2024 级微积分 A1 期末考试

mathsdream 整理版

2025.01.09

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. 曲线 $y = x + x^2 \sin \dfrac{1}{x^2+1}$ 的渐近线为 __________.

2. 曲线段 $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 8)$ 的弧长为__________.

3. 函数 $f(x) = x(1-x)^3 \quad (0 < x < 1)$ 在 $x =$ __________ 处取得极大值.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t} =$ __________.

5. $\displaystyle\int_0^x |e^t - 1| dt =$ __________.

6. 广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln x)^p}{\sqrt{x}(1-x)^2} dx$ 收敛，则 p 的取值范围为 __________.

7. 微分方程初值问题 $\begin{cases} (1+e^x)yy' = e^x \\ y(0) = \sqrt{2\ln 2} \end{cases}$ 的解为 $y(x) =$ __________.

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x} =$ __________.

9. 微分方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ 的通解为 __________.

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)} =$ __________.

二、解答题

1. (12 分) 设 $f(x)=xe^{-x^2}(x>0)$

   (I) 求 $f(x)$ 的单调区间、极值点与极值、凹凸区间、拐点和渐近线；

   (II) 画出曲线 $y=f(x)$ 的草图。

2.（10 分）当参数 $p>0$ 满足什么条件时广义积分 $\int_1^{+\infty}(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1})dx$ 收敛？并求此时的广义积分值.

3.（10 分）通过变量代换 $x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，化简以下微分方程并求其通解：

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0 \quad (-1<x<1).$$

4.（10 分）记圆周 $\begin{cases} x=2+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面为 S.

   (I) 求 S 的面积.

   (II) 求由 S 所包围的旋转体的体积.

5.（10 分）设 $I=\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx$.

   (I) 证明 $I=\int_0^2\frac{1}{e^t+e^{2-t}}dt$;

   (II) 求积分 I 的值.

6.（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$, 且满足

$$(x^2+1)f'(x)+(x^2+1)f(x)-2\int_0^x tf(t)dt=0.$$

   (I) 求 $f'(x)$ 的表达式；

   (II) 证明当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^{-x}\le f(x)\le 1$.

7.（8 分）设 $x\in(0,1)$，证明

   (I) 对任意正整数 n，都有 $\frac{n^x\cdot n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}<1$；

   (II) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x\cdot n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ 存在（有限）.

三、附加题（本题完全正确才有分，且分数不计入总分，仅用于评判A＋）

已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足如下条件：

(I) $f(x)>0$；

(II) $f(1)=1, f(x+1)=xf(x)$；

(III) $\varphi(x)=\ln f(x)$ 是下凸函数.

试证：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (0<x<1)$.

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 曲线 $y=x+x^2\sin\dfrac{1}{x^2+1}$ 的渐近线为 $y=x+1$.

   解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，得到渐近线斜率为 1，而 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-x=1$, 所以渐近线是 $y=x+1$。

2. 曲线段 $y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\ (0\le x\le 8)$ 的弧长为 $\dfrac{52}{3}$.

   解析：$y'=\sqrt{x}$，所以弧长为 $\displaystyle\int_0^8\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^8\sqrt{1+x}dx=\frac{52}{3}$。

3. 函数 $f(x)=x(1-x)^3\quad(0<x<1)$ 在 $x=\dfrac{1}{4}$ 处取得极大值。

   解析：$f'(x)=(1-x)^3-3x(1-x)^2=(1-x)^2(1-4x)$，令 $f'(x)=0$，得到 $x=1,\frac{1}{4}$，再考虑这两点两侧的导数的正负性，得到 $x=\dfrac{1}{4}$ 处取得极大值。

4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}$.

   解析：使用洛必达法则，得到 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$。

5. $\displaystyle\int_0^x|e^t-1|dt=\begin{cases}e^x-x-1, & x\ge0\\ x-e^x+1, & x<0\end{cases}$.

   解析：$|e^t-1|=\begin{cases}e^t-1, & t\ge0\\ 1-e^t, & t<0\end{cases}$，所以 $\displaystyle\int_0^x|e^t-1|dt=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x e^t-1dt=e^x-x-1, & x\ge0\\ \displaystyle\int_0^x 1-e^tdt=x-e^x+1, & x<0\end{cases}$

6. 广义积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{(-\ln x)^p}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ 收敛，则 p 的取值范围为 $p>1$.

   解析：问题点有两个 0 和 1，要求在这两点附近的积分都收敛。

   在 $x\to0$ 时，$\dfrac{(-\ln x)^p}{\sqrt{x}(1-x)^2}\sim\dfrac{(-\ln x)^p}{\sqrt{x}}$，且对任意 p，$(-\ln x)^p<\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$ 在 $x\to0$ 时成立，所以 $\dfrac{(-\ln x)^p}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$，其在 0 附近的积分收敛，所以原积分在 0 附近的积分收敛。

   在 $x\to1$ 时，$\dfrac{(-\ln x)^p}{\sqrt{x}(1-x)^2}\sim\dfrac{(1-x)^p}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^{2-p}}$，其在 1 附近的积分收敛当且仅当 $2-p<1$，即 $p>1$。

   综上，$p>1$。

   注：对数函数的放缩是必须要掌握的。由函数增减关系可知，对数函数远弱于幂函数远弱于指数函数，因此，对任意 $\alpha>0$，当 $x\to0$ 时有 $(-\ln x)<\dfrac{1}{x^\alpha}$，当 $x\to+\infty$ 时有 $\ln x<x^\alpha$。因此对数函数和幂函数同时出现时，对数函数基本上都可以直接忽略。

7. 微分方程初值问题 $\begin{cases}(1+e^x)yy'=e^x\\ y(0)=\sqrt{2\ln 2}\end{cases}$ 的解为 $y=\sqrt{2\ln(1+e^x)}$.

解析：这个微分方程可以直接分离变量，得到 $ydy=\dfrac{e^x}{1+e^x}dx$，两边积分得到 $\dfrac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C$，代入初值条件，得到 $y=\sqrt{2\ln(1+e^x)}$。

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

解析：做换元 $\tan x=t$，原式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{3t^2+1}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$。

注：这个换元的思路其实就是书上三角有理式积分讲的半角代换/万能换元，但鉴于本题所有出现的三角函数函数皆为平方形式，一个想法是先利用降幂公式，将 $\sin^2 x$ 和 $\cos^2 x$ 转化为 $\cos 2x$，得到一个只含 $2x$ 的三角函数的次数更低的有理式，然后再做万能换元，令 $\tan x=t$。故这种只含三角函数的平方项的，就可以直接做这个换元。

9. 微分方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 的通解为.

解析：这是一个欧拉方程，做换元 $t=\ln x$，得到 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4y=0$，解得 $y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=C_1x^2+C_2x^{-2}$。

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n(1^2+2^2+\cdots+n^2)}=\frac{3}{4}$.

解析：分子分母都为若干项的求和，考虑分子分母分别凑定积分定义。得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n(1^2+2^2+\cdots+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right)}{\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}=\frac{\int_0^1 x^3\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx}=\frac{3}{4}$$

注：在微积分 1 的下半学期能遇到这种含求和式的极限，九成可能就是要准备凑定积分定义。基本的原理是 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))=\int_0^1 f(x)dx$。

二、解答题解析

1.（12 分）设 $f(x)=xe^{-x^2}(x>0)$

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间、极值点与极值、凹凸区间、拐点和渐近线;

(II) 画出曲线 $y=f(x)$ 的草图。

解析：(I)

$f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$，所以 $f'(x)=0$ 得到 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，进一步分析各段的导数正负，得到 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ 上单调递减。所以 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 是极大值点，极大值为 $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$。

$f''(x)=2xe^{-x^2}(2x^2-3)$，所以 $f''(x)=0$ 得到 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，进一步分析各段的二阶导正负，得到 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$ 上凸，在 $(\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$ 下凸。所以 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 是拐点。

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=0$$

所以 $f(x)$ 的渐近线是 $y=0$

(II)

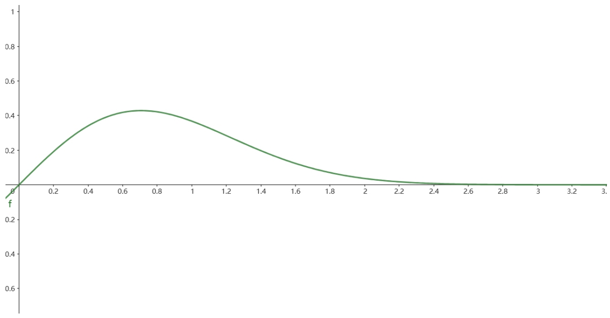

图 1: 草图（geogebra 绘制）

标注出极值点，描绘出单调性和大概的凹凸性，以及展现 x 趋于无穷时 $f(x)$ 趋于 0 即可。

2.（10 分）当参数 $p>0$ 满足什么条件时广义积分 $\int_1^{+\infty}(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1})dx$ 收敛？并求此时的广义积分值.

解析：

既然题目最终要求广义积分的值，我们可以干脆使用广义积分的定义去判断这个广义积分的收敛性，及先求定积分的值，再要求定积分的极限存在。

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\int_1^t(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1})dx &= \lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{2}\ln(x^2+p)-p\ln(x+1))\Big|_1^t \\ &= \lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{2}\ln(t^2+p)-p\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(1+p)+p\ln 2) \\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+p}{(t+1)^{2p}}-\frac{1}{2}\ln(1+p)+p\ln 2\end{aligned}$$

要求该极限存在，则只能为 $p=1$，即原广义积分当且仅当 $p=1$ 时收敛，此时上面的极限值即为广义积分值，为 $\frac{\ln 2}{2}$。

注：

本题要求求广义积分的值，所以选择了计算原函数求定积分的方法。若不要求的话，也可以直接通过比较判敛的方法得到什么时候收敛。当 x 趋于无穷时：

$$\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}=\frac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x+1)(x^2+p)}\sim\frac{(1-p)x^2+x}{x^3}$$

若 $p\neq 1$，则该被积函数和 $\frac{1}{x}$ 同阶，广义积分发散，所以只能为 $p=1$。

3.（10 分）通过变量代换 $x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，化简以下微分方程并求其通解：

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0 \quad (-1<x<1).$$

解析：

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\cos t\frac{dy}{dx} \\ &\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\cos t\frac{dy}{dx})=-\sin t\frac{dy}{dx}+\cos^2 t\frac{d^2y}{dx^2}=(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

所以原微分方程化为：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$，再代回 x，得到 $y=C_1\sqrt{1-x^2}+C_2x$。

4.（10 分）记圆周 $\begin{cases} x=2+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面为 S.

(I) 求 S 的面积.

(II) 求由 S 所包围的旋转体的体积.

解析：可以先大概想象一下 S 是一个甜甜圈样。我这就直接套公式了

(I)

面积为：

$$\int_0^{2\pi}2\pi x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt=\int_0^{2\pi}2\pi(2+\cos t)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}dt=8\pi^2$$

(II)

旋转体体积为：

$$\int_0^{2\pi}\pi x(t)^2dy(t)=\int_0^{2\pi}\pi(2+\cos t)^2\cos tdt=4\pi^2$$

(II) 注：如果对参数方程的旋转体体积计算不确定的话，这题也可以先计算得到 x 和 y 的表达式，然后用公式计算。需要注意的是，这是一个圆，如果需要将其看成 x 是 y 的函数，需要分段 $x=2+\sqrt{1-y^2}$ 和 $x=2-\sqrt{1-y^2}$，然后计算体积时要计算两个部分的体积相减（可以想想上面为什么不需要分段）。

$$\int_{-1}^{1}\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2dy-\int_{-1}^{1}\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2dy=4\pi^2$$

5.（10 分）设 $I=\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx$.

(I) 证明 $I=\int_0^2\frac{1}{e^t+e^{2-t}}dt$;

(II) 求积分 I 的值.

解析：

(I)

令 $x=2-t$，得到

$$\begin{aligned} I&=\int_0^2\frac{2-t}{e^{2-t}+e^t}dt \\ 2I&=\int_0^2\frac{t}{e^{2-t}+e^t}dt+\int_0^2\frac{2-t}{e^{2-t}+e^t}dt=\int_0^2\frac{2}{e^{2-t}+e^t} \\ I&=\int_0^2\frac{1}{e^{2-t}+e^t}dt \end{aligned}$$

(II)

令 $u=e^t$，得到

$$\int_0^2\frac{1}{e+e^{2-t}}dt=\int_0^{e^2}\frac{1}{u^2+e^2}du=\frac{\arctan e-\arctan\frac{1}{e}}{e}$$

注：区间再现公式（或者说是定积分的轴对称公式）

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

我个人认为是和变限积分求导并称为课本中定积分最重要的两条特殊公式。区间再现常用于函数具有一定的对称性的时候使用，这题就是书《高等微积分教程（上）》P.167，例 5.6.5 的翻版。（备考一定要多看课本）

6.（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$, 且满足

$$(x^2+1)f'(x)+(x^2+1)f(x)-2\int_0^x tf(t)dt=0.$$

(I) 求 $f'(x)$ 的表达式；

(II) 证明当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^{-x}\le f(x)\le 1$.

解析：看到变限积分，先求导试试再说，不过得先说明 $f'(x)$ 确实可导。

(I)

$$f'(x)=\frac{2\int_0^x tf(t)dt-(x^2+1)f(x)}{x^2+1}$$

易得 $2\int_0^x tf(t)dt-(x^2+1)f(x)$ 和 x^2+1 均在 $[0,\ +\infty)$ 上可导，所以 $f'(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上可导。

两边对 x 求导得到：

$$\begin{aligned}(x^2+1)f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f'(x)+2xf(x)-2xf(x)=0\\ (x^2+1)f''(x)+(x+1)^2f'(x)=0\end{aligned}$$

这是一个关于 $f'(x)$ 的一阶微分方程，解得 $f'(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{x^2+1}$。题目条件代入 $x=0$，得到 $f'(0)+f(0)=0$，所以 $C=-1$，所以 $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{x^2+1}$。

Just-lose-it 提供的另解：（此解法不需要验证 $f'(x)$ 可导）

$$\begin{aligned}&(x^2+1)f'(x)+(x^2+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt^2=0\\ \Rightarrow&(x^2+1)f'(x)+(x^2+1)f(x)-x^2f(x)+\int_0^x t^2f'(t)dt=0\\ \Rightarrow&(x^2+1)f'(x)+f(x)+\int_0^x t^2f'(t)dt=0\\ \Rightarrow&(x^2+1)f'(x)+\int_0^x f'(t)dt+\int_0^x t^2f'(t)dt=0\\ \Rightarrow&(x^2+1)f'(x)+\int_0^x (t^2+1)f'(t)dt=0\end{aligned}$$

设 $F(x)=\int_0^x(t^2+1)f'(t)dt$，则 $F'(x)=(x^2+1)f'(x)$，得到 $F'(x)+F(x)=0$，所以 $F(x)=Ce^{-x}$，所以 $(x^2+1)f'(x)=F'(x)=-Ce^{-x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{-Ce^{-x}}{x^2+1}$，代入 $f'(0)=-1$ 得到 $C=1$，所以 $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{x^2+1}$。

(II)

显然，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)\leq f(0)=1$。

又有 $f'(x)\geq -e^{-x}$，有 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt\geq\int_0^x -e^{-t}dt=e^{-x}-1$，所以 $f(x)\geq e^{-x}$。

注：这种根据导数的范围推测原函数的范围的题在过去出过多次，例如 23 年 17 题、21 年 17 题和 19 年 17 题，可以对着看看。

7.（8 分）设 $x\in(0,1)$，证明

(I) 对任意正整数 n，都有 $\dfrac{n^x\cdot n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}<1$；

(II) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x\cdot n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ 存在（有限）.

解析：

(I)

只需证明下式：

$$n^x<\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}=(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})$$

而 $\dfrac{(n+1)^x}{n^x}=(1+\dfrac{1}{n})^x<1+\dfrac{x}{n}$（伯努利不等式，可通过构造函数求导证明），所以

$$n^x=\frac{2^x}{1^x}\frac{3^x}{2^x}\cdots\frac{n^x}{(n-1)^x}<(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n-1})<(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})$$

结论即证。

(II)

记 $a_n=\dfrac{n^x\cdot n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，则已经证明了 $\{a_n\}$ 有上界，接下来证明其单调递增即可，即要求

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=(1+\frac{1}{n})^x\frac{n+1}{x+n+1}>1$$

记 $f(n)=(1+\frac{1}{n})^x\dfrac{n+1}{x+n+1}$, 则

$$\ln f(n)=x\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(n+1)-\ln(x+n+1)$$
$$(\ln f(n))'=-\frac{x(1+x)}{n(n+1)(n+x+1)}<0$$

所以 $f(n)$ 单调递减，而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=1$，所以 $f(n)>1$，所以 $\{a_n\}$ 单调递增，所以 $\{a_n\}$ 极限存在。

三、附加题解析

已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足如下条件：

(I) $f(x)>0$；

(II) $f(1)=1,f(x+1)=xf(x)$；

(III) $\varphi(x)=\ln f(x)$ 是下凸函数.

试证：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x\cdot n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\quad(0<x<1)$.

解析：

显然有 $f(n+x)=(n+x-1)(n+x-2)\cdots xf(x), f(n)=(n-1)!, n\in\mathbb{N}^+$。对 $x\in(0,1)$，由 $\ln f(x)$ 为凸函数，有：

$$\frac{\ln f(n)-\ln f(n-1)}{n-(n-1)}\le\frac{\ln f(n+x)-\ln f(n)}{n+x-n}\le\frac{\ln f(n+1)-\ln f(n)}{n+1-n}$$

$$\Rightarrow x\ln(n-1)\le\ln\frac{f(n+x)}{f(n)}\le x\ln n$$

$$\Rightarrow (n-1)^x(n-1)!\le f(n+x)\le n^x(n-1)!$$

$$\Rightarrow n^x n!\le f(n+1+x)\le(n+1)^x n!$$

$$\Rightarrow \frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\le f(x)\le\frac{(n+1)^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}(1+\frac{1}{n})^x$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x\cdot n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^x=1$，由夹逼定理即得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

注：此即 Bohr-Mollerup 定理（有兴趣的同学可以自行搜索）。可以验证伽马函数 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ 也满足题目的三个条件，所以本题得到的 $f(x)$ 其实是 $\Gamma(x)$ 的另一个等价定义。