第一章　集合论与点集论习题选解

Ex 1. 设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 R^n 上的函数列，试用点集

$$\{x : f_j(x) \geq \frac{1}{k}\}, (j, k = 1, 2, \cdots)$$

表示点集

$$\left\{x : \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\right\}.$$

解：

$$\begin{aligned}
&\left\{x : \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\right\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x) \geq \frac{1}{k}\right\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : \lim_{n\to\infty} \sup_{j\geq n} f_j(x) \geq \frac{1}{k}\right\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \left\{x : f_j(x) \geq \frac{1}{k}\right\}
\end{aligned}$$

Ex 2: 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数列，　$E \subset [a, b]$ 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[a,b]\setminus E}(x), x \in [a, b].$$

若令 $E_n = \{x \in [a, b] : f_n(x) \geq \frac{1}{2}\}$, 试求集合 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

解：由

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[a,b]\setminus E}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \setminus E \\ 0, & x \in E \end{cases}$$

知若 $x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$, 也即 $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时，　$x \in E_n$, 即 $f_n(x) \geq 1/2$, 所以 $[a, b] \setminus E \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$; 若 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$, 则 $\forall n, \exists k \geq n$, 使得 $f_k(x) \geq 1/2$, 因此 $E \cap \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n = \emptyset$. 结合起来有 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = [a, b] \setminus E$.

Ex 4: 设 $f : X \to Y, A \subset X, B \subset Y$, 试问下列等式成立吗？
(i)$f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$;
(ii)$f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$.

解：(i) 此式成立.
(ii) 一般不一定成立，例如考虑 $f(x) = x^2, X = [-1, 1], Y = [0, 1], A = [0, 1]$.

Ex 5: 试作开圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 与闭圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 之间的一一对应.

解：将开圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 理解为 $\bigcup\limits_{r\in[0,1)} \{(x, y) : x^2 + y^2 = r\}$,
将闭圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 理解为 $\bigcup\limits_{r\in[0,1]} \{(x, y) : x^2 + y^2 = r\}$,
再考虑 $[0, 1)$ 与 $[0, 1]$ 之间不难建立一一对应.

Ex 7: 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的实值函数，且存在常数 M，使得对于 $[0,1]$ 中任意有限个数：$x_1, x_2, \cdots, x_n$，均有

$$|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)| \le M,$$

试证明集合 $E=\{x\in[0,1]:f(x)\neq 0\}$ 是可数集.

证明：考虑

$$E=\{x\in[0,1]:f(x)\neq 0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>\frac{1}{k}\}\bigcup\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)<-\frac{1}{k}\}$$

由已知条件易知对任意 k, 点集 $\{x:f(x)>\frac{1}{k}\}$ 与 $\{x:f(x)<-\frac{1}{k}\}$ 均是有限集.

Ex 9: 设 E 是 R^3 中的点集，且 E 中的任意两点的距离都是有理数，试证明 E 是可数集.

证明：任取 $x_0\in E$, 则 $E\subset\bigcup\limits_{r\in Q+}S(x_0,r)$, 其中 Q^+ 表示非负有理数集， $S(x_0,r)$ 表示以 x_0 为中心 r 为半径的球面，注意到此处为可列并，因此仅需证对固定的 $r,S(x_0,r)\cap E$ 是可数集，而 $S(x_0,r)\cap E\subset\bigcup\limits_{r'\in Q+}C(x_1,r')$, 其中 $C(x_1,r')$ 表示以 x_1 为中心 r' 为半径的圆，$x_1\in S(x_0,r)\cap E$, 进一步 $C(x_1,r')\cap E\subset\bigcup\limits_{r''\in Q+}C(x_1,r')\cap C(x_2,r'')$, $x_2\in C(x_1,r')\cap E$, 而 $C(x_1,r')\cap C(x_2,r'')$ 至多有 E 的两个点.

Ex 12: 设 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 若 $\overline{\overline{E}}=c$, 试证明存在 n_0, 使得 $\overline{\overline{A}}_{n_0}=c$.

证明：考虑具有连续基数的点集 $[0,1]^\infty=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_n\in[0,1]\}$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim[0,1]^\infty.$$

不妨设 A_n 互不相交，否则先将 E 表示为等价的不交并．设

$$f:\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\to[0,1]^\infty$$

是一一映射，设 $f(A_n)=D_n\subset[0,1]^\infty$, 则 $A_n\sim D_n$.

考虑 $[0,1]^\infty$ 中的点集 $X_n=\{(0,0,\cdots,0,x_n,0,\cdots):x_n\in[0,1]\}$ 以及映射

$$P_n:D_n\to X_n, P_n((x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots))=(0,0,\cdots,0,x_n,0,\cdots)$$

由于 X_n 的基数为 c, 因此如果 $\overline{\overline{D}}_n<c$, 则 $\overline{\overline{P_n(D_n)}}\le\overline{\overline{D}}_n<c$, 因此 $\forall n,\exists x_n^*$, 使得 $(0,0,\cdots,0,x_n^*,0,\cdots)\notin P_n(D_n)$, 从而 $(x_1,x_2,\cdots,x_n^*,\cdots)\notin D_n$, 故 $(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*,\cdots)\notin\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n=[0,1]^\infty$, 矛盾，因此存在 n_0, 使得 $\overline{\overline{D}}_{n_0}=c$, 从而 $\overline{\overline{A}}_{n_0}=c$.

Ex 13: 设 $f(x)$ 是定义在 R^1 上的单调上升函数，试证明点集

$$E=\{x:\text{对于任意的}\varepsilon>0\text{有}f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)>0\}$$

是 R^1 中的闭集.

证明：考虑 E 的余集 E^c, 易知

$$E^c = \{x: \text{存在}\varepsilon > 0\text{有}f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) \le 0\}$$

结合函数的单调上升性 $f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) \ge 0$, 因此

$$E^c = \{x: \text{存在}\varepsilon > 0\text{有}f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) = 0\}$$

对任意的 $x_0 \in E^c$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $f(x_0+\varepsilon) - f(x_0-\varepsilon) = 0$, (实际上这说明函数 f 在邻域 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 中是常值函数) 因此 $\forall y \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, 可以取 $\delta = \min\{y-(x_0-\varepsilon), (x_0+\varepsilon)-y)\}$, 有 $f(y+\delta) - f(y-\delta) = 0$, 因此 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset E^c$, 从而 x_0 是 E^c 的内点，故 E^c 为开集，也即 E 是闭集。

Ex 14: 设 $F \subset R^n$ 是有界闭集， E 是 F 的一个无限子集，试证明 $E' \cap F \ne \emptyset$. 反之，若 $F \subset R^n$ 且对于 F 的任一无限子集 E, 有 $E' \cap F \ne \emptyset$, 试证明 F 是有界闭集.

证明：设 $F \subset R^n$ 是有界闭集， E 是 F 的一个无限子集，因此 E 是有界无限集，由 Bolzano-Weierstrass 定理知 $E' \ne \emptyset$, 因此 $E' \subset F' \subset F$, 从而 $E' \cap F = E' \ne \emptyset$.

反之. 若 $F \subset R^n$ 且对于 F 的任一无限子集 E, 有 $E' \cap F \ne \emptyset$, 若 F 无界，则我们可以选取一个无穷点列使它没有极限点，首先任取 $x_1 \in F$, 则 $O(x_1, 1)$ 外必有 F 的点，取 $x_2 \in O(x_1,1)^c \cap F$, 再考虑 $O(x_1, \max\{2, d(x_1,x_2)\})$, 这个邻域外仍有 F 的点，依此选取一个不收敛的无穷点列 $x_1, x_2, \cdots$, 取 $E = \{x_1, x_2, \cdots\}$, 则有 $E' = \emptyset$, 从而 $E' \cap F = \emptyset$, 与条件矛盾，因此 F 是有界集.

另一方面对任意 $x_0 \in F'$, 则存在 F 中的无穷点列 x_n 使得 $x_n \to x_0$, 取 $E = \{x_n : n = 1, 2, \cdots\}$, 由条件 $E' \cap F \ne \emptyset$ 即得 $x_0 \in F$, 从而 F 也是闭集.

Ex 15: 设 $F \subset R^n$ 是闭集， $r > 0$, 试证明点集

$$E = \{t \in R^n : \textbf{存在} \quad x \in F, d(t,x) = r\}$$

是闭集.

证明：设 $t_0 \in E'$, 则存在 E 中的互异点列 t_n, 使得 $t_n \to t_0$, 由 $t_n \in E$ 知存在 $x_n \in F$ 使得 $d(t_n, x_n) = r$. 若 x_n 仅含有限个不同的点，则从某个 N 开始， x_n 是常驻点列，不妨记为 x_{k_0}, 则由 $d(t_n, x_{k_0}) = r, (n \ge N)$ 立即知 $d(t_0, x_{k_0}) = r$, 所以 $t_0 \in E$.

否则 x_n 含无限个不同的点，由 $d(x_n, t_0) \le d(x_n, t_n) + d(t_n, t_0) = r + d(t_n, t_0)$, 结合 $t_n \to t_0$, 知 x_n 是有界无穷序列，由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在收敛的子列，不妨就令 x_n 本身收敛，设 $x_n \to x_0$, 则由 F 是闭集知 $x_0 \in F$, 且 $d(t_0, x_0) = r$. (考虑关于距离的三角不等式有) $d(x_0, t_0) \le d(x_0, x_n) + d(x_n, t_n) + d(t_n, t_0)$ 以及 $d(x_0, t_0) \ge d(x_n, t_n) - d(x_0, x_n) - d(t_n, t_0)$.

注：本题等价于若 $F \subset R^n$ 是闭集， $r > 0$, 则 $\bigcup\limits_{x \in F} S(x, r)$ 是闭集，其中 $S(x,r)$ 是以 x 为中心 r 为半径的球面.

Ex 18: 设 $f \in C(R^1), \{F_k\}$ 是 R^1 中的递减紧集列，试证明

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k).$$

证明：由映像集的一般性质 $f\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$ 显然成立.

另一方面，对 $y_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 则对任意 k, 存在 $x_k \in F_k$ 使得 $f(x_k) = y_0$. 若 x_k 只含有有限个互不相同的点，则存在 k_0, 当 $k \ge k_0$ 时 $x_k = x_{k_0}$, 从而 $y_0 = f(x_{k_0}) \in f\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right)$. 若 x_k

含有无限个互不相同的点，由紧性 (有界闭)，点集 $\{x_k\}$ 至少有一个聚点 x_0，显然 $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$，再由 f 的连续性知 $f(x_0) = y_0$，从而 $y_0 \in f\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right)$. 所以 $f\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right) \supset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$. 综合起来即得

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k).$$

Ex 21: 设 $E \subset R^n$. 若 $E \neq \emptyset$，且 $E \neq R^n$，试证明 $\partial E \neq \emptyset$.

证明： (本题等价于证明 R^n 中既开又闭的集合只能是 $\emptyset$ 或 R^n) 若 $\partial E = \emptyset$，则 $R^n = E^\circ \cup (E^c)^\circ$ 从而 E 既开又闭.

设 $E \subset R^n, E \neq \emptyset$，且 E 既开又闭，下证 $E = R^n$. 若 $E^c \neq \emptyset$，则存在 $x_0 \in E^c$，因为 E 既开又闭，所以 E^c 也既开又闭，从而 x_0 是 E^c 的内点，则存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $O(x_0, \delta_0) \subset E^c$，令

$$\delta^* = \sup_{O(x_0,\delta)\subset E^c} \delta$$

若 $\delta^* = +\infty$，则 $E^c = R^n, E = \emptyset$ 与 $E \neq \emptyset$ 矛盾，因此 $\delta^* < +\infty$，又由于 E^c 是闭集，因此闭球 $\overline{O}(x_0, \delta^*) \subset E^c$ 考虑球面 $S(x_0, \delta^*)$ 上的点 $x \in E^c$，由 E^c 是开集， x 是内点，故存在 $\delta_x > 0$，使得 $O(x, \delta_x) \subset E^c$，而

$$S(x_0, \delta^*) \subset \bigcup_{x \in S(x_0,\delta^*)} O(x, \delta_x)$$

以及 $S(x_0, \delta^*)$ 是有界闭集，由 Heine-Borel 有限子覆盖定理，存在有限个 x_i 使得

$$S(x_0, \delta^*) \subset \bigcup_{i=1}^{m} O(x_i, \delta_{x_i}) \subset E^c$$

令 $\delta' = \min\{\delta_{x_i}, i = 1, 2, \cdots, m\}$ 则 $O(x_0, \delta^* + \delta') \subset E^c$ ，这与 δ^* 的定义矛盾，说明 $E^c = \emptyset$，即 $E = R^n$.

Ex 22: 设 G_1, G_2 是 R^n 中互不相交的开集，试证明：

$$G_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset.$$

证明： (方法一直接法)

对任意 $x_0 \in G_1$，由于 G_1 是开集，因此存在 $\delta_0 > 0$，使得 $O(x_0, \delta_0) \subset G_1$，又由于 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$，因此 $O(x_0, \delta_0) \cap G_2 = \emptyset$，也即 $x \notin \overline{G}_2$，所以 $G_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset$.

(方法二反证法)

若 $G_1 \cap \overline{G}_2 \neq \emptyset$，取 $x_0 \in G_1 \cap \overline{G}_2$，由于 G_1 是开集，因此存在 $\delta_1 > 0$，使得 $O(x_0, \delta_1) \subset G_1$，又由 $x_0 \in \overline{G}_2$，因此对任意 $\delta > 0$，有 $O(x_0, \delta) \cap G_2 \neq \emptyset$，特别地考虑 $\delta = \delta_1$，有
$O(x_0, \delta) \subset G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. 这与已知条件相矛盾，因此 $G_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset$.

本题要点提示： $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall \delta > 0, O(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.

Ex 23: 设 $G \subset R^n$. 若对任意的 $E \subset R^n$，有 $G \cap \overline{E} \subset \overline{G \cap E}$，试证明 G 是开集.

证明： (方法一：直接法)

取 $E=G^c$, 由条件 $G\cap\overline{E}\subset\overline{G\cap E}$ 知 $G\cap\overline{G^c}\subset\overline{G\cap G^c}=\overline{\emptyset}=\emptyset$ 因此

$$\overline{G^c}\subset G^c$$

从而 G^c 是闭集，也即 G 是开集.

(方法二：反证法)

若 G 不是开集，则存在 $x_0\in G$,x_0 不是 G 的内点，即对任意 $\delta>0, O(x_0,\delta)\cap G^c\neq\emptyset$. 考虑 $\delta_1=1$, 取 $x_1\in O(x_0,\delta_1)\cap G^c$, 考虑 $\delta_2=\min\{1/2, d(x_1,x_0)\}$, 取 $x_2\in O(x_0,\delta_2)\cap G^c$, 依此类推，可以得到点列 x_n, 有 $x_n\to x_0, x_n\in G^c$, 取 $E=\{x_1,x_2,\cdots,\}$, 则 $\overline{G\cap E}=\emptyset$, 但 $G\cap\overline{E}$ 至少含有点 x_0, 这与条件矛盾，说明 G 是开集.

注：事实上有：设 $G\subset R^n$, 则 G 是开集的充分必要条件是对任意的 $E\subset R^n$, 有 $G\cap\overline{E}\subset\overline{G\cap E}$.

证：设 $G\subset R^n$ 是开集，对任意的 $E\subset R^n$, 设 $x_0\in G\cap\overline{E}$, 则 $x_0\in G, x\in\overline{E}$, 由 $x\in\overline{E}$ 知存在 E 的点列 x_n 使得 $x_n\to x_0$, 而 $x_0\in G$, 因此存在 $\delta>0$, 使得 $O(x_0,\delta)\subset G$, 因此 n 充分大后 $x_n\in E\cap O(x_0,\delta)$, 所以 $x_0\in\overline{G\cap E}$, 故 $G\cap\overline{E}\subset\overline{G\cap E}$.

Ex 24: 设 a,b,c,d 是实数，且

$$P(x,y)=ax^2y^2+bxy^2+cxy+dy.$$

试问点集 $\{(x,y):P(x,y)=0\}$ 有内点吗？

解: 若 $\{(x,y):P(x,y)=0\}$ 存在内点, 设 (x_0,y_0) 是其内点, 则对固定的 y 值 y_0,$P(x,y_0)=ax^2y_0^2+bxy_0^2+cxy_0+dy_0$ 作为关于 x 的二次函数, 必须在 (x_0,y_0) 的某个 $\delta>0$ 邻域中恒为零, 因此有 $ay_0^2=0, by_0^2+cy_0=0, dy_0=0$, 在 (x_0,y_0) 的 $\delta>0$ 邻域中再任取一点 $(x_0,y_1), y_1\neq y_0$, 同样有 $P(x,y_1)=ax^2y_1^2+bxy_1^2+cxy_1+dy_1$ 作为关于 x 的二次函数在一个 x 的邻域恒为零，因此有 $ay_1^2=0, by_1^2+cy_1=0, dy_1=0$, 综合起来必须 $a=b=c=d=0$, 显然这时所给出的点集是 R^2, 除了这种特殊情形所给的点集不可能有内点.

Ex 25: 设 $f:R^1\to R^1$, 令

$$G_1=\{(x,y):y<f(x)\},\ \ G_2=\{(x,y):y>f(x)\}.$$

试证明 $f\in C(R^1)$ 当且仅当 G_1 与 G_2 是开集.

证明：设 $f\in C(R^1)$, 我们仅证明 G_1 开， G_2 可类似证明. 任取 $(x_0,y_0)\in G_1$, 则由 G_1 的定义知 $y_0<f(x_0)$, 设 $\varepsilon=\frac{f(x_0)-y_0}{2}$, 由 f 在 x_0 的连续性，存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in O(x_0,\delta)$ 时， $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 从而函数 $f(x)$ 在邻域 $O(x_0,\delta)$ 的函数图象落在以 $(x_0,f(x_0))$ 为中心，x 方向边长为 2δ,y 方向边长为 2ε 的矩形之中. 令 $\delta_0=\min\{\varepsilon,\delta\}$, 则 $O((x_0,y_0),\delta_0)\subset G_1$, 因此 (x_0,y_0) 是 G_1 的内点，故 G_1 是开集。

另一方面若 G_1,G_2 都是开集, 对任意 $x_0\in R^1$, 任意 $\varepsilon>0$, 考虑 $(x_0,f(x_0)+\varepsilon)\in G_2$, 则存在 δ_1, 使得以 $(x_0,f(x_0)+\varepsilon)$ 为中心 $2\delta_1$ 为边长的小正方形整个含在 G_2 中; 考虑 $(x_0,f(x_0)-\varepsilon)\in G_1$, 则存在 δ_2, 使得以 $(x_0,f(x_0)-\varepsilon)$ 为中心 $2\delta_2$ 为边长的小正方形整个含在 G_1 中，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $x\in O(x_0,\delta)$ 时， $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 因此 $f(x)$ 在 x_0 点连续，由 $x_0\in R^1$ 的任意性知 $f(x)\in C(R^1)$.

注记：用集合的性质反映函数的连续性的类似问题还有

1: 设 $f(x)$ 定义在 R^n 上，则 $f\in C(R^n)$ 的充分必要条件是：对任意的 $t\in R^1$, 点集

$$E_1=\{x\in R^n:f(x)\geq t\},\ \ E_2=\{x\in R^n:f(x)\leq t\}$$

都是闭集. (教材 P36 例 2)

2: 设 $f(x)$ 定义在 R^n 上，则 $f \in C(R^n)$ 的充分必要条件是：对任意的开集 $G \subset R^1$, 原像集 $f^{-1}(G)$ 是 R^n 中的开集.

3. 设 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上，若点集

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$$

是 R^2 中的紧集，则 $f \in C_{[a,b]}$.

Ex 26: 试问由 R^1 中的一切开集构成的集族的基数是什么？

解：设 $E_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_1, a_2, \cdots, a_n \in R^1, a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n\}$, 易证 E_n 的基数为 c, 记 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 故 E 的基数也为 c. 设 $F = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) : a_1, a_2, \cdots \in R^1, a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots\}$, F 的基数也为 c. 对 R^1 的任意开集 G, 由开集的结构定理， G 是可数个互不相交的开区间的并，按各个开区间端点构成的一个从小到大的排列将是 E 或 F 中的一个点，因此 R^1 中的一切开集构成的集族的基数不超过 c. 另一方面任意实数 $x \in R^1$,$(x, x+1)$ 是一个开集，这样就立即得到集族的基数不小于 c. 综合起来就有 R^1 中的一切开集构成的集族的基数为 c.

注：事实上由开集类生成的 $\sigma-$ 代数 Borel 集类的基数为 c, 因此 R^1 的一切开集族本身基数不超过 c.

Ex 27: 设 F_α 是 R^n 中的一族有界闭集，若任取其中有限个： $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_m}$ ，都有

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_{\alpha_i} \neq \emptyset,$$

试证明 $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha \neq \emptyset$.

证明：若 $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha = \emptyset$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha^c = R^n$, 任取一个 F_{α_0}, 显然 $F_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha^c$, 也即 F_α^c 是对有界闭集 F_{α_0} 的一个开覆盖，由 Heine-Borel 有限子覆盖定理，存在有限个 $F_{\alpha_i}^c, i = 1, 2, \cdots, l$, 有

$$F_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^{l} F_{\alpha_i}^c$$

因此 $F_{\alpha_0} \bigcap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{l} F_{\alpha_i}\right) = \emptyset$, 这与已知条件相矛盾，故 $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha \neq \emptyset$.

Ex 28: 设 $\{F_\alpha\}$ 是 R^n 中的有界闭集族， G 是开集且有

$$\bigcap_{\alpha} F_\alpha \subset G,$$

试证明 $\{F_\alpha\}$ 中存在有限个 $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_m}$ ，使得

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_{\alpha_i} \subset G.$$

证明：由 $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha \subset G$, 知 $G^c \subset \bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha^c$, 任取一个 F_{α_0}, 显然 $F_{\alpha_0} \bigcap G^c \subset \bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha^c$, 这时 $F_{\alpha_0} \bigcap G^c$ 为有界闭集，F_α^c 是对它的一个开覆盖，由 Heine-Borel 有限子覆盖定理，存在有限个 $F_{\alpha_i}^c, i = 1, 2, \cdots, l$, 有

$$F_{\alpha_0} \bigcap G^c \subset \bigcup_{i=1}^{l} F_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^{l} F_{\alpha_i}\right)^c$$

因此

$$\bigcap_{i=1}^{l} F_{\alpha_i} \subset G \cup F_{\alpha_0}^c$$

从而

$$\bigcap_{i=0}^{l} F_{\alpha_i} \subset G \cap F_{\alpha_0} \subset G.$$

Ex 29: 设 $K \subset R^n$ 是有界闭集，$\{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖，试证明存在 $\varepsilon > 0$, 使 K 的任一点为中心，ε 为半径的球必含于 $\{B_k\}$ 中的一个.

证明：$K \subset R^n$ 是有界闭集，$\{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖，由 Heine-Borel 有限覆盖定理知，存在有限个开球 $\{B_k\}, (k = 1, 2, \cdots, m)$, 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_k.$$

因此 $\forall x \in K$, 存在某个开球 B_{k_0}, 使得 $x \in B_{k_0}$, 由于 B_{k_0} 是开球，因此存在 $\delta_x > 0$, 使得 $O(x, \delta_x) \subset B_{k_0}$.

考虑到

$$K \subset \bigcup_{x \in K} O(x, \delta_x/2)$$

再次利用 Heine-Borel 有限覆盖定理，存在有限个 $x_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ 使得

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{l} O(x_i, \delta_{x_i}/2) \qquad (1)$$

取 $\varepsilon = \min\limits_{1 \le i \le l} \frac{\delta_{x_i}}{2}$, 则此 $\varepsilon > 0$ 满足题中的要求. 对任意 $x \in K$, 考虑以 x 为中心，ε 为半径的球 $B(x, \varepsilon)$, 首先由 (1) 知存在某个 i_0, 使得 $x \in O(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}/2)$, 其次这时对任意 $y \in B(x, \varepsilon)$, 有

$$d(y, x_{i_0}) \le d(y, x) + d(x, x_{i_0}) \le \varepsilon + \delta_{x_{i_0}}/2 < \delta_{x_{i_0}},$$

也即

$$B(x, \varepsilon) \subset O(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}).$$

而 $O(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}})$ 根据选取是整个含在某个开球 B_k 中.

Ex 32. 试证明 R^1 中的可数稠密集不是 G_δ 集.

证明：(本题的证明类似于 R^1 中的有理点集不是 G_δ 集)

设 $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 是 R^1 中的可数稠密集，若 E 是 G_δ 集，则存在可列个开集 $G_i, i = 1, 2, \cdots$, 使得 $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, 因此有

$$R^1 = E^c \cup E = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^c\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}\right)$$

由于 $E \subset G_i$ 因此 G_i 稠密，故 G_i^c 是无内点的闭集，而单点集是无内点的闭集，因此 R^1 被表示为可列个无内点的闭集的并，由 Baire 定理知 R^1 无内点，这一矛盾说明 E 不是 G_δ 集.

Ex 34. 试证明在 $[0,1]$ 上不能定义如下函数 $f(x)$: 在有理点上连续，在无理点不连续.

只需注意到 $[0,1]$ 上定义的函数 $f(x)$ 的连续点集构成 G_δ 集，而同样可以证明 $[0,1]$ 中的有理数集也不是 G_δ 集.

Ex 36. 设 $E \subset R^1$ 是非空可数集. 若 E 无孤立点，试证明 $\overline{E} \setminus E$ 在 $\overline{E}$ 中稠密.

证明： $E \subset R^1$ 是非空可数集, 由于 E 无孤立点, 因此 E 必是可列集, 而且 $\overline{E} = E' \cup E = E'$,(没有孤立点说明所有点都是聚点), 而且不可能 $E' = E$, 否则 E 是完全集 (完备集), 而非空完备集的基数为 c, 因此 $\overline{E} \setminus E = E' \setminus E \neq \emptyset$. 需证 $\overline{\overline{E} \setminus E} \supset \overline{E}$. $\forall x_0 \notin \overline{\overline{E} \setminus E}$, $\exists \delta_0 > 0$, 使得 $O(x_0,\delta_0) \cap (\overline{E} \setminus E) = \emptyset$, 由于 $E \subset \overline{E}$, 因此， $O(x_0,\delta_0) \cap \overline{E} = \emptyset$, 或 $O(x_0,\delta_0) \subset E$, 而后者是不可能的 (因 E 可数), 故 $O(x_0,\delta_0) \cap \overline{E} = \emptyset$, 因此 $x_0 \in \overline{E}^c$.

Ex 37. 试证明在 R^n 中的任一闭集皆为 G_δ 集，任一开集皆为 F_σ 集.

证明：由于开集的补集是闭集， G_δ 集的补集是 F_σ 集，因此我们仅需证明前半部分. 设 F 是 R^n 中的闭集，考虑距离函数 $f(x) = d(x,F)$, 以及

$$F = \{x : d(x,F) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : d(x,F) < \frac{1}{k}\}$$

由距离函数的连续性知 $\{x : d(x,F) < \frac{1}{k}\}$ 均为开集，因此 F 是 G_δ 集.

Ex 38. 设 $f(x) : [0,1] \mapsto [0,1]$, 若点集

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$$

是 $[0,1] \times [0,1]$ 中的闭集，则 $f \in C([0,1])$.

证明：从条件知 $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ 是有界闭集 (紧集), 对任意 $x_0 \in [0,1]$ 以及数列 $x_n \to x_0$,$(x_n, f(x_n)) \in G_f$, 因此 $f(x_n)$ 是有界数列，从而存在收敛子列 $f(x_{n_j})$, 设 $f(x_{n_j}) \to y_0$, 则 $(x_{n_j}, f(x_{n_j})) \to (x_0, y_0)$, 由于 G_f 是闭的, 因此 $(x_0,y_0) \in G_f$, 因此 $y_0 = f(x_0)$, 所以对任意数列 $x_n \to x_0$ 存在子列 $f(x_{n_j}) \to f(x_0)$, 从而 $f(x_n) \to f(x_0)$(归结原则). 故 f 在 x_0 连续，从而 $f \in C([0,1])$.

Ex 41. 设 F_1, F_2, F_3 是 R^n 中三个互不相交的闭集，试作 $f \in C(R^n)$, 使得
(i) $0 \leq f(x) \leq 1$;
(ii) $f(x) = 0 (x \in F_1); f(x) = 1/2 (x \in F_2); f(x) = 1 (x \in F_3)$.

解：作

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1) + d(x,F_2 \cup F_3)} + \frac{d(x,F_1 \cup F_2)}{d(x,F_1 \cup F_2) + d(x,F_3)}\right].$$

(作者：何国龙　浙江师范大学数学系　Email: glhe@zjnu.cn, 最后修正 2007.4.9)

第二章　Lebesgue 测度习题选解

Ex 1: 设 $E \subset R^1$, **且存在** $q \in (0,1)$, **使得对任一区间** (a,b), **都有开区间列** $\{I_n\}$:

$$E \cap (a,b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q.$$

试证明　$m(E) = 0$.

证明：由条件知 $m^*(E \cap (a,b)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q$, 也就是对任意开区间 I, 有

$$m^*(E \cap I) \leq q * |I|$$

因此对 E 的任意 $L-$ 覆盖 $\{I_n\}$ 有，$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, 结合外测度的次可列可加性有，$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap I_n) \leq q * \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$, 因此有

$$m^*(E) \leq q m^*(E)$$

因此 $m^*E = 0$, 故 $mE = 0$.

Ex 2: 设 $A_1, A_2 \subset R^n, A_1 \subset A_2, A_1$ **是可测集且有** $m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$, **试证明** A_2 **是可测集**.

证明：由于 A_1 是可测集，在 Caratheodory 条件中取 $T = A_2$, 有

$$m^*(A_2) = m^*(A_2 \cap A_1) + m^*(A_2 \cap A_1^c) = m(A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1)$$

由于 $m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$, 因此 $m^*(A_2 \setminus A_1) = 0$.
对任意 $T \subset R^n$, 再次利用 A_1 的可测性，并在 Caratheodory 条件中取 $T \cap A_2$ 作为试验集，有

$$m^*(T \cap A_2) = m^*(T \cap A_2 \cap A_1) + m^*(T \cap A_2 \cap A_1^c) = m^*(T \cap A_1) + m^*(T \cap (A_2 \setminus A_1)) = m^*(T \cap A_1).$$

所以

$$\begin{aligned} m^*T &= m^*(T \cap A_1) + m^*(T \cap A_1^c) = m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_1^c) \\ &\geq m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_2^c) \end{aligned}$$

结合自然的关系式

$$m^*T \leq m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_2^c)$$

知

$$m^*T = m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_2^c)$$

从而 A_2 是可测集.

注意: 上面的解法是直接用 Caratheodory 条件, 如果考虑直接用可测集的性质. 由 $m^*(A_2 \setminus A_1) = 0$, 因此 $A_2 \setminus A_1$ 是零测集，结合 A_1 可测即可得到 A_2 的可测性.

Ex 3: **设** $A, B \subset R^n$ **都是可测集，试证明**

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

证明: 若 $m(A), m(B)$ 中有一个为 ∞, 则所待证等式显然成立. 因此假设 $m(A) < \infty, m(B) < \infty$.

利用 A, B 的可测性及 Caratheodory 条件，有

$$m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap A) + m((A \cup B) \cap A^c) = m(A) + m(B \setminus A),$$

$$m(B) = m(B \cap A) + m(B \setminus A),$$

将上述两式相减并移项 (注意到 $m(A) < \infty, m(B) < \infty$) 即得

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Ex 4: **试问是否存在闭集** F,$F \subset [a, b]$ **且** $F \neq [a, b]$, **而**

$$m(F) = b - a?$$

解: 若 F 是闭集， $F \subset [a, b]$ 且 $F \neq [a, b]$, 则 $(a, b) \setminus F \neq \emptyset$, 即 $(a, b) \setminus F$ 为一个非空开集，必有 $m((a, b) \setminus F) > 0$, 又由于

$$m([a, b]) = m(F) + m([a, b] \setminus F)$$

因此 $m(F) = m([a, b]) - m([a, b] \setminus F) \leq m([a, b]) - m((a, b) \setminus F) < b - a$. 故满足题中要求的闭集 F 不存在.

Ex 8: **设** $\{E_k\}$ **是** $[0, 1]$ **中的可测集列，** $m(E_k) = 1 \ \ (k = 1, 2, \cdots)$, **试证明**

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

证明: 由 $m(E_k) = 1$, 则 $m(E_k^c) = 0$(这里余集关于 $[0, 1]$ 取), 因此 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k^c) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k^c) = 0$, 从而 $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$.

Ex 9: **设** $E_i \ (i = 1, 2, \cdots, k)$ **是** $[0, 1]$ **中的可测集，且有** $\sum\limits_{i=1}^{k} m(E_i) > k - 1$, **试证明**

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) > 0.$$

证明: 由 $\sum\limits_{i=1}^{k} m(E_i) > k - 1$ 知 $k - \sum\limits_{i=1}^{k} m(E_i) < 1$, 也即 $\sum\limits_{i=1}^{k} (1 - m(E_i)) < 1$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{k} m(E_i^c) < 1$, 则 $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i^c\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} m(E_i^c) < 1$, 因此 $m\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} E_i\right) > 0$. (这里余集关于 $[0, 1]$ 取).

Ex 14: 试证明点集 E 可测的充分必要条件是：对任给 $\varepsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2:

$$G_1 \supseteq E, G_2 \supseteq E^c,$$

使得 $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$.

证明：条件的必要性

若 E 可测，则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 G_1 是开集， $E \subset G_1$, 且 $m(G_1 \setminus E) < \varepsilon/2$; 又存在 F 是闭集， $F \subset E$, 且 $m(E \setminus F) < \varepsilon/2$, 取 $G_2 = F^c$, 则 G_2 是开集且 $G_2 \supseteq E^c$,

且 $m(G_1 \cap G_2) = m(G_1 \setminus F) \leq m(G_1 \setminus E) + m(E \setminus F) < \varepsilon$.

条件的充分性，这时条件相当于对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 G 是开集，且 $E \subset G$,F 是闭集，且 $F \subset E$, 而且 $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

考虑 $\varepsilon_k = 1/k$, 则存在开区间序列 G_k 及闭区间序列 F_k 使得，$F_k \subset E \subset G_k$,$m(G_k \setminus F_k) < 1/k$,

令 $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $m(G \setminus F) \leq 1/k$ 对任意 k 都成立，故 $m(G \setminus F) = 0$, 考虑到 $F \subset E \subset G$, 知 E 可测.

Ex II(6): 设 $A, B \subset R^n, A \cup B$ 是可测集，且 $m(A \cup B) < \infty$, 若

$$m(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B),$$

试证明 A, B 皆可测.

证明：作 B 的等测包 H, 即 $H \supseteq B, H$ 可测，由于 $A \cup B$ 可测，因此不妨设 $H \subset A \cup B$, 否则取 $H \cap (A \cup B)$ 作为 B 的等测包.

利用 H 的可测性，以及 Caratheodory 条件有

$$m(A \cup B) = m^*((A \cup B) \cap H) + m^*((A \cup B) \cap H^c)$$

$$= m^*(A \setminus H) + m(H) = m^*(A \setminus H) + m^* B$$

注意到 $m(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ 以及 $m(A \cup B) < \infty$ 因此 $m^*(A \setminus H) = m^*(A)$

利用 H 的可测性，以及 Caratheodory 条件又有

$$m^*(A) = m^*(A \setminus H) + m^*(A \cap H)$$

所以 $m^*(A \cap H) = 0$, 从而 $A \cap H$ 是可测集，

由于 $A = ((A \cup B) \setminus H) \cup (A \cap H)$ 知 A 可测. B 的可测性仅需注意到 A, B 地位的对成性即可.

(作者：何国龙　浙江师范大学数学系　Email: glhe@zjnu.cn, 最后修正 2007.4.25)

第三章　可测函数习题选解或提示

Ex 1: 设有指标集 $I, \{f_\alpha(x) : \alpha \in I\}$ 是 R^n 上的可测函数族, 试问函数 $S(x) = \sup\{f_\alpha(x) : \alpha \in I\}$ 在 R^n 上是可测的吗？

解：当指标集 I 是可数集时， $S(x)$ 是可测函数．否则 $S(x)$ 不一定可测．考虑一个不可测集 I, 对 $\forall \alpha \in I$ 作函数

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x = \alpha \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这时 $S(x) = \sup\{f_\alpha(x) : \alpha \in I\} = \chi_I(x)$ 不是可测函数.

Ex 3: 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上存在右导数，试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a, b)$ 上的可测函数.

提示：考虑右导函数

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} n[f(x + 1/n) - f(x)]$$

Ex 6: 设 $f_k(x)$ 是 $E \subset R^n$ 上的实值可测函数列， $m(E) < \infty$, 试证明

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = 0, \quad a.e.\ x \in E$$

的充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{j \to \infty} m(\{x \in E : \sup_{k \geq j}\{|f_k(x)|\} \geq \varepsilon\}) = 0.$$

证明：条件的必要性.
对任意 $\varepsilon > 0$, 由于

$$E(\sup_{k \geq j}\{|f_k(x)|\} \geq \varepsilon) \subseteq \bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq \varepsilon/2)$$

由 Lebesgue 引理知当 $m(E) < \infty, \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = 0, \quad a.e.\ x \in E$ 时,

$$\lim_{j \to \infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq \varepsilon/2)) = 0.$$

条件的充分性．由于

$$E(f_k(x) \text{ 不收敛于 } 0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq 1/i)$$

若

$$\lim_{j \to \infty} m(\{x \in E : \sup_{k \geq j}\{|f_k(x)|\} \geq \varepsilon\}) = 0.$$

则 $\forall i \in N$,

$$\lim_{j \to \infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq 1/i)) = 0.$$

而 $m(E)<\infty$, 由测度的极限性质有

$$m(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E(|f_k(x)|\geq 1/i)=\lim_{j\to\infty}m(\bigcup_{k=j}^{\infty}E(|f_k(x)|\geq 1/i))=0.$$

再由测度的次可加性有

$$m(E(f_k(x)\text{ 不收敛于 }0))=0.$$

Ex 7: **设** $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ **是** $[a,b]$ **上的几乎处处有限的可测函数，且有**

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=0,\quad a.e.\ x\in[a,b],$$

试证明存在 $E_n\subset[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$, **使得**

$$m\left([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$$

而 $\{f_k(x)\}$ **在每个** E_n **上一致收敛于** $f(x)$.

提示：考虑 $\delta=1/n$, 利用 Egoroff 定理.

Ex 8: **设** $\{f_k(x)\}$ **在** E **上依测度收敛于** $f(x)$,$\{g_k(x)\}$ **在** E **上依测度收敛于** $g(x)$, **试证明** $\{f_k(x)+g_k(x)\}$ **在** E **上依测度收敛于** $f(x)+g(x)$.

提示：考虑

$$\{x\in E:|f_k(x)+g_k(x)-(f(x)+g(x))|\geq\varepsilon\}\subset\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon/2\}\cup\{x\in E:|g_k(x)-g(x)|\geq\varepsilon/2\}$$

Ex 9: **设** $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ **是** E **上的几乎处处有限的可测函数, 且** $m(E)<\infty$. **若在** $\{f_k(x)\}$ **的任一子列** $\{f_{k_i}(x)\}$ **中均存在几乎处处收敛于** $f(x)$ **的子列** $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$, **试证明** $\{f_k(x)\}$ **在** E **上依测度收敛于** $f(x)$.

注：本题相当于 Riesz 定理的一种等价形式： 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数，且 $m(E)<\infty$. 则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是：在 $\{f_k(x)\}$ 的任一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中均存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$.

证明：若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上不是依测度收敛于 $f(x)$. 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}m(E(|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon_0))\neq 0.$$

则存在 $\delta_0>0,\forall k\in N,\exists n_k$ 递增，使得

$$m(E(|f_{n_k}-f(x)|)\geq\varepsilon_0)>\delta_0.\qquad(*)$$

这时 f_{n_k} 不可能有几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列, 否则若存在子列 $f_{n_{k_i}}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 则由 Lebesgue 引理 $f_{n_{k_i}}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 即

$$\lim_{i\to\infty}m(E(|f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|\geq\varepsilon_0))=0.$$

这与 $(*)$ 相矛盾.

Ex 13: **设** $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ **在** E **上都依测度收敛于** 0, **试证明** $\{f_k(x) \cdot g_k(x)\}$ **在** E **上依测度收敛于** 0.

提示：考虑

$$f_k(x) \cdot g_k(x) = \frac{[f_k(x) + g_k(x)]^2 - [f_k(x) - g_k(x)]^2}{4}$$

因此仅需证明当 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0, 有 $\{f_k(x) \pm g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0, 且若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0, 则 $\{f_k^2(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0.

Ex 15: **设有定义在可测集** $E \subset R^n$ **上的函数** $f(x)$, **且对任给的** $\delta > 0$, **存在** E **中的闭集** $F, m(E \setminus F) < \delta$, **使得** $f(x)$ **在** F **上连续，试证明** $f(x)$ **是** E **上的可测函数**.

注：本题的结论即是 Lusin 定理的逆定理.
提示：考虑 $\delta = 1/n$, 则存在 $F_n \subset E, m(E \setminus F_n) < 1/n, f(x)$ 在 F_n 上连续.

Ex 17: **设** $f(x), f_k(x)\ (k = 1, 2, \cdots)$ **是** $E \subset R^1$ **上实值可测函数．若对任给** $\varepsilon > 0$, **必有**

$$\lim_{j \to \infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \{x : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

试证明 $f_k(x)$ **在** E **上近一致收敛于** $f(x)$.

提示：完全依照 Egoroff 定理的证明.

第四章 Lebesgue 积分习题选解或提示

Ex 1: 设 $f(x)$ **是** $E \subset R^n$ **上几乎处处大于零的可测函数，且满足** $\int_E f(x)dx = 0$, **试证明** $m(E) = 0$.

证明：设 $E_1 = E[f > 0], E_2 = E \setminus E_1$, 则 $m(E_2) = 0$, 因此 $\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx = 0$. 故 $m(E_1) = 0$, 从而 $m(E) = m(E_1) + m(E_2) = 0$.

Ex 3: 设 $f(x)$ **是** $E \subset R^n$ **上非负可测函数. 若存在** $E_k \subset E, m(E \backslash E_k) < 1/k (k = 1, 2, \cdots)$,, **使得极限**

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx$$

存在，试证明 $f(x)$ **在** E **上可积.**

证明：作 $\tilde{E_1} = E_1, \tilde{E_k} = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \ (k = 2, 3, \cdots)$, 则有 $\tilde{E_i} \cap \tilde{E_j} = \emptyset (i \neq j), \bigcup_{j=1}^{k} \tilde{E_j} = E_k$, $(k = 1, 2, \cdots)$. 记 $\tilde{E} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{E_j}$, 则有 $m(E \setminus \tilde{E}) \le m(E \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \tilde{E_j}) = m(E \setminus E_k) < 1/k \ (k = 1, 2, \cdots)$, 所以 $m(E \setminus \tilde{E}) = 0$. 因此利用非负可测函数关于积分区域的可加性有.

$$\int_E f(x)dx = \int_{\tilde{E}} f(x)dx = \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{E_j}} f(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\tilde{E_j}} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{\tilde{E_j}} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

由极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx$ 的存在即知 $f(x)$ 在 E 上可积.

Ex 5: 设 $f_k(x) (k = 1, 2, \cdots)$ **是** R^n **上的非负可积函数列，若对任一可测集** $E \subset R^n$, **都有**

$$\int_E f_k(x)dx \le \int_E f_{k+1}(x)dx,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx.$$

提示：由已知条件， $E_k = \{x : f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$ 是零测度集，因此在去掉 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$(零测度集) 剩下的点集上， $f_k(x)$ 是非负渐升函数列，再利用 Levi 单调收敛定理.

Ex 7: 假设有定义在 R^n **上的函数** $f(x)$, **如果对于任意的** $\varepsilon > 0$, **存在** $g, h \in L(R^n)$, **满足** $g(x) \le f(x) \le h(x) \ \ (x \in R^n)$, **并且使得**

$$\int_{R^n} [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon,$$

试证明 $f \in L(R^n)$.

提示：首先在给定的条件下 $f(x)$ 是可测函数. 其次容易证明对非负函数 $f(x)$ 结论成立，再利用当 $g \le f \le h$ 时，有 $g^+ \le f^+ \le h^+, h^- \le f^- \le g^-$ 证得对一般可测函数结论仍成立.

Ex 9: 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数，试证明对 $E\subset[0,1]$,$m(E)=t$，有 $\int_{[0,t]}f(x)dx\le\int_E f(x)dx$.

证明: 若 $m([0,t]\cap E)=t$, 则由于 $m(E)=t=m([0,t])$, 所以此时 $\int_{[0,t]}f(x)dx=\int_E f(x)dx$. 否则 $m([t,1]\cap E)>0$,

$$\int_{[0,t]}f(x)dx=\int_{[0,t]\cap E}f(x)dx+\int_{[0,t]\setminus E}f(x)dx\le\int_{[0,t]\cap E}f(x)dx+\int_{[t,1]\cap E}f(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

Ex 11.1: 试证明等式

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{(0,\infty)}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\quad(\alpha>1).$$

注: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt$. 证明：考虑到

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^{-x}}{1-e^x}=e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}.$$

利用非负可测函数的逐项积分定理得

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{(0,\infty)}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(0,\infty)}x^{\alpha-1}e^{-nx}dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(0,\infty)}n^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}.$$

Ex 13: 设 $f(x)\in L(R^1),p>0$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0,\quad a.e.x\in R^1.$$

证明：设 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|n^{-p}f(nx)|$, 利用非负可测函数的逐项积分定理有.

$$\int_{R^1}F(x)dx=\int_{R^1}\sum_{n=1}^{\infty}|n^{-p}f(nx)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^1}|n^{-p}f(nx)|dx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}\int_{R^1}|f(nx)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-p}\int_{R^1}|f(x)|dx<+\infty$$

从而 $F(x)$ 在 R^1 上几乎处处有限，从而它的通项

$$\lim_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0,\quad a.e.x\in R^1.$$

Ex 16: 设 $f\in L([0,1])$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)dx=0.$$

证明：考虑函数 $f(x)=\ln(1+x^2)-x,f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-1=\frac{-(x-1)^2}{1+x^2}<0,x\ge0$, 因此 $\ln(1+x^2)\le x(x\ge0)$

$$n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)<|f(x)|$$

2

由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)dx=\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)dx.$$

考虑函数 $g(x)=\ln(1+x^2)-x^2$,$g'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-2x=2x(\frac{1}{1+x^2}-1)<0(x\geq 0)$, 因此 $\ln(1+x^2)\leq x^2$

$$n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)<|f(x)|^2/n\to 0\ \ a.e.x\in[0,1]$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)dx=0.$$

Ex 17: 设 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots$,$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, $f\in L(E_k)\ \ (k=1,2,\cdots)$, **试证明**

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

证明：由积分关于区域的可数可加性我们可以证明以下结论成立.

若 F_k 是单调渐增可测集列，且 $f(x)$ 在 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ 上可积，则

$$\int_F f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{F_k} f(x)dx.$$

因为

$$\int_F f(x)dx=\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k} f(x)dx=\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(F_k\setminus F_{k-1})} f(x)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k\setminus F_{k-1}} f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\int_{F_j\setminus F_{j-1}} f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{F_k} f(x)dx.$$

其中 $F_0=\varnothing$.

对于 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots$,$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, $f\in L(E_k)\ \ (k=1,2,\cdots)$, 我们考虑单调渐增集列 $E_1\setminus E_k$, 则有

$$\int_{E_1\setminus E} f(x)dx=\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_1\setminus E_k)} f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{E_1\setminus E_k} f(x)dx$$

因此 (由 $f(x)$ 在 E_k 上的可积性)

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

Ex 18: 设 $f\in L(E)$, **且** $f(x)>0\ \ (x\in E)$ **试证明**

$$\lim_{k\to\infty}\int_E [f(x)]^{1/k}dx=m(E).$$

证明：设 $E_0 = E[f = +\infty], E_1 = E[1 \le f < +\infty], E_2 = E[f < 1]$, 因此，$E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, 由于 $f \in L(E)$ ，因此 f 在 E 上几乎处处有限，也即 $m(E_0) = 0$, 因此

$$\int_E [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_1} [f(x)]^{1/k} dx + \int_{E_2} [f(x)]^{1/k} dx,$$

在 E_1 上，由于 $[f(x)]^{1/k} \le f(x)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_1} [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_1} \lim_{k\to\infty} [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_1} 1 dx = m(E_1).$$

在 E_2 上，由于 $0 < f(x) < 1$ ，因此 $[f(x)]^{1/k}$ 单调递增收敛于 1, 由 Levi 单调收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_2} [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_2} \lim_{k\to\infty} [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_2} 1 dx = m(E_2).$$

综合起来得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_E [f(x)]^{1/k} dx = m(E).$$

Ex 21: 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列， $g(x)$ 是 E 上的正值可积函数，若 $f_k(x) \ge -g(x)$ $(x \in E, k = 1, 2, \cdots)$, 试证明

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k(x) dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x).$$

提示：应用 Fatou 引理.

Ex 23: 设 $f \in L(R^n), f_k \in L(R^n)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 且对于任一可测集 $E \subset R^n$, 有

$$\int_E f_k(x) dx \le \int_E f_{k+1}(x) dx, (k = 1, 2, \cdots),$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \;\; a.e. x \in R^n.$$

提示：由条件可知 $f_k(x)$ 在除去一个零测度集后单调渐升, 并且由积分的极限条件知 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 从而存在子列几乎处处收敛于 $f(x)$, 结合单调性即得所需结论.

Ex 24: 设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset R^n$ 上的两个可测函数列, 且有 $|f_k(x)| \le g_k(x), x \in E$. 若

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x),$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx < \infty,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

证明：由 $|f_k(x)| \leq g_k(x)$, 及 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$ 知 $|f(x)| \leq g(x)$. 考虑 $|f_k(x) - f(x)| \leq g_k(x) + g(x)$, 即 $g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)| \geq 0$, 利用 Fatou 引理有

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} [g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)|]dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E [g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)|]dx$$

可得

$$\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx = 0,$$

从而

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

注：本题可看作是 Lebesgues 控制收敛定理的推广形式.

Ex 25: 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，其不连续点集记为 D. 若 D 只有可列个极限点，试证明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数.

证明：由于函数的不连续点集必为 F_σ 型集，因此可设 $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 其中 F_k 是 $[a,b]$ 中的闭集，因此我们仅需证明对任意 $k, m(F_k) = 0$. 若对某个 $k, m(F_k) > 0$, 那么 F_k 必不是可列集，而且由于它是闭集，因此它的每个点都是其极限点，这立即导致与已知条件 D 只有可列个极限点矛盾. 因此 $m(D) = 0$. 从而根据有界函数 $Riemann$ 可积的充分必要条件知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数.