

线性代数-期中考试 (2024 年)

1. 【10 分】设 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 是三个线性无关的向量。求如下三个向量 $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1\}$ 张成的线性空间的维数。

2. 【10 分】设 $M_{n \times n}$ 是所有 n 阶方阵构成的线性空间。考虑 $M_{n \times n}$ 中行列式为零的矩阵构成的子集

$$V = \{A \in M_{n \times n} \mid \det A = 0\}$$

说明 V 是否构成 $M_{n \times n}$ 的线性子空间。

3. 【10 分】设 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。找出所有满足 $AJ = JA$ 的 2 阶方阵 A 。

4. 【10 分】计算如下矩阵的乘积

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 【10 分】求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$ 的通解

6. 【15 分】计算如下矩阵的行列式

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (b) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

7. 【15 分】计算如下矩阵的逆

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. 【10 分】设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 $n+1$ 个各不相同的实数, y_0, y_1, \dots, y_n 是任意 $n+1$ 个实数。证明一定存在一个 n 次多项式 $f(x)$ 使得 $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$ 。

9. 【10 分】设 A 是 $m \times k$ 矩阵, B 是 $k \times n$ 矩阵。证明 $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ 。