2024年秋季复变函数考试试题

2024年11月9日 9：50-11：50

本次考试共五道试题，考试时长2小时。

一、设x, y为实数，$w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为解析函数, $u(x,y)=x^3+y^3+ax^2y+bx^2y+x^2+cxy+dy^2$, 求出$u(x,y)$可做解析函数实部的条件，并求出解析函数$w(z)$的表达式, $z=x+iy$。

二、设$w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$于复平面上半平面与实轴上均单值解析，且当z于上半空间趋于无穷远点时，$w(z)$一致地趋向于0。求证：

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi$$

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi$$

其中$f(\xi)=u(\xi,0)$, 这被称为上半空间的Poisson公式。

三、设 $w(z)=z^2\sqrt{\frac{i-z}{i+z}}$，割线取为 $z=i$ 与 $z=-i$ 的连线，并规定割线右岸宗量的辐角为0。

(a) 求 $w(\pm 1)$。

(b) 将 $w(z)$ 于 $|z|>1$ 的环形区域内做Laurent展开，保留系数非零的前五项。

(c) 求 $w(z)$ 于无穷远处的留数。

四、用留数定理计算以下积分：

$$(1)\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x \qquad\qquad (2)\int_0^{\infty}\frac{x\ln x}{x^3-1}\mathrm{d}x$$

五、求解积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha}x\mathrm{d}x \qquad (-1<\alpha<1)$$

答案中不得带有Γ函数与B函数。