清华大学本科生考试试题专用纸

考试科目　微积分 A(2)　　　　B 卷　　　　2024年6月20日

系名 ____________ 班级 ____________ 姓名 ____________ 学号 ____________

一. 填空题 (共10题, 每题3分)

1. 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$, 则 $\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________.

2. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}x\int_x^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=$ __________.

3. 记 $\xi=(x,y,z)^T$ 为三维列向量, A 为三阶实数矩阵, 其特征值为 $2,0,-3$, 则三维线性向量场 $A\xi$ 的散度为 $\mathrm{div}A\xi=$ __________.

4. 设曲线 C 的参数表示为 $x=2t$, $y=t$, $z=2-2t$, $0\le t\le 1$, 则空间第一型线积分 $\int_C xy\mathrm{d}l=$ __________.

5. 设平面定向曲线 C^+ 为函数曲线 $y=x^3$, 起点为 $(0,0)$, 终点为 $(1,1)$, 则第二型线积分 $\int_{C^+}\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=$ __________.

6. 关于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ 的收敛性, 下述正确的结论是 __________.

A: 绝对收敛;　B: 条件收敛;　C: 发散.

7. 圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\ge 0)$ 和平面 $z=0$ 所截部分的面积为 __________.

8. 幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\ln n}$ 的收敛半径为 __________.

9. 函数 $\ln(3+x)$ 在 $x=0$ 处展开的幂级数为 __________. (不必写出收敛区间)

10. 曲面 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 2)$ 的面积为 __________.

二．解答题 (共7题)

11. (10 分) 设平面定向曲线 C^+ 为正弦曲线段 $y=\sin x$, $-\pi\le x\le\pi$, 起点为 $(-\pi,0)$, 终点为 $(\pi,0)$, 求第二型线积分 $J=\int_{C^+}(e^{-x^2}\sin^3 x+\sin y)\mathrm{d}x+(x\cos y-y^3)\mathrm{d}y$.

12. (10 分) 计算线积分 $\oint_{C^+}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中定向曲线 C^+ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x+z=1$ 的交线, 且从 x 轴正向朝原点方向看去, C^+ 的正向是逆时针的.

13. (10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n$ 的 (i) 收敛半径, (ii) 收敛域, 以及 (iii) 和函数.

14. (12 分) 计算三重积分

$$J=\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 为两个球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 和 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围的有界闭区域.

15. (10 分) 设空间向量场 $\vec{F}=(x^3-x,y^3-y,z^3-z)$. 试确定一个空间有界光滑的封闭曲面 S^+, 其外法向为正, 使得第二型面积分 $J=\iint_{S^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 的值最小, 并求出这个最小值.

16. (10 分) 设 $f(x)=x^2$, $x\in[-1,1]$.
(i) 求函数 $f(x)$ 以 2 为周期的 Fourier 级数;
(ii) 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

17. (8 分) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\sin n$$

是否收敛, 并说明理由.

三．附加题 (附加题得分不计入总评, 仅用于评判成绩 A^+)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 即级数一般项 $a_n>0$, 再记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 收敛.