2023年秋季学期复变函数期末考试（回忆版）

试卷请勿带出考场，考后交回！每题需要写出解题步骤，猜答案无效！

2023年11月18日　9:50-11:50

一、（10分） 求环路积分$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{Re}\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，$|z|\neq 1$的值.

二、（15分） 已知函数$u(x,y)$和$v(x,y)$分别为解析函数w_1的实部与虚部，则u^2和uv能否作解析函数w_2的实部？为什么？如果可以，求出w_2的表达式（可以用w_1、u、v和常数表示）.

三、（31分） 已知函数$w(z)=z\ln^{-2}\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$，割线为$z=\mathrm{i}$与$z=-\mathrm{i}$的连线，并规定割线右岸宗量辐角为$-\pi$.

1. （11分）求$w(\pm 1)$的值；
2. （17分）求函数在环域$|z|>1$的Laurent展开（写出系数非零的前五项即可）；
3. （3分）求函数在无穷远处的留数.

四、（17分）

1. （5分）证明：$\psi(z+n)-\psi(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}$；
2. （6分）证明：$\psi(z)-\psi(-z)=-\frac{1}{z}-\pi\cot\pi z$；
3. （6分）根据前面的结果求解无穷级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$，其中$a$是正实数.

   提示：$\lim_{n\to\infty}[\psi(z+n)-\ln n]=0$

五、（30分） 用留数定理计算下列积分.

1. （14分）$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1+\epsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta,\ n\in\mathrm{Z}^+,\ \epsilon=\frac{3}{5}$；
2. （16分）$\int_0^{\infty}\frac{x\ln x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

说明：以下解答并非官方答案，欢迎批评指正！这套题在考场上还是比较阴间的，但回过头来看其实也没有想象的那么难

题 1.（10分）求环路积分$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{Re}\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，$|z|\neq 1$的值.

解答.

注意到，在环路$|\zeta|=1$上，有

$$\mathrm{Re}\zeta=\frac{\zeta^2+1}{2\zeta} \tag{1}$$

则环路积分为

$$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{Re}\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^2+1}{2\zeta\left(\zeta-z\right)}\mathrm{d}\zeta \tag{2}$$

当$|z|>1$时，$\frac{\zeta^2+1}{2\left(\zeta-z\right)}$在$|\zeta|=1$围道内为解析函数，由Cauchy积分公式，有

$$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^2+1}{2\zeta\left(\zeta-z\right)}\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\zeta^2+1}{2\left(\zeta-z\right)}|_{\zeta=0}=-\frac{\pi\mathrm{i}}{z} \tag{3}$$

当$0<|z|<1$时，

$$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^2+1}{2\zeta\left(\zeta-z\right)}\mathrm{d}\zeta=\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^2+1}{2z}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta \tag{4}$$

显然有$\frac{\zeta^2+1}{2z}$在$|\zeta|=1$围道内为解析函数，由Cauchy积分公式，有

$$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^2+1}{2z}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\zeta^2+1}{2z}|_{\zeta=z}-\frac{\zeta^2+1}{2z}|_{\zeta=0}\right)=\pi\mathrm{i}z \tag{5}$$

当$|z|=0$时，

$$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^2+1}{2\zeta\left(\zeta-z\right)}\mathrm{d}\zeta=\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^2+1}{2\left(\zeta-0\right)^2}\mathrm{d}\zeta \tag{6}$$

显然有$\frac{\zeta^2+1}{2}$在$|\zeta|=1$围道内为解析函数，由解析函数的高阶导数可知，

$$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^2+1}{2\left(\zeta-0\right)^2}\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\zeta^2+1}{2}\right)'|_{\zeta=0}=0 \tag{7}$$

符合$0<|z|<1$结果. 综合不同情况，可以得到

$$\oint_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{Re}\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}-\frac{\pi\mathrm{i}}{z}, & |z|>1,\\ \pi\mathrm{i}z, & |z|<1\end{cases} \tag{8}$$

说明：本题的关键就是式(1)的变换，由于Reζ并不是解析函数，因此直接使用Cauchy积分公式的作法是错误的。另外，由于本题并未要求具体解法，因此在完成式(1)的变换后，也可以直接用留数定理进行后续计算.

题 2.（15分）已知函数$u\left(x,y\right)$和$v\left(x,y\right)$分别为解析函数w_1的实部与虚部，则u^2和uv能否作解析函数w_2的实部？为什么？如果可以，求出w_2的表达式（可以用w_1、u、v和常数表示）.

解答.

若函数$u\left(x,y\right)$和$v\left(x,y\right)$分别为解析函数w_1的实部与虚部，则必然满足C-R方程，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9}$$

并且都满足二维Laplace方程，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{10}$$

对函数u^2，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(u^2\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{11}$$

当且仅当$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$时上式取0，即函数$u\left(x,y\right)$为常函数时，$u^2$可以作解析函数$w_2$的实部，根据C-R方程，解析函数$w_2$的虚部可以为任意实数，则$w_2$可以表示为

$$w_2=C_1+\mathrm{i}C_2,\ \ \forall C_1,C_2\in\mathrm{R} \tag{12}$$

而对于其他情况，u^2则不能作解析函数w_2的实部. 对函数uv，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(uv\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(uv\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+v\cdot\nabla^2 u+u\cdot\nabla^2 v\\&=2\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0\end{aligned} \tag{13}$$

对任意的函数$u\left(x,y\right)$和$v\left(x,y\right)$成立，因此函数uv可以作解析函数w_2的实部，由C-R方程可以确定w_2的虚部为

$$\int^{(x,y)}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\left(uv\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial x}\left(uv\right)\mathrm{d}y\right) \tag{14}$$

则w_2可以表示为

$$w_2=uv+\mathrm{i}\int^{(x,y)}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\left(uv\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial x}\left(uv\right)\mathrm{d}y\right) \tag{15}$$

题 3.（31分）已知函数$w(z)=z\ln^{-2}\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$，割线为$z=\mathrm{i}$与$z=-\mathrm{i}$的连线，并规定割线右岸宗量辐角为$-\pi$.

1. （11分）求$w(\pm 1)$的值；
2. （17分）求函数在环域$|z|>1$的Laurent展开（写出系数非零的前五项即可）；
3. （3分）求函数在无穷远处的留数.

解答.

第一问.

从割线右岸出发到$z=1$，$z-\mathrm{i}$辐角增加$\dfrac{\pi}{4}$，$z+\mathrm{i}$辐角减少$\dfrac{\pi}{4}$，则宗量在$z=1$的辐角为$-\pi-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{3\pi}{2}$，宗量在$z=1$的模为1，则

$$w(1)=\left(-\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}\right)^{-2}=-\frac{4}{9\pi^2} \tag{16}$$

从割线右岸出发到$z=-1$，$z-\mathrm{i}$辐角增加$\dfrac{7\pi}{4}$，$z+\mathrm{i}$辐角增加$\dfrac{\pi}{4}$，则宗量在$z=1$的辐角为$-\pi+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{7\pi}{4}=-\dfrac{5\pi}{2}$，宗量在$z=-1$的模为1，则

$$w(-1)=-\left(-\frac{5\pi}{2}\mathrm{i}\right)^{-2}=\frac{4}{25\pi^2} \tag{17}$$

第二问.

考虑函数在无穷远处展开. 从割线右岸出发，沿正实轴趋于无穷，$z-\mathrm{i}$辐角增加$\dfrac{\pi}{2}$，$z+\mathrm{i}$辐角减少$\dfrac{\pi}{2}$，则宗量在无穷远处的辐角为$-\pi-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=-2\pi$，宗量在无穷远处的模为1，则在无穷远处，有

$$\begin{aligned}\ln\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}&=\ln\frac{1+\mathrm{i}/\mathrm{z}}{1-\mathrm{i}/\mathrm{z}}=-2\pi\mathrm{i}+\ln\left(1+\frac{\mathrm{i}}{z}\right)-\ln\left(1-\frac{\mathrm{i}}{z}\right)\\&=-2\pi\mathrm{i}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n\\&=-2\pi\mathrm{i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n\mathrm{i}}{2n+1}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}\end{aligned} \tag{18}$$

这里给出用待定系数法的求解过程，也可以采用级数除法，但按照松神课上提示，级数除法没有过程分，使用要小心！

不妨令

$$\ln^{-1}\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\sum_{k=1}^{-\infty}a_k z^k \tag{19}$$

则有

$$
\begin{aligned}
1 &= \ln\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\cdot\sum_{k=1}^{-\infty}a_kz^k \\
&= -2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{-\infty}a_kz^k+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{-\infty}\frac{2\cdot(-1)^n a_k\mathrm{i}}{2n+1}z^{k-(2n+1)} \\
&= -2\pi\mathrm{i}a_1z+(2a_1\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}a_0)+(2a_0\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}a_{-1})\frac{1}{z}+\left(2a_{-1}\mathrm{i}-\frac{2}{3}\mathrm{i}a_1-2\pi\mathrm{i}a_{-2}\right)\frac{1}{z^2} \\
&+\left(2a_{-2}\mathrm{i}-\frac{2}{3}\mathrm{i}a_0-2\pi\mathrm{i}a_{-3}\right)\frac{1}{z^3}+\left(2a_{-3}\mathrm{i}-\frac{2}{3}\mathrm{i}a_{-1}+\frac{2}{5}\mathrm{i}a_1-2\pi\mathrm{i}a_{-4}\right)\frac{1}{z^4}+\cdots
\end{aligned}
\tag{20}
$$

进而可得，

$$
\begin{aligned}
&-2\pi\mathrm{i}a_1=0\Rightarrow a_1=0 \\
&-2\pi\mathrm{i}a_0=1\Rightarrow a_0=\frac{\mathrm{i}}{2\pi} \\
&2\pi\mathrm{i}a_{-1}=2a_0\mathrm{i}\Rightarrow a_{-1}=\frac{\mathrm{i}}{2\pi^2} \\
&2\pi\mathrm{i}a_{-2}=2a_{-1}\mathrm{i}\Rightarrow a_{-2}=\frac{\mathrm{i}}{2\pi^3} \\
&2\pi\mathrm{i}a_{-3}=2a_{-2}\mathrm{i}-\frac{2}{3}\mathrm{i}a_0\Rightarrow a_{-3}=\frac{3-\pi^2}{6\pi^4}\mathrm{i} \\
&2\pi\mathrm{i}a_{-4}=2a_{-3}\mathrm{i}-\frac{2}{3}\mathrm{i}a_{-1}\Rightarrow a_{-4}=\frac{3-2\pi^2}{6\pi^5}\mathrm{i}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

则有

$$
\ln^{-1}\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}+\frac{\mathrm{i}}{2\pi^2}\frac{1}{z}+\frac{\mathrm{i}}{2\pi^3}\frac{1}{z^2}+\frac{3-\pi^2}{6\pi^4}\frac{\mathrm{i}}{z^3}+\frac{3-2\pi^2}{6\pi^5}\frac{\mathrm{i}}{z^4}+\cdots \tag{22}
$$

由此可得，函数$w(z)$在$|z|>1$的Laurent展开为

$$
\begin{aligned}
w(z)=z\ln^{-2}\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}&=z\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}+\frac{\mathrm{i}}{2\pi^2}\frac{1}{z}+\frac{\mathrm{i}}{2\pi^3}\frac{1}{z^2}+\frac{3-\pi^2}{6\pi^4}\frac{\mathrm{i}}{z^3}+\frac{3-2\pi^2}{6\pi^5}\frac{\mathrm{i}}{z^4}+\cdots\right)^2 \\
&=-z\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2\pi^3}\frac{1}{z^2}+\frac{3-\pi^2}{6\pi^4}\frac{1}{z^3}+\frac{3-2\pi^2}{6\pi^5}\frac{1}{z^4}+\cdots\right)^2 \\
&=-\frac{z}{4\pi^2}-\frac{1}{2\pi^3}-\frac{3}{4\pi^4}\frac{1}{z}-\frac{6-\pi^2}{6\pi^5}\frac{1}{z^2}-\frac{5-2\pi^2}{4\pi^6}\frac{1}{z^3}+\cdots,\ |z|>1
\end{aligned}
\tag{23}
$$

说明：前三个系数计算还是比较简单的，后两个相对复杂，不保证此答案准确，请自行验证

第三问.

函数在无穷远处的留数，即为函数在无穷远处Laurent展开z^{-1}项系数的相反数，由第二问可知，

$$
\operatorname{Res}w(\infty)=\frac{3}{4\pi^4} \tag{24}
$$

题 4.（17分）

1.（5分）证明：$\psi\left(z+n\right)-\psi\left(z\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}$；

2.（6分）证明：$\psi\left(z\right)-\psi\left(-z\right)=-\frac{1}{z}-\pi\cot\pi z$；

3.（6分）根据前面的结果求解无穷级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$，其中$a$是正实数.

提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\psi\left(z+n\right)-\ln n\right]=0$

解答.

第一问.

Gamma函数存在以下性质：

$$\Gamma\left(z+1\right)=z\Gamma\left(z\right)\tag{25}$$

由此可得，

$$\Gamma\left(z+n\right)=\left(z+n-1\right)\cdots\left(z+1\right)z\Gamma\left(z\right)\tag{26}$$

等式两边取对数，有

$$\ln\Gamma\left(z+n\right)-\ln\Gamma\left(z\right)=\ln z+\ln\left(z+1\right)+\cdots+\ln\left(z+n-1\right)\tag{27}$$

等式两边对z求导，有

$$\psi\left(z+n\right)-\psi\left(z\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}\tag{28}$$

第二问.

Gamma函数存在以下性质：

$$\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\tag{29}$$

等式两边取对数，有

$$\ln\Gamma\left(z\right)+\ln\Gamma\left(1-z\right)=\ln\pi-\ln\sin\pi z\tag{30}$$

等式两边对z求导，有

$$\psi\left(z\right)-\psi\left(1-z\right)=-\pi\cot\pi z\tag{31}$$

对式(25)先取对数，再对z求导，有

$$\psi\left(z+1\right)=\frac{1}{z}+\psi\left(z\right)\tag{32}$$

用$-z$代替z，有

$$\psi\left(1-z\right)=-\frac{1}{z}+\psi\left(-z\right)\tag{33}$$

联立式(31)和式(33)，有

$$\psi\left(z\right)-\psi\left(-z\right)=-\frac{1}{z}-\pi\cot\pi z\tag{34}$$

第三问.

无穷级数可整理为，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n-a\mathrm{i}}-\frac{1}{n+a\mathrm{i}}\right) \tag{35}$$

由提示可知，

$$\psi\left(z\right)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right) \tag{36}$$

则有

$$\psi\left(a\mathrm{i}\right)=-\gamma-\frac{1}{a\mathrm{i}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a\mathrm{i}}\right) \tag{37}$$

$$\psi\left(-a\mathrm{i}\right)=-\gamma+\frac{1}{a\mathrm{i}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-a\mathrm{i}}\right) \tag{38}$$

式(37)减去式(38)，有

$$\psi\left(a\mathrm{i}\right)-\psi\left(-a\mathrm{i}\right)=-\frac{2}{a\mathrm{i}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-a\mathrm{i}}-\frac{1}{n+a\mathrm{i}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n-a\mathrm{i}}-\frac{1}{n+a\mathrm{i}}\right) \tag{39}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}&=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left[\psi\left(a\mathrm{i}\right)-\psi\left(-a\mathrm{i}\right)\right]\\&=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left(-\frac{1}{a\mathrm{i}}-\pi\cot\pi a\mathrm{i}\right)\\&=\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi\coth\pi a}{2a}\end{aligned} \tag{40}$$

说明：此题为作业原题

题 5.（30分）用留数定理计算下列积分.

1.（14分）$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1+\epsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta,\ n\in\mathrm{Z}^+,\ \epsilon=\frac{3}{5}$；　　2.（16分）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\ln x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

解答.

第一问.

注意到，被积函数为偶函数，则有

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1+\epsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1+\epsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1+\epsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{41}$$

考虑积分$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1+\epsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$，取实部即可. 不妨令$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1+\epsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{z^n}{1+\epsilon\dfrac{z^2+1}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=4\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{Res}\left\{\frac{5z^n}{3z^2+10z+3}\right\} \tag{42}$$

对函数$f(z)=\dfrac{5z^n}{3z^2+10z+3}$，$z=-\dfrac{1}{3}$为其在单位圆内的一阶极点，则有

$$\mathrm{Res}f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5z^n}{6z+10}\Big|_{z=-1/3}=\frac{5}{8}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n \tag{43}$$

由此可得，

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1+\epsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n \tag{44}$$

说明：第一问思路比较简单，计算量也很友善，特别是ϵ给了一个特殊值可以进行因式分解

第二问.

考虑积分$\displaystyle\oint_C\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}\mathrm{d}z$，围道$C$如下图所示：

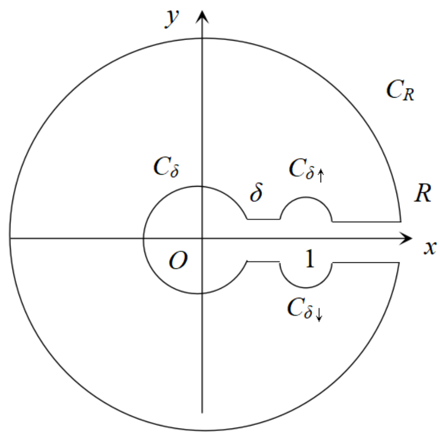

图 1: 题五第二问围道图

割线取正实轴，规定上岸辐角为0. 由于

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}=0\\
&\lim_{|z-1|\to 0(upper)}(z-1)\cdot\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}=0\\
&\lim_{|z-1|\to 0(lower)}(z-1)\cdot\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}=-\frac{4\pi^2}{3}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

由小圆弧引理，有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}\mathrm{d}z=0\\
&\lim_{\delta\uparrow\to 0}\int_{C_{\delta\uparrow}}\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}\mathrm{d}z=0\\
&\lim_{\delta\downarrow\to 0}\int_{C_{\delta\downarrow}}\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}\mathrm{d}z=\frac{4\pi^3\mathrm{i}}{3}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

由于

$$
\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}=0 \tag{47}
$$

由大圆弧引理，有

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}\mathrm{d}z=0 \tag{48}
$$

因此，有

$$
\begin{aligned}
\oint_C\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}\mathrm{d}z&=\int_0^\infty\frac{x(\ln x)^2}{x^3-1}\mathrm{d}x-\int_0^\infty\frac{x(\ln x+2\pi\mathrm{i})^2}{x^3-1}\mathrm{d}x\\
&=-4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty\frac{x\ln x}{x^3-1}\mathrm{d}x+4\pi^2\int_0^\infty\frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{4\pi^3\mathrm{i}}{3}+2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}\left\{\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}\right\}
\end{aligned}
\tag{49}
$$

对函数$f(z)=\dfrac{z(\ln z)^2}{z^3-1}$，$z=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$和$z=\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}$为区域内两个一阶极点，其留数为

$$
\mathrm{Res}\,f\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\right)=\frac{z(\ln z)^2}{3z^2}\Big|_{z=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}}=\frac{2\pi^2}{27}\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right) \tag{50}
$$

$$
\mathrm{Res}\,f\left(\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}\right)=\frac{z(\ln z)^2}{3z^2}\Big|_{z=\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}}=\frac{8\pi^2}{27}\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right) \tag{51}
$$

由此可得，

$$
-\frac{4\pi^3\mathrm{i}}{3}+2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}\left\{\frac{z(\ln z)^2}{z^3-1}\right\}=-\frac{16\pi^3}{27}\mathrm{i}+\frac{4\sqrt{3}\pi^3}{9} \tag{52}
$$

则有

$$
\int_0^\infty\frac{x\ln x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x=\frac{4\pi^2}{27} \tag{53}
$$

说明：此题首先要考虑围道挖去$z=1$点，其次要注意在$z=1$处下半圆弧极限并不为0，最后要注意求留数时多值函数辐角问题