第一章习题解答

1． 设随机变量 X 服从几何分布，即：$P(X=k)=pq^k, k=0,1,2,\cdots$。求 X 的特征函数，EX 及 DX。其中$0<p<1, q=1-p$是已知参数。

解 $\because f_X(t)=E(e^{jtx})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jtk}pq^k$

$$=p\sum_{k=0}^{\infty}(q^k e^{jtk})$$

$$=p\sum_{k=0}^{\infty}(qe^{jt})^k=\frac{p}{1-qe^{jt}}$$

又$\because E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kpq^k=p\sum_{k=0}^{\infty}kq^k=p\frac{q}{p^2}=\frac{q}{p}$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2={q}/{P^2}$$

（其中 $\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ）

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

则 $\int_0^x S(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$

$$\therefore S(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x S(t)dt=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

同理 $\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k-2\sum_{k=0}^{\infty}kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}x^k$

令 $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2x^k$ 则

$\int_0^x S(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2t^k dt=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^k$ ）

2、（1） 求参数为(p,b)的Γ分布的特征函数，其概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-bx}, x>0 \\ 0, x\le 0\end{cases} \quad b>0, p>0$$

（2） 其期望和方差；

（3） 证明对具有相同的参数的 b 的Γ分布，关于参数 p 具有可加性。

解 （1）设 X 服从$\Gamma(p,b)$分布，则

$$f_X(t)=\int_0^{\infty}e^{jtx}\frac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-bx}dx$$

$$=\frac{b^p}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{(jt-b)x}dx$$

$$\underline{\underline{-u(jt-b)x}}\frac{b^p}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}u^{p-1}}{(b-jt)^p}du=\frac{b^p}{(b-jt)^p}=\frac{1}{(1-\frac{jt}{b})^p}$$

$$(\because \Gamma(p)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{p-1}dx)$$

（2）$\therefore E(X)=\frac{1}{j}f_X{}'(0)=\frac{p}{b}$

$$E(X^2)=\frac{1}{j^2}f_X{}''(0)=\frac{p(p+1)}{b^2}$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)=E^2(X)=\frac{P}{b^2}$$

（4） 若 X_i $\Gamma(p_i,b)$ $\quad i=1,2$ 则

$$f_{X_1+X_2}(t)=f_{X_1}(t)f_{X_2}(t)=(1-\frac{jt}{b})^{-(P_1+P_2)}$$

$$\therefore Y=X_1+X_2 \quad \Gamma(P_1+P_2,b)$$

同理可得： $f_{\sum X_i}(t)=(\frac{b}{b-jt})^{\sum p_i}$

3、设 X 是一随机变量，$F(x)$是其分布函数，且是严格单调的，求以下随机变量的特征函数。

（1）$Y=aF(X)+b,(a\neq 0,b是常数);$

（2）$Z=\ln F(X),并求E(Z^k)(k是常数$）。

解 （1）$\because P\{F(x)<y\}=P\{x<F^{-1}(y)\}=F[F^{-1}(y)]=y$ （$0\leq y\leq 1$）

$$\therefore \quad F(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0\leq y\leq 1\\ 1 & y>1\end{cases}$$

$\therefore$ $F(x)$在区间[0，1]上服从均匀分布

$\therefore F(x)$的特征函数为$f_X(t)=\int_0^1 e^{jtx}dx=\frac{e^{jtx}}{jt}\Big|_0^1=\frac{1}{jt}(e^{jt}-1)$

$$f_Y(t)=e^{jbt}f_X(at)=e^{jbt}(e^{jta}-1)\frac{1}{jat}$$

（2）$\because f_Z(t)=E(e^{jtz})=E[e^{jt\ln F(x)}]$

$$=\int_0^1 e^{jt\ln y}\cdot 1dy$$

$$=\int_0^1 y^{jt}dy=\frac{1}{1+jt}$$

$$\therefore f_Z^{'}(t)=(-1)\cdot j\cdot(1+jt)^{-2}$$

$$f_Z^{''}(t)=(-1)(-2)\cdot j^2\cdot(1+jt)^{-3}$$

$\vdots$

$$f_Z^{(k)}(t)=(-1)^k k!\cdot j^k\cdot(1+jt)^{-(k+1)}$$

$$\therefore E(Z^k)=\frac{1}{j^k}f_Z^{(k)}(0)=(-1)^k k!$$

4、设X_1，$X_2,\cdots X_n$相互独立，且有相同的几何分布，试求$\sum_{k=1}^{n}X_k$的分布。

解 $$f_{\sum_{k=1}^{n}X_k}(t)=E(e^{jt\sum_{k=1}^{n}x_k})$$

$$=\prod_{k=1}^{n}E(e^{jtx_k})$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{p}{1-qe^{jt}}$$

$$=p^n(1-qe^{jt})^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k p^n(-q)^k e^{jtk}$$

$$\therefore P\{\sum_{k=1}^{n}x_k=n+k\}=C_n^k p^n(-q)^k$$

5、 试证函数$f(t)=\dfrac{e^{jt}(1-e^{jt})}{n(1-e^{jt})}$为一特征函数，并求它所对应的随机变量的分布。

证 （1）$\lim\limits_{t\to0^+}f(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^{jt}(1-e^{jnt})}{n(1-e^{jt})}=\dfrac{1}{n}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^{jt}(1-e^{jt})}{1-e^{jt}}=1$

$$\lim_{t\to0^-}f(t)=\lim_{t\to0^-}\frac{e^{jt}(1-e^{jnt})}{n(1-e^{jt})}=\frac{1}{n}\lim_{t\to0^-}e^{jt}\lim_{t\to0^-}\frac{(1-e^{jt})}{1-e^{jt}}=1$$

$\therefore f(0)=1$

$\because \lim\limits_{t\to0}f(t)=1\ \therefore\ f(t)$为连续函数

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_i-t_k)\lambda_i\overline{\lambda_k}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{e^{jt_i}}{e^{jt_k}}\{1-(\frac{e^{jt_i}}{e^{jt_k}})^n\}}{n(1-\frac{e^{jt_i}}{e^{jt_k}})}\lambda_i\overline{\lambda_k}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{e^{jt_i}}{e^{jt_k}}\{1-(\frac{e^{jt_i}}{e^{jt_k}})(1+\frac{e^{jt_i}}{e^{jt_k}}+\cdots)\}}{n(1-\frac{e^{jt_i}}{e^{jt_k}})}\lambda_i\overline{\lambda_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[e^{j(t_i-t_k)}]^l\lambda_i\overline{\lambda_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{e^{jlt_i}}{e^{jlt_k}}\lambda_i\overline{\lambda_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}e^{jlt_i}\lambda_i\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}e^{-jlt_k}\overline{\lambda_k}$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_i-t_k)\lambda_i\overline{\lambda_k}\geq 0$$

$\therefore$非负定

（2）$\because f(t)=\frac{e^{jt}(1-e^{jnt})}{n(1-e^{jt})}$

$$=\frac{e^{jt}(1-e^{jt})(1+e^{jt}+e^{2jt}+\cdots e^{(n-1)tj})}{n(1-e^{jt})}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{jtk}$$

$\therefore P\{x_k\leq k\}=\frac{1}{n}$　　　　（$k=0,2,\cdots n$）

6、证函数 $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ 为一特征函数，并求它所对应的随机变量的分布。

解　（1）$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_i-t_k)\lambda_i\overline{\lambda_k}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_i\overline{\lambda_k}}{1+(t_i-t_k)^2}\geq\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_i\overline{\lambda_k}}{1+M^2}\geq 0 \qquad （M=\max_{1\leq i,j\leq n}\{|t_i-t_k|\}）$$

且 $f(t)$ 连续 $f(0)=1$ $\qquad\therefore$ $f(t)$ 为特征函数

（2）$\because f(t)=\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{1-(jt)^2}=\frac{1}{2}[\frac{1}{1-jt}+\frac{1}{1+jt}]$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^{\infty}e^{(jt+1)x}dx-\int_0^{\infty}e^{-(jt-1)x}dx]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx-|x|}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$\therefore P(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$

7、设 X_1，$X_2,\cdots X_n$ 相互独立同服从正态分布 $N(\alpha,\delta^2)$，试求 n 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 的分布，并求出其均值向量和协方差矩阵，再求 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的率密度函数。

解 $\because$ $$\boldsymbol{P(x_1,x_2,\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}P_{x_i}(x_i)}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\exp\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\}$$

又 $\because X_i$ 的特征函数为：$f_{X_i}(t)=\exp\{jat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\}$

$$f_{X_1,X_2\cdots X_n}(t_1,t_2\cdots t_n)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i)=\exp\{\sum_{i=1}^{n}(jat_i-\frac{1}{2}\sigma^2t_i^2)\}$$

$\therefore$ 均值向量为 $\vec{\alpha}=\{\alpha,\alpha,\cdots\alpha\}$

$\therefore$ 协方差矩阵为 $B=diag(\sigma^2,\sigma^2,\cdots\sigma^2)$

又

$$\because f_{\overline{X}}(t)=f(\tfrac{t}{n},\tfrac{t}{n},\cdots\tfrac{t}{n})=\prod_{i=1}^{n}f(\tfrac{t}{n})=\exp\{jat-\tfrac{1}{2n}\sigma^2t^2]$$

8、设 X．Y 相互独立，且（1）分别具有参数为(m,p)及(n,p)分布；（2）分别服从参数为$(p_1,b),(p_2,b)$的Γ分布。求 X+Y 的分布。

解（1） $f_X(t)=\sum_k e^{jtx_k}P_k=\sum_{x=0}^{n}e^{-jtx}C_n^x p^x q^{n-x}$

$$=\sum_{x=0}^{n}(pe^{-it})^x C_n^x q^{n-x}$$

$$=q^n\sum_{x=0}^{n}(\tfrac{p}{q}e^{-jt})^x C_n^x$$

$$=q^n(1+\tfrac{p}{q}e^{-jt})^n$$

$$=(q+pe^{-jt})^n$$

则 $f_{X,Y}(t_1,t_2)=(pe^{jt_1}+q)^m(pe^{jt_2}+q)^n$

$$\therefore f_{X+Y}(t)=f_X(t)f_Y(t)=(pe^{jt}+q)^{m+n}$$

$$\therefore X+Y\sim b(m+n,p)$$

（2）

$$\because f_X(t)=(1-\frac{jt}{b})^{-p_1}$$

$$\therefore f_{X+Y}(t)=(1-\frac{jt}{b})^{-(p_1+p_2)}$$

$$\therefore X+Y\sim\Gamma(p_1+p_2,b)$$

9、已知随机向量（X、Y）的概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}[1+xy(x^2-y^2)],-1<x,y<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

求其特征函数。

解 $f(t_1,t_2)=E\{e^{j(t_1x+t_2y)}\}$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{j(_1x+t_2y)}\cdot\tfrac{1}{4}(1+x^3y-xy^3)dy$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{jt_1x}dx\int_{0}^{1}[\cos t_2y+j(x^3y-xy^3)\sin t_2y]dy$$

$$=\frac{1}{t_1t_2}\sin t_1\sin t_2$$

10、已知四维随机向量(X_1,X_2,X_3,X_4)服从正态分布，均值向量为 0，协方差矩阵为$B=(\delta_{kl})_{4\times4,}$求$E$（$X_1X_2X_3X_4$）。

解　$\because E(X_1,\cdots X_4)=(j)^{-4}[\frac{\partial^4 f(t_1,\cdots t_4)}{\partial(t_1,\cdots t_4)}]\Big|_{t_1=\cdots t_4=0}$

又$\because$ $f(t_1,\cdots t_4)=\exp[-\tfrac{1}{2}tBt^{'}]$

$$=\exp\{-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\sigma_k\sigma_l t_k t_l\}$$

其中$B=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}&\sigma_{14}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}&\sigma_{24}\\\sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}&\sigma_{34}\\\sigma_{41}&\sigma_{42}&\sigma_{43}&\sigma_{44}\end{pmatrix}$　$\sigma_{kl}=\text{cov}(X_k,X_l)$　$(k\ l,=\ 1,\ 2$

$\therefore$　E（$X_1X_2X_3X_4$）$=\sigma_{12}\sigma_{34}+\sigma_{13}\sigma_{2}$

11、设X_1，X_2和X_3相互独立，且都服从 N（0，1），试求随机变量$Y_1=X_1+X_2$和$Y_2=X_1+X_2$组成的随机向量（Y_1，Y_2）的特征函数。

解　$\because f_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3)=\exp\{j\sum_{k=1}^{3}t_kx_k\ \}$

$$=\prod_{k=1}^{3}e^{jt_kx_k}=\exp\{-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}t_k^2\}$$

$$=f_{X_1,X_2,X_3}(u_1+u_2,u_3,u_4)$$

$$=\exp\{\tfrac{1}{2}[((u_1+u_2)^2+u^2{}_1+u_2{}^2)]\}$$

12、设X_1，X_2和X_3相互独立，都服正态分布 N（0，δ^2），试求：

（1）随机向量（X_1，X_2，X_3）的特征函数。

（2）设 $S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, S_3 = X_1 + X_2 + X_{3,}$，求随机向量 (S_1, S_2, S_3) 的特征函数。

（3）$Y_1 = X_2 - X_1$ 和 $Y_2 = X_3 - X_2$ 组成的随机向量（Y_1，Y_2）的特征函数。

解（1）$f_{X_1,X_2,X_3}(t_1+t_2+t_3, t_2+t_3, t_3) = \exp\{-\frac{1}{2}[(t_1+t_2+t_3)^2 + (t_2+t_3) + t_3{}^2]\sigma^2\}$

（2）$\because f_{S_1,S_2,S_3}(t_1,t_2,t_3) = E\{\exp[j(t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3)]\}$

$$= E\{\exp[j((t_1+t_2+t_3)x_1 + (t_2+t_3)x_2 + t_3 x_3]\}$$

$$= f_{X_1,X_2,X_3}(t_1+t_2+t_3, t_2+t_3, t_3)$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}[(t_1+t_2+t_3)^2 + (t_2+t_3) + t_3{}^2]\sigma^2\}$$

（3）$\therefore f_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = E\{e^{j(t_1 y_1 + t_2 y_2)}\}$

$$= E\{\exp[j(-t_1 x_1 + (t_1 - t_2)x_2 + t_2 x_3]\}$$

$$= \exp[-\tfrac{1}{2}(t_1{}^2 + (t_1 - t_2)^2 + t_2{}^2]\sigma^2\}$$

13、设（X_1，X_2，X_3）服从三维正态分布N（0，B），其中协方差矩阵为B=（δ_{ld}）$_{3\times3}$，，且 $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta^2$. 试求　。

解 $\because E[(X_1^2 - \delta^2)(X_2^2 - \delta^2)(X_3^2 - \delta^2)]$

$$= E[X_1^2 X_2^2 X_3^2] - E[X_1^2 X_2^2 + X_1^2 X_3^2 + X_2^2 X_3^2] + 3\sigma^4 E[X_1^2] - \sigma^6$$

又 $\because f(t) = \exp\{-\tfrac{1}{2} t B t'\}$

$$\therefore \frac{\partial^4 f}{\partial t_1^2 t_2^2}\Big|_{t_1 = t_2 = t_3 = 0} = \sigma^4 + 2b_{12}^2$$

同理可得　$E(X_1^2 X_3^2) = \sigma^4 + 2$

$$E(X_2^2 X_3^2) = \sigma^4 + 2b_{23}^2$$

$$E(X_1^2 X_2^2 X_3^2) = \sigma^6 + 2\sigma^2 b_{12}^2 + 2\sigma^2 b_{13}^2 + 8 b_{12} b_{23} b_{13}$$

$$\therefore E[(X_1^2 - \delta^2)(X_2^2 - \delta^2)(X_3^2 - \delta^2)] = \ b_{12}$$

14、设 X_1，X_2，$\cdots X_n$ 相互独立同服从分布N（0，δ^2）。试求 $Y_n = \exp(-\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$ 的期望。

解$\because X_k \sim N(0,\sigma^2) \qquad (k=1,2,\cdots n)$

令 $X=(x_1,x_2,\cdots x_n) \qquad t=(t_1,t_2,\cdots t_n)$

则

$$f_X(t)=\exp\{-\frac{1}{2}t\,diag(\sigma^2,\sigma^2,\cdots\sigma^2)t'\}=\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{k=1}^{n}t_k^2\}$$

$$\therefore E(Y_n)=E\{\exp(-\sum_{k=1}^{n}t_k^2)\}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}-x_k^2}\,dx_k$$

$$\underline{\underline{y_n=(\frac{1}{2\sigma^2}+1)^{\frac{1}{2}}x_k}} \qquad \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}((\frac{1}{2\sigma^2}+1)^{-\frac{1}{2}})\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y_k^2}dy_k$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(\frac{1}{2\sigma^2}+1)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}$$

$$=(1+2\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}$$

15、设 X．Y 相互独立同分布的 $N(0,1)$ 随机变量，讨论 $U=X^2+Y^2$ 和 $V=\dfrac{X}{Y}$ 的独立性。

解 $\because \begin{cases} Z_1=X^2+Y^2 \\ Z_2=\dfrac{X}{Y} \end{cases}$

$$\therefore \text{有} \begin{cases} z_1=x^2+y^2 \\ z_2=\dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{z_1z_2}}{\sqrt{1+z_2^2}} \\ y=\dfrac{-\sqrt{z_1}}{\sqrt{1+z_2^2}} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{z_1z_2}}{\sqrt{1+z_2^2}} \\ y=\dfrac{\sqrt{z_1}}{\sqrt{1+z_2^2}} \end{cases}$$

则 $J^{-1}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y} \end{vmatrix}=-2\dfrac{x^2}{y^2}-2=-2(z_2^2+1)$

又 $R_{X\cdot Y}(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad (x,y)\in R^2$

$$\therefore P_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z_1}{2}}[-\tfrac{1}{2}\frac{1}{(1+z_2{}^2)}] \qquad (z_1>0,z_2\in R)$$

$$P_{Z_1}(z_1)=\frac{1}{2}e^{-\frac{z_1}{2}} \qquad (z_1>0)$$

$$P_{Z_2}(z_2)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+z_2^2} \qquad z_2\in R$$

$\therefore Z_1$服从指数分布，　Z_2服从柯西分布，且

对$\forall(z_1,z_2)\in R^2$,有

$$P_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=P_{Z_1}(z_1)\cdot p_{Z_2}(z_2)$$

$\therefore Z_1,Z_2$ 相互独立。

16、设 X． Y 相互独立同服从参数为 1 的指数分布的随机变量，讨论 $U=X+Y$和$V=\frac{X}{X+Y}$的独立性。

解（1）$\because P_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$P_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x\ge 0,y\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（2） $P_{U,V}(u,v)=e^{-[u(1-v)+uv]}\cdot u=\begin{cases}ue^{-u} & 0\le u\quad 0\le v<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（3） $P_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_{U,V}(u,v)dv=\begin{cases}0 & u<0\\ ue^{-u} & u\ge 0\end{cases}$

$$P_V(v)=\begin{cases}0 & v<0\text{或}v\ge 1\\ \int_0^{+\infty}ue^{-u}du=1 & 0\le v<1\end{cases}$$

$\therefore \quad P_{U,V}(u,v)=P_U(u)\cdot P_V(v)$ 　对$\forall(u,v)\in R^2$均成立

$\therefore U,V$相互独立

17、设二维随机变量（X，Y）的概率密度函数分别如下，试求E（X$|Y=y$)

（1） $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-y-\frac{x}{y}}, & x>0,y>0\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$

（2） $p(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda x}, 0<y<x \\ 0 \quad , \quad 其它\end{cases}$

证 （1）$\because E\{X|Y=y\}=\int_{-\infty}^{+\infty} xP_{X|Y}(x|y)dx$

$$=\frac{\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{1}{y}e^{-y-\frac{x}{y}}dx}{\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-y-\frac{x}{y}}dx}=y$$

（2）$E(X|Y=Y)\frac{\int_y^{+\infty} x\cdot\lambda^2 e^{-\lambda x}dx}{\int_y^{+\infty}\lambda^2 e^{-\lambda x}dx}=\frac{1+\lambda y}{\lambda}$

18、设 X、Y 是两个相互独立同分布的随机变量，X 服从区间[0，1]上的均匀分布，Y 服从参数为 λ 的指数分布。试求（1）X 与 $X+Y$ 的联合概率密度；（2）$D(X|Y=y)$.

解 $\because P_X(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,1) \\ 0 & 其它\end{cases}$

$P_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & \text{y}\ge 0 \\ 0 & \text{y<0}\end{cases}$

$\therefore P_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & 0\le x\le 1 \quad \text{y}\ge 0 \\ 0 & 其它 \quad \text{y<0}\end{cases}$

令 $\begin{cases}U=X \\ V=X+Y\end{cases}$ 则 $J=1\ne 0$ $\qquad \begin{cases}x=u \\ y=v-u\end{cases}$

$\therefore P_{X,X+Y}(u,v)=P_{X,Y}(u,v-u)\cdot|J|=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(v-u)} & 0\le u\le 1 \quad v\ge u \\ 0 & 其它\end{cases}$

（2） $D(X|Y=y)=D(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

19、设 $X_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是一列随机变量，且 $X_n = \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{n^k} & 1-\frac{2}{n^k} & \frac{1}{n^k} \end{pmatrix}$，其中 K 是正常数。试证：

（1）当 $k>1$ 时，X_n 几乎收敛于 0 。

（2）当 $k>2$ 时，X_n 均方收敛于 0；

（3）当 $k\le 2$ 时，X_n 不均方收敛于 0。

证　令 $X=0$

X_n	$-n$	0	n
P_k	$1/n^k$	$1-2/n^k$	$1/n^k$

∴

X_n^2	0	n^2
P_k	$1-2/n^k$	$2/n^k$

$\therefore P\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0\} = 1$　（∵当 $k>1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^k}=0$）　X_n 几乎肯定收敛于 0

$$E\{|X_n - X|^2\} = E\{X_n^2\} = 2n^{2-k}$$

当 $k>2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot n^{2-k} = 0$

$\therefore X_n$ 均方收敛于 0

当 $k\le 2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} \ne 0$

即 X_n 不均方收敛于 0。

20、设 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b,$ 试证 $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a+b.$

证 $\forall \varepsilon > 0$

$$\{|(x_n \pm y_n)-(a \pm b)| \geq \varepsilon\} = \{|(x_n - a) \pm (y_n - b)| \geq \varepsilon\}$$

$$\subset \{|x_n - a| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|y_n - b| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$\therefore\ 0 \leq P\{|(x_n \pm y_n)-(a \pm b)| \geq \varepsilon\}$$

$$\leq P\{|x_n - a| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} + P\{|y_n - b| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\therefore\ x_n \pm y_n \xrightarrow{P} a \pm b$$

第二章习题解答

1. 设 $X(i=1,2,\cdots)$ 是独立的随机变量列，且有相同的两点分布 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，令

$Y(0)=0, Y(n)=\sum_{i=1}^{n} X_i$，试求：

（1） 随机过程 $\{Y(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 的一个样本函数；

（2） $P[Y(1)=k]$ 及P[Y(n)=k]之值；

（3） $P[Y(n)=k]$；

（4） 均值函数；

（5） 协方差函数；

解： （1）当 $X_i = 1$ 时，$(i=1,2,\cdots)$， $y(n)=n$

（2）$P\{y(1)=k\} = P\{X_1 = k\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=-1\text{或}1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$X_1 + X_2$	2	0	-2
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$p\{Y(2)=k\}=P\{X_1+X_2=k\}=\begin{cases}\frac{1}{4} & k=2\\ \frac{1}{2} & k=0\\ \frac{1}{4} & k=-2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当 n 为奇数时

$Y(n)$	$-n$	$-n+2$	$\cdots$	-1	1	$\cdots$	$n-2$	n
P_k	$\frac{C_n^0}{2^n}$	$\frac{C_n^1}{2^n}$		$\frac{C_n^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}$	$\frac{C_n^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}$		$\frac{C_n^{n-1}}{2^n}$	$\frac{C_n^n}{2^n}$

当 n 为偶数时

$Y(n)$	$-n$	$-n+2$	$\cdots$	-2	0	2	$\cdots$	$n-2$	n
P_k	$\frac{C_n^0}{2^n}$	$\frac{C_n^1}{2^n}$		$\frac{C_n^{[\frac{n}{2}-]}}{2^n}$		$\frac{C_n^{[\frac{n}{2}]+1}}{2^n}$		$\frac{C_n^{n-1}}{2^n}$	$\frac{C_n^n}{2^n}$

（4） $E[Y(n)]=E[\sum_{i=1}^{n}x_i]=\sum_{i=1}^{n}E(x_i)$

而 $E(x_i)=0$

$\therefore E[\ Y(\ n)\ ]$

（5） $Cov[Y(n),Y(m)]=E\{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j]$

$\underline{\underline{若 m\le n}}\qquad E\{\sum_{k=1}^{n}x_k^2\}=\sum_{k=1}^{n}E\{x_k^2\}=m$

$\therefore$ 若 $n<m$，则有Cov[Y(n),Y(m)]=n

即有Cov[Y(n),Y(m)]=min(n,m)

2. 设 $X(t)=A\cos\omega t-B\sin\omega t$，其中 A、B 是相互独立且有相同的 $N(0,\sigma^2)$ 分布的随机变量，ω 是常数，$t\in(-\infty,+\infty)$，试求：

（1）X（t）的一个样本函数；

（2）X（t）的一维概率密度函数；

（3）均值函数和协方差函数。

解：（1）当 A=B=1 时，$X(t)=\cos\omega t-\sin\omega t$

（2）$\because X(t)=(A,B)\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -\sin\omega t\end{pmatrix}$　$(A,B)\sim N(0,B_1)$　　$B_1=\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}$

$\therefore X(t)\sim N(0,\sigma^2)$　　　$\therefore p_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}x\in(-\infty,+\infty)$

（3）$E[X(t)]=0$

$\text{cov}[X(s),X(t)]=E\{(A\cos\omega s-B\sin\omega s)(A\cos\omega t-B\sin\omega t)\}$

$=\sigma^2\cos\omega(s-t)$

3. 设随机过程 $X(t)=\sum_{k=1}^{n}(Y_k\cos\omega_k t+Z_k\sin\omega_k t),t\ge 0$。其中 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 是相互独立的随机变量，且 $Y_k,Z_k\sim N(0,\sigma_k^2),k=1,2,\cdots n$。

（1）求{X(t)}的均值函数和相关函数；

（2）证明{X(t)}是正态过程。

解：（1）$E[X(t)]=\sum_{k=1}^{n}[E(Y_k)\cos\omega_k t+E(Z_k)\sin\omega_k t]=0$

$R_X(s,t)=E[X(s)X[t]]$

$=E\{[\sum_{k=1}^{n}(Y_k\cos\omega_k s+Z_k\sin\omega_k s)][\sum_{k=1}^{n}(Y_k\cos\omega_k t+Z_k\sin\omega_k t)]\}$

$=E[\sum_{k=1}^{n}(Y_k^2\cos\omega_k s\cos\omega_k t+Z_k^2\sin\omega_k s\sin\omega_k t)]$

$=\sigma^2\sum_{k=1}^{n}\cos\omega_k(s-t)$

（2） $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)A$

$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)\sim N(0,B)$

其中 $A=\begin{pmatrix}\cos\omega_1t_1 & \cos\omega_1t_2 & \cdots & \cos\omega_1t_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos\omega_nt_1 & \cos\omega_nt_2 & \cdots & \cos\omega_nt_n\\ \sin\omega_1t_1 & \sin\omega_1t_2 & \cdots & \sin\omega_1t_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sin\omega_nt_1 & \sin\omega_nt_2 & \cdots & \sin\omega_nt_n\end{pmatrix}$， $B=diag(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots\sigma_k^2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots\sigma_k^2)$

由 n 维正态分布的线性性质得

$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))\sim N(0,A^{'}BA)$

因此 X(t)是正态过程。

4.设 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是参数为 σ^2 的 Wiener 过程，求下列过程的均值函数和相关函数：

（1） $X(t)=W^2(t),t\ge 0;$　　（2） $X(t)=tW(\frac{1}{t}),t>0$

（3） $X(t)=c^{-1}W(c^2t),t\ge 0$　　（4） $X(t)=W(t)-tW(t),0\le t\le 1$

解：（1） $m_X(t)=E[X(t)]=E[W^2(t)]=\sigma^2t$

$R_X(s,t)=E[W^2(s)W^2(t)]=E[W^2(s)]\cdot E[W^2(t)]+2\{E[W(s)\cdot W(t)]\}^2$

$=\sigma^4st+2\sigma^4\min^2(s,t)$

（2） $m_X(t)=E[tW(\frac{1}{t})]=0$

$R_X(s,t)=E[sW(\frac{1}{s})\cdot tW(\frac{1}{t})]=stE[W(\frac{1}{s})\cdot W(\frac{1}{t})]$

$=st\sigma^2\min(\frac{1}{s},\frac{1}{t})$

$=\sigma^2\min(s,t)$

（3） $m_X(t)=E[X(t)]=E[c^{-1}W(c^2t)]=c^{-1}E[W(c^2t)]=0$

$R_X(s,t)=E[X(s)\cdot X(s)]=E[c^{-1}W(c^2s)\cdot c^{-1}W(c^2t)]$

$=c^{-2}E[W(c^2s)\cdot W(c^2t)]$

$=c^{-2}\cdot\sigma^2\cdot c^2\min(s,t)$

$=\sigma^2\min(s,t)$

（4） $m_X(t)=E[X(t)]=E[W(t)-tW(t)]=0$

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t)&=E[X(s)X(t)]\\
&=E\{[W(s)-sW(s)][W(t)-tW(t)]\}\\
&=(1-s)(1-t)E\left[W(s)W(t)\right]\\
&=(1-s)(1-t)\sigma^2\min(s,t)
\end{aligned}
$$

5. 设到达某商店的顾客组成强度为λ的 Poisson 流，每个顾客购买商品的概率为 p，且与其他顾客是否购买商品无关，若$\{Y(t),t\ge 0\}$是购买商品的顾客流，证明$\{Y(t),t\ge 0\}$是强度为λp的 Poisson 流。

证：令 X_n 表示“第 n 个顾客购买商品”，则 $P(X_n=1)=p,P(X_n=0)=1-p=q$ 且 $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n$。其中 $N(t)$ 为 $[0,t]$ 时间段内到达商店的顾客人数，则 $Y(t)$ 的特征函数为

$$
\begin{aligned}
f_{Y(t)}(u)&=E\{\exp[juY(t)]\}\\
&=E\{\exp[ju\sum_{n=1}^{N(t)}X_n]\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\exp[ju\sum_{k=1}^{N(t)}X_k]\big|N(t)=n\}\cdot P\{N(t)=n\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}[pe^{ju}+q]^n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\\
&=e^{p\lambda t(e^{ju}-1)}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \{Y(t),t\ge 0\}$ 是强度为λp的 Poisson 流。

6. 在题 5 中，进一步设$\{Z(t),t\ge 0\}$是不购买商品的顾客流，试证明$\{Y(t),t\ge 0\}$与$\{Z(t),t\ge 0\}$是强度分别为λp和$\lambda(1-p)$的相互独立的 Poisson 流。

证：（1）$\because N(t)=Z(t)+Y(t)$

$$\therefore\quad f_{Z(t)}(u)=E\{\exp[ju(N-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i)]\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\exp[ju(n-\sum_{i=1}^{n}X_i)]\}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\lambda te^{ju}(pe^{ju}+q)]^{n}e^{-\lambda t}$$

$$=e^{\lambda t(p+qe^{ju})-\lambda t}$$

$$=e^{\lambda t(1-p)(e^{ju}-1)}$$

$\because$ $f_N(u)=E\{\exp[juN(t)]\}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{juk}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$=e^{\lambda t(e^{ju}-1)}$$

$\therefore$ $f_N(u)=f_Y(u)\cdot f_Z(u)$

$\therefore$ $\{Z(t),t\geq 0\}$与$\{Y(t),t\geq 0\}$独立且强度为$\lambda(1-p)$的 Poisson 流。

7. 设$\{N_1(t),t\geq 0\}$和$\{N_2(t),t\geq 0\}$分别是强度为λ_1和λ_2的独立 Poisson 流。试证明：

（1）$\{N_1(t)+N_2(t),t\geq 0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的 Poisson 流；

（2）在$\{N_1(t),t\geq 0\}$ 的任一到达时间间隔内，$\{N_2(t),t\geq 0\}$恰有 k 个时间发生的概率为

$$p_k=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^k,k=0,1,2,\cdots$$

证：（1）$\because$ $f_{N_1(t)+N_2(t)}(t)=E\{e^{ju(N_1+N_2)}\}$

$$=E\{e^{juN_1}\}\cdot E\{e^{juN_2}\}$$

$$=e^{\lambda_1(e^{ju}-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^{ju}-1)}$$

$$=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{ju}-1)}$$

$\therefore$ $\{N(t),t\geq 0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的 Poisson 流。

（2）令 T 表示过程$\{N_1(t)+N_2(t),t\geq 0\}$任两质点到达的时间间隔。A 表示$\{N_2(t),t\geq 0$恰有 1 个事件发生在$\{N_1(t),t\geq 0\}$的任一到达时间间隔内，则

$$P(A)=P\{T_2<T_1\}=\int_0^{\infty}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx\int_x^{\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 y}dy$$

8. 设$\{N(t),t\geq 0\}$是 Poisson 过程，τ_n和T_n分别是$\{N(t),t\geq 0\}$的第 n 个事件的到达时间和点间间隔。试证明：

（1）$E(\tau_n)=nE(T_n),n=1,2,\cdots$；

（2）$D(\tau_n)=nD(T_n),n=1,2,\cdots$。

证：$\because E(T_n)=\frac{1}{\lambda},E(\tau_n)=\frac{n}{\lambda},D(T_n)=\frac{1}{\lambda^2},D(\tau_n)=\frac{n}{\lambda^2}$

$\therefore E(\tau_n)=nE(T_n),n=1,2,\cdots$　　　　$D(\tau_n)=nD(T_n),n=1,2,\cdots$

9. 设某电报局接收的电报数$N(t)$组成 Poisson 流，平均每小时接到 3 次电报，求：

（1）一上午（8 点到 12 点）没有接到电报的概率；

（2）下午第一个电报的到达时间的分布。

解：

10. 设$\{N_1(t),t\geq 0\}$和$\{N_2(t),t\geq 0\}$分别是强度为λ_1和λ_2的独立 Poisson 过程，令$X(t)=N_1(t)+N_2(t),t\geq 0$，求$\{X(t),t\geq 0\}$的均值函数与相关函数。

解：$E[X(t)]=E[N_1(t)-N_2(t)]=E[N_1(t)]-E[N_2(t)]=(\lambda_1-\lambda_2)t$

$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E\{[N_1(s)-N_2(s)][N_1(t)-N_2(t)]\}$

$$\begin{aligned}&E[N_1(s)N_1(t)-N_1(s)N_2(t)-N_2(s)N_1(t)+N_2(s)N_2(t)]\\&=\lambda_1^2 st+\lambda_1\min(s,t)-2st\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2 st+\lambda_2\min(s,t)\\&=(\lambda_1-\lambda_2)^2 st+(\lambda_1+\lambda_2)\min(s,t)\end{aligned}$$

11. 设$\{X(t),t\geq 0\}$是强度为λ的 Poisson 过程，T 是服从参数为γ的指数分布的随机变量，且与$\{X(t)\}$独立，求$[0,T]$内事件数 N 的分布律。

解：由$[0,T]$内 N 的分布律为：

$$P(N(T)=k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}p_T(x)dx$$

$$=\gamma\int_0^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}x^k e^{-(\lambda+\gamma)x}dx$$

$$=\frac{\gamma\lambda^k}{k!}\cdot\frac{k!}{(\lambda+\gamma)^{k+1}}\qquad k=0,1\cdots$$

$$=\frac{\lambda^k\gamma}{(\lambda+\gamma)^{k+1}}$$

第三章习题解答

1．证明 Poisson 随机变量序列的均方极限是 Poisson 随机变量。

证：令$\{X_n,n\in N\}$是 Poisson 随机变量序列，则对$\forall n\in N$ $p\{X_n=k\}=\frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n}k=0,1\cdots$

又$\because \lim\limits_{n\to\infty}E\{|X_n|^2\}=\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda+\lambda^2)=\lambda+\lambda^2=E(|X|^2)$，其中 X 为 Poisson 随机变量。

2．设$X_n,n=1,2\cdots$，是独立同分布的随机变量序列，均值为μ，方差为 1，定义$Y_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，证明$\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{n\to\infty}X_n=\mu$。

证：$\because \left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-\mu\right\|^2=\left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}[X_k-E(X_k)]\right\|^2$

$$=E\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[X_k-E(X_k)]\right|^2\}$$

$$=\frac{1}{n^2}E\{\overline{\sum_{k=1}^{n}[X_k-E(X_k)]}\sum_{l=1}^{n}[X_l-E(X_l)]\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathrm{cov}(X_k,X_l)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)(X_n\text{的独立性})$$

$$=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$$

$\therefore \mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{n\to\infty}Y_n=\mu$。

3．研究下列随机过程的均方连续性、均方可导性和均方可积性。

（1）$X(t)=At+B$，其中 A、B 是相互独立的二阶矩随机变量，均值为 a、b，方差为σ_1^2、σ_2^2；

（2）$X(t)=At^2+Bt+C$，其中 A、B、C 是相互独立的二阶矩随机变量，均值为 a、 b、c，方差为σ_1^2、σ_2^2、σ_3^2；

（3）$\{N(t), t \ge o\}$是 Poisson 过程；

（4）$\{W(t), t \ge o\}$是 Wiener 过程。

解：（1）$\because E[X(t)] = E[At + B] = ta + b$

$$R_X(s,t) = E\{\overline{X(s)}X(t)\} = E\{\overline{(As+B)}(At+B)\}$$

$$= stE(A^2) + sE(\overline{A}B) + tE(A\overline{B}) + E(\overline{B}B)$$
$$= st(\sigma_1^2 + a^2) + sab + tab + \sigma_2^2 + b^2$$

是关于 s, t 的多项式函数

$\therefore$存在任意阶的偏导数

$\therefore$过程是均方连续，均方可导，均方可积。

(2)$\because E\left[X(T)\right] = E\left[At^2 + Bt + C\right] = at^2 + bt + c$

$$R_X(s,t) = E\left\{X(s)X(t)\right\}$$
$$= E\left\{(As^2 + Bs + C)(At^2 + Bt + C)\right\}$$
$$= s^2t^2(a^2 + \sigma_1^2) + s^2tab + s^2ac + st^2ab + st(b^2 + \sigma_2^2) + t^2ac + tbc + c^2 + \sigma_3^2$$

（3）由$R_N(s,t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s,t)$知 Poisson 过程$\{N(t), t \ge o\}$是均方连续，均方可积的。

$$\because \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{R_N(t+\Delta s, t) - R_N(t,t)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\lambda^2 (t+\Delta s)t + \lambda t - (\lambda^2 t^2 + \lambda t)}{\Delta s} = \lambda^2 t$$
$$\lim_{\Delta s \to 0^-} \frac{R_N(t+\Delta s, t) - R_N(t,t)}{\Delta s} = \lambda^2 t + \lambda$$

$\therefore R_N^{''}(t,t)$不存在，即均方不可导。

（4）由$R_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$知 Wiener 过程$\{W(t), t \ge o\}$是均方连续，均方可积的。

$$\because \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{R_W(t+\Delta t, t) - R_W(t,t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0}{\Delta t} = 0$$
$$\lim_{\Delta t \to 0^-} \frac{R_W(t+\Delta t, t) - R_W(t,t)}{\Delta t} = \sigma^2$$

$\therefore R_W^{''}(t,t)$不存在，即均方不可导。

4．试研究上题中过程的均方可导性，当均方可导时，试求均方导数过程的均值函数和相关函数。

解：（1）均方可导

$$m_{X'}(t)=a$$

$$R_{X'}(s,t)=R''_{st}(s,t)=\sigma_1^2+a^2$$

又$\because R_X(s,t)=st(\sigma_1^2+a^2)+ab(s+t)+\sigma_2^2+b^2$

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\frac{1}{\Delta t\Delta s}\{R_X(s+\Delta s,t+\Delta t)-R_X(s+\Delta s,t)-R_X(s,t+\Delta t)+R_X(s,t)\}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\frac{1}{\Delta t\Delta s}\{(s+\Delta s)(t+\Delta t)(\sigma_1^2+a^2)+ab(s+\Delta s)(t+\Delta t)+\sigma_2^2+b^2$$
$$-[(s+\Delta s)t(\sigma_1^2+a^2)+ab(s+\Delta s+t)+\sigma_2^2+b^2]$$
$$-[s(t+\Delta t)(\sigma_1^2+a^2)+ab(s+t+\Delta t)+\sigma_2^2+b^2]$$
$$+[st(\sigma_1^2+a^2)+ab(s+t)+\sigma_2^2+b^2]\}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\frac{1}{\Delta t\Delta s}\{(\sigma_1^2+a^2)\Delta s\Delta t\}=\sigma_1^2+a^2<\infty$$

$\therefore X_T$ 均方可微。

（2）均方可导，且

$$E[X'(t)]=m_{X'}(t)=2at+b$$

$$R_{X'}(s,t)=R''_{ts}(s,t)=[(a+\sigma_1^2)s^2\cdot 2t+abs^2+abs\cdot 2t+(b^2+\sigma_2^2)s+ac\cdot 2+bc+0]'_s$$
$$=4(a^2+\sigma_1^2)st+2abs+2abt+b^2+\sigma_2^2+0$$
$$=4(a^2+\sigma_1^2)st+2ab(s+t)+b^2+\sigma_2^2$$

（3）Poisson 过程$\{N(t),t\ge o\}$均方不可导。

（4）Wiener 过程$\{W(t),t\ge o\}$均方不可导。

5．求下列随机过程的均值函数和相关函数，从而判断其均方连续性和均方可微性。

（1）$X(t)=\cos(\omega t+\Theta)$，其中$\omega$是常数，$\theta$服从$[0,2\pi]$上的均匀分布；

（2）$X(t)=tW(\frac{1}{t}),t>0$，其中$W(t)$参数为 1 的 Wiener 过程；

（3） $X(t)=W^2(t), t\geq 0$，其中$W(t)$参数为σ^2的 Wiener 过程。

解：（1） $E\{X(t)\}=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)d\theta=\dfrac{1}{2\pi}\sin(\omega t+\theta)\Big|_0^{2\pi}=0$ 。

$$R_X(s,t)=E\{X(s)X(t)\}=E\{\cos(\omega s+\Theta)\cos(\omega t+\Theta)\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos((t+s)+2\theta)+\cos((t-s)\omega)]d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cos\omega(t-s)$$

（2） $E\{X(t)\}=E\{tW(\frac{1}{t})\}=0$

当$s<t$， $R_X(s,t)=E\{tsW(\frac{1}{s})W(\frac{1}{t})\}=stE\{[W(\frac{1}{s})-W(\frac{1}{t})+W(\frac{1}{t})]W(\frac{1}{t})\}$
$$=stE\{W^2(\frac{1}{t})\}=st\cdot\min(\frac{1}{s},\frac{1}{t})=s$$

$\therefore R_X(s,t)=\min(s,t)=\min(s,t)$

$\therefore$均方连续，但均方不可微，均方可积。

（3） $E\{X(t)\}=E\{W^2(t)\}=\sigma^2 t$

$$R_X(s,t)=E\{W^2(s)W^2(t)\}=\begin{cases}\sigma^4 s(t+2s) & s<t\\ \sigma^4 t(s+2t)s & s\geq t\end{cases}$$

$\therefore$均方连续，但均方不可微，均方可积。

6．均值函数为$m_X(t)=5\sin t$、相关函数为$R_X(s,t)=3e^{-0.5(t-s)2}$的随机过程$X(t)$输入微分电路，该电路输出随机过程$Y(t)=X^{'}(t)$，试求$Y(t)$的均值函数和相关函数、$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数。

解： $E[Y(t)]=E[X^{'}(t)]=m_{X^{'}}(t)=(5\sin t)_t^{'}=5\cos t$

$$R_Y(s,t)=E[Y(s)Y(t)]=E[X^{'}(s)X^{'}(t)]$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)=(3e^{-0.5(t-s)^2}\cdot(t-s))_t^{'}=3[1-(t-s)^2]\cdot e^{-0.5(t-s)^2}$$

$$R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)]=E[X(s)X^{'}(t)]=-3(t-s)e^{-0.5(t-s)^2}$$

7．试求第 3 题中可积过程的如下积分：

$$Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t X(u)du \qquad\qquad Z(t)=\frac{1}{L}\int_t^{t+L} X(u)du$$

的均值函数和相关函数。

解：（1）$\because Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t (Au+B)du=\frac{1}{t}(\frac{Au^2}{2}+Bu)\Big|_0^t=\frac{1}{2}At+B$

$$\therefore E[Y(t)]=\frac{at}{2}+b$$

$$R_Y(s,t)=E\{(\frac{1}{2}As+B)(\frac{1}{2}At+B)\}=E\{\frac{1}{4}A^2st+\frac{AB}{2}s+\frac{AB}{2}t+B^2\}$$
$$=\frac{st}{4}(\sigma_1^2+a^2)+(\sigma_2^2+b^2)+\frac{1}{2}ab(s+t)$$

又$\because Z(t)=\frac{1}{L}\int_t^{t+L}(Au+B)=\frac{1}{L}(\frac{Au^2}{2}+Bu)\Big|_t^{t+L}=At+AL+B$

$$\therefore E[Z(t)]=a(t+L)+b$$

$$R_Z(s,t)=E\{[A(s+L)+B][A(t+L)+B]\}$$

$$=(s+L)(t+L)(\sigma_1^2+a^2)+(\sigma_2^2+b^2)+ab(s+L)+ab(t+L)$$

（2）$\because Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t (Au^2+Bu+C)du=\frac{1}{t}(\frac{Au^3}{3}+\frac{Bu^2}{2}+Cu)\Big|_0^t=\frac{At^2}{3}+\frac{Bt}{2}+C$

$$\therefore E[Y(t)]=\frac{at^2}{3}+\frac{bt}{2}+c$$

$$R_Y(s,t)=E\{(\frac{As^2}{3}+\frac{Bt}{2}+C)(\frac{At^2}{3}+\frac{Bt}{2}+C)\}$$

$$=E\{(\frac{ts}{3})^2A^2+\frac{1}{6}(t^2s+ts^2)AB+\frac{1}{3}(t^2+s^2)AC+\frac{st}{4}B^2+\frac{1}{2}(t+s)BC+C^2\}$$
$$=(\frac{ts}{3})^2(\sigma_1^2+a^2)+\frac{abts}{6}(t+s)+\frac{ac}{3}(t^2+s^2)+\frac{st}{4}(\sigma_2^2+b^2)+\frac{bc}{2}(t+s)+\sigma_3^2+c^2$$

$$Z(t)=\frac{1}{L}\int_t^{t+L}(Au^2+Bu+C)du=\frac{1}{L}(\frac{A}{3}u^3+\frac{B}{2}u^2+Cu)\Big|_t^{t+L}$$

$$=A(t^2+tL+\frac{L^2}{3})+B(t+\frac{L}{2})+C$$

$$E[Z(t)]=a(t^2+tL+\frac{L^2}{3})+b(t+\frac{L}{2})+c$$

$$R_Z(s,t)=E\overline{\{[A(s^2+sL+\frac{L^2}{3})+B(s+\frac{L}{2})+C][A(t^2+tL+\frac{L^2}{3})+B(t+\frac{L}{2})+C]\}}$$

$$=(\sigma_1^2+a^2)(s^2+sL+\frac{L^2}{3})(t^2+tL+\frac{L^2}{3})+(\sigma_2^2+b^2)(s+\frac{L}{2})(t+\frac{L}{2})$$

$$+(\sigma_3^2+c^2)ab[(s^2+sL+\frac{L^2}{3})+(t^2+tL+\frac{L^2}{3})+(s+\frac{L}{2})(t^2+tL+\frac{L^2}{3})]$$

$$+ac[(s^2+sL+\frac{L^2}{3})+(t^2+tL+\frac{L^2}{3})+bc[(s+\frac{L}{2})+(t+\frac{L}{2})]]$$

(3) $Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t N(u)du$ $\qquad\qquad$ $Z(t)=\frac{1}{L}\int_t^{t+L} N(u)du$

$$E[Y(t)]=\frac{1}{t}E[\int_0^t N(u)du]=\frac{1}{t}\int_0^t \lambda u du=\frac{\lambda u^2}{2t}\Big|_0^t=\frac{\lambda t}{2}$$

当 $s<t$ 时 $\qquad R_Y(s,t)=E[Y(s)Y(t)]=\frac{1}{ts}\int_0^t E\{N(u)N($

$$=\frac{1}{ts}\int_0^s\int_0^t R_N(u,v)dudv=\frac{1}{ts}\int_0^s\int_0^t[\lambda uv+\min(u,v)]dudv$$

$$=\frac{\lambda^2 st}{4}+\frac{\lambda s}{6t}(3t-s)$$

$$\therefore R_Y(s,t)=\begin{cases}\frac{\lambda^2 st}{4}+\frac{\lambda s}{6t}(3t-s) & s<t\\ \frac{\lambda^2 st}{4}+\frac{\lambda t}{6s}(3s-t) & s\ge t\end{cases}$$

$$E[Z(t)]=\frac{1}{L}E[\int_t^{t+L}N(u)du]=\frac{1}{L}\int_t^{t+L}\lambda u du=\frac{\lambda}{2}(2t+L)$$

当 $o<t-s\le L$

$$R_Z(s,t)=E[Z(s)Z(t)]=\frac{1}{L^2}E\int_s^{s+L}\int_t^{t+L}\{N(u)N(v)\}dudv$$

$$=\frac{1}{L^2}\int_s^{s+L}\int_t^{t+L}[\lambda uv+\min(u,v)dudv]$$

$$=(s+\frac{L}{2})(t+\frac{L}{2})+\frac{(s-t)}{L}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6L^2}[3(s+L)^2-2(s-L)^3-t^3]$$

当 $-L<t-s<0$ 时

$$R_Z(s,t)=(s+\frac{L}{2})(t+\frac{L}{2})+\frac{(s-t)}{L}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6L^2}[3(t+L)^2-2(t-L)^3-s^3]$$

(4) $Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t W(u)du$ $\qquad\qquad$ $Z(t)=\frac{1}{L}\int_t^{t+L} W(u)du$

$$E[Y(t)]=\frac{1}{t}\int_0^t E[W(u)]du=0 \qquad\qquad E[Z(t)]=0$$

$$R_Y(s,t)=\frac{1}{ts}\int_0^s\int_0^t R_W(u,v)dudv=\frac{\sigma^2}{ts}\int_0^s\int_0^t \min(u,v)dudv$$

$$=\begin{cases}\int_0^s du\int_0^u vdv+\int_0^s udu\int_u^t dv \\ \int_0^t dv\int_0^v udu+\int_0^t vdv\int_v^s du\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2 s}{6t}(3t-s) & s<t \\ \dfrac{\sigma^2 t}{6s}(3s-t) & s\ge t\end{cases}$$

$$R_Z(s,t)=\frac{1}{L^2}\int_s^{s+L}\int_t^{t+L} R_W(u,v)dudv=\frac{\sigma^2}{L^2}\int_s^{s+L}\int_t^{t+L}\min(u,v)dudv$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2}{L^2}[\int_t^{s+L}du\int_t^u vdv+\int_s^{s+L}udu\int_t^{t+L}vdv-\int_t^{s+L}du\int_t^u vdv](0<t-s\le L) \\ \dfrac{\sigma^2}{L^2}(0\le s-t\le L) \\ \dfrac{\sigma^2}{L^2}\int_s^{s+L}udu=\sigma^2(s+\dfrac{L}{2})(s+L<t) \\ \dfrac{\sigma^2}{L^2}\int_s^{s+L}du\int_t^{t+L}vdv=\sigma^2(t+\dfrac{L}{2})(t-s<-L)\end{cases}$$

8．设随机过程 $X(t)=Ve^{3t}\cos 2t$，其中 V 是均值为 5、方差为 1 的随机变量，试求随机过程 $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ 的均值函数、相关函数、协方差函数与方差函数。

解: $E[Y(t)]=\int_0^t 5e^{3s}\cos 2sds=\dfrac{5e^{3t}}{13}(2\sin 2t+3\cos 2t-3)$

$$R_Y(s,t)=\int_0^s\int_0^t E(v^2)e^{(u+v)}\cos 2u\cdot\cos 2vdudv$$

$$=26\int_0^s e^{3u}\cos 2udu\int_0^t e^{3v}\cos 2vdv$$

$$=26[\frac{e^{3s}}{13}(2\sin 2s+3\cos 2s-3)\cdot\frac{e^{3t}}{13}(2\sin 2t+3\cos 2t-3)]$$

$$=\frac{2e^{3(s+t)}}{13}(2\sin 2s+3\cos 2s-3)(2\sin 2t+3\cos 2t-3)$$

$$COV_Y(s,t)=R_Y(s,t)-m_Y(s)\cdot m_Y(t)$$

$$=\frac{2e^{3(s+t)}}{13}(2\sin 2s+3\cos 2s-3)(2\sin 2t+3\cos 2t-3)$$

$$D[Y(t)] = R_Y(t,t) - [m_Y(t)]^2$$

$$= \frac{2}{13}e^{6t}(2\sin 2t + 3\cos 2t - 3)^2 - \frac{25}{13^2}e^{6t}(2\sin 2t + 3\cos 2t - 3)^2$$

$$= \frac{e^{6t}}{169}(2\sin 2t + 3\cos 2t - 3)^2$$

9．设$\{W(t), t \ge 0\}$是参数为σ^2的 Wiener 过程，求下列随机过程的均值函数和相关函数。

（1）$X(t) = \int_0^t W(s)ds, t \ge 0$；

（2）$X(t) = \int_0^t sW(s)ds, t \ge 0$；

（3）$X(t) = \int_t^{t+1}[W(s) - W(t)]ds, t \ge 0$

解：（1）$E[X(t)] = \int_0^t E[W(s)]ds = 0$

$$R_X(s,t) = \int_0^s \int_0^t \min(u,v)dudv$$

$$= \begin{cases} \sigma^2[\int_0^s du \int_0^u vdv + \int_0^s udu \int_u^t dv] = \frac{\sigma^2 s^2}{6}(3t - s) & s < t \\ \frac{\sigma^2 t^2}{6}(3s - t) & s \ge t \end{cases}$$

（2）$E[X(t)] = 0$

$$R_X(s,t) = \int_0^s \int_0^t uv\min(u,v)dudv$$

$$= \begin{cases} \sigma^2 \int_0^s udu \int_0^u v^2 dv + \int_0^s u^2 du \int_u^t vdv = \sigma^2(\frac{s^5}{15} + \frac{t^2 s^3}{6} - \frac{s^5}{10}) = \frac{\sigma^2 s^3}{30}(5t^2 - s^2) & s < t \\ \frac{\sigma^2 t^3}{30}(5s^2 - t^2) & s \ge t \end{cases}$$

（3）$E[X(t)] = 0$

$$R_X(s,t) = \int_s^{s+1}\int_t^{t+1} E\{[W(u) - W(s)][W(v) - W(t)]\}dudv$$

$$= \begin{cases} 0 & 1 + s < t \text{或} s > t + 1 \\ \int_t^{t+1}\int_s^{s+1} \sigma^2 \min(u - s, v - t)dudv & s < t < s + 1 \\ \int_s^{s+1}\int_t^{t+1} \sigma^2 \min(u - s, v - t)dudv & t < s < t + 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & 1+s<t\text{或}s>t+1 \\ \sigma^2[\frac{(s+1)^3}{6}-\frac{t(s+1)^2}{2}+\frac{t^2(s+1)}{2}-\frac{t^3}{6}] & s<t<s+1 \\ \sigma^2[\frac{(t+1)^3}{6}-\frac{s(t+1)^2}{2}+\frac{s^2(t+1)}{2}-\frac{s^3}{6}] & t<s<t+1 \end{cases}$$

10．求一阶线性随机微分方程$\begin{cases} X^{'}(t)+aX(t)=0 \\ X(0)=X_0 \end{cases}(a>0)$的解及解的均值函数、相关函数及解的一维概率密度函数，其中X_0是均值为0、方差为σ^2的正态随机变量。

解：（1）$\because \int\frac{dx}{x}=-\int adt$

$\therefore \ln x=-at+\ln c \qquad \Rightarrow X(t)=ce^{-at} \qquad \Rightarrow X(0)=c$

$\therefore X(t)=X_0e^{-at}$ 解过程为：$\{X_0e^{-at},t\geq 0\}$

（2）$E[X(t)]=E[X_0e^{-at}]=0$

$R_X(s,t)=E\{X_0e^{-a(s+t)}\}=\sigma^2e^{-a(s+t)}$

$F_X(x)=P\{X\geq x\}=P\{X_0e^{-at}\leq x\}=P\{X_0\leq xe^{-at}\}=F_{X_0}(xe^{-at})$

$P_X(x)=F_X^{'}(x)=e^{at}F_{X_0}^{'}(xe^{-at})=\frac{e^{at}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2e^{2at}}{2\sigma^2}}$

11．求一阶线性随机微分方程的解及解的均值函数、相关函数。

（1）$\begin{cases} Y^{'}(t)=X(t),t\in[a,b] \\ Y(a)=Y_0 \end{cases}(a>0)$，其中$X(t)$是一已知的二阶均方连续过程，$Y_0$是与$X(t)$独立的均值为$m$、方差为$\sigma^2$的随机变量。

（2）$\begin{cases} Y^{'}(t)+aY(t)=X(t),t\geq 0 \\ Y(0)=0 \end{cases}(a>0)$，其中$X(t)$是一已知的均值函数为$m_X(t)=\sin t$、相关函数为$R_X(s,t)=e^{-\lambda|t-s|}(\lambda>0)$的二阶均方连续过程。

解：（1）$\int_{Y_0}^{Y}Y^{'}(t)dt=\int_a^t X(u)du$

$Y(t)-Y_0=\int_a^t X(u)du$

$\therefore Y(t)=Y_0+\int_a^t X(u)du$

即方程的解为：$Y(t)=\{Y_0+\int_a^t X(u)du, t\in[a,b]\}$

$$E[Y(t)]=E[Y_0+\int_a^t X(u)du]=E[Y_0]+E[\int_a^t X(u)du]=m+\int_a^t m_X(u)du$$

（2）均方解为：$Y(t)=\int_0^t X(s)e^{-a(t-s)}ds$

$$\therefore E[Y(t)]=\int_0^t m_X(s)e^{-a(t-s)}ds=\int_0^t \sin s\cdot e^{-a(t-s)}ds=\frac{1}{1+a^2}(e^{-at}-\cos t+a\sin t)$$

$$R_Y(s,t)=\int_0^s\int_0^t e^{-\lambda|u-v|}\cdot e^{-a(s+t-u-v)}dudv$$

（当$t<s$时）

$$=\int_0^t dv\int_0^v e^{-\lambda(v-u)}\cdot e^{-a(s+t-u-v)}du+\int_0^t dv\int_v^s e^{-\lambda(v-u)}\cdot e^{-a(s+t-u-v)}du$$

$$=e^{-a(s+t)}\int_0^t e^{(a-\lambda)v}dv\int_0^v e^{(a+\lambda)u}du+e^{-a(s+t)}\int_0^t e^{(a+\lambda)v}dv\int_v^s e^{(a-\lambda)u}du$$

$$=\frac{e^{-a(s+t)}}{a+\lambda}\int_0^t e^{(a-\lambda)v}[e^{(a+\lambda)v}-1]dv+\frac{e^{-a(s+t)}}{a-\lambda}\int_0^t e^{(a+\lambda)v}[e^{(a-\lambda)s}-e^{(a-\lambda)v}]dv$$

$$=\frac{e^{-a(s+t)}}{a+\lambda}[\frac{1}{2a}(e^{2at}-1)-\frac{1}{a-\lambda}(e^{(a-\lambda)t}-1)]+\frac{e^{-a(s+t)}}{a-\lambda}[\frac{e^{(a-\lambda)s}}{a+\lambda}(e^{(a+\lambda)t}-1)-\frac{1}{2a}(e^{2at}-1)]$$

$$=\frac{1}{a^2-\lambda^2}[e^{-\lambda(s-t)}-\frac{\lambda}{a}e^{-(s-t)}+(1+\frac{\lambda}{a})e^{-a(s+t)}-e^{-(\lambda t+as)}-e^{-(at+\lambda s)}]$$

第四章习题解答

1. 随机过程 $X(t)=A\cos(wt+\Theta)$，其中 *A 具有 Rayleigh 分布，即其概率密度函数为*

$$P(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}), & x>0 \\ & (\sigma>0) \\ 0 & , x\le 0\end{cases}$$

式中Θ服从区间$[0,2\pi]$上的均匀分布，且A、Θ相互独立，试研究 *X 是否为平稳过程。*

解：$\because E[X(t)]=E(A)E[\cos(\omega t+\Theta)]$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos[\omega t+\theta]d\theta$$

$$=0$$

$$R_X(s,t)=E\{A\cos(\omega s+\Theta)\cdot\cos(\omega t+\Theta)\}$$

$$=E(A^2)E[\cos(\omega s+\Theta)\cdot\cos(\omega t+\Theta)]$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx\cdot\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\{\cos[2\theta+\omega(t+s)]+\cos(t-s)\}d\theta$$

$$=2\sigma^2\cdot\frac{2\pi}{4\pi}\cos\omega(t-s)$$

$$=\sigma^2\cos\omega(t-s)$$

$\therefore\{X(t),t\in T\}$*是平稳过程.*

2、*X*是一平稳过程，且满足 ，称 *X*为周期平稳过程，*T*为其周期，试求 *X*的相关函数也是以 *T 为周期的周期函数。*

解： $\because$是平稳过程，

$\therefore E(X)=m,R_X(s,t)=R(\tau),(\tau=t-s,s<t)$

又$\because R_X(\tau+T)=E\{\overline{X(s)}X(t+T)\}=E\{\overline{X(s)}X(t)\}=R_X(\tau)$

$\therefore R_X(\tau)$以 T 为周期.

3、设 *X*、*Y*是两个相互独立的实平稳过程，试证明$Z(t)=X(t)+Y(t)$也是平稳过程。

解 $\because E[Z(t)]=E[X(t)+Y(t)]=E[X(t)]+E[Y(t)]=m_X+m_Y$

$$R_Z(s,t)=E\{Z(s)Z(t)\}$$

$$=E\{[X(s)+Y(s)]+[X(t)+Y(t)]\}$$

$$=E\{X(s)X(t)+X(s)Y(t)+Y(s)X(t)+Y(s)Y(t)\}$$

$$=R_X(\tau)+2m_Xm_Y+R_Y(\tau)$$

$\therefore Z(t)$也是平稳过程

4、设 是 *n* 阶均方可微的平稳过程，证明$\{X^{(n)}(t),-\infty<t<+\infty\}$是平稳过程，且

$$R_{X^{(n)}}(\tau)=(-1)^nR_X^{(2n)}(\tau)$$

解： $\because E\{X^{(n)}(t)\}=(m_X)_t^{(n)}=0$

$$R_{st}''(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)=\frac{\partial}{\partial t}[-R_X'(\tau)]=-R_X''(\tau)$$

利用归纳法可得

$$R_X^{(n)}(\tau)=(-1)^{(n)}R_X^{(2n)}(\tau)$$

$\therefore \{X^{(n)}(t),t\in R\}$ 平稳过程

5、设$\{X(n)\}$是一均值为 0 的平稳时间序列，证明：

（1）$Z(n)=AX(n)+BX(n-m)$ 扔是一平稳时间序列；

（2）若数列$\{A_k\}$绝对收敛，即$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|A_k|<+\infty$，则$Z(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_kX(n-k)$ 扔是一平稳时间序列；

（3）若$\{X(n)\}$是一白噪声，试求$Z(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_kX(n-k)$的相关函数及其谱函数。

解（1）$\because E[Z(n)]=E\{AX(n)+BX(n-m)\}$

$$=AE\{X(n)\}+BE\{X(n-m)\}$$

$$=0$$

$$R_Z(s,t)=E\{\overline{Z(s)}Z(t)\}$$

$$=E\{[\overline{AX(s)+Bx(s-m)}][AX(t)+BX(t-m)]\}$$

$$=E\{|A|^2\,\overline{X(s)}X(t)+\overline{A}B\overline{X(s)}X(t-m)+\overline{B}A\overline{X(s-m)}X(t)+|B|^2\,\overline{X(s-m)}X(t-m)\}$$

$$=|A|^2R_X(t-s)+\overline{A}BR_X(t-m-s)+\overline{B}AR_X(t+m-s)+|B|^2R_X(t-s)$$

$\therefore$ $Z(n)$ 是一平稳时间序列

(2) $\because E[Z(n)]=E\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_kX(n-k)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_kE[X(n-k)]=0$

$$R_Z(s,t)=E\{\overline{\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}A_{k_1}X(s-k_1)}\cdot\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}A_{k_2}X(t-k_2)\}$$

$$=\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}\overline{A_{k_1}}A_{k_2}R_X(t-s-k_2+k_1)$$

（又$\because |R_Z(s,t)|\le\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}|A_{k_1}|\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}|A_{k_2}|<\infty$）

$\therefore$ $Z(n)$仍是一平稳时间序列

（3）$\because R_Z(s,t)=R_Z(\tau)=\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}\overline{A_{k_1}}A_{k_2}R_X(\tau-k_2+k_1)$

$$=\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}\overline{A_{k_1}}A_{k_2}N_0\delta(\tau-k_2+k_1)$$

$$S_Z(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}\cdot R_z(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}\cdot\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\overline{A_{k_1}}A_{k_2}N_0\delta(\tau-k_2+k_1)d\tau$$

$$=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\overline{A_{k_1}}A_{k_2}N_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}\delta(\tau-k_2+k_1)d\tau$$

$$=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\overline{A_{k_1}}A_{k_2}N_0e^{j\omega(k_1-k_2)}$$

（注：白噪声过程 X 的谱密度为$S_X(\omega)=N_0(常数)，\ \omega\in R，相关函数R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$，其中

$$\delta(x)=\begin{cases}0,x\ne 0\\ \infty,x=0\end{cases}$$）

6、设$X(t)$是雷达在 t 时的发射信号，遇目标返回接收的微弱信号是$aX(n-\tau)$，$a\ll 1$，τ_1是信号返回时间，由于接收到的信号总是伴有噪声的，记噪声为$N(t)$，于是接收机收到的全信号为：$Y(t)=\alpha X(t-\tau_1)+N(t)$，若 X、Y 是平稳相关的平稳过程，试求 ；进而，若$N(t)$的均值为 0，且与$X(t)$相互独立，试求$R_{XY}(\tau)$。

解：（1）$R_{XY}(\tau)=E\{X(s)Y(s+\tau)\}$

$$=E\{X(s)[\alpha X(s+\tau-\tau_1)+N(s+\tau)]\}$$

$$=E\{\alpha X(s)\cdot X(s+\tau-\tau_1)+X(s)N(s+\tau)\}$$

$$=\alpha R_X(\tau-\tau_1)+E\{X(s)N(s+\tau)]$$

（2） $\boldsymbol{R_{XY}(\tau)=\alpha R_X(\tau-\tau_1)}$

7 设 $E\{\overline{X(t)}X^{'}(t+\tau)\}$和$E\{\overline{X^{'}(t)}X^{'}(t+\tau)\}$，其中$\Theta$是服从区间$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，试证：

（1）$\{X_n,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是一平稳时间序列；

（2）$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$不是平稳过程。

解：（1）$\because E(X_n)=E(\sin\Theta n)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\theta n)d\theta=\dfrac{-1}{2\pi n}\cos\theta n\Big|_0^{2\pi}=0$

$$R_X(n,m)=E\{X_{n,}X_m\}=E\{\sin\Theta n\cdot\sin\Theta m\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta n\cdot\sin\theta m d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(m-n)\theta-\cos(n+m)\theta]d\theta$$

$$=\frac{\sin(m-n)\theta}{4\pi(m-n)}-\frac{\sin(m+n)\theta}{2\pi(m+n)}\Big|_0^{2\pi}=0$$

$\therefore$ $\{X_n\}$是一平稳时间序列

（2） $E[X(t)]=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t\theta d\theta=\dfrac{-1}{2\pi t}\cot\theta\Big|_0^{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi t}(1-\cos 2\pi t)$

$$R_X(s,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin s\theta\cdot\sin t\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(t-s)\theta-\cos(t+s)\theta]d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{t-s}\sin(t-s)\theta\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{t+s}\sin(t+s)\theta\Big|_0^{2\pi}]$$

$$=\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{t-s}\sin 2\pi(t-s)-\frac{1}{t+s}\sin 2\pi(t+s)]$$

$\therefore$ $\{X(t),t\in R\}$不是平稳过程

8、设$\{X(t), -\infty < t < +\infty$为零均值的正交增量过程，$E|X(t-X(s)|^2 = |t-s|$，试证$Y(t) = X(t) - X(t-1)$是一平稳过程。

解：$\because E\{Y(t)\} = E\{X(t) - X(t-1)\} = E\{X(t)\} - E\{X(t-1)\} = 0$

$$R_Y(s,t) = E\{\overline{Y(t)}Y(s)\}$$

$$= E\{[\overline{X(s) - X(s-1)}][X(t) - X(t-1)]\}$$

$$= E\{\overline{X(s)}X(t)\} - E\{\overline{X(s)}X(t-1)\} - E\{\overline{X(s-1)}X(t)\} + E\{\overline{X(s-1)}X(t-1)\}$$

$$= \frac{1}{2}E\{\overline{X^2(s)} + X^2(t) - [\overline{X(s)} - X(t)]^2\} - \frac{1}{2}E\{\overline{X^2(s)} + X^2(t-1) - [\overline{X(s)} - X(t-1)]^2\}$$
$$-\frac{1}{2}E\{\overline{X^2(s-1)} + X^2(t) - [\overline{X(s-1)} - X(t)]^2\} + \frac{1}{2}E\{\overline{X^2(s-1)} + X^2(t-1) - [\overline{X(s-1)} - X(t-1)]^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\{E\left|\overline{X(s)} - X(t-1)\right|^2 - E\left|\overline{X(s)} - X(t)\right|^2 + E\left|\overline{X(s-1)} - X(t)\right|^2 - E\left|\overline{X(s-1)} - X(t-1)\right|^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\{|s-t+1| - 2|s-t| + |s-t-1|\}$$

$\therefore$ $Y(t)$是一平稳过程。

9、设$\{X(t), t \ge 0\}$是一平稳过程，均值$m_X = 0$，相关函数为$R_X(\tau)$，若

（1）$R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}, a > 0$

（2）$R_X(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau|, |\tau| \le 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

令$Y(t) = \frac{1}{T}\int_0^t X(s)ds$，*T 是固定的正数，分别计算*$\{Y(t), t \ge 0\}$的相关函数。

解：（1）$R_Y(s,t) = E\{\overline{Y(s)}Y(t)\} = E\{\frac{1}{T^2}\overline{\int_0^s X(u)du} \cdot \int_0^t X(v)dv\}$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^S\int_0^T e^{-\alpha|u-v|}dudv$$

当$s < t$时，$R_Y(s,t) = \frac{1}{T^2}\int_0^s du\int_0^u e^{-\alpha(u-v)}dv + \frac{1}{T^2}\int_0^s du\int_u^t e^{-\alpha(v-u)}dv$

$$=\frac{1}{aT^2}\int_0^s(1-e^{-au})du+\frac{1}{aT^2}\int_0^s(1-e^{-a(t-u)})du$$

$$=\frac{1}{aT^2}[(u+\frac{1}{a}e^{-au})\Big|_0^s]+[\frac{1}{aT^2}(u-\frac{1}{a}e^{a(u-t)})\Big|_0^s]$$

$$=\frac{1}{aT^2}[2s+\frac{1}{a}e^{-as}\ \frac{1}{a}e^{-a(s-t)}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}e^{-at}]$$

$$=\frac{1}{a^2T^2}[2as+e^{-as}+e^{-at}-e^{-a(s-t)}-1]$$

$$\therefore\quad R_Y(s,t)=\frac{1}{a^2T^2}[2a\min(s,t)+e^{-as}+e^{-at}-e^{-a|t-s|}-1]$$

（2） $R_Y(s,t)=\frac{1}{T^2}\int_0^s\int_0^t(1-|u-v|)dudv$

当 $0<t<1<s$ 时

$$R_Y(s,t)=\frac{1}{T^2}\int_0^t dv\int_0^v(1-v+u)du+\frac{1}{T^2}\int_0^t dv\int_v^1(1-u+v)du+\frac{1}{T^2}\int_1^s du\int_0^t dv$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^t(v-v^2+\frac{v^2}{2})dv+\frac{1}{T^2}\int_0^t[(1+v)u-\frac{u^2}{2}]\Big|_0^1 du+\frac{1}{T^2}(s-1)t$$

$$=\frac{1}{T^2}(\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{6}v^3)\Big|_0^t+\frac{1}{2T^2}\int_0^t(2v-v^2-1)dv+\frac{1}{T^2}(s-1)t$$

$$=\frac{t^2}{6T^2}(3-t)+\frac{t}{6T^2}(-t^2+t-1)+\frac{1}{T^2}(s-1)t$$

当 $0<s<1<t$ 时

$$R_Y(s,t)=\frac{1}{T^2}\{\int_0^s du\int_0^u(1-u+v)dv+\int_0^s du\int_u^t(1-v+u)dv\}$$

$$=\frac{1}{T^2}\{\int_0^s(u-\frac{u^2}{2})du+\int_0^s[u(t-1)+t-\frac{t^2}{2}-\frac{u^2}{2}]du\}$$

$$=\frac{1}{T^2}\{(\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{3})+\frac{s}{2}(t-1)+\frac{st}{2}(1-t)-\frac{s^3}{6}\}$$

$$=\frac{s}{2T^2}[s(1-s)-(1-t)^2]$$

当 $0<t<1<s$ 时

$$R_Y(s,t)=\frac{t}{2T^2}[t(1-t)-(1-s)^2]=\frac{1}{2T^2}[t^2(1-t)-t(1-s)^2]$$

当 $1<s<t$ 时

$$R_Y(s,t)=\frac{1}{T^2}\{\int_0^1 du\int_0^1 dv+\int_1^s du\int_0^u(1-u+v)dv+\int_1^s du\int_u^t(1-v+u)dv+\int_0^1 du\int_1^t(1-v+u)dv\}$$

$$=\frac{1}{T^2}\{1+\int_1^s 2udu+\int_1^s[t-\frac{t^2}{2}+u(t-1)-\frac{u^2}{2}]du+\int_0^1[(-\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2})+u(t-1)]du\}$$
$$=\frac{1}{T^2}\{1+\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(t-1)^2(s-1)+\frac{1}{2}(s-1)+\frac{t}{2}(s^2-1)-\frac{s^3-1}{6}-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}(t+s)\}$$
$$=\frac{1}{T^2}\{\frac{1}{2}(s^2-1)(1+t)-\frac{1}{6}(s^3-1)+\frac{1}{2}(s+t)-\frac{1}{2}(t-1)^2\}$$

当$1<t<s$时

$$R_Y(s,t)=\frac{1}{6T^2}[3(s^2-1)(1+t)+3(s+t)-3s(t-1)^2-(s^3-1)]$$

10、设平稳过程$\{X(t),t\geq 0\}$的相关函数为$R_X(\tau)=\frac{1}{\beta}e^{-\beta|\tau|}-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$，这里$\alpha\geq\beta>0$为常数。

(1)判断 X是否均方可导，说明理由；

(2)计算$E\{\overline{X(t)}X'(t+\tau)\}$和$E\{\overline{X'(t)}X'(t+\tau)\}$

解 （1）$\because \lim\limits_{\tau\to 0^+}\frac{R_X(\tau)-R_X(0)}{\tau}=\lim\limits_{\tau\to 0^+}\frac{\frac{1}{\beta}e^{-\beta\tau}-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\tau}-(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha})}{\tau}$

$$=\lim_{\tau\to 0^+}(-e^{-\beta\tau}+e^{-\alpha\tau})$$
$$=0$$

$$\lim_{\tau\to 0^-}\frac{R_X(\tau)-R_X(0)}{\tau}=0$$

$\therefore$ $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处可导

当$\tau>0$时，$R_X(\tau)=\frac{1}{\beta}e^{-\beta\tau}-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\tau}$

$$\therefore R_X'(\tau)=-e^{-\beta\tau}+e^{-\alpha\tau}$$

当$\tau<0$时，$R_X'(\tau)=e^{\beta\tau}-e^{\alpha\tau}$

$$\therefore R_X'(\tau)=\begin{cases}-e^{-\beta\tau}+e^{-\alpha\tau},\tau\geq 0\\ e^{\beta\tau}-e^{\alpha\tau},\tau<0\end{cases}$$

又$\because \lim\limits_{\tau\to 0^+}\dfrac{R'_X(\tau)-R'_X(0)}{\tau}=\lim\limits_{\tau\to 0^+}\dfrac{-e^{-\beta\tau}+e^{-\alpha\tau}}{\tau}=\lim\limits_{\tau\to 0^+}(-\alpha e^{-\alpha\tau}+\beta e^{-\beta\tau})=-\alpha+\beta$

$\lim\limits_{\tau\to 0^-}\dfrac{R'_X(\tau)-R'_X(0)}{\tau}=-\alpha+\beta$

$\therefore R_X(\tau)$在$\tau=0$处存在二阶可导数

故$X(t)$在$\tau=0$处存在二阶可导数

由归纳可知$X(t)$在$\tau=0$处存在n阶可导.

（2） $E\{X(t)X'(t+\tau)\}=R'(\tau)=\begin{cases}-e^{-\beta\tau}+e^{-\alpha\tau},\tau>0\\ e^{\beta\tau}-e^{\alpha\tau},\tau<0\end{cases}$

$$E\{X'(t)X'(t+\tau)\}=-R''(\tau)=\begin{cases}-\beta e^{-\beta\tau}+\alpha e^{-\alpha\tau},\tau>0\\ -\beta e^{\beta\tau}+\alpha e^{\alpha\tau},\tau<0\end{cases}$$

11、过程$\{Y(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$的相关函数为$R_Y(\tau)=e^{-|\tau|}$，对满足随机微分方程$X'(t)+X(t)=Y(t)$的宽平稳过程解$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$。

（1）求 X 的均值函数，自相关函数和功率谱函数;

（2）求 X 与 Y 的互相关函数和互功率谱函数。

解: (1)令 $Y(t)=e^{j\omega t}$，则$X(t)=H(\omega)Y(t)$，代入$X'(t)+X(t)=Y(t)$，有

$$H(\omega)\cdot j\omega e^{j\omega t}+H(\omega)e^{j\omega t}=e^{j\omega t}\Rightarrow H(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jt\omega}\frac{1}{j\omega+1}d\omega=e^{-|t|}$$

$$\therefore m_X(t)=m_Y\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}dt=2m_y$$

又$S_X(\omega)=|H(\omega)|^2S_Y(\omega)$

$\because$ *Y是平稳过程*

$$\therefore S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau=\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\therefore S_X(\omega)=\frac{2}{(1+\omega)^2}$$

又$\because X$ 平稳

$$\therefore R_X(\tau)=\mathrm{F}^{-1}[S_X(\omega)]=\mathrm{F}^{-1}[\frac{2}{(1+\omega^2)^2}]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}\cdot e^{-|\tau|}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{2\tau},\tau\le 0\\ \frac{1}{2}e^{-2\tau},\tau>0\end{cases}$$

（2） $S_{XY}(\tau)=H(\omega)S_x(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\cdot\frac{2}{1+\omega^2}=\frac{2}{(1+j\omega)(1+\omega^2)}$

$$\therefore R_{XY}(\tau)=h(\tau)*R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)R_Y(\tau-t)dt=\int_0^{\infty}e^{-t}e^{-|t-\tau|}dt$$

当$\tau\ge 0$时， $R_{XY}(\tau)=\int_0^{\tau}e^{-t}e^{\tau-t}dt+\int_{\tau}^{+\infty}e^{-t}e^{-(\tau-t)}dt=(\tau+\frac{1}{2})e^{-\tau}$

当$\tau<0$时， $R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2}e^{-\tau}$

$$\therefore R_{XY}(\tau)=\begin{cases}(\tau+\frac{1}{2})e^{-t} & t\ge\\ \frac{1}{2}e^{-\tau},\tau<0\end{cases}$$

12、设$\{X(t),t\ge 0\}$是均值为 0 的平稳的正态过程，且二阶均方可导。求证：对任意$t>0$， $X(t)$与$X^{'}(t)$相互独立，但$X(t)$与$X^{''}(t)$不相互独立，并求$R_{XX^{''}}(t,t+\tau)$ 。

证:（1）由定理 3.6.3（P_{66}）知， $X^{'}(t)$也是正态过程

由定理 4.2.3 知， $X^{'}(t)$也是平稳过程

又$\because E[X(t)]=0,E\{X^{'}(t)\}=0$

$$E\{X(t)X^{'}(t)\}=\frac{\partial}{\partial t}\{E[X(s)X(t)]\}\Big|_{s=t}=\frac{\partial}{\partial t}R(t-s)\Big|_{t=s}=R^{'}(0)$$

又$\because X(t)$实平稳过程，$\therefore R(\tau)$为偶函数

$\therefore R^{'}(\tau)=-R^{'}(-\tau)$，$\therefore R^{'}(0)=-R^{'}(0), \therefore R^{'}(0)=0$

$\therefore E\{X(t)X^{'}(t)\}=0$

则$X(t), X^{'}(t)$不相关，由正态变量的性质知

$X(t)$与$X^{'}(t)$独立

（2）易知$\{X^{''}(t), t\geq 0\}$也是正态平稳过程

$$E\{X^{''}(t)\}=\frac{d}{dt}E\{X^{'}(t)\}=0$$

$$E\{X(t)X^{''}(t)\}=\frac{\partial}{\partial t}E\{X(s)X^{'}(t)\}\big|_{t=s}=R^{''}(0)$$

又$\because D[X^{'}(t)]=-R^{''}(0)>0$

$\therefore R^{''}(0)\neq 0$

$\therefore X(t)$与$X^{''}(t)$不独立

$$R_{XX^{''}}(t,t+\tau)=E\{X(t)X^{''}(t+\tau)\}=R^{''}(\tau)$$

13、设$\{X(t), t\geq 0\}$是均方可导实平稳的正态过程，相关函数为$R(\tau)$，求其导数过程$\{X^{'}(t), t\geq 0\}$的一维、二维概率密度函数。

解：由定理 3.6.3（P_{66}）知$\{X^{'}(t), t\geq 0\}$仍为正态过程，而且

$E\{X^{'}(t)\}=0$，$E\{X^{'}(s)X^{'}(t)\}=-R^{''}(\tau)$

$\therefore X^{'}(t)$ 的一维概率密度函数为：$P(x)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-R^{''}(0)}}\exp\{\dfrac{x^2}{2R^{''(0)}}\}, x\in R$

$\therefore X^{'}(t)$的二维概率密度函数为：$P(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2\pi|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\dfrac{1}{2}XB^{-1}X^{'}\}$

其中 $X=(x_1,x_2), B=\begin{pmatrix}-R^{''}(0) & -R^{''}(\tau)\\ -R^{''}(\tau) & -R^{''}(0)\end{pmatrix}$

14. 已知平稳过程的相关函数

（1）$R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta x,(\alpha>0)$

（2）$R_X(\omega)=\sigma^2 e^{-|\tau|}(1+\alpha|\tau|),(\alpha>0)$

（3）$R_X(\omega)=\sigma^2 e^{-|\tau|}[\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|],(\alpha>0)$求谱密度。

解：$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\cdot\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau d\tau$

$$=2\sigma^2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)\cdot\cos(\beta\tau)d\tau$$

$$=\sigma^2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\tau}[\cos(\omega+\beta)\tau+\cos(\beta-\omega)\tau]d\tau$$

$$=\sigma^2\{\frac{e^{-\alpha\tau}[(\omega+\beta)\sin(\omega+\beta)\tau-\alpha\cos(\omega+\beta)]}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{e^{-\alpha\tau}[(\beta-\omega)\sin(\beta-\omega)\tau-\alpha\cos(\beta-\omega)\tau]}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2}\Big|_0^{+\infty}\}$$

$$=\sigma^2\alpha(\frac{1}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}+\frac{1}{\alpha^2(\beta-\omega)^2})$$

（ 或 由 傅 氏 变 换 可 得 $S_X(\omega)=\mathrm{F}[R_X(\tau)]=\mathrm{F}[\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau]=\sigma^2(\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2})$ ）

（2）$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}R_X(\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)d\tau$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\sigma^2 e^{-\alpha\tau}(1+\alpha\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega\tau}\sigma^2 e^{\alpha\tau}(1-\alpha\tau)d\tau$$

$$=\sigma^2(\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{\alpha}{(\alpha-j\omega)^2}+\frac{1}{\alpha+j\omega}+\frac{\alpha}{(\alpha+j\omega)^2})$$

$$=\frac{4\alpha^3\sigma^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

（3）$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}R_X(\tau)d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}[\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha|\tau|}\sin\beta|\tau|]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\sigma^2 \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha|\tau|}\sin\beta|\tau|]d\tau$$

$$= \mathrm{F}[\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau] + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\sigma^2 \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha|\tau|}\sin\beta|\tau|]d\tau$$

$$= \sigma^2\alpha(\frac{1}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2} + \frac{1}{\alpha^2(\beta-\omega)^2}) + 2\frac{\alpha\sigma^2}{\beta}\int_{0}^{+\infty}\cos(\omega\tau)e^{-\alpha\tau}\sin\beta\tau d\tau$$

$$= \sigma^2\{(\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2}) + \frac{\alpha^2}{\beta}[\frac{\omega+\beta}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2} + \frac{\omega-\beta}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2}]\}$$

15、已知平稳过程（参数连续）谱密度

（1）$S_X(\omega) = \begin{cases} \alpha, |\omega| \le b \\ 0, 其它 \end{cases}$

（2）$S_X(\omega) = \begin{cases} b^2, a \le |\omega| \le 2a \\ 0, 其它 \end{cases} (a > 0)$

（3）$S_X(\omega) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{\omega^2+\omega_k^2}, (\omega_k, \sigma_k 为正数)$

求相关函数和平均功率。

解 $\because R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau}S_X(\omega)d\omega$，平均功率 $R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega$

（1）$R_X(\tau) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-b}^{+b} e^{j\omega\tau}d\tau = \frac{\alpha e^{j\omega\tau}}{2\pi j\tau}\Big|_{-b}^{+b} = \frac{\alpha}{2\pi j}(e^{jb\tau} - e^{-jb\tau}) = \frac{\alpha\sin b\tau}{\pi\tau}$

$$\therefore R_X(0) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\alpha\sin b\tau}{\pi\tau} = \frac{\alpha b}{\pi}$$

（2）$R_X(\tau) = \frac{b^2}{2\pi}[\int_{\alpha}^{2\alpha} e^{j\omega\tau}d\omega - \int_{-2\alpha}^{-\alpha} e^{j\omega\tau}d\omega]$

$$=\frac{b^2}{\pi\tau}(\sin 2\alpha\tau-\sin\alpha\tau)$$

$$\therefore R_X(0)=\lim_{\tau\to 0}\frac{b^2}{\pi\tau}(\sin 2\alpha\tau-\sin\alpha\tau)=\frac{b^2\alpha}{\pi}$$

（3） $$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\sum_{K=1}^{n}\sigma_k^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega\tau}}{\omega^2+\omega_k^2}d\omega=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\frac{e^{-\omega_k|\tau|}}{2\omega_k}$$

$$R_X(0)=\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\frac{e^{-\omega_k|\tau|}}{2\omega_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{2\omega_k}$$

16、设 X、Y 是两平稳相关过程，且 $E[X(t)]=E[Y(t)]=0, R_X(\tau)=R_Y(\tau), R_{XY}(\tau)=-R_{XY}(-\tau)$，试证 $Z(t)=X(t)\cos\omega_0 t+Y(t)\sin\omega_0 t$，也是平稳过程。又若 X、Y 的谱密度函数存在，试用 X、Y 的谱密度及互谱密度表出 Z 的谱密度。

证： $$\because E\{Z(t)\}=E\{X(t)\cos\omega_0 t+Y(t)\sin\omega_0 t\}$$

$$=E[X(t)]\cos\omega_0 t+E[Y(t)]\sin\omega_0 t$$

$$=0$$

$$E\{\overline{Z(s)}Z(t)\}=E\{[\overline{X(s)}\cos\omega_0 s+\overline{Y(s)}\sin\omega_0 s][[X(t)\cos\omega_0 t+Y(t)\sin\omega_0 t]\}$$

$$=E\{\overline{X(s)}X(t)\cos\omega_0 s\cdot\cos\omega_0 t+\overline{X(s)}Y(t)\cos\omega_0 s\cdot\sin\omega_0 t]$$

$$+E\{\overline{Y(s)}X(t)\sin\omega_0 s\cdot\cos\omega_0 t+\overline{Y(s)}Y(t)\sin\omega_0 s\cdot\sin\omega_0 t]$$

$$=R_X(\tau)\cdot\cos\omega_0(t-s)+R_{XY}(\tau)\sin\omega_0(t-s)$$

其中 $R_{XY}(\tau)=\overline{R_{XY}(-\tau)}=-\overline{R_{XY}(\tau)}\ \underline{\underline{X,Y\text{实过程}}}\quad -R_{XY}(\tau)$

$\therefore Z(t)$ 是平稳过程

又 $$\because S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega\tau}[R_X(\tau)\cdot\cos\omega_0\tau+R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega\tau}\frac{e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau}}{2}R_X(\tau)]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}[S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0)]+\frac{j}{2}[S_{XY}(\omega+\omega_0)+S_{XY}(\omega-\omega_0)]$$

17、设 $X(t)=\cos(\omega t+\Theta)$，其中 $\omega>0$ 为常数，Θ 是特征函数为 $f(t)$ 的实随机变量，

证明 X 为平稳过程充要条件为 $f(1)=f(2)$。

证: $\because f_{\Theta}(t)=E\{e^{jt\Theta}\}=E\{\cos t\Theta\}+jE\{\sin t\Theta\}$

又$\because E\{X(t)\}=E\{\cos\Theta\}\cos\omega t-E\{\sin\Theta\}\sin\omega t$

$$R_X(t,t+\tau)=\frac{1}{2}E\{\cos\omega\frac{1}{2}\cos\omega\tau\}+\frac{1}{2}E\{\cos 2\Theta\}\cdot\cos(2\omega t-\omega\tau)-\sin(2\omega t+\omega\tau)\cdot E\{sin2\Theta\}$$

$\therefore X(t)$ 平稳$\Leftrightarrow E\{X(t)\}=$常数，$R_X$（t, t+$\tau$）与t无关$\Leftrightarrow$

$$E\{\cos\Theta\}=E\{\sin\Theta\}=0,E\{\cos 2\Theta\}=E\{\sin 2\Theta\}=0\Leftrightarrow f(1)=f(2)=0$$

18、设 X 为平稳正态过程，$E[X(t)]=0$，$R(\tau)$是其相关函数，试证$Y(t)=\mathrm{sgn}[X(t)]$是一平稳过程，且其标准相关函数为$\rho_Y(\tau)=\dfrac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)}=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{R(\tau)}{R(0)}$

证: 易证 Y 也是一平稳过程。

$R_Y(\tau)=E\{Y(t)Y(t+\tau)\}=P\{X(t)X(t+\tau)>0\}-P\{X(t)X(t+\tau)\le 0\}$ 对于二维正态分布 X，Y，若它们均值为 0，相关函数 r，则有结论

$P\{XY>0\}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\varphi}{\pi}$， $P\{XY<0\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\varphi}{\pi}$，其中$\sin\varphi=r$，$|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2},r=\dfrac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$，

所以 $\rho_Y(\tau)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\varphi}{\pi}-(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\varphi}{\pi})=\dfrac{2\varphi}{\pi}=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$

19、设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是平稳过程，$S(\omega)$为其谱密度函数。试证：对任意的$h>0,Y(t)=X(t+h)-X(t)$是平稳过程（即平稳过程具有平稳增量），并求 Y 的谱函数。

证 $\because E\{Y(t)\}=E\{X(t+h)-X(t)\}=E\{X(t+h)\}-E\{X(t)\}=0$

$$E\{\overline{Y(t)}Y(t+\tau)\}=E\{[\overline{X(t+h)-X(t)}][X(t+\tau+h)-X(t+\tau)]\}$$

$$=E\{\overline{X(t+h)}X(t+\tau+h)-\overline{X(t+h)}X(t+\tau)-\overline{X(t)}X(t+\tau+h)+\overline{X(t)}X(t+\tau)\}$$

$$=R(\tau)-R(\tau-h)-R(\tau+h)+R(\tau)$$

$\therefore \boldsymbol{Y(t)}$ 是平稳过程

又 $\because S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}R_Y(\tau)d\tau$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}R(\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}R(\tau-h)d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}R(\tau+h)d\tau$$

$$=2S_X(\omega)-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega u}R(u)du-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(v-h)}R(v)dv$$

$$=2S_X(\omega)-e^{-j\omega h}S_X(\omega)-e^{j\omega h}S_X(\omega)$$

$$=2S_X(\omega)(1-\cos\omega h)$$

$$\therefore F_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} 2S_X(\omega^{'})(1-\cos\omega^{'}h)d\omega^{'}$$

20、设$\{X(t)\quad -\infty<t<+\infty\}$ 是均值为 0，相关函数为$R_X(\tau)$实正态平稳过程，证明$X^2(t)$也是平稳过程，并求其均值及相关函数。

证：令 $Y(t)=X^2(t)-R_X(0)$ 则

$$E\{Y(t)\}=E\{X^2(t)-R_X(0)\}=E\{X^2(t)\}-R_X(0)=0 \quad （D\{X(t)\}=R_X(0)）$$

$$\because E\{Y(t)Y(t+\tau)\}=E\{[X^2(t)-R_X(0)][X^2(t+\tau)-R_X(0)]\}$$

$$=E\{X^2(t)X^2(t+\tau)-X^2(t)R_X(0)-X^2(t+\tau)R_X(0)+R^2{}_X(0)\}$$

$$=E\{X^2(t)X^2(t+\tau)\}-2E\{X^2(t)\}R_X(0)+R^2{}_X(0)\}$$

$$=E\{X^2(t)\}E\{X^2(t+\tau)\}+2E^2\{X(t)X(t+\tau)\}-2E\{X^2(t)\}R_X(0)+R^2{}_X(0)\}$$

$$=R^2{}_X(0)+2R^2{}_X(\tau)-2R^2{}_X(0))+R^2{}_X(0)$$

$$=2R^2{}_X(\tau)$$

$X^2(t)$ 也是平稳过程

21. 设二阶矩过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值函数为 $E[X(t)] = \alpha + \beta t$，相关函数为 $R(s,t) = e^{-\lambda|t-s|}$,其中 $\alpha, \beta, \lambda > 0$ 都为常数。证明 $Y(t) = X(t+1) - X(t)$ 是一平稳过程，并求其均值及相关函数。

证: $E\{Y(t)\} = E\{X(t+1) - X(t)\} = \alpha + \beta(t+1) - (\alpha + \beta t) = \beta$

$$E\{\overline{Y(t)}Y(t+\tau)\} = E\{[\overline{X(t+1) - X(t)}][X(t+\tau+1) - X(t+\tau)]\}$$

$$= E\{\overline{X(t+1)}X(t+\tau+1) - \overline{X(t+1)}X(t+\tau) - \overline{X(t)}X(t+\tau+1) - \overline{X(t)}X(t+\tau)\}$$

$$= e^{-\lambda|\tau|} - e^{-\lambda|\tau-1|} - e^{-\lambda|\tau+1|} + e^{-\lambda|\tau|}$$

$$= 2e^{-\lambda|\tau|} - e^{-\lambda|\tau-1|} - e^{-\lambda|\tau+1|}$$

$\therefore Y(t)$ 是一平稳过程

22、设 $\{X(n), n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 是白噪声序列，试证明

$$Y(n) = \frac{1}{m}[X(n) + X(n-1) + \cdots = X(n-m+1)]$$

是平稳时间序列，并求其相关函数及谱密度。

证: $E\{Y(n)\} = E\{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} X(n+k)\} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} E\{X(n+k)\} = 0$

$$E\{Y(n)Y(m)\} = E\{[\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} X(n+k)][\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{i-1} X(m+k^{'})]\}$$

$$= \frac{1}{li}\sum_{k=0}^{i-1} \sigma^2 \delta[(n-m) + (k-k^{'})]$$

$$= \frac{1}{li}\sum_{k=0}^{i-1} \sigma^2 \delta[(n-m) + (k-k^{'})]$$

$\therefore Y(n)$ 是平稳时间序列。

$$S_Y(\omega) = \sum_{\tau=0}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_Y(\tau) = \frac{1}{l-i}\sum_{\tau=0}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \sum_{k=0}^{i-1} \sigma^2 \delta[\tau + (k-k^{'})]$$

$$=\frac{1}{l-i}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{\tau=0}^{\infty}e^{-j\omega\tau}\sigma^2\delta[\tau+(k-k^{'})]$$

23、设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$为均方连续的平稳过程，具有谱密度$S(\omega)$，试证 对每个$\Delta>0,\{X(n\Delta),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是平稳序列，并用$S(\omega)$表出$\{X(n\Delta),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的谱密度。

证：令$\Delta=t_2-t_1$，（其中$t_{2,}t_1\in R$,且$t_2>t_1$）

则$E\{X(n\Delta)\}=E\{X[n(t_2-t_1)]\}=m_X$

$E\{\overline{X(n\Delta)}X(m\Delta)\}=R_X[(m-n)\Delta]$

$\therefore$ $X(n\Delta)$平稳序列

$$S_{X(m\Delta)}(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega m\Delta}R_X(m\Delta)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega m\Delta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega m\Delta}S(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{j\omega(\Delta m-m)\}\cdot S_X(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_X(\omega)(\sum_{m=0}^{\infty}e^{-j\omega m(1-\Delta)})d\omega$$

24. 设ξ、η是两个相互独立的实随机变量，$E\xi=0,D\xi=1,\eta$的分布函数是$F(x)$，试证明：$Z(t)=\xi e^{jt\eta}$为平稳过程，且其谱函数就是$F(\omega)$。

证：$\because E\{Z(t)\}=E\{\xi e^{jt\eta}\}=E\{\xi\}\cdot E\{e^{jt\eta}\}=0$

$$E\{\overline{Z(t)}Z(t+\tau)\}=E\{\xi^2e^{-jt\eta}\cdot e^{j(t+\tau)\eta}\}=E\{e^{j\tau\eta}\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\tau x}dF(x)$$

$\therefore$ $Z(t)$为平稳过程，且$R_Z(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\tau\omega}dF(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\tau\omega}d[2\pi F(\omega)]$

$\therefore$ $Z(t)$的谱函数为$2\pi F(\omega)$。

25. 设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是均方可导的平稳过程，$S(\omega)$是其谱密度，试证：（1）$Y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-\beta(t-s)}X(s)ds,(\beta>0,\text{常数})$

（2） $Z(t)=\int e^{-\alpha(t-s)}\dfrac{\sin\omega(t-s)}{\omega}X(s)ds,(\alpha>0,\omega>0\text{均为常数})$

均为平稳过程，并求它们的谱密度。

证：（1） $E[Y(t)]=\int_{-\infty}^{t}e^{-\beta(t-s)}E[X(s)]ds=\dfrac{m_X}{\beta}$

$$E\{\overline{Y(t)}Y(t+\tau)\}=E\{\int_{-\infty}^{t}\overline{e^{-\beta(t-s)}}\overline{X(s)}ds\}\int_{-\infty}^{t+\tau}e^{-\beta(t+\tau-u)}X(u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t+\tau}e^{-\beta(s-u+\tau)}R(u-s)duds$$

$$\underline{\underline{w=u-s,v=u+s}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dw\int_{2(t+\tau)+w}^{2t-w}e^{-\beta(\tau-w)}R(w)dwdv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta(\tau-w)}R_X(w)(-2w-2\tau)dw$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{\beta(w-\tau)}R_X(w)\cdot(w+\tau)dw$$

$$=R_Y(\tau)$$

∴ $Y(t)$为平稳过程。

$$S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau\omega}R_Y(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\tau\omega}[\int_{-\infty}^{\infty}e^{\beta(u-\tau)}R_X(u)(u-\tau)du]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(u-\tau)\exp\{\beta(u-\tau)-j\tau\omega\}R_X(u)dud\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(u)e^{\beta u}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau(\beta+j\omega)}(u-\tau)d\tau$$

$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$ （其中 $h(t)=e^{-pt}U(t),U(t)$为阶跃函数）

（2） $E\{Z(t)\}=E\{\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\cdot\dfrac{\sin\omega(t-s)}{\omega}X(s)ds\}$

$$=E\{X(s)\}\cdot e^{-\alpha t}\cdot\frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{t}e^{\alpha s}[\sin\omega t\cos\omega s-\cos\omega t\sin\omega s]ds$$

$$=E\{X(s)\}\cdot\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}=\text{常数}$$

$$R_Z(\mathrm{s},\mathrm{t})=\int_{-\infty}^{\mathrm{s}}\int_{-\infty}^{\mathrm{t}}e^{-\alpha(s+t)}e^{\alpha u+\alpha v}\cdot\frac{1}{20^2}\sin\omega(s-u)\sin\omega(t-v)R_X(v-u)dudv$$

又∵ $Z(\omega)$存在谱函数，可知 $h(t)=e^{-\alpha t}\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}U(t),H(\omega)\dfrac{1}{\omega_0{}^2+(a+j\omega)^2}$

$$\therefore \quad S_Y(\omega)=\frac{S_X(\omega)}{(a^2+\omega_0^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}$$

26. 设 Y 是均方二次可导的平稳过程，X 是均方连续的平稳过程，且满足：$Y''(t)+\beta Y'(t)+\omega_0^2 Y(t)=X(t)$，试用 X 的谱函数表示 Y 的谱函数及 X 与 Y 的互谱函数。

解：（1）取 $X(t)=e^{jt\omega},Y(t)=H(\omega)e^{jt\omega}$，并代入上式得

$$[(j\omega)^2+\beta(j\omega)+\omega_0]H(\omega)=1$$

$$\therefore H(\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+\beta(j\omega)+\omega_0}$$

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{\beta^2\omega^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}$$

$$\therefore S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2 S_X(\omega)=\frac{S_X(\omega)}{\beta^2\omega^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}$$

$$F_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_Y(\omega')d\omega'=\int_{-\infty}^{\omega}\frac{dF_X(\omega')}{\beta^2\omega'^2+(\omega'^2-\omega_0^2)^2}d\omega'$$

（2）$S_{XY}(\omega)=H(\omega)S_X(\omega)=\dfrac{S_X(\omega)}{-\omega^2+\beta j\omega+\omega_0^2}$

$$\therefore F_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_{XY}(u)du=\int_{-\infty}^{\omega}\frac{dF_X(\omega)}{-\omega^2+\beta j\omega+\omega_0^2}$$

27. 已知如图所示的系统，其输入 X 为一零均值的平稳正态过程，通过实验测得 Z 的功率谱密度为

$$S_Z(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{2\beta}{(\omega^2+\beta^2)(\omega^2+1)}$$

试证 Y 也为平稳的，且 $R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$；

利用（1）的结论分别求 X 和 Y 的自相关函数与功率谱密度。

$$X(t)\to\boxed{(\cdot)^2}\to\boxed{h(t)=e^{-t}U(t)}\to Z(t)$$

证 （1）类似第 20 题

$$\because E\{Y(t)\}=E\{X^2(t)\}=R_X(0)$$

$$E\{Y(t)Y(t+\tau)\}=E\{X^2(t)X^2(t+\tau)\}$$

$$=E\{X^2(t)\}E\{X^2(t+\tau)\}+2E^2\{X(t)X(t+\tau)\}$$

$$=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$$

（2）$\because h(t)=e^{-t}u(t)$

$$\therefore H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{1+j\omega}$$

$$S_Y(\omega)=\frac{S_Z(\omega)}{|H(\omega)|^2}=\frac{[\pi\delta(\omega)+\frac{2\beta}{(\omega^2+\beta^2)(\omega^2+1)}]}{(1+\omega^2)^{-1}}$$

$$=\pi(1+\omega^2)\delta(\omega)+\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}$$

$$\therefore R_Y(\tau)=F^{-1}[S_Y(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)(1+\omega^2)\pi e^{j\omega\tau}d\tau+\beta e^{-\beta|\tau|}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)d\tau+\beta e^{-\beta|\tau|}$$

$$=\frac{1}{2}+e^{-\beta|\tau|}$$

令 $\tau=0$ 则 $R_Y(0)=\frac{1}{2}+1=3R_X^2(0)$

$$\therefore R_X^2(0)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore R_X^2(\tau)=\frac{1}{2}e^{-\beta|\tau|}$$

$$\therefore R_X(\tau)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\beta}{2}|\tau|}$$

$$S_X(\tau)=F[R_X(\tau)]=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-\frac{\beta}{2}|\tau|})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\cdot\frac{\beta}{2}}{\omega^2+(\frac{\beta}{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}\beta}{4\omega^2+\beta^2}$$

28. 设线性时不变系统的脉冲响应$h(t)=U(t)\exp(-\beta t)$，其中$\beta>0$为常数，$U(t)$为单位阶跃函数,系统的输入X是自相关函数为$R_X(\tau)=\exp[-\alpha|\tau|],(\alpha>0)$的平稳过程。试求：

（1）系统输入与输出的互相关函数；

（2）输出的功率谱密度和自相关函数。

解　$\because h(t)=U(t)e^{-\beta t}$

$$\therefore H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}h(t)dt=\frac{1}{j\omega+\beta}$$

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-s)X(s)ds=e^{-\beta t}\int_{-\infty}^{t}e^{\beta s}X(s)ds$$

$$S_X(\omega)=\mathrm{F}\left[R_X(\tau)\right]=\frac{2\partial}{\partial^2+\omega^2}$$

$$\therefore S_Y(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2S_X(\omega)=\frac{2\partial}{(\omega^2+\beta^2)(\omega^2+\partial^2)}$$

$$\therefore S_{XY}(\omega)=H(\omega)S_X(\omega)=\frac{2\partial}{\left(\omega^2+\partial^2\right)\left(j\omega+\beta\right)},$$

当$\tau\geq0$时；

$$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(s)R_X(\tau-s)ds=\int_0^{\tau}e^{-\beta s}e^{-\partial(\tau-s)}ds+\int_{\tau}^{\infty}e^{-\beta s}e^{-\partial(-\tau+s)}ds=\frac{2\partial e^{-\beta\tau}-(\alpha+\beta)e^{-\partial\tau}}{\partial^2-\beta^2}$$

当$\tau\leq0$时；

$$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(s)R_X(\tau-s)ds=\int_0^{\infty}e^{-\beta s}e^{-\partial(-\tau+s)}ds=\frac{e^{\partial\tau}}{\alpha+\beta}$$

$$\therefore R_Y(\tau)=\mathrm{F}^{-1}\left[S_Y(\omega)\right]=\frac{-\beta e^{-\partial|\tau|}+\alpha e^{-\beta|\tau|}}{\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)}$$

29. 设随机过程$X(t)=A\cos t+B\sin t,-\infty<t<+\infty$，其中A和B是相互独立的零均值随机变量，且$D(A)=D(B)=\sigma^2$。试研究X的均值和相关函数是否具有各态历经性。

解：$E[X(t)]=E\{A\cos t+B\sin t\}=0$

$$R_X(t,t+\tau)=E\{\overline{[A\cos t+B\sin t]}[A\cos(t+\tau)+B\sin(t+\tau)]\}$$

$$= E\{|A|^2 \cos t \cos(t+\tau) + |B|^2 \sin t \sin(t+\tau) + \overline{A}B \cos t \sin(t+\tau) + \overline{B}A \sin t \cos(t+\tau)\}$$
$$= \sigma^2 s\tau$$

$\therefore$ $X(t)$是平稳过程。

又

$$\because \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} (1-\frac{|\tau|}{2T}) C_X(\tau) d\tau$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} (1-\frac{|\tau|}{2T}) \sigma^2 \cos\tau d\tau$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^2}{T}\int_{0}^{2T} (1-\frac{\tau}{2T}) \cos\tau d\tau$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^2(1-\cos 2T)}{2T^2}$$
$$= 0$$

$\therefore$ 均值具有各态历经性。

又$\because$ $R_Z(t,t+u) = E\{X(t)\overline{X(t+\tau)X(t+u)}X(t+\tau+u)\}$

$$= R_X^2(\tau) + R_X^2(u) + R_X(\tau+u)\cdot R_X(\tau-u)$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} (1-\frac{|u|}{2T})[R_Z(u) - |R_X(\tau)|^2] du$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} (1-\frac{|u|}{2T})[\sigma^4 \cos^2 u + \sigma^4 \cos(u+\tau)\cos(u-\tau)] du$$
$$= \frac{1}{2}\sigma^4(1+\cos 2\tau) \neq 0$$

$\therefore$ 相关函数不具有各态历经性。

30. 设随机过程 $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta), -\infty < t < +\infty$， 其中 A、Θ是相互独立的随机变量，且Θ服从区间$[0,2\pi]$上的均匀分布。试研究 X 的均值函数和相关函数是否具有各态历经性。

解： $E\{X(t)\} = E\{A\cos(\omega t + \Theta)\} = 0$

$$R_X(t,t+\tau) = E\{A^2\}\cdot\frac{1}{2}\cos\omega\tau$$
$$< X(t) > = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l{\cdot}i{\cdot}m}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(\omega t + \theta) dt = 0$$

$$< X(t)X(t+\tau) >= \underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2T}\cos(\omega t+\theta)\cos[\omega(t+\tau)+\theta]dt$$

$$= \underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}[\cos\omega\tau+\cos(2\omega t+2\theta+\omega\tau)]dt$$

$$= \underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{A^2}{2T}\int_{0}^{T}\cos\omega\tau dt = \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau \neq R_X(\tau)$$

$\therefore$ 均值函数具有各态历经性，但相关函数不具有各态历经性。

31. 设随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta), -\infty<t<+\infty$， 其中 A、ω、Θ 是相互独立的随机变量，其中 A 是均值为 2，方差为 4，且 Θ 服从区间 $[-\pi，\pi]$ 上的均匀分布，ω 服从区间（-5，5）上的均匀分布。试研究 X 的均值函数和相关函数是否具有各态历经性。

解 $m_X(t)=E\{A\cos(\omega t+\Theta)\}=E(A)\cdot\{E[\cos\Theta]\cdot E[\cos\omega t]-E[\sin\Theta]\cdot E[\sin\omega t]\}$

$$=2\cdot\{\int_{-5}^{5}\frac{1}{10}\cos\omega t d\omega\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cos\theta d\theta-\int_{-5}^{5}\frac{1}{10}\sin\omega t d\omega\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\sin\theta d\theta\}$$

$$R_X(t,t+\tau)=E\{\overline{[A\cos(\omega t+\Theta)]}[A\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)]\}$$

$$=E\{|A|^2\cdot\frac{1}{2}[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)+\cos\omega\tau]\}$$

$$=\frac{1}{2}(2^2+4)\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{1}{5\tau}\sin 5\tau$$

$$=\frac{4}{5\tau}\sin 5\tau$$

$\therefore$ $X(t)$ 为一平稳过程。

又 $\langle X(t)\rangle = \underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega t+\Theta)dt$

$$=\underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{1}{2T}[\sin(\omega T+\Theta)-\sin(-\omega T+\Theta)]\cdot\frac{A}{\omega}$$

$$=\underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{1}{2T}\cdot 2\sin\omega T\cdot\cos\Theta\cdot\frac{A}{\omega}$$

$$=0$$

$$=m_X(t)$$

$\therefore$ $X(t)$ 的均值具有各态历经性。

又 $\because \langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$

$$=\underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)dt$$

$$=\underset{T\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{2TA^2}{4T}\cos\omega\tau$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau\neq R_X(\tau)$$

$\therefore$ $X(t)$的相关函数不具有各态历经性.

32. 设平稳过程的期望为m，自相关函数为$R(\tau)$，协方差函数为$C(\tau)$。

(1)若$\int_{-\infty}^{\infty}|C(\tau)|d\tau<+\infty$，试证明 X 的均值各态历经性;

(2)若$C(0)<+\infty$,且当$|\tau|\to\infty$时，$C(\tau)\to 0$，试证明 X 的均值各态历经性。

解 （1）$\because \left|\dfrac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}(1-\dfrac{|\tau|}{2T})C(\tau)d\tau\right|\le\dfrac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}|C(\tau)|d\tau$

而且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|C(\tau)|d\tau<+\infty\Rightarrow\dfrac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}|C(\tau)|d\tau<+\infty$

$$\therefore\lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}(1-\frac{|\tau|}{2T})C(\tau)d\tau\right|\le\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}|C(\tau)|d\tau=0$$

$$\therefore\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}(1-\frac{|\tau|}{2T})C(\tau)d\tau=0$$

$\therefore$ $X(t)$的均值具有各态历经性

（2）$\because$ $\lim\limits_{\tau\to\infty}C(\tau)=\lim\limits_{\tau\to\infty}[R_X(\tau)-|m_X|^2]=0$

又 $\lim\limits_{\tau\to\infty}[R_X(\tau)-|m_X|^2]=\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau)-|m_X|^2=0$

$\therefore$ $\lim\limits_{T\to\infty}R_X(\tau)=|m_X|^2$

$\therefore$ $X(t)$的均值具有各态历经性

33. 设平稳过程 $X=\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的均值为 $m_X=0$，相关函数 $R_X(\tau)=Ae^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$，$(a>0)$，其中$A$、$a$是常数。问 X 的均值是否具有各态历经性。

解：因为$m_X(t)=0$，$\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=0$，

所以$X(t)$的均值具有各态历经性。

第五章习题解答

1．设$\{U_n,n=1,2,\cdots\}$是相互独立的随机变量序列，试问下列的$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$是否是马氏链，并说明理由：

（1）$X_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$;

（2）$X_n=(U_1+U_2+\cdots+U_n)^2$;

解：（1）易知X_n是独立增量过程。设$X_0=0,$ 任取$0\le t_0\le t_1\le\cdots\le t_n$和$i_0\le i_1\le\cdots i\le i_n$，

则：

$$P\left\{X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n\right\}=P\left\{X_{t_0}=i_0\right\}P\left\{X_{t_1}-X_{t_0}=i_1-i_0\right\}\cdots P\left\{X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=i_n-i_{n-1}\right\}$$

又$=P\left\{X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=i_n-i_{n-1}\right\}$

又

$$\because P\left\langle X_{t_n}=i_n\middle|X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\cdots,X_{t_0}=i_0\right\rangle=P\left\{X_{t_0}=i_0,\cdots,X_{t_n}=i_n\right\}/P\left\{X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\cdots,X_{t_0}=i_0\right\}$$

$$\begin{aligned}\because P\left\{X_{t_n}=i_n\mid X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\right\}&=P\left\{X_{t_n}=i_n,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\mid X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\right\}\\&=P\left\{X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=i_n-i_{n-1},X_{t_{n-1}}-X_0=i_{n-1}\right\}/P\left\{X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\right\}=P\left\{X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=i_n-i_{n-1}\right\}\end{aligned}$$

$\therefore X_n$是马尔可夫过程。

（2）$\because X_{n-1}=\left(U_1+\cdots+U_{n-1}\right)^2$，设$X_0=0,\therefore X_n=\left(U_1+\cdots+U_{n-1}+U_n\right)^2=\left(\sqrt{X_{n-1}}+U_n\right)^2$

$\therefore U_1=\sqrt{X_1},U_2=\sqrt{X_2}-\sqrt{X_1},\cdots$，则：

$$\begin{aligned}P\left\{X_n=i_n,\cdots,X_1=i_1\right\}&=P\left\{U_n=\sqrt{i_n}-\sqrt{i_{n-1}},\cdots,U_1=\sqrt{i_1}\right\}\\&=P\left\{U_n=\sqrt{i_n}-\sqrt{i_{n-1}}\right\}\cdots P\left\{U_1=\sqrt{i_1}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\therefore P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1\}\\&=P\{X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1\}/p\{X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1\}\\&=P\left\{U_n=\sqrt{i_n}-\sqrt{i_{n-1}}\right\}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\because P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}\\&=P\left\{U_n=\sqrt{i_n}-\sqrt{i_{n-1}},X_{n-1}=i_{n-1}\right\}/P\{X_n=i_n\}\\&=P\left\{U_n=\sqrt{i_n}-\sqrt{i_{n-1}}\right\}\end{aligned}$$

$\therefore X_n$是马尔可夫过程。

2.$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$是随机差分方程$X_n=\rho X_{n-1}+I_n$的解，其中ρ是已知常数，$X_0=0$，而$\{I_n,n=1,2,\cdots\}$是独立同分布的取可数值的随机变量。试证明$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$是马氏链。

证：$\because X_1-\rho X_0=I_1,\cdots X_n-\rho X_{n-1}=I_n$，

$$\begin{aligned}&\therefore X_1=I_1+\rho X_0,X_2=\rho I_1+I_2,\cdots,\\&X_n=\rho^{n-2}I_1+\rho^{n-3}I_2+\cdots+I_{n-1}\end{aligned}$$

$\therefore X_n-\rho X_{n-1}=I_n$ 与 X_{n-1} 独立。

又

$$\begin{aligned}&\because P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1\}\\&=P\{X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1\}/p\{X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1\}\\&=P\{X_n-\rho X_{n-1}=i_n-\rho i_{n-1},\cdots,X_1-\rho X_0=i_1\}/P\{X_{n-1}-\rho X_{n-2}=i_{n-1}-\rho i_{n-2},\cdots\}\\&=P\{X_n-\rho X_{n-1}=i_n-\rho i_{n-1}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}\\&=P\{X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1}\}/p\{X_{n-1}=i_{n-1}\}\\&=P\{X_n-\rho X_{n-1}=i_n-\rho i_{n-1},X_{n-1}=i_{n-1}\}/P\{X_{n-1}=i_{n-1}\}\\&=P\{X_n-\rho X_{n-1}=i_n-\rho i_{n-1}\}\end{aligned}$$

$\therefore X_n$为马氏过程。

第三题略

P152，第四题

解： 由于 X_n 在现在已确定后，下一步所处的状态与它的前一状态无关，所以过程是马氏链。

$$P_{00}=P\left\{X_{n+1}=0\mid X_n=0\right\}=0$$
$$P_{01}=P\left\{X_{n+1}=1\mid X_n=0\right\}=1$$
$$P_{02}=P_{03}=0,P_{10}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$
$$\therefore$$
$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P152,第五题

解：

$$f_{00}^{(1)}=p_{00}=p_1,f_{00}^{(2)}=0,f_{00}^{(3)}=p_{01}p_{12}p_{20}=q_1q_2q_3,$$
$$f_{01}^{(1)}=p_{01}=q_1,f_{01}^{(2)}=p_{00}p_{01}=p_1q_1,$$
$$f_{01}^{(3)}=p_{00}p_{00}p_{01}=p_1^2q_1$$

P153 第六题（只做第三个，其它两个可对照写出答案）

解：（1）

$$P\left\{X(n+2)=1\mid X(n)=0\right\}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}=\frac{5}{12}$$

$$P\left\{X(n+2)=2\mid X(n)=0\right\}=\left(1/2,1/2,0,0\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}$$

（2）设平稳分布为：$X=\left\{X_0,X_1,X_2,X_3\right\}$,且满足方程 $X=XP$,则：

$$\begin{cases} X_0 = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 \\ \cdots \\ X_3 = \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 \end{cases}$$

解方程组得： $X_2 = 3X_3$， $X_1 = 6X_3$， $X_0 = 6X_3$

$\therefore X = (6,6,3,1)X_3$

又$\because X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = 1$

$\therefore (6+6+3+1)X_3 = 1, \therefore X_3 = \frac{1}{16}$

$\therefore X = \left(3/8, 3/8, 3/16, 1/16\right)$