**考试课程　线性代数（期末考）　　2025 年 1 月 4 日上午 9:00~11:00**

**院系、班级________________姓名________________学号________________**

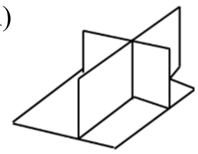
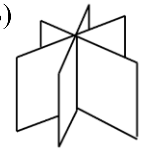
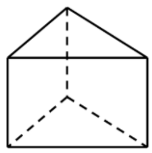
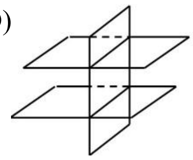
## 一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$ 与 $\dfrac{x-9}{6}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ 的位置关系是________.（选择题）

(A) 平行　　(B)重合　　(C)相交　　(D)异面

【解答：连接直线上两点的向量 $(9,0,2)-(1,-1,-3)=(8,1,5)$ 与 $(3,2,-2),(6,-2,-1)$ 线性无关，所以两条直线异面，选 D】

2. 设有三个平面 $\pi_i: a_i x+b_i y+c_i z=d_i$，$i=1,2,3$，它们组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2，则三平面可能的位置关系属于以下哪种情形__________.（选择题）

(A)

(B)

(C)

(D)


【解答：线性方程组有无穷多解，齐次方程零空间维数为 1，所以选 B】

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵，满足 $r(\boldsymbol{A})=2,\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{bmatrix}$，则 $a=$_________.

【解答：B 的列向量与 A 的行向量正交，所以 B 的秩为 1，因此 $2a=a-1$，$a=-1$】

4. 设向量 $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$，则 $\boldsymbol{u}_3$ 沿 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 所张成平面的法向量方向投影的长度为______________.

【解答：与 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 的正交的向量 $\boldsymbol{n}=\left[2,-1,1\right]^T$，所求投影长度为 $\boldsymbol{u}_3\cdot\dfrac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$】

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_3)=\det(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_3)=\det(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}_3)=0$，则 $\det(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}_3)=$________.

【解答：$B=A+4I$ 的特征值依次为 $3,2,1$，所求行列式的值为 $6$】

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 2 & a & 0\end{bmatrix}$ 在复数域中的特征值只有一个值，则 $a=$___________.

【解答：由矩阵的迹和已知条件知 A 的特征值为零，所以 $A$ 的行线性相关，前两行的差与第三行对照，可知 $a=-1$】

7. 二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3)^2+[-x_1+(a+6)x_2+2x_3]^2+(2x_1+x_2+ax_3)^2$是正定的，则参数$a$的取值范围是______________.

【解答：由题意知三个完全平方项都为零所确定的线性方程组只有零解，于是$a\notin\{1,-7\}$】

8. $\mathbb{R}^4$中点$A\left(1,1,-1,-1\right)$，$B\left(1,-1,1,1\right)$，则以$OA$，$OB$为边的平行四边形面积为_______.

【解答：$\|\boldsymbol{u}_1\|\|\boldsymbol{u}_2\|\sin\theta=\sqrt{\|\boldsymbol{u}_1\|^2\|\boldsymbol{u}_2\|^2-(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2)^2}=\sqrt{4\times4-(-2)^2}=3\sqrt{2}$ 】

9. 设$M_2(\mathbb{R})$为所有实 2 阶方阵构成的空间，$T$为$M_2(\mathbb{R})$上线性变换，$T(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}d&c\\b&a\end{bmatrix}$，

$\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$，则线性变换$T$的特征值为__________.

【解答：$T^2=\mathrm{id}$，所以$T\neq\mathrm{id}$，所以特征值为$1$和$-1$】

10. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是线性空间$V$的两组基，过渡矩阵$\boldsymbol{P}$满足$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$，$\varphi$是$V$上的线性变换，且$\varphi$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的矩阵为$\boldsymbol{P}$，则向量$\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1)+\varphi(\boldsymbol{\alpha}_2)+\varphi(\boldsymbol{\alpha}_3)$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标为_______.

【解答：$\left(\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\varphi(\alpha_3)\right)P=\varphi\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)P=\varphi(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P$，

所以$\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)+\varphi(\alpha_3)=\beta_1+\beta_2+\beta_3$，所求坐标为$(1,1,1)$ 】

## 二、解答题（共 70 分，需写出必要的步骤）

11. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，整数 $n\geq2$，求$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3$，$\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{A}^{n-2}-\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}^{2024}$.

【解：$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^4=\left(\boldsymbol{A}^2\right)^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$，

由此猜测$\boldsymbol{A}^{2k}=\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\k&0&1\end{bmatrix}$. 于是$\boldsymbol{A}^{2k+1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\k+1&0&1\\k&1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{2k+2}=\begin{bmatrix}1&0&0\\k+1&1&0\\k+1&0&1\end{bmatrix}$.

因此由数学归纳法知上述猜测对任意正整数$k$都成立.

于是

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3=I$$

$\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{A}^{n-2}-\boldsymbol{A}^2=-I$，

$$\boldsymbol{A}^{2024}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1012&1&0\\1012&0&1\end{bmatrix}$$

】

12. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得变量变换 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Qx}$ 将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化为标准形 $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Lambda u}$，这里 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

【解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$

特征多项式

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&2&4\\2&-\lambda&2\\4&2&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)^2+32+16\lambda+8(\lambda-3)=-\lambda^3+6\lambda^2+15\lambda+8=-(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

特征值 $8$，特征向量 $\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&2&-1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

特征值 $-1$，特征向量与 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 正交，取一对正交的特征向量 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\\-\frac{4}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$P^TAP=\begin{bmatrix}8&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{u}^TP^TAP\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^T\begin{bmatrix}8&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

所以 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{u}$， $\boldsymbol{u}=P^T\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}8 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$

】

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有通解：$k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，

试求 $\boldsymbol{A}^{2025}$.

【解：$k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解，所以 $\boldsymbol{A}$ 的行向量与 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ 正交，从而

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-a & -2a & 2a\\ -b & -2b & 2b\\ -c & -2c & 2c\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9a\\-9b\\-9c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\18\\-18\end{bmatrix}$，所以 $a=-1,b=-2,c=2$

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}^{2025}=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}9^{2024}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}=9^{2024}\boldsymbol{A}$$

解法 2：由题意知 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 0 的特征向量，$\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 9 的特征向量．前二者与第三者正交．所以可取正交矩阵 $P$ 使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}9 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}9^n & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\right)\begin{bmatrix}9^n & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \mathbf{u}_3^T\end{pmatrix}=9^n\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T=9^{n-1}\boldsymbol{A}.$$

】

14. 设 $\sigma$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的线性变换，$n>1$ 为奇数,若 $\sigma^{n-1}\neq 0,\sigma^n=0$，证明: 存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma^{n-2}(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}),\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一组基.

【证明：$C_1(\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\alpha})+C_2(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma^2\boldsymbol{\alpha})+\cdots+C_{n-1}(\sigma^{n-2}\boldsymbol{\alpha}+\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha})+C_n(\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$

当且仅当 $(C_1+C_n)\boldsymbol{\alpha}+(C_1+C_2)\sigma\boldsymbol{\alpha}+(C_2+C_3)\sigma^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+(C_{n-1}+C_n)\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.（*）

两边依次作用 $\sigma,\sigma^2,\ldots,\sigma^{n-1}$，由上式得到

$$\begin{aligned}(C_1+C_n)\sigma\boldsymbol{\alpha}+(C_1+C_2)\sigma^2\boldsymbol{\alpha}+(C_2+C_3)\sigma^3\boldsymbol{\alpha}+\cdots+(C_{n-2}+C_{n-1})\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\\ (C_1+C_n)\sigma^2\boldsymbol{\alpha}+(C_1+C_2)\sigma^3\boldsymbol{\alpha}+(C_2+C_3)\sigma^4\boldsymbol{\alpha}+\cdots+(C_{n-3}+C_{n-2})\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\\ \vdots\qquad\qquad (**)\\ (C_1+C_n)\sigma^{n-2}\boldsymbol{\alpha}+(C_1+C_2)\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\\ (C_1+C_n)\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\end{aligned}$$

因此（*）成立当且仅当方程组 $\begin{cases}(*)\\(**)\end{cases}$ 成立.

如果 $\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则 $C_1+C_n=0$，$C_1+C_2=0,C_2+C_3=0,\ldots,C_{n-2}+C_{n-1}=0,C_{n-1}+C_n=0,$

因此 $C_1=C_3=\cdots=C_n=-C_{n-1}=\cdots=-C_4=-C_2,C_1=C_n=-C_1=0$，

所以所有 $C_k=0$.

因为 $\sigma^{n-1}\neq 0$，所以存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$ 使得 $\sigma^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

此时 $\boldsymbol{\alpha}+\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma^{n-2}(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}),\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 中 $n$ 个线性无关的向量，从而是一组基.

】

15. 设 $M_2(\mathbb{R})$ 的两个子空间分别为 $\boldsymbol{V}_1=\{\boldsymbol{A}\in M_2(\mathbb{R})|\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix},x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$，$\mathbf{V_2}$ 是由 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 张成的子空间，分别求和空间 $\mathbf{V_1}+\mathbf{V_2}$ 与交空间 $\mathbf{V_1}\cap\mathbf{V_2}$ 的维数以及 $\mathbf{V_1}\cap\mathbf{V_2}$ 的一组基.（空间 $\mathbf{V_1}+\mathbf{V_2}=\left\{\mathbf{W}\mid\mathbf{W}=\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{A}\in\mathbf{V}_1,\mathbf{B}\in\mathbf{V}_2\right\}$）

【解：

$$\boldsymbol{V}_1 = \operatorname{span}\left\{ \boldsymbol{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$C_1\boldsymbol{B}_1 + C_4\boldsymbol{B}_4 + C_5\boldsymbol{B}_5 + C_6\boldsymbol{B}_6 = \begin{bmatrix} C_1 + C_4 & C_5 \\ C_1 + C_6 & C_4 - C_5 + C_6 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\Leftrightarrow C_5 = 0, C_4 = -C_1, C_6 = -C_1, C_4 - C_5 + C_6 = -2C_1 = 0$$

所以 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_6$ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的一组基，所以 $\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} = M_2(\mathbb{R})$ , $\dim(\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}) = 4$ .

$$x\boldsymbol{B}_1 + y\boldsymbol{B}_2 + z\boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} x+z & 2y+2z \\ x+y+z & y+2z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{V}_1$$

$$\Leftrightarrow (x+z) - (2y+2z) + (x+y+z) - (y+2z) = 2x - 2y - 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y + z$$

$$(y+z)\boldsymbol{B}_1 + y\boldsymbol{B}_2 + z\boldsymbol{B}_3 = y(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) + z(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_3)$$

$\dim(\mathbf{V_1} \cap \mathbf{V_2}) = 2$， $\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 是它的基.

】

16. 求 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^T$ ，这里 $\boldsymbol{U}$ ， $\boldsymbol{V}$ 都是正交矩阵.

【解： $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，特征多项式 $\lambda\left[(\lambda-2)^2 - 1\right] = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$

特征值 $3$ ，对应的特征向量满足 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 = 0$ ，单位特征向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ,

特征值 $1$ ，对应的特征向量满足 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}_2 = 0$ ，单位特征向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ,

特征值0，对应的单位特征向量为$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，所以$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$.

非零奇异值为$\sigma_1=\sqrt{3},\sigma_2=1$，$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sigma_1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sigma_2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$. 因此$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

】

17. 设$\mathbf{V}=\mathbb{R}^n$（取标准内积）是一个欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\in V$满足$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j<0,\ i,j=1,2,3,4,\ i\neq j$. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中任意三个向量必线性无关.

【证明：反证法。假设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1=C_2\boldsymbol{\alpha}_2+C_3\boldsymbol{\alpha}_3$.

则$0<\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle=C_2\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle+C_3\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle$，因为$\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle,\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle$都是负数，所以$C_2,C_3$中至少有一个应该是负数，不妨设$C_2<0$.

$0>\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle-C_2\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle=C_3\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle$. 因此$C_3<0$.

$\boldsymbol{\alpha}_1-C_2\boldsymbol{\alpha}_2-C_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，

此时，$0=\langle\boldsymbol{\alpha}_1-C_2\boldsymbol{\alpha}_2-C_3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4\rangle-C_2\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\rangle-C_3\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\rangle<0$.

矛盾.

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. 同理可证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中任意三个都是线性无关的.

】