复变函数回忆版（李岩松 2023 春）

未央-工物 21 宋沛轩

1 (13') Cauthy-Riemann 方程

在 $\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 中，有 $u(x,y)=v(x,y)^2$，请导出函数表达式。

2 (32') 多值函数与展开

已知 $\omega(z)=\sqrt[3]{\dfrac{(z(1-z))^2}{1+z}}$，规定在割线上岸的宗量辐角为 0。

（1）计算 $\omega(\pm i)$。

（2）求 $\omega(z)$ 在 $|z|>1$ 处的 Laurent 展开式（只要求不为零的前四项）。

（3）求 $\omega(z)$ 在 ∞ 处的留数。

3 (15') Poisson 公式

设复变函数 $\omega(z)=u+iv$，在 $0\le\arg(z)\le\pi$ 范围内，当 $z\to\infty$，$f(z)$ 一致趋向于 0。证明对于上半复平面的点，下述公式成立：

$$\begin{cases} u(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{yf(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \\ \\ v(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x-\xi)f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f(\xi)=u(\xi,0)$，该公式为上半平面的 Poisson 公式。

4 (29') 留数定理

使用留数定理计算积分。

（1）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-x\cos(\theta)}{1-x^2-2x\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta$

(2)$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin(ax)}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x$

5 (15') Gamma 函数应用

使用 Gamma 函数相关的知识求解下列积分。

（1）$\displaystyle\int_0^{\infty}x^{-\alpha}\cos(x)\mathrm{d}x, 0<\alpha<2$

(2)$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\oint\limits_{|x|<n+\frac{1}{2}}\Gamma(x)\mathrm{d}x$