Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On modélise le cours de l'artichaut de la façon suivante. Initialement, la valeur d'un artichaut est $X_0 = 1$. Puis, chaque jour $n \geq 1$, sa valeur est multipliée par une variable aléatoire R_n positive : $X_n = R_n X_{n-1}$. On suppose que les variables aléatoires $R_1, R_2, R_3, \ldots$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi donnée par :

$$\mathrm{P}(R_1 = 1 - a) = \mathrm{P}(R_1 = 1 + a) = \frac{1}{2},$$

avec $a \in]0, 1[$ un réel donné.

(1) Pour tout $n \geq 0$, déterminer l'espérance de X_n.

(2) Pour tout $n \geq 0$, déterminer la variance de X_n.

(3) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

(4) Calculer l'espérance de $\ln(R_1)$ et vérifier que $\mathrm{E}[\ln(R_1)] < 0$.

(5) Trouver un réel $\delta > 0$ tel que $\mathrm{P}(X_n \geq e^{-\delta n})$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
On pourra s'intéresser à la variable aléatoire $\ln(X_n)$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On s'intéresse aux fonctions suivantes :

$$f(x, y) = xy, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2, \qquad h(x, y) = (|x| + |y|)^2.$$

Chacune de ces fonctions est définie sur $\mathbf{R}^2$.

(1) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$2\,|f(x, y)| \leq g(x, y) \leq h(x, y) \leq 2g(x, y).$$

(2) Déterminer le ou les points critiques de f. Pour chacun d'entre eux, déterminer s'il s'agit ou non d'un maximum local et s'il s'agit ou non d'un minimum local.

(3) Dessiner les lignes de niveau de g et de h.

(4) Existe-t-il un nombre réel $C > 0$ tel que pour tout réel $x \neq 0$ et tout réel $y \neq 0$, on ait $g(x, y) \leq C\,|f(x, y)|$?