清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A（2） B卷 2025年4月12日 9:50-11:50

系名＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿

一、 填空题（每个空 3 分，共 10 题）（**请将答案直接写在答题卡相应划线处！**）

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处可微，且 $f(1,2)=3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1$. 记 $g(x)=f(x,-1+f(x,x^2+1))$，则 $g'(1)=$＿＿＿＿＿＿。

2. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0}}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$＿＿＿＿＿＿。

3. 函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $(2,-1,2)$ 方向的方向导数为＿＿＿＿＿＿。

4. 设 $\begin{cases} u=\dfrac{2y^2}{x} \\ v=\dfrac{x^2}{y} \end{cases}$，则其Jacobi矩阵的行列式 $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=$＿＿＿＿＿＿。

5. 曲面 $\mathrm{e}^{xyz}=x+yz$ 在点 $(1,2,0)$ 的一个单位法向量为＿＿＿＿＿＿。

6. 曲线 $\begin{cases} \mathrm{e}^x+\cos y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ 在点 $(0,0,-2)$ 的一个单位切向量为＿＿＿＿＿＿。

7. $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{1+x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 带有 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为＿＿＿＿＿＿。

8. 设 $z=z(x,y)$ 是方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 确定的一个隐函数，且满足 $z(1,1)=1$，则在点 $(1,1)$ 处 $\mathrm{d}z=$＿＿＿＿＿＿。

9. 设 $f(x)=\int_0^{x^2+1}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t$，则 $f'(0)=$＿＿＿＿＿＿。

10. 设函数 $f(y)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^y}\mathrm{d}x$ 在区间 I 连续，则最大区间 $I=$＿＿＿＿＿＿。

二、解答题（共 7 题）（**请写出详细的计算过程和必要的根据！**）

11. （10 分）设 $f(u)\in C^{(2)}$, 且 $z=f(e^x\sin y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$, 求 $f(u)$.

12. （10 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 请回答下列问题，并说明理由。

(I) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

(II) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否存在偏导数？若存在，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(III) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？若可微，求 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的全微分。

13. （10 分）已知 $b>a>0$, 计算 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$.

14. （10 分）利用 Lagrange 乘子法求曲线段 $x^3-3xy+y^3=0$ $(x\geq 0, y\geq 0)$ 上的点到原点距离的最大值。

15. （10 分）(I) 用隐函数定理证明 $z^3-2xz+y=0$ 在点 $(1,1,1)$ 附近确定了一个 $C^{(2)}$ 类隐函数 $z=z(x,y)$；

(II) 求函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)=(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式。

16. （15 分）设 $f(x,y)=e^{xy}+\dfrac{x^2+y^2}{2e}$.

(I) 求 $f(x,y)$ 的所有驻点，讨论驻点是否为极值点，并判断极值点类型。

(II) 求 $f(x,y)$ 的值域。

17. （5 分）设 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续可微，且满足对任意 (x,y) 都有 $u'_x(x,y)=v'_y(x,y)$, $u'_y(x,y)=-v'_x(x,y)$, $u(x,y)^2+v(x,y)^2=$ 常数。证明：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均为常数函数。