2023 级微积分 A2 期末考试

mathsdream 整理版

2024.06.20

说明

题目解析见后。
点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：
`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$，则 $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=$ __________.

2. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dx \int_x^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin y}{y}\,dy=$ __________.

3. 记 $\xi=(x,y,z)^T$ 为三维列向量，A 为三阶实数矩阵，其特征值为 $2,0,-3$，则三维线性向量场 $A\xi$ 的散度为 $\operatorname{div} A\xi=$ __________.

4. 设曲线 C 的参数表示为 $x=2t,\, y=t,\, z=2-2t,\, 0\le t\le 1$，则空间第一型线积分 $\int_C xy\,dl=$ __________.

5. 设平面定向曲线 C^+ 为函数曲线 $y=x^3$，起点为 $(0,0)$，终点为 $(1,1)$，则第二型线积分 $\int_{C^+} e^y\,dx+xe^y\,dy=$ __________.

6. 关于级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ 的收敛性，下述正确的结论是 __________.

   A: 绝对收敛；B: 条件收敛；C: 发散。

7. 圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被上半球面 $x^2+y^2+z^2=4\ (z\ge 0)$ 和平面 $z=0$ 所截部分的面积为 __________.

8. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\ln n}$ 的收敛半径为 __________.

9. 函数 $\ln(3+x)$ 在 $x=0$ 处展开的幂级数为 __________。（不必写出收敛区间）

10. 曲面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 2)$ 的面积为 __________.

二、解答题

1. (10 分) 设平面定向曲线 C^+ 为正弦曲线段 $y = \sin x$, $-\pi \le x \le \pi$，起点为 $(-\pi, 0)$，终点为 $(\pi, 0)$。求第二型线积分

$$J = \int_{C^+} (e^{-x^2}\sin^3 x + \sin y)\,dx + (x\cos y - y^3)\,dy.$$

2. (10 分) 计算线积分

$$\oint_{C^+} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

其中定向曲线 C^+ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x+z=1$ 的交线，且从 x 轴正向朝原点方向看去，C^+ 的正向是逆时针的。

3. (10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n$ 的 (i) 收敛半径，(ii) 收敛域，以及 (iii) 和函数。

4. (12 分) 计算三重积分

$$J = \iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz,$$

其中 Ω 为两个球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 和 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围的有界闭区域。

5. (10 分) 设空间向量场 $\vec{F} = (x^3-x, y^3-y, z^3-z)$。试确定一个空间有界光滑的封闭曲面 S^+，其外法向为正，使得第二型面积分

$$J = \iint_{S^+} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

的值最小，并求出这个最小值。

6. (10 分) 设 $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$。

   (i) 求函数 $f(x)$ 以 2 为周期的 Fourier 级数；

   (ii) 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

7. (8 分) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\sin n$$

是否收敛，并说明理由。

三、附加题（本题完全正确才有分，且分数不计入总分，仅用于评判 A＋）

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，即级数一般项 $a_n > 0$，再记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 收敛。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$，则 $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \dfrac{\pi}{8}$.

   解析：转换为极坐标：
$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3 dr d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

2. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dx \int_x^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin y}{y}\,dy = \dfrac{1}{2}$.

   解析：交换积分顺序后，积分区域为 $y\in[0,\frac{\pi}{3}]$, $x\in[0,y]$：
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin y\,dy = 1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. 记 $\xi=(x,y,z)^T$ 为三维列向量，A 为三阶实数矩阵，其特征值为 $2,0,-3$，则三维线性向量场 $A\xi$ 的散度为 $\operatorname{div} A\xi = -1$.

   解析：设 $A=\{a_{ij}\}_{3\times 3}, (P,Q,R)^T = A\xi$，则 $P = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \dfrac{\partial P}{\partial x} = a_{11}$，同理有 $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = a_{22}, \dfrac{\partial R}{\partial z} = a_{33}$，所以 $\operatorname{div} A\xi = a_{11}+a_{22}+a_{33} = tr(A) = 2+0-3 = -1$。

4. 设曲线 C 的参数表示为 $x=2t, y=t, z=2-2t, 0\le t\le 1$，则空间第一型线积分 $\int_C xy\,dl =$.

   解析：
$$\int_C xy\,dl = \int_0^1 2t\cdot t\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}dt = 6\int_0^1 t^2 dt = 2$$

5. 设平面定向曲线 C^+ 为函数曲线 $y=x^3$，起点为 $(0,0)$，终点为 $(1,1)$，则第二型线积分 $\int_{C^+} e^y\,dx + xe^y\,dy = e$.

   解析：$e^y dx + xe^y dy$ 是一个全微分，其等于 $d\,xe^y$，所以积分等于 $xe^y\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = e$。

   注：题目强调了曲线的起点和终点，很有可能这个积分是一个只与起点和终点有关的积分，所以可以考虑是否是一个全微分。硬算也是能算的：
$$\begin{aligned}\int_{C^+} e^y\,dx + xe^y\,dy &= \int_0^1 e^{x^3}dx + \int_0^1 3x^3e^{x^3}dx\\ &= xe^{x^3}\Big|_0^1 - \int_0^1 3x^3e^{x^3}dx + \int_0^1 3x^3e^{x^3}dx\\ &= e\end{aligned}$$

6. 关于级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ 的收敛性，下述正确的结论是 B: 条件收敛。

   解析：$|a_n| = \dfrac{n}{1+n^2} \sim \dfrac{1}{n}, \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 发散。

   由莱布尼茨判别法，$\dfrac{n}{1+n^2}$ 单调趋于 0，所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛。

   综上，该级数条件收敛。

7. 圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被上半球面 $x^2+y^2+z^2=4\ (z\geq 0)$ 和平面 $z=0$ 所截部分的面积为 8.

解析：所求柱面的面积：

$$\int_L \sqrt{4-x^2-y^2}\, dl$$

其中：$L: x^2+y^2=2x$，其参数方程为：

$$\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad ,\theta\in[0,2\pi]$$

故：

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{4-x^2-y^2}\, dl &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4-(1+\cos\theta)^2-\sin^2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos\theta} d\theta \\ &= 8 \end{aligned}$$

注：柱面的面积通常可转化为曲线积分来求。参见《高等微积分教程（下）》P. 180，例 4.3.2 及其前面的公式。

8. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\ln n}$ 的收敛半径为 3.

解析：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n\ln n}}=\frac{1}{3}$$

所以收敛半径为 3。

9. 函数 $\ln(3+x)$ 在 $x=0$ 处展开的幂级数为 $\ln 3+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(\frac{x}{3})^n$。（不必写出收敛区间）

解析：

$$\ln(3+x)=\ln 3+\ln(1+\frac{x}{3})=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(\frac{x}{3})^n$$

10. 曲面 $z=x^2+y^2\ (0\leq z\leq 2)$ 的面积为 $\dfrac{13}{3}\pi$.

解析：曲面的面积：

$$\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

其中，$D: x^2+y^2\leq 2$，做极坐标换元：

$$\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=\frac{13}{3}\pi$$

二、解答题解析

1.（10 分）设平面定向曲线 C^+ 为正弦曲线段 $y=\sin x,\ -\pi\leq x\leq\pi$，起点为 $(-\pi,0)$，终点为 $(\pi,0)$。求第二型线积分

$$J=\int_{C^+}(e^{-x^2}\sin^3 x+\sin y)\, dx+(x\cos y-y^3)\, dy.$$

解析（对称性）：被积函数关于原点为奇函数，曲线关于原点对称，由对称性，得到积分为 0。

注：如何判断一个积分是否具有对称性，关键看的是是否能找到一对点，它们附近的积分微元相等或相反。对于二型曲面积分来说，积分微元为 $(e^{-x^2}\sin^3 x+\sin y)\,dx+(x\cos y-y^3)\,dy=(e^{-x^2}\sin^3 x+\sin y, x\cos y-y^3)\cdot(dx,dy)$，对于曲线上的两点 (x,y) 和 $(-x,-y)$，两点处的 $(e^{-x^2}\sin^3 x+\sin y, x\cos y-y^3)$ 相反，(dx,dy)（代表曲线在这点沿曲线方向的切线方向）相同，所以两点处的积分微元抵消，总积分为 0。

此外，注意到此题又是一个给曲线起点终点的题目，更常规的做法是看看这个微分是不是全微分。

解析（常规）：$\dfrac{\partial}{\partial x}(x\cos y-y^3)-\dfrac{\partial}{\partial y}(e^{-x^2}\sin^3 x+\sin y)=0$，所以被积函数是一个全微分，积分与路径无关，所以可以转而去计算 $(-\pi,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的直线上的积分，即：

$$\int_{(-\pi,0)\to(\pi,0)}(e^{-x^2}\sin^3 x+\sin y)\,dx+(x\cos y-y^3)\,dy=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x^2}\sin^3 x\,dx=0$$

2.（10 分）计算线积分

$$\oint_{C^+}(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz,$$

其中定向曲线 C^+ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x+z=1$ 的交线，且从 x 轴正向朝原点方向看去，C^+ 的正向是逆时针的。

解析（Stokes 公式）：由 Stokes 公式：

$$\begin{aligned}\oint_{C^+}(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz&=\iint_{S^+}-2dy\wedge dz-2dz\wedge dx-2dx\wedge dy\\&=\iint_{S^+}(2\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial y}{\partial x}-2)dx\wedge dy\\&=\iint_{x^2+y^2\le 1}-4dxdy\\&=-4\pi\end{aligned}$$

其中 S^+ 为 $x+z=1, x^2+y^2\le 1$ 的上侧。

注：有些被积函数形式，是很明显的可能用 Green、Gauss、Stokes 公式的，比如这题。这类不多，平时注意一下积累即可。

Stokes 公式个人记不太熟，怕出错，所以也可以选择直接计算，其实也很简单。

解析（直接计算）：由题意，C^+ 是 $x^2+y^2=1$ 与 $x+z=1$ 的交线，所以 C^+ 的参数方程为：

$$\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\\z=1-\cos t\end{cases}$$

方向为 $t=0$ 到 $t=2\pi$，所以：

$$\begin{aligned}&\oint_{C^+}(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz\\=&\int_0^{2\pi}(\sin t-(1-\cos t))(-\sin t)+(1-\cos t-\cos t)\cos t+(\cos t-\sin t)\sin t\,dt\\=&\int_0^{2\pi}(\sin t+\cos t-2)\,dt=-4\pi\end{aligned}$$

注：此事在《高等微积分教程（下）》P.190 例 4.4.2 中亦有记载。当然这题的曲线参数方程要比书上的简单易得。

3.（10 分）求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n$ 的 (i) 收敛半径，(ii) 收敛域，以及 (iii) 和函数。

解析：

(i) 由根值判别法：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n-1}=1$，所以收敛半径为 1。

(ii) 在 $x=\pm1$ 处，级数项不趋于 0，级数发散。所以收敛域是 $(-1,1)$。

(iii) 令 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n$，当 $x\neq 0$ 时，有：

$$\begin{aligned}\frac{S(x)}{x^2}&=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\\ \int_0^x\frac{S(t)}{t^2}\,dt&=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}\\ \frac{S(x)}{x^2}&=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}\\ S(x)&=\frac{x^2}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

而 $S(0)=0$，符合此式，所以 $S(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}$。

4.（12 分）计算三重积分

$$J=\iiint_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz,$$

其中 Ω 为两个球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 和 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围的有界闭区域。

解析：$x^2+y^2+z^2=4z$ 是一个球心为 $(0,0,2)$，半径为 2 的球面，$x^2+y^2+z^2=2z$ 是一个球心为 $(0,0,1)$，半径为 1 的球面。所以后者在前者围成的球内，本题的 Ω 即为两球面之间的部分，即 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2z\le x^2+y^2+z^2\le 4z\}$。使用球坐标换元：

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz,\\ =&\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}r\cos\theta\, r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi\\ =&20\pi\end{aligned}$$

5.（10 分）设空间向量场 $\vec{F}=(x^3-x,y^3-y,z^3-z)$。试确定一个空间有界光滑的封闭曲面 S^+，其外法向为正，使得第二型面积分

$$J=\iint_{S^+}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

的值最小，并求出这个最小值。

解析：封闭曲面，准备上 Gauss 公式。设 $S+$ 围成的空间区域为 Ω，则：

$$\iint_{S^+}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2-3)\,dxdydz$$

如果需要该三重积分尽可能小，则 Ω 应尽可能多包含 $3x^2+3y^2+3z^2-3$ 为负的区域，即取 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，$S+$ 为其外表面时，积分值最小。此时计算可得，最小值为：

$$\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2-3)\,dxdydz=-\frac{8}{5}\pi$$

6. (10 分) 设 $f(x)=x^2$, $x\in[-1,1]$。

(i) 求函数 $f(x)$ 以 2 为周期的 Fourier 级数；

(ii) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

解析：

(i) $f(x)$ 为偶函数，$b_n=0$。

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}\\
a_n &= \int_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x dx\\
&= (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2}, \quad n=1,2,\cdots.
\end{aligned}
$$

所以函数 $f(x)$ 以 2 为周期的 Fourier 级数为

$$
f(x) \sim \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x
$$

(i) 注：《高等微积分教程（下）》P.302 例 7.1.5。注意不能随意将 $\sim$ 改成 $=$。

(ii) 取 $x=0$，得:

$$
0=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}
$$

解得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

7. (8 分) 判断级数

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\sin n
$$

是否收敛，并说明理由。

解析：看到 $\sin n$，联想到 $\sin n$ 的部分和有界（《高等微积分教程（下）》P.252 例 5.3.3），考虑使用迪利克雷判别法，只需要证明 $a_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$ 单调递减趋于 0。

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})+\frac{\frac{1}{n+1}}{n+1}\\
&= -(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}\\
&= \frac{1}{n(n+1)}(-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+\frac{n}{n+1})<0
\end{aligned}
$$

所以 a_n 单调递减。又由 Stolz 公式：

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0
$$

所以 a_n 单调递减趋于 0。由迪利克雷判别法，题目级数收敛。

三、附加题解析

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，即级数一般项 $a_n > 0$，再记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛。

解析：

"$\Rightarrow$":

$$\lim_{n\to\infty} a_n / \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，得 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 收敛到一非零有限值。由比较判敛法，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也收敛。

"$\Leftarrow$":

假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$。所以对 $\forall n > 0, \exists p > 0$, 使得 $S_{n+p} > 2S_n$。则：

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_n}{S_n} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_n} > \frac{1}{2}$$

由柯西收敛准则，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散，与题目条件矛盾，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。