二、计算与证明题（共 70 分）

11.（12 分）当 k 取何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+3x_2-4x_3+11x_4=k \end{cases}$ 有解，并求出其全解.

12.（10 分）设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} A & B \\ A & B \end{bmatrix}$，求可逆矩阵 P 和简化行阶梯形 U 使得 $PC=U$.

13.（8 分）设 A 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维列向量，满足 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且

$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=c_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=c_2\boldsymbol{\alpha}_1+c_1\boldsymbol{\alpha}_2$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3=c_2\boldsymbol{\alpha}_2+c_1\boldsymbol{\alpha}_3$，这里 c_1,c_2 为常数，$c_2\neq 0$.

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

14.（8 分）设 $\mathfrak{B}_1=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ 和 $\mathfrak{B}_2=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ 是向量空间 V 的两个基，T 是 V 到 V 的线性变换，$\mathbf{u}_1=2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$，$\mathbf{u}_2=3\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$，$\mathbf{u}_3=-3\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_3$.

（1）求由基 $\mathfrak{B}_2$ 到基 $\mathfrak{B}_1$ 的坐标变换矩阵 P.

（2）若 T 在基 $\mathfrak{B}_1$ 下的矩阵表示为 A，求 T 在基 $\mathfrak{B}_2$ 下的矩阵表示 B.

15.（12 分）设 V 是 n 维向量空间，$T:V\to V$ 为线性变换，定义 $T^{k+1}(\mathbf{u})=T(T^k(\mathbf{u}))$，$\forall\mathbf{u}\in V$，$k=1,2,\cdots$. 已知 $T^n(\mathbf{u})=\vec{0}$，$\forall\mathbf{u}\in V$，且存在 $\mathbf{u}_0\in V$ 使得 $T^{n-1}(\mathbf{u}_0)\neq\vec{0}$.

证明：T 在某个基底下的矩阵表示为 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

16.（20 分）设 λ 是实数，记 V 为以 x 作自变量且由形如 $e^{\lambda x}(a+bx+cx^2)$（$a,b,c\in\mathbb{R}$）的函数组成的集合，对 $y\in V$，记 $L(y)=\dfrac{dy}{dx}-y$.

（1） 证明：L 是 V 到 V 的线性变换.

（2） 证明 $e^{\lambda x},e^{\lambda x}x,e^{\lambda x}x^2$ 是 V 的基底，并写出 L 在这组基底下的矩阵表示.

（3） 已知 L 不是满射，求 λ 的值，并判断 $e^{\lambda x}x$ 是否在 L 的值域中. 如果 $e^{\lambda x}x$ 不在 L 的值域中，请说明理由；如果 $e^{\lambda x}x$ 在 L 的值域中，请求出它的所有原像.