总体来说难度不高，计算量也不太大，简单的小题居多。

题目

一、填空

10道 3x10：很简单，熟悉基本的概率、期望、分布即，也没计算量（记不起来了）

最难的一道：
（10） 进行 n 次成功率为 $\frac{1}{3}$ 的 Bernoulli 实验，成功奇数次的概率为？

二、计算

3 道：4+4+10

1. X_1，X_2 服从 $\lambda=2$ 泊松分布，设 $Y=2X_1+X_2$，$Z=X_2-2X_1$，求：

1. Y，Z 的期望和方差；
2. $\rho(Y,Z)$。

2. 置信区间，设 $X\sim N(\mu,1)$，μ 未知，现在取一 $n=9$ 样本，

1. 求 92% 置信度的区间长度；
2. 另取一样本，使得 96% 置信度区间长度为 0.08，则样本大小至少为？

3. 扔一次骰子，设得到的数为 n，然后扔 n 次硬币：

1. 求得到 4 个正面的概率；
2. 若得到了 3 个正面，求投骰子得到的数是 4 的概率；

三、证明

2 道：6+6
证明题难度不是太大

1. 设 $\mathbb{R}$ 上函数 f 满足：

- $f(x)=0$，$x\le 0$
- $f(x)=1$，$x\ge 1$
  $[0,1]$ 上随机变量 X 满足：
- 对于任意 $0\le x\le y\le 1$，有 $\mathbb{P}(x\le X\le y)=f(y-x)$

对于任意 $0 \le x < y \le 1$，有 $\mathbb{P}(x < X \le y) = f(y-x)$
证明 X 服从 $[0,1]$ 均匀分布。

2. 若 X_1 ，X_2 服从单位正态分布且独立，求证 $Y = \frac{X_1}{X_2}$ 服从柯西分布。

四、奖励题

6 分
比证明题难一点。

若 $X \sim N(0,1)$，Y 服从自由度为 n 的卡方分布，求证 $Z = \sqrt{\frac{X}{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t-分布。

思路：

一、10. 高中组合题，生成函数代入 $z = \pm 1$。

证明题1：

- 先证 f 是 X 的分布函数，得到 $f(y-x) = f(y) - f(x)$，f 在 $[0,1]$ 上具有线性和单调递增性。
- 经典问题，由有理数到任意实数，没有连续性，利用单调性夹逼即可。

证明题2：

- 由于 X_1，X_2 独立，其联合分布密度函数为各自密度函数之积
- 设 $S = \{(X,Y) \mid X/Y \le t\}$，则 $P(Y \le t) = P((X_1, X_2) \in S)$
- 使用下面公式，代入 S，

$$P((X,Y) \in S) = \iint_S f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- 得到含 t 的参数积分 $F(t)$， 可以证明一致收敛）所以可以交换求导次序，求导后可以积出来，而 $F(t)$ 是分布函数，求导就得到了密度函数，得证。

奖励题同理，只是比较复杂。