2023 年秋季《高等微积分 1》期中试卷

2023 年 11 月 18 日 $9:50-11:50$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题 10 分, 其余每题各 15 分.

1 (1) 计算函数极限

$$\lim_{x\to 0+}\left((\frac{\sqrt{x}}{2})^m e^{1/\sqrt{x}}\right)$$

的值, 其中 m 是给定的实数.

(2) 求函数 $(1+x)^{1/x}$ 的导函数与二阶导函数.

证明: (1) 令 $\frac{1}{\sqrt{x}}=y$, 利用复合极限定理可得

$$\lim_{x\to 0+}\left((\frac{\sqrt{x}}{2})^m e^{1/\sqrt{x}}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{(2y)^m}.$$

熟知 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{(2y)^m}{e^y}=0$, 可得所求的极限

$$\lim_{x\to 0+}\left((\frac{\sqrt{x}}{2})^m e^{1/\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

或者说所求的极限不存在.

(2) 记 $f(x)=(1+x)^{1/x}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

利用链式法则可得

$$f'(x)=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2}=f(x)\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}.$$

进一步再求导可得

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= f'(x)\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}+f(x)\cdot\left(\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\right)' \\
&= f(x)\cdot\left(\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\right)^2+f(x)\cdot\frac{(\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x})x^2-(\frac{x}{1+x}-\ln(1+x))2x}{x^4} \\
&= f(x)\cdot\left(\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\right)^2+f(x)\cdot\frac{-\frac{x^3}{(1+x)^2}-(\frac{x}{1+x}-\ln(1+x))2x}{x^4} \\
&= f(x)\cdot\frac{\ln^2(1+x)+\frac{2x^2}{1+x}\ln(1+x)-\frac{x^2+3x^3}{(1+x)^2}}{x^4}.
\end{aligned}
$$

□

2 (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{p}{n})^n$ 的值, 其中 p 是给定的实数.

(2) 定义数列 $x_0=1$ 且

$$x_n=\frac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}},\quad \forall n\geq 1.$$

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求出此极限的值.

解. (1) 利用 Heine 定理与复合极限定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{p}{n})^n=\lim_{t\to 0}(1-pt)^{1/t}=\lim_{u\to 0}\left((1+u)^{1/u}\right)^{-p}=e^{-p}.$$

(2) 由 $x_0>0$ 可知所有的 x_n 都是正数. 考虑完备度量空间 $(\mathbb{R}_{\geq 0}, d(x,y)=|x-y|)$, 及其上的自映射 $T(x)=\frac{3+2x}{3+x}=2-\frac{3}{3+x}$, 有

$$|T(x)-T(y)|=\frac{3|x-y|}{(x+3)(y+3)}\leq\frac{1}{3}|x-y|,$$

说明 T 是压缩映射.

在压缩映射定理中我们证明了: 对任何初值 x_0, 序列 $\{x_n=T^{(n)}(x_0)\}$ 是收敛的, 此序列就是题述序列.

设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 由极限不等式可知 $A\geq 0$. 注意到

$$A=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}}=\frac{3+2A}{3+A},$$

解得 $A = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, 结合 $A \geq 0$ 可得 $A = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, 这就是所求的极限值.

$\square$

3 设映射 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 处处可导.

(1) 求 $\ln f(x)$ 的导函数.

(2) 计算极限 $\lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{1/h}$ 的值.

解. (1) 利用链式法则可得

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

(2) 利用导数的定义与 (1) 的结果, 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{h} \\
&= x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{hx} \\
&= x \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\ln f(x+u) - \ln f(x)}{u} \\
&= x \cdot (\ln f(x))' \\
&= \frac{xf'(x)}{f(x)}.
\end{aligned}$$

进而可得

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{1/h} &= \lim_{h\to 0} \exp\left(\frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)}\right) \\
&= \exp\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right) \\
&= e^{xf'(x)/f(x)}.
\end{aligned}$$

$\square$

4 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$.

(1) 请叙述 f 在 $x=0$ 处可微的定义.

(2) 利用 (1) 的结论, 求如下极限式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$$

的值, 用 f 的导数表示.

解. (1) 由 f 在 $x=0$ 处可导, 可知 f 在 $x=0$ 处可微, 即有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\alpha(h)=f'(0)h+\alpha(h),\ \text{且}\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0.$$

(2) 由 (1) 的结论, 有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})=\sum_{k=1}^{n}\left(f'(0)\frac{k}{n^2}+\alpha(\frac{k}{n^2})\right)=\frac{n+1}{2n}f'(0)+\sum_{k=1}^{n}\alpha(\frac{k}{n^2}).$$

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0$, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任何 $0<|h|<\delta$ 有 $|\frac{\alpha(h)}{h}|<\epsilon$. 取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1$, 则对任何 $n\geq N$, 对每个 $1\leq k\leq n$ 有 $0<\frac{k}{n^2}\leq\frac{1}{n}<\delta$, 因而有

$$|\frac{\alpha(\frac{k}{n^2})}{\frac{k}{n^2}}|<\epsilon.$$

由此可得

$$|\sum_{k=1}^{n}\alpha(\frac{k}{n^2})|\leq\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n+1}{2n}\epsilon\leq\epsilon,$$

这表明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha(\frac{k}{n^2})\right)=0,$$

代回可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}f'(0)+\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha(\frac{k}{n^2})\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

□

5 (1) 设 $h:[0,1)\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 证明: h 在区间 $[0,1)$ 上一致连续的充分必要是极限 $\lim\limits_{x\to 1-} h(x)$ 存在.

(2) 设连续映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有 $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$. 证明: f 的像集是 $\mathbb{R}$.

证明: (1) 充分性. 若极限 $\lim\limits_{x\to 1-} h(x)$ 存在, 则 h 可扩充为 $[0,1]$ 上的连续函数

$$\widetilde{h}(x)=\begin{cases} h(x), & \text{当 } 0\leq x<1 \text{ 时} \\ \lim\limits_{x\to 1-} h(x), & \text{当 } x=1 \text{ 时}. \end{cases}$$

由于有界闭区间上的连续函数都一致连续, 可知 $\widetilde{h}$ 在 $[0,1]$ 上一致连续, 特别的 $\widetilde{h}$ 在子区间 $[0,1)$ 上也一致收敛, 即有 h 在区间 $[0,1)$ 上一致连续.

必要性. 设 h 在区间 $[0,1)$ 上一致连续, 则对每个正数 ϵ, 存在正数 δ, 使得对任何 $|x-y|<\delta$, 都有 $|h(x)-h(y)|<\epsilon$. 这样, 对任何 $x_1,x_2\in(1-\delta,1)$, 有 $|x_1-x_2|<\delta$, 进而有 $|h(x_1)-h(x_2)|<\epsilon$. 利用函数极限的 Cauchy 收敛准则可得极限 $\lim\limits_{x\to 1-} h(x)$ 存在.

(2) 由条件, 若 $f(x)=f(y)$, 则 $0=|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$, 可得 $x=y$, 这表明 f 是单射. 结合 f 连续可知 f 严格单调. 不妨设 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增. 结合条件可知对任何正数 K 有 $f(K)\geq f(0)+K$, 表明 $\mathrm{Im}(f)$ 无上界. 类似的, 有 $f(-K)\leq f(0)-K$, 表明 $\mathrm{Im}(f)$ 无下界.

这样, 对任何 y 存在 x_1,x_2 使得 $f(x_1)<y<f(x_2)$, 再由介值定理可得 $y\in\mathrm{Im}(f)$. 由 y 的任意性可得 $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$.

□

6 对于由复数构成的无穷数列 $\{z_n=x_n+iy_n\}_{n=1}^{\infty}$(其中 $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位), 定义其极限为

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty} x_n+i\cdot\lim_{n\to\infty} y_n.$$

对复数 $z=x+iy$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n=e^x(\cos y+i\sin y).$$

证明: 当 n 充分大时, $1+\frac{z}{n}$ 的实部 $1+\frac{x}{n}$ 是正数, 可知 $1+\frac{z}{n}$ 的幅角为

$$\arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}=\arctan\frac{y}{n+x},$$

即有

$$1+\frac{z}{n}=\left((1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2\right)^{1/2}\cdot e^{i\arctan\frac{y}{n+x}}.$$

进而得到

$$(1+\frac{z}{n})^n=\left((1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2\right)^{n/2}\cdot e^{in\arctan\frac{y}{n+x}}. \tag{1}$$

我们分别来计算上式中模长与幅角的极限.

(1) 利用课上证明过的命题: 若 $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=0, \lim\limits_{t\to 0}f(t)g(t)=K$, 则有 $\lim\limits_{t\to 0}(1+f(t))^{g(t)}=e^K$, 结合 Heine 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2\right)^{n/2}=\lim_{t\to 0+}(1+2xt+x^2t^2+y^2t^2)^{1/2t}=e^x.$$

(2) 利用 Heine 定理以及复合极限定理, 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(n\arctan\frac{y}{n+x}\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ny}{n+x}\cdot\frac{\arctan\frac{y}{n+x}}{\frac{y}{n+x}}\right)\\
&=y\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{y}{n+x}}{\frac{y}{n+x}}\\
&=y\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\arctan u}{u}\\
&=y\cdot\lim_{w\to 0}\frac{w}{\tan w}\\
&=y\cdot\lim_{w\to 0}\left(\frac{w}{\sin w}\cdot\cos w\right)\\
&=y.
\end{aligned}$$

将这两个结果代回(1)式可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n=e^x(\cos y+i\sin y).$$

□

7 (1) 设 B 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都属于 B. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in B$.

(2) 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足如下条件:

(i) 对任何两点 a,b, 若 $f(a)<v<f(b)$, 则存在介于 a,b 之间的点 c 使得 $f(c)=v$(即 f 满足介值定理的结论);

(ii) 对任何 c, 原像集 $f^{-1}(\{c\})=\{x\in\mathbb{R}|f(x)=c\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 的闭子集.

证明: f 是连续映射.(提示: 对连续性的 $\epsilon-\delta$ 定义用反证法)

证明: (1) 记 $y=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 用反证法, 假设 $y\notin B$, 即 $y\in B^c$. 由 B 是闭集可知 B^c 是开集, 从而存在 $B_r(y)\subseteq B^c$. 但由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y$ 的定义可知, 存在正整数 N, 使得对 $n\geq N$ 有 $|x_n-y|<r$, 特别的 $x_N\in B\cap B_r(y)$, 这与 $B_r(y)\subseteq B^c$ 矛盾!

(2) 我们来证明 f 在每点 x_0 处连续. 用反证法, 假设 f 在 x_0 处不连续, 则存在正数 ϵ, 使得对任何正数 δ, 都存在 $|x-x_0|<\delta$ 满足 $|f(x)-f(x_0)|>\epsilon$. 特别的, 对每个正整数 n 存在 $|u_n-x_0|<\frac{1}{n}$ 且 $|f(u_n)-f(x_0)|>\epsilon$. 指标 n 分两类: 一类满足 $f(u_n)>f(x_0)+\epsilon$, 一类满足 $f(u_n)<f(x_0)-\epsilon$. 必有一类指标有无穷多个, 不妨设是第一类指标有无穷多个, 则存在 $\{u_n\}$ 的子序列 $\{u_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$|u_{i_k}-x_0|<\frac{1}{i_k},\quad f(u_{i_k})>f(x_0)+\epsilon.$$

注意到 $f(x_0)+\epsilon$ 介于 $f(x_0)$ 与 $f(u_{i_k})$ 之间, 利用条件 (i) 可得存在 x_k 介于 x_0 与 u_{i_k} 之间使得 $f(x_k)=f(x_0)+\epsilon$. 令 $c=f(x_0)+\epsilon$, $B=f^{-1}(\{c\})$, 则 B 是闭集且 $x_k\in B$. 由于

$$|x_k-x_0|\leq|u_{i_k}-x_0|\leq\frac{1}{i_k},$$

可得 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k=x_0$. 利用第 (1) 小问的结论可得 $x_0\in B$, 即有 $f(x_0)=c=f(x_0)+\epsilon$, 矛盾! $\square$