

# 2022 级微积分 A2 期末考试

mathsdream 整理版

2023.06.12

## 说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

<https://github.com/mathsdream/THU-math-source>。

## 一、填空题（每个空 3 分，共 24 分）

1. 设  $D$  为由曲线  $y^2 = 2x$  和直线  $x + y = 4$ ,  $x + y = 12$  围成的平面有界区域, 则  $\iint_D 3 dx dy =$  \_\_\_\_\_。

2. 设  $\Omega$  是由  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = \frac{y^2}{3^2} + \pi^2 z^2$  围成的三维有界区域, 则  $I = \iiint_{\Omega} (x + y) dx dy dz =$  \_\_\_\_\_。

3. 累次积分  $\int_0^{\ln 3} dx \int_x^{\ln 3} \frac{e^y}{y} dy =$  \_\_\_\_\_。

4. 设  $u(x, y)$  为  $e^x[e^y(x - y + 2) + y]dx + e^x[e^y(x - y) + 1]dy = 0$  的原函数, 且满足  $u(1, 1) = e^2 + e + 5$ , 则  $u(0, 0) =$  \_\_\_\_\_。

5.  $L^+$  是单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上的一条  $C^1$  曲线。以  $S(0, 0, -1)$  为起点, 以  $N(0, 0, 1)$  为终点。则

$$\int_{L^+} [2y + \sin(y^2 + z^2)]dx + 2[x + \ln(1 + z^2 + x^2)]dy - 3(x^2 + y^2 - 1)dz = \underline{\hspace{2cm}}$$

6. 设曲线  $\gamma: x = 2t, y = t, z = 2 - 2t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), 则  $\int_{\gamma} (2x + 4y + z^2 - 4) dl =$  \_\_\_\_\_。

7. 设曲面  $\Sigma$  是  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  的上侧, 则  $\iint_{\Sigma} (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy =$  \_\_\_\_\_。

8. 设  $\lambda > 0$ , 记  $L_{\lambda}^+$  为圆周  $x^2 + y^2 = \lambda^2$ , 逆时针为正向, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi \lambda^2} \left[ \int_{L_{\lambda}^+} (\sin x + y + e^y) dx + (3x + x e^y) dy \right] = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 二、选择题（每题 3 分，共 21 分）

1. 设函数  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续, 交换累次积分的顺序  $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy =$  \_\_\_\_\_。
- A)  $\int_1^4 dy \int_{2-y}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$   
 B)  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{2-y}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$   
 C)  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$   
 D)  $\int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$
2. 向量场  $\mathbf{V} = (x + y + z)\mathbf{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\mathbf{k}$  在  $(0, 0, 0)$  处的旋度为 \_\_\_\_\_。
- A)  $\mathbf{j} + \mathbf{k}$   
 B)  $\mathbf{i} + \mathbf{k}$   
 C)  $\mathbf{j} - \mathbf{k}$   
 D)  $\mathbf{i} - \mathbf{k}$
3. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^p}} - 1 \right)$  收敛当且仅当参数  $p$  满足 \_\_\_\_\_。
- A)  $p > \frac{1}{2}$   
 B)  $p \geq 2$   
 C)  $p \geq 1$   
 D)  $p > 1$
4. 已知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$  在  $x = -1$  处条件收敛, 则级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  \_\_\_\_\_。
- A) 不能确定  
 B) 绝对收敛  
 C) 条件收敛  
 D) 发散
5. 比较三个积分  $J_i = \iint_{D_i} (x-y)^{1/3} dx dy$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的大小, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

则\_\_\_\_\_。

- A)  $J_2 < J_1 < J_3$   
 B)  $J_1 < J_2 < J_3$

C)  $J_3 < J_1 < J_2$

D)  $J_2 < J_3 < J_1$

6. 以下四个选项中, 正确的选项是\_\_\_\_\_。

A) 存在可微向量场  $\mathbf{V}(x, y, z)$  使得  $\text{rot } \mathbf{V} = (x, z^2, \sin y)$

B) 存在可微函数  $f$  使得  $\text{grad } f(x, y, z) = (y, -x - 2z, 2y)$

C) 对  $\mathbb{R}^3$  中的每个线性向量场  $\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , 都存在可微函数  $f$  以及可微向量场  $\mathbf{W}$  使得  $\mathbf{V} = \text{grad } f + \text{rot } \mathbf{W}$

D) 这四个选项中, 其他三个选项都不对

7. 关于幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ , 以下陈述中正确的是\_\_\_\_\_。

A) 对任意  $0 < \delta < 1$ , 该幂级数在任何区间  $[-1, 1 - \delta]$  上一致收敛

B) 对任意  $0 < \delta < 1$ , 该幂级数在任何区间  $[-1 + \delta, 1 - \delta]$  上一致收敛, 但在区间  $[1 - \delta, 1)$  和  $(-1, -1 + \delta)$  上都不是一致收敛

C) 该幂级数在区间  $[-1, 1]$  上一致收敛

D) 对任意  $0 < \delta < 1$ , 该幂级数在任何区间  $[-1 + \delta, 1)$  上一致收敛, 但在区间  $(-1, -1 + \delta]$  上不是一致收敛的

### 三、解答题 (每题 11 分)

1. 设  $D$  为不等式组  $x > 0, 1 \leq xy \leq 3, x \leq 2y \leq 2x$  确定的平面区域。求  $\iint_D x^2 dx dy$ 。

2. 记  $\Sigma_1$  为圆柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  被上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$  和平面  $z = 0$  所截得的部分, 记  $\Sigma_2$  为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$  位于区域  $x^2 + y^2 \leq 2x$  内部的部分。求  $\Sigma_1, \Sigma_2$  的面积。

3. 设  $S^+$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$ , 正向朝外。计算第二型曲面积分

$$\iint_{S^+} xy^2 dy \wedge dz + yz^2 dz \wedge dx + xz^2 dx \wedge dy.$$

4. (1) 求微分方程  $\begin{cases} (1-x^2)S'' = xS' \\ S(0) = 0, S'(0) = 1 \end{cases}$  的幂级数解  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 并求这个幂级数的收敛半径;

(2) 求数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$  的值。

5. 已知  $2\pi$  周期函数  $f$  在区间  $(-\pi, \pi]$  上的表达式为  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi; \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$

(1) 求  $f$  的傅里叶级数;

(2) 利用 Parseval 等式和 (1) 中的级数, 证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

(3) 求积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} dx$$

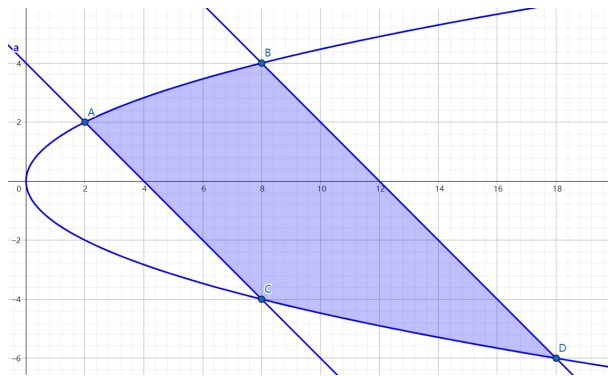
的值。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

## 一、填空题解析

1. 设  $D$  为由曲线  $y^2 = 2x$  和直线  $x+y=4, x+y=12$  围成的平面有界区域, 则  $\iint_D 3 dx dy = 196$ 。

解析:  $D$  如下图所示:



由图像得:

$$\iint_D 3 dx dy = \int_2^8 \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} 3 dy dx + \int_8^{18} \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} 3 dy dx = 196$$

2. 设  $\Omega$  是由  $x=0, x=1, x=\frac{y^2}{3^2}+\pi^2 z^2$  围成的三维有界区域, 则  $I = \iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz = 1$ 。

解析:  $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{y^2}{3^2} + \pi^2 z^2 \leq x\}$ 。由其形式, 作类柱坐标变换:

$$x = x, \quad y = 3r \cos \theta, \quad z = \frac{r \sin \theta}{\pi}$$

得  $\Omega = \{(x, r, \theta) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq r \leq \sqrt{x}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ,  $dx dy dz = \frac{3}{\pi} r dr dx d\theta$ , 所以:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (x + 3r \cos \theta) \frac{3}{\pi} r dr dx d\theta = 1$$

3. 累次积分  $\int_0^{\ln 3} dx \int_x^{\ln 3} \frac{e^y}{y} dy = 2$ 。

解析: 累次积分直接不可计算, 大概率需要交换积分次序。先转化为二重积分, 积分区域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \ln 3, x \leq y \leq \ln 3\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq \ln 3\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq \ln 3\}$ , 则:

$$\int_0^{\ln 3} dx \int_x^{\ln 3} \frac{e^y}{y} dy = \int_0^{\ln 3} dy \int_0^y \frac{e^y}{y} dx = \int_0^{\ln 3} e^y dy = 2$$

4. 设  $u(x, y)$  为  $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx + e^x[e^y(x-y)+1]dy$  的原函数, 且满足  $u(1, 1) = e^2 + e + 5$ , 则  $u(0, 0) = 6$ 。

**解析：**常规做法就不提了。这里注意到全微分中多次出现  $x - y$ ，而  $(0,0), (1,1)$  正好都位于  $y = x$  上，所以令曲线  $L^+ : y = x$ ，从  $(0,0)$  到  $(1,1)$ ，则：

$$\begin{aligned} u(1,1) - u(0,0) &= \int_{L^+} e^x [e^y(x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y(x - y) + 1] dy \\ &= \int_0^1 e^x [2e^x + x] + e^x dx \\ &= e^2 + e - 1 \end{aligned}$$

所以  $u(0,0) = 6$ 。

**注：**原函数  $u(x,y) = e^x(e^y(1 + x - y) + y) + 5$ 。

5.  $L^+$  是单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上的一条  $C^1$  曲线。以  $S(0,0,-1)$  为起点，以  $N(0,0,1)$  为终点。则

$$\int_{L^+} [2y + \sin(y^2 + z^2)] dx + 2[x + \ln(1 + z^2 + x^2)] dy - 3(x^2 + y^2 - 1) dz = 2$$

**解析：**本题并没有给出具体的路径，很可能积分与路径无关，但当前的被积函数并不是一个全微分。注意题目中给出了  $L^+$  在单位球面上的条件，同时被积函数中存在大量的  $x^2 + z^2$  形式的式子，所以原积分等于：

$$\int_{L^+} [2y + \sin(1 - x^2)] dx + 2[x + \ln(2 - y^2)] dy + 3z^2 dz$$

这正好一个全微分式子，其积分与路径无关，所以可以取路径为线段  $SN$ ，即  $x = 0, y = 0, z : -1 \rightarrow 1$ ，积分化为：

$$\int_{-1}^1 3z^2 dz = 2$$

**注：**作为一个填空题，可以考虑直接取个特殊路径算，比如球面上的一个半圆弧。

6. 设曲线  $\gamma : x = 2t, y = t, z = 2 - 2t$  ( $0 \leq t \leq 1$ )，则  $\int_{\gamma} (2x + 4y + z^2 - 4) dl = 4$ 。

**解析：**

$$\int_{\gamma} (2x + 4y + z^2 - 4) dl = \int_0^1 (4t + 4t + (2 - 2t)^2 - 4) \sqrt{4 + 1 + 4} dt = 4$$

7. 设曲面  $\Sigma$  是  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  的上侧，则  $\iint_{\Sigma} (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy = 0$ 。

**解析：**曲面  $\Sigma$  是半球面，其单位法向量为  $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ ，将二类曲面积分转化为一类曲面积分：

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy \\ &= \iint_{\Sigma} (y - z, z - x, x - y) \cdot \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) dS \\ &= \iint_{\Sigma} 0 dS = 0 \end{aligned}$$

**注：**一类曲面积分和二类曲面积分的转化：

$$\iint_{\Sigma^+} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_{\Sigma^+} (P, Q, R) \cdot \mathbf{n} dS$$

其中  $\mathbf{n}$  为曲面  $\Sigma^+$  的单位法向量。

8. 设  $\lambda > 0$ , 记  $L_\lambda^+$  为圆周  $x^2 + y^2 = \lambda^2$ , 逆时针为正向, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi \lambda^2} \left[ \int_{L_\lambda^+} (\sin x + y + e^y) dx + (3x + xe^y) dy \right] = 2$$

解析: 由 Green 公式:

$$\int_{L_\lambda^+} (\sin x + y + e^y) dx + (3x + xe^y) dy = \iint_{D_\lambda} 2 dx dy = 2\pi \lambda^2$$

所以极限值为 2。

## 二、选择题解析

1. 设函数  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续, 交换累次积分的顺序  $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy = C$ 。

- A)  $\int_1^4 dy \int_{2-y}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$   
 B)  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{2-y}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$   
 C)  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$   
 D)  $\int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$

解析: 先得到二重积分的积分区域为:  $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2-x\}$ 。为了交换次序, 先考虑  $y$  的上下限的极端情况, 得到  $y$  的范围:  $0 \leq y \leq 4$ 。计算  $x$  的范围:  $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, x \leq 2-y$ , 即  $-\sqrt{y} \leq x \leq \min\{2-y, \sqrt{y}\}$ , 考虑  $\min\{2-y, \sqrt{y}\} = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2-y, & 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$

所以, 交换次序后的积分为:  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$ , 选 C。

注: 这里展示一下代数法求累次积分, 可以学一下, 三维区域不好画。

2. 向量场  $\mathbf{V} = (x+y+z)\mathbf{i} + (x^2+y^2+z^2)\mathbf{j} + (x^3+y^3+z^3)\mathbf{k}$  在  $(0, 0, 0)$  处的旋度为 C。

- A)  $\mathbf{j} + \mathbf{k}$   
 B)  $\mathbf{i} + \mathbf{k}$   
 C)  $\mathbf{j} - \mathbf{k}$   
 D)  $\mathbf{i} - \mathbf{k}$

解析: 由旋度公式计算得到选 C。

3. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^p}} - 1 \right)$  收敛当且仅当参数  $p$  满足 A。

- A)  $p > \frac{1}{2}$   
 B)  $p \geq 2$

C)  $p \geq 1$ D)  $p > 1$ 

解析:

$$\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^p}} - 1 = \frac{(-1)^n}{2n^p} - \frac{1}{8n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

其中  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^p}$  在  $p > 0$  时发散。  $\frac{1}{8n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \sim \frac{1}{8n^{2p}}$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$  收敛当且仅当  $p > \frac{1}{2}$ 。所以原级数在  $p > \frac{1}{2}$  时收敛, 选 A。

4. 已知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$  在  $x = -1$  处条件收敛, 则级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  B。

A) 不能确定

B) 绝对收敛

C) 条件收敛

D) 发散

解析: 幂级数只在收敛半径处可能条件收敛, 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$  的收敛半径为 2。所以其在

$x = 0$  处绝对收敛, 即  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 选 B。

5. 比较三个积分  $J_i = \iint_{D_i} (x-y)^{1/3} dx dy$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的大小, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

则 C。

A)  $J_2 < J_1 < J_3$ B)  $J_1 < J_2 < J_3$ C)  $J_3 < J_1 < J_2$ D)  $J_2 < J_3 < J_1$ 

解析: 被积函数  $(x-y)^{1/3}$  关于  $y = x$  呈奇对称, 且在  $y > x$  时为负,  $x > y$  时为正。所以  $D_1$  上的积分为 0, 画一下  $D_2$  和  $D_3$  的形状, 可以发现  $D_2$  上的积分大于 0,  $D_3$  上的积分小于 0, 所以选 C。

6. 以下四个选项中, 正确的选项是 C。

A) 存在可微向量场  $\mathbf{V}(x, y, z)$  使得  $\text{rot } \mathbf{V} = (x, z^2, \sin y)$ B) 存在可微函数  $f$  使得  $\text{grad } f(x, y, z) = (y, -x - 2z, 2y)$ 

C) 对  $\mathbb{R}^3$  中的每个线性向量场  $\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , 都存在可微函数  $f$  以及可微向量场  $\mathbf{W}$  使得  $\mathbf{V} = \text{grad } f + \text{rot } \mathbf{W}$



D) 这四个选项中, 其他三个选项都不对

**解析:**

选项 A: 旋度的散度应为 0, 但  $\operatorname{div}(x, z^2, \sin y) = 1$ , 所以选项 A 错误。

选项 B: 梯度的旋度应为 0 向量, 但  $\operatorname{rot}(y, -x - 2z, 2y) = (4, 0, -2)$ , 所以选项 B 错误。

选项 C: 假设存在, 对  $\mathbf{V} = \operatorname{grad} f + \operatorname{rot} \mathbf{W}$  两边取散度, 得到  $a_{11} + a_{22} + a_{33} = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ 。尝试取  $\operatorname{grad} f = (a_{11}x, a_{22}y, a_{33}z)$ , 即  $f = \frac{1}{2}a_{11}x^2 + \frac{1}{2}a_{22}y^2 + \frac{1}{2}a_{33}z^2$ 。那么  $\operatorname{rot} \mathbf{W} = \mathbf{V} - \operatorname{grad} f = (a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y)$ , 取  $\mathbf{W} = (a_{21}xz - a_{31}xy, a_{32}xy - a_{12}yz, a_{13}yz - a_{23}xz)$  即可满足。所以选项 C 正确。

**注:** 此题的考点属实有点变态了, 可能是疫情期间线上考试的原因, 这张卷子变态的也不只一处。选项 C 的  $f$  和  $\mathbf{W}$  不是唯一的, 上面只是我第一次凑出来的一种。此题的一般结论请搜索 Helmholtz 分解。

7. 关于幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ , 以下陈述中正确的是 A。

- A) 对任意  $0 < \delta < 1$ , 该幂级数在任何区间  $[-1, 1 - \delta]$  上一致收敛
- B) 对任意  $0 < \delta < 1$ , 该幂级数在任何区间  $[-1 + \delta, 1 - \delta]$  上一致收敛, 但在区间  $[1 - \delta, 1)$  和  $(-1, -1 + \delta)$  上都不是一致收敛
- C) 该幂级数在区间  $[-1, 1]$  上一致收敛
- D) 对任意  $0 < \delta < 1$ , 该幂级数在任何区间  $[-1 + \delta, 1)$  上一致收敛, 但在区间  $(-1, -1 + \delta]$  上不是一致收敛的

**解析:** 先求得, 本题幂函数的收敛域为  $[-1, 1)$ , 所以选项 C 首先错误。由 Abel 定理, 如果幂级数在某个闭区间上收敛, 则其在该区间上一致收敛, 所以选项 A 正确, 选项 B、D 错误。选 A。

**注:** Abel 定理在《高等微积分教程 (下)》定理 6.3.1 和定理 6.3.2。

### 三、解答题解析

1. 设  $D$  为不等式组  $x > 0, 1 \leq xy \leq 3, x \leq 2y \leq 2x$  确定的平面区域。求  $\iint_D x^2 dx dy$ 。

**解析:** 做换元, 令  $u = xy, v = \frac{y}{x}$ , 则  $D = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 3, \frac{1}{2} \leq v \leq 1\}$ ,  $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \frac{1}{2v}$ , 所以:

$$\iint_D x^2 dx dy = \int_1^3 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{2v} dv du = 2$$

2. 记  $\Sigma_1$  为圆柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  被上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$  和平面  $z = 0$  所截得的部分, 记  $\Sigma_2$  为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$  位于区域  $x^2 + y^2 \leq 2x$  内部的部分。求  $\Sigma_1, \Sigma_2$  的面积。

**解析:**  $\Sigma_1$  是一个柱面, 适合使用一类曲线积分计算:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{x^2+y^2=2x} \sqrt{4-x^2-y^2} dl \\ &= 8 \end{aligned}$$

$\Sigma_2$  可以写成  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  ( $x^2 + y^2 \leq 2x$ ), 适合直接计算:

$$\begin{aligned} S_2 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4\pi - 8 \end{aligned}$$

3. 设  $S^+$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a, b, c > 0$ , 正向朝外. 计算第二型曲面积分

$$\iint_{S^+} xy^2 dy \wedge dz + yz^2 dz \wedge dx + xz^2 dx \wedge dy.$$

解析: 由 Gauss 公式:

$$\iint_{S^+} xy^2 dy \wedge dz + yz^2 dz \wedge dx + xz^2 dx \wedge dy = \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 dx dy dz$$

其中  $\Omega$  为椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ . 做变量替换  $x = au, y = bv, z = cw$ , 则积分变为:

$$abc \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 du dv dw$$

由对称性可知:

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} u^2 du dv dw = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} v^2 du dv dw = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} w^2 du dv dw = \frac{1}{3} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} u^2 + v^2 + w^2 du dv dw$$

对最后的积分做球坐标代换, 得到

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} u^2 + v^2 + w^2 du dv dw = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{5}$$

一层层往上代入, 得到原始积分的结果为  $abc(a^2 + b^2 + c^2) \frac{4\pi}{15}$ .

4. (1) 求微分方程  $\begin{cases} (1-x^2)S'' = xS' \\ S(0) = 0, S'(0) = 1 \end{cases}$  的幂级数解  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 并求这个幂级数的收敛半径;

(2) 求数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$  的值。

解析: (1)  $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$ ,  $S''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$ , 代入微分方程和初值条件得到:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$2a_2 = 0$$

$$6a_3 = a_1$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n = na_n \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\text{解得 } a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{((n-2)!!)^2}{n!}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

所以  $S(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n-1)!!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ , 利用比值判敛法, 得到收敛半径为  $R=1$ 。

(2) 直接求解微分方程得到  $S(x) = \arcsin x$ 。所以  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ 。

5. 已知  $2\pi$  周期函数  $f$  在区间  $(-\pi, \pi]$  上的表达式为  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi; \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$

(1) 求  $f$  的傅里叶级数;

(2) 利用 Parseval 等式和 (1) 中的级数, 证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

(3) 求积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} dx$$

的值。

解析: (1)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

所以  $f$  的傅里叶级数为:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

(2) 由 Parseval 等式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

代入  $a_n, b_n$  的表达式, 得到  $1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n-1} \right)^2$ , 整理得到  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 。

(3)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{2n+1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{2x^{2n}}{2n+1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

注：这张卷子的考点确实离谱点，连 Parseval 等式都考。所以本卷考点仅供参考。