

# 概率论与随机过程

## 样卷

一. 填空题 (28 分, 每空 4 分, 将计算结果直接写在横线上)

(1) 设事件  $A, B, C$  两两独立, 且  $ABC = \phi, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$ ,

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3}, \text{ 则 } P(A) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 在 1,2,3 中任取一数记为  $X$ , 再从 1 至  $X$  中任取一数记为  $Y$ , 则

$$P(X=3|Y=2) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 设  $X$  和  $Y$  相互独立, 均服从参数为  $p$  的几何分布, 则

$$P(X=1|X+Y=4) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(4) 设  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$ , 则  $E(|X|) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设  $(X, Y)$  的密度函数为  $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, -\infty < x, y < +\infty$ , 则  $E(\frac{X^2+3Y^2}{X^2+Y^2}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 设  $X_1, \dots, X_n, \dots$  独立同分布, 均服从指数分布, 且  $D(X_1) = 4$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ 依概率收敛到 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

(7) 设  $X_t = xe^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$ , 其中  $x, \mu, \sigma > 0$  均为常数,  $B_t$  为标准 Brown 运动, 则

$$E(X_t^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二. (12 分) 设随机变量  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布, 满足

$$P(X_1=1) = P(X_1=-1) = P(X_1=0) = \frac{1}{3},$$

(1) 试求概率  $P(X_1 = X_2)$ ;

(2) 试求  $Y = X_1^2 - X_2^2$  的特征函数  $\varphi_Y(\theta)$ ;

(3) 试求概率  $P(\sum_{i=1}^n X_i^2 = 3)$ 。

三. (15 分) 设随机变量  $X_1, \dots, X_n, \dots$  独立同分布, 均服从  $(0,1)$  上的均匀分布。记

$$U_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

- (1) 试求概率  $P(|X_1 - X_2| \leq \frac{1}{3})$ ;
- (2) 试求  $E(\bar{X} - U_n)$ ;
- (3) 试证明:  $n(1 - U_n)$  依分布收敛到参数为 1 的指数分布。

四. (20 分) 设随机变量  $X$  和  $Y$  的服从以点  $(1,0), (0,1), (1,1)$  为顶点的三角形区域  $D$  上的二维均匀分布,

- (1) 试问  $X$  和  $Y$  是否相互独立, 为什么?
- (2) 求  $Z = X + Y$  分布函数  $F_Z(z)$ ;
- (3) 用  $X$  来预测  $Y$  时, 其最佳的均方预测是否为线性预测, 为什么?
- (4) 记  $\xi = \begin{cases} 1, & Y > X, \\ -1, & Y \leq X. \end{cases}$  设  $\xi_1, \xi_2, \dots$  相互独立, 且均与  $\xi$  同分布, 令

$$U_n = U_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad U_0 = 0, \quad \text{求 } \text{Cov}(U_5, U_8)。$$

五. (15 分) 设四维正态随机变量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T \sim N(\mu, \Sigma)$ ,

$$\text{其中 } \mu = (1, 1, 0, 0)^T, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- (1) 求  $Y = X_1 + 2X_2 + 3X_3$  的密度函数  $f_Y(y)$ 。
- (2) 试问  $X_1$  与  $X_2 - E(X_2 | X_1)$  是否相互独立, 为什么?
- (3) 求  $Z = \frac{X_1 X_3 + X_4}{\sqrt{X_1^2 + 1}}$  的分布函数  $F_Z(z)$ 。

六. (10 分) 设  $\{N_t : t \geq 0\}$  是强度为  $\lambda > 0$  的 Poisson 过程,

- (1) 求条件期望  $E(2^{N_t} | N_s = 2)$ , 这里  $s < t$ ;
- (2) 设  $\gamma_i$  为独立同分布随机变量, 且与  $N_t$  相互独立, 若  $E(\gamma_i) = \alpha, E(\gamma_i^2) = \beta$ ,

$$\text{试求 } E\left[\prod_{i=1}^{N_t} (1 + \gamma_i)^2\right]。$$