线性代数（2024 秋）-期末考试

1.【10 分】如果 5 阶方阵 A 满足 $A^3=0$。求 A 的秩的最大可能值，并写出一个取得秩最大的矩阵。

2.【10 分】求方阵 $A=\begin{bmatrix}-4 & 6 & -6\\ -8 & 11 & -8\\ -5 & 6 & -3\end{bmatrix}$ 的所有特征值以及每个特征值的特征向量。

3.【10 分】设方阵 $A=\begin{bmatrix}-4 & 6 & -6\\ -8 & 11 & -8\\ -5 & 6 & -3\end{bmatrix}$。计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A^n}{3^n}$。

4.【10 分】设方阵 $A=\begin{bmatrix}0 & \pi/6 & 0\\ -\pi/6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$。计算指数矩阵 e^A。

5.【10 分】设方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -4 & -1 & 7\\ -2 & -1 & 5\end{bmatrix}$，判断 A 是否可以对角化。如果可以对角化，求所有特征值以及每个特征值的特征向量。如果不能对角化，求所有特征值以及每个特征值的根子空间。

6.【10 分】设齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2-2x_3+4x_4=0\\ x_1+x_2-4x_3+4x_4=0\end{cases}$ 的解空间为 W。

(a) 设 $W^\perp$ 是 W 在标准欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补。求 $W^\perp$ 的一组标准正交基。

(b) 计算点 $\mathbf{p}=(2,0,2,4)$ 和子空间 W 之间的距离。

7.【10 分】证明 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ 是半正定对称方阵。并求解半正定对称方阵 B 使得 $B^2=A$。

8.【10 分】计算矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

9.【10 分】计算矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ 的奇异值分解和 Moore-Penrose 逆。

10.【10 分】设 $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}$, $\vec{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}$。找出使得 A 可以对角化的所有 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$。