2025 级微积分 A1 期中考试

mathsdream 整理版

2025.11.15

说明

2025 级微积分 A1 期中考试非常神奇地改为了全选择题的形式，不知道未来是否会继续沿用这种形式。

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、选择题（每题 4 分，共 25 题）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{-n}=$ ________

   A. 1

   B. e^{-1}

   C. $-e$

   D. e

2. 设 $x_1=a>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$, $n\geq 1$. 则数列 $\{x_n\}$________

   A. 单调减，且收敛。

   B. 单调增，且收敛。

   C. 单调减，但是不收敛

   D. 单调增，但是不收敛

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1})=$ ________

   A. 2

   B. 1

   C. $\dfrac{1}{2}$

   D. $\dfrac{1}{4}$

4. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1})=$ ________

   A. 不存在

B. $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

5. 点 $x_0 = 0$ 是函数 $f(x) = \dfrac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}$ 的 ________

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 跳跃间断点

D. 第二类间断点

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1} =$ ________

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} =$ ________

A. 1

B. $e^{-1/3}$

C. $-\dfrac{1}{3}$

D. e^{-1}

8. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ________

A. $1 - e^{\sqrt{x}}$

B. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$

C. $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

D. $1 - \cos\sqrt{x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\dfrac{2}{x} + \cos\dfrac{1}{x}\right)^{x} =$ ________

A. 1

B. e

C. e^2

D. e^{-1}

10. 下列极限中, 能使用洛必达法则计算的是 ________

A. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-\cos x}{x+\cos x}$

C. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{xe^{-x}}{x+2\sin x}$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{x-\sin x}$

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 中有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 以下结论正确的是 ________

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$, 则 f 在 $x=0$ 处可导.

B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$, 则 f 在 $x=0$ 处可导.

C. 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D. 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

12. 函数 $y=\tan(2\sin x)$ 在 $x=0$ 的邻域中确定了反函数 $x=g(y)$, 则 $g'(0)=$ ________

A. $\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1

D. 2

13. 设方程 $x^y=y^x$ 在 $(4,2)$ 附近确定了一个可微函数 $y=y(x)$, 则 $y'(4)=$ ________

A. $\dfrac{2\ln 2+1}{4(\ln 2-1)}$

B. $\dfrac{2\ln 2-1}{4(\ln 2-1)}$

C. $\dfrac{2(\ln 2-1)}{\ln 2-2}$

D. $\dfrac{1}{2}$

14. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导当且仅当 ________

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-e^x)}{\sqrt{x}}$ 收敛。

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$ 收敛。

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ 收敛。

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)}{x^3}$ 收敛。

15. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则在 $x=0$ 处 ________

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导但导函数不连续

D. 可导且导函数连续

16. 以下结论中, 不能由 $f(x)-f(0)=\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)(x\to 0)$ 得到是 ________

A. $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续。

B. $f'(0)=0$

C. $f''(0)=0, f'''(0)=1$

D. $x_0=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点。

17. 设 $f(x)=x^3e^x$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 4 阶导数 $f^{(4)}(0)=$ ________

A. 36

B. 24

C. 12

D. 6

18. 方程 $x^4+x^3+3x^2-100x-1=0$ 在实轴上恰有 ________ 个根.

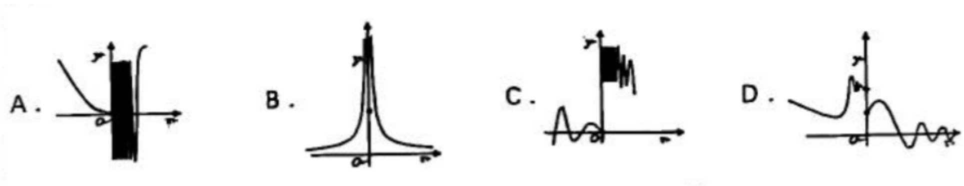
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

19. 以下哪个图可能是导函数的图像 ________



20. 函数 $e^{\sin x}$ 在 $x_0=0$ 处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式为 ________

A. $1+x+x^2+o(x^3)$

B. $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

C. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

D. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

21. 下列条件中可以推出数列 $\{a_n\}$ 收敛的是 ________

A. 对任意 $\epsilon>0$, 存在正整数 N 和正整数 p, 使得对任意 $n>N$ 都有 $|a_{n+p}-a_n|<\epsilon$.

B. 存在正整数 N, 使得对任意 $k\in\{0,1,...,N-1\}$ 数列 $\{a_{nN+k}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛

C. 存在正整数 k, 使得 $\{a_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

D. 存在正整数 N 和正整数 T, 使得对任意 $n > N$ 都有 $n(a_n - a_{n+T}) = Ta_{n+T}$

22. 以下结论不正确的是 ________

A. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1.$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1.$

C. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1.$

D. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)} = 1.$

23. 设 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 ________

A. 若 g 连续且 f 单调有界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x))$ 存在且有限。

B. 若 f 在 $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 中每一点处的极限都存在且有限, 则 f 有界

C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{u\to a} g(u) = b \in \mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = b.$

D. 若 g 连续且 f 有界, 则函数 $g(f(x))$ 有界

24. 以下正确的结论是 ________

A. 若函数 f 在任意一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的极限都为 0, 则 $f(x) \equiv 0$.

B. 若 f,g 可导, $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$

C. 设 f 在 $(0, +\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$

D. 设 f 在 $(0, +\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$

25. 设 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 ________

A. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都有 $f'(x) \neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不变号.

B. 若 f 在 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) > 0$ 则存在 $\delta > 0$ 使得 f 在区间 $(-\delta, \delta)$ 中单调递增.

C. 若 f 在 $x = 0$ 处连续, 且 $g'(0) = g(0) = 0$, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x = 0$ 处可导且导数为 0.

D. 若 f, g 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f(0) = 0, g(0) = 3, f(1) = \ln 3, g(1) = 1$, 则存在 $a \in (0, 1)$ 使得 $f'(a)g(a) + g'(a) = 0$.

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

答案速查

1-5：D A C D C
6-10：A B C C D
11-15：C B B D C
16-20：C B B A B
21-25：D A C C B

一、选择题解析

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{-n}=\underline{\text{D}}$

   A. 1

   B. e^{-1}

   C. $-e$

   D. e

   解析: 取对数，得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}-n\ln(1-\dfrac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}-n(-\dfrac{1}{n})=1$，所以原极限为 e，选 D。

2. 设 $x_1=a>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$, $n\geq 1$. 则数列 $\{x_n\}\underline{\text{A}}$

   A. 单调减，且收敛。

   B. 单调增，且收敛。

   C. 单调减, 但是不收敛

   D. 单调增, 但是不收敛

   解析: 当 $x_n>0$ 时，$0<x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$，所以数列单调递减且有下界 0，故收敛，选 A。

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1})=\underline{\text{C}}$

   A. 2

   B. 1

   C. $\dfrac{1}{2}$

   D. $\dfrac{1}{4}$

   解析: 使用 Stolz 公式：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})&=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+1)}{\ln(n+1)-\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+1)}{\ln(1+1/n)}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   选 C。

4. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1})=\underline{\text{D}}$

A. 不存在

B. $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

解析: 根号减根号，做有理化：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+x)-(2x^2+1)}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-1/x}{\sqrt{2+1/x}+\sqrt{2+1/x^2}}\,(\text{分子分母同时除以}x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

选 D。

5. 点 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}$ 的 $\underline{\text{C}}$

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 跳跃间断点

D. 第二类间断点

解析: 分别计算左右极限：

当 $x\to0^+$ 时，$1/x\to+\infty$，而当 $u\to+\infty$ 时，$\ln(1+e^u)\sim u$，所以

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{2/x}{1/x}=2.$$

当 $x\to0^-$ 时，$1/x\to-\infty, e^{1/x}\to0$，而当 $u\to0$ 时，$\ln(1+u)\sim u$，所以

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2/x}}{e^{1/x}}=\lim_{x\to0^-}e^{1/x}=0.$$

因为左右极限存在但不等，故 $x_0=0$ 为跳跃间断点，选 C。

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}=\underline{\mathbf{A}}$

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

解析: 做法很多，展示两种：

代数变形：

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}\xlongequal{令u=\sqrt[6]{x}}\lim_{u\to1}\frac{u^3-1}{u-1}=\lim_{u\to1}(u^2+u+1)=3$$

泰勒展开：

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}\xlongequal{令u=x-1}\lim_{u\to0}\frac{\sqrt{1+u}-1}{\sqrt[6]{1+u}-1}=\lim_{u\to0}\frac{\frac{1}{2}u+o(u)}{\frac{1}{6}u+o(u)}=3$$

故选 A。

7. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\underline{\text{B}}$

   A. 1

   B. $e^{-1/3}$

   C. $-\frac{1}{3}$

   D. e^{-1}

解析: 取对数，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x-x}{x}}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x\cdot\frac{x^2}{2}+o(x^3)}\\&=\frac{-1}{3}.\end{aligned}$$

所以原极限的值为 $e^{-1/3}$，选 B。

8. 当 $x\to0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 $\underline{\text{C}}$

   A. $1-e^{\sqrt{x}}$

   B. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$

   C. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

   D. $1-\cos\sqrt{x}$

解析: 分别计算各选项的等价无穷小：

A. $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，错误；

B. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，错误；

C. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})=\sqrt{x}+o(\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，正确；

D. $1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$，错误。

故选 C。

9. $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = \underline{\text{C}}$

   A. 1

   B. e

   C. e^2

   D. e^{-1}

解析：取对数，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty} x\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

所以原极限为 e^2，选 C。

10. 下列极限中, 能使用洛必达法则计算的是 $\underline{\text{D}}$

   A. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$

   B. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-\cos x}{x+\cos x}$

   C. $\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}}{x+2\sin x}$

   D. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{x-\sin x}$

解析: 我一般将洛必达使用总结为以下三个条件：在 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，如果满足

- 不定式：$f(x)\to 0$ 且 $g(x)\to 0$, 或 $g(x)\to\infty$；
- 可导：$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域（或包含 ∞ 的区间）上可导，且 $g'(x)\neq 0$；
- 导数极限存在：$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，极限为 A。

则有 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$。

分别分析各选项：

   A. $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ 不存在，违反第三条，不能；

   B. $\lim_{x\to 0} g(x)=1$，不是不定式，不能；

   C. $g'(x)=1+2\cos x$，在包含 ∞ 的区间上不恒不为 0，违反第二条，不能；

   D. 条件全部满足，能。

故选 D。

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 中有定义, 且 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. 以下结论正确的是 <u>C</u>

A. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$, 则 f 在 $x=0$ 处可导.

B. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$, 则 f 在 $x=0$ 处可导.

C. 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D. 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

解析:

A. 到现在没有一个条件涉及到了 $f(0)$ 的值，连续都不能保证，更别说可导了。错误。

B. 同 A，错误。

C. f 在 $x=0$ 处可导,得到 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$,所以 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+o(x)}{\sqrt{|x|}}$，又因为可导必连续，得到 $f(0)=0$，所以极限为 0。正确。

D. 同 C 推导，发现无法得出结论。可举反例：$f(x)=x$。错误。

故选 C。

12. 函数 $y=\tan(2\sin x)$ 在 $x=0$ 的邻域中确定了反函数 $x=g(y)$, 则 $g'(0)=$ <u>B</u>

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

解析: 由反函数求导公式，$g'(y)=\frac{1}{y'(x)}$，而 $y'(x)=2\sec^2(2\sin x)\cos x$，所以 $g'(0)=\frac{1}{y'(0)}=\frac{1}{2}$，选 B。

13. 设方程 $x^y=y^x$ 在 $(4,2)$ 附近确定了一个可微函数 $y=y(x)$, 则 $y'(4)=$ <u>B</u>

A. $\frac{2\ln 2+1}{4(\ln 2-1)}$

B. $\frac{2\ln 2-1}{4(\ln 2-1)}$

C. $\frac{2(\ln 2-1)}{\ln 2-2}$

D. $\frac{1}{2}$

解析: 对方程两边取对数，有 $y\ln x=x\ln y$，两边对 x 求导，得到

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}y',$$

代入 $x=4,y=2$，解得 $y'=\frac{2\ln 2-1}{4(\ln 2-1)}$，选 B。

14. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导当且仅当 <u>D</u>

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-e^x)}{\sqrt{x}}$ 收敛。

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$ 收敛。

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ 收敛。

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)}{x^3}$ 收敛。

解析：本题要求的是充要条件，由导数定义，可导的充要条件为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛。

A. $1-e^x\sim x$，而分母却是 $\sqrt{x}$，一看就对不上，有问题。事实上可举反例 $f(x)=x^{2/3}$，则极限收敛但在 $x=0$ 不可导。错误。

B. $1-\cos x$ 是一个恒正的值，x^2 也是。事实上，该极限只能反映 f 在 $x>0$ 处的行为，无法反映 f 在 $x<0$ 处的行为。可举反例 $f(x)=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，则极限收敛但在 $x=0$ 不可导。错误。

C. 该选项用忽视了 $f(x)$ 与 0 的接近性，其甚至不能得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。可举反例 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则极限收敛但在 $x=0$ 不可导。错误。

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)}{x-\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}$，其中 $u=x-\sin x$ 关于 x 在邻域内单调连续，所以该极限收敛等价于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$。正确。

故选 D。

15. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则在 $x=0$ 处 <u>C</u>

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导但导函数不连续

D. 可导且导函数连续

解析: $f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以 f 在 $x=0$ 处连续。

研究在 $x=0$ 处的可导性：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$，所以 f 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$。

为研究导函数的连续性，需要先得到 $f'(x)$ 的表达式：当 $x\neq 0$ 时，有 $f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，故导函数在 $x=0$ 处不连续。

故选 C。

16. 以下结论中, 不能由 $f(x)-f(0)=\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)(x\to 0)$ 得到是 <u>C</u>

A. $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续。

B. $f'(0)=0$

C. $f''(0)=0, f'''(0)=1$

D. $x_0=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点。

解析：

A. 等式两边令 $x\to 0$，得到 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)-f(0)=0$，所以 f 在 $x=0$ 处连续。正确。

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3!}x^2+o(x^2)=0$，所以 $f'(0)=0$。正确。

C. 很遗憾，泰勒和很多定理一样，它也只是个单向命题，可以由 n 阶可导推出泰勒展开，但不能由泰勒展开推出 n 阶可导。举反例如下：令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3!}+x^4\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则，首先 $f(x)-f(0)=\dfrac{1}{3!}x^3+x^4\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$，满足题目条件，其次，其一阶导为

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+4x^3\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-2x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

考虑在 $x=0$ 处的二阶导数：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+4x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

该极限不存在，所以 $f''(0)$ 不存在，更不用说 $f'''(0)$ 了。错误。

D. 因为 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x^3}=\dfrac{1}{3!}+o(1)$，由极限的保号性，存在 $x=0$ 的某去心邻域内，等式左边大于 0，所以在该邻域内，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，当 $x<0$ 时，$f(x)<f(0)$，所以 $x=0$ 不是极值点。正确。

故选 C。

17. 设 $f(x)=x^3e^x$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 4 阶导数 $f^{(4)}(0)=\underline{\text{B}}$

A. 36

B. 24

C. 12

D. 6

解析: 单点处的导数，考虑泰勒。在 $x=0$ 处展开：

$$f(x)=x^3(1+x+o(x))=x^3+x^4+o(x^4)$$

对比泰勒展开定义，得到 $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}=1$，所以 $f^{(4)}(0)=24$，选 B。

18. 方程 $x^4+x^3+3x^2-100x-1=0$ 在实轴上恰有 $\underline{\text{B}}$ 个根.

A. 1

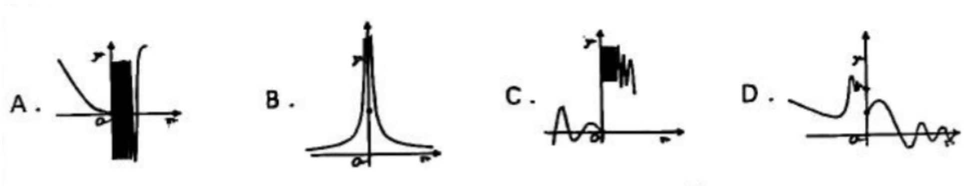
B. 2

C. 3

D. 4

解析: 设 $f(x)=x^4+x^3+3x^2-100x-1$，则 $f'(x)=4x^3+3x^2+6x-100$，$f''(x)=12x^2+6x+6\geq 0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，且 $f'(0)=-100<0, f'(5)=255>0$，所以 $f'(x)$ 有且仅有一个实根 $x_0\in(0,5)$，且在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增。而 $f(0)=-1<0$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上有且仅有一个实根，在 $(x_0,+\infty)$ 上也有且仅有一个实根，所以 $f(x)$ 在实轴上恰有两个根，选 B。

19. 以下哪个图可能是导函数的图像 A



解析：由达布定理（《高等微积分教程（上）》例 4.1.6)，导数具有介值性，观察图像，C、D 的图像在 $x=0$ 处大幅断开，不可能满足介值性。B 考虑包含 0 的一个小区间，也无法满足介值性。故选 A。

20. 函数 $e^{\sin x}$ 在 $x_0=0$ 处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式为 B

A. $1+x+x^2+o(x^3)$

B. $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

C. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

D. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

解析:

$$\begin{aligned}
e^{\sin x}&=1+\sin x+\frac{(\sin x)^2}{2}+\frac{(\sin x)^3}{6}+o((\sin x)^3)\\
&=1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+o(x^3)\right)+\frac{1}{6}\left(x^3+o(x^3)\right)+o(x^3)\\
&=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)
\end{aligned}$$

故选 B。

21. 下列条件中可以推出数列 $\{a_n\}$ 收敛的是 D

A. 对任意 $\epsilon>0$, 存在正整数 N 和正整数 p, 使得对任意 $n>N$ 都有 $|a_{n+p}-a_n|<\epsilon$.

B. 存在正整数 N, 使得对任意 $k\in\{0,1,...,N-1\}$ ，数列 $\{a_{nN+k}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛

C. 存在正整数 k, 使得 $\{a_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

D. 存在正整数 N 和正整数 T, 使得对任意 $n>N$ 都有 $n(a_n-a_{n+T})=Ta_{n+T}$

解析:

A. 看上去像柯西收敛准则，但实则不是，柯西收敛准则要 p 是可任意取的，而这里 p 是固定的。举反例：$a_n=(-1)^n$，取 $p=2$，则对任意 $\epsilon>0$，存在 $N=1$，使得对任意 $n>N$，都有 $|a_{n+2}-a_n|=0<\epsilon$，但 $\{a_n\}$ 发散。错误。

B. 该条件的含义是，数列可以分成几个子列，每个子列都收敛。子列的极限可能不同，无法推出原数列收敛。举反例：$a_n=(-1)^n$，取 $N=2$，则对任意 $k\in\{0,1\}$，数列 $\{a_{2n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛，但 $\{a_n\}$ 发散。错误。

C. k 次方很好整活，特别是平方可以抹除正负。比如取 $a_n=(-1)^n$，则 $\{a_n^2\}$ 收敛，但 $\{a_n\}$ 发散。错误。

D. 由条件可得 $(n+T)a_{n+T}=na_n$，设 $b_n=na_n$，则 $b_{n+T}=b_n$，所以 $\{b_n\}$ 是一个周期为 T 的数列，所以 $\{b_n\}$ 有界，设 $|b_n|\le M$，则 $|a_n|=\dfrac{|b_n|}{n}\le\dfrac{M}{n}\to 0$，所以 $\{a_n\}$ 收敛，且极限为 0。正确。

故选 D。

22. 以下结论不正确的是 A

A. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

B. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

C. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

D. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}=1.$

解析：

A.

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\tan(\tan x)=\tan x+\frac{1}{3}(\tan x)^3+o((\tan x)^3)=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}(\sin x)^3+o((\sin x)^3)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}{\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=2\end{aligned}$$

理论上剩下三个选项都是泰勒公式硬算即可，不过对于它们，有如下利用拉格朗日中值定理的快速做法。

B. 设 $f(x)=\tan x$，则由拉格朗日中值定理，存在 ξ 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间，使得

$$\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}=f'(\xi)=\sec^2\xi$$

当 $x\to 0$ 时，$\xi\to 0$，所以 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\sec^2 0=1$。

C. 设 $g(x)=\sin x$，则由拉格朗日中值定理，存在 η 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间，使得

$$\frac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=g'(\eta)=\cos\eta$$

当 $x\to 0$ 时，$\eta\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\cos 0=1$。

D. 由 B、C 两题的结果可得

$$\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}=\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}$$

由 B、C 两题的结果可知，当 $x\to 0$ 时，左边极限为 $1\cdot 1=1$。

故选 A。

23. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 C

A. 若 g 连续且 f 单调有界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(f(x))$ 存在且有限。

B. 若 f 在 $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ 中每一点处的极限都存在且有限, 则 f 有界

C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{u\to a}g(u)=b\in\mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=b$.

D. 若 g 连续且 f 有界, 则函数 $g(f(x))$ 有界

解析：

A. 由 f 单调有界可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，设为 A，由 g 连续可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(f(x))=g(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=g(A)$ 存在且有限。正确。

B. 设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A_1$，则对 $\epsilon=1$，存在 $M_1>0$，当 $x>M_1$ 时，有 $|f(x)-A_1|<1$，所以 $f(x)$ 在 $(M_1,+\infty)$ 上有界。类似地，设 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A_2$，则存在 $M_2>0$，当 $x<-M_2$ 时，有 $|f(x)-A_2|<1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-M_2)$ 上有界。所以只需要证明 $f(x)$ 在 $[-M_2,M_1]$ 上有界。假设 $f(x)$ 在 $[-M_2,M_1]$ 上无界，则存在 $x_n\in[-M_2,M_1]$，使得 $|f(x_n)|>n$，则数列 $\{f(x_n)\}$ 发散到 ∞，但由 $x_n\in[-M_2,M_1]$，可知 $\{x_n\}$ 有收敛子列，设该子列收敛于 $x_0\in[-M_2,M_1]$，则由 f 在 x_0 处极限存在且有限可知 $\{f(x_n)\}$ 有收敛子列，与其发散到 ∞ 矛盾，所以 $f(x)$ 在 $[-M_2,M_1]$ 上有界。综上，f 有界。正确。

C. 仔细阅读书上定理（《高等微积分教程（上）定理 2.3.3），会发现这个漏了条件“当 $x\neq x_0$ 时，$f(x)\neq a$”。这是因为，函数在某点的极限值和函数在这点的值是无关的。举反例：设

$$f(x)=0\quad g(u)=\begin{cases}1, & u\neq 0,\\ 0, & u=0.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim\limits_{u\to 0}g(u)=1$，但 $\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))=\lim\limits_{x\to 0}g(0)=0\neq 1$。错误。

D. 由 f 有界可知，存在 $M>0$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有 $|f(x)|\le M$，由 g 连续可知，g 在有界闭区间 $[-M,M]$ 上有界，设 $|g(u)|\le N$ 对任意 $u\in[-M,M]$ 成立，则对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有 $|g(f(x))|\le N$，所以 $g(f(x))$ 有界。正确。

故选 C。

24. 以下正确的结论是 C

A. 若函数 f 在任意一点 $x_0\in\mathbb{R}$ 处的极限都为 0, 则 $f(x)\equiv 0$.

B. 若 f,g 可导, $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0$.

C. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

D. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

解析:

A. 函数在某点的极限和函数在某点的值无关，可举反例：设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在任意一点处的极限都为 0，但 $f(x)\not\equiv 0$。错误。

B. 洛必达法则是一个从 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在得到 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且相等的单向命题，不能逆向使用。举反例：设

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\quad g(x)=x.$$

则 f,g 可导，且 $g'(x)=1\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$ 不存在。错误。

C. 令 $h(x)=f(x)e^x$，则 $h'(x)=(f(x)+f'(x))e^x$，所以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{e^x}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{h'(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$。正确。

D. 举反例 $f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\cos(x^2)-\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ 不存在。错误。

故选 C。

25. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 $\underline{\mathrm{B}}$

A. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $\forall x\in\mathbb{R}$ 都有 $f'(x)\neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不变号.

B. 若 f 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)>0$ 则存在 $\delta>0$ 使得 f 在区间 $(-\delta,\delta)$ 中单调递增.

C. 若 f 在 $x=0$ 处连续, 且 $g'(0)=g(0)=0$, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0.

D. 若 f,g 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f(0)=0, g(0)=3, f(1)=\ln 3, g(1)=1$, 则存在 $a\in(0,1)$ 使得 $f'(a)g(a)+g'(a)=0$.

解析:

A. 由达布定理，如果 $f'(x)$ 有变号，则在某点处必为 0，矛盾。正确。

B. 单点的导数正负说明无法说明有关单调性的信息，区间上才有意义。可举反例

$$f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 $f'(0)=1>0$，但当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$，在 0 的任意邻域内都存在 $f'(x)<0$ 的点，所以 f 在任意邻域内都不是单调递增的。错误。

C. 由导数定义可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\\ &= f(0)\cdot g'(0)=0\end{aligned}$$

所以 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导数为 0。正确。

D. 设 $h(x)=g(x)e^{f(x)}$，则 $h(0)=3, h(1)=e^{\ln 3}=3$，由罗尔定理，存在 $a\in(0,1)$，使得 $h'(a)=0$，即 $g'(a)e^{f(a)}+g(a)e^{f(a)}f'(a)=0$，所以 $f'(a)g(a)+g'(a)=0$。正确。

故选 B。