2023 年春季《高等微积分 2》期末考试试卷

2023 年 6 月 12 日 9 : 00-11 : 00

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题 10 分, 其余每题 15 分.

1 (1) 叙述高斯 *(Gauss)* 公式与斯托克斯 *(Stokes)* 公式.

(2) 给定 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场 $\mathbf{F} = (\cos x \sin y \cos z, \sin x \cos y \cos z, \sin x \sin y \sin z)$, 判断是否存在光滑函数 $\phi(x,y,z)$, 使得 $\nabla\phi = \mathbf{F}$. 若不存在, 请说明理由; 若存在, 请找出 ϕ.

2 (1) 求出二元函数 $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3 + 3$ 的所有极值点.

(2) 设 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是光滑函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 在约束条件 $x_1 + \cdots + x_n = 0$ 下的条件极大值点. 证明:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}).$$

3 (1) 在区间 $[0,1)$ 上求解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y'' - y = 4e^{-x} \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(2) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 C^1 光滑映射, 且满足

$$f(x) = x^2 + \int_0^x (x-t) f'(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

请确定 $f(x)$, 需要证明你的结论.

4 (1) 设 L 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线, 其上有如下对称性: 设线性映射 $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为

$$\Phi(x,y,z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵, 即满足 $A^TA=I_3$. 已知 Φ 将 L 双射成 L 自身. 证明: 对任何连续函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 有

$$\int_L f ds=\int_L (f\circ\Phi)\,ds.$$

(2) 设曲线 $L=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1, x+2y+z=0\}$. (利用对称性) 计算第一型曲线积分

$$\int_L (2x^2+x+y^2+y)ds.$$

5 (1) 令 $[0,1]^n=\{(x_1,\ldots,x_n)|0\le x_i\le 1, i=1,\ldots,n\}$, 求如下 n 重积分的值:

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}dx_1\cdots dx_n.$$

(2) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 令 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. 令 $u=x+y, v=y$ 结合换元公式证明:

$$\iint_D f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy=\int_0^1 uf\left(\frac{u}{2}\right)du+\int_1^2(2-u)f\left(\frac{u}{2}\right)du.$$

6 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续的二阶导数, $f(0)=g(0)=1$, 且对 Oxy 平面上任何定向的简单闭曲线 C 都有

$$\int_C\left[y^2f(x)+2ye^x-8yg(x)\right]dx+2\left[yg(x)+f(x)\right]dy=0.$$

求函数 $f(x),g(x)$.

7 (1) 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中封闭的光滑曲面, 取指向外部的定向, 每点 $(x,y,z)\in S$ 处 S 的单位外法向量为 $\mathbf{n}(x,y,z)$, 记 S 围成的区域为 Ω. 证明: 对 Ω 上的光滑函数 f,g, 有

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}dS=\iiint_\Omega(\nabla f\cdot\nabla g+f\Delta g)\,dxdydz,$$

其中 $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}$ 表示 g 对方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数, $\Delta g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$.

(2) 设 S,Ω 如前一小问所述, 已知坐标原点在 S 的内部. 用 r 表示每点 (x,y,z) 到原点的距离, 即 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 设光滑函数 u 在 Ω 中每点处都满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. 利用第 (1) 小问的结论, 计算如下积分

$$I=\iint_S\left[u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]dS.$$