2022 年春季《高等微积分 2》期中参考解答

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 2, 3 题各 10 分, 第 6 题 20 分, 其余每题各 15 分,

1 (1) 设 $P(x,y)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^iy^{n-i}$ 是 n 次齐次的多项式, α 是小于 n 的正数. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{P(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x\cos y+y\sin y)e^x-x}{x^2+y^2}$.

(3) 已知有如下极限式成立:

$$\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(0,\cdots,0)}\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}=0.$$

证明: $a_1=\cdots=a_n=0$.

证明: (1) 利用不等式 $|x|,|y|\le(x^2+y^2)^{1/2}$, 可知对每个 $0\le i\le n$ 都有

$$\frac{|x^iy^{n-i}|}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\le(x^2+y^2)^{(n-\alpha)/2},\quad\forall(x,y)\neq(0,0),$$

由此可得

$$-(x^2+y^2)^{(n-\alpha)/2}\le\frac{x^iy^{n-i}}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\le(x^2+y^2)^{(n-\alpha)/2},\quad\forall(x,y)\neq(0,0).$$

注意到当 $\alpha<n$ 时, 有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{(n-\alpha)/2}=0$, 利用夹逼定理可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^iy^{n-i}}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}=0,$$

从而得到所要证明的结论.

(2) 注意到 $o(x^2)=o(x^2+y^2), o(y^2)=o(x^2+y^2)$, 结合 Tayloy 公式

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad \sin y = y+o(y^2),\quad \cos y = 1-\frac{y^2}{2}+o(y^2),$$

可得所求的极限为

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x\cos y+y\sin y)e^x - x}{x^2+y^2}\\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x(1-\frac{y^2}{2}+o(y^2))+y(y+o(y^2))\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x}{x^2+y^2}\\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\\
=&1.
\end{aligned}$$

(3) 用反证法, 假设存在 $a_i\neq 0$, 不妨设 $a_1\neq 0$. 由复合极限定理可知

$$\lim_{t\to 0}\frac{t(1,0,\ldots,0)\cdot(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{||t(1,0,\ldots,0)||}=0,$$

即有 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{a_1 t}{|t|}=0$, 但是

$$\lim_{t\to 0-}\frac{a_1 t}{|t|}=-a_1,\quad \lim_{t\to 0+}\frac{a_1 t}{|t|}=a_1,$$

矛盾! $\square$

2 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 函数 f 在 D 上的所有偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 都存在且有界, 即存在 M, 使得对任意的 $i\leq n$ 以及任何 $\mathbf{x}\in D$ 都有 $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\mathbf{x}}\right|\leq M$. 证明: f 是 D 上的连续函数.

证明: 只需证明 f 在每点 $\mathbf{x}_0=(a_1,\cdots,a_n)\in D$ 处连续. 设 $B_r(\mathbf{x}_0)\subseteq D$, 对 $\mathbf{h}=$

$(h_1, \cdots, h_n) \in B_r(\mathbf{0})$, 利用一元函数的微分中值定理可得

$$\begin{aligned}
&|f(a_1+h_1, \cdots, a_n+h_n) - f(a_1, \cdots, a_n)| \\
\leq &\sum_{i=1}^{n} |f(a_1+h_1, \cdots, a_i+h_i, \cdots, a_n) - f(a_1+h_1, \cdots, a_{i-1}+h_{i-1}, a_i, \cdots, a_n)| \\
= &\sum_{i=1}^{n} |\partial_i f(a_1+h_1, \cdots, a_i+\theta_i h_i, \cdots, a_n)| \cdot |h_i \\
\leq &M \sum_{i=1}^{n} |h_i| \\
\leq &nM||\mathbf{h}||.
\end{aligned}$$

这样, 对任何 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{nM}$, 则对 $||\mathbf{h}|| < \delta$, 有

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq nM \cdot ||\mathbf{h}|| < nM\delta = \epsilon,$$

这就验证了 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处连续.

□

3 设函数 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 C^2 光滑函数, 满足在任何点处都有 $f_y \neq 0$ 且

$$f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx} = 0.$$

设 $y = y(x, z)$ 是由方程 $z = f(x, y)$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

解. 令 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$, 则 $g_y = f_y \neq 0$. 由隐函数定理, 方程 $g(x, y, z) = 0$ 确定了 C^2 光滑的隐函数 $y = y(x, z)$, 且有

$$f_x(x, y(x, z)) + f_y(x, y(x, z))\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad f_y(x, y(x, z))\frac{\partial y}{\partial z} = 1.$$

由此计算出 y 的二阶偏导:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x(x, y(x, z))}{f_y(x, y(x, z))}\right) \\
&= -\frac{(f_{xx} + f_{xy}\frac{\partial y}{\partial x})f_y - f_x(f_{yx} + f_{yy}\frac{\partial y}{\partial x})}{f_y^2} \\
&= \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_{xy}f_x f_y - f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

其中最后一步用到了条件中所述的等式. □

4 (1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ 的收敛域.

(2) 将函数 $f(x)=\frac{1}{1-5x+6x^2}$ 在 $x=0$ 附近表示成幂级数的和函数, 并求出该幂级数的收敛半径.

解. (1) 换元 $y=x-1$ 后为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}y^n$. 该幂级数的系数为 $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4},$$

因而可知幂级数的收敛半径为 4.

注意到, 在 $y=\pm 4$ 处有

$$\frac{|a_{n+1}y^{n+1}|}{|a_n y^n|}=\frac{2n+2}{2n+1}>1.$$

这表明 $\{|a_n(\pm 4)^n|\}$ 是递增的正数列, 不趋于零, 故幂级数在 ± 4 处发散.

结合这两点, 可得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}y^n$ 的收敛区域为 $(-4,4)$, 相应的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ 的收敛域为 $(-3,5)$.

(2) 可将 $f(x)$ 表示为最简有理式的代数和:

$$\frac{1}{1-5x+6x^2}=\frac{1}{(1-2x)(1-3x)}=\frac{-2}{1-2x}+\frac{3}{1-3x}.$$

熟知

$$\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n,\quad \forall |y|<1,$$

从而有

$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n,\quad \forall |x|<\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n,\quad \forall |x|<\frac{1}{3},$$

结合起来可得

$$f(x)=\frac{-2}{1-2x}+\frac{3}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}(3^{n+1}-2^{n+1})x^n,\quad \forall |x|<\frac{1}{3},$$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近表示成了幂级数的和函数. 该幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{3}$, 这可由下式得到:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}-2^{n+2}}{3^{n+1}-2^{n+1}}=3.$$

□

5 定义函数 $f(x)$ 为 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2+1}$. 证明: $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内具有连续的导函数. (提示: 可能需要用到一致收敛的 Dirichlet 判别法. 设 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上一致收敛到零函数, 且对每个 $x\in I$, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 n 单调; 设 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列在区间 I 上一致有界, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.)

证明: 记 $u_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^2+1}$.

(1) 先证明函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上点点收敛. 这是由于, 在每点 x 处有

$$|u_n(x)|\le\frac{1}{n^2+1}.$$

熟知数列 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛, 由比较定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对收敛, 因而也是收敛的.

(2) 再证明对每个正数 $\theta<\pi$, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(nx)}{n^2+1}$ 在区间 $I=[\theta,2\pi-\theta]$ 上一致收敛. 令 $a_n(x)=\frac{n}{n^2+1}$, 则有

$$a_n(x)=\frac{1}{n+\frac{1}{n}}>\frac{1}{(n+1)+\frac{1}{n+1}}=a_{n+1},$$

即对每个 $x\in I$, 有 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 n 单调. 另外, 由于 $a_n(x)$ 不依赖于 x, 显然有 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上一致收敛到零函数. 令 $b_n(x)=\cos(nx)$, 则其部分和序列满足

$$|\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)|=|\frac{\sin(n+\frac{x}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}|\le\frac{2}{2\sin\frac{\theta}{2}},\quad\forall x\in I,$$

即 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列在区间 I 上一致有界. 结合这两点, 利用一致收敛的 Dirichlet 判别法, 就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在区间 $I=[\theta,2\pi-\theta]$ 上一致收敛.

(3) 最后来证明 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内具有连续的导函数. 为此, 对每个 $x\in(0,2\pi)$, 取正数 θ 使得 $\theta<x<2\pi-\theta$. 由 (1), (2) 的结论, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[\theta,2\pi-\theta]$ 上点点收

敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在区间 $I=[\theta, 2\pi-\theta]$ 上一致收敛, 由此可得和函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $I=[\theta, 2\pi-\theta]$ 上处处可导. 进一步, $f(x)$ 的导函数为

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

是一族连续函数 $u_n'(x)$ 的一致收敛的和函数, 因而有 $f' \in C(I)$. 特别的, $f'(x)$ 在 x 处连续. 由 x 的任意性, 即证明了 $f'(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续.

□

6 设 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是 C^2 光滑函数.

(1) 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的临界点, 对每个向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, 计算极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t^2},$$

要求将结果用 f 的海瑟矩阵表示 (或等价的, 用 f 的二阶偏导表示).

(2) 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点. 证明:

$$f_{xx}(\mathbf{x}_0) \geq 0, \quad f_{yy}(\mathbf{x}_0) \geq 0.$$

(3) 设 P, Q 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 满足 Q 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界, 且当 $x^2+y^2 \to +\infty$ 有 $P(x,y) \to +\infty$. 证明: $f=P-Q$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值.

(4) 设 (3) 中所述的函数 P, Q 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处有二阶导数, 且满足在 $\mathbb{R}^2$ 上处处有

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=e^P, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \geq e^Q.$$

证明: 对任何点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 都有 $P(x,y) \geq Q(x,y)$.(提示: 利用 (3) 的结论, 再用 (2) 的结论)

解. (1) 利用 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2} t\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0+\theta\cdot t\mathbf{v}) t\mathbf{v}}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0+\theta\cdot t\mathbf{v})\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v},\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $\theta \in (0,1)$ 以及 H_f 的连续性.

(2) 若 $\mathbf{x}_0$ 是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点, 则有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t^2}\geq 0,\quad \forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}^2.$$

结合 (1) 的计算结果可得

$$\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}\geq 0,\quad \forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}^2.$$

取 $\mathbf{v}=(1,0)$, 得到 $f_{xx}(\mathbf{x}_0)\geq 0$; 取 $\mathbf{v}=(0,1)$, 得到 $f_{yy}(\mathbf{x}_0)\geq 0$.

(3) 由条件知 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且当 $x^2+y^2\to+\infty$ 有 $f(x,y)\to+\infty$. 利用讲义上的例子, 可得 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值.

(4) 考虑 $f=P-Q$, 由 (3) 的结论知 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值点, 设为 $\mathbf{x}_0$. 利用 (2) 的结论, 有

$$0\leq f_{xx}(\mathbf{x}_0)=P_{xx}(\mathbf{x}_0)-Q_{xx}(\mathbf{x}_0),\quad 0\leq f_{yy}(\mathbf{x}_0)=P_{yy}(\mathbf{x}_0)-Q_{yy}(\mathbf{x}_0).$$

将上两式相加可得

$$0\leq \Delta P(\mathbf{x}_0)-\Delta Q(\mathbf{x}_0)\leq e^{P(\mathbf{x}_0)}-e^{Q(\mathbf{x}_0)},$$

即有 $P(\mathbf{x}_0)\geq Q(\mathbf{x}_0)$. 这样, $f(\mathbf{x})$ 的最小值满足 $f(\mathbf{x}_0)=P(\mathbf{x}_0)-Q(\mathbf{x}_0)\geq 0$, 从而有 f 处处非负, 即证明了 P 处处不小于 Q. $\square$

7 对二阶可导函数 $f(x,y,z)$, 定义

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

(1) 设 u 是 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上的光滑函数, 定义 $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上的函数 $f(x,y,z)=u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. 证明: f 在 $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上处处满足 $\Delta f=0$ 的充分必要条件是 u 在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上处处满足 $u''(r)+\frac{2}{r}u'(r)=0$.

(2) 假设 f 满足 (1) 中所述的充分必要条件, 还满足在单位球面上恒等于 0, 当 $x^2+y^2+z^2\to+\infty$ 时 $f(x,y,z)\to 1$. 请求出所有这样的 f.(提示: 考虑 $v(t)=u(\frac{1}{t})$)

解. (1) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 利用链式法则求导, 有

$$\partial_x f=u'(r)\frac{x}{r},\quad \partial_y f=u'(r)\frac{y}{r},\quad \partial_z f=u'(r)\frac{z}{r}.$$

进而可得

$$\begin{aligned}
\partial_{xx}f&=u''(r)(\frac{x}{r})^2+u'(r)\frac{1\cdot r-x\frac{x}{r}}{r^2}=\frac{x^2}{r^2}u''(r)+\frac{r^2-x^2}{r^3}u'(r),\\
\partial_{yy}f&=\frac{y^2}{r^2}u''(r)+\frac{r^2-y^2}{r^3}u'(r),\\
\partial_{zz}f&=\frac{z^2}{r^2}u''(r)+\frac{r^2-z^2}{r^3}u'(r).
\end{aligned}$$

这样, f 在 $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上处处满足 $\Delta f=0$ 的充分必要条件为

$$u''(r)+\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}u'(r)=0 \iff u''(r)+\frac{2}{r}u'(r)=0.$$

(2) 令 $v(t)=u(\frac{1}{t})$, 则 $u(r)=v(\frac{1}{r})$, 则

$$u'(r)=v'(\frac{1}{r})(-r^{-2}),\quad u''(r)=v''(\frac{1}{r})r^{-4}+v'(\frac{1}{r})2r^{-3}.$$

代入 u 满足的二阶 ODE 得到 $v''(\frac{1}{r})=0$, 即对每个 $t>0$ 有 $v''(t)=0$. 由此可得 $v'(t)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是常值 a, 进而有 $v(t)=at+b$. 结合边值条件 $v(1)=0$, $\lim_{t\to0+}v(t)=1$ 可得 $v(t)=1-t$. 所以, 所求的 f 为

$$f(x,y,z)=1-\frac{1}{r}=1-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$\square$