2020 级微积分 A2 期末考试

mathsdream 整理版

2021.06.15

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. 设 $F(x,y,z)=(e^{x+y+z},1,1)$，$P_0=(0,0,0)$，则 $\mathrm{rot}F(P_0)=$ __________。

2. 设 $F(x,y,z)=(x\ln(y+z),y\ln(z+x),z\ln(x+y))$，$P_0=(1,1,1)$，则 $\mathrm{div}F(P_0)=$ __________。

3. 设 a 为常数，且 $\forall A,B\in\mathbb{R}^2$，积分 $\displaystyle\int_{L(A)}^{(B)}(x^2+ayz)dx+(y^2+2zx)dy+(z^2+2xy)dz$ 与路径无关，则 $a=$ __________。

4. 设 2π 周期函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\pi];\\ 0, & x\in(-\pi,0]\end{cases}$ 的形式 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$ __________。

5. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+\ln n}$ 的收敛性（指明“条件收敛”,“绝对收敛”或“发散”）__________。

6. 微分方程 $(y\cos x+\cos y)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$ 的通解为 __________。

7. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}x^{2n}$ 在 $(-1,1)$ 的和函数为 __________。

8. 设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$，$f\in C[0,1]$，将二重积分 $I=\displaystyle\iint_D(f(x)+f(y))dxdy$ 化成一重定积分的表达式，则 $I=$ __________。

9. 设 L 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的上半周，$A=(-a,0),B=(a,0)$，则 $\displaystyle\int_{L(A)}^{(B)}(x+y)dx+(x-y)dy=$ __________。

10. 设 2π 周期函数在区间 $(-\pi,\pi]$ 的定义为 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(0,\pi];\\ 1, & x\in(-\pi,0]\end{cases}$ 设 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_n=$ __________。

二、解答题

11.（12 分）设 $D=\{(x,y)|x^2+4y^2\leq 1\}$，求 $\iint_D (x^2+y^2)dxdy.$

12.（16 分）设 $S^+: z=1-x^2-y^2$（$z\geq 0$），其正法向量的 z 分量大于等于 0，求 $\iint_{S^+} x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+(x^2+y^2)dx\wedge dy.$

13.（12 分）设 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$（$R>0$）包含在圆柱面 $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ 内的部分，求 $\iint_S z^3dS.$

14.（10 分）设 L 为曲线 $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ $,t\in[0,2\pi]$, 求 $\int_L (x^2+y^2)dl.$

15.（12 分）设 $a_n>0, n=1,2,3,\cdots$。

(I) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例；

(II) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例；

(III) 若 $\{a_n\}$ 单调，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例。

16.（8 分）设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界闭区域，其边界面 $\partial\Omega$ 为光滑正则曲面。

(I) 设 $f,g\in C^{(2)}$，求证：

$$\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}dS=\iiint_\Omega f\Delta g dxdydz+\iiint_\Omega \nabla f\cdot\nabla g dxdydz,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向量，算子

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

(II) 函数 $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)\in C^{(2)}(\Omega)$。若 u 为调和函数（$\Delta u=0$），且当 $(x,y,z)\in\partial\Omega$ 时，$u(x,y,z)-v(x,y,z)=0$，求证：

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dxdydz\leq\iiint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dxdydz.$$

三、附加题（本题完全正确才有分，且分数不计入总分，仅用于评判 A+）

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求证：

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{\pi^2}{12}.$$

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 设 $F(x,y,z) = (e^{x+y+z}, 1, 1)$，$P_0 = (0,0,0)$，则 $\mathrm{rot}F(P_0) = (0,1,-1)$。

   解析：

$$\mathrm{rot}F = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = (0,1,-1)$$

2. 设 $F(x,y,z) = (x\ln(y+z), y\ln(z+x), z\ln(x+y))$，$P_0 = (1,1,1)$，则 $\mathrm{div}F(P_0) = 3\ln 2$。

   解析：

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \ln(y+z) + \ln(z+x) + \ln(x+y) = 3\ln 2$$

3. 设 a 为常数，且 $\forall A, B \in \mathbb{R}^2$，积分 $\int_{L(A)}^{(B)} (x^2+ayz)dx + (y^2+2zx)dy + (z^2+2xy)dz$ 与路径无关，则 $a = 2$。

   解析：积分与路径无关的充要条件是被积函数的旋度为 0，即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(z^2+2xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2+2zx) = 2x - 2x = 0 \\
\frac{\partial}{\partial z}(x^2+ayz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2+2xy) = (a-2)y = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}(y^2+2zx) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+ayz) = (2-a)z = 0
\end{aligned}$$

   由上式可得，$a = 2$。

4. 设 2π 周期函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,\pi]; \\ 0, & x \in (-\pi, 0] \end{cases}$ 的形式 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi) = \frac{\pi}{2}$。

   解析：形式 Fourier 级数的和函数满足：

$$S(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

   所以 $S(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$。

5. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n + \ln n}$ 的收敛性（指明“条件收敛”,“绝对收敛”或“发散”）$\Rightarrow$“绝对收敛”。

   解析：

$$\left|\frac{(-1)^n}{2^n + \ln n}\right| = \frac{1}{2^n + \ln n} < \frac{1}{2^n}$$

   级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n + \ln n}\right|$ 也收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n + \ln n}$ 绝对收敛。

6. 微分方程 $(y\cos x + \cos y)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$ 的通解为 $y\sin x + x\cos y = C$。

   解析：

$$(y\cos x + \cos y)dx + (\sin x - x\sin y)dy = d(y\sin x + x\cos y) = 0$$

   所以通解为 $y\sin x + x\cos y = C$，其中 C 为常数。

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}x^{2n}$ 在 $(-1,1)$ 的和函数为 $-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$。

解析：设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}x^{2n}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=-\frac{x}{1+x^2}$$

积分可得：

$$S(x)=\int S'(x)dx=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

由于 $S(0)=0$，所以 $C=0$，所以 $S(x)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$。

8. 设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$，$f\in C[0,1]$，将二重积分 $I=\iint_D(f(x)+f(y))dxdy$ 化成一重定积分的表达式，则 $I=\int_0^1 f(x)dx$。

解析：

$$\iint_D f(x)dxdy=\int_0^1\int_0^x f(x)dydx=\int_0^1 xf(x)dx$$
$$\iint_D f(y)dxdy=\int_0^1\int_y^1 f(y)dxdy=\int_0^1(1-y)f(y)dy=\int_0^1(1-x)f(x)dx$$
$$I=\iint_D(f(x)+f(y))dxdy=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1(1-x)f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

9. 设 L 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上半周，$A=(-a,0),B=(a,0)$，则 $\int_{L(A)}^{(B)}(x+y)dx+(x-y)dy=0$。

解析：$\frac{\partial}{\partial x}(x-y)-\frac{\partial}{\partial y}(x+y)=1-1=0$，所以积分与路径无关。重新取路径为 x 轴上的从 A 到 B 的线段 $C:y=0,x:-a\to a$，则

$$\int_{C(A)}^{(B)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{-a}^{a}xdx=0$$

10. 设 2π 周期函数在区间 $(-\pi,\pi]$ 的定义为 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(0,\pi];\\ 1, & x\in(-\pi,0]\end{cases}$ 设 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$。

解析：

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1\cdot\sin nxdx+\int_0^{\pi}(x+1)\cdot\sin nxdx\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx+\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi\right)\\
&=\frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

二、解答题解析

11.（12 分）设 $D=\{(x,y)|x^2+4y^2\le 1\}$，求 $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$.

解析：由极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=\frac{r}{2}\sin\theta$，则 $dxdy=\frac{r}{2}drd\theta$，新的积分区域为 $0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta+\frac{r^2}{4}\sin^2\theta)\cdot\frac{r}{2}drd\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)d\theta \\ &= \frac{5}{32}\pi\end{aligned}$$

12.（16 分）设 $S^+: z=1-x^2-y^2$ （$z\ge 0$），其正法向量的 z 分量大于等于 0，求 $\iint_{S^+} x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+(x^2+y^2)dx\wedge dy$.

解析：曲面方程为 $z=1-x^2-y^2$，所以 $dy\wedge dz=-\frac{\partial z}{\partial x}dx\wedge dy=2xdx\wedge dy$，$dz\wedge dx=-\frac{\partial z}{\partial y}dx\wedge dy=2ydx\wedge dy$，所以

$$\begin{aligned}\textbf{原式} &= \iint_{S^+}(2x^4+2y^4+x^2+y^2)dx\wedge dy \\ &= \iint_D (2x^4+2y^4+x^2+y^2)dxdy\end{aligned}$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，做极坐标换元 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $dxdy=rdrd\theta$，新的积分区域为 $0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D (2x^4+2y^4+x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^4\cos^4\theta+2r^4\sin^4\theta+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^5\cos^4\theta+2r^5\sin^4\theta+r^3)drd\theta \\ &= \pi\end{aligned}$$

注：此题也可以构造闭合曲面后使用 Guass 公式计算，或者用 Stokes 公式转化为 $x^2+y^2=1$ 上的二型曲线积分计算，有兴趣可以尝试练习一下。

13.（12 分）设 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ （$R>0$）包含在圆柱面 $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ 内的部分，求 $\iint_S z^3dS$.

解析：

$$\begin{aligned}\iint_S z^3dS &= \iint_D z^3\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy \\ &= \iint_D (R^2-x^2-y^2)^{3/2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy \\ &= R\iint_D (R^2-x^2-y^2)dxdy\end{aligned}$$

其中 $D=\{(x,y)|\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2\le\frac{R^2}{4}\}$，也就是 $\{(x,y)|x^2+y^2\le Rx\}$，做极坐标换元 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $dxdy=rdrd\theta$，新的积分区域为 $0\le r\le R\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D(R^2-x^2-y^2)dxdy&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\theta}(R^2-r^2)rdrd\theta\\&=\frac{5}{32}\pi R^4\end{aligned}$$

注：题目中有两个方程，要搞清楚它们的作用，前者是曲面的方程，后者是对范围的限制。

14.（10 分）设 L 为曲线 $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}, t\in[0,2\pi]$, 求 $\int_L(x^2+y^2)dl$.

解析：

$$\begin{aligned}\int_L(x^2+y^2)dl&=\int_0^{2\pi}((\cos t+t\sin t)^2+(\sin t-t\cos t)^2)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt\\&=\int_0^{2\pi}(t+t^3)dt\\&=2\pi^2+4\pi^4\end{aligned}$$

15.（12 分）设 $a_n>0, n=1,2,3,\cdots$。

(I) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例；

(II) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例；

(III) 若 $\{a_n\}$ 单调，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例。

解析：

(I) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则因为 $\sqrt{a_na_{n+1}}\le\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛，由比较判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛。

(II) 反之不然，这里考虑 a_n 一大一小交替变换，则一样可以保证 $\sqrt{a_na_{n+1}}$ 很小而使得级数收敛。具体取法例如取

$$a_n=\begin{cases}1, & n \text{ 为偶数}\\ \frac{1}{n^4}, & n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

则

$$\sqrt{a_na_{n+1}}=\begin{cases}\frac{1}{(n+1)^2}, & n \text{ 为偶数}\\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

(III) 若 $\{a_n\}$ 单调，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛，可知 $\{a_n\}$ 必然是单调递减，否则 $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 会恒大于 $\sqrt{a_1 a_2}$，导致级数发散。

由于 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \geq a_{n+1}$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。

16.（8 分）设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域，其边界面 $\partial\Omega$ 为光滑正则曲面。

(I) 设 $f, g \in C^{(2)}$，求证：

$$\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_{\Omega} f\Delta g dxdydz + \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dxdydz,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向量，算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

(II) 函数 $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z) \in C^{(2)}(\Omega)$。若 u 为调和函数（$\Delta u = 0$），且当 $(x,y,z) \in \partial\Omega$ 时，$u(x,y,z) - v(x,y,z) = 0$，求证：

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dxdydz \leq \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dxdydz.$$

解析：

(a) (I)

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \iint_{\partial\Omega^+} (f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z}) \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \iiint_{\Omega} \frac{\partial(f\frac{\partial g}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(f\frac{\partial g}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(f\frac{\partial g}{\partial z})}{\partial z} dxdydz \quad \text{Gauss 公式} \\
&= \iiint_{\Omega} \left(f(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} \right) dxdydz \\
&= \iiint_{\Omega} f\Delta g dxdydz + \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dxdydz
\end{aligned}$$

(b) (II) 令 $w = u - v$，则当 $(x,y,z) \in \partial\Omega$ 时，$w(x,y,z) = 0$。在 (I) 的结论中，取 $f = w, g = u$，则得到

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + \iiint_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u dxdydz \\
\Rightarrow \iiint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dxdydz &= \iiint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dxdydz
\end{aligned}$$

又因为 $\nabla v \cdot \nabla u \leq \|\nabla v\| \|\nabla u\| \leq \frac{1}{2}(\|\nabla v\|^2 + \|\nabla u\|^2)$，所以

$$\iiint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dxdydz \leq \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \|\nabla v\|^2 + \|\nabla u\|^2 dxdydz$$

将上面的等式代入不等式，即可得到

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dxdydz &\leq \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \|\nabla v\|^2 + \|\nabla u\|^2 dxdydz \\
\Rightarrow \iiint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dxdydz &= \iiint_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dxdydz
\end{aligned}$$

此即要证明的结论。

注： $u-v$ 在 $\partial\Omega$ 上为 0，对应曲面积分就会很好算，然后 $\Delta u=0$，比对 (I) 中的结论，就知道最适合的是令 $f=u-v, g=u$。

三、附加题解析

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求证：

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{\pi^2}{12}.$$

解析：

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1})}$$

由均值不等式

$$\frac{x^n}{n(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1})}\leq\frac{1}{2n^2}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1})}$$

在 $x\in R^+$ 上一致收敛，又 $\frac{x^n}{n(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1})}$ 连续，所以函数项级数在 $x\in R^+$ 连续。得到

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$