清华大学本科生考试试题专用纸(A 卷)

考试课程 22年 6月 14日

微积分 C(2)

一、填空题（每题5分，共50分）（请将答案写在答题纸上！）

1、 已知函数$z=\arctan(x+3y)$，求$\frac{\partial z}{\partial y}=$ ______________.

2、 已知函数$z=u^2+u+1$, 其中$u=e^{x^2+y^2}$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}=$ ______________.

3、 求函数$f(x)=-x$ 在 $[-1,1)$ 上的傅里叶级数: ______________________________.

4、 方程 $y'=(3+x)y$的通解为: ______________________________.

5、 设$D=\{(x,y)|1\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \ln(xy)dxdy = \text{______________}.$$

6、 设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 5\}$, 计算二重积分

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy = \text{______________}.$$

7、 设L为圆周$\{(x,y)|x^2+y^2=2\}$在第一象限中的部分，计算曲线积分

$$\int_L x^2ydl = \text{______________}.$$

8、 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{2})^n$的收敛半径和收敛域: ______________________________.

9、 将$\frac{1}{(1+x)^2}$展开为麦克劳林级数: ______________________________.

10、 求下列初值问题

$$\begin{cases} y''+4y'+4=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1. \end{cases}$$

的解: ______________________________.

二、计算题（每题8分，共40分）（请写出计算过程！）

11、 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的收敛域及和函数.

12、 利用二重积分计算平面$2x+2y+3z=6$与三个坐标面所围空间体的体积.

13、 计算第一型曲面积分$\iint\limits_S(x^2+y^2+z)dS$, S的方程是$z=x+y+1, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

14、 讨论下列级数的收敛和发散性:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n+1}}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a^n}{n}$.

15、 讨论下列广义积分的收敛和发散性:

a) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $\int_1^{+\infty}x^2e^{-x}dx$.

三、证明题（每题5分，共10分）（写出详细的证明过程！）

16、 设$a_n>0$, 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，试证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(1-a_n)$收敛.

17、 设$z=z(x,y)$为二阶连续可微函数，并且满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

令$u=x-y, v=x+y$, 证明$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$成立.