2025 秋概统期末-自主命题部分（唐宏岩）

2026.1.8

本试题为回忆版，仅供参考

1. （6 分）某台设备使用寿命的平均值为 2000 小时，标准差为 500 小时.
(1) 若工厂共有 25 台此设备，求这些设备总的使用寿命超过 50000 小时的概率.
(2) 设工厂有 n 台设备，若它们总使用寿命不小于 50000 小时的概率超过 99%，写出 n 满足的不等式（列出式子即可，不必求解）.

2. （8 分）随机变量 X、Y 的联合分布概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试解决以下问题.
(1) 求条件分布概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.
(2) 若随机变量 $Z=Y-X$，判断 Z 与 X 的独立性.

3. （8 分）设总体 X 大于 0，其概率密度函数为 $f(x)=\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}$，其中 θ 是未知参数且大于 0. 设 X_1、X_2、..., X_n 是来自该总体的样本.
(1) 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$.
(2) $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量？若是，请证明；若不是，给出 θ 的无偏估计.

4. （12 分）已知线性回归模型 $y=\beta_1 x+\epsilon$，其中 $\epsilon\sim N(0,\sigma^2)$，$\sigma$ 的值未知. 采集了一些样本，数据如下：

i	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4
y_i	3	5	9	11

(1) 利用样本数据，求 β_1 的极大似然估计 $\hat{\beta}_1$.

(2) 求 β_1 标准误的估计 $\hat{S}e(\beta_1)$.

(3) 在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下，对 H_0：$\beta_1 = 2.4$ 作假设检验.

5. （16 分）（本题需要使用 gamma 分布的概率密度函数，请自行查阅）某事件每小时发生的次数服从参数为 λ 的泊松分布，其中 $\lambda > 0$，且 λ 的先验分布为 $p(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}$. 现连续观测三小时，记录得到该事件每个小时发生的次数分别为 3 次、2 次、4 次. 求：

(1) λ 的 Bayes 后验分布.

(2) λ 的后验众数估计.

(3) λ 的后验均值估计.

(4) 利用 λ 的后验分布，求第 4 个小时观测到该事件次数的期望.