

# 2024 级微积分 A1 期中考试

mathsdream 整理版

2024.11.10

## 说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

<https://github.com/mathsdream/THU-math-source>。

## 一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \left( x^2 \sin \frac{2}{x} \right) =$  \_\_\_\_\_。

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + \sin x)}{1 - \cos x} =$  \_\_\_\_\_。

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - 1)^{\frac{1}{x}} =$  \_\_\_\_\_。

4. 设  $f(x)$  为可导函数, 且  $f(1) = 0, f'(1) = 2, g(x) = f(e^x)e^{f(x+1)}$ , 则  $g'(0) =$  \_\_\_\_\_。

5. 函数  $y = 4x + \sin^2 x$  的反函数的微分  $dx =$  \_\_\_\_\_。

6. 设  $f(x) = x \sin x$ , 则  $f^{(2024)}(\pi) =$  \_\_\_\_\_。

7. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  点可导, 且  $f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = \frac{1}{4}$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_。

8. 设  $y = f(x)$  是由参数方程  $\begin{cases} x = \sin t + t^3 \\ y = t + \cos t \end{cases}$  所确定的可微函数, 则在参数  $t = 0$  对应的点处  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_。

9. 设  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0; \\ ax^2 + x, & x < 0 \end{cases}$  二阶可导, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+1) + 2 \ln(1 + \frac{1}{2^2}) + \cdots + n \ln(1 + \frac{1}{n^2})}{e + e^{\frac{1}{2}} + \cdots + e^{\frac{1}{n}} - n} =$  \_\_\_\_\_。

## 二、解答题

1. (12 分) 设  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + (x-e)e^{(x-e)t+x}}{1 + (x-e)e^{(x-e)t+a}} \quad (x > 0)$$

(I) 求  $f(x)$ ;

(II) 讨论  $f(x)$  的连续性 (当  $a$  为何值时,  $f(x)$  为连续函数; 当  $a$  为何值时,  $f(x)$  存在间断点, 求间断点并判断间断点类型)。

2. (12 分) 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1+2a_n}{1+a_n} (n \geq 1)$ . 证明数列  $\{a_n\}$  收敛, 并求其极限。

3. (10 分) 设  $f(u)$  在  $u = 1$  点可导, 且满足关系式  $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x) = o(x), x \rightarrow 0$ . 求  $f(1)$  和  $f'(1)$ 。

4. (11 分) 已知  $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ .

(I) 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;

(II) 设  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , 求当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) - a$  的阶。

5. (10 分) 设  $f(x)$  在  $x = a$  点二阶可导, 且  $f'(a) \neq 0$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)} \right)$$

6. (10 分) 已知  $f \in C^2[0, 1]$ .

(I) 设  $x_0 \in [0, 1]$ , 写出  $f(x)$  在  $x_0$  点带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式;

(II) 设  $f(0) = f(1) = 0$ , 证明:  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$ 。

7. (5 分) 设  $K = \{f | f \text{ 在有界闭区间 } [a, b] \text{ 上可导, 在开区间 } (a, b) \text{ 内二阶可导}\}$ .

命题  $P$ :  $\forall f \in K, \exists \xi \in (a, b), s.t. f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b - a)$ 。

(I) 是否可以在闭区间  $[a, b]$  上对  $f'$  直接用拉格朗日中值定理得到命题  $P$ ? 为什么?

(II) 请判断命题  $P$  是否成立, 若成立请证明, 否则请举反例。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

## 一、填空题解析

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin(x^2 \sin \frac{2}{x}) = 0$ 。

解析:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin(x^2 \sin \frac{2}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} x^2 \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{2}{x} = 0$ 。

注 1: 等价无穷小  $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$  中的  $x$ , 可以换成任意极限为 0 的函数, 即  $\sin g(x) \sim g(x), g(x) \rightarrow 0$ , 相当于对复合函数进行了化简。等价无穷小对于这种多层复合函数的化简, 是有很良好的效果的。

注 2: 但  $\frac{1}{x}$  不是一个极限为 0 的式子, 所以最后一步不能认为  $\sin \frac{2}{x} \sim \frac{2}{x}$ 。这里最后一步用的是无穷小乘有界量还是无穷小, 这个结论可以用夹逼证明。

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+\sin x)}{1-\cos x} = 4$ 。

解析: 使用泰勒展开得到:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+\sin x)}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+o(x))}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 4$ 。

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - 1)^{\frac{1}{x}} = 3$ 。

解析:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3(1 - \frac{1}{3^x})^{\frac{1}{x}} = 3$ 。

注: 一定要注意  $x$  到底是趋于几。这种底数和指数都含有变量的极限, 更常用的做法是先取个对数, 将式子化为分式, 然后使用洛必达/泰勒求解, 这题也可以这么干。

4. 设  $f(x)$  为可导函数, 且  $f(1) = 0, f'(1) = 2, g(x) = f(e^x)e^{f(x+1)}$ , 则  $g'(0) = 2$ 。

解析:  $g'(x) = f'(e^x)e^x e^{f(x+1)} + f(e^x)e^{f(x+1)}f'(x+1)$ , 所以  $g'(0) = f'(1)e^{f(1)} + f(1)f'(1) = 2$ 。

5. 函数  $y = 4x + \sin^2 x$  的反函数的微分  $dx = \frac{dy}{4+2\sin x \cos x}$ 。

解析:  $dy = (4 + 2\sin x \cos x)dx$ , 所以  $dx = \frac{dy}{4+2\sin x \cos x}$ 。

6. 设  $f(x) = x \sin x$ , 则  $f^{(2024)}(\pi) = 2024$ 。

解析: 使用莱布尼茨求导法则, 注意到  $x$  的二阶导及以后为 0:

$$f^{(n)}(x) = x(\sin x)^{(n)} + n(\sin x)^{(n-1)} = x \sin(x + n\frac{\pi}{2}) + n \sin(x + (n-1)\frac{\pi}{2})$$

所以  $f^{(2024)}(\pi) = 2024$ 。

注: 此题也可以先平移函数, 转化为求  $(x+\pi)\sin(x+\pi)$  在  $x=0$  处的 2024 阶导数, 而后利用泰勒展开的方法, 比较 2024 次项系数得到。

7. 设  $f(x)$  在  $x=0$  点可导, 且  $f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x} = \frac{1}{4}$ , 则  $f'(0) =$ 。

解析: 利用泰勒展开, 有  $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) + f'(0)x + o(x) - f(0) - f'(0)\frac{x}{2} - o(x)}{x} = \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{4}$$

。所以  $f'(0) = \frac{1}{2}$ 。

注: 此题绝对不可以使用洛必达, 原因有 2: 1. 题目只说了  $f(x)$  在  $x=0$  点可导, 而洛必达要求  $f(x)$  在  $x=0$  附近都是可导的; 2. 洛必达只保证了求导后如果极限存在, 则原极限等于求导后的极限。反过来, 原极限存在, 不一定能保证求导后的极限存在。

8. 设  $y = f(x)$  是由参数方程  $\begin{cases} x = \sin t + t^3 \\ y = t + \cos t \end{cases}$  所确定的可微函数, 则在参数  $t = 0$  对应的点处

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

解析:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \sin t}{\cos t + 3t^2}$$

。所以  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = 1$ 。

9. 设  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0; \\ ax^2 + x, & x < 0 \end{cases}$  二阶可导, 则  $a = -\frac{1}{2}$ 。

解析: 这题只需要考虑在  $x = 0$  处可导性。直接求导得  $f'_+(0) = -1$ ,  $f'_-(0) = 2a$ , 所以  $a = -\frac{1}{2}$ 。

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+1) + 2\ln(1+\frac{1}{2^2}) + \cdots + n\ln(1+\frac{1}{n^2})}{e + e^{\frac{1}{2}} + \cdots + e^{\frac{1}{n}} - n} = 1$ 。

解析: 使用 stolz 公式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+1) + 2\ln(1+\frac{1}{2^2}) + \cdots + n\ln(1+\frac{1}{n^2})}{e + e^{\frac{1}{2}} + \cdots + e^{\frac{1}{n}} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = 1$$

。

## 二、解答题解析

1. (12 分) 设  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + (x-e)e^{(x-e)t+x}}{1 + (x-e)e^{(x-e)t+a}} \quad (x > 0)$$

(I) 求  $f(x)$ ;

(II) 讨论  $f(x)$  的连续性 (当  $a$  为何值时,  $f(x)$  为连续函数; 当  $a$  为何值时,  $f(x)$  存在间断点, 求间断点并判断间断点类型)。

解析: (I)

当  $x = e$  时,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln e + 0}{1 + 0} = 1$$

当  $x > e$  时,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{e^{(x-e)t}} + (x-e)e^x}{\frac{1}{e^{(x-e)t}} + (x-e)e^a} = e^{x-a}$$

当  $x < e$  时,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(x-e)t} = 0$ ,

$$f(x) = \ln x$$

(II)

只需考虑  $x = e$  处的连续性。  $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = e^{e-a}$ , 所以当  $a \neq e$  时,  $f(x)$  在  $x = e$  处间断, 为跳跃间断点。当  $a = e$  时,  $f(x)$  在  $x = e$  处连续。

2. (12 分) 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1+2a_n}{1+a_n} (n \geq 1)$ . 证明数列  $\{a_n\}$  收敛, 并求其极限。

解析:

这种递推数列的题, 一般是先通过证明数列单调有界, 从而得到数列有极限, 再令递推式两边

取极限, 解方程得到极限值。

首先尝试证明数列单调有界, 试算得到  $a_3 > a_2 > a_1$ , 可以尝试证明  $a_n$  单调递增:

法一暴力作差:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1 + 2a_n}{1 + a_n} - a_n = \frac{1 + a_n - a_n^2}{1 + a_n}$$

如果我们希望  $a_{n+1} - a_n > 0$ , 那么就要求  $1 + a_n - a_n^2 > 0$ , 即  $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , 可以使用数学归纳法证明:

假设现在已经有了  $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , 那么

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{1 + a_n} < 2 - \frac{1}{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

所以  $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  成立, 由此得到  $a_n$  单调递增, 同时我们还说明了  $a_n$  有上界, 所以  $a_n$  有极限。

法二利用单调性: 显然函数  $f(x) = \frac{1+2x}{1+x}$  是单调递增的, 所以如果  $a_n > a_{n-1}$ , 那么  $a_{n+1} = f(a_n) > f(a_{n-1}) = a_n$ , 所以  $a_n$  单调递增。

研究  $f(x)$ , 得到其值显然小于 2, 所以  $a_n$  有上界, 所以  $a_n$  有极限。

设  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , 那么  $a = \frac{1+2a}{1+a}$ , 解得  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

3. (10 分) 设  $f(u)$  在  $u = 1$  点可导, 且满足关系式  $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x) = o(x), x \rightarrow 0$ 。求  $f(1)$  和  $f'(1)$ 。

解析:

和前面填空题第 7 题几乎一模一样, 准备泰勒展开:

$$f(1 + \sin x) = f(1) + f'(1) \sin x + o(x)$$

$$f(1 - \sin x) = f(1) - f'(1) \sin x + o(x)$$

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = -2f(1) + 4f'(1) \sin x + o(x) = -2f(1) + 4f'(1)x + o(x)$$

比对题目条件, 得到  $f(1) = 0, f'(1) = 2$ 。

4. (11 分) 已知  $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ 。

(I) 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;

(II) 设  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , 求当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) - a$  的阶。

解析:

(I)

先通分, 通分后想洛想泰看你意愿:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x) - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - x + o(x^2)}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

(II)

求一个分式的阶, 只需要利用泰勒展开求出其分子和分母的阶, 然后相除即可。

$$\begin{aligned}
f(x) - 1 &= \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} - 1 \\
&= \frac{x + x^2 - \sin x - x \sin x}{x \sin x} \\
&= \frac{x^3/6 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} \\
&= \frac{x}{6} + o(x)
\end{aligned}$$

所以  $f(x) - 1$  的阶为 1。

5. (10 分) 设  $f(x)$  在  $x = a$  点二阶可导, 且  $f'(a) \neq 0$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)} \right)$$

解析:

和前面的填空题第 7 题与解答题第 3 题如出一辙, 给的都是单点处可导的条件, 继续泰勒展开, 和解答题 4 一样先通分:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f'(a) - f(x) + f(a)}{f'(a)(f(x) - f(a))(x-a)} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + o(x-a)^2}{f'(a)(f'(a)(x-a) + o(x-a))(x-a)} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + o(x-a)^2}{f'(a)^2(x-a)^2 + o(x-a)^2} \\
&= -\frac{f''(a)}{2f'(a)^2}
\end{aligned}$$

6. (10 分) 已知  $f \in C^2[0, 1]$ .

(I) 设  $x_0 \in [0, 1]$ , 写出  $f(x)$  在  $x_0$  点带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式;

(II) 设  $f(0) = f(1) = 0$ , 证明:  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$ 。

解析:

连续四题泰勒展开, 不知道是出卷老师喜欢出泰勒还是我习惯啥都先泰勒再说

(I)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

(II)

设  $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$ 。

法一

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0 - x_0)^2 = 0 \\
f(1) &= f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1 - x_0)^2 = 0
\end{aligned}$$

两式联立, 消去  $f'(x_0)$ , 得到

$$f(x_0) = -\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2(1 - x_0) - \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1 - x_0)^2x_0$$

两边取绝对值, 得到

$$\begin{aligned}|f(x_0)| &= \frac{1}{2} |f''(\xi_1)x_0^2(1-x_0) + f''(\xi_2)(1-x_0)^2x_0| \\ &\leq \frac{M}{2} (|x_0^2(1-x_0) + (1-x_0)^2x_0|) \\ &\leq \frac{M}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}M\end{aligned}$$

由于  $x_0$  是任意的, 所以  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$ 。

## 法二

上面的过程运算起来有一些麻烦, 主要是泰勒展开后产生的  $f'(x_0)$  是我们不需要的, 需要先联立消去。所以, 一种想法是, 如果  $x_0$  为导数为 0 的点就好了。这其实是合理的, 因为我们研究的是  $|f(x)|$  的最大值, 其最大值如果不在端点处取, 那其必然是一个极值点, 因此其导数必然为 0。所以我们可以直接取  $x_0$  为使得  $|f(x)|$  最大的点。

若  $x_0 = 0$  或  $1$ , 结论显然成立。否则, 必然有  $x_0$  为  $f(x)$  的极值点, 所以  $f'(x_0) = 0$ 。

$$\begin{aligned}f(0) &= f(x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2 = 0 \\ f(1) &= f(x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 = 0 \\ f(x_0) &= -\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2 = -\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2\end{aligned}$$

如果  $x_0 \leq \frac{1}{2}$ , 则得到  $|f(x_0)| = \frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2 \leq \frac{M}{8}$ 。

如果  $x_0 > \frac{1}{2}$ , 则得到  $|f(x_0)| = \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2 \leq \frac{M}{8}$ 。

所以  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$ 。

7. (5 分) 设  $K = \{f | f \text{ 在有界闭区间 } [a, b] \text{ 上可导, 在开区间 } (a, b) \text{ 内二阶可导}\}$ 。

命题  $P$ :  $\forall f \in K, \exists \xi \in (a, b), s.t. f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b-a)$ 。

(I) 是否可以在闭区间  $[a, b]$  上对  $f'$  直接用拉格朗日中值定理得到命题  $P$ ? 为什么?

(II) 请判断命题  $P$  是否成立, 若成立请证明, 否则请举反例。

解析:

(I) 对定理的使用条件要熟悉。拉格朗日中值定理中, 要求函数在  $[a, b]$  上连续, 但在这题中, 我们无法得到  $f'$  在  $[a, b]$  上是否连续。所以不可以。

(II)

导函数虽然不连续, 但我们知道, 导函数在很多性质上与连续函数是相同的, 比如其仍然满足零点存在性定理和介值原理 (达布定理) (《高等微积分教程 (上)》例 4.1.6), 所以我们可以先猜测这个命题是成立的, 看看能不能证明。

设  $k = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$ 。如果在  $(a, b)$  上存在两点  $x_1, x_2$ , 使得  $f''(x_1) \leq k \leq f''(x_2) = k$ , 那么由达布定理, 必然存在  $\xi$ , 使得  $f''(\xi) = k$ 。

如果不存在的话, 意味着  $f''(x) > k$  恒成立或  $f''(x) < k$  恒成立, 我们来说明这是不可能的, 只讨论第一种情况, 另一种情况同理。

如果  $f''(x) > k$  在  $(a, b)$  上恒成立, 我们  $g(x) = f'(x) - k(x-a)$ , 则  $g(a) = g(b) = f'(a)$ ,  $g(x)$  在  $(a, b)$  上可导, 且  $g'(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(a, b)$  上严格单调递增。所以存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $g(c) \neq g(a)$ 。

如果  $g(c) > g(a)$ , 由达布定理, 存在  $d \in (c, b)$ , 使得  $g(b) < g(d) < g(c)$ , 这与  $g(x)$  在  $(a, b)$  上严格单调递增矛盾。

如果  $g(c) < g(a)$ , 同理也可推得矛盾。所以  $f''(x) > k$  在  $(a, b)$  上恒成立是不可能的, 同理得到  $f''(x) < k$  在  $(a, b)$  上恒成立也是不可能的。所以结论成立。

注: 中间得到  $g'(x) > 0$  在  $(a, b)$  上成立,  $g(x)$  在  $(a, b)$  上单调递增后, 不能由此直接得到  $g(b) > g(a)$ , 然后认为矛盾。