2023 级微积分 A1 期中考试

mathsdream 整理版

2024.01.02

说明

题目解析见后。
点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：
https://github.com/mathsdream/THU-math-source。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数 (例如 $[4.5]=4$)，则积分 $\int_0^{2024}(x-[x])dx=$ __________。
2. 二阶线性常系数微分方程 $y''-y=x$ 的通解为 __________。
3. 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{x(1+x^2)}=$ __________。
4. 由平面区域 $\{(x,y)|0\le y\le\sqrt{\sin x},0\le x\le\pi\}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积等于 __________。
5. 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的斜渐近线方程为 __________。
6. 已知心脏线的极坐标方程为 $r=1+\cos\theta$，$0\le\theta\le2\pi$，则心脏线所围平面有界区域的面积为 __________。
7. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{3x}\ln(1+t^2)dt}{x^3}=$ __________。
8. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$ __________。
9. 一阶常微分方程 $y'+2y=y^2e^x$ 满足 $y(1)=e^{-1}$ 的解为 __________。
10. 记常微分方程初值问题
$$\begin{cases}(1+x^2)y''-2xy'=0\\y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$$
的唯一解为 $y(x)$，则 $y(3)=$ __________。

二、解答题（每题 10 分，共 70 分）

11. 考虑函数曲线 $y=(x+1)(x-2)^2, x\in\mathbb{R}$

    (a) 求函数的单调区间, 以及极值点和极值;

    (b) 求函数的凹凸区间, 并指出曲线的拐点.

12. 求一阶常微分方程初值问题 $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 的解.

13. (a) 求旋轮线一拱 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围平面有界区域的面积;

    (b) 求旋轮线一拱的弧长.

14. 计算广义积分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

15. 求参数 p 的取值范围, 使得广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ 收敛.

16. 考虑一阶线性常微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)$，其中 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为实轴上的连续函数。假设：

    (i) 存在正数 $c>0$, 使得 $a(x)\ge c, \forall x\ge 0$;

    (ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} b(x)=0$

    证明方程 $\dfrac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)$ 的每个解 $y(x)$ 均满足 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$.

17. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 并且满足如下积分不等式

    $$|f(x)|\le 1+\int_0^x |f(t)|dt, \quad \forall x\in[0,1]$$

    证明 $|f(x)|\le e^x, \forall x\in[0,1]$.

三、附加题（本题完全正确才有分，且分数不计入总分，仅用于评判 A+）

设 $y_1(x), y_2(x)$ 为二阶线性齐次常微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个线性无关解, 其中 $p(x), q(x)$ 为开区间 J 上的连续函数。证明 $y_1(x), y_2(x)$ 的零点相互分离, 即在 $y_1(x)$ 的任意两个零点之间, 必存在 $y_2(x)$ 的一个零点, 反之亦然。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数 (例如 $[4.5]=4$)，则积分 $\int_0^{2024}(x-[x])dx=$。

   解析：由于 $x-[x]$ 在每个整数区间 $[n,n+1)$ 上等于 $x-n$，所以：

$$\begin{aligned}\int_0^{2024}(x-[x])dx &= \sum_{n=0}^{2023}\int_n^{n+1}(x-n)dx \\ &= \sum_{n=0}^{2023}\left[\frac{(x-n)^2}{2}\right]_n^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{2023}\frac{1}{2} = 2024\cdot\frac{1}{2} = 1012\end{aligned}$$

2. 二阶线性常系数微分方程 $y''-y=x$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x$。

   解析：首先求对应齐次方程 $y''-y=0$ 的通解，解特征方程 $\lambda^2-1=0$，得到 $\lambda=1,-1$，所以齐次方程的通解为 $y_h=C_1e^x+C_2e^{-x}$。

   再使用待定系数法求一个特解。右端项为 $x=xe^{0x}$，而 0 不是特征方程的根，所以设特解为 $y_p=Ax+B$，代入方程解得：$A=-1,B=0$，所以特解为 $y_p=-x$。

   所以原方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x$。

3. 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{x(1+x^2)}=\ln 2$。

   解析：

$$\frac{2}{x(1+x^2)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\int\frac{2dx}{x(1+x^2)}=\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{2x}{1+x^2}dx=2\ln|x|-\ln(1+x^2)+C=\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{x(1+x^2)}=\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\bigg|_1^t=\ln 2$$

4. 由平面区域 $\{(x,y)|0\le y\le\sqrt{\sin x},0\le x\le\pi\}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积等于 2π。

   解析：

$$V=\int_0^{\pi}\pi(\sqrt{\sin x})^2dx=2\pi$$

5. 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的斜渐近线方程为 $y=x+\frac{1}{e}$。

   解析：首先计算渐近线的斜率：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1$$

   其次计算截距：

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{ex}\right)=\frac{1}{e}$$

   所以斜渐近线方程为 $y=x+\frac{1}{e}$。

6. 已知心脏线的极坐标方程为 $r = 1 + \cos\theta$，$0 \le \theta \le 2\pi$，则心脏线所围平面有界区域的面积为 $\frac{3\pi}{2}$。

解析：

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{3x} \ln(1+t^2)dt}{x^3} = 9$。

解析：由洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{3x} \ln(1+t^2)dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+9x^2)}{3x^2} = 9$$

注：此外，如果想的话，这个积分也是可以直接计算的。

8. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right) = \frac{\pi}{6}$。

解析：看上去很像积分的黎曼和，先提一个 $\frac{1}{n}$ 出来，再凑形式：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}} \right) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

注：在微积分 1 的下半学期能遇到这种含求和式的极限，九成可能就是要准备凑定积分定义。基本的原理是 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})) = \int_0^1 f(x)dx$。

9. 一阶常微分方程 $y' + 2y = y^2 e^x$ 满足 $y(1) = e^{-1}$ 的解为 $y = e^{-x}$。

解析：这是一个伯努利方程，令 $u = y^{-1}$，则 $u' = -y^{-2}y'$，代入原方程得到：

$$u' - 2u = -e^x$$

这是一个一阶线性方程，使用常数变易法或直接使用公式求解得到解为 $u = e^x + Ce^{2x}$，所以 $y = \frac{1}{e^x + Ce^{2x}}$。代入初值条件 $y(1) = e^{-1}$，解得 $C = 0$，所以解为 $y = e^{-x}$。

10. 设常微分方程初值问题

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' - 2xy' = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

的唯一解为 $y(x)$，则 $y(3) = 12$。

解析：这是一个不含 y 的高阶方程，可降阶。令 $u = y'$，则 $u' = y''$，代入原方程得到：$(1+x^2)u' - 2xu = 0$，这是一个可分离变量的方程：

$$\begin{aligned}
\frac{du}{u} &= \frac{2x}{1+x^2} dx \\
\ln|u| &= \ln(1+x^2) + C \\
u = y' &= C_1(1+x^2) \\
y &= C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2
\end{aligned}$$

代入初值，得到 $C_1 = 1, C_2 = 0$，所以 $y = x + \frac{x^3}{3}$，因此 $y(3) = 3 + 9 = 12$。

二、解答题解析

11. 考虑函数曲线 $y=(x+1)(x-2)^2, x\in\mathbb{R}$

  (a) 求函数的单调区间, 以及极值点和极值;

  (b) 求函数的凹凸区间, 并指出曲线的拐点.

  解析：

  (a) 计算导数：$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$，解方程 $y'=0$，得到驻点 $x=0,2$。详细分析每一段的导数正负：

  - 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $y'>0$, 函数单调递增;
  - 当 $x\in(0,2)$ 时, $y'<0$, 函数单调递减;
  - 当 $x\in(2,+\infty)$ 时, $y'>0$, 函数单调递增.

  由此，得到：

  - 极大值点为 $x=0$, 极大值为 $y(0)=4$;
  - 极小值点为 $x=2$, 极小值为 $y(2)=0$.

  (b) 计算二阶导数：$y''=6x-6$，解方程 $y''=0$，得到 $x=1$。分析每一段的二阶导数正负：

  - 当 $x\in(-\infty,1)$ 时, $y''<0$, 函数在该区间上凸;
  - 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $y''>0$, 函数在该区间下凸.

  由此，得到凹凸性在 $x=1$ 处发生变化，因此拐点为 $(1,y(1))=(1,2)$。

  注：注意概念，极值点是自变量的值，而拐点是一个坐标。

12. 求一阶常微分方程初值问题 $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 的解.

  解析：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux, y'=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入原方程得到：

$$
\begin{aligned}
u+x\frac{du}{dx}&=u+\tan u\\
x\frac{du}{dx}&=\tan u\\
\frac{du}{\tan u}&=\frac{dx}{x}\\
\ln|\sin u|&=\ln|x|+C\\
\sin\left(\frac{y}{x}\right)&=C_1x
\end{aligned}
$$

  代入初值条件 $y(1)=\dfrac{\pi}{6}$，解得 $C_1=\dfrac{1}{2}$，所以解为 $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x}{2}$。

13. (a) 求旋轮线一拱 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围平面有界区域的面积;

  (b) 求旋轮线一拱的弧长.

  解析：

(a)

$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^{x=2\pi} y dx \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} y(t) dx(t) \\ &= \int_{0}^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t) dt \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} L &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} dt \\ &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= \int_{0}^{2\pi} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8 \end{aligned}$$

14. 计算广义积分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

解析：根号下二次多项式，直接配方，$(x-1)(2-x) = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$，做换元 $u = x - \frac{3}{2}$：

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}} \\ &= \arcsin(2u)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \pi \end{aligned}$$

15. 求参数 p 的取值范围, 使得广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ 收敛.

解析:首先确定积分的问题点,包含 $x=0$ 和 $x=+\infty$,所以将积分分成两个区间:$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx +$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$，原积分收敛当且仅当这两个积分均收敛。

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ 部分：问题点在 $x=+\infty$，此时 $\displaystyle\frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^{p+1}}$，所以该积分收敛当且仅当 $p+1>1$，即 $p>0$。

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ 部分：问题点在 $x=0$，做换元 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{t^2}dt$，积分变为 $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{p-2}\sin t dt$，由书上结论（《高等微积分教程（上）》P.195, 例 6.2.1），该积分收敛当且仅当 $p-2<0$，即 $p<2$。

综上，原积分收敛当且仅当 $0<p<2$。

注：第二部分的结论还挺重要的，这本书上的例题（不包含习题）都是考试中可以直接使用的。

16. 考虑一阶线性常微分方程 $\dfrac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)$，其中 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为实轴上的连续函数。假设：

(i) 存在正数 $c>0$, 使得 $a(x)\ge c, \forall x\ge 0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x)=0$

证明方程 $\dfrac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)$ 的每个解 $y(x)$ 均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

解析：方程的通解为：

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_0^x a(t)dt}\left(C+\int_0^x b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt\right) \\ &= Ce^{-\int_0^x a(t)dt}+\frac{\int_0^x b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt}{e^{\int_0^x a(t)dt}} \end{aligned}$$

由条件 (i)，有：$\int_0^x a(t)dt \ge cx$，所以 $x\to+\infty$ 时，有 $0<e^{-\int_0^x a(t)dt}\le e^{-cx}\to 0$，所以 $Ce^{-\int_0^x a(t)dt}\to 0$。

接下来考虑第二项，使用洛必达：

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt}{e^{\int_0^x a(t)dt}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)e^{\int_0^x a(t)dt}}{a(x)e^{\int_0^x a(t)dt}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)}{a(x)}=0 \end{aligned}$$

综上，$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$。

注：在课本（《高等微积分教程（上）》）中，一阶线性常微分方程的通解是这样写的：

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

这里的 $\displaystyle\int$ 没有积分上下限，看上去是一个不定积分。但不定积分是一个集合，对集合进行计算是没道理的。实际上，书上有提到，这里的 $\displaystyle\int p(x)dx$ 指的是 $p(x)$ 的某一个原函数。这样写可能是为了让式子看起来更加简洁清晰，但 $\displaystyle\int p(x)dx$ 这种形式实在难以用于具体的计算分析（比如算在某点的值就不好表示）。所以在实际这类一般问题时，一般会用定积分构造一个具体的原函数，比如 $\displaystyle\int_0^x p(t)dt$ 或 $\displaystyle\int_{-\infty}^x p(t)dt$。

17. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 并且满足如下积分不等式

$$|f(x)|\le 1+\int_0^x |f(t)|dt, \quad \forall x\in[0,1]$$

证明 $|f(x)|\le e^x, \forall x\in[0,1]$.

解析：变限积分，考虑可能的求导，所以先设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x |f(t)|dt$，则 $F'(x)=|f(x)|$。由题意，有：

$$F'(x)\le 1+F(x)$$

类比一阶可分离变量常微分方程的解法，由于 $F(x)\ge 0$，所以 $1+F(x)>0$，两边同时除以 $1+F(x)$，得到：

$$\frac{F'(x)}{1+F(x)}\le 1$$

两边对 x 从 0 到 x 积分（先将积分变量换成 t 以免混淆）：

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{F'(t)}{1+F(t)}dt &\le \int_0^x 1dt \\ \ln(1+F(x)) - \ln(1+F(0)) &\le x \\ \ln(1+F(x)) &\le x \\ F(x) &\le e^x - 1\end{aligned}$$

所以 $f(x) \le 1 + F(x) \le 1 + e^x - 1 = e^x$，命题得证。

注：不等式是可以两边取积分，得到新的不等式的，但注意求导不可以，所以最后一步不能由 $F(x) \le e^x - 1$ 两边求导得到结论。这个题目其实是格朗沃尔（Gronwall）不等式的一个简单版本，有兴趣的同学可以搜索了解。

三、附加题解析

设 $y_1(x), y_2(x)$ 为二阶线性齐次常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解, 其中 $p(x), q(x)$ 为开区间 J 上的连续函数。证明 $y_1(x), y_2(x)$ 的零点相互分离, 即在 $y_1(x)$ 的任意两个零点之间, 必存在 $y_2(x)$ 的一个零点, 反之亦然。

解析：由 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关，且它们均为齐次方程的解，得到其朗斯基行列式 $W[y_1, y_2](x)$ 恒不为零。而

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

所以 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 不可能在同一点同时为零。

设 $y_1(x)$ 有两个相邻零点 $x = a$ 和 $x = b$，即 $y_1(a) = 0, y_1(b) = 0$，且在区间 (a, b) 上 $y_1(x) \neq 0$，下面证明 $y_2(x)$ 在 (a, b) 上至少有一个零点。

使用反证法，假设 $y_2(x)$ 在 (a, b) 上没有零点，令 $f(x) = \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且可导，且 $f(a) = f(b) = 0$。由罗尔定理，存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$。

$$\begin{aligned}f'(c) &= \frac{y_1'(c)y_2(c) - y_1(c)y_2'(c)}{(y_2(c))^2} \\ &= -\frac{W[y_1, y_2](c)}{(y_2(c))^2} = 0\end{aligned}$$

所以得到 $W[y_1, y_2](c) = 0$，这与朗斯基行列式恒不为零矛盾，因此 $y_2(x)$ 在 (a, b) 上至少有一个零点。

反之同理，因此原命题得证。

注：此为斯图姆分离定理（Sturm Separation Theorem）。