清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　线性代数（期末考）　　2025 年 1 月 4 日上午 9:00~11:00

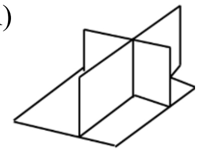
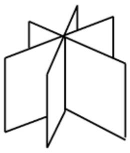
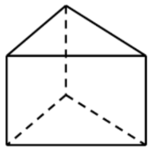
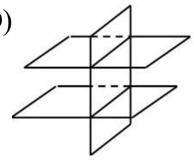
院系、班级_________________姓名________________学号_________________

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 直线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{-2}$ 与 $\frac{x-9}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ 的位置关系是________.（选择题）

(A) 平行　(B)重合　(C)相交　(D)异面

2. 设有三个平面 $\pi_i: a_i x+b_i y+c_i z=d_i,\ i=1,2,3$，它们组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2，则三平面可能的位置关系属于以下哪种情形__________.（选择题）

(A)  (B)  (C)  (D) 

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 3 阶方阵，满足 $r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{bmatrix}$，则 $a=$________.

4. 设向量 $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$，则 $\boldsymbol{u}_3$ 沿 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 所张成平面的法向量方向投影的长度为__________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_3)=\det(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_3)=\det(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}_3)=0$，则 $\det(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}_3)=$________.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 2 & a & 0\end{bmatrix}$ 在复数域中的特征值只有一个值，则 $a=$_________.

7. 二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3)^2+[-x_1+(a+6)x_2+2x_3]^2+(2x_1+x_2+ax_3)^2$ 是正定的，则参数 a 的取值范围是_________.

8. $\mathbb{R}^4$ 中点 $A(1,1,-1,-1)$，$B(1,-1,1,1)$，则以 OA，OB 为边的平行四边形面积为_______.

9. 设 $M_2(\mathbb{R})$ 为实 2 阶方阵构成的空间，T 为 $M_2(\mathbb{R})$ 上线性变换，$T(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}d & c\\ b & a\end{bmatrix}$，

$\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$，则线性变换 T 的特征值为_________.

10. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是线性空间$V$的两组基，过渡矩阵$\boldsymbol{P}$满足$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$，$\varphi$是$V$上的线性变换，且$\varphi$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的矩阵为$\boldsymbol{P}$，则向量$\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1)+\varphi(\boldsymbol{\alpha}_2)+\varphi(\boldsymbol{\alpha}_3)$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标为____________.

二、解答题（每题 10 分，共 70 分，需写出必要的步骤）

11. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，整数 $n\geqslant 2$，试求 $\boldsymbol{A}^{2024}$.

12. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$，求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得变量变换$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化为标准形$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{u}$，这里$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

13. 设$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有通解：$k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，

试求$\boldsymbol{A}^{2025}$.

14. 设σ是n维线性空间$\boldsymbol{V}$的线性变换，$n>1$为奇数，若$\sigma^{n-1}\neq 0$，$\sigma^n=0$，证明：存在$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，使得$\boldsymbol{\alpha}+\sigma(\boldsymbol{\alpha})$, $\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})$, $\cdots$, $\sigma^{n-2}(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$, $\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}$为$\boldsymbol{V}$的一组基.

15. 设$M_2(\mathbb{R})$为实 2 阶方阵构成空间，$\boldsymbol{V}_1=\{\boldsymbol{A}\in M_2(\mathbb{R})\mid \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}, x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$，$\boldsymbol{V}_2$是由$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$张成的子空间，分别求和空间$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$与交空间$\boldsymbol{V}_1\bigcap\boldsymbol{V}_2$的维数以及$\boldsymbol{V}_1\bigcap\boldsymbol{V}_2$的一组基. （空间$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2=\left\{\boldsymbol{W}\mid\boldsymbol{W}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{V}_2\right\}$）

16. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的奇异值分解$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^T$，这里$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$都是正交矩阵.

17. 设$\boldsymbol{V}=\mathbb{R}^n$（取标准内积）是一个欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\in\boldsymbol{V}$满足$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j<0$, $i,j=1,2,3,4$, $i\neq j$. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中任意三个向量必线性无关.