

# 2024 年春复变函数期末试题 (A 卷)

Y. S. Li

2024 年 6 月 22 日上午 9:00—11:00

一 (20 分) 设  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  分别是解析函数  $w_1$  的实部和虚部, 且  $u$  和  $v$  不为常函数.

1. (11 分)  $u^n - v^n$  ( $n$  为自然数) 在什么情况下可以作为解析函数  $w_2$  的实部?
2. (9 分) 在上一问的条件下, 导出  $w_2$  的表达式 (用  $w_1$  以及常数表示即可).

二 (10 分) 计算围道积分

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{\operatorname{Re} \zeta \, d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad |z| \neq 1$$

三 (30 分) 函数  $w(z) = z\sqrt{\frac{z+i}{z-i}}$ , 割线为  $z = i$  和  $z = -i$  的连线, 割线右岸的辐角取  $-\pi$ .

1. (10 分) 计算  $w(\pm 1)$ .
2. (17 分) 计算  $w(z)$  在  $|z| > 1$  环域内的 Laurent 展开 (写出系数非零的前五项即可).
3. (3 分) 求  $w(z)$  在无穷远点的留数.

四 (32 分) 利用留数定理计算以下积分:

$$1. (14 \text{ 分}) \int_0^{2\pi} \frac{(1 - x \cos \theta) d\theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, x \in \mathbb{R} \quad 2. (18 \text{ 分}) \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(x+1)^2(x-1)} dx$$

五 (11 分) 利用  $\Gamma$  函数的有关知识计算以下积分, 要求结果中不含  $\Gamma$  函数:

$$\int_0^\infty x^{-1/2} \sin x \, dx$$

$B$  卷与  $A$  卷的区别仅在题号顺序上.

附记:

考试前夕, 有人将 2023 年秋季的试题公然发送至复变函数课程群. 这是一种对任课老师极其不礼貌的行为! 也希望看到这份资料的同学不要将资料分享至任何其他地方.

话说回来, 其实传播往年题也是一种违背考纪的行为. 不过说归说, 大家也都是成年人了, 也都知道什么事情能放在台面上, 什么事情不能放台面上. 拿到往年题自己心底里高兴就得了, 没必要让全天下的人都知道.