2023 年秋季《高等微积分 1》期中试卷

2023 年 11 月 18 日 $9:50-11:50$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题 10 分, 其余每题各 15 分.

1 (1) 计算函数极限

$$\lim_{x\to 0+}\left((\frac{\sqrt{x}}{2})^m e^{1/\sqrt{x}}\right)$$

的值, 其中 m 是给定的实数.

(2) 求函数 $(1+x)^{1/x}$ 的导函数与二阶导函数.

2 (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{p}{n})^n$ 的值, 其中 p 是给定的实数.

(2) 定义数列 $x_0=1$ 且

$$x_n=\frac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}},\quad \forall n\geq 1.$$

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求出此极限的值.

3 设映射 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 处处可导.

(1) 求 $\ln f(x)$ 的导函数.

(2) 计算极限 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{1/h}$ 的值.

4 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$.

(1) 请叙述 f 在 $x=0$ 处可微的定义.

(2) 利用 (1) 的结论, 求如下极限式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$$

的值, 用 f 的导数表示.

5 (1) 设 $h:[0,1)\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 证明: h 在区间 $[0,1)$ 上一致连续的充分必要是极限 $\lim\limits_{x\to 1-} h(x)$ 存在.

(2) 设连续映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有 $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$. 证明: f 的像集是 $\mathbb{R}$.

6 对于由复数构成的无穷数列 $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n=1}^{\infty}$(其中 $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位), 定义其极限为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\cdot\lim_{n\to\infty} y_n.$$

对复数 $z=x+iy$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n = e^x(\cos y + i\sin y).$$

7 (1) 设 B 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都属于 B. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in B$.

(2) 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足如下条件:

(i) 对任何两点 a,b, 若 $f(a)<v<f(b)$, 则存在介于 a,b 之间的点 c 使得 $f(c)=v$(即 f 满足介值定理的结论);

(ii) 对任何 c, 原像集 $f^{-1}(\{c\})=\{x\in\mathbb{R}|f(x)=c\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 的闭子集.

证明: f 是连续映射.(提示: 对连续性的 $\epsilon-\delta$ 定义用反证法)