2023 年秋季《高等微积分 1》期末试卷

2024 年 1 月 14 日 $9:00-11:00$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 4 题 10 分, 其余每题各 15 分.

1 (1) 叙述任何版本的*牛顿莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式*, 并给出证明.

(2) 叙述*定积分的换元公式*, 并给出证明.

解. (1) 牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式为如下的定理: 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是可积函数, $F\in C([a,b])$ 且 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式的证明: 设 $x_0=a<x_1<...<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的任何剖分. 对每个 $1\le i\le n$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\cdot\Delta x_i=f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

由此可得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

当 $\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时, 对上式两端取极限, 可得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

注意到 f 在 $[a,b]$ 上可积, 上式右边的极限值为 $\int_a^b f(x)dx$, 这就证明了

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

或者有如下稍微弱一点的版本: 设 $f \in C([a,b])$, $F \in C([a,b])$ 且 $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

弱版本牛顿莱布尼兹公式的证明: 令 $S(x) = \int_a^x f(s)ds$. 由变上限积分定理有 $S \in C([a,b])$ 且 $S'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$. 定义函数 $H(x) = F(x) - S(x)$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$H(b) - H(a) = (b-a) \cdot H'(\xi) = (b-a) \cdot (F'(\xi) - S'(\xi)) = 0,$$

化简即得

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(2) 定积分的换元公式为如下的定理: 设 I, J 是区间, $\varphi \colon I \to J$ 有连续的导函数, $f \in C(J)$. 设 $A, B \in I, a, b \in J$ 满足 $a = \varphi(A), b = \varphi(B)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

换元公式的证明: 考虑 f 的变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(s)ds$, 则

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in J.$$

由链式法则, 有

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad \forall t \in I.$$

这样, 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}
&\int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_A^B \\
=&F(\varphi(B)) - F(\varphi(A)) = F(b) - F(a) \\
=&\int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

$\square$

2 (1) 计算极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)-x}{\sin x - x}.$$

(2) 求函数 $f(x)=\ln(1+x)-\sin x$ 在 $x=0$ 处带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求余项是 $o(x^3)$, 可引用熟知的结论, 不要求证明.

(3) 确定广义积分

$$\int_1^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\sin\frac{1}{x}\right)dx$$

的收敛发散性, 并说明理由.

解. (1) 两次使用 $\frac{0}{0}$ 型洛必达法则, 可得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)-x}{\sin x - x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x^2}(-2x)}{-\sin x}=2.$$

(2) 熟知当 $x\to 0$ 时有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

由此可得

$$f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

(3) 利用 (2) 的结果有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln(1+\frac{1}{x})+\sin\frac{1}{x}}{1/x^2}=\lim_{y\to 0+}\frac{-\ln(1+y)+\sin y}{y^2}=\frac{1}{2},$$

表明当 x 充分大时函数 $-\ln(1+\frac{1}{x})+\sin\frac{1}{x}$ 是正值函数. 利用比较定理的极限形式可得无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\left(-\ln(1+\frac{1}{x})+\sin\frac{1}{x}\right)dx$$

收敛, 乘以 (-1) 倍之后可知题述广义积分收敛. □

3 对正整数 n 定义 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$.

(1) 证明: 对 $n \geq 2$ 有 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$.

(2) 利用斯特林公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 的值.(允许不使用斯特林公式直接计算极限)

解. (1) 令 $x = \sin y$ 换元, 可得

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n y\cos y(\cos y dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n y(1-\sin^2 y)dy = I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+2}I_n,$$

其中 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$, 满足递推关系 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 由此知对 $n \geq 2$ 有

$$\frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{\frac{1}{n+2}I_n}{\frac{1}{n}I_{n-2}} = \frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n+2}.$$

(2) 熟知

$$I_n = \begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当 } n \text{ 是奇数时},\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数时},\end{cases}$$

利用上式及斯特林公式, 我们来证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n-1}} = 1, \tag{1}$$

由此即可得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{I_n}{I_{n-1}} = 1.$$

极限式(**??**)的证明如下. 当 $n=2m$ 是偶数时, 有

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m-1}} &= \lim_{m\to+\infty}\frac{((2m-1)!!)^2}{(2m)!!(2m-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{((2m)!)^2}{(2^m m!)^3(2^{m-1}(m-1)!)}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{\left((2m/e)^{2m}\sqrt{4\pi m}\right)^2}{2^{4m-1}\left((m/e)^m\sqrt{2\pi m}\right)^3((m-1)/e)^{m-1}\sqrt{2\pi(m-1)}}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&= \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{e}(1+\frac{1}{m-1})^{m-\frac{1}{2}}\\
&= \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{e}(1+\frac{1}{m-1})^{m-1}\sqrt{1+\frac{1}{m-1}}\\
&= \frac{1}{e}\cdot e\cdot 1\\
&= 1.
\end{aligned}$$

进而可得当 $n=2m+1$ 为奇数时, 有

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} = \lim_{m\to+\infty}\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{I_{2m-1}}{I_{2m}} = 1.$$

□

4 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上处处可导, 且 $f(b)>f(a)$. 记 $c=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 证明: 如下两个断言中必有一个断言成立:

(1) 对任何 $x\in[a,b]$, 都有 $f(x)-f(a)=c(x-a)$;

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)>c$.

证明: 假设 (2) 不成立, 来证明必有 (1) 成立. 此时, 对每个 $\xi\in(a,b)$ 有 $f'(\xi)\le c$. 对任何 $x\in(a,b)$, 利用 *Lagrange 中值定理*可知存在 $\xi\in(a,x)$ 与 $\eta\in(x,b)$ 使得

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi),\quad f(b)-f(x)=(b-x)f'(\eta).$$

结合 $f'(\xi)\le c, f'(\eta)\le c$ 可得

$$f(x)-f(a)\le c(x-a),\quad f(b)-f(x)\le c(b-x),$$

两式相加可得

$$f(b)-f(a)=(f(x)-f(a))+(f(b)-f(x))\leq c(x-a)+c(b-x)=c(b-a)=f(b)-f(a),$$

从而上述不等式全取等号. 特别的, 有 $f(x)-f(a)=c(x-a)$. $\square$

5 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有连续的二阶导数. 证明:

(1) 若 $f(0)=0$, 则存在 $\xi\in(-a,a)$ 使得

$$f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}.$$

(2) 若 f 在 $(-a,a)$ 中有极值点, 则存在 $\eta\in(-a,a)$ 使得

$$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}\big|f(a)-f(-a)\big|.$$

(提示: 找合适点 x_0, 分别对 $-a,a$ 用 x_0 处的二阶泰勒公式)

证明: (1) 用反证法, 假设结论不成立. 对连续函数 f'' 用介值定理, 可知或者 f'' 在 $(-a,a)$ 上恒大于 $\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$, 或者 f'' 在 $(-a,a)$ 上恒小于 $\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$. 不妨设是前者. 利用泰勒公式, 存在 $\xi\in(0,a)$ 与 $\eta\in(-a,0)$, 使得

$$f(a)=f(0)+f'(0)a+\frac{1}{2}f''(\xi)a^2,\quad f(-a)=f(0)-f'(0)a+\frac{1}{2}f''(\eta)a^2.$$

两式相加可得

$$f(a)+f(-a)=\frac{1}{2}f''(\xi)a^2+\frac{1}{2}f''(\eta)a^2>a^2\cdot\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}=f(a)+f(-a),$$

矛盾!

(2) 用反证法, 假设对任何 $\xi\in(-a,a)$ 都有 $|f''(\eta)|<\frac{1}{2a^2}\big|f(a)-f(-a)\big|$.

设 x_0 是 f 在 $(-a,a)$ 中的极值点, 则 $f'(x_0)=0$. 利用泰勒公式, 存在 $\xi\in(x_0,a)$ 与 $\eta\in(-a,x_0)$, 使得

$$f(a)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2,\quad f(-a)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(-a-x_0)^2.$$

两式相减可得

$$\begin{aligned}|f(a)-f(-a)| &= |\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\eta)(-a-x_0)^2| \\ &< \frac{1}{4a^2}\big|f(a)-f(-a)\big|\cdot\big((a-x_0)^2+(a+x_0)^2\big) \\ &= \frac{1}{4a^2}\big|f(a)-f(-a)\big|\cdot(2a^2+2x_0^2) \\ &< |f(a)-f(-a)|,\end{aligned}$$

矛盾! □

6 (1) 求不定积分

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx.$$

(2) 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$. 计算

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx,$$

需要给出计算过程.(提示: 视 $\frac{1}{x^2}=(-\frac{1}{x})'$, 再用分部积分公式)

解. (1) 利用不定积分的分部积分公式, 可得

$$\begin{aligned}&\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx \\ =&\int(\frac{e^{2x}}{2})'\arctan\sqrt{e^x-1}dx \\ =&\frac{e^{2x}}{2}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{e^x-1})^2+1}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx \\ =&\frac{e^{2x}}{2}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int\frac{e^{2x}}{4\sqrt{e^x-1}}dx.\end{aligned}$$

令 $\sqrt{e^x-1}=y$, 则 $x=\ln(1+y^2)$, 利用换元公式可得

$$\begin{aligned}\int\frac{e^{2x}}{4\sqrt{e^x-1}}dx &= \int\frac{(y^2+1)^2}{4y}\cdot\frac{2y}{1+y^2}dy \\ &= \int\frac{y^2+1}{2}dy \\ &= \frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y+C \\ &= \frac{1}{6}(e^x-1)^{3/2}+\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C.\end{aligned}$$

代回得到所求的不定积分为:

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{e^{2x}}{2}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{3/2}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C.$$

(2) 利用分部积分公式, 可得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}(-\frac{1}{x})'\sin^2 xdx=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx\\&=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\right)+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{2x}d(2x)\\&=1\cdot0+\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy\\&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

7 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的二阶导数. 证明: $f''(x)$ 处处非负的充分必要条件是: 对任何 $a<b$ 有

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

证明: 必要性. 设 f'' 处处非负, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上是下凸函数, 从而 f 的图像位于切线上方, 即有

$$f(x)\ge f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}),\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

积分得到

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b\left(f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})\right)dx=f(\frac{a+b}{2})(b-a),$$

即有

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

充分性. 用反证法, 假设存在点 c 使得 $f''(c)<0$. 由 f'' 的连续性, 存在 $a<c<b$, 使得 f'' 在区间 $[a,b]$ 中处处小于零, 由此知 f' 在 $[a,b]$ 中严格递减.

对每 $x \in (\frac{a+b}{2}, a]$, 利用 *Lagrange* 中值定理, 存在 $\xi \in (\frac{a+b}{2}, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(\frac{a+b}{2})}{x - \frac{a+b}{2}} = f'(\xi),$$

结合 $f'(\xi) < f'(\frac{a+b}{2})$, 得到

$$f(x) < f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2}), \quad \forall x \in (\frac{a+b}{2}, a].$$

类似的, 对 $x \in [a, \frac{a+b}{2})$, 存在 $\eta \in (x, \frac{a+b}{2})$ 使得

$$\frac{f(x) - f(\frac{a+b}{2})}{x - \frac{a+b}{2}} = f'(\eta) > f'(\frac{a+b}{2}).$$

由于此时 $x - \frac{a+b}{2} < 0$, 上式化简后得到

$$f(x) < f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2}), \quad \forall x \in [a, \frac{a+b}{2}).$$

这样, 对任何 $x \in [a,b] \backslash \{\frac{a+b}{2}\}$ 都有 $f(x) < f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2})$. 由于此不等式两边都是连续函数, 积分后保持严格不等式, 即有

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b \left(f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2}) \right) dx = (b-a) f(\frac{a+b}{2}),$$

与条件矛盾!

□