2025 年秋季《高等微积分 1》期中 B 卷

2025 年 11 月 15 日 9 : 50 − 11 : 50

本试卷分两页，共七道试题，其中第 7 题 10 分，其余每题各 15 分。

1 (1) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是奇函数，且处处都有任意阶的高阶导数。证明：对正偶数 n，都有 $f^{(n)}(0)=0$.

(2) 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}.$$

2 (1) 设实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到实数 L，求如下极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\right)$$

的值。要求用 ϵ-N 语言证明你的结论。

(2) 给定实数 t，求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{t}{\sqrt{n}})^n\cdot e^{-t\sqrt{n}}\right)$.

3 (1) 设 f,g 都在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数，且 f 有反函数 $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 请用 f 与 g 的导数与高阶导数表示函数 $h(x)=g(f^{-1}(x))$ 的一阶导数与二阶导数。(假设 f 的导函数处处非零)

(2) 摆线由参数方程 $\begin{cases}x=r(t-\sin t)\\ y=r(1-\cos t)\end{cases}$ 给出。求 y 关于 x 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 与二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4 定义函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ A, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

已知 f 在 $x=0$ 处连续。

(1) 求 A 的值。

(2) 求 f 的导函数 $f'(x)$.

(3) 证明 f 在 $x=0$ 处有二阶导数，并求出 $f''(0)$ 的值。

5 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足对任何正数 x 都有 $f''(x)>0$.

(1) 证明：对不同的正数 a,x，有 $f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)$.

(2) 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明：对任何正数 x 都有 $f(x)>0$.

6 (1) 对可导函数 $f(x)$，求 $\arctan f(x)$ 的导函数。

(2) 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有连续的导函数，满足：$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to b-}f(x)=-\infty$，且对任何 $x\in(a,b)$ 都有

$$f'(x)+f^2(x)\geqslant -1.$$

证明：$b-a\geqslant\pi$.

7 (1) 给定 $0<a<1$. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $(0,1)$ 中各项互异的数列，且满足对任何正整数 n 都有 $\frac{x_{n+2}-x_n}{x_{n+1}-x_n}\in(a,1)$。证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛。

(2) 设 $c\in(0,\frac{3}{4})$，$x_1\in(0,1)$，定义数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $x_{n+1}=1-cx_n^2$. 已知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中各项互异。证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出其极限。