2024 年春季《高等微积分 2》期末试卷

2024 年 6 月 16 日 $9:00-11:00$

本试卷分两页，共七道试题，其中第 1 题 12 分，第 5 题 13 分，其余每题各 15 分。

1 (1) 叙述函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 D 上一致收敛到函数 f 的定义。

(2) 叙述斯托克斯公式。

(3) 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中封闭的光滑曲面，它围成的有界区域为 Ω。设 $F,G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是光滑函数，且都在 S 上恒等于零。利用高斯公式证明：

$$\iiint_{\Omega} F_x G dxdydz = -\iiint_{\Omega} FG_x dxdydz,$$

其中 F_x, G_x 分别表示 F,G 对 x 的偏导函数。

证明: (1) 称函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 D 上一致收敛到函数 f，如果对任何 $\epsilon>0$，存在正整数 N，使得对任何 $n\geqslant N$，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon,\quad \forall x\in D.$$

(2)*Stokes* 公式: 设定向曲面 S 的边界 ∂S 是分段光滑的, 按照右手法则对 ∂S 规定一个定向, 把取好这个定向的边界记作 ∂S^+. 设 P,Q,R 是 S 上的 C^1 光滑函数, 则有

$$\oint_{\partial S^+} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

(3) 利用 *Gauss* 公式可得

$$0=\iint_S FGdydz=\iiint_{\Omega}\partial_x(FG)dV=\iiint_{\Omega}\left(F_xG+FG_x\right)dV,$$

由此得证多元函数的分部积分公式。 □

2 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1, \quad (n+1)a_{n+1} = (n+\frac{1}{2})a_n.$$

(1) 证明：当 $|x| < 1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛。

(2) 利用课程中证明过的结论：

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \forall |x| < 1,$$

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-1, 1)$ 中的和函数。

解. (1) 由条件可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} = 1,$$

从而可知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{1} = 1$。熟知，在收敛半径内幂级数点点绝对收敛，由此得证 (1) 的结论。

或者直接用 *Ratio Test*。对 $|x| < 1$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} |x| \right) = |x| < 1,$$

用 *Ratio Test* 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛，进而得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛。

(2) 由条件可得 $a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1}$，进而有

$$a_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} a_1 = 2 \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

可知题述幂级数为

$$S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

熟知，对 $|x| < 1$ 有

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n,$$

由此得到

$$S(x) = 2\left((1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2.$$

□

3 (1) 设 α 是给定的正数，求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[x]{x}-1}{(\frac{1}{x})^\alpha}$ 的值。

(2) 设 p 是给定的正数，利用 (1) 的结果判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^p$ 的收敛发散性。

证明: (1) 这是 $\frac{0}{0}$ 型的极限，利用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[x]{x}-1}{(\frac{1}{x})^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)-1}{\alpha x^{1-\alpha}}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{如果 } 0<\alpha<1 \\ +\infty, & \text{如果 } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

答案等于 $+\infty$ 的情形，需要回到洛必达定理的证明，去建立相应的版本，这里不作要求。

(2) 所述级数收敛当且仅当 $p>1$。

当 $p>1$ 时，取 $\frac{1}{p}<\alpha<1$，则利用 (1) 的结果可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt[x]{x}-1)^p}{(\frac{1}{x})^{\alpha p}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[x]{x}-1}{(\frac{1}{x})^\alpha}\right)^p = 0.$$

由 $\alpha p>1$ 可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha p}}$ 收敛，再用比较定理的极限形式可得此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^p$ 收敛。

当 $p=1$ 时，利用 (1) 的结果有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[x]{x}-1}{\frac{1}{x}} = +\infty$。由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，结合比较定理可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)$ 发散。

当 $0<p<1$ 时，有 $(\sqrt[n]{n}-1)^p \geq \sqrt[n]{n}-1$，利用比较定理可得此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^p$ 发散。

□

4 (1) 计算第二型曲面积分 $I=\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中曲面 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，取指向外面的定向。

(2) 令 $V=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\}$。求三重积分 $\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ 的值。

解. (1) 利用 *Gauss* 公式，可得

$$I=\iiint_V(2x+2y+2z)dxdydz.$$

注意到 V 关于 Oyz 平面反射对称，且 x 是奇函数，因而有 $\iiint_V xdxdydz=0$。类似的，y,z 在 V 上的积分也等于零，从而有 $I=0$。

(2) 令 $x=au,y=bv,z=cw$ 换元，可得

$$\begin{aligned}&\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz\\=&\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)abcdudvdw\\=&\frac{a^2+b^2+c^2}{3}abc\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(u^2+v^2+w^2)dudvdw\\=&\frac{a^2+b^2+c^2}{3}abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\theta dr\\=&\frac{a^2+b^2+c^2}{3}abc\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}\\=&\frac{4\pi}{15}(a^2+b^2+c^2)abc,\end{aligned}$$

其中用到了球体 $u^2+v^2+w^2\leqslant 1$ 中 u,v,w 对称，因而有

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}u^2dV=\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\frac{u^2+v^2+w^2}{3}dV.$$

□

5 设 x_1,x_2,x_3,x_4 都是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$。求函数

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2$$

的最大值。

解. 令 $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+x_2+x_3+x_4=1,x_i\geqslant 0\}$，则 V 是闭集。再由 $0\leqslant x_i\leqslant 1$ 知 V 有界，进而可得 V 紧致。利用最值定理，连续函数 f 在 V 上有最大值，设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 是 f 的最大值点，特别的 $f(\mathbf{a})\geqslant f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{16}$。若 $\mathbf{a}$ 在 V 的边界上，则存在 $a_i=0$，不妨设 $a_1=0$，则有

$$f(\mathbf{a})=a_2a_3a_4\leqslant\left(\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\right)^3=\frac{1}{27}<\frac{1}{16},$$

矛盾!

这样，$\mathbf{a}$ 是 V 的内点，进而是 f 在约束条件 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i-1=0$ 下的条件极大值点。利用 *Lagrange* **乘子法**，存在实数 λ，使得 $(a_1,a_2,a_3,a_4,\lambda)$ 满足 Lagrange 辅助函数

$$F=x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2-\lambda(x_1+x_2+x_3+x_4-1)$$

的临界点方程，即有

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0,\quad \forall 1\leqslant i\leqslant 4.$$

化简可得

$$\begin{cases}a_2a_3+a_3a_4+a_4a_2=\lambda,\\ a_3a_4+a_4a_1+a_1a_3=\lambda,\\ a_4a_1+a_1a_2+a_2a_4=\lambda,\\ a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=\lambda.\end{cases}$$

第 (1),(3) 式相减，第 (2),(4) 式相减，分别得到

$$(a_3-a_1)(a_2+a_4)=0,\quad (a_4-a_2)(a_1+a_3)=0.$$

由于 a_i 都是正数，由上式可知 $a_3=a_1,a_4=a_2$，代回得到

$$\lambda=2a_1a_2+a_1^2=2a_1a_2+a_2^2,\quad a_1+a_2=\frac{1}{2},$$

解得 $a_1=a_2=\frac{1}{4}$，即有 $\mathbf{a}=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$。这就证明了 f 在 V 上的最大值为 $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{16}$。

□

6 令 $S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\}$ 为 $Oxyz$ 坐标系中的单位球面，记其面积微元为 dS。令 $L=\{(u,v):u^2+v^2=1,v\geqslant 0\}$ 为 Ouv 坐标系中的上半单位圆周，记其弧长微元为 $d\ell$。设 f 是三元的连续函数。

(1) 对 S 赋予参数化 $x=t,y=\sqrt{1-t^2}\cos\theta,z=\sqrt{1-t^2}\sin\theta$，其中 $-1\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。请将第一型曲面积分 $\iint_S f(x,y,z)dS$ 用此参数化表示。

(2) 求第一型曲面积分 $\iint_S z^4 dS$ 的值。

(3) 证明：

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\int_0^{2\pi}\left(\int_L f(u,v\cos\theta,v\sin\theta)v d\ell\right)d\theta.$$

证明: (1) 记参数的区域为 $D=\{(t,\theta)|-1\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，令

$$\vec{X}_t=(\partial_t x,\partial_t y,\partial_t z)=(1,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\cos\theta,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\sin\theta),$$
$$\vec{X}_\theta=(\partial_\theta x,\partial_\theta y,\partial_\theta z)=(0,-\sqrt{1-t^2}\sin\theta,\sqrt{1-t^2}\cos\theta),$$

则有

$$|\vec{X}_t\times\vec{X}_\theta|=|(-t,-\sqrt{1-t^2}\cos\theta,-\sqrt{1-t^2}\sin\theta)|=1.$$

这样，利用题述参数化可得

$$\begin{aligned}&\iint_S f(x,y,z)dS\\=&\iint_D f(t,\sqrt{1-t^2}\cos\theta,\sqrt{1-t^2}\sin\theta)|\vec{X}_t\times\vec{X}_\theta|dtd\theta\\=&\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-1}^1 f(t,\sqrt{1-t^2}\cos\theta,\sqrt{1-t^2}\sin\theta)dt.\end{aligned}$$

(2) 利用对称性，有 $I=\iint_S z^4dS=\iint_S x^4dS$。再利用 (1) 中提供的计算公式可得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-1}^1 t^4dt=2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4\pi}{5}.$$

(3) L 有参数化：$u=t,v=\sqrt{1-t^2}$，其中 $-1\leqslant t\leqslant 1$，可用此参数化表示第一型曲

线积分:

$$\begin{aligned}
&\int_L f(u, v\cos\theta, v\sin\theta)vd\ell \\
=&\int_{-1}^{1} f(t, \sqrt{1-t^2}\cos\theta, \sqrt{1-t^2}\sin\theta)\sqrt{1-t^2}\sqrt{u'(t)^2+v'(t)^2}dt \\
=&\int_{-1}^{1} f(t, \sqrt{1-t^2}\cos\theta, \sqrt{1-t^2}\sin\theta)\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}})^2}dt \\
=&\int_{-1}^{1} f(t, \sqrt{1-t^2}\cos\theta, \sqrt{1-t^2}\sin\theta)dt.
\end{aligned}$$

结合 (1) 的结论可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left(\int_L f(u, v\cos\theta, v\sin\theta)vd\ell\right)d\theta \\
=&\int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1} f(t, \sqrt{1-t^2}\cos\theta, \sqrt{1-t^2}\sin\theta)dt\right)d\theta \\
=&\iint_S f(x,y,z)dS.
\end{aligned}$$

□

7 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中光滑的带边的定向曲面，其定向由各点处的单位法向量

$$\mathbf{n}(x,y,z) = (n_1(x,y,z), n_2(x,y,z), n_3(x,y,z))$$

描述。假设 $\mathbf{n}(x,y,z)$ 在 S 的某个邻域中处处有定义，是单位长度的，且关于 (x,y,z) 是光滑变化的。把 $\mathbf{n}$ 的分量函数简记为 n_1, n_2, n_3。

(1) 利用 $\mathbf{n}$ 是单位长度的，证明：$n_1\partial_z n_1 + n_2\partial_z n_2 + n_3\partial_z n_3$ 在 S 上恒等于零。

(2) 证明:

$$\int_{\partial S}(yn_2+zn_3)dx - yn_1dy - zn_1dz = -\iint_S (yn_3 - zn_2)(\operatorname{div}\mathbf{n})dS,$$

其中用 div $\mathbf{n}$ 表示 $\mathbf{n}$ 的散度，用 dS 表示面积微元，对 S 的边界 ∂S 赋予边界正定向。

证明: (1) 对恒等式 $|\mathbf{n}|^2=1$ 两边求关于 z 的偏导，得到

$$0=\partial_z(n_1^2+n_2^2+n_3^2)=2n_1\partial_z n_1+2n_2\partial_z n_2+2n_3\partial_z n_3.$$

(2) 把所要证明等式的左右两边分别简记为 LHS, RHS. 令

$$\mathbf{F}=(yn_2+zn_3,-yn_1,-zn_1).$$

利用 Stokes 公式, 有

$$\text{LHS}=\int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S\nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS.$$

注意到

$$\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\det\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ yn_2+zn_3 & -yn_1 & -zn_1\end{pmatrix}$$

$$=n_1(-z\partial_y n_1+y\partial_z n_1)+n_2(z\partial_x n_1+y\partial_z n_2+n_3+z\partial_z n_3)+n_3(-y\partial_x n_1-n_2-y\partial_y n_2-z\partial_y n_3).$$

这就把 LHS 化成了第一型曲面积分.

另一方面, 利用

$$\text{div }\mathbf{n}=\partial_x n_1+\partial_y n_2+\partial_z n_3,$$

可以得到 RHS 的具体表达式.

结合这两方面, 可得

$$\begin{aligned}&\text{LHS}-\text{RHS}\\ =&\iint_S\left(y(n_1\partial_z n_1+n_2\partial_z n_2+n_3\partial_z n_3)-z(n_1\partial_y n_1+n_2\partial_y n_2+n_3\partial_y n_3)\right)dS\\ =&\iint_S\left(\frac{y}{2}\partial_z|\mathbf{n}|^2-\frac{z}{2}\partial_y|\mathbf{n}|^2\right)dS\\ =&0,\end{aligned}$$

最后一步用到了 $|\mathbf{n}|^2$ 恒等于 1 这个事实, 这就完成了整个证明. □