统计计算

2016 年 3 月 17 日

目录

目录

目录

目录

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵, 且 $\mathbf{B}$ 为正定矩阵. 广义特征值问题是求实数 λ 和非零向量 $\mathbf{x}$, 使得

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{x}.$$

$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ 时成为标准特征值问题. 因此, 广义特征值问题是特征值问题的推广.

化为标准特征值问题

1. $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 缺点.
2. 对 Hermite 正定矩阵 $\mathbf{B}$, 存在非奇异的平方根 $\mathbf{B}^{1/2}$. 因为

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x} \Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}\tilde{\mathbf{x}} = \lambda\tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1/2}\tilde{\mathbf{x}},$$

   所以矩阵 $\mathbf{A}$ 相对于 $\mathbf{B}$ 的特征值问题等价于 Hermite 矩阵 $\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}$ 的特征值问题.
3. 教材的处理方法: 详见第 259 页最后一段至第 260 页第一段.

化为标准特征值问题

1. $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, 缺点.
2. 对 Hermite 正定矩阵 $\mathbf{B}$, 存在非奇异的平方根 $\mathbf{B}^{1/2}$. 因为

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{B}\mathbf{x} \Longleftrightarrow$$
$$\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}\tilde{\mathbf{x}}=\lambda\tilde{\mathbf{x}},\ \ \mathbf{x}=\mathbf{B}^{-1/2}\tilde{\mathbf{x}},$$

所以矩阵 $\mathbf{A}$ 相对于 $\mathbf{B}$ 的特征值问题等价于 Hermite 矩阵 $\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}$ 的特征值问题.

3. 教材的处理方法: 详见第 259 页最后一段至第 260 页第一段.

化为标准特征值问题

1. $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 缺点.
2. 对 Hermite 正定矩阵 $\mathbf{B}$, 存在非奇异的平方根 $\mathbf{B}^{1/2}$. 因为

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x} \Longleftrightarrow \\ &\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}\tilde{\mathbf{x}} = \lambda\tilde{\mathbf{x}}, \ \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1/2}\tilde{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

   所以矩阵 $\mathbf{A}$ 相对于 $\mathbf{B}$ 的特征值问题等价于 Hermite 矩阵 $\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}$ 的特征值问题.
3. 教材的处理方法: 详见第 259 页最后一段至第 260 页第一段.

广义特征值和广义特征向量算法

详见教材第 260 页算法 4.1.

目录

目录

引言

1. 考虑线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$
   1. $\mathbf{A}$ 非奇异;
   2. 方程组有解: 不定;
   3. 方程组无解: 超定.
2. 对于线性模型 $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\beta, \sigma^2\mathbf{I})$, 考虑线性回归问题最小二乘解
   1. 设计矩阵 $\mathbf{X}$ 满列秩;
   2. 设计矩阵 $\mathbf{X}$ 为一般情形.

目录

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足以下四个 Penrose 方程:

$$
\begin{aligned}
&(i) && \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \\
&(ii) && \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \\
&(iii) && (\mathbf{AX})^{\mathrm{H}} = \mathbf{AX}, \\
&(iv) && (\mathbf{XA})^{\mathrm{H}} = \mathbf{XA},
\end{aligned}
$$

则称 $\mathbf{X}$ 为 $\mathbf{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆, 记为 $\mathbf{A}^{\dagger}$.

广义逆的例子

1. 若 $a \in \mathbb{C}$, 则
$$a^{\dagger} = \begin{cases} a^{-1}, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0; \end{cases}$$

2. 若 $\mathbf{a} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$, 则 $\mathbf{a}^{\dagger} = \frac{1}{2}[1, 1]$;
3. 若 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{B}$ 为非奇异矩阵, 则
$$\mathbf{A}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix};$$

4. 若 $\mathbf{A}$ 非奇异, 则 $\mathbf{A}^{-1}$ 满足 Penrose 四个方程, 即 $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{-1}$. 因此, 矩阵 Moore-Penrose 广义逆是矩阵逆的一种推广.

其它的广义逆

在广义逆理论本身以及许多应用中，常常涉及仅满足 Penrose 四个方程中部分方程的矩阵广义逆.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，称矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 为 $\mathbf{A}$ 的 $\{i, j, k\}$-逆，如果 $\mathbf{X}$ 满足 Penrose 方程 $(i), (j), (k)$，记为 $\mathbf{A}^{(i,j,k)}$.

$\mathbf{A}$ 的 $\{i, j, k\}$-逆全体记为 $\mathbf{A}\{i, j, k\}$.

其它的广义逆 (续)

在总共 15 类广义逆中, 除 Moore-Penrose 广义逆外, 其余的均不唯一.

在实际应用中用得较多的矩阵广义逆包括 $\mathbf{A}^{\dagger}, \mathbf{A}\{1\}, \mathbf{A}\{1,2\}, \mathbf{A}\{1,3\}, \mathbf{A}\{1,4\}$.

特别是 $\mathbf{A}\{1\}$ 在线性模型理论中具有十分重要的作用.

以下用 $\mathbf{A}^{-}$ 表示 $\mathbf{A}^{(1)}$, 也称为减号逆.

问　题?

目录

减号逆的存在性

定理

任意矩阵的减号逆总是存在，但不唯一.

证明　详见教材第 263 页定理 5.1.

减号逆的性质

在证明中, $\mathbf{X}$ 的分块形式里 “*” 可以取任意矩阵 (只要维数相容), 因此, $\mathbf{A}$ 的减号逆不唯一.

减号逆不唯一性的缺点与优点.

减号逆的性质 (续)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 则

1. $\operatorname{rank}\mathbf{A}^- \geq \operatorname{rank}\mathbf{A}$, $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^-) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^-\mathbf{A})$;

证明　因为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A} \Rightarrow \operatorname{rank}\mathbf{A} \leq \operatorname{rank}\mathbf{A}^-$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}\mathbf{A} \leq \begin{matrix} \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^-) \\ \operatorname{rank}(\mathbf{A}^-\mathbf{A}) \end{matrix} \leq \operatorname{rank}\mathbf{A}. \qquad \square$$

减号逆的性质 (续)

2. a) $\mathbf{A}$ 非奇异 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}^-$ 唯一且 $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^{-1}$;
   b) $\mathbf{A}$ 满列秩 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}^-\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$;
   c) $\mathbf{A}$ 满行秩 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}\mathbf{A}^- = \mathbf{I}_n$;

   证明　a) "$\Rightarrow$" $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $\mathbf{A}^{-1}$ 是 $\mathbf{A}$ 的减号逆, 而 $\mathbf{A}^{-1}$ 是唯一的. "$\Leftarrow$" 显然.
   b) 显然 $\mathbf{A}^-\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times m}$. 因为 $\mathbf{A}$ 满列秩 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^-\mathbf{A}) = \operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, 即 $\mathbf{A}^-\mathbf{A}$ 可逆. 于是 "$\Leftarrow$" 显然. "$\Rightarrow$" 在 $\mathbf{A}^-\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}^-\mathbf{A}) = \mathbf{A}^-\mathbf{A}$ 两边乘以 $\mathbf{A}^-\mathbf{A}$ 的逆, 则 $\mathbf{A}^-\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$.
   c) 与 b) 类似可证. □

3. $\mathbf{AA}^-$ 和 $\mathbf{A}^-\mathbf{A}$ 均为幂等矩阵且

$$\operatorname{rank}(\mathbf{AA}^-) = \operatorname{tr}(\mathbf{AA}^-) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^-\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^-\mathbf{A});$$

证明　幂等阵显然, 从而是投影矩阵. 幂等阵的特征值为 0 和 1, 其中 1 的个数为矩阵的秩; 而迹为矩阵的特征值之和. □

4. 设 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m\times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 非奇异, 则 $(\mathbf{CAB})^- = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^-\mathbf{C}^{-1}$;

证明　直接验证即可. □

5. 分块求广义逆:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{A}_{22}^{-} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{T}_{12}, \mathbf{T}_{21}$ 满足

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{T}_{12}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{O}, \ \mathbf{A}_{22}\mathbf{T}_{21}\mathbf{A}_{11} = \mathbf{O}.$$

证明　直接验证即可. □

减号逆的性质 (续)

6. $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 为幂等矩阵，不依赖于减号逆的选取，且

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}},\ \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

证明　a) $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 与减号逆的选取无关. 由 $\mathscr{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) = \mathscr{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})$ 知存在矩阵 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{B}$，于是

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} &= \mathbf{B}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{B}\\ &= \mathbf{B}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\end{aligned}$$

与 $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ 的减号逆的选取无关.

减号逆的性质 (续)

b) 记 $\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} - \mathbf{A}$, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mathrm{H}}\mathbf{F} &= \left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\left((\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\right)^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} - \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\right) \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} - \mathbf{A}\right) \\ &= \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\left((\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\right)^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} \\ &\quad - \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\left((\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\right)^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} \\ &\quad - \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{O},\end{aligned}$$

从而 $\mathbf{F} = \mathbf{O}$. 同理可证另一式.

减号逆的性质 (续)

c) $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 是投影矩阵 (等价于为幂等阵). 这是因为

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}.$$

但要注意其与 $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ 的减号逆的选取无关, 可选一对称阵, 于是 $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 是对称的, 从而是正交投影矩阵. □

问　题?

目录

加号逆的存在唯一性

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 且 $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r$.

若 $r = 0$, 则 $\mathbf{A}$ 为零矩阵, 容易验证 $\mathbf{X} = \mathbf{O}$ 满足 Penrose 四个方程.

若 $r > 0$, 设 $\mathbf{A}$ 有奇异值分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{\mathrm{H}},$$

其中, $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 均为酉阵, 且 $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$, $\sigma_i > 0$ 为 $\mathbf{A}$ 的非零奇异值. 于是 $\Sigma^{-1} = \operatorname{diag}(\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_r^{-1})$.

加号逆的存在唯一性 (续)

令

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{\mathrm{H}}.$$

由

$$\mathbf{AX} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{\mathrm{H}}, \quad \mathbf{XA} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{\mathrm{H}},$$

以及 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 均为酉阵容易验证 $\mathbf{X}$ 满足 Penrose 四个方程, 所以 $\mathbf{X}$ 为 $\mathbf{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆.

若 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 均满足 Penrose 方程 (i) — (iv), 则

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} = \mathbf{XAX} &= \mathbf{XAYAX} \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{AY})^{\mathrm{H}}(\mathbf{AX})^{\mathrm{H}} = \mathbf{X}(\mathbf{AXAY})^{\mathrm{H}} \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{AY})^{\mathrm{H}} = \mathbf{XAY} \\
&= \mathbf{XAYAY} = (\mathbf{XA})^{\mathrm{H}}(\mathbf{YA})^{\mathrm{H}}\mathbf{Y} \\
&= (\mathbf{YAXA})^{\mathrm{H}}\mathbf{Y} = (\mathbf{YA})^{\mathrm{H}}\mathbf{Y} \\
&= \mathbf{YAY} = \mathbf{Y}.
\end{aligned}$$

因此唯一性成立. □

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 则

1. $(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A}$;

   证明　(1) 在 Penrose 方程 (1) — (4) 中, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^\dagger$ 的位置是对称的, 所以结论成立. □

2. $(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^\dagger = (\mathbf{A}^\dagger)^{\mathrm{H}}$;

   证明　由广义逆的定义可证明. □

3. $\mathrm{rank}\mathbf{A} = \mathrm{rank}\mathbf{A}^\dagger = \mathrm{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})$;

   证明　由

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\mathbf{A} &= \mathrm{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}) \leq \mathrm{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger) \leq \mathrm{rank}\mathbf{A}^\dagger \\ &= \mathrm{rank}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger) \leq \mathrm{rank}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}) \leq \mathrm{rank}\mathbf{A}\end{aligned}$$

即知. □

加号逆的性质 (续)

4. $(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}$, $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$;

   证明　由广义逆的定义可证明. □

   注意 $(\mathbf{AB})^{\dagger}$ 一般不等于 $\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$.

   例如: $\mathbf{A} = [1, 0], \mathbf{B} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$, 于是 $\mathbf{AB} = 1$, 从而 $(\mathbf{AB})^{\dagger} = 1$. 但是

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{\dagger} = \frac{1}{2}[1 \quad 1],$$

   从而 $\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger} = \frac{1}{2} \neq (\mathbf{AB})^{\dagger}$.

5. $\mathbf{AA}^{\dagger}$ 和 $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}$ 均为正交投影矩阵;

   证明　显然. □

6. 若 $\mathbf{A}$ 为对称幂等矩阵, 则 $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}$;

   证明　由广义逆的定义可证明. □

7. 若 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 均为酉阵, 则 $(\mathbf{UAV})^{\dagger} = \mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{U}^{\mathrm{H}}$;

证明　由广义逆的定义可证明. □

特别地, 若 $\mathbf{A}$ 为 Hermite 矩阵, 则存在酉阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{Q}\Lambda^{\dagger}\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}$, 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, λ_i 为 $\mathbf{A}$ 的特征值;

证明　由 Hermite 矩阵谱分解立即可得. □

例

教材第 268 页例 5.3.

加号逆的性质 (续)

8. $\mathbf{A}^{\dagger} = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{\dagger}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}$.

   证明　因为

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\dagger} &= \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}} \\
&= \mathbf{A}^{\dagger}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{\dagger}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \\
&= (\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A})^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\dagger} \\
&= \mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}. \qquad \square
\end{aligned}$$

加号逆的性质 (续)

于是,

- 若 $\mathbf{A}$ 为满列秩矩阵, 则

$$\mathbf{A}^{\dagger} = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}.$$

特别地, 若 $\mathbf{a}$ 为非零列向量, 则

$$\mathbf{a}^{\dagger} = \mathbf{a}^{\mathrm{H}}/(\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\mathbf{a});$$

- 若 $\mathbf{A}$ 为满行秩矩阵, 则

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{-1}.$$

特别地, 若 $\mathbf{a}$ 为非零行向量, 则

$$\mathbf{a}^{\dagger} = \mathbf{a}^{\mathrm{H}}/(\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}).$$

9. $\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)$, $\mathscr{R}(\mathbf{A}^\dagger) = \mathscr{R}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})$;
证明　由 $\mathscr{R}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger) \subseteq \mathscr{R}(\mathbf{A})$, $\mathscr{R}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}) \subseteq \mathscr{R}(\mathbf{A}^\dagger)$ 以及 (3) 立即可得. □

10. $\mathscr{R}(\mathbf{A}^\dagger) = \mathscr{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$, $\mathscr{N}(\mathbf{A}^\dagger) = \mathscr{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$.
证明　由 (3) 知 $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^\dagger = \mathrm{rank}\,\mathbf{A} = \mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$, 再由 (8) 可得

$$\mathscr{R}(\mathbf{A}^\dagger) = \mathscr{R}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^\dagger\right) \subseteq \mathscr{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}),$$

所以第一式成立. 进一步有

$$\begin{aligned}\mathscr{N}(\mathbf{A}^\dagger) &= \mathscr{R}\left((\mathbf{A}^\dagger)^{\mathrm{H}}\right)^\perp = \mathscr{R}\left((\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^\dagger\right)^\perp \\ &= \mathscr{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathscr{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}),\end{aligned}$$

所以第二式成立. □

加号逆的性质 (续)

⑩ 若 $\mathbf{A}$ 有满秩分解 $\mathbf{A} = \mathbf{F}_{n\times r}\mathbf{G}_{r\times m}$, 其中 $r = \mathrm{rank}\mathbf{A}$, 则 $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{F}^{\dagger}$.

证明　注意到

$$\mathbf{F}^{\dagger}\mathbf{F} = (\mathbf{F}^{\mathrm{H}}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{H}}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{I}_r,$$

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^{\dagger} = \mathbf{I}_r,$$

并由广义逆的定义即可得证. □

问　题?