2023 年春季《高等微积分 2》期中考试试卷

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题 10 分, 其余每题 15 分.

1 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且在 D 上处处有 $\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}\le M$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 利用微分中值定理证明:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M\cdot|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

证明: 由微分中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)=f'_x(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(x_1-x_2)+f'_y(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(y_1-y_2).$$

再由 *Cauchy-Schwartz* 定理即得

$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|&\le\sqrt{f'_x(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{b}-\mathbf{a}))^2+f'_y(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{b}-\mathbf{a}))^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&\le M\cdot|AB|.\end{aligned}$$

□

2 (1) 设 $w=f(u,v)$ 是 C^2 光滑函数, 且 $u=x-cy,v=x+cy$, 其中 c 为非零常数. 将 w 视为 x,y 的函数 $w=w(x,y)$, 计算 $w''_{xx}-\frac{1}{c^2}w''_{yy}$ 的值, 用 f 的二阶偏导表示.

(2) 设可微函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z^2$. 令 $u=x,v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$. 将 w 视为 u,v 的函数 $w=w(u,v)$, 求偏导数 $\frac{\partial w}{\partial u}\big|_{(u,v)=(2,1)}$.

解. (1) 由条件有 $w=f(x-cy,x+cy)$, 利用链式法则可得

$$w_x=f_1'(x-cy,x+cy)+f_2'(x-cy,x+cy),\quad w_y=-cf_1'(x-cy,x+cy)+cf_2'(x-cy,x+cy).$$

进一步求导可得

$$\begin{aligned}w_{xx}&=f_{11}''+f_{12}''+f_{21}''+f_{22}'',\\ w_{yy}&=(-c)^2f_{11}''+(-c^2)f_{12}''+(-c^2)f_{21}''+c^2f_{22}''.\end{aligned}$$

由此可得

$$w_{xx}''-\frac{1}{c^2}w_{yy}''=4f_{12}''(x-cy,x+cy).$$

(2) 由条件可得

$$w=\frac{1}{z(u,\frac{u}{uv+1})}-\frac{1}{u},$$

求导得到

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{-(z_1'(u,\frac{u}{uv+1})+z_2'(u,\frac{u}{uv+1})\frac{uv+1-uv}{(uv+1)^2})}{z(u,\frac{u}{uv+1})^2}+\frac{1}{u^2}.$$

结合条件

$$z_1'(u,\frac{u}{uv+1})u^2+z_2'(u,\frac{u}{uv+1})(\frac{u}{uv+1})^2=2z(u,\frac{u}{uv+1})^2,$$

可得

$$\frac{\partial w}{\partial u}=-\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{u^2},$$

进而有

$$\frac{\partial w}{\partial u}\Big|_{(u,v)=(2,1)}=-\frac{1}{4}.$$

□

3 (1) 设 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是给定的光滑函数, 点 (a,b,c) 满足

$$F(a,b,c)=0,\quad F_x'(a,b,c)\neq 0,\quad F_y'(a,b,c)\neq 0,\quad F_z'(a,b,c)\neq 0.$$

由隐函数定理, 在 (a,b,c) 附近由方程 $F(x,y,z)=0$ 将 z 表示成 x,y 的隐函数 $z=z(x,y)$, 记该隐函数关于 y 的偏导函数为 $\frac{\partial z}{\partial y}$. 类似的定义 $\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial y}{\partial x}$. 求表达式 $\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$ 的值.

(2) 已知光滑函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在点 $(0,0)$ 附近的 *Taylor* 公式为

$$f(x,y)=ax+by+cx^2+dxy+ey^2+o(x^2+y^2),$$

其中 $b\neq 0$. 设在 $(0,0)$ 附近由方程 $f(x,y)=0$ 确定 y 关于 x 的隐函数为 $y=y(x)$. 求 $y(x)$ 在 $x=0$ 附近的 带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 要求展开至 2 阶, 即余项为 $o(x^2)$.

解. (1) 由隐函数定理可得, 在 (a,b,c) 附近的点 (x,y,z) 处有

$$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(x,y)}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},$$

类似的有

$$\frac{\partial x}{\partial z}|_{(y,z)}=-\frac{F'_z(x,y,z)}{F'_x(x,y,z)},\quad \frac{\partial y}{\partial x}|_{(x,z)}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_y(x,y,z)}.$$

将这三个式子相乘即得 $\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=-1$.

(2) 由隐函数定理可知

$$y'(x)=-\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}.$$

对此表达式求导, 得到

$$y''(x)=-\frac{(f_{xx}+f_{xy}y'(x))f_y-f_x(f_{yx}+f_{yy}y'(x))}{f_y^2}=\frac{-f_{xx}f_y^2+2f_{xy}f_xf_y-f_{yy}f_x^2}{f_y^3}.$$

由 f 在 $(0,0)$ 处的 *Taylor* 公式, 可知

$$f_x(0,0)=a, f_y(0,0)=b, f_{xx}(0,0)=2c, f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)=d, f_{yy}(0,0)=2e,$$

代回前述 y 的高阶导的表达式, 可得

$$y'(0)=-\frac{a}{b},\quad y''(0)=\frac{-2b^2c+2abd-2a^2e}{b^3}.$$

这样, y 在在 $x=0$ 附近的 带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式为

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2}y''(0)x^2+o(x^2)=-\frac{a}{b}x+\frac{-b^2c+abd-a^2e}{b^3}x^2+o(x^2).$$

□

4 (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(5n)!}{(n!)^5}x^n$ 的收敛半径.

(2) 定义函数 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$, 请把函数 $f(x)$ 表示成关于 x 的幂级数.

解. (1) 记题述幂级数的系数为 $a_n=\frac{(5n)!}{(n!)^5}$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+5)\cdots(5n+1)}{(n+1)^5}=5^5,$$

由此可知该幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{5^5}$.

(2) 记 $g(t)=\frac{\sin t}{t}$, 可将 g 连续的延拓到原点, 即令

$$\widetilde{g}(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t}, & \text{如果 } t\neq 0,\\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1, & \text{如果 } t=0.\end{cases}$$

由于 g 与 $\widetilde{g}$ 只在一点处不同, 可得 $f(x)=\int_0^x\widetilde{g}(t)dt$.

熟知 $\sin t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}$, 可知 $\widetilde{g}(t)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}$ 的和函数. 该幂级数的收敛半径为 $+\infty$, 故可对其逐项积分, 即有

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}dt\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}dt\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

□

5 (1) 证明: 对任何正数 $a<1$, 函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln x$ 在区间 $(0,a]$ 上一致收敛.

(2) 记 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln x$. 证明:

$$\int_0^1 f(x)dx=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(注意: 完全严格的处理可能并不容易, 时间不够的话允许稍微省略严格的论证)

证明: (1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0$, 可将 $x\ln x$ 扩充为 $[0,1]$ 上的连续函数, 进而知其在 $[0,1]$ 上有界. 设对 $x\in(0,1]$ 都有 $|x\ln x|\le K$, 由此可得

$$|x^n \ln x| \le Kx^{n-1} \le Ka^{n-1}, \quad \forall x\in(0,a].$$

由于 $0<a<1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ka^{n-1}$ 收敛, 利用 M-Test 可得函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$ 在区间 $(0,a]$ 上一致收敛.

(2) 直接求和可得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}\ln x, & \text{如果 } 0<x<1, \\ 0, & \text{如果 } x=1. \end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{1-x}\ln x = 0, \quad \lim_{x\to 1-} \frac{x}{1-x}\ln x = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{1/x}{-1} = -1,$$

可将 f 扩充为 $[0,1]$ 上的连续函数

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x=0, \\ f(x), & \text{如果 } 0<x<0, \\ -1, & \text{如果 } x=1. \end{cases}$$

由于 $\widetilde{f}$ 连续, 且与 f 只在两点 $0,1$ 处不同, 可得

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \widetilde{f}(x)dx = \lim_{a\to 1-} \int_0^a \widetilde{f}(x)dx.$$

令 $u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x=0 \\ x^n\ln x, & \text{如果 } 0<x<1 \end{cases}$, 则 $\widetilde{f}$ 是函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1)$ 上的和函数. 由前一小问的结论, 结合 $x=0$ 处 $\widetilde{f}(0)-u_1(0)-\cdots-u_n(0)=0$, 可得对任何正数 $a<1$ 函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上一致收敛. 这样, 可逐项积分计算 $\int_0^a \widetilde{f}(x)dx$, 得到

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to 1-} \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \lim_{a\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a x^n \ln x dx \\ &= \lim_{a\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x \Big|_0^a - \int_0^a \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)' dx \right) \\ &= \lim_{a\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^{n+1}}{n+1} \ln a - \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} \right). \end{aligned}$$

考虑函数级数

$$S(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^{n+1}}{n+1}\ln a-\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$

在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 上的一致收敛性. 对固定的正整数 m, 令 $g(a)=-a^m\ln a$, 它是定义在 $(0,1]$ 上的非负函数. 求导可知

$$g'(a)=a^{m-1}(-m\ln a-1),$$

从而可得

$$g'(a)>0 \iff a<e^{-1/m},$$

从而 $g(a)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $\max\limits_{0<a\le 1}g(a)=g(e^{-1/m})=\frac{1}{em}$. 由此可得

$$\left|\frac{a^{n+1}}{n+1}\ln a-\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}\right|\le\frac{1}{e(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2},\quad \forall a\in[\frac{1}{2},1],$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

收敛, 利用 M-Test 可得函数级数

$$S(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^{n+1}}{n+1}\ln a-\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$

在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 上一致收敛性. 这样, 由一致收敛定理可得 $S(a)$ 是 $[\frac{1}{2},1]$ 上的连续函数, 进而有

$$\lim_{a\to 1-}S(a)=S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

这就证明了所求的积分为 $I=1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. □

6 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是 C^2 光滑函数.

(1) 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的临界点, 对每个向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, 计算极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t^2}$, 要求将结果用 f 的海瑟矩阵表示 (或等价的, 用 f 的二阶偏导表示).

(2) 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的极大值点. 证明: $f''_{xx}(\mathbf{x}_0)\le 0,\quad f''_{yy}(\mathbf{x}_0)\le 0$.

(3) 设 $g(x,y)=(2+\sin x)\cdot\sin y$, 令 $D=\{(x,y)|0<x,y<2\pi\}$. 求出 g 在 D 上的所有临界点.

解. (1) 利用 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t^2}&=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0+\theta\cdot t\mathbf{v})t\mathbf{v}}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0+\theta\cdot t\mathbf{v})\mathbf{v}\\&=\frac{1}{2}\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v},\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $\theta\in(0,1)$ 以及 H_f 的连续性.

(2) 若 $\mathbf{x}_0$ 是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的极大值点, 则有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t^2}\le 0,\quad \forall\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2.$$

结合 (1) 的计算结果可得

$$\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}\le 0,\quad \forall\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2.$$

取 $\mathbf{v}=(1,0)$, 得到 $f_{xx}(\mathbf{x}_0)\le 0$; 取 $\mathbf{v}=(0,1)$, 得到 $f_{yy}(\mathbf{x}_0)\le 0$.

(3) g 的临界点方程为

$$\begin{cases}0=g_x=\cos x\sin y,\\0=g_y=(2+\sin x)\cos y,\end{cases}$$

由 $2+\sin x\neq 0$ 可知 $\cos y=0$, 从而 $\sin y\neq 0$, 故 $\cos x=0$. 这样, g 在 D 上一共有四个临界点

$$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}),\quad(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}).$$

□

7 令 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 为开圆盘, $S=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 为其边界. 设 C^2 光滑函数 $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足: 在 D 中处处有

$$-\Delta u-(1-u^2-v^2)u=0,\quad -\Delta v-(1-u^2-v^2)v=0,$$

且对 $(x,y)\in S$ 有 $u(x,y)=v(x,y)=0$, 其中 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(1) 证明: $\Delta(u^2)=2||\nabla u||^2+2u\Delta u$, 其中 ∇u 表示 u 的梯度向量, $||\nabla u||$ 表示其长度.

(2) 通过考虑 u^2+v^2 在闭集 $D\cup S$ 上的最大值点 (x_0,y_0), 利用第 6 题第 (2) 小问的结论, 结合本题第 (1) 小问的结论, 证明: 对任何 $(x,y)\in D$ 有 $u^2(x,y)+v^2(x,y)\le 1$.

证明: (1) 直接计算可得

$$\begin{aligned}\Delta(u^2) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2uu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(2uu_y) \\ &= 2u_xu_x + 2uu_{xx} + 2u_yu_y + 2uu_{yy} \\ &= 2||\nabla u||^2 + 2u\Delta u.\end{aligned}$$

(2) 记 $w = u^2 + v^2$, 由最值定理可知 w 在紧集 $D \cup S$ 上有最大值, 设 (x_0, y_0) 是其最大值点, 只需证明 $w(x_0, y_0) \leq 1$. 为此, 用反证法, 假设 $w(x_0, y_0) > 1$, 则由条件 w 在 S 上恒为零可知 $(x_0, y_0) \in D$. 这样, (x_0, y_0) 是 w 的极大值点, 利用第 6 题第 (2) 小问的结论可得 $w_{xx}(x_0, y_0) \leq 0, w_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$, 进而有 $\Delta w(x_0, y_0) \leq 0$. 但由本题第 (1) 小问的结论, 有

$$\begin{aligned}\Delta w &= 2||\nabla u||^2 + 2u\Delta u + 2||\nabla v||^2 + 2v\Delta v \\ &\geq 2u\Delta u + 2v\Delta v \\ &= 2(u^2 + v^2 - 1)(u^2 + v^2),\end{aligned}$$

特别的, 有

$$\Delta w(x_0, y_0) \geq 2(w(x_0, y_0) - 1)w(x_0, y_0) > 0,$$

矛盾!

□