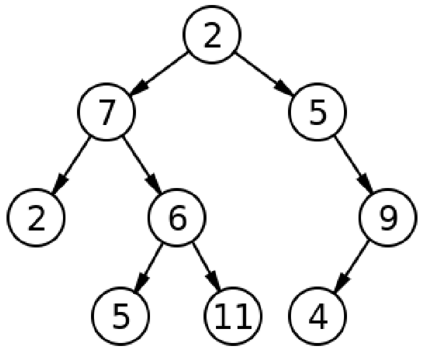
[5] 그래프의 모든 정점이 연결된 부분 그래프 중 다른 컴포넌트에 포함되지 않는 그래프. 쉽게 말해 그래프에서 연결되어 있는 한 덩어리.

[6] https://www.math.uchicago.edu/ may/VIGRE/VIGRE2006/PAPERS/Bartlett.pdf

- $n = 0$에서 $G_0 = 0$이므로 성립한다.
- $n \le k$에서 성립한다고 가정하자. 그러면 $k+1$번 상태에서 도달할 수 있는 상태들의 그런디 수의 집합은 $\{0, 1, 2, \cdots, k\}$이므로 $G_{k+1} = k+1$이다.

4.2 트리 그래프

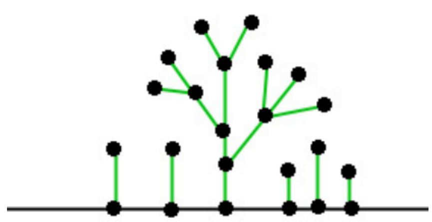
트리[7]는 사이클이 없는 그래프이다. 실제 나무를 생각해보자. 바닥에서 시작해 가지가 위로 뻗어나가고, 한번 갈라진 가지는 다시 만나지 않는다.



트리의 그런디 수를 논의하기 위해 다음 원리를 고려해보자.

Colon Principle. 그래프 G, H, K가 있다. H, K의 Grundy 값이 같다면, G의 정점 v에 H를 붙인 그래프와 v에 K를 붙인 그래프의 Grundy 값이 동일하다.

그러므로, 한 점에서 가지로 나오는 그래프가 있다면, **각 가지들의 Grundy 값의 XOR에 해당하는 길이의 일직선을 붙이는 것으로 가지들을 대체할 수 있다.** 왜냐하면 H를 그 점 v에서 가지로 나오는 부분 그래프를 가져와 v를 바닥으로 하는 그래프로 하고, K를 그런디 값이 같은 선형 그래프로 놓으면 Colon Principle을 적용할 수 있기 때문이다.
아마 이렇게 말로만 들으면 이해가 안될테니 예시를 보면서 이해해보자. 아래 트리 모양을 생각하자.

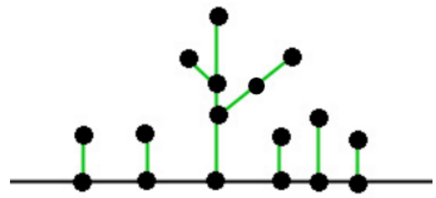


일단 바닥과 연결된 여섯 개의 부분이 보인다. 다섯 개의 부분의 그런디 수는 자명하게 1이므로 가운데 큰 트리의 그런디 수를 구하면 답을 알 수 있다.

- 큰 트리의 말단에 있는 가지를 생각해보자.
  - 왼쪽 말단에는 길이가 1인 가지 두 개가 있고, $1 \oplus 1 = 0$이므로 길이가 0인 가지로 대체 가능하다.

[7]임의의 두 정점 사이의 단순 경로가 유일한 그래프. 또는 사이클이 없는 연결 그래프.

  - 가운데 말단에는 길이가 1인 가지 두 개가 있고, $1 \oplus 1 = 0$이므로 길이가 0인 가지로 대체 가능하다.
  - 오른쪽 말단에는 길이가 1인 가지 세 개가 있고, $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$이므로 길이가 1인 가지로 대체 가능하다.
- 위 작업을 마친 결과는 다음과 같다.



- 이어서 트리를 간소화하자.
  - 제일 말단에는 길이가 1인 가지 두 개가 있다. $1 \oplus 1 = 0$이므로 길이가 0인 가지로 대체 가능하다.
  - 그러면 말단에 길이가 1인 가지와 길이가 2인 가지가 남는다. $1 \oplus 2 = 3$이므로 길이가 3인 가지로 대체 가능하다.
  - 그러면 큰 트리는 길이가 4인 가지가 되므로 그런디 수가 4이다.

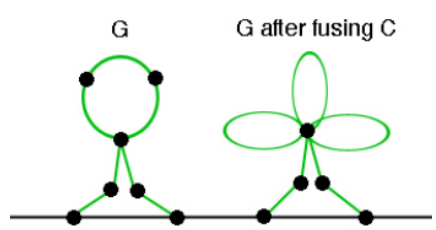
이렇게 큰 트리의 그런디 수를 구했다. 따라서 이 게임판의 그런디 수는 $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 4 = 5$이므로 선공이 승리한다. 필승전략도 상대방에게 그런디 수가 0인 게임판을 넘기면 된다는 사실로 쉽게 찾을 수 있다. 첫 턴에 오른쪽 말단의 가지들 중 하나를 지우면 그런디 수가 0인 상태가 된다. 즉, 첫 턴에는 오른쪽 말단의 가지들 세 개 중 하나를 지워야 한다. 지운 이후 게임판의 그런디 수를 직접 구해 확인해보자.

4.3 모든 그래프

모든 그래프에 대해 논의하려면 사이클을 처리해야 한다. 사이클은 다음과 같은 원리를 사용하면 처리할 수 있다.

Fusion Principle. 두 정점이 한 사이클 위에 놓인다면 두 정점을 하나로 합쳐도 Grundy 값이 변하지 않는다.

역시 예시를 보자. 다음과 같은 사이클이 있는 그래프를 생각하자.



왼쪽 그래프에서 사이클을 새로운 하나의 정점으로 보면, 사이클을 이루는 세 개의 간선이 사이클 자체의 self-loop가 됨을 볼 수 있다. 여기서 self-loop는 지워도 되고 안지워도 되기 때문에 그런디 수가 1이다.
이를 이용해 그래프 G에서 선공이 이기는지 후공이 이기는지 판단하자. 바닥에 연결된 두 개의 정점도 바닥 자체가 하나이기 때문에 같은 정점으로 볼 수 있고, 따라서 하단도 길이 4의 사이클이다. 고로 fusion principle을 적용하면 바닥과 연결된 self-loop 4개가 생긴다. 그리고 위에서 생겼던 3개의 self-loop도 연결된 정점이 바닥과 같은 정점이 되므로 바닥과 연결되게 된다.

즉, 그래프 G의 그런디 수는 바닥 정점의 self-loop가 7개 있는 그래프의 그런디 수와 같으므로, 그런디 수는 1이 된다. 따라서 주어진 그래프는 선공이 이기는 그래프이다.
또한 필승전략을 생각해보면 G에서 제일 위쪽 간선을 끊으면 그런디 수가 0인 상태를 만들 수 있으므로 첫 수는 제일 위쪽의 간선을 끊는 것임을 알 수 있다.