第五部分 多元函数微分学

[选择题]

容易题 1—36，中等题 37—87，难题 88—99。

1．设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 π： $4x-2y+z-2=0$，则直线 L （　）

(A) 平行于 π。 (B) 在上 π。(C) 垂直于 π。 (D) 与 π 斜交。

答：C

2．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　）

(A) 连续，偏导数存在　　(B) 连续，偏导数不存在

(C) 不连续，偏导数存在　　(D) 不连续，偏导数不存在

答：C

3．设函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases}x=u+v\\y=u^2+v^2\end{cases}$ 确定，则当 $u\neq v$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=$（　）

(A) $\dfrac{x}{u-v}$　(B) $\dfrac{-v}{u-v}$　(C) $\dfrac{-u}{u-v}$　(D) $\dfrac{y}{u-v}$

答：B

4．设 $f(x,y)$ 是一二元函数，(x_0,y_0) 是其定义域内的一点，则下列命题中一定正确的是（　）

(A) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可导。

(B) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续。

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续。

答：D

5．函数 $f(x,y,z)=\sqrt{3+x^2+y^2+z^2}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的梯度是（　）

(A) $(\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3})$　(B) $2(\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3})$　(C) $(\frac{1}{9},\frac{-1}{9},\frac{2}{9})$　(D) $2(\frac{1}{9},\frac{-1}{9},\frac{2}{9})$

答：A

6．函数$z=f(x.y)$在点(x_0,y_0)处具有两个偏导数$f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 是函数存在全微分的（　　　　）。

(A).充分条件　　　　(B).充要条件

(C).必要条件　　　　(D). 既不充分也不必要

答 C

7．对于二元函数$z=f(x,y)$，下列有关偏导数与全微分关系中正确的命题是（　　　）。

(A).偏导数不连续，则全微分必不存在　　　　(B).偏导数连续，则全微分必存在

(C).全微分存在，则偏导数必连续　　　　(D).全微分存在，而偏导数不一定存在

答 B

8．二元函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处满足关系（　　　）。

(A).可微（指全微分存在）$\Leftrightarrow$ 可导（指偏导数存在）$\Rightarrow$连续

(B).可微$\Rightarrow$可导$\Rightarrow$连续

(C).可微$\Rightarrow$可导或可微$\Rightarrow$连续，但可导不一定连续

(D).可导$\Rightarrow$连续，但可导不一定可微

答 C

9．若$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$，则$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$是（　　）

(A).连续但不可微　　　　(B).连续但不一定可微

(C).可微但不一定连续　　　　(D).不一定可微也不一定连续

答 D

10．设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处不连续，则$f(x,y)$在该点处（　　）

(A).必无定义　　　　(B)极限必不存在

(C).偏导数必不存在　　　　(D).全微分必不存在。

答 D

11．二元函数的几何图象一般是：(　　)

(A)　　一条曲线

(B) 一个曲面

(C) 一个平面区域

(D) 一个空间区域

答 B

12．函数$z=\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域为( )

(A) 空集

(B) 圆域

(C) 圆周

(D) 一个点

答 C

13．设$u=f(x^2+y^2-z^2)$,则$\frac{\partial u}{\partial x}=$( )

(A) $2xf'$

(B) $2x\frac{\partial u}{\partial f}$

(C) $2x\frac{\partial f}{\partial(x^2+y^2-z^2)}$

(D) $2x\frac{\partial u}{\partial(x^2+y^2-z^2)}$

答 A

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$ =( )

(A) 存在且等于 0。

(B) 存在且等于 1。

(C) 存在且等于 -1

(D) 不存在。

15. 指出偏导数的正确表达( )

(A) $f_x'(a,b)=\lim\limits_{h,k\to 0}\dfrac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$

(B) $f_x'(0,)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$

(C) $f_y'(0,y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,y+\Delta y)-f(0,y)}{\Delta y}$

(D) $f_x'(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{x}$

答 C

16. 设 $f(x,y)=\ln(x-\sqrt{x^2-y^2})$ （其中 $x>y>0$），则 $f(x+y,x-y)=$（ ）.

（A）$2\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y})$；（B）$\ln(x-y)$；（C）$\dfrac{1}{2}(\ln x-\ln y)$；（$D$）$2\ln(x-y)$.

答案 A

17. 函数 $f(x,y)=\sin(x^2+y)$ 在点 $(0,0)$ 处（ ）

（A）无定义； （B）无极限； （C）有极限，但不连续； （D）连续.

答案 D

18. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 间断，则（ ）

（A）函数在点 P_0 处一定无定义；

（ B ）函数在点 P_0 处极限一定不存在；

（ C ）函数在点 P_0 处可能有定义，也可能有极限；

（ D ）函数在点 P_0 处有定义，也有极限，但极限值不等于该点的函数值.

答案 C

19．设函数 $u=u(x,y)$ ， $v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} x=u+v \\ y=u^2+v^2 \end{cases}$ 确定， $u\neq v$ ，则

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=$（ ）

（ A ） $\dfrac{x}{u-v}$ ； （ B ） $\dfrac{-v}{u-v}$ ；

（ C ） $\dfrac{-u}{u-v}$ ； （ D ） $\dfrac{xy}{u-v}$.

答案 B

20． $u=\sqrt{3+x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处的梯度 $gradu=$（ ）

（ A ） $(\frac{1}{9},-\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ ； （ B ） $(\frac{2}{9},-\frac{2}{9},\frac{4}{9})$ ；

（ C ） $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ； （ D ） $(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.

答案 C

21．设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，且 $f_x(x_0,y_0)=0$ ， $f_y(x_0,y_0)=0$ ，则

函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处（ ）

（ A ）必有极值，可能是极大，也可能是极小；

（ B ）可能有极值，也可能无极值；

（ C ）必有极大值；

（ D ）必有极小值.

答案 B

22．设 $z=\sqrt{xy}$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ =( )

(A) 0

(B) 不存在

(C) -1

(D) 1

答 A。

23．设 $z = y\sin(xy) + (1-y)\arctan x + e^{-2y}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ =（ ）

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$

(D) 0

答 B。

24．设 $x + z = yf(x^2 - z^2)$，则 $z\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ =（ ）

(A) x

(B) y

(C) z

(D) $yf(x^2 - z^2)$

答 A

25．设 $f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$，确定 $z = z(x, y)$ 则 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ =（ ）

(A) $-z$

(B) z

(C) $-y$

(D) y

答 B

26．已知 $x + y - z = e^x, xe^x = \tan t, y = \cos t$，则 $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}$ =（ ）

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) 0

答 D

27．设$z=z(x,y)$由方程$e^{-xy}-2z+e^{z}=0$确定,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$=(　　)

(A) $\dfrac{-y^2e^{-xy}}{e^z-2}$

(B) $\dfrac{-y^2e^{-xy}(e^z-2)-ye^{-xy}e^z}{(e^z-2)^2}$

(C) $\dfrac{-y^2e^{-xy}(e^z-2)+y^2e^{-2xy+z}}{(e^z-2)^2}$

(D) $\dfrac{-y^2e^{-xy}(e^z-2)^2-y^2e^{-2xy+z}}{(e^z-2)^3}$

答 D

28．设$z=f(x,u),u=xy$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$=(　　)

(A) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}y^2$

(B) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y+\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}y^2$

(C) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y+\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}y^2$

(D) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y+\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$

答 C

29．设$z=f(u,v),u=x^2+y^2,v=x^2-y^2$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$=(　　)

(A) $2x\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$

(B) $2x\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$

(C) $2x\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$

(D) $4xy\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$

答 D

30．下列做法正确的是( )

(A)．设方程 $z^2=x^2+y^2+a^2$，$F'_x=2zz'_x-2x, F'_z=2z$，代入 $z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$，得 $z'_x=\dfrac{x}{2z}$．

(B) 设方程 $z^2=x^2+y^2+a^2$，$F'_x=-2x, F'_z=2z$，代入 $z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$，得 $z'_x=\dfrac{x}{z}$．

(C) 求 $z=x^2+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面，因为曲面法向量

$\vec{n}=(2x,2y,-1)//(2,2,-1)$，$\therefore \dfrac{2x}{2}=\dfrac{2y}{2}=\dfrac{-1}{-1},\Rightarrow x=1,y=1,z=-1$

切平面方程为 $2(x-1)+2(y-1)-(z+1)=0$．

(D) 求 $xyz=8$ 平行于平面 $x+y+z=1$ 的切平面，因为曲面法向量

$\vec{n}=(yz,xz,xy)//(1,1,1)$，$\therefore \dfrac{yz}{1}=\dfrac{xz}{1}=\dfrac{xy}{1},\Rightarrow x=y=z=1$

切平面方程为 $(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

答 B

31．设 $M(x,y,z)$ 为平面 $x+y+z=1$ 上的点，且该点到两定点 $(1,0,1),(2,0,1)$ 的距离平方之和

为最小，则此点的坐标为( )

(A) $(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

(B) $(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

(C) $(1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$

(D) $(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$

答 B

32．若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则在该点（ ）

(A) $\frac{\partial f}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial}$一定存在。

(B) $\frac{\partial f}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$一定连续。

(C) 函数沿任一方向的方向导数都存在，反之亦真。

(D) 函数不一定连续。

答 $\underline{A}$ 章纪

33. 在矩形域$D:|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$内，$f_x(x,y)\equiv 0, f_y(x,y)\equiv 0$是$f(x,y)=C$（常数）的（ ）

(A)必要条件 (B) 充分条件

(C) 充要条件 (D)既非充分也非必要条件

答C

34. 若函数$u=f(t,x,y), x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t)$均具有一阶连续偏导数，则$\frac{\partial u}{\partial t}=$( )

(A) $f_2'\varphi_2'+f_3'\psi_2'$ (B) $f_1'+f_2'\varphi_2'+f_3'\psi_2'$

(C) $f\varphi_2'+f\psi_2'$ (D) $f+f\varphi_2'+f\psi_2'$

答B

35. 设函数$\varphi(t),\psi(t)$具有二阶连续导数，则函数$z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$满足关系（ ）

(A) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ (B) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

(C) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (D) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

答D

36. 二元函数$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$的极大值点是

(A) (1,1) (B) (0,1) (C) (1,0) (D) (0,0)

答D

37. 直线$\frac{x+2}{2}=2-y=z$与$\begin{cases}x+2y+1=0\\y+z+2=0\end{cases}$之间的关系是( )

(A) 重合 (B) 平行 (C) 相交 (D) 异面

答：B

38．曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的与平面 $x+4y+6z=0$ 平行的切平面方程是（ ）

(A) $x+4y+6z=\pm\frac{21}{2}$ (B) $x+4y+6z=21$

(C) $x+4y+6z=-21$ (D) $x+4y+6z=\pm 21$

答：D

39．下列结论中错误的是（ ）

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x+y}=0$ (B) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=0$

(C) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\frac{xy}{x+y}=-1$。 (D) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}$ 不存在。

答：B

40．已知 $f(x,y)$ 二阶连续可导，$z=f(x,xy)$，记 $v=xy$，则下列结论中正确的是（ ）

(A) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}$。 (B) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}$

(C) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$。 (D) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

答：D

41．设函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，又 $x=t,\ y=t$，则下列结论中正确的是（ ）

(A) $df(0,0)=0$。 (B) $dz\big|_{t=0}=0$。 (C) $dz\big|_{t=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}$。 (D) $dz\big|_{t=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}dt$。

答：D

42．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，则在原点处（ ）

(A).偏导数不存在，也不连续 (B).偏导数存在但不连续

(C).偏导数存在且可微 (D).偏导数不存在也不可微

答:(B)

43. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{xy}, & xy\neq 0\\ x, & xy=0\end{cases}$ 则 $f'(0,1)=$（ ）

(A). 0 (B). 1 (C). 2 (D).不存在

答：(B)

44. 设 $f(x,y)=\ln(x+\dfrac{y}{2x})$,则 $f_y'(1,0)=$（ ）

(A). 1 (B). $\dfrac{1}{2}$ (C). 2 (D). 0

答： (B)

45. 设 $f(x,y)=(\dfrac{1}{3})^{-\frac{y}{x}}$ 则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$（ ）

(A). $(\dfrac{1}{3})^{\frac{-y}{x}}\cdot\dfrac{y}{x^2}$ (B). $(\dfrac{1}{3})^{\frac{-y}{x}}(-\dfrac{y}{x^2})\ln 3$

(C). $(\dfrac{1}{3})^{-\frac{y}{x}}\ln 3\cdot\dfrac{y}{x^2}$ (D). $-\dfrac{y}{x}(\dfrac{1}{3})^{\frac{-y}{x}-1}$

答：(B)

46. 设 $z=y\sin xy+(1-y)\arctan x+e^{-2y}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=$（ ）

(A). 3/2 (B). 1/2 (C). $\pi/4$ (D).0

答：(B)

47. 设方程 $y=F(x^2+y^2)+F(x+y)$ 确定隐含数 $y=f(x)$（其中 F 可微），且

$f(0)=2, F'(2)=\dfrac{1}{2}, F'(4)=1$, 则 $f'(0)=$（ ）

(A). 1/7 (B). $-\dfrac{1}{7}$ (C). $-\dfrac{1}{4}$ (D). $-\dfrac{1}{3}$

答：(B)

48. 曲面 $xyz=1$ 上平行于平面 $x+y+z+3=0$ 的切平面方程是（ ）

(A). $x+y+z-3=0$ (B). $x+y+z-2=0$

(C). $x+y+z-1=0$　　　　　　　(D). $x+y+z=0$

答：(A)

49．二元实值函数 $z=2x-y$ 在区域 $D=\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le y\le 1-|x|\}$ 上的最小值为（　　　　）

(A). 0　　　(B). -1　　　(C). -2　　　(D). -3

答：(C)

50．平面 $2x+3y-z=\lambda$ 是曲面 $z=2x^2+3y^2$ 在点（1/2，1/2，1/2）处的切平面，则 λ 的值是（　　　　）。

(A).4/5　　　(B). 5/4　　　(C)2　　　(D).1/2

答：(C)

51．已知曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a},(a>0)$，在其上任意点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为 $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$，则切平面在三坐轴走上的截距之和为（　　　　）

(A) $\sqrt{a}$　　　(B). $3\sqrt{a}$　　　(C). a　　　(D). $3a$

答：(C)

52．指出 $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 与不相同的函数（　）

(A)　$f_1(x+y,x-y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(B)　$f_2(x+y,x-y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\ne 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$

(C)　$f_3(u+v,u-v)=\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$

(D) $f_4(u,u-v)=\dfrac{2u^2-2uv}{2u^2-2uv+v^2}$

答 B

53．指出错误的结论：(　　)

(A) 按等价无穷小的替换原则，有 $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=0$

(B) 按无穷大量与无穷小量的关系，有 $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=0$，

因当 $x,y\to 0$ 时， $\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\to\infty$ 。

(C) 按变量代换的方法，有 $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{x+y}{e^x e^y-1}=\lim\limits_{x,y\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=1$，

此处 $t=e^x e^y-1$ 。

(D) 按根式有理化方法，有 $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-xy}}{xy}=\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-xy}}=\dfrac{1}{2}$ 。

答 B

54．以下各点都是想说明 $\lim\limits_{x,y\to 0}f(x,y)$ 不存在的，试问其理由是否正确？(　　)

(A) 对 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$，理由是 $y=-x$ 时函数无定义。

(B) 对 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}, y\neq -x\\ 0, y=-x\end{cases}$, 理由是令 $y=x^2$ 或 x^2-x 将得到不同的极限值 $0,-1$。

(C) 对 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, 理由是令 $y=1-x$，即知极限不存在。

(D) 对 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, xy\neq 0\\ 0, xy=0\end{cases}$, 理由是当 $x\to 0$ 或 $y\to 0$ 时极限已经不存在，故二重极限更不可能存在了。

答 B

55．在具备可微性的条件下，等式 $d(u+v)=du+dv,\quad d(\lambda u)=\lambda du,$

$d(uv)=udv+vdu,\quad d(\frac{u}{v})=\frac{1}{v^2}(vdu-udv)$ 的成立，对 u,v 还有什麽限制？( )

(A) 没什麽限制（除 v 作分母时不为 0）。

(B) u,v 只能是自变量。

(C) u,v 是自变量或某自变量的一元函数。

(D) u,v 是自变量或某自变量的一次函数。

答 A

56．对二元函数而言，指出下列结论中的错误。( )

(A) 两个偏导数连续$\Rightarrow$任一方向导数存在。

(B) 可微$\Rightarrow$任一方向导数存在。

(C) 可微$\Rightarrow$连续。

(D) 任一方向导数存在$\Rightarrow$函数连续。

答 D

57．设$F(x,y,z)=0$满足隐函数定理的条件，问$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$如何？（ ）

(A) 该式$=\frac{\partial x\cdot\partial y\cdot\partial z}{\partial y\cdot\partial z\cdot\partial x}=1$

(B) 该式$=(-\frac{F_y}{F_x})\cdot(-\frac{F_z}{F_y})\cdot(-\frac{F_x}{F_z})=-\frac{F_y\cdot F_z\cdot F_x}{F_x\cdot F_y\cdot F_z}=-1$

(C) 因为一个方程$F(x,y,z)=0$可以确定一个函数，不妨设z为函数，另两个变量x,y则为自变量，于是$\frac{\partial x}{\partial y}=0$，故所给表达式为$0$。

(D) 仿(C)不妨设由$F(x,y,z)=0$确定z为x,y的函数,因$\frac{\partial y}{\partial z}$无意义,故所给表达式无意义。

答 B

58．设$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，试求对$x$的导数。（ ）

(A) 由第一个方程两边对x求导，得$F_x+F_z\cdot z_x=0$，故$z_x=-\frac{F_x}{F_z}$。

(B) 由第二个方程两边对x求导，同理得$z_x=-\frac{G_x}{G_z}$。

(C) 由两个方程消去y得$H(x,z)=0$，再对x求导，得$H_x+H_z\cdot z'=0$故$z'=-\frac{H_x}{H_z}$.

(D) 视y,z为x的函数，在方程组两边对x求导，得$\begin{cases}F_x+F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=0\\G_x+G_y\cdot y'+G_z\cdot z'=0\end{cases}$，故解出

$$z'=\frac{F_xG_y-F_yG_x}{F_yG_z-F_zG_y}$$。

答 D

59．设 $y=f(x,t)$，则由 $F(x,y,t)=0$ 两边对 x 求导的结果为：(   )

(A) $F_x+F_y\cdot y'+F_t\cdot t'=0$，其中 $y'=\dfrac{dy}{dx},t'=\dfrac{dt}{dx}$。

(B) $F_x+F_y\cdot y'+F_t\cdot(t_x+t_y\cdot y')=0$。

(C) $F_x+F_y\cdot(f_x+f_t\cdot t_x)+F_t\cdot t_x=0$。

(D) $F_x+F_y\cdot(f_x+f_t\cdot t_x)+F_t\cdot(t_x+t_y\cdot y')=0$。

答 A

60．$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=$（   ）

（A）1；（B）0；（C）-1；（D）不存在.

答案：（B）

61．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则（   ）

（A）极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 存在，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；

（B）极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 存在，且 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；

（C）极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；

（D）极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 不存在，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

答案：（C）

62．设 m,M 分别为函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的最小值和最大值，且 $m\le\mu\le M$，则（   ）

（A）函数 $z=f(x,y)$ 在定义域 D 内一定有点 $P(x,y)$，使满足：$f(P)=\mu$；

（B）当 D 为闭区域，$f(x,y)$ 为连续函数时，则在 D 上至少有一点 $P(x,y)$，使

$f(P)=\mu$；

（C）当 D 为有界区域，$f(x,y)$ 为连续函数时，则 $z=f(x,y)$ 在 D 上至少有一点

$P(x,y)$，使 $f(P)=\mu$；

（D）当 D 为连通区域，$f(x,y)$ 为 D 上的连续函数时，则 $z=f(x,y)$ 在 D 上至少有一点

$P(x,y)$，使 $f(P)=\mu$.

答案：（D）

63．函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）

（A）充分条件但不是必要条件；

（B）必要条件但不是充分条件；

（C）充分必要条件；

（D）既不是充分条件也不是必要条件.

答案：（D）

64．二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处满足关系（　　）

（A）可微（指全微分存在）$\Leftrightarrow$ 可导（指偏导数存在）$\Rightarrow$ 连续；

（B）可微 $\Rightarrow$ 可导 $\Rightarrow$ 连续；

（C）可微 $\Rightarrow$ 可导，或可微 $\Rightarrow$ 连续，但可导不一定连续；

（D）可导 $\Rightarrow$ 连续，但可导不一定可微.

答案：（C）

65．若 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是（　　）

（A）连续且可微；

（B）连续但不一定可微；

（C）可微但不一定连续；

（D）不一定可微也不一定连续.

答案：（D）

66．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{xy}, & xy\neq 0,\\ x \quad, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f_x(0,1)=$（ ）

（A）0； （B）1；

（C）2； （D）不存在.

答案：（B）

67．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（ ）

（A）充分条件而非必要条件；

（B）必要条件而非充分条件；

（C）充分必要条件；

（D）既非充分条件又非必要条件.

答案：（D）

68．已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 $a=$（ ）

（A）-1； （B）0； （C）1； （D）2.

答案：（D）

69．下列命题中正确的是( )

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 等价

(B) 函数在点 (x_0,y_0) 连续, 则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 必定存在.

(C) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{p_0}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{p_0}$ 都存在, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 必连续

(D) $f(x,y)$ 在 p_0 点沿任何方向 $\vec{u}$ 的方向导数存在, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 必连续

答 B

70．如 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微, 则一定不成立的是( )

(A) $f(x,y)$ 在 p_0 点不连续

(B) $f(x,y)$ 在 p_0 点沿任何方向 $\vec{u}$ 的方向导数不存在

(C) $f(x,y)$ 在 p_0 点两个偏导数都存在且连续

(D) $f(x,y)$ 在 p_0 点两个偏导数存在且至少有一个不连续

答 C

71．下列条件中（　　　　　）成立时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点必有全微分 $df=0$

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f'_x=0, f'_y=0$

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f_1=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f_2=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f_3=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

答 D

72．下列结论中正确的是(　　　　　)

(A) 设 $z=f(u,v), u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$，如 φ,ψ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导，f 在点

(u_0,v_0) 存在偏导，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_u u'_x+f'_v v'_x, \dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_u u'_y+f'_v v'_y$ 一定成立.

(B) f_{xy}, f_{yx} 只要存在，必有 $f_{xy}=f_{yx}$

(C) 偏导数只要存在必定连续

(D) 初等函数在有定义的点必定连续

答 D

73．设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则在 $(0,0)$ 点(　　　　　)

(A) 连续，但偏导数不存在.

(B) 偏导数存在，但不可微

(C) 可微

(D) 偏导数连续，但不可微

答 B

74． $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$，则在 $(0,0)$ 点（　　　　　）

(A) 不连续,偏导数存在且可微

(B) 连续,偏导数存在,但不可微

(C) 沿任何方向 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\vartheta)$ 的方向导数存在,且可微

(D) 不连续,但沿任何方向 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\vartheta)$ 的方向导数存在,并且不可微

答 D

75．设 $z=f(x,y)$ 在(1,1)点可微，$f(1,1)=1,\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x}=a,\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y}=b,$ 又有

$\varphi(x)=f(x,f(x,f(x,x))),$ 则 $\dfrac{d}{dx}\varphi^2(x)\Big|_{x=1}=$（　　　　）

(A) $2(a+ab+ab^2+b^3)$.

(B) $a+ab+ab^2+b^3$

(C) $a+ab+2a^3$

(D) $a+ab+ab^2+a^3$

答 A

76．下列极限中存在的是（　　　　　）

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(1-x)y}{|x|+|y|}$

(B) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

(C) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

(D) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

答 C

77．设 $\varphi(x,y,z)=xy+z\ln y+e^{xz}-1,\vec{x_0}=(0,1,1),$ 有 $\varphi(0,1,1)=0$，下列结论中正确的是

(   )

(A) 方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 在点 $\vec{x_0}$ 邻域内不能确定隐函数 $x=f(y,z)$

(B) 方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 在点 $\vec{x_0}$ 邻域内不能确定隐函数 $y=g(x,z)$

(C) 方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 在点 $\vec{x_0}$ 邻域内不能确定隐函数 $z=h(x,y)$

(D) 以上均不正确

答 C

78．若函数 $u=u(x,y)$ 为可微函数，且满足

$u(x,y)\big|_{y=x^2}=1, u_x(x,y)\big|_{y=x^2}=x$, 则当 $x\neq 0$ 时，$u_x(x,y)\big|_{y=x^2}=$(   )

(A) 1　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) -1

答 B

79．设函数 $f(x)$ 在[-1，1]上连续，则 $\dfrac{\partial}{\partial x}\int_{\cos y}^{\sin x} f(t)dt=$(   )

(A) $f(\sin x)-f(\cos y)$　　(B) $f(\sin x)\cos x+f(\cos y)\sin y$

(C) $f(\sin x)\cos x$　　(D) $f(\cos y)\sin y$

答 C

80．设 $x^2+y^2+z^2=2$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\sqrt{2},0,0)}=$(   )

(A) $-1,0$　　(B) -1, 不存在　　(C) 1，0　　(D) 不存在，0

答 C

81．当 $\lambda=$(   )时，由方程 $y-x-\lambda\sin y=0$ 总能确定 $y=y(x)$，且 $y(x)$ 就具有连续导函数

(A) $|\lambda|<1$　　(B) $|\lambda|\geq 1$　　(C) $\lambda>0$　　(D) $\lambda\leq 0$

答 A

82．在(   )条件下，由方程 $z=x+y\varphi(z^2)$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z^2)\frac{\partial z}{\partial x}$$

(A) $\varphi(z^2)$ 连续　　(B) $\varphi(z^2)$ 可微

(C) $\varphi(z^2)$ 可微且 $\varphi(z^2)\neq 0$　　(D) $\varphi(z^2)$ 可微且 $2yz\varphi'(z^2)\neq 1$

答 D

83．已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 的切平面 $2x+2y+z=0$，则点 P 的坐标是(　　　)

(A) (1,-1,2)　　(B) (-1,1,-2)

(C) (1,1,2)　　(D) (-1,-1,2)

答 C

84．曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,-y_0)$ 的切平面方程是(　　　)

(A) $z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

(B) $z=f(x_0,-y_0)-f_x(x_0,-y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y+y_0)$

(C) $z=f(x_0,-y_0)+f_x(x_0,-y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,-y_0)(y+y_0)$

(D) $z=f(x_0,-y_0)+f_x(x_0,-y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,-y_0)(y-y_0)$

答 C

85．若函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内具有连续的偏导数，则函数在该点沿

$\vec{e}=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}$（其中 φ 为 x 轴到 $\vec{e}$ 的转角）的方向导数为(　　　)

(A) $|gradf(x,y)||\vec{e}|$　　(B) $gradf(x,y)\cdot\vec{e}$

(C) $|gradf(x,y)|\cos\varphi$　　(D) $|gradf(x,y)|\sin\varphi$

答 B

86．若函数 $u(x,y),v(x,y)$ 点 (x,y) 的某个邻域内具有连续的偏导数，则在该点梯

度 $grad(uv)=$(　　)

(A) $ugradv$　　(B) $vgradu$

(C) $gradu\cdot gradv$　　(D) $vgradu+ugradv$

答 C

87．若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续，关于极值的陈述(　　　)是正确的

(A) $f(x,y)$ 在偏导数不存在的点也可能取到极值

(B)若 $f(x,y)$ 在 D 内有唯一驻点，则 $f(x,y)$ 至多有一极值点

(C) 若函数 $f(x,y)$ 有两个极值点，则其中之一必为极大值点，另一个必为极小值点

(D)在驻点 (x_0,y_0) 处，若 $\left[f_{xy}(x_0,y_0)\right]^2-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)\geq 0$，则

(x_0,y_0) 不 为极值点

答 A

88. 下列命题中错误的是( )

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且存在唯一的极小值点 M_0，则 $f(M_0)$ 必是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值。

(B) 若 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 内存在唯一的极小值点 M_0，则 $f(M_0)$ 必是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值。

(C) 若 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 内取到最小值，且 M_0 是 $f(x,y)$ 在 D 内的唯一极小值点，则 $f(M_0)$ 必是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值。

(D) 连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大、最小值可以都在 ∂D 上取到。

答：B

89. 下列命题中正确的是( )

(A) 设 M_0 为曲面 $\sum$ 外一点，M_1 为曲面 $\sum$ 上的点，若 $\left|M_0M_1\right|=\min\limits_{M\in\sum}\{\left|MM_0\right|\}$，则 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 是 $\sum$ 在 M_1 处的法向量。

(B) 设 M_0 为光滑曲面 $\sum$ 外一点，M_1 为曲面 $\sum$ 上的点，若 $\left|M_0M_1\right|=\min\limits_{M\in\sum}\{\left|MM_0\right|\}$，则 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 是 $\sum$ 在 M_1 处的法向量。

(C) 设 M_0 为光滑曲面 $\sum$ 外一点，M_1 为曲面 $\sum$ 上的点，若 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 是 $\sum$ 在 M_1 处的法向量，则 $\left|M_0M_1\right|=\min\limits_{M\in\sum}\{\left|MM_0\right|\}$。

(D) 设 M_0 为光滑曲面 $\sum$ 外一点，M_1 为曲面 $\sum$ 上的点，若 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 是 $\sum$ 在 M_1 处的法

向量，则$|M_0M_1| < \max\limits_{M\in\Sigma}\{|MM_0|\}$。

答：B

90．下列命题中正确的是(　　)

(A) 若二元函数$z = f(x,y)$连续，则作为任一变量x或y的一元函数必连续。

(B) 若二元函数$z = f(x,y)$作为任一变量x或y的一元函数都连续，则$z = f(x,y)$必连续。

(C) 若二元函数$z = f(x,y)$可微，则其必存在连续的一阶偏导数。

(D) 若二元函数$z = f(x,y)$不连续，则其必不可导。

答：A

91．设$f(x,y)$在区域D上有定义，(x_0,y_0)是D的一个内点，则下列命题中正确的是(　　)

(A) 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$存在，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$。

(B) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$与$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在且相等，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在。

(C) 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$与$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$都存在，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$。

(D) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$不存在，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在。

答：C

92．设$f(x,y)$是一二元函数，(x_0,y_0)是其定义域内的一点，则下列命题中一定正确的是(　　)

(A) 若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的两个偏导数都存在，则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的梯度是

$\mathrm{grad} f(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$。

(B) 若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的两个偏导数都存在，则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)沿方向

$\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$方向导数是$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial v} = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\alpha$。

(C) 若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的两个偏导数都存在，则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的微分是

$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$。

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的微分是

$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$。

答：D

93．记 $\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$，$d=\left|f(x,y)-c\right|$。设 $x\to a, y\to b.$ 指出错误的结论：（　）

(A) $f(x,y)\to c\Leftrightarrow$ 对任给 $\varepsilon>0,$ 存在 $\delta>0$，当 $0<\rho<\delta$ 时，有 $d<\varepsilon$。

(B) $f(x,y)$ 在 (a,b) 点连续 $\Leftrightarrow$ 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\left|x-a\right|<\delta$ 及 $\left|y-b\right|<\delta$ 时，有 $d<\varepsilon$。

(C) $f(x,y)\to c\Leftrightarrow$ 对任给 $\varepsilon>0,$ 存在 $\delta>0,$ 当 $0<\left|x-a\right|<\delta$ 及 $0<\left|y-b\right|<\delta$ 时，有 $d<\varepsilon$。

(D) $f(x,y)$ 在 (a,b) 点连续 $\Leftrightarrow$ 对任给 $\varepsilon>0,$ 存在 $\delta>0,$ 当 $\rho<\delta$ 时，有 $d<\varepsilon$。

答　C

94．设 $f(x,y)$ 可微，$f(0,0)=0$，偏导数 $f_x(0,0)=a, f_y(0,0)=b$。求

$g(t)=f(t,f(t,t))$ 在 $t=0$ 处的导数（　）

(A) 因 $g'(t)=f_x+f_y\cdot\dfrac{df(t,t)}{dt}$，故 $g'(0)=a+b\cdot 0=a$。

(B) 因 $g'(t)=f_t+f_f=f_x+1$，故 $g'(0)=a+1$。

(C) 由 $g'(t)=f_x+f_y\cdot g'(t)$ 解得 $g'(t)=\dfrac{f_x}{1-f_y}$，故 $g'(0)=\dfrac{a}{1-b}$。

(D) 因 $g'(t)=f_x+f_y\cdot(f_x+f_y)$，故 $g'(0)=a+b(a+b)$。

答 D

95．设 $z=f(x,v)$，$v=g(x,y)$，其中 f,g 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$（ ）

（A）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\dfrac{\partial v}{\partial x})^2+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$；

（B）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$；

（C）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$；

（D）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\dfrac{\partial v}{\partial x})^2+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

答：（D）

96．设 $u=u(x,y)$ 为可微函数，且当 $y=x^2$ 时，有 $u(x,y)=1$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x$，则当

$y=x^2\ (x\neq 0)$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=$（ ）

（A）$\dfrac{1}{2}$；（B）$-\dfrac{1}{2}$；（C）0；（D）1.

答：（B）

97．设 $y=f(x,t)$ 而 t 由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f,F 都具有

一阶连续的偏导数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（ ）

（A）$\dfrac{f_x\cdot F_t+f_t\cdot F_x}{F_t}$；（$B$）$\dfrac{f_x\cdot F_t-f_t\cdot F_x}{F_t}$；

（C）$\dfrac{f_x\cdot F_t+f_t\cdot F_x}{f_t\cdot F_y+F_t}$；（$D$）$\dfrac{f_x\cdot F_t-f_t\cdot F_x}{f_t\cdot F_y+F_t}$.

答：（D）

98．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（ ）

（A）连续，偏导数存在； （B）连续，偏导数不存在；

（C）不连续，偏导数存在； （D）不连续，偏导数不存在.

答：（C）

99．已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则[ ]

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点。

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点。

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点。

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点。

答：A

第六部分 曲线积分与曲面积分

1．设曲线L是上半圆周 $x^2+y^2=2x$，则$\int_L xdl=$______。

2．设 L 是上半椭圆周 $x^2+4y^2=1, y\geq 0$，L_1 是四分之一椭圆周 $x^2+4y^2=1, x\geq 0, y\geq 0$，则

(A) $\int_L (x+y)dl=2\int_{L_1}(x+y)dl$。　(B) $\int_L xydl=2\int_{L_1}xydl$。

(C) $\int_L x^2dl=2\int_{L_1}y^2dl$。　(D) $\int_L (x+y)^2dl=2\int_{L_1}(x^2+y^2)dl$。[　]

3．计算 $I=\int_L xdl$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上从点 $A(0,a)$ 经点 $C(a,0)$ 到点 $B(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}})$ 的一段。

4．计算 $I=\oint_L[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]dl$，其中 L 是圆周 $x^2+(y-1)^2=1$。

5．已知曲线 L 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的交线，计算曲线积分 $\oint_L (x^2+y^2+z)dl$ 。

6．求柱面$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$被球面$x^2+y^2+z^2=1$包围部分的面积$S$。

7．计算 $I=\int_L 3x^2ydx-x^3dy$，其中 L 是从点 $(0,0)$ 经过点 $(1,0)$ 到点 $(0,0)$ 的折线段。

8．设 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$，则 $\oint_L -ydx+xdy=$______。

9．计算 $I=\oint_L y^2xdy-x^2ydx$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，顺时针方向为正。

10．计算 $I=\int_L (12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$，其中 L 从点 $(-1,1)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $(0,0)$，再沿直线 $y=0$ 到点 $(2,0)$。

11．计算 $I=\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $y=x^2-2$ 从点 $A(-2,2)$ 到点 $B(2,2)$ 的一段。

12．设$u(x,y),v(x,y)$在全平面内有连续的一阶偏导数，且满足$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，记$C$为包围原点的正向简单闭曲线，计算 $I=\oint_C\dfrac{(xv-yu)dx+(xu+yv)dy}{x^2+y^2}$。

13．计算 $I=\int_L [e^y\cos x-ay]dx+[e^y\sin x-b(x+y)]dy$，其中 L 为 $4x^2+9y^2=36$ 在第一象限中的部分，方向为从点 $(3,0)$ 到 $(0,2)$ 。

14．设 L 是右半平面 $(x>0)$ 内的有向分段光滑曲线，起点为 (a,b)，终点为 (c,d)。证明曲线积分 $I=\int_L \frac{1}{x}[1+x^2\sin(xy)]dy+\frac{y}{x^2}[x^2\sin(xy)-1]dx$ 与路径无关，并求 I 的值。

15. 计算$I=\int_L ydx-(x^2+y^2+z^2)dz$, L是曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2x+4\end{cases}$在第一卦限中的部分, 从点$(0,1,4)$到点$(1,0,6)$.

16． 计算 $I=\oint_{L} ydx+zdy+xdz$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 与平面 $x+z=2$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针方向。

17．计算 $I=\oint_{L} x^{2} y d x+y^{2} z d y+z^{2} x d z$，其中 L 为 $z=x^{2}+y^{2}$ 与 $x^{2}+y^{2}+z^{2}=6$ 的交线，方向为从 z 轴的正向往负向看去是顺时针。

18．计算$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中$L$是用平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$切立方体$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x,y,z\le a\}$所得的切痕，从$ox$轴正向看去为逆时针方向.

19．计算$I=\oint\limits_{L}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中$L$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从$z$轴正向看去，$L$为逆时针方向。

20．已知曲线积分

$$I=\int_L (xz+ay^2+bz^2)dx+(xy+az^2+bx^2)dy+(yz+ax^2+by^2)dz$$

与路径无关，求a,b的值，并求从$A(0,0,0)$到$B(1,1,1)$的积分值。

21．判断 $(e^x \cos y + 2xy^2)dx + (2x^2 y - e^x \sin y)dy$ 是否是全微分式，若是，求它的原函数。

22．已知曲线积分$\int_L xy^2dx+yf(x)dy$与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且$f(0)=0$。求$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yf(x)dy$的值。

23．设函数 $f(x,y)$ 在 R^2 内具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx + f(x,y)dy$ 与路径无关，且对任意的 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + f(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + f(x,y)dy$，求 $f(x,y)$ 的表达式。

24．已知$\oint_L \frac{1}{f(x)+y^2}(xdy-ydx)=A$，其中$f\in C^1, f(1)=1, L$是绕原点一周的任意正向闭曲线，试求$f(x)$及$A$.

25．设在变力 $\vec{F}(x,y,z)=\{yz,zx,xy\}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一挂限中的点 $P(u,v,w)$ 处，问当点 $P(u,v,w)$ 在何处时，力 $\vec{F}(x,y,z)$ 作的功 W 最大，并求出功的最大值。

26．设函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上具有二阶连续偏导数，$\vec{n}$ 是 ∂D 的外向单位法向量。

（1） 证明

$$\int\limits_{\partial D} f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial n}dl$$

$$=\iint\limits_{D} f(x,y)[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}]dxdy+\iint\limits_{D}[\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2]dxdy;$$

（2）当 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0,(x,y)\in D$，且 $f(x,y)=0,(x,y)\in\partial D$ 时，证明 $f(x,y)=0,(x,y)\in D$。

27．设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，证明对上半平面 $y>0$ 中的任意封闭曲线 c 都有 $\oint_c \frac{ydx-xdy}{f(x,y)}=0$ 成立的充要条件是：$f(tx,ty)=t^2 f(x,y)$ 对任意的 $t>0$ 及上半平面中的任意点 (x,y) 都成立。

28．计算 $I=\iint\limits_{S} xdS$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0, z=x+2$ 所围空间区域的表面。

29．计算 $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，

$$f(x,y,z)=\begin{cases} 0, z<\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2, z\geq\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}。$$

30．计算 $I=\iint\limits_S (x+y+z+a)^2\,dS$，其中 S 为球面

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2\text{。}$$

31．计算$I=\iint\limits_{S} xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)dS$，其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在第一卦限中的部分。

32．计算$I=\iint\limits_{S}\left[(z^{n}-y^{n})\cos\alpha+(x^{n}-z^{n})\cos\beta+(y^{n}-x^{n})\cos\gamma\right]dS$，

其中$S:\begin{cases}x^{2}+y^{2}+z^{2}=R^{2}\\ z\geq 0\end{cases}$，$\mathbf{n}=(\cos a,\cos\beta,\cos\gamma)$是$S$向上的法向量。

33．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}\frac{xdy\wedge dz+z^{2}dx\wedge dy}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$，其中 S 是由 $x^{2}+y^{2}=R^{2}$ 及 $z=R, z=-R\ (R>0)$ 围成的圆柱体的表面，外侧为正。

34．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 S 为旋转抛物面 $z=x^{2}+y^{2}$ 介于 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分，上侧为正。

35．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 为

（1） S: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

（2） S: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$。

36．计算曲面积分 $I=\oint\!\!\!\!\oint_{\partial\Omega} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 1\}。$$

37．计算$I=\iint\limits_S (x-y+z)dy\wedge dz+(y-z+x)dz\wedge dx+(z-x+y)dx\wedge dy$，其中曲面$S$是区域$\Omega$：$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$的外表面.

38．计算 $I=\iint\limits_{S}\frac{2dydz}{x\cos^2 x}+\frac{dzdx}{\cos^2 y}-\frac{dxdy}{z\cos^2 z}$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$，外侧为正。

39．计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{S}\frac{\cos<\vec{r},\vec{n}>}{r^2}dS$，其中 $\vec{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\vec{r}|$，S 为椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$，$\vec{n}$ 为 S 的外向单位法向量。

解

40． 设Ω_δ是中心在点(x_0, y_0, z_0)，半径为δ的球体，$\partial\Omega_\delta$是Ω_δ的正向边界面，V_δ是Ω_δ的体积，函数$X(x, y, z)$，$Y(x, y, z), Z(x, y, z)$均具有一阶连续偏导数，求证

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\oiint\limits_{\partial\Omega_\delta} Xdydz + Ydzdx + Zdxdy}{V_\delta} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{(x_0, y_0, z_0)}。$$

41. 设函数 $f(x,y,z)$ 在上半空间 $\Omega=\{(x,y,z)|z>0\}$ 具有一阶连续偏导数，证明对 Ω 内任意的封闭光滑曲面 S ， $\iint\limits_{S} f(x,y,z)(xdydz+ydzdx+zdxdy)=0$ 恒成立的充要条件是 $(gradf)\cdot\vec{r}+3f=0,\quad\forall(x,y,z)\in\Omega$ ，其中 $\vec{r}=\{x,y,z\}$ 。

42．设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有 $\oiint\limits_{S} xf(x)dy\wedge dz - xyf(x)dz\wedge dx - e^{2x}zdx\wedge dy = 0$，其中 $f(x)\in C^1(0,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，求 $f(x)$ 的表达式。

43．设 $f(x,y,z)\in C^1$，$\pi: f(x,y,z)=0$ 是以原点为顶点的一张锥面，若 π 与平面 $Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$ 围成一个锥体 Ω，且其底面积是 S，高是 h，体积是 V，求证 $V=\frac{1}{3}Sh$。

44．设$L(x,y,z)$表示原点到椭球面S：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上点$(x,y,z)$处的切平面的距离，求证

$$\oiint_S \frac{dS}{L(x,y,z)}=\frac{4\pi}{3abc}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)。$$

45．设函数 $f(x)$ 连续，证明曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz)$ 与路径无关。

46．设 $f(x,y)=75-x^2-y^2+xy$，求 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处方向导数最大的方向 $\vec{\tau}$ 和方向导数的最大值 M 。

47 ． 设 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ ， 求 $gradf(x,y,z), div[gradf(x,y,z)]$ ， $rot[gradf(x,y,z)]$。

48．设 $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{x,y,z\}$，求 $div\vec{F}(x,y,z), rot\vec{F}(x,y,z)$。

49．求质量均匀分布的半球面S的重心。

50．求质量均匀分布的圆柱面S：$x^2+y^2=a^2, 0\le z\le b$关于z轴的转动惯量J。

51．设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x$，外侧为正；L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2x, \\ x=\dfrac{3}{2}, \end{cases}$，方向为从 x 轴正向看是逆时针。求向量场 $\vec{F}(x,y,z)=\{xz^2, yx^2, zy^2\}$ 通过曲面 S 的通量 Φ 和沿曲线 L 的环量 I 。

第八部分 常微分方程

[填空题]

1．微分方程 $y'+y\tan x-\cos x=0$ 的通解为__________。

2．过点 $(\frac{1}{2},0)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为__________。

3．微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为__________。

4．设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是线性微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 的三个特解，且

$\frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}\neq C$，则该微分方程的通解为

____________________。

5．设 $y_1=3+x^2, y_2=3+x^2+e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的两个特解，且相应齐次方程的一个解为 $y_3=x$，则该微分方程的通解为________________。

6．设出微分方程 $y''-2y'-3y=x+xe^{-x}+e^x\cos 2x$ 的一个特解形式

____________________。

7．微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为______________。

8．微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为______________。

9．函数 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 满足的二阶线性常系数齐次微分方程为__________。

10．若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，则 $f(x)=$__________。

[选择题]

11．设曲线积分 $\int_L[f(x)-e^x]\sin y dx-f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于[　　]

(A) $\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$。　　(B) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$。

(C) $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-1$。　　(D) $1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$。

12．若函数 $y=\cos 2x$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的一个特解，则该方程满足初始条件 $y(0)=2$ 的特解为[ ]

(A) $y=\cos 2x+2$。 (B) $y=\cos 2x+1$。

(C) $y=2\cos x$。 (D) $y=2\cos 2x$。

13．设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同特解，则该方程的通解为[ ]

(A) $y=C_1y_1+C_2y_2$。 (B) $y=y_1+Cy_2$。

(C) $y=y_1+C(y_1+y_2)$。 (D) $y=C(y_2-y_1)$ 。

14．已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+o(\Delta x), y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于[ ]

(A) 2π 。 (B) π。 (C) $e^{\frac{\pi}{4}}$。 (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$。

15．设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解。若 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 [ ]

(A) 取到极大值。 (B) 取到极小值。

(C) 某个邻域内单调增加。 (D) 某个邻域内单调减少。

16. 设 y_1, y_2 是二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个特解，C_1, C_2 是两个任意常数，则下列命题中正确的是[ ]

（A） $C_1y_1+C_2y_2$ 一定是微分方程的通解。

（B）$C_1y_1+C_2y_2$ 不可能是微分方程的通解。

（C）$C_1y_1+C_2y_2$ 是微分方程的解。

（D）$C_1y_1+C_2y_2$ 不是微分方程的解。

17. 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式[ ]

(A) ae^x+b。 (B) axe^x+b。

(C) ae^x+bx。 (D) axe^x+bx。

18. 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶线性常系数齐次微分方程是[ ]

(A) $y'''-y''-y'+y=0$。 (B) $y'''+y''-y'-y=0$。

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$。 (D) $y'''-2y''-y'+2y=0$。

19. 设 $y_1=e^x, y_2=x$ 是三阶线性常系数齐次微分方程 $y'''+ay''+by'+cy=0$ 的两个特解，则 a,b,c 的值为[ ]

(A) $a=1,b=-1,c=0$。 (B) $a=1,b=1,c=0$。

(C) $a=-1,b=0,c=0$。 (D) $a=1,b=0,c=0$。

20. 设二阶线性常系数齐次微分方程 $y''+by'+y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 都在区间 $(0,+\infty)$ 上有界，则实数 b 的取值范围是[ ]

(A) $b\ge 0$。 (B) $b\le 0$。 (C) $b\le 4$。 (D) $b\ge 4$。

[解答题]

21．求微分方程 $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$ 的通解。

22．求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的通解。

23．求解微分方程 $xdy-ydx=y^2e^ydy$。

24．求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解。

25．设 $y=e^{x}$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y(\ln 2)=0$ 的特解。

26．求微分方程$\frac{1}{\sqrt{y}}y'-\frac{4x}{x^2+1}\sqrt{y}=x$的通解。

27．求微分方程$(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$的通解。

28．设 μ 为实数，求微分方程 $y'' + \mu y = 0$ 的通解。

29．求微分方程 $y'' + y' = 2x^2 + 1$ 的通解。

30．求解微分方程 $y'' - 2y' + y = 4xe^x$ 。

31．求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解。

32．求解微分方程 $yy''-(y')^2=y^2\ln y$。

33．求解微分方程 $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x-5)$。

34．求解微分方程 $xy'' - y' = x^2$ 。

35．求解微分方程 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$ 。

36．求解定解问题$\begin{cases} y'' + 2x(y')^2 = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$。

37．已知函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

求 $f'(x)$，并证明 $e^{-x}\le f(x)\le 1(x\ge 0)$。

38. 设 $p(x),q(x)$ 为连续函数, 证明方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的所有积分曲线上横坐标相同的点的切线交于一点。

39．设 $p(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续非负，证明微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的任意非零解满足 $\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$ 的充要条件是广义积分 $\int_0^{+\infty} p(x)dx$ 发散。

40． 设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续有界，证明微分方程 $y'+ay=f(x)$ 的解在 $[0,+\infty)$ 上有界。