Polynômes du second degré

Présentation, résolution, étude,...

Sommaire :

PARTIE 1 : Présentation des polynômes du premier et second degré

I. Polynômes du premier degré

Un polynôme est une expression algébrique composée de constantes (dans les expressions sans valeur notées a, b, c) et de variables (x, y, z). Le polynôme est la base des fonctions.

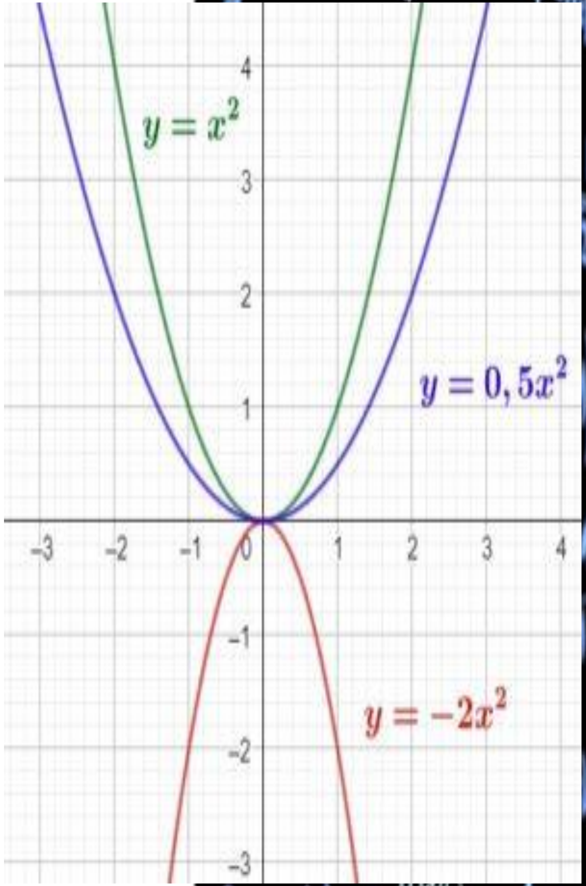
Le polynôme type du premier degré (c’est à dire sans aucune puissance) est ax+b. On retrouve cette configuration dans les fonctions affines.

Par exemple, 3x+5, -19x-3 sont des polynômes du premier degré.

II. Polynômes du second degré

Le polynôme type du second degré est ax^2+bx+c. Ce polynôme, aussi appelé trinôme, est différent du binôme du premier degré de part l'augmentation de l'exposant. Pour le premier degré, on a donc exposant 1,second degré 2, etc.

Les fonctions du second degré sont généralement de forme parabolique tel que la fonction $f(x) = x^2$, à droite. Elle est bien du second degré puisque qu'on peut aussi écrire $f(x) = 1x^2 + 0x + 0$.



PARTIE 2 : Résolution d'équations du second degré

I. Résoudre des équations du second degré

1) Résoudre sans le discriminant

Pour résoudre une équation du type $ax^2+bx+c = 0$, nous pouvons factoriser afin d'en déduire ses racines. Prenons l'exemple de $x^2-5x+6 = 0$

Notre objectif est de la mettre sous forme factorisée $(x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont les solutions de l'équation. Pour cela, on cherche deux nombres qui vérifient les deux conditions suivantes : Leur produit est égal au terme constant, ici 6, et leur somme est égale au coefficient de x, ici -5. On trouve que les nombres -2- et -3 conviennent, car $-2\times-3=6$ et $-2+(-3)=-5$. On peut donc factoriser l'équation comme suit : $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$. On a donc une équation de type produit nul.

Or on sait qu'un produit de facteur est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul. De ce fait il nous suffit de trouver avec quel x chaque facteur est nul :

$(x-2)(x-3) = 0$ $\quad$ $x-2=0 \rightarrow x = 2$ $\quad$ $x-3=0 \rightarrow x = 3$

Les solutions de l'équation x^2-5x+6 sont donc 2 et 3.

2) Résoudre avec le discriminant Δ

Delta Δ est le discriminant qui permet de résoudre ce type d’équations plus simplement en utilisant uniquement quelques formules. $\Delta = b^2-4ac$. Il suffit de remplacer les lettres correspondantes pour le trouver.

Du résultat de delta, nous pouvons en déduire 3 cas qui seront solutions de l’équation :

- $\Delta < 0$:

Aucune solution dans les réels

- $\Delta = 0$:

$x_0 = -b/2a$

- $\Delta > 0$:

$x_1 = -b-\sqrt{\Delta}/2a$
$x_2 = -b+\sqrt{\Delta}/2a$

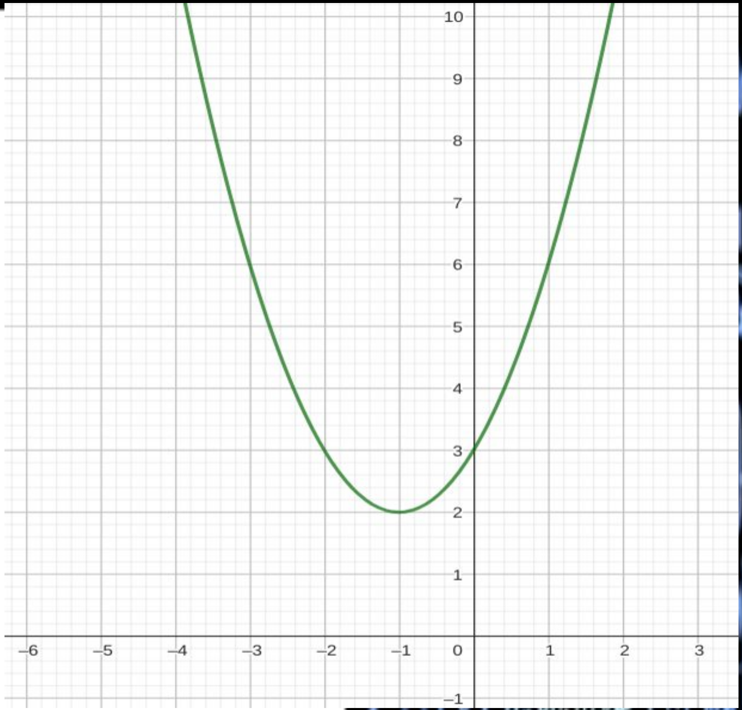
$\Delta > 0$: $x^2-5x+6 = 0$	$\Delta = 0$: $x^2-4x+4 = 0$	$\Delta < 0$: $x^2+x+1 = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6$ $\Delta = 25 - 24$ $\Delta = 1$ $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $= \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}$ $= 3$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $= \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}$ $= 2$	$x^2 - 4x + 4 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4$ $\Delta = 16 - 16$ $\Delta = 0$ $x_0 = \frac{-b}{2a}$ $x_0 = \frac{-(-4)}{2\times1}$ $x_0 = 2$	$x^2 + x + 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1$ $\Delta = 1 - 4$ $\Delta = -3$ $x_1 = \frac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ $x_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ $x_2 = \frac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ $x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ avec i l'unité imaginaire de l'ensemble des complexes (non réel)

Partie 3 : Etude des fonctions associées

1) Tableau de valeurs, de signe et de variations

a) Tableau de valeur

Les tableaux de valeurs des fonctions du second degré sont similaires à celle de degré 1. Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = x^2+2x+3$ (représentation graphique à droite) :



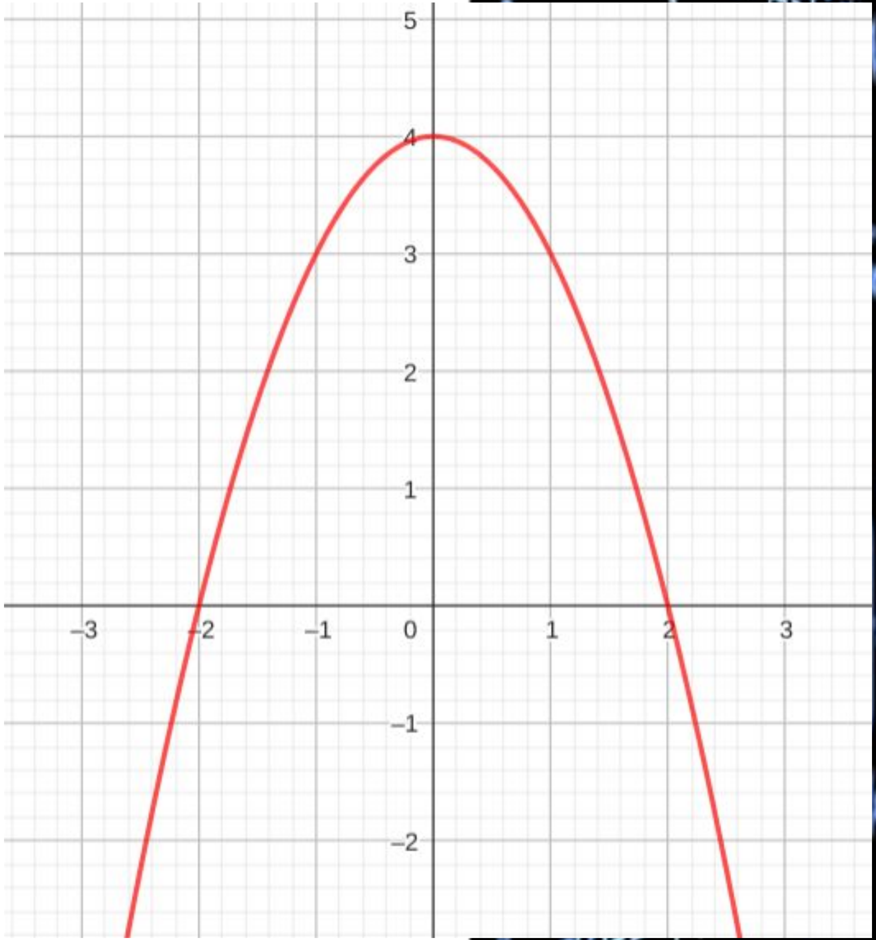
Un tableau de valeur à l'intervalle [-4;4] et de pas 1 serait :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	11	6	3	2	3	6	11	18	27

b) Tableau de signe

Déterminer un tableau de signe d'une fonction revient à dire dans un tableau en quelles valeurs la fonction est nulle, négative ou positive. Par exemple avec la fonction $g(x) = -x^2+4$, nous savons par représentation graphique qu'elle est positive sur l'intervalle [-2;2]. Nous pouvons donc dresser ce tableau :

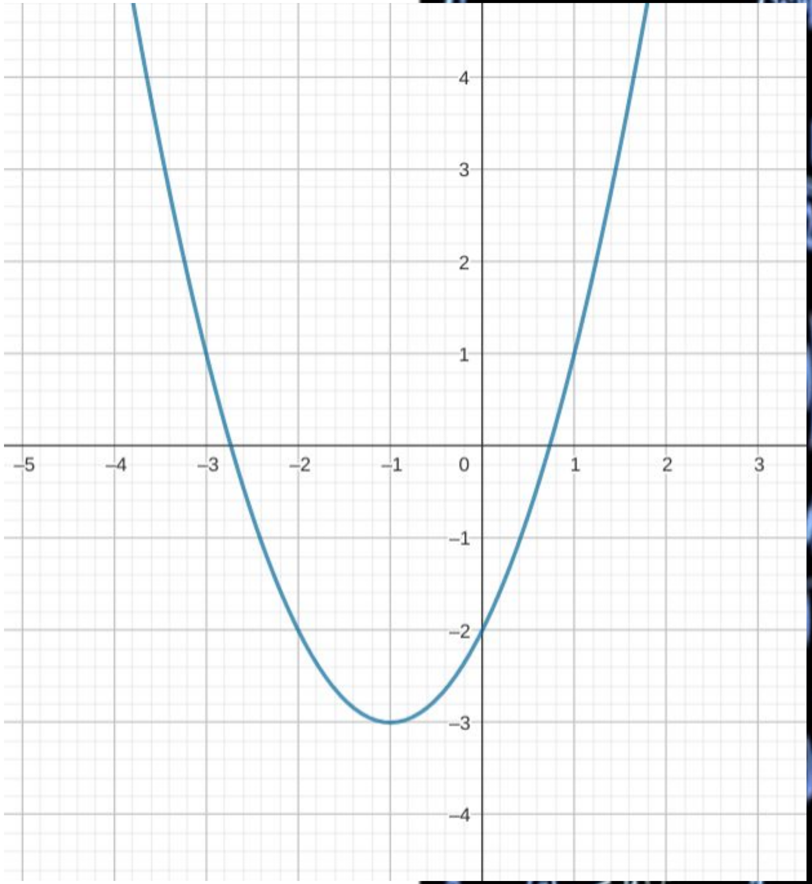
x	- ∞	-2	0	2	+∞
f(x)	-	0	+	0	-



3) Tableau de variation

Ce tableau sert à représenter comment la courbe d’une fonction se comporte selon ses valeurs, c’est à dire si elle est décroissante ou croissante. Par exemple, nous voyons sur la représentation graphique de la fonction $h(x) = x^2+2x-2$ que la courbe est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et croissante sur $[-1;+\infty[$. Ces informations permettent de tracer le tableau suivant :

x	-∞	-1	+∞
f(x)	+∞	-3	+∞



2) Forme canonique

Mettre une fonction sous forme canonique sert à étudier ses variations ou trouver ses extremums (minimum ou maximum d’une fonction). Transformer une expression sous forme canonique revient à passer de la forme ax²+bx+c à

$$a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ou : **$a(x-\alpha)^2+\beta$**

Grâce à cela, nous pouvons déterminer des tableaux de valeurs et des extremums types aux trinômes du second degré selon leur forme canonique :

Cas $a > 0$

X	$-\infty$	α	$+\infty$
Variation de $x \to a(x-\alpha)^2+\beta$	$\searrow$	β	$\nearrow$

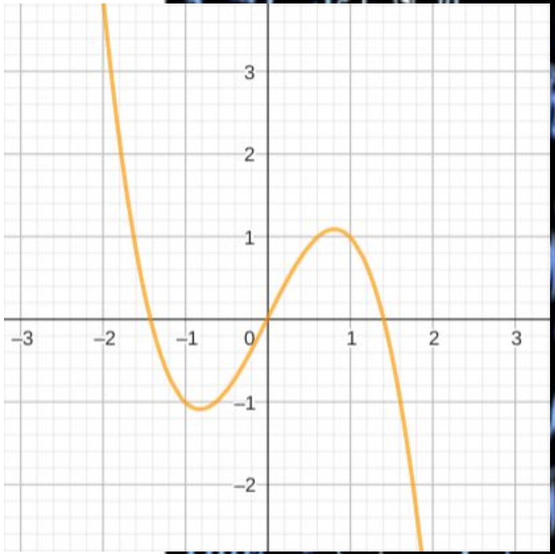
Cas $a < 0$

X	$-\infty$	α	$+\infty$
Variation de $x \to a(x-\alpha)^2+\beta$	$\nearrow$	β	$\searrow$

Et davantage de degrés ?

Telles que les expressions de degré 1 ou 2, il existe des expressions :

- de degré 3 → ax^3+bx^2+cx+d qui forment des fonctions avec "deux paraboles" (représentation en orange $j(x)=-x^3+2x$). L' équivalent pour une équation de degré trois est aussi appelé "équation cubique"
- de degré 4 → $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
- de degré 5 → $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ etc



Nous pouvons tout aussi bien tracer les tableaux de signe, variation et valeurs de ces fonctions puisqu'elles sont réelles. Nous pouvons aussi résoudre les équations à l'aide de la factorisation ou du discriminant et les transformer sous forme canonique.