2021 年《高等微积分 2》期中参考答案

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 3 题第 (3) 小问 10 分, 第 4 题 10 分, 第 6 题 15 分, 其余各题每小问 5 分; 即使有某些小问无法完成, 也可以使用其结论解决后面的问题.

1 (1) 叙述 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 处可微的定义, 并证明: 如果 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 则其微分为 $df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_{\mathbf{x}_0} \cdot h_i$, 其中 $\mathbf{h} = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbf{R}^n$.

(2) 叙述 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 处展开至二阶的带拉格朗日 (Lagrange) 余项的泰勒 (Taylor) 公式.

解. (1) 如果存在线性函数 $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 使得在 $\mathbf{x}_0$ 附近有 $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{h}) + \alpha(\mathbf{h})$, 且 α 满足 $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} \dfrac{\alpha(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = 0$ (即当 $\mathbf{h} \to 0$ 时, α 是比 $|\mathbf{h}|$ 更高阶的无穷小), 则称 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微.(可微的定义, 2 分)

设 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 将满足上述条件的 L 称为 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的微分, 记作 $df_{\mathbf{x}_0} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. 对非零向量 $\mathbf{q}$, 计算方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\Big|_{\mathbf{x}_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{q}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{L(t\mathbf{q}) + \alpha(t\mathbf{q})}{t} = L(\mathbf{q}) + \lim_{t\to 0}\left(\frac{\alpha(t\mathbf{q})}{|t\mathbf{q}|} \cdot (\pm|\mathbf{q}|)\right) = L(\mathbf{q}).$$

在上式中取 $\mathbf{q} = \mathbf{e}_k$ 为第 k 个坐标方向, 可得 $L(\mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_k}\big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\big|_{\mathbf{x}_0}$.(由可微的定义推导出 $L(\mathbf{e}_k)$ 等于偏导数, 2 分)

结合 L 是线性函数, 即有

$$df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) = L(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{n} h_k L(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\mathbf{x}_0} \cdot h_k. \quad \text{(1分)}$$

(2) 设 $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, 则对任何 $\mathbf{x}$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + J_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} \cdot h_k + \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$. (叙述泰勒公式, 共 5 分) □

2 (1) 设 $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是给定的光滑函数. 已知由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定出光滑的隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2) 对于光滑函数 $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$, 令 $S=\{(x,y,z)|g(x,y,z)=0\}$ 为由方程 $g(x,y,z)=0$ 定义的曲面. 对于点 $(x_0,y_0,z_0)\in S$, 定义曲面 S 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为

$$g_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+g_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+g_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

设 f 是光滑函数. 证明: 曲面 $f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 的所有切平面都经过同一个点 (a,b,c).

解. (1) 对恒等式 $F(x-y,z(x,y))=0$ 求偏导, 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1(x-y,z(x,y))}{F_2(x-y,z(x,y))},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_1(x-y,z(x,y))}{F_2(x-y,z(x,y))}.\quad \text{(每个式子各1 分)}$$

进一步求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_1(x-y,z(x,y))}{F_2(x-y,z(x,y))}\right)\\&=\frac{(F_{11}+F_{12}\frac{\partial z}{\partial x})F_2-F_1(F_{21}+F_{22}\frac{\partial z}{\partial x})}{F_2^2(x-y,z)}\\&=\frac{F_{11}F_2^2-F_{12}F_2F_1-F_1F_{21}F_2+F_1F_{22}F_1}{F_2^3}\\&=\frac{F_{11}F_2^2-2F_{12}F_1F_2+F_{22}F_1^2}{F_2^3}.\quad \text{(3分)}\end{aligned}$$

(2) 令 $g(x,y,z)=f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})$. 由切平面的方程, 只需证明: 对曲面 $f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 上任何一点 (x,y,z), 有

$$(x-a)g_x+(y-b)g_y+(z-c)g_z=0.$$

利用链式法则求偏导可得

$$g_x=f_1'\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)\cdot\frac{1}{z-c}=\frac{1}{z-c}f_1';\quad \text{(1分)}$$

$$g_y=f_2'\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)\cdot\frac{1}{z-c}=\frac{1}{z-c}f_2';\quad \text{(1分)}$$

$$g_z=f_1'\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)\cdot\frac{-(x-a)}{(z-c)^2}+f_2'\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)\cdot\frac{-(y-b)}{(z-c)^2}=-\frac{x-a}{(z-c)^2}f_1'-\frac{y-b}{(z-c)^2}f_2',\quad \text{(2分)}$$

显然满足 $(x-a)g_x+(y-b)g_y+(z-c)g_z=0$.(1 分)

□

3 (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ 的收敛域.

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛. 证明: 存在正整数 N, 使得对 $n>N$ 有 $a_n=0$, 即在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛的幂级数一定是多项式.

(3) 设 f 是开区间 I 上的光滑函数. 假设存在正常数 M,C, 使得对任何正整数 n 与任何 $x\in I$ 都有 $|f^{(n)}(x)|\le MC^nn!$ 证明: f 是 I 上的实解析函数, 即对任何 $x_0\in I$, 存在正数 r, 使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \forall x\in(x_0-r,x_0+r).$$

解. (1) 记该幂级数的系数为 $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4},$$

可得该幂级数的收敛半径为 $R=4$(算出收敛半径 3 分). 在 $x=\pm4$ 处,

$$\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n\right|=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}>1,$$

因而这两点是幂级数的发散点(端点处发散 1 分). 结合这两方面, 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ 的收敛域为 $(-4,4)$(答案 1 分).

(2) 设设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛, 则由一致收敛的 Cauchy 准则可知 $\{a_nx^n\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛到零函数(1 分). 依定义, 对 $\epsilon=\frac{1}{2}$, 存在 N 使得对任何 $n\ge N$ 以及任何 $x\in\mathbf{R}$ 有 $|a_nx^n|<\frac{1}{2}$. 由此可得, 当 $n\ge N$ 时

$$|a_n|\le\frac{1}{2x^n},\quad \forall x>0.\text{(3分)}$$

对 $x\to+\infty$ 取极限, 即得到 $|a_n|=0$(取极限 1 分). 这就证明了在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛的幂级数一定是多项式.

(3) 取正数 r 使得 $(x_0-r,x_0+r)\subset I$ 且 $r<\frac{1}{C}$(2 分). 对每个点 $x\in(x_0-r,x_0+r)$, 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公示可知存在 ξ_n 介于 x_0 与 x 之间, 使得

$$f(x)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \text{(3分)}$$

结合条件可得

$$\left|f(x)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right|\le MC^nr^n=M\cdot(Cr)^n.\quad \text{(3分)}$$

由于 $Cr<1$, 上式表明

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.\quad (2分)$$

□

4 设 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ 是平面上的 $n>1$ 个单位向量, 相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$(即 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_2$ 与 $\mathbf{v}_3$,...,$\mathbf{v}_n$ 与 $\mathbf{v}_1$ 的夹角都是 $\frac{2\pi}{n}$). 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数. 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_i}=0$, 其中 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_i}$ 表示 f 沿 $\mathbf{v}_i$ 的方向导数.

证明*:* 对 C^1 光滑函数 f, 有 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}=\nabla f\cdot\mathbf{v}$(2分), 从而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_k}=\sum_{k=1}^{n}\nabla f\cdot\mathbf{v}_k=\nabla f\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k.\quad (5分)$$

这样, 只需证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$, 这是平面几何中熟知的结论(3分). 如果将向量 $\mathbf{v}_k$ 对应的复数记为 z_k, 则 $z_k=z_1\cdot e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}=\omega^{k-1}$, 其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是 n 次单位根. 由此即得

$$z_1+\cdots+z_n=z_1\cdot(1+\omega+\cdots+\omega^{n-1})=z_1\cdot\frac{1-\omega^n}{1-\omega}=0.$$

□

5 (1) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 且当 $u^2+v^2\to+\infty$ 时 $f(u,v)$ 趋近于 $+\infty$. 证明: f 在 $\mathbf{R}^2$ 上有最小值.

(2) 设坐标原点位于 $\triangle ABC$ 的内部, 点 A,B,C 的坐标分别为 $(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3)$. 定义函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$f(u,v)=e^{p_1u+q_1v}+e^{p_2u+q_2v}+e^{p_3u+q_3v}.$$

证明: 当 $u^2+v^2\to+\infty$ 时 $f(u,v)$ 趋近于 $+\infty$, 由此证明 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上有最小值.

(3) 证明: 第 (2) 问中 f 的最小值点 (u_0,v_0) 满足

$$\begin{cases}p_1e^{p_1u+q_1v}+p_2e^{p_2u+q_2v}+p_3e^{p_3u+q_3v}=0;\\ q_1e^{p_1u+q_1v}+q_2e^{p_2u+q_2v}+q_3e^{p_3u+q_3v}=0.\end{cases}$$

解. (1) 由条件当 $u^2+v^2\to+\infty$ 时 $f(u,v)$ 趋近于 $+\infty$, 可知存在 M, 使得当 $\sqrt{x^2+y^2}>M$ 时有 $f(x,y)\geq f(0,0)$. 由最值定理, 连续函数 f 在有界闭集 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq M^2\}$ 上有最小值. 设 (x_0,y_0) 是 f 在 D 上的最小值点, 则对任何 $(x,y)\in D^c$, 有

$$f(x,y)\geq f(0,0)\geq f(x_0,y_0),$$

这表明 (x_0,y_0) 是 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值点. (5分)

(2) 设 $\angle BOC=2\alpha,\angle COA=2\beta,\angle AOB=2\gamma$, 则 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$. 记 (u,v) 为点 P, 它一定位于 $\angle BOC,\angle COA,\angle AOB$ 中的某一个角内, 作出该角的角平分线, 可得 OP 与该角的某一边 (设为 OD, 这里 D 等于 A,B,C 中的某一个) 的夹角 θ 不超过该角的一半, 后者不超过 $\max\{\alpha,\beta,\gamma\}=\delta$. 由此可得

$$\vec{OP}\cdot\vec{OD}=|OP|\cdot|OD|\cdot\cos\theta\geq|OP|\cdot|OD|\cdot\cos\delta.$$

令 $d=\min\{|OA|,|OB|,|OC|\}$, 上式表明

$$\max\{p_1u+q_1v,p_2u+q_2v,p_3u+q_3v\}\geq|OP|\cdot d\cos\delta,$$

因而有

$$f(u,v)>e^{\max\{p_1u+q_1v,p_2u+q_2v,p_3u+q_3v\}}\geq e^{d(\cos\delta)\sqrt{u^2+v^2}},$$

所以当 $u^2+v^2\to+\infty$ 时有 $f(u,v)$ 趋近于 $+\infty$. (5分)

(3) f 的最小值点 (u_0,v_0) 是 f 的极小值点, 因而是 f 的临界点, 即满足

$$\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}=0.$$

(5分) □

6 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是光滑函数, 满足当 $x^2+y^2=1$ 时有 $f(x,y)=1$, 且在单位圆盘 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq1\}$ 上 $(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2$ 的值处处小于等于 1. 证明:

$$\sqrt{x^2+y^2}\leq f(x,y)\leq 2-\sqrt{x^2+y^2},\quad \forall(x,y)\in D.$$

证明: 对 D 内部的任何点 $P(x,y)$, 令 (x_0,y_0) 为射线 OP 与单位圆周的交点, 即

$$(x_0,y_0)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y).$$

考虑 f 在两点 $(x_0,y_0),(x,y)$ 上的微分中值定理, 存在点 (u,v) 位于这两点确定的线段上, 满足

$$f(x_0,y_0)-f(x,y)=f_x(u,v)(x_0-x)+f_y(u,v)(y_0-y).\quad (5分)$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$\begin{aligned}|f(x_0,y_0)-f(x,y)|&=|\,(f_x(u,v),f_y(u,v))\cdot(x_0-x,y_0-y)\,|\\&\leq\sqrt{f_x^2(u,v)+f_y^2(u,v)}\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}\\&\leq1\cdot(1-\sqrt{x^2+y^2}),\quad (10分)\end{aligned}$$

结合条件 $f(x_0,y_0)=1$ 就得到所要证明的不等式.

□

7 设 $f,g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是光滑映射, 令 $S=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=0\}$ 为 f 的零点集合. 假设对任何 $(x,y,z)\in S$ 有 $g(x,y,z)=0$ 且 $f_z'(x,y,z)\neq 0$, 其中 $f_z'(x,y,z)$ 表示 f 对 z 坐标分量的偏导数.

(1) 证明: 对任何 $(x_0,y_0,z_0)\in S$, 该点处 g 的梯度向量与 f 的梯度向量成比例, 即存在实数 λ 使得 $\nabla g(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.(提示: 由方程 $f(x,y,z)=0$ 将 z 表示成 x,y 的隐函数, 再代入 $g(x,y,z)$)

(2) 定义映射 $Q:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为 $Q(x,y,z)=(x,y,f(x,y,z))$. 给出 Q 在点 (x_0,y_0,z_0) 附近有 C^1 光滑逆映射 Q^{-1} 的充分必要条件, 并说明理由.

(3) 设 $h:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数, 满足对任何 $u,v\in\mathbf{R}$, 有 $h(u,v,0)=0$. 证明: 当 $w\neq 0$ 且 (u,v,w) 趋近于 $(u_0,v_0,0)$ 时, 表达式 $\frac{h(u,v,w)}{w}$ 的极限为 $h_3'(u_0,v_0,0)$, 其中 h_3' 表示 h 对第三个坐标分量的偏导数.

(4) 考虑 $h=g\circ Q^{-1}$. 利用前述 (1), (2), (3) 小问的信息, 证明: 对于给定的点 $(x_0,y_0,z_0)\in S$, 当 $(x,y,z)\notin S$ 且趋近于 (x_0,y_0,z_0) 时, 表达式 $\frac{g(x,y,z)}{f(x,y,z)}$ 的极限为 $\frac{g_z'(x_0,y_0,z_0)}{f_z'(x_0,y_0,z_0)}$.

解. (1) (x_0,y_0,z_0) 是 g 在约束 $f=0$ 下的条件极值点(2 分), 且是 $S=\{f=0\}$ 的光滑点, 由 Lagrange 乘子法, 可知存在实数 λ 使得 $\nabla g(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.(3 分)

或者按照提示, 在 (x_0,y_0,z_0) 附近由方程 $f(x,y,z)=0$ 可将 z 表示为 x,y 的隐函数 $z=z(x,y)$. 由条件可知, 对 (x_0,y_0) 附近的点 (x,y), 有 $g(x,y,z(x,y))=0$, 对此式求偏导可得

$$g_x'(x,y,z(x,y))+g_z'(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad g_y'(x,y,z(x,y))+g_z'(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

取 $(x,y)=(x_0,y_0)$, 结合隐函数定理中隐函数的偏导计算公式

$$\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}=-\frac{f_x'(x_0,y_0,z_0)}{f_z'(x_0,y_0,z_0)},\quad \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{f_y'(x_0,y_0,z_0)}{f_z'(x_0,y_0,z_0)},$$

就得到

$$g_x'(x,y,z(x,y))-g_z'(x,y,z(x,y))\frac{f_x'(x_0,y_0,z_0)}{f_z'(x_0,y_0,z_0)}=0,\quad g_y'(x,y,z(x,y))-g_z'(x,y,z(x,y))\frac{f_y'(x_0,y_0,z_0)}{f_z'(x_0,y_0,z_0)}=0.$$

令 $\lambda=\frac{g_z'(x_0,y_0,z_0)}{f_z'(x_0,y_0,z_0)}$, 上式表明 $\nabla g(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.

(2) 利用反函数定理, Q 在点 (x_0,y_0,z_0) 附近有 C^1 光滑逆映射的充分必要条件是

$$\det J_Q(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

显然有

$$\det J_Q=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\f_x'&f_y'&f_z'\end{pmatrix}=f_z',\quad \text{(2分)}$$

所以, Q 在点 (x_0,y_0,z_0) 附近有 C^1 光滑逆映射的充分必要条件是 $f'_z(x,y,z)\neq 0$.(3 分)

(3) 由微分中值定理, 对任何点 (u,v,w), 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$h(u,v,w)=h(u,v,0)+w\cdot h'_3(u,v,\theta w)=w\cdot h'_3(u,v,\theta w), \quad (3分)$$

注意到 h 是 C_1 光滑的, h'_3 是连续函数, 结合 $\theta\in(0,1)$ 可得: 当 $w\neq 0$ 且 (u,v,w) 趋近于 $(u_0,v_0,0)$ 时, $\frac{h(u,v,w)}{w}=h'_3(u,v,\theta w)$ 极限为 $h'_3(u_0,v_0,0)$.(2 分)

(4) 令 $h=g\circ Q^{-1}$, 则在 $(x_0,y_0,0)$ 附近 $h(u,v,0)=0$, 满足第 (3) 问的条件, 由 (3) 的结论可知当 (u,v,w) 趋近于 $(x_0,y_0,0)$ 时, 函数 $k(u,v,w)=\frac{h(u,v,w)}{w}$ 极限为 $h'_3(x_0,y_0,0)$(1 分). 复合上连续的双射 Q(利用复合极限定理) 可得

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0),(x,y,z)\notin S} k\circ Q(x,y,z)=\lim_{(u,v,w)\to(x_0,y_0,0),w\neq 0} k(u,v,w)=h'_3(x_0,y_0,0). \quad (1分)$$

显然 $k\circ Q(x,y,z)=\frac{g(x,y,z)}{f(x,y,z)}$, 这就得到

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0),(x,y,z)\notin S}\frac{g(x,y,z)}{f(x,y,z)}=h'_3(x_0,y_0,0).$$

下面来计算 $h'_3(x_0,y_0,0)$. 将 Q^{-1} 记作

$$Q^{-1}(u,v,w)=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)).$$

利用链式法则, 对 $h=g\circ Q^{-1}$ 与 $w=f\circ Q^{-1}(u,v,w)$ 求导可得

$$\begin{aligned}
&h'_3(x_0,y_0,0)=g'_x(x_0,y_0,z_0)x'_w+g'_y(x_0,y_0,z_0)y'_w+g'_z(x_0,y_0,z_0)z'_w, \quad (1分)\\
&1=f'_x(x_0,y_0,z_0)x'_w+f'_y(x_0,y_0,z_0)y'_w+f'_z(x_0,y_0,z_0)z'_w, \quad (1分)
\end{aligned}$$

利用 (1) 的结论 $\nabla g(x_0,y_0,z_0)=\frac{g'_z(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}\nabla f(x_0,y_0,z_0)$, 可得

$$h'_3(x_0,y_0,0)=\frac{g'_z(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}\left(f'_x(x_0,y_0,z_0)x'_w+f'_y(x_0,y_0,z_0)y'_w+f'_z(x_0,y_0,z_0)z'_w\right)=\frac{g'_z(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}. \quad (1分)$$

结合起来, 就证明了

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0),(x,y,z)\notin S}\frac{g(x,y,z)}{f(x,y,z)}=\frac{g'_z(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

□