2023 年春季《高等微积分 2》期中考试试卷

2023 年 4 月 15 日 9 : 50-11 : 50

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题 10 分, 其余每题 15 分.

1 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且在 D 上处处有 $\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}\le M$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 利用微分中值定理证明:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M\cdot|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

2 (1) 设 $w=f(u,v)$ 是 C^2 光滑函数, 且 $u=x-cy,v=x+cy$, 其中 c 为非零常数. 将 w 视为 x,y 的函数 $w=w(x,y)$, 计算 $w''_{xx}-\frac{1}{c^2}w''_{yy}$ 的值, 用 f 的二阶偏导表示.

(2) 设可微函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z^2$. 令 $u=x,v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$. 将 w 视为 u,v 的函数 $w=w(u,v)$, 求偏导数 $\frac{\partial w}{\partial u}\big|_{(u,v)=(2,1)}$.

3 (1) 设 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是给定的光滑函数, 点 (a,b,c) 满足

$$F(a,b,c)=0,\quad F'_x(a,b,c)\ne 0,\quad F'_y(a,b,c)\ne 0,\quad F'_z(a,b,c)\ne 0.$$

由隐函数定理, 在 (a,b,c) 附近由方程 $F(x,y,z)=0$ 将 z 表示成 x,y 的隐函数 $z=z(x,y)$, 记该隐函数关于 y 的偏导函数为 $\frac{\partial z}{\partial y}$. 类似的定义 $\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial y}{\partial x}$. 求表达式 $\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$ 的值.

(2) 已知光滑函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在点 $(0,0)$ 附近的 *Taylor* 公式为

$$f(x,y)=ax+by+cx^2+dxy+ey^2+o(x^2+y^2),$$

其中 $b \neq 0$. 设在 $(0,0)$ 附近由方程 $f(x,y)=0$ 确定 y 关于 x 的隐函数为 $y=y(x)$. 求 $y(x)$ 在 $x=0$ 附近的 带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 要求展开至 2 阶, 即余项为 $o(x^2)$.

4 (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} x^n$ 的收敛半径.

(2) 定义函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, 请把函数 $f(x)$ 表示成关于 x 的幂级数.

5 (1) 证明: 对任何正数 $a<1$, 函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$ 在区间 $(0,a]$ 上一致收敛.

(2) 记 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$. 证明:

$$\int_0^1 f(x)dx = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(注意: 完全严格的处理可能并不容易, 时间不够的话允许稍微省略严格的论证)

6 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是 C^2 光滑函数.

(1) 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的临界点, 对每个向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, 计算极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t^2}$, 要求将结果用 f 的海瑟矩阵表示 (或等价的, 用 f 的二阶偏导表示).

(2) 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的极大值点. 证明: $f''_{xx}(\mathbf{x}_0)\le 0, \quad f''_{yy}(\mathbf{x}_0)\le 0$.

(3) 设 $g(x,y)=(2+\sin x)\cdot\sin y$, 令 $D=\{(x,y)|0<x,y<2\pi\}$. 求出 g 在 D 上的所有临界点.

7 令 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 为开圆盘, $S=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 为其边界. 设 C^2 光滑函数 $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足: 在 D 中处处有

$$-\Delta u-(1-u^2-v^2)u=0, \quad -\Delta v-(1-u^2-v^2)v=0,$$

且对 $(x,y)\in S$ 有 $u(x,y)=v(x,y)=0$, 其中 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(1) 证明: $\Delta(u^2)=2||\nabla u||^2+2u\Delta u$, 其中 ∇u 表示 u 的梯度向量, $||\nabla u||$ 表示其长度.

(2) 通过考虑 u^2+v^2 在闭集 $D\cup S$ 上的最大值点 (x_0,y_0), 利用第 6 题第 (2) 小问的结论, 结合本题第 (1) 小问的结论, 证明: 对任何 $(x,y)\in D$ 有 $u^2(x,y)+v^2(x,y)\le 1$.