清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 **微积分 A1**　　A 卷　　2026 年 1 月 14 日 9:00-11:00

系名__________ **班级**__________ **姓名**__________ **学号**__________

一. 选择题（每题 3 分，共 7 题）（每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的，请在答题卡相应位置处填涂所选选项前的字母.）

1. 下列命题正确的是__________

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n>N$，都有 $|a_n - a| < \dfrac{1}{n}$.

B. 设 $a\in\mathbb{R}$，若对无穷多个正数 ε，$\exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n>N$，都有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

C. 若 $|x_n - x_{n+1}| \le \dfrac{1}{n}\ (\forall n\in\mathbb{N})$，则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.

D. 若 $|x_n - x_{n+1}| \le \dfrac{1}{n^2}\ (\forall n\in\mathbb{N})$，则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^3 x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x^2}(\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t} =$__________

A. $\dfrac{3}{2}$.　　B. 1.　　C. $\dfrac{1}{2}$.　　D. 0.

3. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛，当且仅当__________

A. $p<1$.　　B. $p>1$.　　C. $1<p<2$.　　D. $p>2$.

4. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\,\mathrm{d}x$，则__________

A. $K>M>N$.　　B. $M>K>N$.　　C. $M>N>K$.　　D. $K>N>M$.

5. 下列结论正确的是__________

A. 若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

B. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

C. 若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有原函数.

D. 若 f 在 $[a,b]$ 上有原函数，则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

6. 设函数$f(x)$可导，$f(0)=2$，且$f'(x)<2f(x)$，则__________

A. $f(-1)>2$.　　　　B. $f(-1)<\dfrac{2}{e^2}$.

C. $f(1)>2e^2$.　　　　D. $f(1)<2e^2$.

7. 已知$f\in C^2[-1,1]$, $f''(x)>0$, 且$f(-1)+f(1)=0$, 由此不能得到的结论是__________

A. $\exists\xi\in[-1,1]$, 使得$f(\xi)=0$.　　　　B. $\exists\xi\in[-1,1]$, 使得$f'(\xi)>0$.

C. $f(0)<0$.　　　　D. $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$.

二. 填空题（每题3分，共6题）（请将答案直接填写在答题卡上!）

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n})=$__________.

9. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=$__________.

10. 已知曲线段Γ在极坐标系下的方程为$r=e^{\theta}\ (0\le\theta\le\pi)$, 则$\Gamma$的弧长为__________.

11. 已知$f(x)=e^x\sin x$, 则$f'''(0)=$__________.

12. 已知$x\to0$时, $f(x)=\int_{\sin x}^{x}\ln(1+t)\mathrm{d}t$ 与x^p 是同阶无穷小量, 则$p=$__________.

13. 微分方程$yy''-(y')^2=0$满足初值条件$y(0)=1, y'(0)=2$的特解为$y=$__________.

三. 解答题（请写出详细的计算过程和必要的根据!）

14. （13分）设函数$f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

(1) 求曲线$y=f(x)$的渐近线.

(2) 求$f(x)$的单调区间、极值点和极值.

(3) 求$f(x)$的拐点，以及上凸和下凸区间.

15. （10分）已知$f(t)=\int_0^{\pi}|t-\sin x|\mathrm{d}x$，求$f'(t)$的表达式, 并求$f(t)$的最小值.

16. （8分）记平面有界区域$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le2\sqrt{x}, 0\le x\le1\right\}$绕$x$轴旋转一周所得的旋转体为$\Omega$. 求$\Omega$的体积与侧面积.

17. （8 分）求广义积分的值$\int_1^{+\infty}\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x^2+1)}$.

18. （12 分）设函数$f(x)$可导，$f(0)=\frac{1}{3}$，且$f'(x)+2f(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-3(x+1)\mathrm{e}^{-x}+\frac{5}{3}$，求$f(x)$.

19.（10 分） 记初值问题$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=x\mathrm{e}^{x^2}$，$y(0)=1$的解为$y=\varphi(x)$.

(1) 求$\varphi(x)$.

(2) 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{n\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{(nx)^2+1}=\frac{\pi}{2}$.

四. 附加题（本题全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+）

20. 设数列$\{x_n\},\{y_n\}$满足$x_{n+1}=\sin x_n$, $y_{n+1}=y_n^2\ (n\geq 1)$, $x_1=y_1=\frac{1}{2}$.求证：当$n\to\infty$时，y_n是比x_n高阶的无穷小量.