2024 年春季《高等微积分 2》期中试卷

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 4 题 10 分, 其余每题各 15 分.

1 (1) 求解微分方程 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) 证明：微分方程初值问题 $\begin{cases} y'' = y - y^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ 的解可以表示为

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - \frac{2}{3}t^3}} dt = x.$$

请给出求解过程，注意不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2-\frac{2}{3}t^3}} dt$ 是无法写出解析表达式的。

2 (1) 对实方阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$，求其矩阵指数函数 e^{Ax}。

(2) 求解如下微分方程初值问题:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3 给定实数 $\alpha \neq \beta$ 与连续函数 $f(x)$，求如下 *Euler 方程*在区间 $(0, +\infty)$ 上的一个特解:

$$x^2 y'' + (1 - \alpha - \beta) x y' + \alpha\beta y = x^2 f(x).$$

4 (1) 证明: 方程 $x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z + \sin z = 0$ 在点 $(0, 0, 0)$ 附近唯一确定隐函数 $z = f(x, y)$。

(2) 求上述隐函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处展开至二阶的带 *Peano 余项的 Taylor 公式*。

5 定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(1-\cos\frac{x^2}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}, & \text{如果 } y\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } y=0.\end{cases}$$

(1) 请判断 f 在 $(0,0)$ 处是否连续，需要证明你的断言。

(2) 计算 f 在 $(0,0)$ 处的各个方向导数。

(3) 请判断 f 在 $(0,0)$ 处是否可微，需要证明你的断言。

6 (1) 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中包含原点的开集，且对 D 中任何两点 P,Q，线段 PQ 都包含在 D 中。设 $f:D\to\mathbb{R}$ 可微，且满足 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上恒等于零。证明：f 在 D 上恒为常数。

(2) 设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 映射，$\mathbf{x}_0$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一点，已知 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的 Jacobi 矩阵 $J_f(\mathbf{x}_0)$ 的秩为 2(即它有一个 2×2 子式是可逆方阵)。利用隐函数定理证明：存在 $\epsilon>0$ 以及 C^1 映射 $\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}^3$，使得 $\gamma'(0)$ 是非零向量，且对任何 $t\in(-\epsilon,\epsilon)$ 都有 $f(\gamma(t))=f(\mathbf{x}_0)$.

7 对 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 (指其任意阶偏导函数都存在且连续)$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，定义函数 Δf 为

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}f_{ii}.$$

称 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，如果 Δf 恒等于零。

设 $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是光滑的调和函数，用 ∇u 表示 u 的梯度，$|\nabla u|$ 表示梯度的模长。

(1) 证明如下的 *Bochner's formula*:

$$\frac{1}{2}\Delta\left(|\nabla u|^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}^2,$$

上述右边为 u 的海瑟矩阵的各个矩阵元的平方和。

(2) 利用 *Cauchy-Schwartz* 不等式证明如下的 *Kato* 不等式:

$$\left|\nabla(|\nabla u|)\right|^2\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}^2,$$

上式左边的意思是：令 $g=|\nabla u|$ 为 u 梯度的模长，再令 $h=|\nabla g|^2$ 为 g 梯度的模长平方，h 即为上式左边。