2022 级微积分 A1 期末考试

mathsdream 整理版

2022.12.30

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

1. 设 $y(x)$ 是一阶线性方程 $y'-\frac{1}{x}y=x(x>0)$ 满足初值条件 $y(1)=1$ 的解，则 $y(2)=$ __________。

2. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $yy''+(y')^2=1$ 满足初值条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的解，则 $(y(1))^2=$ __________。

3. 积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx=$ __________。

4. 曲线段 $\displaystyle y=\int_0^x \sqrt{\sin t}\,dt\ (0\le x\le \pi)$ 的弧长为 __________。

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt=2x^5,\forall x\in(0,+\infty)$，则 $f(1)=$ __________。

6. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线共有 __________ 条。

7. 设连续可微函数 $y=y(x)$ 由方程 $\displaystyle x=\int_1^y \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)dt$ 确定，则 $y'(0)=$ __________。

8. 积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}}\,dx=$ __________。

9. 已知曲线 $y=y(x)$ 经过点 $(-1,1)$，且该曲线上任意点 P 处切线的斜率是直线 OP 斜率的三倍，其中 O 是原点，则 $y(-2)=$ __________。

10. 已知 $y=xe^{-2x}$ 是常系数二阶线性方程 $y''+ay'+by=0$ 的解，则 $a+b=$ __________。

二、选择题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

1. 积分 $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=$ __________。

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-2)$

C. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

D. $\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})$

2. 广义积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-6} =$ __________。

A. $\frac{\ln 6}{5}$

B. $\frac{\ln 5}{5}$

C. $\frac{\ln 3}{5}$

D. $\frac{\ln 2}{5}$

3. 设 $f(x)$ 为定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数，以下命题中的错误命题是 __________。

A. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 (达布) 上下积分均存在

B. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

C. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积且 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$，则 $f(x)$ 在其连续点处为零

D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

4. 定义 $J_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x\,dx$，$k = 1,2,3$。则这三个积分值从小到大排列依次是 __________。

A. J_1, J_2, J_3

B. J_2, J_3, J_1

C. J_3, J_2, J_1

D. J_2, J_1, J_3

5. 曲线段 $y = \sqrt{x}$ $(0 \leq x \leq 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面面积为 __________。

A. $\frac{13\pi}{3}$

B. 2π

C. $\frac{4(3\sqrt{3}-1)\pi}{3}$

D. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

6. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+x+1}, & x \geq 0 \\ 2x+1, & x < 0 \end{cases}$。$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(-1) = 1$，则 __________。

A. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2+x+1), & x \geq 0 \\ x^2+x-1, & x < 0 \end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}\ln(x^2+x+1)-1, & x\geq 0\\ x^2+x-1, & x<0\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\ln(x^2-x+1)+1, & x\geq 0\\ x^2+x+1, & x<0\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}\ln(x^2+x+1)+1, & x\geq 0\\ x^2+x+1, & x<0\end{cases}$

7. 关于广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^p+\ln x}$ 的收敛性，以下结论中错误的是 __________。

A. 当 $0\leq p<1$ 时，积分条件收敛

B. 当 $-1<p<0$ 时，积分条件收敛

C. 当 $p>1$ 时，积分绝对收敛

D. 当 $p\leq -1$，积分发散

8. 极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}=$ __________。

A. $\dfrac{2}{3}$

B. $\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{5}{6}$

D. $\dfrac{1}{2}$

9. 设二阶线性常系数常微分方程的通解为 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x$，其中 C_1 和 C_2 为任意常数，则这个微分方程是 __________。

A. $y''+2y'+2y=2x+2$

B. $y''+2y'+2y=2x-2$

C. $y''-2y'+2y=2x-2$

D. $y''-2y'+2y=2x+2$

10. 积分 $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)\,dx=$ __________。

A. $\sqrt{e}$

B. e

C. $\dfrac{1}{e}$

D. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

三、解答题（共 4 题，满分 40 分）

1. (15 分) 设 λ 是实数，使得函数 $f(x) = e^x(x^2 - x + \lambda)$ 的图像的渐近线同时也是曲线 $y = f(x)$ 在某点处的一条切线。

   (i) 求 λ 的值；

   (ii) 求 $f(x)$ 的单调区间、极值和最值；

   (iii) 求 $f(x)$ 的凹凸性区间，以及拐点 (写出拐点横坐标即可)。

2. (10 分) 已知在平面直角坐标系中，区域 D 由 x 轴和参数曲线 $x(t) = t + \arctan t, y(t) = 4t(1-t)$，$(0 \le t \le 1)$ 共同围成。

   (i) 求 D 的面积；

   (ii) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积。

3. (10 分) 求二阶线性 Euler 方程 $x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3 \ln x$ $(x > 0)$ 的通解。

4. (5 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续可微，满足 $0 < f'(x) \le 1, \forall x \in [0, 1]$ 且 $f(0) = 0$。证明：

$$\int_0^1 (f(x))^3 \, dx \le \left(\int_0^1 f(x) \, dx \right)^2 .$$

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 设 $y(x)$ 是一阶线性方程 $y' - \frac{1}{x}y = x(x > 0)$ 满足初值条件 $y(1) = 1$ 的解，则 $y(2) = 4$。

   解析：一阶线性微分方程，由公式或常数变易法，通解为：$y(x) = x^2 + Cx$，代入初值条件，得 $C = 0$，所以 $y(2) = 4$。

2. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $yy'' + (y')^2 = 1$ 满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的解，则 $(y(1))^2 = 2$。

   解析：这是一个不显含 x 的二阶微分方程，可降阶。令 $p = y'$，则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，代入方程得到 $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 1$，这是一个可分离变量的微分方程，求解得到 $1 - p^2 = \dfrac{C}{y^2}$，代入初值条件当 $x = 0$ 时，$y = 1, p = 0$，得到 $C = 1$，所以 $p^2 = 1 - \dfrac{1}{y^2}$。由于在 $x = 0$ 处 $y = 1$，要使得等式成立，当 $x > 0$ 时，需要 $y \geq 1$，所以要求 $p \geq 0$，得到 $y' = p = \dfrac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}$，分离变量求解得到 $\sqrt{y^2 - 1} = x + C$，代入初值条件得到 $C = 0$，所以 $\sqrt{y^2 - 1} = x$，即 $y^2 = x^2 + 1$，所以 $(y(1))^2 = 2$。

   注：在注意力集中的情况下，可以注意到 $(yy')' = yy'' + (y')^2 = 1$，从而直接得到 $yy' = x + C$，然后代入初值条件，得到 $C = 0$，所以 $yy' = x$，分离变量并代入初值即可求解得到 $y^2 = x^2 + 1$。当然，你要是注意力特别好，直接一步发现 $(y^2)'' = 2yy'' + 2(y')^2 = 2$，那也是可以的。

3. 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx = 2$。

   解析：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\sin x(1 - \sin^2 x)}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\sin x}\cos x\,dx \\
&\xlongequal{t=\sin x} \int_0^1 3\sqrt{t}\,dt = 2
\end{aligned}
$$

4. 曲线段 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t}\,dt\ (0 \leq x \leq \pi)$ 的弧长为 4。

   解析：

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\,dx \\
&= 4
\end{aligned}
$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = 2x^5, \forall x \in (0, +\infty)$，则 $f(1) = 5$。

   解析：对等式两边关于 x 求导，得到：$2xf(x^2) = 10x^4$，即 $f(x^2) = 5x^3$，令 $x = 1$，得到 $f(1) = 5$。

6. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线共有 3 条。

   解析：先考虑垂直渐近线，当 $x\to 0$ 时，$y\to\infty$，所以 $x=0$ 是垂直渐近线。

   再考虑水平渐近线/斜渐近线。

   当 $x\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=0$，所以 $y=x$ 是一条渐近线。

   当 $x\to-\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$，所以 $y=0$ 是一条渐近线。

   综上，总共有三条渐近线。

7. 设连续可微函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\displaystyle\int_1^y \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)dt$ 确定，则 $y'(0)=2$。

   解析：等式代入 $x=0$，得到 $y(0)=1$。对等式两边关于 x 求导，得到 $1=\sin^2\left(\frac{\pi y}{4}\right)y'$，代入 $x=0$，得到 $y'(0)=\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=2$。

8. 积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}}dx=0$。

   解析：这是一个奇函数，还是在一个关于原点对称的区间上积分，所以结果为 0。

9. 已知曲线 $y=y(x)$ 经过点 $(-1,1)$，且该曲线上任意点 P 处切线的斜率是直线 OP 斜率的三倍，其中 O 是原点，则 $y(-2)=8$。

   解析：设点 P 的坐标为 (x,y)，则切线斜率为 y'，直线 OP 斜率为 $\dfrac{y}{x}$，由题意可得微分方程 $y'=3\dfrac{y}{x}$，这是一个可分离变量的微分方程，求解得到 $y=Cx^3$，代入点 $(-1,1)$，得到 $C=-1$，所以曲线方程为 $y=-x^3$，所以 $y(-2)=8$。

10. 已知 $y=xe^{-2x}$ 是常系数二阶线性方程 $y''+ay'+by=0$ 的解，则 $a+b=8$。

    解析：常系数齐次线性方程有形式为 xe^{-2x} 的解，当且仅当其特征方程有重根 -2，即 $(r+2)^2=0$，所以 $a=4,b=4$，所以 $a+b=8$。

二、选择题解析

1. 积分 $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=C$。

   A. $\dfrac{1}{2}$

   B. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}-2)$

   C. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

   D. $\dfrac{1}{2}(2-\sqrt{3})$

   解析：二次根式，准备三角换元，令 $x=\sec\theta$，则 $dx=\sec\theta\tan\theta d\theta$，积分限变为 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ 到

$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$，这个范围内 $\tan\theta$ 为负，所以：

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sec^2\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}} \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sec^2\theta\tan\theta}\cdot(-1) \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\cdot(-1)d\theta \\ &= -\sin\theta|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\end{aligned}$$

注：定积分做三角换元时，需要严格注意变量范围和三角函数的正负，因为要准备去根号。

2. 广义积分 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-6} = A$。

   A. $\dfrac{\ln 6}{5}$

   B. $\dfrac{\ln 5}{5}$

   C. $\dfrac{\ln 3}{5}$

   D. $\dfrac{\ln 2}{5}$

解析：部分分式分解，得到 $\dfrac{1}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{1/5}{x-2} - \dfrac{1/5}{x+3}$，所以：

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+x-6} &= \int \left(\frac{1/5}{x-2} - \frac{1/5}{x+3}\right)dx \\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{|x-2|}{|x+3|} + C \\ \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-6} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{5}\ln\frac{x-2}{x+3}\Big|_3^t \\ &= -\frac{1}{5}\ln\frac{1}{6} = \frac{\ln 6}{5}\end{aligned}$$

注：广义积分最好还是先算出一个总的原函数。如果直接分开去算 $\frac{1}{x-2}$ 和 $\frac{1}{x+3}$ 的广义积分，这俩的积分都是发散的，无法继续。

3. 设 $f(x)$ 为定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数，以下命题中的错误命题是 D。

   A. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 (达布) 上下积分均存在

   B. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

   C. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$，则 $f(x)$ 在其连续点处为零

   D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

解析：选项 D 错误。函数在闭区间上有界，并不一定可积，例如狄利克雷函数。

选项 A 正确，有界函数的上下和是有界的，所以存在确界，即（达布）上下积分均存在。选项 B 正确，见《高等微积分教程（上）》P.134 定理 5.1.5。选项 C 正确，这里简要证明：设 $f(x)$ 在其连续点处不为零，则存在一个连续点 c，使得 $f(c)>0$，由连续性可知，在 c 的某个邻域内，$f(x) \geq \dfrac{f(c)}{2} > 0$，从而该邻域上的积分大于零，所以整体积分大于零，与题设矛盾。

4. 定义 $J_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x \, dx$，$k = 1, 2, 3$。则这三个积分值从小到大排列依次是 D。

   A. J_1, J_2, J_3

   B. J_2, J_3, J_1

   C. J_3, J_2, J_1

   D. J_2, J_1, J_3

   解析：考虑三段区间 $[0,\pi], [\pi, 2\pi], [2\pi, 3\pi]$ 上的积分，分别对应 $J_1, J_2 - J_1, J_3 - J_2$。在每个区间上，$\sin x$ 的符号是确定的，并且 e^{x^2} 是单调递增的，可以得到，第一段和第三段的积分为正，第二段的积分为负，所以 $J_1 > J_2$，$J_3 > J_2$，所以 J_2 最小。又因为第三段的积分绝对值大于第二段积分的绝对值，所以 $J_3 > J_1$，综上，$J_2 < J_1 < J_3$。

5. 曲线段 $y = \sqrt{x}$ $(0 \le x \le 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面面积为 A。

   A. $\dfrac{13\pi}{3}$

   B. 2π

   C. $\dfrac{4(3\sqrt{3}-1)\pi}{3}$

   D. $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

   解析：

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \\
&= \int_0^2 \pi \sqrt{4x+1} \, dx \\
&= \pi \left. \frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{6} \right|_0^2 \\
&= \frac{13\pi}{3}
\end{aligned}
$$

6. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}, & x \ge 0 \\ 2x+1, & x < 0 \end{cases}$。$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(-1) = 1$，则 D。

   A. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2+x+1), & x \ge 0 \\ x^2+x-1, & x < 0 \end{cases}$

   B. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2+x+1) - 1, & x \ge 0 \\ x^2+x-1, & x < 0 \end{cases}$

   C. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2-x+1) + 1, & x \ge 0 \\ x^2+x+1, & x < 0 \end{cases}$

   D. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2+x+1) + 1, & x \ge 0 \\ x^2+x+1, & x < 0 \end{cases}$

解析：先求两个分段各自的不定积分：

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln(x^2+x+1)+C_1$$

$$\int (2x+1)\,dx = x^2+x+C_2$$

原函数 $F(x)$ 满足 $F(-1)=1$，代入得到 $C_2=1$，所以当 $x<0$ 时，$F(x)=x^2+x+1$。原函数需要是一个可导函数，所以其应该在 $x=0$ 处连续，计算 $x=0$ 处的左右极限，得到 $C_1=1$，所以当 $x\geq 0$ 时，$F(x)=\ln(x^2+x+1)+1$。综上，选项 D 正确。

7. 关于广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^p+\ln x}$ 的收敛性，以下结论中错误的是 D。

   A. 当 $0\leq p<1$ 时，积分条件收敛

   B. 当 $-1<p<0$ 时，积分条件收敛

   C. 当 $p>1$ 时，积分绝对收敛

   D. 当 $p\leq -1$，积分发散

解析：首先把这题做了，当 x 充分大时，$\dfrac{1}{x^p+\ln x}$ 是单调递减趋于 0 的，而 $\sin x$ 的定积分 $\displaystyle\int_1^x \sin t\,dt$ 是有界的，所以由 Dirichlet 判别法可知，该积分一定收敛，选项 D 错误。

该积分的问题点为无穷远处。当 $p>1$ 时，$\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\ln x}\right|\leq \dfrac{1}{x^p+\ln x}\sim\dfrac{1}{x^p}$，所以积分绝对收敛，选项 C 正确。

要讨论 A 和 B 选项，结合我们最开始的分析，只需要说明其不为绝对收敛。

当 $p<1$ 时，考虑 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p+\ln x}\right|dx$，做放缩，得到 $\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\ln x}\right|\geq\dfrac{|\sin x|^2}{x^p+\ln x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1-\cos 2x}{x^p+\ln x}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x^p+\ln x}-\dfrac{\cos 2x}{x^p+\ln x})$。而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+\ln x}dx$ 发散，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p+\ln x}dx$ 收敛（同开头分析，由 Dirichlet 判别法），所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|^2}{x^p+\ln x}dx$ 发散，由比较判敛法，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p+\ln x}\right|dx$ 发散，所以当 $p<1$ 时，积分条件收敛，选项 A、B 正确。

注：学习著名案例《高等微积分教程（上）》P.195 例题 6.2.1，结论和证明过程都非常有价值。

8. 极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}=C$。

   A. $\dfrac{2}{3}$

   B. $\dfrac{1}{3}$

   C. $\dfrac{5}{6}$

   D. $\dfrac{1}{2}$

解析：这是一个定积分的黎曼和形式，先提出个 $\dfrac{1}{n}$ 然后选函数：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\\&=\int_0^1(1+x)x\,dx=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

注：在微积分 1 的下半学期能遇到这种含求和式的极限，九成可能就是要准备凑定积分定义。基本的原理是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(f(\dfrac{1}{n})+f(\dfrac{2}{n})+\cdots+f(\dfrac{n}{n}))=\int_0^1 f(x)dx$。

9. 设二阶线性常系数常微分方程的通解为 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x$，其中 C_1 和 C_2 为任意常数，则这个微分方程是 C。

   A. $y''+2y'+2y=2x+2$

   B. $y''+2y'+2y=2x-2$

   C. $y''-2y'+2y=2x-2$

   D. $y''-2y'+2y=2x+2$

   解析：分析方程的解的结构，得到 $e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$ 是对应齐次方程的通解，即 $e^x\cos x$ 和 $e^x\sin x$ 是对应齐次方程的两个线性无关解，其对应的特征根为 $1+i$ 和 $1-i$，所以特征方程为 $(r-1-i)(r-1+i)=0$，即 $r^2-2r+2=0$，所以齐次方程为 $y''-2y'+2y=0$。非齐次方程的一个特解是 x，代入齐次方程左端得到 $2x-2$，所以非齐次方程为 $y''-2y'+2y=2x-2$，选项 C 正确。

10. 积分 $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)\,dx=D$。

    A. $\sqrt{e}$

    B. e

    C. $\dfrac{1}{e}$

    D. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

    解析：$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)\,dx=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx-\int_0^1 x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$，对第二个积分使用分部积分，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx&=\int_0^1 x\,d\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\\&=-xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\&=-\frac{1}{\sqrt{e}}+\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\end{aligned}$$

所以 $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)\,dx=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx-\int_0^1 x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$。

三、解答题解析

1. (15 分) 设 λ 是实数，使得函数 $f(x)=e^x(x^2-x+\lambda)$ 的图像的渐近线同时也是曲线 $y=f(x)$ 在某点处的一条切线。

   (i) 求 λ 的值；

   (ii) 求 $f(x)$ 的单调区间、极值和最值；

   (iii) 求 $f(x)$ 的凹凸性区间，以及拐点 (写出拐点横坐标即可)。

解析：

(i) 先计算函数的渐近线。$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$，所以 $y=0$ 是水平渐近线。$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$，所以 $+\infty$ 一侧没有渐近线，即函数只有一条渐近线 $y=0$。设该渐近线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处为切线，则 $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)=0$，解方程组得到 $x_0=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=\dfrac{1}{4}$。

(ii) 计算 $f'(x)=e^x(x^2+x-\frac{3}{4})$，令 $f'(x)=0$ 得到 $x=\dfrac{1}{2}$ 和 $x=-\dfrac{3}{2}$，详细分析每一段的导数正负：

- 当 $x\in(-\infty,-\frac{3}{2})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；
- 当 $x\in(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；
- 当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

由单调性分析可知，$f(x)$ 在 $x=-\dfrac{3}{2}$ 处取得极大值 $f(-\frac{3}{2})=4e^{-\frac{3}{2}}$，在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处取得极小值 $f(\frac{1}{2})=0$。

而 $f(x)=e^x(x-1/2)^2\ge 0$，所以函数的最小值为 0，无最大值。

(iii) 计算 $f''(x)=e^x(x^2+3x+\frac{1}{4})$，令 $f''(x)=0$ 得到 $x=\dfrac{-3\pm2\sqrt{2}}{2}$，详细分析每一段的二阶导正负：

- 当 $x\in(-\infty,\frac{-3-2\sqrt{2}}{2})$ 时，$f''(x)>0$，$f(x)$ 下凸；
- 当 $x\in(\frac{-3-2\sqrt{2}}{2},\frac{-3+2\sqrt{2}}{2})$ 时，$f''(x)<0$，$f(x)$ 上凸；
- 当 $x\in(\frac{-3+2\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，$f(x)$ 下凸。

所以函数有两个拐点，横坐标分别为 $\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{2}$ 和 $\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{2}$。

2. (10 分) 已知在平面直角坐标系中，区域 D 由 x 轴和参数曲线 $x(t)=t+\arctan t$，$y(t)=4t(1-t)$，$(0\le t\le 1)$ 共同围成。

(i) 求 D 的面积；

(ii) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积。

解析：

(i)

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{x=x(0)}^{x=x(1)} y\,dx \\
&= \int_0^1 y(t)\,dx(t) \\
&= \int_0^1 y(t)x'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 4t(1-t)\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\
&= \pi+2\ln 2-\frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{x=x(0)}^{x=x(1)} \pi y^2 \, dx \\
&= \int_0^1 \pi (y(t))^2 x'(t) \, dt \\
&= \int_0^1 \pi (4t(1-t))^2 \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\
&= 16\pi \ln 2 - \frac{152}{15}\pi
\end{aligned}
$$

3. (10 分) 求二阶线性 Euler 方程 $x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3 \ln x \ (x > 0)$ 的通解。

解析：Euler 方程，先令 $x = e^t, t = \ln x$，则 $xy' = \dfrac{dy}{dt}, x^2y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$，代入方程得到常系数线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = te^{3t}.$$

先求解对应的齐次方程的通解，特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0$，有二重根 $r = 3$，所以齐次方程的通解为 $y_c = e^{3t}(C_1 + C_2t)$。

再求非齐次方程的一个特解，右端为 te^{3t}，而 3 是特征方程的二重根，所以设特解为 $y_p = t^2(At + B)e^{3t}$，代入方程解得 $A = \dfrac{1}{6}, B = 0$，所以非齐次方程的一个特解为 $y_p = \dfrac{1}{6}t^3e^{3t}$。

所以常系数线性微分方程的通解为 $y = y_c + y_p = e^{3t}(C_1 + C_2t) + \dfrac{1}{6}t^3e^{3t}$，代回 x 的变量，得到 Euler 方程的通解为

$$y = x^3 \left[C_1 + C_2 \ln x + \frac{1}{6}(\ln x)^3\right].$$

4. (5 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微，满足 $0 < f'(x) \le 1, \forall x \in [0,1]$ 且 $f(0) = 0$。证明：

$$\int_0^1 (f(x))^3 \, dx \le \left(\int_0^1 f(x) \, dx\right)^2.$$

解析：令 $g(x) = (\int_0^x f(t)dt)^2 - \int_0^x (f(t))^3 dt$，则：

$$g'(x) = f(x)\left[2\int_0^x f(t)dt - (f(x))^2\right]$$

再令 $h(x) = 2\int_0^x f(t)dt - (f(x))^2$，则：

$$h'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \ge 0$$

所以 $h(x)$ 单调递增，$h(x) \ge h(0) = 0$，又由 $f'(x) > 0$，所以 $f(x) \ge f(0) = 0$，所以 $g'(x) = f(x)h(x) \ge 0$，所以 $g(x) \ge g(0) = 0$，由此得到 $g(1) \ge 0$，此即题目要证的结论。