2020 级微积分 A1 期末考试

mathsdream 整理版

2020.12.29

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、选择题

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{-n} =$ ________

   A. 1

   B. e^{-1}

   C. $-e$

   D. e

2. 设 $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$, $n \geq 1$. 则数列 $\{x_n\}$

   A. 单调减，且收敛。

   B. 单调增，且收敛。

   C. 单调减, 但是不收敛

   D. 单调增, 但是不收敛

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}) =$ ________

   A. 2

   B. 1

   C. $\dfrac{1}{2}$

   D. $\dfrac{1}{4}$

4. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}) =$ ________

   A. 不存在

   B. $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

5. 点 $x_0 = 0$ 是函数 $f(x) = \dfrac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}$ 的 ________

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 跳跃间断点

D. 第二类间断点

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1} =$ ________

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} =$ ________

A. 1

B. $e^{-1/3}$

C. $-\dfrac{1}{3}$

D. e^{-1}

8. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ________

A. $1 - e^{\sqrt{x}}$

B. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$

C. $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

D. $1 - \cos\sqrt{x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\dfrac{2}{x} + \cos\dfrac{1}{x}\right)^x =$ ________

A. 1

B. e

C. e^2

D. e^{-1}

10. 下列极限中, 能使用洛必达法则计算的是 ________

A. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sin x - \cos x}{x + \cos x}$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{-x}}{x+2\sin x}$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{x-\sin x}$

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 中有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 以下结论正确的是 ________

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$, 则 f 在 $x=0$ 处可导.

B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$, 则 f 在 $x=0$ 处可导.

C. 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D. 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

12. 函数 $y=\tan(2\sin x)$ 在 $x=0$ 的邻域中确定了反函数 $x=g(y)$, 则 $g'(0)=$ ________

A. $\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1

D. 2

13. 设方程 $x^y=y^x$ 在 $(4,2)$ 附近确定了一个可微函数 $y=y(x)$, 则 $y'(4)=$ ________

A. $\dfrac{2\ln 2+1}{4(\ln 2-1)}$

B. $\dfrac{2\ln 2-1}{4(\ln 2-1)}$

C. $\dfrac{2(\ln 2-1)}{\ln 2-2}$

D. $\dfrac{1}{2}$

14. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导当且仅当 ________

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-e^x)}{\sqrt{x}}$ 收敛。

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$ 收敛。

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ 收敛。

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)}{x^3}$ 收敛。

15. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则在 $x=0$ 处 ________

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导但导函数不连续

D. 可导且导函数连续

16. 以下结论中, 不能由 $f(x)-f(0)=\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)(x\to 0)$ 得到是 ________

A. $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续。

B. $f'(0)=0$

C. $f''(0)=0, f'''(0)=1$

D. $x_0=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点。

17. 设 $f(x)=x^3e^x$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 4 阶导数 $f^{(4)}(0)=$ ________

A. 36

B. 24

C. 12

D. 6

18. 方程 $x^4+x^3+3x^2-100x-1=0$ 在实轴上恰有 ________ 个根.

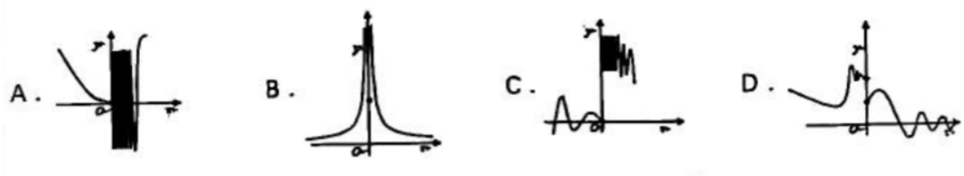
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

19. 以下哪个图可能是导函数的图像 ________



20. 函数 $e^{\sin x}$ 在 $x_0=0$ 处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式为 ________

A. $1+x+x^2+o(x^3)$

B. $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

C. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

D. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

21. 下列条件中可以推出数列 $\{a_n\}$ 收敛的是 ________

A. 对任意 $\epsilon>0$, 存在正整数 N 和正整数 p, 使得对任意 $n>N$ 都有 $|a_{n+p}-a_n|<\epsilon$.

B. 存在正整数 N, 使得对任意 $k\in\{0,1,...,N-1\}$ 数列 $\{a_{nN+k}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛

C. 存在正整数 k, 使得 $\{a_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

D. 存在正整数 N 和正整数 T, 使得对任意 $n>N$ 都有 $n(a_n-a_{n+T})=Ta_{n+T}$

22. 以下结论不正确的是 ________

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}=1.$

23. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 ________

A. 若 g 连续且 f 单调有界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x))$ 存在且有限。

B. 若 f 在 $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ 中每一点处的极限都存在且有限, 则 f 有界

C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{u\to a} g(u)=b\in\mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=b.$

D. 若 g 连续且 f 有界, 则函数 $g(f(x))$ 有界

24. 以下正确的结论是 ________

A. 若函数 f 在任意一点 $x_0\in\mathbb{R}$ 处的极限都为 0, 则 $f(x)\equiv 0.$

B. 若 f,g 可导, $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0.$

C. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0.$

D. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0.$

25. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 ________

A. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $\forall x\in\mathbb{R}$ 都有 $f'(x)\neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不变号.

B. 若 f 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)>0$ 则存在 $\delta>0$ 使得 f 在区间 $(-\delta,\delta)$ 中单调递增.

C. 若 f 在 $x=0$ 处连续, 且 $g'(0)=g(0)=0$, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0.

D. 若 f,g 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f(0)=0, g(0)=3, f(1)=\ln 3, g(1)=1$, 则存在 $a\in(0,1)$ 使得 $f'(a)g(a)+g'(a)=0.$