统计计算

2016 年 3 月 29 日

目录

目录

解线性方程组和部分方程组

解线性方程组: 见教材第 286 页.

解部分方程组: 见教材第 286–287 页.

计算广义逆

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, $\text{rank}\mathbf{A} = r \le n$.

1. 对 $\mathbf{A}$ 进行行列置换, 即存在置换阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$, 使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{B}_{11}$ 是 r 阶可逆阵, 且消去变换 $\mathbf{T}_i(i = 1, \cdots, r)$ 的主元均非 0.

计算广义逆 (续)

2. 将 $\mathbf{PAQ}$ 的后 $n-r$ 列由前 r 列线性表出:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}\mathbf{D} \\ \mathbf{B}_{21}\mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

3. 将对 $\mathbf{B}_{11}$ 求 $\mathbf{B}_{11}^{-1}$ 的消去变换作用在 $\mathbf{PAQ}$ 上, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_r\mathbf{T}_{r-1}\cdots\mathbf{T}_1(\mathbf{PAQ})\\
&\quad=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}\\ -\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{B}_{22}-\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}\end{bmatrix}\\
&\quad=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}\\ -\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{O}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4. 可以验证 $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12} \\ -\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$ 为 $\mathbf{PAQ}$ 的一个减号逆, 于是

$$\mathbf{A}^{-} = \mathbf{Q}(\mathbf{T}_r \cdots \mathbf{T}_1(\mathbf{PAQ}))\mathbf{P}.$$

若记 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{r i_r} \cdots \mathbf{P}_{1 i_1}, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{1 j_1} \cdots \mathbf{Q}_{r j_r}$, 则有

$$\mathbf{A}^{-} = \mathbf{QP}(\mathbf{T}_{i_r j_r} \cdots \mathbf{T}_{i_1 j_1}\mathbf{A})\mathbf{QP}.$$

进一步, 若 $\mathbf{A}$ 是对称的, 列变换 $\mathbf{Q}$ 是行变换 $\mathbf{P}$ 的转置, 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-} &= \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{T}_{i_r}\cdots\mathbf{T}_{i_1}\mathbf{A})\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \\ &= \mathbf{T}_{i_r}\cdots\mathbf{T}_{i_1}\mathbf{A}.\end{aligned}$$

计算广义逆 (续)

5. 对于 $\{1,2\}$-逆, 可以验证 $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$ 为 $\mathbf{PAQ}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 于是

$$\mathbf{A}^{(1,2)} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{P}.$$

因此, 可按求减号逆的步骤进行, 只是在施行消去变换时, 在非 $(i_1, j_1), \cdots (i_r, j_r)$ 所对应的行列元素置为 0. 详见教材第 287—288 页.

计算广义逆 (续)

对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的广义逆 $\mathbf{A}^{-}$ 和 $\mathbf{A}^{(1,2)}$ 的计算.
定义:

$$(G_1\mathbf{T}_i)\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{T}_i\mathbf{A} & \text{若 } \mathbf{T}_i \text{ 的主元非 } 0 \\ \mathbf{A} & \text{若 } \mathbf{T}_i \text{ 的主元为 } 0 \end{cases}$$

$$(G_2\mathbf{T}_i)\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{T}_i\mathbf{A} & \text{若 } \mathbf{T}_i \text{ 的主元非 } 0 \\ \text{第 } i \text{ 行和 } i \text{ 列置为} 0 & \text{若 } \mathbf{T}_i \text{ 的主元为 } 0 \end{cases}$$

结论: 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵, 则

$$\mathbf{A}^{-} = (G_1\mathbf{T}_n)\cdots(G_1\mathbf{T}_1)\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}^{(1,2)} = (G_2\mathbf{T}_n)\cdots(G_2\mathbf{T}_1)\mathbf{A}.$$

计算 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 的乘积

详见教材第 288 页.

目录

X^TX 型矩阵的消去变换

引言: 见教材第 289 页.

$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 型矩阵逆的计算

设 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

1. 若 $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 非奇异, 则消去变换 $\mathbf{T}_1, \cdots, \mathbf{T}_m$ 的主元均非零.

证明　见教材第 289 页性质 1 (1).

$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 型矩阵广义逆的计算 (续)

2. 若 $\mathrm{rank}\mathbf{X} = r$, 则 $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 的广义逆为:
   - 教材第 289 页性质 1 (3);
   - 教材第 290 页性质 2.

$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 型矩阵广义逆的计算 (续)

一般地, 有

$$(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-} = (G_1\mathbf{T}_n)\cdots(G_1\mathbf{T}_1)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X},$$

$$(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{(1,2)} = (G_2\mathbf{T}_n)\cdots(G_2\mathbf{T}_1)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}.$$

例: 设

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算 $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-}$.

$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 型矩阵广义逆的计算 (续)

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-} &= (G_1\mathbf{T}_3)(G_1\mathbf{T}_2)(G_1\mathbf{T}_1)\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= (G_1\mathbf{T}_3)(G_1\mathbf{T}_2)\begin{bmatrix} 1/4 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (G_1\mathbf{T}_3)\begin{bmatrix} 1/4 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 型分块矩阵的消去变换

1. 性质 1 (2);
2. 性质 3 (4);
3. 性质 3 (1), (2), (3).

对一般方阵的逆, 也有类似的分块算法.

设矩阵 $\mathbf{A}$ 非奇异, 且有如下分块形式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

分块矩阵的逆 (续)

1. 若 $\mathbf{A}_{11}$ 非奇异, 则 $\Delta = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ 非奇异, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\Delta^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix}.$$

分块矩阵的逆 (续)

证明　首先

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix},$$

所以

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{11} \cdot \det(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}),$$

从而 Δ 非奇异. 在前式两边取逆即可得

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

2. 若 $\mathbf{A}_{22}$ 非奇异, 则 $\Lambda = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$ 非奇异, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & -\Lambda^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\Lambda^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\Lambda^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

证明 用 (1) 类似的方法可以证明.

在 $\mathbf{A}$ 非奇异情形下, 将一个高阶矩阵分成适当的低阶子矩阵, 在求出低阶子矩阵的逆矩阵之后, 由上面任一式即可获得原矩阵的逆矩阵.

显然这种分块矩阵求逆算法有助于减少计算量和存储量, 在实际应用中具有重要的作用.

作业

1. 用消去变换计算矩阵的逆:
   P. 296: $\mathbf{A}_1$;
2. 用消去变换计算矩阵的广义逆:
   P. 294: 5.26.

问　题?