

线性代数（期中考）

2024 年 11 月

姓名_____班级_____学号_____成绩_____

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 11 & 10 & 32 \\ 18 & 20 & 63 \\ 31 & 30 & 91 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设方阵 A 的第三行元素依次为 $a_{31} = -1, a_{32} = 0, a_{33} = 2, a_{34} = 8$ ，第二行元素对应的代数余子式依次为 $A_{21} = 5, A_{22} = 10, A_{23} = a, A_{24} = 2$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 多项式 $\begin{vmatrix} 1 & 1-x & 1+x^2 \\ 1-x & 2+x^2 & 4+2x \\ 1+x^2 & 3 & 9+3x \end{vmatrix}$ 的常数项 = $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix}$ ，其中实数 $a, b \neq 0$ ，则与 A 可交换的所有实矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ，矩阵 $B \in M_2(\mathbb{R})$ 满足 $BA^2 = BA + B + 2I_2$ 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知矩阵 $A = I_3 - 2uu^T$ ，其中 $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，则 $A^{2024} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 若方阵 A 满足方程: $A^2 - A - 8I = \mathbf{0}$ ，则 $(A + 2I)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 A 是 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得到矩阵 B ，再将 B 的第 1 列的 (-1) 倍加到第 2 列得到矩阵 C ，则存在初等矩阵 P ，使得 $\underline{\hspace{2cm}}$ （请选择）.

- (A) $C = P^T AP$ (B) $C = PA(-P)$ (C) $C = P^{-1} AP$ (D) $C = P^* AP$

9. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量组 $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + t\alpha_3, 3\alpha_3 + 2\alpha_2$ 线性相关，则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中, 前 $n-1$ 个向量线性相关, 后 $n-1$ 个向量线性无关,

则 α_1 是否可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性表出? 答: _____ (请选择)。

- (A) 能 (B) 不能 (C) 无法确定

二、计算与证明题 (共 70 分, 需写出必要的步骤)

11. (12 分) 当 k 取何值时, 方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 11x_4 = k \end{cases}$ 有解, 并求出其所有解.

12. (12 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $X = AX + B$, 求矩阵 X .

13. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 令 $C = \begin{bmatrix} A & B \\ A & B \end{bmatrix}$, 求可逆阵 P 与简

化行阶梯形 U , 使得 $PC = U$. (“简化行阶梯形”是指满足以下两个条件的阶梯形矩阵: ①主元为 1; ②主元所在列中, 除主元外的其他元素均为 0。)

14. (10 分) 设 A, B 是 3 阶矩阵, 它们的伴随矩阵分别是 A^*, B^* ,

$|A| = 2, |B| = -3, |A+B| = 5$, 求矩阵的行列式 $\|A|B^* + |B|A^*\|$.

15. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求伴随矩阵 A^* 以及 $|A|$ 全体代数余子式之和.

16. (8 分) 设 A 是 n 阶实矩阵, $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, 证明: 向量组 Av_1, Av_2, \dots, Av_n

线性无关当且仅当 A 可逆且 v_1, v_2, \dots, v_n 线性无关.

17. (8 分) 设 A 为 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 n 维列向量, 满足

$$A\alpha_1 = c_1\alpha_1, A\alpha_2 = c_2\alpha_1 + c_1\alpha_2, A\alpha_3 = c_2\alpha_2 + c_1\alpha_3, c_2 \neq 0,$$

若 α_1, α_2 线性无关, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.