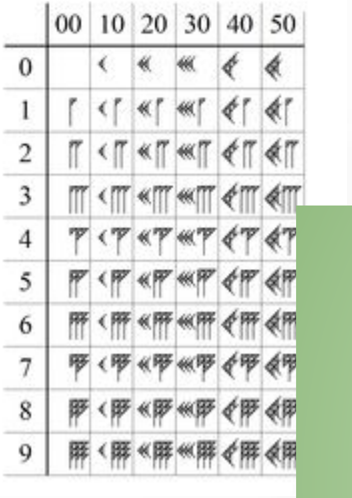
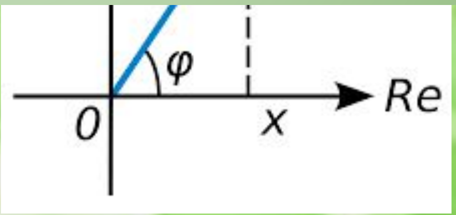
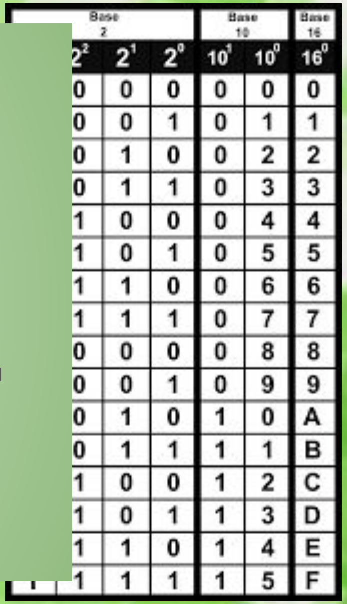


Les bases et les ensembles de nombres !





SOMMAIRE

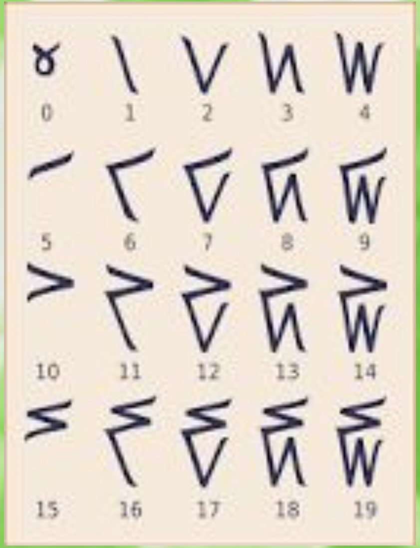
I. Les bases de nombres

1) Définition :

Une base de nombre est l'ensemble de signes ou symboles utilisés mathématiquement pour représenter les nombres.

Symboles étrusques	Symboles romains	Valeur décimale
I	I	1
Λ	V	5
X	X	10
↑	L	50
Ж	C	100
D	D	500
⊕	M	1000

Décimal	Hexadécimal	Binaire
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111



2) Exemples de bases les plus communes :

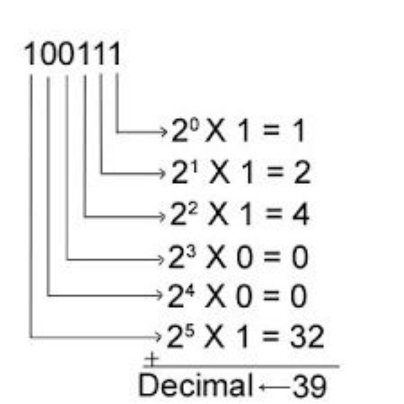
a) Base décimale :

La base décimale (aussi appelée base 10) est la base utilisée actuellement dans les mathématiques classiques. Elle est composé de 9 signes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On appelle aussi ces chiffres “chiffres arabes”. Ce système est un système additif (on peut ajouter les signes). Ce sont les égyptiens qui ont créé les décimaux vers 2500 av. JC.

b) <u>Base binaire :</u>

Une base binaire est une base ou seul 2 possibilités de signes sont offerts : 0 ou 1. Malgré cette restriction, ce système est aussi beaucoup utilisé aujourd'hui, particulièrement dans le domaine informatique. Ce langage, créé à la fin du XVIIe siècle par le scientifique et mathématicien Gottfried Leibniz, est utilisé par les différentes composantes d'un ordinateur pour travailler et surtout communiquer. Pour utiliser la base binaire, il faut savoir ses puissances de 2 de manière à pouvoir facilement passer de la base 10 à la base 2.

Base 10	Base 2
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010



c) Base hexadécimale :

La base hexadécimale est une base qui utilise 16 symboles : les 10 premiers chiffres arabes (0 à 9) et les lettres de A à F. Ce système est utilisé par les ingénieurs et par les informaticiens encore aujourd'hui. Cette base a été utilisé pour la première fois par des ingénieurs en 1956.

0_{hex} = 0_{dec} = 0_{oct}	0	0	0	0
1_{hex} = 1_{dec} = 1_{oct}	0	0	0	1
2_{hex} = 2_{dec} = 2_{oct}	0	0	1	0
3_{hex} = 3_{dec} = 3_{oct}	0	0	1	1
4_{hex} = 4_{dec} = 4_{oct}	0	1	0	0
5_{hex} = 5_{dec} = 5_{oct}	0	1	0	1
6_{hex} = 6_{dec} = 6_{oct}	0	1	1	0
7_{hex} = 7_{dec} = 7_{oct}	0	1	1	1
8_{hex} = 8_{dec} = 10_{oct}	1	0	0	0
9_{hex} = 9_{dec} = 11_{oct}	1	0	0	1
A_{hex} = 10_{dec} = 12_{oct}	1	0	1	0
B_{hex} = 11_{dec} = 13_{oct}	1	0	1	1
C_{hex} = 12_{dec} = 14_{oct}	1	1	0	0
D_{hex} = 13_{dec} = 15_{oct}	1	1	0	1
E_{hex} = 14_{dec} = 16_{oct}	1	1	1	0
F_{hex} = 15_{dec} = 17_{oct}	1	1	1	1

d) Base romaine :

Symboles étrusques	Symboles romains	Valeur décimale
I	I	1
Λ	V	5
X	X	10
↑	L	50
Ж	C	100
D	D	500
⊕	M	1000

La base romaine est une base 7 (avec 7 symboles), créée vers le Ier siècle avant JC. Cette base est dérivée de la base étrusque. Les 7 symboles sont I V X L C D et M.

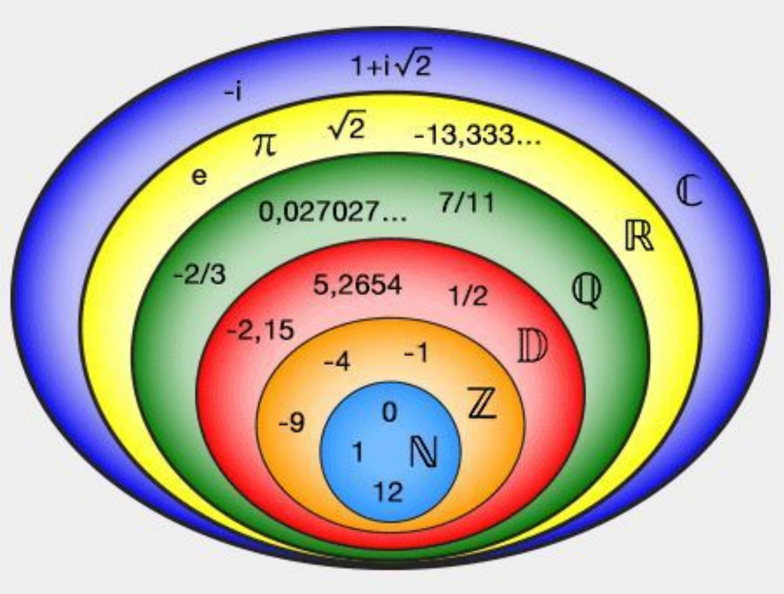
Cette base est encore beaucoup utilisé aujourd’hui dans le domaine notamment historique pour annoter les siècles, en littérature dans le théâtre, dans la médecine,...

Il existe énormément d’autres bases de nombre, mais celles-ci sont les principales.

II. Les ensembles de nombres

1) Définition :

Un ensemble de nombres désigne tous les nombres qui possèdent la totalité des critères mathématiques définis par cet ensemble.



2) Exemples d’ensembles les plus communs :

a) Les Naturels :

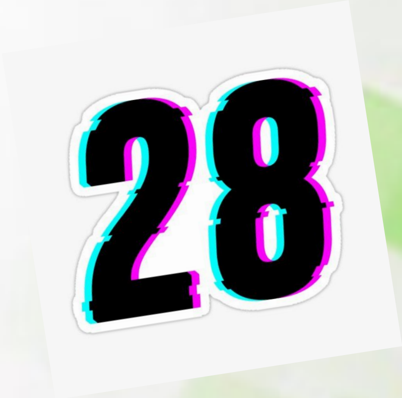
Un nombre naturel est un nombre entier positif ou nul.

Cet ensemble se note : $\mathbb{N}$

Ensemble dérivé :

- $\mathbb{N}^*$

Exemples de naturels :

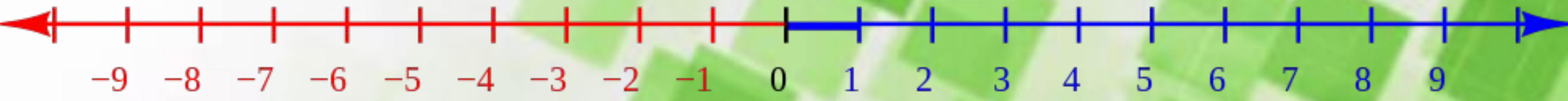


b) <u>Les nombres entiers :</u>

L’ensemble englobant la totalité des nombres entiers est l’ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$. La lettre $\mathbb{Z}$ provient de zahlen qui signifie compter en allemand.

<u>Ensembles dérivés :</u>

- $\mathbb{Z}^* \rightarrow$ privé de 0
- $\mathbb{Z}^- \rightarrow$ entiers négatifs
- $\mathbb{Z}^+ \rightarrow$ entiers positifs $\Leftrightarrow \mathbb{N}$



c) <u>Les Décimaux :</u>

1.c) Définition :

L'ensemble des nombres décimaux (tous les **nombres finis** à droite et à gauche de la virgule) est noté $\mathbb{D}$. Nous devons obtenir un nombre entier d'un nombre décimal lorsqu'on le multiplie par une puissance de 10.

Par exemple : 1,3579 x 10000 = 13579 ; ¾ (0,75) x 100 (10^2) = 75.

Tout nombre décimal peut donc s'écrire sous la forme $a/10^x$ avec a et 10^x premiers entre eux, et x un nombre entier naturel (la fraction a/10 ne peut pas être simplifiée, et a doit être un entier). Par exemple, 19,3 est un nombre décimal, idem pour 0,12345678987654321. Cependant, ⅓ n'est pas un nombre décimal…

2.c) Démonstration : Pourquoi ⅓ n'est pas un nombre décimal ?

Supposons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal :

$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^x}$ (avec a et 10^x premiers entre eux, et x un nombre entier naturel)

$$\Leftrightarrow \frac{10^x}{3} = a \text{ (produit en croix)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \times 10^x}{3} = 3a \text{ (multiplication par trois)}$$

$$\Leftrightarrow 10^x = 3a \text{ (simplification de la fraction de gauche par 3)}$$

Donc 10^x est divisible par 3.
On sait que selon le critère de divisibilité par 3, la somme des chiffres de 10^x est un multiple de 3.
Or la somme des chiffres d'une puissance de 10 est toujours égale à 1 (en effet 10 → 1 ; 1000000000 → 1 ; 10^x → 1).
Absurde ($\frac{1}{3}$ n'est donc pas un nombre décimal). CQFD

d) <u>Les Rationnels :</u>

1.d) Définition :

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble $\mathbb{Q}$. Cette lettre fait référence au mot Quotiente (fraction en italien), car en effet, un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction** (de fait sous la forme a/b).

$$\frac{a}{b}$$

2.d) Ensemble dérivé : Les p-adiques

Les p-adiques (noté $\mathbb{Q}_p$) est un ensemble de nombre dérivé des rationnels très particulier. Un nombre p-adique a pour base justement un nombre aléatoire p.

Très simplement, un p-adique est un nombre qui est infini à gauche de la virgule.

C'est un ensemble de nombre très rarement vu même dans les études supérieures au bac en mathématiques.

Voici une addition de 2 nombres p-adiques :

$$\begin{array}{rr} & \ldots 12121212 \\ + & \ldots 95325368 \\ \hline & \ldots 07446570 \end{array}$$

e) <u>Les Réels :</u>

1.e) Définition :

Un nombre réel est un nombre compris entre -∞ et +∞. Cet ensemble se note : $\mathbb{R}$. Il existe plusieurs sous-catégories dans cet ensemble de nombres :

- Les rationnels : tous les nombres qui ont une partie décimale “logique” (périodique) tel que ⅓ (1,333333…) ou 2,578578578578… c’est-à-dire que les décimales sont une suite logique de chiffre qui se répètent
- Les irrationnels : les nombres qui ont une partie décimale “aléatoire” tel que π (3,14159265…) ou la racine de 2 (1,414213562…). Un nombre irrationnel ne peut donc pas se noter a/b. Cet ensemble peut se noter $\mathbb{Q}$’.
- Les nombres algébriques : solutions d’équations polynomiales à coefficient entier (les équations classiques vues en 3e). Soit l’équation $x^2=2$. La racine de 2 est solution de cette équation, de ce fait c’est un nombre algébrique
- Les nombres transcendants : ils ne sont pas solutions d’équations polynomiales à coeff. entier tels que π ou encore e^1 (2,71828…)

2.e) Démonstration : Pourquoi racine de 2 est irrationnel ?

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un rationnel :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 = (\frac{a}{b})^2$ (on élève chaque élément au carré afin de faire disparaître la racine)

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2$ (on multiplie chaque élément par b^2)

a^2 est donc pair.

$$2b^2 = (2k)^2$$

$$2b^2 = 4k^2$$

$$2b^2 = 2 \times 2k^2$$

Donc b est aussi pair.

On sait de ce fait que a et b peuvent être divisés par 2.

Or a et b doivent être premiers entre eux.

Absurde ($\sqrt{2}$ n'est donc pas un rationnel). CQFD

3.e) Ensembles dérivés :

Il existe de nombreux ensembles dérivés de $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}^*$ → L’ensemble des nombres réels privé de 0
- $\mathbb{R}/x$ → L’ensemble des réels privé d’un nombre quelconque (en l'occurrence ici x)
- $\mathbb{R}_+$ → L’ensemble des réels positifs
- $\mathbb{R}_-$ → L’ensemble des réels négatifs

⇒ Les différents signes d’ensembles peuvent se combiner. En effet on peut trouver par exemple $\mathbb{R}_+^*$ qui désigne l’ensemble des réels positifs privés de 0.

Remarque : *l’ensemble des irrationnels peut se noter $\mathbb{Q}'$, mais aussi $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (c’est-à-dire l’ensemble des réels privés de l’ensemble rationnel).*

f) <u>Les Complexes :</u>

1.f) Définition :

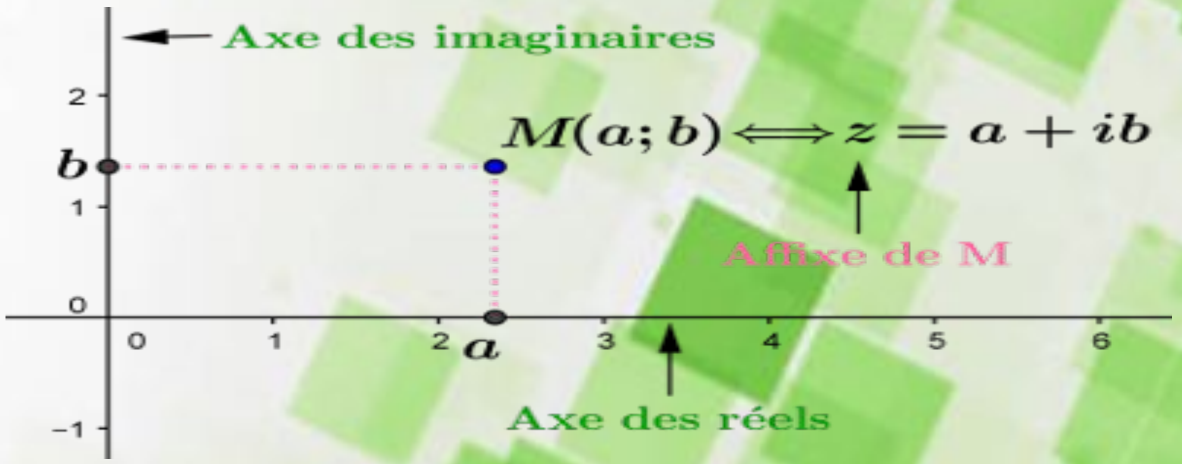
Un nombre complexe (appartenant donc à l'ensemble des complexes, noté $\mathbb{C}$) est un nombre aussi dit "imaginaire", c'est-à-dire qu'une partie de ce nombre est composé de i.
i est la solution de l'équation $x^2 = -1$. i est aussi appelé "unité imaginaire".
Par exemple, 4+2i est un nombre complexe.

Il existe 3 types de complexes :

- Les complexes composés d'une partie réelle et d'une autre imaginaire, tel que 3+6i. Ils sont de forme x+yi avec a et y réels.
- Les réels purs, composés uniquement d'une partie réelle et de forme x. Leur partie imaginaire est donc nulle. On peut donc considérer que 3 = 3+0i
- Les imaginaires purs, composés d'une unique partie imaginaire (yi). Leur partie réelle est donc nulle (3i ; 0,123456789i ; …). Cet ensemble peut se noter $i\mathbb{R}$.

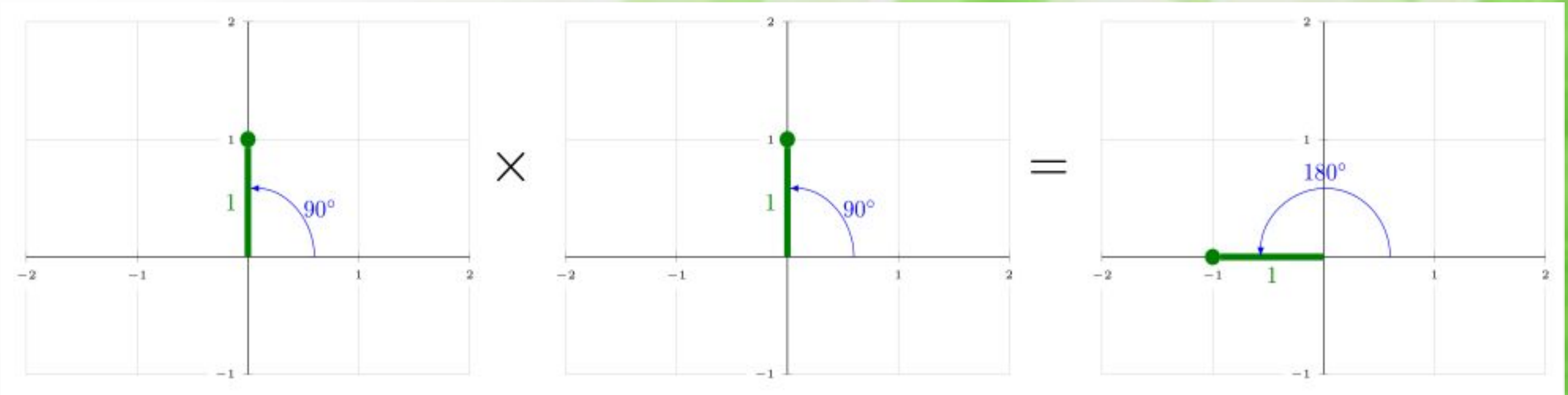
2.f) Représentation graphique d'un nombre complexe :

Un nombre complexe peut se représenter grâce à son affixe, avec la partie réelle de ce complexe pour l'abscisse et celle imaginaire pour les ordonnées.



3.f) Pourquoi $i^2 = -1$?

Nous savons que la partie réelle de i est nulle, et que son coefficient imaginaire est égal à un (puisque sa partie imaginaire n'est pas nulle). Donc nous pouvons placer le point i sur le point 1 de l'axe des ordonnées (ses coordonnées sont i(0;1)). Cela revient à tourner de 90° (au passage ½ π radians). On effectue une nouvelle fois l'action (i est au carré). On arrive donc au point (-1;0) (on a tourné de 180°, soit π rad). Voilà pourquoi $i^2 = -1$.



3) D’autres ensembles :

Il existe en effet des ensembles supérieurs aux complexes :

- Les quaternions ou hypercomplexes noté H ($i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ avec i j et k des quaternions), le premier ensemble non commutatif (qui ne respecte pas le fait qu’on peut échanger l’ordre des facteurs dans un produit)
- Les octonions noté O ($x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 l + x_5 il + x_6 jl + x_7 kl$ avec x un octonion et i j k l il jl et kl des dimensions) un ensemble basé sur une dimension 8
- Les sédénions noté S sont un ensemble de dimension 16 ne respectant ni la commutativité ni l’association (la composition)...
- et davantage…

⇒ Chaque ensemble est présent dans un autre ensemble, comme des boîtes. On peut donc en conclure :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O} \subset \mathbb{S}$$