2025 年秋季《高等微积分 1》期末 A 卷

2026 年 1 月 16 日 14 : 30 – 16 : 30

本试卷分两页，共七道试题。

1 对正数 t，定义 $V(t)$ 为平面曲线 $y = xe^{-x}(0 \leqslant x \leqslant t)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

(1)（9 分）求极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$ 的值。

(2)（6 分）求出函数 $V(t)$ 的所有拐点（其两侧函数的上下凸性相反的点）。

2 (1)（8 分）求数列极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln 1 + 2\ln 2 + 3\ln 3 + \cdots + n\ln n}{n^2} - \frac{\ln n}{2}\right).$$

(2)（7 分）判断反常积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ 的收敛性（发散、绝对收敛、条件收敛之一），并请给出证明。

3 (1)（6 分）求微分方程 $y' + y = \frac{x^2}{2}$ 的所有解。

(2)（6 分）求微分方程 $y' = xe^y$ 的所有解。

(3)（3 分）仿照常数变易法，求微分方程 $y' = xe^y + 1$ 的所有解。

4 (1)（2 分）写出平面曲线 $x^3+y^3=3xy$ 的极坐标方程。

(2)（5 分）证明 $x^3+y^3=3xy$ 在第一象限围成一个有界区域 D。

(3)（8 分）求有界区域 D 的面积。（提示：令 $t=\tan\theta$ 用换元公式，其中 θ 是极角）

5 (1)（8 分）设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 处处都有 3 阶导数，且满足 $f(0)=0$。求实数 a，使得函数

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ a, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上连续，并求出 $g''(0)$.

(2)（7 分）设 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 处处都有 2 阶导数，且满足条件 $h(0)=h'(0)=h'(1)=0$ 与 $h(1)=1$。证明：存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $|h''(\xi)|\geqslant 4$.

6 对 $x>1$，定义 $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

(1)（4 分）确定 F 的单调性。

(2)（6 分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1+}F(x)$.

7 (1)（5 分）求以下微分方程初值问题的解：

$$\begin{cases}y''-5y'+6y=0,\\ y(0)=1,\quad y'(0)=0.\end{cases}$$

(2)（5 分）设 $h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续，$\varphi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 可导，且满足对 $x\geqslant 0$ 有 $\varphi'(x)+h(x)\varphi(x)\geqslant 0$. 证明：对 $x\geqslant 0$ 有

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)e^{-\int_0^x h(t)dt}.$$

(3)（5 分）若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 处处都有 2 阶导数，满足 $f(0)=1, f'(0)=0$，且

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0,\quad \forall x\geqslant 0.$$

证明 $f(x)\geqslant g(x)$（$\forall x\geqslant 0$），其中 $g(x)$ 是 (1) 中的解。