2024 年秋季《高等微积分 1》期中试卷

2024 年 11 月 3 日 $9:00-11:00$

本试卷分两页，共七道试题，其中第 4 题 10 分，其余每题各 15 分。

1 (1) 设 m 是给定的实数。判断函数极限 $\lim_{x\to 0+}\left((\frac{\sqrt{x}}{2})^m e^{1/\sqrt{x}}\right)$ 是否存在，需给出理由。

(2) 求函数极限 $\lim_{x\to 0}(1-\tan 2x)^{\frac{1}{x}}$.

(3) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为开区间 (a,b) 内的 Cauchy 序列，函数 f 在 (a,b) 上一致连续。请用 Cauchy 序列与一致连续的定义，证明极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在。

2 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(0)=1$，且 $f'(0)=L$.

(1) 利用导数的定义，计算极限 $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})^n$ 的值。

(2) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot a^{\frac{1}{n}}-1\right)^n$，其中 a 是给定的正数。

3 设 a 为正整数，定义函数 $f(x)$ 为：

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin\frac{1}{x^3}, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，求 a 的最小可能值；

(2) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，且导函数 $f'(x)$ 处处连续，求 a 的最小可能值。

4 设 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是连续函数，满足对任何 $a>0$，方程 $f(x)=ax$ 在 $[1,+\infty)$ 中都有解。利用**最值定理**证明：对任何 $a>0$，方程 $f(x)=ax$ 在 $[1,+\infty)$ 中都有无数个解。

5 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的周期函数，且不为常值函数。称正数 T 为 f 的周期，如果对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x+T)=f(x)$。令 P 为由 f 的所有正周期构成的集合，记 $a=\inf P$。（我们可通过如下两步证明 f 有最小正周期。）

(1) 若 $a>0$，利用 f 的连续性证明：对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x+a)=f(x)$.

(2) 证明 $a>0$.

6 给定实数 $r>1$。设正实数数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足如下条件：

$$x_n\leqslant 2^n\cdot(x_{n-1})^r,\quad \forall n\geqslant 1.$$

(1) 请给出常数 p,q，使得对任何正整数 n 都有

$$pn+q+\ln x_n\leqslant r\left(p(n-1)+q+\ln x_{n-1}\right).$$

(2) 证明：当 $x_0<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{(r-1)^2}}$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

7 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是不减的函数，即对任何 $0\leqslant a<b\leqslant 1$ 有 $f(a)\leqslant f(b)$. 设 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，令 $h(x)=f(x)+g(x)$. 已知 $h(0)>0>h(1)$。仿照**介值定理的证明方法**，证明存在 $x\in(0,1)$ 使得 $h(x)=0$。