2024 年春季《高等微积分 2》期中参考答案

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 4 题 10 分, 其余每题各 15 分.

1 (1) 求解微分方程 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) 证明：微分方程初值问题 $\begin{cases} y'' = y - y^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ 的解可以表示为

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - \frac{2}{3}t^3}} dt = x.$$

请给出求解过程，注意不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2-\frac{2}{3}t^3}} dt$ 是无法写出解析表达式的。

解. (1) 设 $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} z(x)$，代回原 ODE 可得

$$e^{\frac{1}{2}x^2} z'(x) = xe^{x^2}, \quad z(0) = 1.$$

积分可得

$$z(x) - z(0) = \int_0^x z'(x) dx = \int_0^x xe^{\frac{1}{2}x^2} dx = e^{\frac{1}{2}x^2} - 1,$$

即有 $z(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$。由此知原初值问题的解为 $y = e^{x^2}$。

(2) 记所求的函数 $y(x)$ 为 f, 设其逆映射为 f^{-1}。令 $p(y) = y'(f^{-1}(y))$, 则有 $y'' = p\frac{dp}{dy}$, 由此可得

$$\begin{cases} p\frac{dp}{dy} = y - y^2 \\ p(0) = 1 \end{cases}$$

(化成一阶 ODE，2 分)

这是可分离变量的 ODE，积分可得

$$\int_{p(0)}^{p(y)} pdp = \int_0^y (y-y^2)dy,$$

解得

$$p(y)^2 = 1 + y^2 - \frac{2}{3}y^3,$$

由初值条件 $p(0)=1$ 可知应选取 $p(y)=\sqrt{1+y^2-\frac{2}{3}y^3}$ 这一支。(解出 $p(y)$, 3 分)

即有

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1+y^2-\frac{2}{3}y^3} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

分离变量，并两边积分可得

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2-\frac{2}{3}y^3}} = \int_0^x dx,$$

此即

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-\frac{2}{3}t^3}}dt = x.$$

(得到关于 y 的积分方程，2 分)

□

2 (1) 对实方阵 $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$，求其矩阵指数函数 e^{Ax}。

(2) 求解如下微分方程初值问题:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

解. (1) A 的特征多项式为 $(\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}=0$，特征根为 $\lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$\lambda_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，它们对应的特征向量分别为

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

这样，A 在复数域 $\mathbb{C}$ 中可对角化

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1}.$$

进而可得

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)x} & 0 \\ 0 & e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} ie^{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)x}+ie^{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)x} & -e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)x}+e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)x} \\ e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)x}-e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)x} & ie^{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)x}+ie^{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cos\frac{x}{2} & -e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\sin\frac{x}{2} \\ e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\sin\frac{x}{2} & e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cos\frac{x}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

解法二：注意到

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix},$$

则对 $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$，有 $A^n=\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$。由此可得

$$\begin{aligned} e^{A}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum\frac{x^n}{n!}\cos n\alpha & -\sum\frac{x^n}{n!}\sin n\alpha \\ \sum\frac{x^n}{n!}\sin n\alpha & \sum\frac{x^n}{n!}\cos n\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

利用 *Euler* 公式，有

$$\sum\frac{x^n}{n!}e^{in\alpha}=e^{xe^{i\alpha}}=e^{x\cos\alpha}\left(\cos(x\sin\alpha)+i\sin(x\sin\alpha)\right),$$

代回可得

$$e^{Ax}=e^{x\cos\alpha}\begin{pmatrix} \cos(x\sin\alpha) & -\sin(x\sin\alpha) \\ \sin(x\sin\alpha) & \cos(x\sin\alpha) \end{pmatrix}.$$

对于本题中的 A，有 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，从而所求的矩阵指数函数为

$$e^{Ax}=e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\begin{pmatrix}\cos\frac{x}{2} & -\sin\frac{x}{2}\\ \sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2}\end{pmatrix}.$$

□

3 给定实数 $\alpha\neq\beta$ 与连续函数 $f(x)$，求如下 *Euler* 方程在区间 $(0,+\infty)$ 上的一个特解:

$$x^2y''+(1-\alpha-\beta)xy'+\alpha\beta y=x^2f(x).$$

解. 令 $x=e^t$，则原方程为

$$e^{2t}y''(e^t)+(1-\alpha-\beta)e^ty'(e^t)+\alpha\beta y(e^t)=e^{2t}f(e^t),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

记 $z(t)=y(e^t)$，则 $e^ty'(e^t)=z'(t)$，$e^{2t}y''(e^t)=z''(t)-z'(t)$。这样，上述方程为

$$z''-(\alpha+\beta)z'+\alpha\beta z=e^{2t}f(e^t).\tag{1}$$

这是二阶常系数线性 ODE, 其特征方程为 $\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0$, 特征根为 $\lambda=\alpha,\beta$。设齐次方程的两个基本解为 ϕ_1,ϕ_2，可用常数变易法来求解方程(1)，设解为 $z(t)=c_1(t)\phi_1(t)+c_2(t)\phi_2(t)$，则要求

$$\begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2\\ \phi_1' & \phi_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'\\ c_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ e^{2t}f(e^t)\end{pmatrix},$$

结合 $\phi_1=e^{\alpha t}$ $\phi_2=e^{\beta t}$ 可解得

$$\begin{aligned}c_1(t)&=\int\frac{-\phi_2e^{2t}f(e^t)}{\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2}dt=\int\frac{-e^{2t}f(e^t)}{(\beta-\alpha)e^{\alpha t}}dt,\\ c_2(t)&=\int\frac{\phi_1e^{2t}f(e^t)}{\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2}dt=\int\frac{e^{2t}f(e^t)}{(\beta-\alpha)e^{\beta t}}dt.\end{aligned}\tag{2}$$

这样，得到

$$z(t)=c_1(t)\phi_1(t)+c_2(t)\phi_2(t),\quad y(x)=z(\ln x),$$

即有

$$y(x)=c_1(\ln x)x^{\alpha}+c_2(\ln x)x^{\beta},$$

其中 c_1,c_2 由(2)式给出。 □

4 (1) 证明: 方程 $x+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z+\sin z=0$ 在点 $(0,0,0)$ 附近唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$。

(2) 求上述隐函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处展开至二阶的带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式。

解. (1) 记 $F(x,y,z)=x+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z+\sin z$，则 $F_z=\frac{1}{2}+\cos z$，从而有

$$F_z(0,0,0)=\frac{3}{2}\neq 0.$$

利用隐函数定理可得在 $(0,0,0)$ 附近方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 z 为 x,y 的光滑隐函数。

(2) 对恒等式 $x+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}f(x,y)+\sin f(x,y)=0$ 取偏导，可得

$$1+\frac{1}{2}f_x+f_x\cos f(x,y)=0,\quad y+\frac{1}{2}f_y+f_y\cos f(x,y)=0,$$

从而有

$$f_x=\frac{-1}{\frac{1}{2}+\cos f(x,y)},\quad f_y=\frac{-y}{\frac{1}{2}+\cos f(x,y)}.$$

进一步可计算出二阶偏导:

$$f_{xx}=(-1)(-1)(\frac{1}{2}+\cos f(x,y))^{-2}(-f_x\sin f(x,y))=\frac{-f_x\sin f(x,y)}{(\frac{1}{2}+\cos f(x,y))^2},$$

$$f_{xy}=(-1)(-1)(\frac{1}{2}+\cos f(x,y))^{-2}(-f_y\sin f(x,y))=\frac{-f_y\sin f(x,y)}{(\frac{1}{2}+\cos f(x,y))^2},$$

$$f_{yy}=\frac{(-1)(\frac{1}{2}+\cos f(x,y))+y(-f_y\sin f(x,y))}{(\frac{1}{2}+\cos f(x,y))^2}=\frac{-\frac{1}{2}-\cos f(x,y))-yf_y\sin f(x,y)}{(\frac{1}{2}+\cos f(x,y))^2}.$$

利用上述计算式，可知在 $(x,y)=(0,0)$ 处有

$$f_x(0,0)=-\frac{2}{3},\quad f_y(0,0)=0,\quad f_{xx}(0,0)=f_{xy}(0,0)=0,\quad f_{yy}(0,0)=-\frac{2}{3}.$$

这样，f 在 $(0,0)$ 处的泰勒公式为

$$f(x,y)=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y^2+o(x^2+y^2).$$

□

5 定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(1-\cos\frac{x^2}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}, & \text{如果 } y\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } y=0.\end{cases}$$

(1) 请判断 f 在 $(0,0)$ 处是否连续，需要证明你的断言。

(2) 计算 f 在 $(0,0)$ 处的各个方向导数。

(3) 请判断 f 在 $(0,0)$ 处是否可微，需要证明你的断言。

解. (1) 当 $y \neq 0$ 时，有

$$|f(x,y)| = |1-\cos\frac{x^2}{y}| \cdot \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{x^2+y^2},$$

可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$，可知 f 在 $(0,0)$ 处连续。

(2) 设方向 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$，则

$$\partial_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(v_1 t, v_2 t)}{t}.$$

当 $v_2 = 0$ 时，显然有 $\partial_{\mathbf{v}} f(0,0) = 0$。当 $v_2 \neq 0$ 时，有

$$\partial_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos\frac{v_1^2 t}{v_2})\sqrt{v_1^2+v_2^2}\cdot |t|}{t} = 0,$$

上式最后的等式是由于当 $t \to 0$ 时 $(1-\cos\frac{v_1^2 t}{v_2})$ 趋于零且 $\frac{|t|}{t}$ 有界。

这样，f 在 $(0,0)$ 处的各个方向导数均为零。

(3) f 在 $(0,0)$ 处不可微。用反证法，假设 f 在 $(0,0)$ 处可微。由 (2) 的结论，有 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，结合可微的定义可得

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1-\cos\frac{x^2}{y}),$$

即有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{x^2}{y} = 1$。但考虑 $(x,y) = (t,t^2)$，结合复合极限定理得到

$$1 = \lim_{t\to 0} \cos\frac{t^2}{t^2} = \cos 1,$$

矛盾!

注意，本例中的 f 连续，可导，偏导数满足 $\partial_{\mathbf{v}} f = \nabla f \cdot \mathbf{v}$，但 f 不可微。 $\square$

6 (1) 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中包含原点的开集，且对 D 中任何两点 P, Q，线段 PQ 都包含在 D 中。设 $f: D \to \mathbb{R}$ 可微，且满足 $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上恒等于零。证明：f 在 D 上恒为常数。

(2) 设 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 是 C^1 映射，$\mathbf{x}_0$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一点，已知 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的 Jacobi 矩阵 $J_f(\mathbf{x}_0)$ 的秩为 2(即它有一个 2×2 子式是可逆方阵)。利用隐函数定理证明：存在 $\epsilon > 0$ 以及 C^1 映射 $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$，使得 $\gamma'(0)$ 是非零向量，且对任何 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ 都有 $f(\gamma(t)) = f(\mathbf{x}_0)$.

证明*:* (1) 对任何点 (x, y)，定义一元函数 $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ 为 $g(t) = f(tx, ty)$，则 g 在 $[0,1]$ 上连续。由 f 可微，利用 *chain rule* 可得

$$g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty).$$

对 $t \in (0,1)$，有

$$g'(t) = \frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)\right) = 0.$$

这样，由一元函数的微分中值定理可得 g 是常值函数，特别的 $g(0) = g(1)$，即有 $f(0,0) = f(x, y)$。

(2) 设 f 的分量表示为 $f(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z))$，记 $\mathbf{x}_0 = (a, b, c)$，$f(\mathbf{x}_0) = (y_1, y_2)$。考虑方程组 $(*)$: $\begin{cases} F_1(x,y,z) - y_1 = 0, \\ F_2(x,y,z) - y_2 = 0. \end{cases}$

由于 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的 Jacobi 矩阵满秩，不妨设

$$\det\begin{pmatrix} \partial_y F_1(\mathbf{x}_0) & \partial_z F_1(\mathbf{x}_0) \\ \partial_y F_2(\mathbf{x}_0) & \partial_z F_2(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

利用隐函数定理，方程组 $(*)$ 在点 (a, b, c) 附近确定 y, z 为 x 的 C^1 隐函数 $y = g(x), z = h(x)$，且 $g(a) = b, h(a) = c$。设 g, h 在 a 的开邻域 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 中有定义，定义 $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ 为

$$\gamma(t) = (a + t, g(a + t), h(a + t)),$$

则 γ 是 C^1 映射，且有 $\gamma'(0) = (1, g'(a), g'(b))$ 是非零向量，对 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ 有

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= (F_1(a+t, g(a+t), h(a+t)), F_2(a+t, g(a+t), h(a+t))) \\ &= (y_1, y_2) = f(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

满足题述要求。 □

7 对 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 (指其任意阶偏导函数都存在且连续)$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，定义函数 Δf 为

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}f_{ii}.$$

称 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，如果 Δf 恒等于零。

设 $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是光滑的调和函数，用 ∇u 表示 u 的梯度，$|\nabla u|$ 表示梯度的模长。

(1) 证明如下的 *Bochner's formula*:

$$\frac{1}{2}\Delta\left(|\nabla u|^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}^2,$$

上述右边为 u 的海瑟矩阵的各个矩阵元的平方和。

(2) 利用 *Cauchy-Schwartz* 不等式证明如下的 *Kato* 不等式:

$$\left|\nabla(|\nabla u|)\right|^2\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}^2,$$

上式左边的意思是：令 $g=|\nabla u|$ 为 u 梯度的模长，再令 $h=|\nabla g|^2$ 为 g 梯度的模长平方，h 即为上式左边。

证明: (1) 直接计算，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\left(|\nabla u|^2\right)&=\frac{1}{2}\Delta\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\partial_k\left(\sum_{i=1}^{n}2u_iu_{ik}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(u_{ik}u_{ik}+u_iu_{ikk}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}u_{ik}^2+\sum_{i=1}^{n}u_i\sum_{k=1}^{n}u_{kki},\end{aligned}\tag{3}$$

上式最后的等式交换了对 i 与 k 的求和次序，且用到了光滑函数 u 的 *Clairaut-Schwartz* 定理 $u_{ikk}=u_{kki}$。由于 u 调和，有

$$\sum_{k=1}^{n} u_{kk}=0,$$

此恒等式对 x_i 求偏导可得

$$\sum_{k=1}^{n} u_{kki}=0,$$

代回(3)式即得证 *Bochner's formula*。

(2) 记 $A=\sum_{i=1}^{n} u_i^2$，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\left|\nabla(|\nabla u|)\right|^2 &= \left|\nabla\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2}\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\partial_j(\sum_{i=1}^{n} u_i^2)^{1/2}\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i u_{ij}}{\sqrt{A}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i u_{ij}\right)^2 \\
&\le \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} u_{ij}^2\right) \quad \text{(Cauchy-Schwartz)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^2,
\end{aligned} \tag{4}$$

这就完成了 *Kato* 不等式的证明。

□