2022 年《高等微积分 2》期末考试试题

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1, 5 题每小问 5 分, 第 6 题 7 + 8 分, 第 4 题 10 分, 其余每题各 15 分. 即使有某些小问无法完成, 也可以使用其结论解决后面的问题.

1 (1) 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$, 将结果表示成有关 $y(x)$ 的代数方程即可, 不一定能求出解析表达式.

(2) 给定正实数 ω, 求出方程 $y'' + \omega^2 y = 0$ 的全部解.

(3) 给定正数 a. 求所有正数 ω, 使得区间 $[0, a]$ 上存在不恒等于零的光滑函数 $y(x)$ 满足如下条件:

$$y'' + \omega^2 y = 0, \text{ 且 } \quad y(0) = y(a) = 0.$$

(4) 求 $(0, +\infty)$ 上的所有 C^2 光滑函数 $y(x)$, 使得 $y(1) = 1$, 且满足如下的 Euler 方程

$$x^2 y''(x) + \frac{1}{4} y(x) = 0, \quad \forall x > 0.$$

解. (1) 令 $y = xz(x)$, 则原 ODE 可改写为

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{z+1},$$

分离变量并两边不定积分, 得到

$$\int \frac{(z+1)dz}{z^2+1} = -\int \frac{dx}{x},$$

从而有

$$\frac{1}{2}\ln(z^2+1) + \arctan z = -\ln x + C,$$

化简即得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\frac{y}{x} = C.$$

解法二: 原 ODE 为 $(x-y)dx+(x+y)dy=0$. 一般的, 若 $P(x,y),Q(x,y)$ 都是 k 次齐次多项式, 则 $Pdx+Qdy=0$ 有积分因子 $\frac{1}{xP+yQ}$. 对于本题的 ODE, 有积分因子 $\frac{1}{x(x-y)+y(x+y)}=\frac{1}{x^2+y^2}$. 这样, 要求解的方程可改写为

$$0=\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

上式右边有原函数 $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}$, 由此可得 ODE 的解为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}=C.$$

(2) 特征方程为 $\lambda^2+\omega^2=0$, 特征值为 $\lambda=\pm\omega i$. 由此可得本题中 ODE 的所有解为

$$y(x)=C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x).$$

(3) 所求的 ω 为 $\omega=\frac{k\pi}{a}$, 其中 k 是任何正整数.

利用 (2) 的结论, 设 $y(x)=C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)$, 代入边值条件得到

$$C_1=0,\quad C_2\sin(\omega a)=0.$$

由于 $y(x)$ 不是零函数, 有 $C_2\neq 0$, 从而有 $\sin(\omega a)=0$, 进而可得 $\omega a=k\pi$, 其中 $k\in\mathbb{Z}_+$.

(4) 设 $z(t)=y(e^t)$, 则有 $e^{2t}y''(e^t)=z''(t)-z'(t)$, 由此可将原 ODE 改写为

$$z''-z'+\frac{1}{4}z=0.$$

此 ODE 的特征方程为 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$, 它有二重根 $\lambda=\frac{1}{2}$, 因而关于 z 的 ODE 的所有解为

$$z(t)=(ct+D)e^{\frac{1}{2}t}.$$

由此可得原 ODE 的全部解为

$$y(x)=z(\ln x)=(C\ln x+D)e^{\frac{1}{2}\ln x}=(C\ln x+D)\sqrt{x},$$

结合 $y(1)=1$ 可得 $D=1$. 所以所求的函数 $y(x)$ 为

$$y(x)=(C\ln x+1)\sqrt{x},\quad C\in\mathbb{R}.$$

□

2 在约束 $x^2+y^2+z^2=1$ 下, 求 $f(x,y,z)=xy+2yz$ 的最大值.

解. 令 $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2-1=0\}$, 它是 $\mathbb{R}^3$ 的有界闭集, 由最值定理知连续函数 f 在 S 上有最大值. 设 (x_0,y_0,z_0) 是最大值点, 由 Lagrange 乘子法可知存在实数 λ, 使得 (x_0,y_0,z_0,λ) 是 Lagrange 辅助函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xy+2yz-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

的临界点, 即满足如下方程组

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial L}{\partial x}=y-2\lambda x, \\ 0=\frac{\partial L}{\partial y}=x+2z-2\lambda y, \\ 0=\frac{\partial L}{\partial z}=2y-2\lambda z, \\ 0=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2+z^2-1). \end{cases}$$

(1) 如果 $\lambda=0$, 则 $y=0$, 此时 $f(x_0,y_0,z_0)=0$, 由于 $f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)=\frac{1}{2}$, 可知 (x_0,y_0,z_0) 不是 f 的最大值点, 矛盾!

(2) 如果 $\lambda\neq 0$, 则有 $y=2\lambda x, y=\lambda z$, 可得 $z=2x$ 且有

$$0=x+2z-2\lambda y=5x-2\lambda(2\lambda x)=(5-4\lambda^2)x.$$

显然 $x\neq 0$(否则 $x=y=z=0$ 矛盾!), 则 $\lambda^2=\frac{5}{4}$. 代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 可得

$$1=(5+4\lambda^2)x^2=10x^2.$$

由此可得 (x_0,y_0,z_0) 的全部解为

$$(x_0,y_0,z_0)=(\frac{\sqrt{10}}{10},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{5}),-(\frac{\sqrt{10}}{10},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{5}).$$

相应的 $f(x_0,y_0,z_0)=(x_0+2z_0)y_0=5x_0y_0=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. 所以 f 在 S 上的最大值点为

$$(x_0,y_0,z_0)=\pm(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{5}),$$

对应的 f 的最大值为 $\max_S f=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

另外的解法: 利用均值不等式, 对任何正数 μ 有 $2ab \le \mu a^2 + \frac{1}{\mu}b^2$. 由此可得

$$f(x,y,z) = xy + 2yz \le \left(\frac{\mu}{2}x^2 + \frac{1}{2\mu}y^2\right) + \left(\frac{2}{\mu}y^2 + \frac{\mu}{2}z^2\right),$$

取 μ 满足 $\frac{1}{2\mu} + \frac{2}{\mu} = \frac{\mu}{2}$, 即 $\mu = \sqrt{5}$, 则上述不等式表明

$$f(x,y,z) \le \frac{\mu}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

□

3 给定正数 a, 设空间曲线 Γ 为

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0.$$

计算第一型曲线积分 $\int_\Gamma (1+x)^2 ds$.

解法一. 由于 Γ 的定义式中 x, y, z 地位对称, 可得

$$I = \int_\Gamma (1+x)^2 ds = \int_\Gamma (1+y)^2 ds = \int_\Gamma (1+z)^2 ds.$$

比如对于前一个等式, 可以通过对 $\mathbb{R}^3$ 做坐标变换 $\Phi(x,y,z) = (y,x,z)$, 该坐标变换将 Γ 变换为 Γ. 这样, 对 Γ 的任何参数化 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \alpha \le t \le \beta$, $\Phi(\mathbf{r}(t))$ 也是 Γ 的一个参数化, 由此可得

$$\int_\Gamma (1+y)^2 ds = \int_\alpha^\beta (1+x(t))^2 \sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_\Gamma (1+x)^2 ds.$$

回到 I 的计算, 利用 L 上 $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=a^2$ 可得

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\int_\Gamma \left((1+x)^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2\right) ds \\
&= \frac{1}{3}\int_\Gamma \left(3 + 2x + 2y + 2z + x^2 + y^2 + z^2\right) ds \\
&= \frac{1}{3}\int_\Gamma \left(3 + a^2\right) ds \\
&= \frac{3+a^2}{3}\mathrm{Length}(\Gamma) \\
&= \frac{3+a^2}{3} 2\pi a,
\end{aligned}$$

最后一步是由于 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的大圆周, 其长度为 $2\pi a$. □

解法二. 引入正交变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

在 (u, v, w) 坐标系下 Γ 为 $u^2+v^2+w^2=a^2, w=0$, 它有参数化 $u(t)=a\cos t, v(t)=a\sin t, w(t)=0$. 此参数化诱导 Γ 在 (x, y, z) 坐标系下的参数化

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (1+y)^2 ds &= \int_0^{2\pi} \left(1+\frac{a\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{a\sin t}{\sqrt{6}}\right)^2 a dt \\ &= a\int_0^{2\pi} (1+\frac{a^2}{2}\cos^2 t+\frac{a^2}{6}\sin^2 t) dt \\ &= a(2\pi+\frac{2}{3}a^2\pi) \\ &= 2a\pi(1+\frac{a^2}{3}). \end{aligned}$$

□

4 设平面曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$, 取逆时针定向. 对给定的常数 a, 定义

$$I_a(r) = \int_C \frac{-ydx+xdy}{(x^2+y^2)^a}.$$

(1) 给出 C 的一个与定向相容的参数化, 并证明 $I_a(r)=r^{2(1-a)}I_a(1)$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

解. (1) C 的定义方程为

$$(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2=r^2,$$

可知 C 有如下与其逆时针定向相容的参数化

$$x=r\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}r\sin\theta, \quad y=\frac{2}{\sqrt{3}}r\sin\theta, \quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

用此参数化计算第二型曲线积分, 可得

$$\begin{aligned}I_a(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{-y\cdot x'(\theta)+x\cdot y'(\theta)}{(x^2+y^2)^a}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}r^2 d\theta}{r^{2a}\left(\cos^2\theta+\frac{5}{3}\sin^2\theta-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right)^a}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(\cos^2\theta+\frac{5}{3}\sin^2\theta-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right)^a}.\end{aligned}$$

这表明

$$I_a(r) = r^{2(1-a)}I_a(1).$$

(2) 注意到

$$I_a(1) = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(\cos^2\theta+\frac{5}{3}\sin^2\theta-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right)^a},$$

它是正值函数在 $[0,2\pi]$ 上的积分, 因而 $I_a(1)>0$. 利用 (1) 的结论可得

$$\lim_{r\to+\infty} I_a(r) = \begin{cases} \text{不存在, 或写成} +\infty, & \text{当} a<1 \text{ 时};\\ 0, & \text{当} a>1 \text{ 时};\\ I_a(1), & \text{当} a=1 \text{ 时}.\end{cases}$$

最后来计算出

$$I_1(1) = \int_{x^2+xy+y^2=1} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

的值. 令 $D=\{(x,y)|x^2+xy+y^2\le 1\}\backslash\{(x,y)|x^2+y^2<\epsilon^2\}$, 由格林公式可得

$$\begin{aligned}&\int_{x^2+xy+y^2=1} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} - \int_{x^2+y^2=\epsilon^2} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\\ =&\int_{\partial D} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\\ =&\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\right)dxdy\\ =&\iint_D 0dxdy\\ =&0.\end{aligned}$$

因此有

$$\int_{x^2+xy+y^2=1} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \int_{x^2+y^2=\epsilon^2} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi.$$

总结前述计算结果, 有

$$\lim_{r\to+\infty} I_a(r) = \begin{cases} \text{不存在, 或写成} +\infty, & \text{当} a < 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当} a > 1 \text{ 时;} \\ 2\pi, & \text{当} a = 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

□

5 设 S 是一个光滑的封闭曲面, 定向指向 S 外部. 考虑第二型曲面积分

$$I = \iint_S (x^3 - x)dydz + (2y^3 - y)dzdx + (3z^3 - z)dxdy.$$

试确定曲面 S, 使得积分 I 的值最小, 并求出该最小值.

解. 记 Σ 内部的区域 (含边界 Σ) 为 Ω, 由 Gauss 公式可得

$$I = \iiint_\Omega (3x^2 - 1 + 6y^2 - 1 + 9z^2 - 1)dxdydz.$$

上式是函数 $f(x,y,z) = 3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3$ 在 Ω 上的积分. 记

$$V = \{(x,y,z)|3x^2 + 6y^2 + 9z^2 \leq 3\},$$

则 f 在 V 上非正, 在 V 的补集 V^c 上取值为正. 由此可得

$$I = \iiint_{\Omega\cap V} f + \iiint_{\Omega\cap V^c} f \geq \iiint_{\Omega\cap V} f \geq \iiint_V f,$$

当 $S = \partial V$ 时上述不等式取等号. 这样, 所求 I 的最小值为

$$\min I = \iiint_V f.$$

令 $u=x, v=\sqrt{2}y, w=\sqrt{3}z$, 利用换元公式可得

$$\begin{aligned}
\min I &= \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} \big(3(u^2+v^2+w^2)-3\big)\,|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw\\
&=\frac{1}{\sqrt{6}}\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}\big(3(u^2+v^2+w^2)-3\big)\,dudvdw\\
&=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1(3r^2-3)r^2dr\\
&=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot(\frac{3}{5}r^5-r^3)|_0^1\\
&=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi.
\end{aligned}$$

□

6 设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. 对给定的正数 a, 计算二重积分

$$I=\iint_D\frac{dxdy}{(a+x^2+y^2)^2}.$$

解. 记 $D_1=D\cap\{x\ge y\}$, $D_2=D\cap\{x\le y\}$, 坐标变换 $(x,y)\to(y,x)$ 将 D_1 等同成 D_2, 利用换元公式可得

$$\iint_{D_2}\frac{dxdy}{(a+x^2+y^2)^2}=\iint_{D_1}\frac{dxdy}{(a+x^2+y^2)^2}.$$

在 D_1 上, 用极坐标 (r,θ), 则 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $0\le r\le\frac{1}{\cos\theta}$, 由此可得

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_1}\frac{dxdy}{(a+x^2+y^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{1/\cos\theta}\frac{1}{(a+r^2)^2}rdr\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\frac{-1}{2(a+r^2)}|_0^{1/\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2(a+\frac{1}{\cos^2\theta})}\right)d\theta\\
=&\frac{1}{2a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a\cos^2\theta+1}d\theta=\frac{1}{2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{a(1+\cos\alpha)+2}\\
=&\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+1}}\arctan\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{a+1}}|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
=&\frac{1}{2a\sqrt{a+1}}\arctan\frac{1}{\sqrt{a+1}}.
\end{aligned}$$

其中我们用到了如下不定积分

$$\int \frac{d\alpha}{a\cos\alpha+(a+2)} = \int \frac{1}{a\frac{1-t^2}{1+t^2}+(a+2)} \cdot 2\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{dt}{(a+1)+t^2} = \frac{1}{\sqrt{a+1}} \arctan \frac{t}{\sqrt{a+1}} + C = \frac{1}{\sqrt{a+1}} \arctan \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{a+1}} + C.$$

这样, 所求积分的值为

$$I = 2\iint_{D_1} \frac{dxdy}{(a+x^2+y^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a+1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a+1}}.$$

□

解法二.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(a+x^2+y^2)^2} dy$$
$$= \int_0^1 dx \frac{1}{2(a+x^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{a+x^2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a+x^2}} + \frac{1}{a+x^2+1} \right)$$

后一部分积分为

$$\int_0^1 \frac{1}{2(a+x^2)(a+x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{1}{a+x^2} - \frac{1}{a+1+x^2} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2\sqrt{a+1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a+1}}.$$

前一部分积分为

$$\int y' \frac{dy}{u+y^2} = \frac{y}{u+y^2} + 2\int \frac{y^2}{(u+y^2)^2} = \frac{y}{u+y^2} + 2\int \frac{1}{u+y^2} dy - 2u \int \frac{dy}{(u+y^2)^2}$$
$$\int \frac{dy}{(u+y^2)^2} = \frac{1}{2u} (\frac{1}{\sqrt{u}} \arctan \frac{y}{\sqrt{u}} + \frac{y}{u+y^2}) + C$$

□

7 设 D 是平面上由一条光滑的简单闭曲线所围成的区域 (含边界), ∂D 是其边界.

(1) 设 $f(x,y), g(x,y)$ 是 D 上的光滑函数, 且 $g(x,y)$ 在 ∂D 上处处为零. 利用格林公式证明如下的分部积分公式:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g dxdy = -\iint_D f\frac{\partial g}{\partial x} dxdy, \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} g dxdy = -\iint_D f\frac{\partial g}{\partial y} dxdy.$$

(2) 设 $u(x,y), v(x,y)$ 是 D 上的光滑函数, 且 $v(x,y)$ 在 ∂D 上处处为零. 对实数 λ, 将 $\mathbb{R}^3$ 中曲面

$$S(\lambda) = \{(x,y,z) | z = u(x,y) + \lambda v(x,y), (x,y) \in D\}$$

的面积记为 $A(\lambda)$. 证明:

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} A(\lambda) = -\iint_D \frac{(1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{xx}}{(u_x^2+u_y^2+1)^{3/2}} v(x,y) dxdy.$$

证明*:* (1) 利用格林公式, 有

$$\int_{\partial D} (fg) dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(fg) dxdy = \iint_D (f_x g + f g_x) dxdy.$$

由条件 g 在 ∂D 上处处为零, 有 $\int_{\partial D} (fg) dy = 0$, 代回上式即得

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g dxdy = -\iint_D f\frac{\partial g}{\partial x} dxdy.$$

另一个式子完全类似.

(2) 由第一型曲面积分的计算方法可知, 对于函数 $u + \lambda v$ 的图像 $S(\lambda)$ 有

$$A(\lambda) = \iint_D \sqrt{(u_x + \lambda v_x)^2 + (u_y + \lambda v_y)^2 + 1} dxdy.$$

将上述含参积分对 λ 求导, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda} A(\lambda) \\
&= \iint_D \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{(u_x + \lambda v_x)^2 + (u_y + \lambda v_y)^2 + 1}\right) dxdy \\
&= \iint_D \frac{(u_x + \lambda v_x) v_x + (u_y + \lambda v_y) v_y}{\sqrt{(u_x + \lambda v_x)^2 + (u_y + \lambda v_y)^2 + 1}} dxdy.
\end{aligned}$$

结合 (1) 中所述的分部积分公式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}A(\lambda)\\
&=\iint_D \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+1}}dxdy\\
&=-\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+1}})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+1}})\right)vdxdy\\
&=-\iint_D \frac{(1+u_x^2)u_{yy}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_y^2)u_{xx}}{(u_x^2+u_y^2+1)^{3/2}}v(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

□