2024 年春季《高等微积分 2》期末试卷

2024 年 6 月 16 日 $9:00-11:00$

本试卷分两页，共七道试题，其中第 1 题 12 分，第 5 题 13 分，其余每题各 15 分。

1 (1) 叙述函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 D 上一致收敛到函数 f 的定义。

(2) 叙述斯托克斯公式。

(3) 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中封闭的光滑曲面，它围成的有界区域为 Ω。设 $F, G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，且都在 S 上恒等于零。利用高斯公式证明:

$$\iiint_{\Omega} F_x G dxdydz = -\iiint_{\Omega} F G_x dxdydz,$$

其中 F_x, G_x 分别表示 F, G 对 x 的偏导函数。

2 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1, \quad (n+1)a_{n+1} = (n+\frac{1}{2})a_n.$$

(1) 证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛。

(2) 利用课程中证明过的结论:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \forall |x|<1,$$

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-1,1)$ 中的和函数。

3 (1) 设 α 是给定的正数，求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[x]{x}-1}{(\frac{1}{x})^{\alpha}}$ 的值。

(2) 设 p 是给定的正数，利用 (1) 的结果判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^p$ 的收敛发散性。

4 (1) 计算第二型曲面积分 $I=\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中曲面 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，取指向外面的定向。

(2) 令 $V=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\}$。求三重积分 $\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ 的值。

5 设 x_1,x_2,x_3,x_4 都是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$。求函数

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2$$

的最大值。

6 令 $S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\}$ 为 $Oxyz$ 坐标系中的单位球面，记其面积微元为 dS。令 $L=\{(u,v):u^2+v^2=1,v\geqslant 0\}$ 为 Ouv 坐标系中的上半单位圆周，记其弧长微元为 $d\ell$。设 f 是三元的连续函数。

(1) 对 S 赋予参数化 $x=t,y=\sqrt{1-t^2}\cos\theta,z=\sqrt{1-t^2}\sin\theta$，其中 $-1\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。请将第一型曲面积分 $\iint_S f(x,y,z)dS$ 用此参数化表示。

(2) 求第一型曲面积分 $\iint_S z^4dS$ 的值。

(3) 证明：

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\int_0^{2\pi}\left(\int_L f(u,v\cos\theta,v\sin\theta)vd\ell\right)d\theta.$$

7 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中光滑的带边的定向曲面，其定向由各点处的单位法向量

$$\mathbf{n}(x,y,z)=(n_1(x,y,z),n_2(x,y,z),n_3(x,y,z))$$

描述。假设 $\mathbf{n}(x,y,z)$ 在 S 的某个邻域中处处有定义，是单位长度的，且关于 (x,y,z) 是光滑变化的。把 $\mathbf{n}$ 的分量函数简记为 n_1,n_2,n_3。

(1) 利用 $\mathbf{n}$ 是单位长度的，证明：$n_1\partial_z n_1+n_2\partial_z n_2+n_3\partial_z n_3$ 在 S 上恒等于零。

(2) 证明：

$$\int_{\partial S}(yn_2+zn_3)dx-yn_1dy-zn_1dz=-\iint_S(yn_3-zn_2)(\operatorname{div}\mathbf{n})dS,$$

其中用 $\operatorname{div}\mathbf{n}$ 表示 $\mathbf{n}$ 的散度，用 dS 表示面积微元，对 S 的边界 ∂S 赋予边界正定向。