2021 年《高等微积分 2》期中考试试题

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 3 题第 (2) 小问 10 分, 第 4 题 10 分, 第 6 题 15 分, 其余各题每小问 5 分; 即使有某些小问无法完成, 也可以使用其结论解决后面的问题.

1 (1) 叙述 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 处可微的定义, 并证明: 如果 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 则其微分为 $df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_{\mathbf{x}_0} \cdot h_i$, 其中 $\mathbf{h} = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbf{R}^n$.

(2) 叙述 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 处展开至二阶的带拉格朗日余项的泰勒公式.

2 (1) 设 $F:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是给定的光滑函数. 已知由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定出光滑的隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2) 对于光滑函数 $g:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, 令 $S=\{(x,y,z)|g(x,y,z)=0\}$ 为由方程 $g(x,y,z)=0$ 定义的曲面. 对于点 $(x_0,y_0,z_0)\in S$, 定义曲面 S 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为

$$g_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+g_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+g_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

设 f 是光滑函数. 证明: 曲面 $f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 的所有切平面都经过同一个点 (a,b,c).

3 (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ 的收敛域.

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛. 证明: 存在正整数 N, 使得对 $n>N$ 有 $a_n=0$, 即在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛的幂级数一定是多项式.

(3) 设 f 是开区间 I 上的光滑函数. 假设存在正常数 M,C, 使得对任何正整数 n 与任何 $x\in I$ 都有 $|f^n(x)|\le MC^n n!$. 证明: f 是 I 上的实解析函数, 即对任何 $x_0\in I$, 存在正数 r, 使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x\in(x_0-r,x_0+r).$$

4 设 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ 是平面上的 n 个单位向量, 相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$(即 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_2$ 与 $\mathbf{v}_3$,...,$\mathbf{v}_n$ 与 $\mathbf{v}_1$ 的夹角都是 $\frac{2\pi}{n}$). 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数. 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_i}=0$, 其中 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_i}$ 表示 f 沿 $\mathbf{v}_i$ 的方向导数.

5 (1) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 且当 $u^2+v^2\to+\infty$ 时 $f(u,v)$ 趋近于 $+\infty$. 证明: f 在 $\mathbf{R}^2$ 上有最小值.

(2) 设坐标原点位于 $\triangle ABC$ 的内部, 点 A,B,C 的坐标分别为 $(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3)$. 定义函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$f(u,v)=e^{p_1u+q_1v}+e^{p_2u+q_2v}+e^{p_3u+q_3v}.$$

证明: 当 $u^2+v^2\to+\infty$ 时 $f(u,v)$ 趋近于 $+\infty$, 由此证明 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上有最小值.

(3) 证明: 第 (2) 小问中 f 的最小值点 (u_0,v_0) 满足

$$\begin{cases} p_1e^{p_1u+q_1v}+p_2e^{p_2u+q_2v}+p_3e^{p_3u+q_3v}=0; \\ q_1e^{p_1u+q_1v}+q_2e^{p_2u+q_2v}+q_3e^{p_3u+q_3v}=0. \end{cases}$$

6 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是光滑函数, 满足当 $x^2+y^2=1$ 时有 $f(x,y)=1$, 且在单位圆盘 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上 $(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2$ 的值处处小于等于 1. 证明:

$$\sqrt{x^2+y^2}\le f(x,y)\le 2-\sqrt{x^2+y^2},\quad \forall (x,y)\in D.$$

7 设 $f,g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是光滑映射, 令 $S=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=0\}$ 为 f 的零点集合. 假设对任何 $(x,y,z)\in S$ 有 $g(x,y,z)=0$ 且 $f'_z(x,y,z)\ne 0$, 其中 $f'_z(x,y,z)$ 表示 f 对 z 坐标分量的偏导数.

(1) 证明: 对任何 $(x_0,y_0,z_0)\in S$, 该点处 g 的梯度向量与 f 的梯度向量成比例, 即存在实数 λ 使得 $\nabla g(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.(提示: 由方程 $f(x,y,z)=0$ 将 z 表示成 x,y 的隐函数, 再代入 $g(x,y,z)$)

(2) 定义映射 $Q:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为 $Q(x,y,z)=(x,y,f(x,y,z))$. 给出 Q 在点 (x_0,y_0,z_0) 附近有 C^1 光滑逆映射 Q^{-1} 的充分必要条件, 并说明理由.

(3) 设 $h:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数, 满足对任何 $u,v\in\mathbf{R}$, 有 $h(u,v,0)=0$. 证明: 当 $w\ne 0$ 且 (u,v,w) 趋近于 $(u_0,v_0,0)$ 时, 表达式 $\frac{h(u,v,w)}{w}$ 的极限为 $h'_3(u_0,v_0,0)$, 其中 h'_3 表示 h 对第三个坐标分量的偏导数.

(4) 考虑 $h=g\circ Q^{-1}$. 利用前述 (1),(2),(3) 小问的信息, 证明: 对于给定的点 $(x_0,y_0,z_0)\in S$, 当 $(x,y,z)\notin S$ 且趋近于 (x_0,y_0,z_0) 时, 表达式 $\frac{g(x,y,z)}{f(x,y,z)}$ 的极限为 $\frac{g'_z(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}$.