2022 年《高等微积分 2》期末考试试题

2022 年 6 月 11 日 $19:00-21:00$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题每小问 5 分, 第 2,3 题各 10 分, 其余每题各 15 分. 即使有某些小问无法完成, 也可以使用其结论解决后面的问题.

1 (1) 求解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$, 将结果表示成有关 $y(x)$ 的代数方程即可, 不一定能求出解析表达式.

(2) 给定正实数 ω, 求出方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的全部解.

(3) 给定正数 a. 求所有正数 ω, 使得区间 $[0,a]$ 上存在不恒等于零的光滑函数 $y(x)$ 满足如下条件:

$$y''+\omega^2 y=0,\ 且\quad y(0)=y(a)=0.$$

(4) 求 $(0,+\infty)$ 上的所有 C^2 光滑函数 $y(x)$, 使得 $y(1)=1$, 且满足如下的 Euler 方程

$$x^2y''(x)+\frac{1}{4}y(x)=0,\quad \forall x>0.$$

2 在约束 $x^2+y^2+z^2=1$ 下, 求 $f(x,y,z)=xy+2yz$ 的最大值.

3 给定正数 a, 设空间曲线 Γ 为

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x+y+z=0.$$

计算第一型曲线积分 $\int_\Gamma (1+x)^2 ds$.

4 设 S 是一个光滑的封闭曲面, 定向指向 S 外部. 考虑第二型曲面积分

$$I = \iint_S (x^3 - x)dydz + (2y^3 - y)dzdx + (3z^3 - z)dxdy.$$

试确定曲面 S, 使得积分 I 的值最小, 并求出该最小值.

5 设 $D = \{(x, y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. 对给定的正数 a, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(a + x^2 + y^2)^2}.$$

6 设平面曲线 C 为椭圆 $x^2 + xy + y^2 = r^2$, 取逆时针定向. 对给定的常数 a, 定义

$$I_a(r) = \int_C \frac{-ydx + xdy}{(x^2 + y^2)^a}.$$

求极限 $\lim\limits_{r \to +\infty} I_a(r)$.

7 设 D 是平面上由一条光滑的简单闭曲线所围成的区域 (含边界), ∂D 是其边界.

(1) 设 $f(x, y), g(x, y)$ 是 D 上的光滑函数, 且 $g(x, y)$ 在 ∂D 上处处为零. 利用格林公式证明如下的分部积分公式:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g dxdy = -\iint_D f \frac{\partial g}{\partial x} dxdy, \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} g dxdy = -\iint_D f \frac{\partial g}{\partial y} dxdy.$$

(2) 设 $u(x, y), v(x, y)$ 是 D 上的光滑函数, 且 $v(x, y)$ 在 ∂D 上处处为零. 对实数 λ, 将 $\mathbb{R}^3$ 中曲面

$$S(\lambda) = \{(x, y, z)|z = u(x, y) + \lambda v(x, y), (x, y) \in D\}$$

的面积记为 $A(\lambda)$. 证明:

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} A(\lambda) = -\iint_D \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{3/2}} v(x, y)dxdy.$$