2022 年春季《高等微积分 2》期中试卷

2022 年 4 月 17 日 9 : 50-11 : 50

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 2, 3 题各 10 分, 第 6 题 20 分, 其余每题各 15 分,

1 (1) 设 $P(x,y)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i}$ 是 n 次齐次的多项式, α 是小于 n 的正数. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{P(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x\cos y+y\sin y)e^x-x}{x^2+y^2}$.

(3) 已知有如下极限式成立:

$$\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(0,\cdots,0)} \frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}=0.$$

证明: $a_1=\cdots=a_n=0$.

2 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 函数 f 在 D 上的所有偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 都存在且有界, 即存在 M, 使得对任意的 $i\le n$ 以及任何 $\mathbf{x}\in D$ 都有 $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\mathbf{x}}\right|\le M$. 证明: f 是 D 上的连续函数.

3 设函数 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 C^2 光滑函数, 满足在任何点处都有 $f_y\neq 0$ 且

$$f_x^2 f_{yy}-2f_xf_yf_{xy}+f_y^2f_{xx}=0.$$

设 $y=y(x,z)$ 是由方程 $z=f(x,y)$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

4 (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ 的收敛域.

(2) 将函数 $f(x)=\frac{1}{1-5x+6x^2}$ 在 $x=0$ 附近表示成幂级数的和函数, 并求出该幂级数的收敛半径.

5 定义函数 $f(x)$ 为 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+1}$. 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内具有连续的导函数. (提示: 可能需要用到一致收敛的 Dirichlet 判别法. 设 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上一致收敛到零函数, 且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 n 单调; 设 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列在区间 I 上一致有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.)

6 设 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是 C^2 光滑函数.

(1) 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的临界点, 对每个向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, 计算极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t^2},$$

要求将结果用 f 的海瑟矩阵表示 (或等价的, 用 f 的二阶偏导表示).

(2) 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点. 证明:

$$f_{xx}(\mathbf{x}_0) \geq 0, \quad f_{yy}(\mathbf{x}_0) \geq 0.$$

(3) 设 P, Q 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 满足 Q 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界, 且当 $x^2 + y^2 \to +\infty$ 有 $P(x, y) \to +\infty$. 证明: $f = P - Q$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值.

(4) 设 (3) 中所述的函数 P, Q 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处有二阶导数, 且满足在 $\mathbb{R}^2$ 上处处有

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = e^P, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \geq e^Q.$$

证明: 对任何点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 都有 $P(x, y) \geq Q(x, y)$.(提示: 利用 (3) 的结论, 再用 (2) 的结论)

7 对二阶可导函数 $f(x, y, z)$, 定义

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

(1) 设 u 是 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上的光滑函数, 定义 $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上的函数 $f(x, y, z) = u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. 证明: f 在 $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上处处满足 $\Delta f = 0$ 的充分必要条件是 u 在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上处处满足 $u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) = 0$.

(2) 假设 (1) 中的 f 还满足在单位球面上恒等于 0, 当 $x^2 + y^2 + z^2 \to +\infty$ 时 $f(x, y, z) \to 1$. 请求出所有这样的 f.(提示: 考虑 $v(t) = u(\frac{1}{t})$)