2024 年秋季《高等微积分 1》期中试卷

2024 年 11 月 3 日 $9:00-11:00$

本试卷分两页，共七道试题，其中第 4 题 10 分，其余每题各 15 分。

1 (1) 设 m 是给定的实数。判断函数极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\left((\frac{\sqrt{x}}{2})^m e^{1/\sqrt{x}}\right)$ 是否存在，需给出理由。

(2) 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\tan 2x)^{\frac{1}{x}}$.

(3) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为开区间 (a,b) 内的 Cauchy 序列，函数 f 在 (a,b) 上一致连续。请用 Cauchy 序列与一致连续的定义，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在。

解. (1) 该函数极限不存在。

令 $\frac{1}{\sqrt{x}}=y$, 利用复合极限定理可得

$$\lim_{x\to 0+}\left((\frac{\sqrt{x}}{2})^m e^{1/\sqrt{x}}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{(2y)^m}.$$

熟知 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{(2y)^m}{e^y}=0$, 可得所求的极限

$$\lim_{x\to 0+}\left((\frac{\sqrt{x}}{2})^m e^{1/\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

或者说所求的极限不存在.

(2) 所求的函数极限等于 e^{-2}。

令 $t=-\tan 2x$ 进行换元，当 $x\to 0$ 时 $t\to 0$，且在 $B_{\frac{\pi}{4}}(0)\backslash\{0\}$ 中 t 处处非零，从而由复合极限定理可知

$$\lim_{x\to 0}(1-\tan 2x)^{-\frac{1}{\tan 2x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e.$$

进而得到

$$\lim_{x\to 0}(1-\tan 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1-\tan 2x)^{-\frac{1}{\tan 2x}}\right)^{-\frac{\tan 2x}{x}}=e^{-2},$$

上式最后一步用到了熟知的结果

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos 2x}=2.$$

另外的解法。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\tan 2x)}{x}=\ln(1-\tan 2x)'|_{x=0}=\left(\frac{1}{1-\tan 2x}\cdot(-\frac{2}{\cos^2 2x})\right)\Big|_{x=0}=-2,$$

进而得到

$$\lim_{x\to 0}(1-\tan 2x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\tan 2x)}{x}\right)=e^{-2}.$$

(3) 只需证明 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列。由 f 在 (a,b) 上一致连续的定义可知：对任何 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 (a,b) 中两点 x,y，只要 $|x-y|<\delta$ 则有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$。再由 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，对上述 δ，存在 $N\in\mathbb{Z}_+$，使得对任何 $m,n\geq N$ 有 $|x_n-x_m|<\delta$。

结合起来，可得对任何 $m,n\geq N$，有 $|x_n-x_m|<\delta$，进而 $|f(x_n)-f(x_m)|<\epsilon$，这就验证了 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，所以极限 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在。 □

2 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(0)=1$，且 $f'(0)=L$.

(1) 利用导数的定义，计算极限 $\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})^n$ 的值。

(2) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot a^{\frac{1}{n}}-1\right)^n$，其中 a 是给定的正数。

解. (1) 利用 Heine 定理，有

$$\lim_{n\to\infty} n\ln f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln f(\frac{1}{n})}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln f(x) - \ln f(0)}{x} = (\ln f(x))'|_{x=0} = \frac{f'(0)}{f(0)} = L.$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})^n = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n\ln f(\frac{1}{n})\right) = e^L.$$

(2) 令 $f(x) = 2a^x - 1$，则 $f(0) = 1$，$f'(0) = 2a^x \ln a\Big|_{x=0} = 2\ln a$。利用 (1) 的结论可得

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\cdot a^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})^n = e^{f'(0)} = e^{2\ln a} = a^2.$$

□

3 设 a 为正整数，定义函数 $f(x)$ 为:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\frac{1}{x^3}, & \text{如果 } x > 0, \\ 0, & \text{如果 } x \leqslant 0. \end{cases}$$

(1) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，求 a 的最小可能值；

(2) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，且导函数 $f'(x)$ 处处连续，求 a 的最小可能值。

解. (1) 对 $x > 0$，由 Leibniz 法则和链式法则可知 f 在 x 处可导，且

$$f'(x) = ax^{a-1}\sin\frac{1}{x^3} + x^a\cos\frac{1}{x^3}\cdot(-3x^{-4}) = ax^{a-1}\sin\frac{1}{x^3} - 3x^{a-4}\cos\frac{1}{x^3}.$$

对 $x < 0$, 显然有 $f'(x) = 0$。来考虑 f 在 $x = 0$ 处的导数, 显然有 $f'(0-) = 0$。由定义，有

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1}\sin\frac{1}{x^3}.$$

当 $a=1$ 时，上述极限为 $\lim\limits_{x\to 0+}\sin\frac{1}{x^3}$，不存在。当 $a\geq 2$ 时，对 $0<x<1$ 有 $|x^{a-1}\sin\frac{1}{x^3}|\leq x^{a-1}\leq x$，利用夹逼定理可得 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{a-1}\sin\frac{1}{x^3}=0$，得到 $f'(0+)=0$，从而可知 f 在 0 处可导。

结合起来可得：若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导，则正整数 a 的最小值是 2。

(2) 由 (1) 的结论知若 f 可导，则 $a\geq 2$。此时，有

$$f'(x)=\begin{cases} ax^{a-1}\sin\frac{1}{x^3}-3x^{a-4}\cos\frac{1}{x^3}, & \text{如果 } x>0 \\ 0, & \text{如果 } x\leq 0 \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上 f' 是连续函数，只需考虑 f' 在 0 处的连续性。这等价于

$$\begin{aligned} 0=\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0+}\left(ax^{a-1}\sin\frac{1}{x^3}-3x^{a-4}\cos\frac{1}{x^3}\right) \\ \iff \lim_{x\to 0+}x^{a-4}\cos\frac{1}{x^3}=0 \quad (*). \end{aligned}$$

在 $a=2,3,4$ 时上式不成立，当 $a\geq 5$ 时对 $0<x<1$ 有 $|x^{a-4}\cos\frac{1}{x^3}|\leq |x^{a-4}|\leq |x|$，结合夹逼定理可知 $(*)$ 成立。

结合起来可得：若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导且导函数 $f'(x)$ 处处连续，则正整数 a 的最小值是 5。 $\square$

4 设 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是连续函数，满足对任何 $a>0$，方程 $f(x)=ax$ 在 $[1,+\infty)$ 中都有解。利用**最值定理**证明：对任何 $a>0$，方程 $f(x)=ax$ 在 $[1,+\infty)$ 中都有无数个解。

证明: 记 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 g 是 $[1,+\infty)$ 上的连续函数，且 $f(x)=ax$ 当且仅当 $g(x)=a$。

用反证法，假设结论不成立，即 $g(x)=a$ 只有有限多个解。设这样最大的解为 M，则 g 在 $(M,+\infty)$ 上处处不等于 a。利用介值定理可得 g 在 $(M,+\infty)$ 上或者恒大于 a 或者恒小于 a。（否则，a 是介值，得到存在 $x>M$ 使得 $g(x)=a$，矛盾!）

(1) 若 g 在 $(M,+\infty)$ 上恒大于 a。利用最值定理可知 g 在 $[1,M]$ 上有最小值 $b=g(x_0)$。结合 $b\le g(M)=a$ 及 g 在 $(M,+\infty)$ 上恒大于 a，可得 b 是 g 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值。显然 $b=g(x_0)>0$，则 $g(x)=\frac{b}{2}$ 无解，与条件矛盾!

(2) 若 g 在 $(M,+\infty)$ 上恒小于 a。类似的，可得 g 在 $[1,M]$ 上有最大值 $c=g(x_1)\ge g(M)=a$，结合 g 在 $(M,+\infty)$ 上恒小于 a 得到 c 是 g 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值。由此得到 $g(x)=2c$ 无解，矛盾! □

5 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的周期函数，且不为常值函数。称正数 T 为 f 的周期，如果对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x+T)=f(x)$。令 P 为由 f 的所有正周期构成的集合，记 $a=\inf P$。（我们可通过如下两步证明 f 有最小正周期。）

(1) 若 $a>0$，利用 f 的连续性证明：对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x+a)=f(x)$.

(2) 证明 $a>0$.

证明: (1) 设 $a=\inf P>0$, 由下确界的定义可知对每个正整数 n 存在 $T_n\in P$ 使得 $T_n<a+\frac{1}{n}$。这样，有 $a\le T_n<a+\frac{1}{n}$，利用夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=a$。结合 f 的连续性可得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x+T_n)=f(\lim_{n\to\infty}(x+T_n))=f(x+a).$$

(2) 用反证法，假设 $a=0$。由 f 不是常值函数可知存在 $f(p)<f(q)$。记 $\epsilon=f(q)-f(p)$，由于 f 在点 p 处连续，对上述 ϵ，存在 $\delta>0$，使得对 $|x-p|<\delta$ 都有 $|f(x)-f(p)|<\epsilon$。

由 $\delta>a=\inf P$，可知存在 f 的正周期 $T<\delta$。在一个周期 $[p,p+T]$ 中 f 可取到一切值点，故存在 $x\in[p,p+T]$ 使得 $f(x)=f(q)$。由于 $|x-p|\le T<\delta$，可得 $|f(x)-f(p)|<\epsilon$，但这与

$$|f(x)-f(p)|=|f(q)-f(p)|=\epsilon$$

矛盾! □

6 给定实数 $r>1$。设正实数数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足如下条件:

$$x_n \leqslant 2^n \cdot (x_{n-1})^r, \quad \forall n \geqslant 1.$$

(1) 请给出常数 p, q，使得对任何正整数 n 都有

$$pn+q+\ln x_n \leqslant r\left(p(n-1)+q+\ln x_{n-1}\right).$$

(2) 证明：当 $x_0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{(r-1)^2}}$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

解. (1) 由条件有

$$\ln x_n \leq n\ln 2 + r\ln x_{n-1}.$$

对比所需要的不等式

$$\ln x_n \leq r\ln x_{n-1} + (r-1)q - rp + (r-1)pn,$$

取 $(r-1)p=\ln 2$，$(r-1)q-rp=0$ 即可。这样，只需取

$$p=\frac{\ln 2}{r-1}, \quad q=\frac{rp}{r-1}=\frac{r}{(r-1)^2}\ln 2.$$

(2) 利用 (1) 的结果，有

$$pn+q+\ln x_n \leq r^n\left(p\cdot 0+q+\ln x_0\right) = r^n\left(\frac{r}{(r-1)^2}\ln 2+\ln x_0\right) = r^n\ln(2^{\frac{r}{(r-1)^2}}x_0).$$

由条件可知 $\ln(2^{\frac{r}{(r-1)^2}}x_0)$ 是负数，记之为 $-L$，则有

$$\ln x_n \leq -Lr^n - pn - q \leq -Lr^n.$$

由此可得

$$0 < x_n \leq e^{-Lr^n},$$

利用夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. □

7 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是不减的函数，即对任何 $0\leqslant a<b\leqslant 1$ 有 $f(a)\leqslant f(b)$. 设 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，令 $h(x)=f(x)+g(x)$. 已知 $h(0)>0>h(1)$。仿照介值定理的证明方法，证明存在 $x\in(0,1)$ 使得 $h(x)=0$。

证明: 用反证法，假设 h 在 $[0,1]$ 中处处非零。取 $[a_1,b_1]=[0,1]$，满足 $h(a_1)>0>h(b_1)$。在定义好 $[a_n,b_n]$ 后，若 $h(\frac{a_n+b_n}{2})<0$，则令 $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]$；若 $h(\frac{a_n+b_n}{2})>0$，则令 $[a_{n+1},b_{n+1}]=[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]$。这样，得到闭区间的下降链

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots$$

满足: $h(a_n)>0>h(b_n)$，且 $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$。利用区间套原理，有 $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$。

注意到，a_n 递增且趋于 c，由 f 不减可知 $\{f(a_n)\}$ 不减且有上界 $f(c)$，利用单调收敛定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$ 存在且不超过 $f(c)$。类似的，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$ 存在且不小于 $f(c)$。结合起来有

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)\leq f(c)\leq\lim_{n\to\infty}f(b_n).$$

对 $h(a_n)>0>h(b_n)$ 取极限，可得不等式 $(*)$: $\lim\limits_{n\to\infty}h(a_n)\geq 0\geq\lim\limits_{n\to\infty}h(a_n)$。利用 g 连续可得

$$\lim_{n\to\infty}h(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)+\lim_{n\to\infty}g(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)+g(c)\leq f(c)+g(c),$$
$$\lim_{n\to\infty}h(b_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)+\lim_{n\to\infty}g(b_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)+g(c)\geq f(c)+g(c).$$

代入不等式 $(*)$，得到

$$f(c)+g(c)\geq\lim_{n\to\infty}h(a_n)\geq 0\geq\lim_{n\to\infty}h(b_n)\geq f(c)+g(c),$$

从而有 $f(c)+g(c)=0$，即 $h(c)=0$，矛盾!

$\square$