

Polynômes du second degré

Présentation, résolution, étude,...

A vertical sidebar on the right side of the slide, featuring a dark background with several mathematical formulas written in a light blue, handwritten-style font. The formulas are partially visible and overlap each other, creating a sense of depth and mathematical complexity. The formulas include partial derivatives, integrals, and logarithmic functions, such as $\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi_1) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$, $\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi, \theta) \right)$, and $\int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right) dx$.
$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi_1) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$
$$\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi, \theta) \right)$$
$$\int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right) dx$$
$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi) = \frac{\partial}{\partial a} \int T(x) f(x, \theta) dx = \int T(x) \frac{\partial}{\partial a} f(x, \theta) dx$$

Sommaire :

PARTIE 1 : Présentation des polynômes du premier et second degré

I. Polynômes du premier degré

II. Polynômes du second degré

PARTIE 2 : Résolution d'équations du second degré

I. Présentation des équations du second degré

II. Résoudre des équations du second degré

1) Résoudre des équations du second degré sans le discriminant

2) Résoudre des équations du second degré avec le discriminant

PARTIE 3 : Etude des fonctions associées

1) Tableau de valeurs, de signe et de variations

2) Forme canonique



The background of the right side of the slide features a vertical strip with a blurred image of mathematical formulas. Visible formulas include:
$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$
$$\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi, \theta) \right)$$
$$\int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right) dx$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln T(\xi) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(x) f(x, \theta) dx = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx$$

PARTIE 1 : Présentation des polynômes du premier et second degré



A vertical strip on the right side of the slide contains several mathematical formulas in a light blue, semi-transparent font. The formulas are related to probability theory and calculus, including the Fisher information matrix, the log-likelihood function, and the score function. The formulas are partially cut off on the right edge.

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi) = \frac{(\xi - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$
$$\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi, \theta) \right)$$
$$\int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right) dx$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(x) f(x, \theta) dx = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx$$

I. Polynômes du premier degré

Un polynôme est une expression algébrique composée de constantes (dans les expressions sans valeur notées a , b , c) et de variables (x , y , z). Le polynôme est la base des fonctions.

Le polynôme type du premier degré (c'est à dire sans aucune puissance) est $ax+b$. On retrouve cette configuration dans les fonctions affines.

Par exemple, $3x+5$, $-19x-3$ sont des polynômes du premier degré.

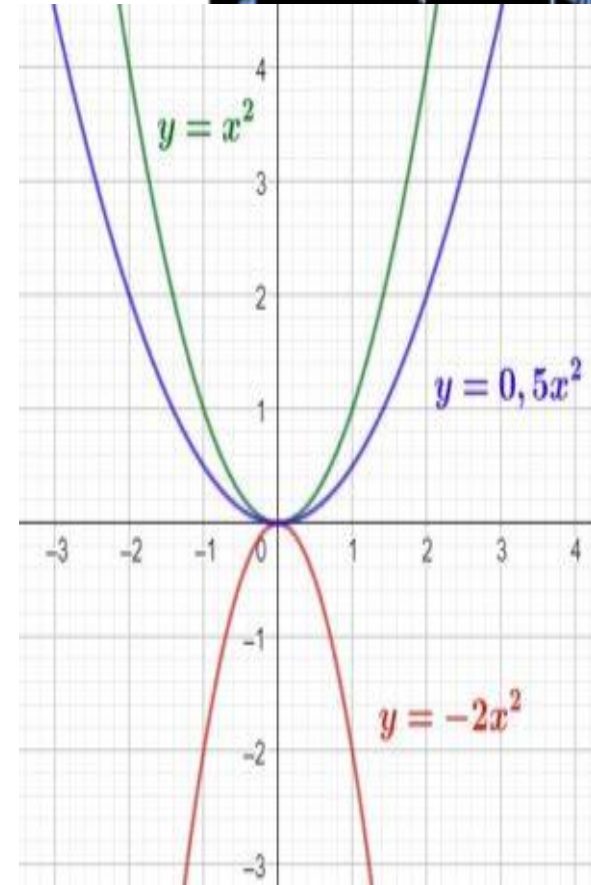


The background of the right side of the slide features a vertical strip with a blurred image of mathematical equations. Visible fragments include:
- $\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a,\sigma^2}(\xi) = \frac{(\xi - a)}{\sigma^2} f_{a,\sigma^2}(\xi) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a,\sigma^2}(\xi)$
- $\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi, \theta) \right)$
- $\int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx$
- $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(x) f(x, \theta) dx = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx$

II. Polynômes du second degré

Le polynôme type du second degré est ax^2+bx+c . Ce polynôme, aussi appelé trinôme, est différent du binôme du premier degré de part l'augmentation de l'exposant. Pour le premier degré, on a donc exposant 1, second degré 2, etc.

Les fonctions du second degré sont généralement de forme parabolique tel que la fonction $f(x) = x^2$, à droite. Elle est bien du second degré puisque qu'on peut aussi écrire $f(x) = 1x^2 + 0x + 0$.



PARTIE 2 : Résolution d'équations du second degré

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi) = \frac{(\xi - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$
$$\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi, \theta) \right)$$
$$\int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right) dx$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(x) f(x, \theta) dx = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx$$

I. Résoudre des équations du second degré

1) Résoudre sans le discriminant

Pour résoudre une équation du type $ax^2+bx+c = 0$, nous pouvons factoriser afin d'en déduire ses racines. Prenons l'exemple de $x^2-5x+6 = 0$

Notre objectif est de la mettre sous forme factorisée $(x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont les solutions de l'équation. Pour cela, on cherche deux nombres qui vérifient les deux conditions suivantes : Leur produit est égal au terme constant, ici 6, et leur somme est égale au coefficient de x , ici -5 . On trouve que les nombres -2 et -3 conviennent, car $-2 \times -3 = 6$ et $-2 + (-3) = -5$. On peut donc factoriser l'équation comme suit : $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$. On a donc une équation de type produit nul.

Or on sait qu'un produit de facteur est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul. De ce fait il nous suffit de trouver avec quel x chaque facteur est nul :

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x-2=0 \rightarrow x = 2$$

$$x-3=0 \rightarrow x = 3$$

Les solutions de l'équation x^2-5x+6 sont donc 2 et 3.

2) Résoudre avec le discriminant Δ

Delta Δ est le discriminant qui permet de résoudre ce type d'équations plus simplement en utilisant uniquement quelques formules. $\Delta = b^2 - 4ac$. Il suffit de remplacer les lettres correspondantes pour le trouver.

Du résultat de delta, nous pouvons en déduire 3 cas qui seront solutions de l'équation :

- $\Delta < 0$:

Aucune solution dans les réels

- $\Delta = 0$:

$$x_0 = -b/2a$$

- $\Delta > 0$:

$$x_1 = -b - \sqrt{\Delta}/2a$$

$$x_2 = -b + \sqrt{\Delta}/2a$$



The background of the right side of the slide features a vertical strip with a blurred image of mathematical formulas. Visible formulas include the chain rule $\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a,\sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a,\sigma^2}(\xi_1) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a,\sigma^2}(\xi_1)$, the integration by parts formula $\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi, \theta) \right)$, and the formula for the derivative of the log-likelihood function $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \cdot f(x, \theta)$.

$$\Delta > 0 : x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$= 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$= 2$$

$$\Delta = 0 : x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$\Delta = 16 - 16$$

$$\Delta = 0$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_0 = \frac{-(-4)}{2 \times 1}$$

$$x_0 = 2$$

$$\Delta < 0 : x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$\Delta = 1 - 4$$

$$\Delta = -3$$

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

avec i l'unité imaginaire de
l'ensemble des complexes (non
réel)

Partie 3 : Etude des fonctions associées

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi) = \frac{(\xi - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$
$$\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\xi, \theta) \right)$$
$$\int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right) dx$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\xi) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(x) f(x, \theta) dx = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx$$

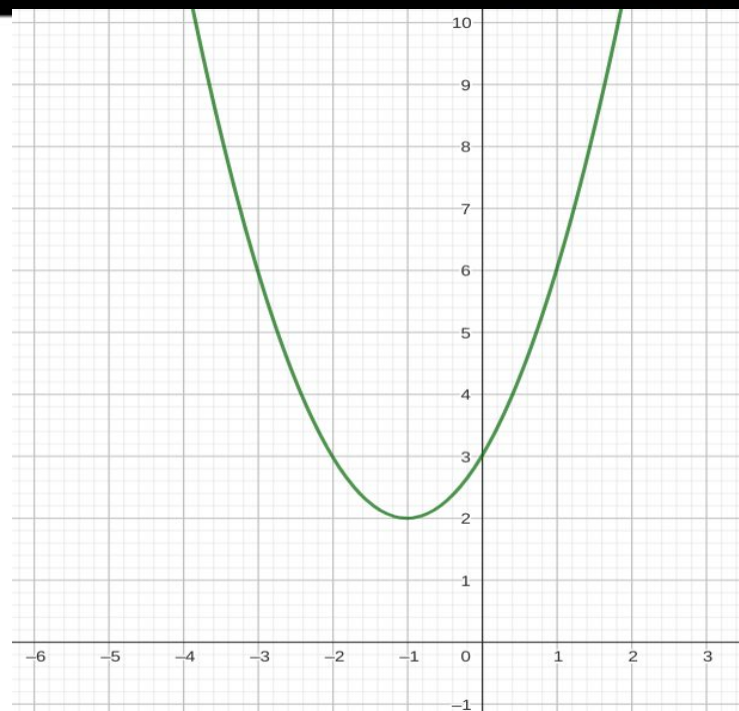
1) Tableau de valeurs, de signe et de variations

a) Tableau de valeur

Les tableaux de valeurs des fonctions du second degré sont similaires à celle de degré 1. Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (représentation graphique à droite) :

Un tableau de valeur à l'intervalle $[-4;4]$ et de pas 1 serait :

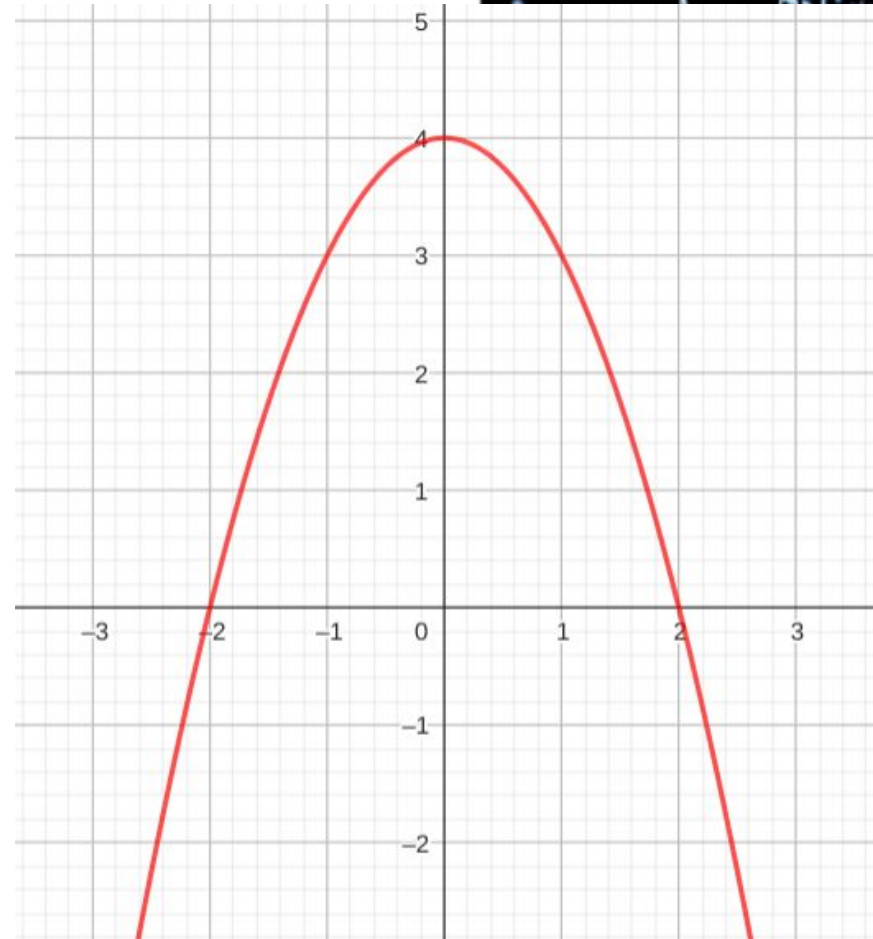
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	11	6	3	2	3	6	11	18	27



b) Tableau de signe

Déterminer un tableau de signe d'une fonction revient à dire dans un tableau en quelles valeurs la fonction est nulle, négative ou positive. Par exemple avec la fonction $g(x) = -x^2 + 4$, nous savons par représentation graphique qu'elle est positive sur l'intervalle $[-2; 2]$. Nous pouvons donc dresser ce tableau :

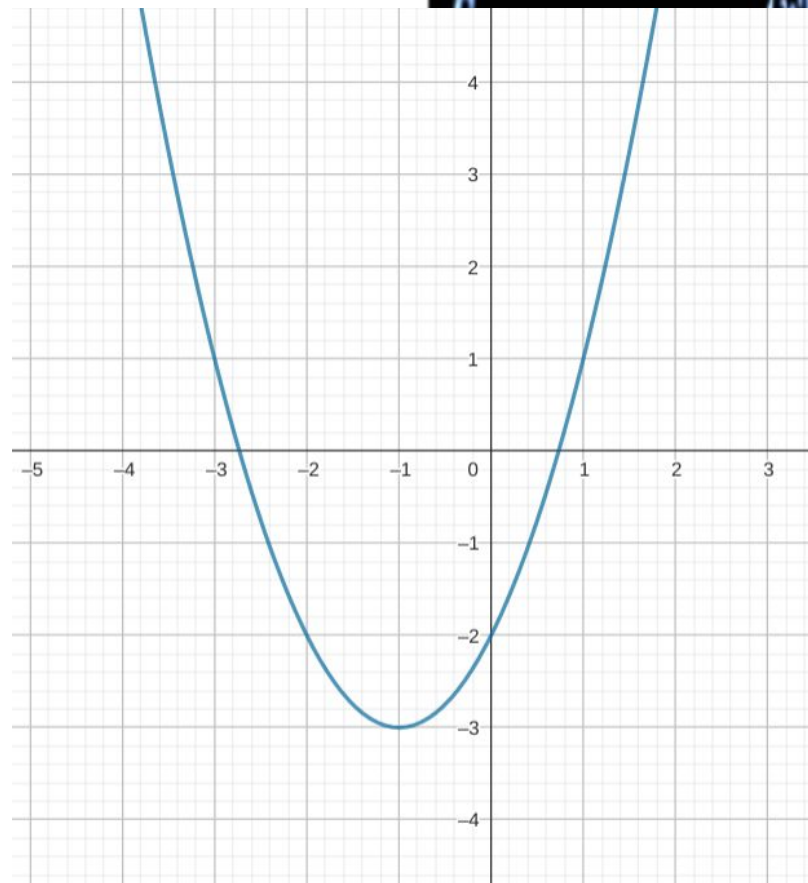
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$



3) Tableau de variation

Ce tableau sert à représenter comment la courbe d'une fonction se comporte selon ses valeurs, c'est à dire si elle est décroissante ou croissante. Par exemple, nous voyons sur la représentation graphique de la fonction $h(x) = x^2 + 2x - 2$ que la courbe est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$. Ces informations permettent de tracer le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$



2) Forme canonique


Mettre une fonction sous forme canonique sert à étudier ses variations ou trouver ses extremums (minimum ou maximum d'une fonction). Transformer une expression sous forme canonique revient à passer de la forme ax^2+bx+c à

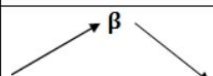
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

ou :

$$a(x-\alpha)^2+\beta$$

Grâce à cela, nous pouvons déterminer des tableaux de valeurs et des extremums types aux trinômes du second degré selon leur forme canonique :

Cas $a > 0$	X	$-\infty$	α	$+\infty$
	Variation de $x \rightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta$			

Cas $a < 0$	X	$-\infty$	α	$+\infty$
	Variation de $x \rightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta$			


$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a,\sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a,\sigma^2}(\xi_1) = \frac{1}{f_{a,\sigma^2}(\xi_1)}$$
$$\int T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(\xi, \theta) \right)$$
$$\int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln U(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right) dx$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(x) f(x, \theta) dx = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx$$

Et davantage de degrés ?

Telles que les expressions de degré 1 ou 2, il existe des expressions :

- de degré 3 $\rightarrow ax^3+bx^2+cx+d$ qui forment des fonctions avec “deux paraboles” (représentation en orange $j(x)=-x^3+2x$). L'équivalent pour une équation de degré trois est aussi appelé “équation cubique”
- de degré 4 $\rightarrow ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
- de degré 5 $\rightarrow ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ etc

Nous pouvons tout aussi bien tracer les tableaux de signe, variation et valeurs de ces fonctions puisqu'elles sont réelles. Nous pouvons aussi résoudre les équations à l'aide de la factorisation ou du discriminant et les transformer sous forme canonique.

