2025 级微积分 A1 期中考试

mathsdream 整理版

2025.11.15

说明

2025 级微积分 A1 期中考试非常神奇地改为了全选择题的形式，不知道未来是否会继续沿用这种形式。事前提醒：全选择题不代表卷子更简单。

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、选择题（每题 4 分，共 25 题）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{-n} =$ ________

   A. 1

   B. e^{-1}

   C. $-e$

   D. e

2. 设 $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$, $n \geq 1$. 则数列 $\{x_n\}$________

   A. 单调减，且收敛。

   B. 单调增，且收敛。

   C. 单调减，但是不收敛

   D. 单调增，但是不收敛

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}) =$ ________

   A. 2

   B. 1

   C. $\dfrac{1}{2}$

   D. $\dfrac{1}{4}$

4. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}) =$ ________

   A. 不存在

B. $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

5. 点 $x_0 = 0$ 是函数 $f(x) = \frac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}$ 的 ________

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 跳跃间断点

D. 第二类间断点

6. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1} =$ ________

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

7. 极限 $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} =$ ________

A. 1

B. $e^{-1/3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. e^{-1}

8. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ________

A. $1 - e^{\sqrt{x}}$

B. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$

C. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

D. $1 - \cos\sqrt{x}$

9. $\lim_{x\to\infty} \left(\sin\frac{2}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x =$ ________

A. 1

B. e

C. e^2

D. e^{-1}

10. 下列极限中, 能使用洛必达法则计算的是 ________

A. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$

B. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + \sin x - \cos x}{x + \cos x}$

C. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^{-x}}{x + 2\sin x}$

D. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 中有定义, 且 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. 以下结论正确的是 ________

A. 若 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$, 则 f 在 $x = 0$ 处可导.

B. 若 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$, 则 f 在 $x = 0$ 处可导.

C. 若 f 在 $x = 0$ 处可导, 则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$.

D. 若 f 在 $x = 0$ 处可导, 则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

12. 函数 $y = \tan(2\sin x)$ 在 $x = 0$ 的邻域中确定了反函数 $x = g(y)$, 则 $g'(0) =$ ________

A. $\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1

D. 2

13. 设方程 $x^y = y^x$ 在 $(4,2)$ 附近确定了一个可微函数 $y = y(x)$, 则 $y'(4) =$ ________

A. $\dfrac{2\ln 2 + 1}{4(\ln 2 - 1)}$

B. $\dfrac{2\ln 2 - 1}{4(\ln 2 - 1)}$

C. $\dfrac{2(\ln 2 - 1)}{\ln 2 - 2}$

D. $\dfrac{1}{2}$

14. 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导当且仅当 ________

A. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1 - e^x)}{\sqrt{x}}$ 收敛。

B. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1 - \cos x)}{x^2}$ 收敛。

C. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ 收敛。

D. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x - \sin x)}{x^3}$ 收敛。

15. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则在 $x = 0$ 处 ________

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导但导函数不连续

D. 可导且导函数连续

16. 以下结论中, 不能由 $f(x)-f(0)=\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)(x\to 0)$ 得到是 ________

A. $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续。

B. $f'(0)=0$

C. $f''(0)=0, f'''(0)=1$

D. $x_0=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点。

17. 设 $f(x)=x^3e^x$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 4 阶导数 $f^{(4)}(0)=$ ________

A. 36

B. 24

C. 12

D. 6

18. 方程 $x^4+x^3+3x^2-100x-1=0$ 在实轴上恰有 ________ 个根.

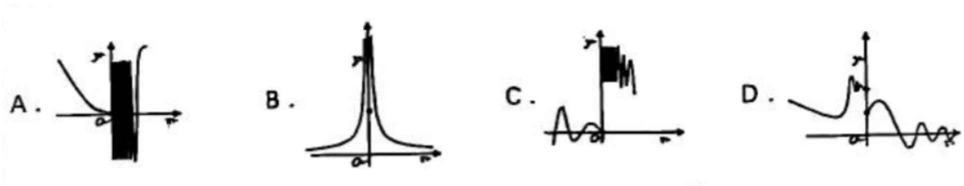
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

19. 以下哪个图可能是导函数的图像 ________



20. 函数 $e^{\sin x}$ 在 $x_0=0$ 处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式为 ________

A. $1+x+x^2+o(x^3)$

B. $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

C. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

D. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

21. 下列条件中可以推出数列 $\{a_n\}$ 收敛的是 ________

A. 对任意 $\epsilon>0$, 存在正整数 N 和正整数 p, 使得对任意 $n>N$ 都有 $|a_{n+p}-a_n|<\epsilon$.

B. 存在正整数 N, 使得对任意 $k\in\{0,1,...,N-1\}$ 数列 $\{a_{nN+k}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛

C. 存在正整数 k, 使得 $\{a_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

D. 存在正整数 N 和正整数 T, 使得对任意 $n > N$ 都有 $n(a_n - a_{n+T}) = Ta_{n+T}$

22. 以下结论不正确的是 ________

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1.$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}=1.$

23. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 ________

A. 若 g 连续且 f 单调有界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x))$ 存在且有限。

B. 若 f 在 $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ 中每一点处的极限都存在且有限, 则 f 有界

C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{u\to a} g(u)=b\in\mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=b$.

D. 若 g 连续且 f 有界, 则函数 $g(f(x))$ 有界

24. 以下正确的结论是 ________

A. 若函数 f 在任意一点 $x_0\in\mathbb{R}$ 处的极限都为 0, 则 $f(x)\equiv 0$.

B. 若 f,g 可导, $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0$.

C. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

D. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

25. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 ________

A. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $\forall x\in\mathbb{R}$ 都有 $f'(x)\neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不变号.

B. 若 f 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)>0$ 则存在 $\delta>0$ 使得 f 在区间 $(-\delta,\delta)$ 中单调递增.

C. 若 f 在 $x=0$ 处连续, 且 $g'(0)=g(0)=0$, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0.

D. 若 f,g 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f(0)=0, g(0)=3, f(1)=\ln 3, g(1)=1$, 则存在 $a\in(0,1)$ 使得 $f'(a)g(a)+g'(a)=0$.

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

答案速查

1-5：D A C D C
6-10：A B C C D
11-15：C B B D C
16-20：C B B A B
21-25：D A C C B

一、选择题解析

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{-n}=\underline{\text{D}}$

   A. 1

   B. e^{-1}

   C. $-e$

   D. e

   解析: 取对数，得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}-n\ln(1-\dfrac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}-n(-\dfrac{1}{n})=1$，所以原极限为 e，选 D。

2. 设 $x_1=a>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$, $n\geq 1$. 则数列 $\{x_n\}\underline{\text{A}}$

   A. 单调减，且收敛。

   B. 单调增，且收敛。

   C. 单调减, 但是不收敛

   D. 单调增, 但是不收敛

   解析: 当 $x_n>0$ 时，$0<x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$，所以数列单调递减且有下界 0，故收敛，选 A。

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1})=\underline{\text{C}}$

   A. 2

   B. 1

   C. $\dfrac{1}{2}$

   D. $\dfrac{1}{4}$

   解析: 使用 Stolz 公式：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})&=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+1)}{\ln(n+1)-\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+1)}{\ln(1+1/n)}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   选 C。

4. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1})=\underline{\text{D}}$

   A. 不存在

   B. $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

   C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   D. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

   解析: 根号减根号，做有理化：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+x)-(2x^2+1)}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-1/x}{\sqrt{2+1/x}+\sqrt{2+1/x^2}}\,(\text{分子分母同时除以}x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

   选 D。

5. 点 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}$ 的 $\underline{\text{C}}$

   A. 连续点

   B. 可去间断点

   C. 跳跃间断点

   D. 第二类间断点

   解析: 分别计算左右极限：

   当 $x\to0^+$ 时，$1/x\to+\infty$，而当 $u\to+\infty$ 时，$\ln(1+e^u)\sim u$，所以

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{2/x}{1/x}=2.$$

   当 $x\to0^-$ 时，$1/x\to-\infty, e^{1/x}\to0$，而当 $u\to0$ 时，$\ln(1+u)\sim u$，所以

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2/x}}{e^{1/x}}=\lim_{x\to0^-}e^{1/x}=0.$$

   因为左右极限存在但不等，故 $x_0=0$ 为跳跃间断点，选 C。

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}=\underline{\textbf{A}}$

   A. 3

   B. 2

   C. 1

   D. 0

解析: 做法很多，展示两种：

代数变形：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}\xlongequal{令u=\sqrt[6]{x}}\lim_{u\to 1}\frac{u^3-1}{u-1}=\lim_{u\to 1}(u^2+u+1)=3$$

泰勒展开：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}\xlongequal{令u=x-1}\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt{1+u}-1}{\sqrt[6]{1+u}-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{2}u+o(u)}{\frac{1}{6}u+o(u)}=3$$

故选 A。

7. 极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\underline{\text{B}}$

   A. 1

   B. $e^{-1/3}$

   C. $-\frac{1}{3}$

   D. e^{-1}

解析: 取对数，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-x}{x}}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x\cdot\frac{x^2}{2}+o(x^3)}\\&=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

所以原极限的值为 $e^{-1/3}$，选 B。

8. 当 $x\to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 $\underline{\text{C}}$

   A. $1-e^{\sqrt{x}}$

   B. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$

   C. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

   D. $1-\cos\sqrt{x}$

解析: 分别计算各选项的等价无穷小：

A. $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，错误；

B. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，错误；

C. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})=\sqrt{x}+o(\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，正确；

D. $1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$，错误。

故选 C。

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = \underline{\text{C}}$

   A. 1

   B. e

   C. e^2

   D. e^{-1}

   解析：取对数，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty} x\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

   所以原极限为 e^2，选 C。

10. 下列极限中, 能使用洛必达法则计算的是 $\underline{\text{D}}$

   A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$

   B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-\cos x}{x+\cos x}$

   C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}}{x+2\sin x}$

   D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{x-\sin x}$

   解析: 我一般将洛必达使用总结为以下三个条件：在 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，如果满足

   - 不定式：$f(x)\to 0$ 且 $g(x)\to 0$, 或 $g(x)\to\infty$；
   - 可导：$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域（或包含 ∞ 的区间）上可导，且 $g'(x)\neq 0$；
   - 导数极限存在：$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，极限为 A。

   则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$。

   分别分析各选项：

   A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ 不存在，违反第三条，不能；

   B. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$，违反第一条，不能；

   C. $g'(x)=1+2\cos x$，在包含 ∞ 的区间上不恒不为 0，违反第二条，不能；

   D. 条件全部满足，能。

   故选 D。

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 中有定义, 且 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. 以下结论正确的是 <u>C</u>

A. 若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$, 则 f 在 $x=0$ 处可导.

B. 若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$, 则 f 在 $x=0$ 处可导.

C. 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D. 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

解析:

A. 到现在没有一个条件涉及到了 $f(0)$ 的值，连续都不能保证，更别说可导了。错误。

B. 同 A，错误。

C. f 在 $x=0$ 处可导,得到 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$,所以 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(0)+f'(0)x+o(x)}{\sqrt{|x|}}$，又因为可导必连续，得到 $f(0)=0$，所以极限为 0。正确。

D. 同 C 推导，发现无法得出结论。可举反例：$f(x)=x$。错误。

故选 C。

12. 函数 $y=\tan(2\sin x)$ 在 $x=0$ 的邻域中确定了反函数 $x=g(y)$, 则 $g'(0)=$ <u>B</u>

A. $\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1

D. 2

解析: 由反函数求导公式，$g'(y)=\dfrac{1}{y'(x)}$，而 $y'(x)=2\sec^2(2\sin x)\cos x$，所以 $g'(0)=\dfrac{1}{y'(0)}=\dfrac{1}{2}$，选 B。

13. 设方程 $x^y=y^x$ 在 $(4,2)$ 附近确定了一个可微函数 $y=y(x)$, 则 $y'(4)=$ <u>B</u>

A. $\dfrac{2\ln 2+1}{4(\ln 2-1)}$

B. $\dfrac{2\ln 2-1}{4(\ln 2-1)}$

C. $\dfrac{2(\ln 2-1)}{\ln 2-2}$

D. $\dfrac{1}{2}$

解析: 对方程两边取对数，有 $y\ln x=x\ln y$，两边对 x 求导，得到

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}y',$$

代入 $x=4,y=2$，解得 $y'=\dfrac{2\ln 2-1}{4(\ln 2-1)}$，选 B。

14. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导当且仅当 <u>D</u>

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-e^x)}{\sqrt{x}}$ 收敛。

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$ 收敛。

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ 收敛。

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)}{x^3}$ 收敛。

解析：本题要求的是充要条件，由导数定义，可导的充要条件为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛。

A. $1-e^x\sim x$，而分母却是 $\sqrt{x}$，一看就对不上，有问题。事实上可举反例 $f(x)=\sqrt{x}$，则极限收敛但在 $x=0$ 不可导。错误。

B. $1-\cos x$ 是一个恒正的值，x^2 也是。事实上，该极限只能反映 f 在 $x>0$ 处的行为，无法反映 f 在 $x<0$ 处的行为。可举反例 $f(x)=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，则极限收敛但在 $x=0$ 不可导。错误。

C. 该选项用忽视了 $f(x)$ 与 0 的接近性，其甚至不能得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。可举反例 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则极限收敛但在 $x=0$ 不可导。错误。

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)}{x-\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}$，其中 $u=x-\sin x$ 关于 x 在邻域内单调连续，所以该极限收敛等价于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛。正确。

故选 D。

15. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则在 $x=0$ 处 <u>C</u>

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导但导函数不连续

D. 可导且导函数连续

解析: $f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以 f 在 $x=0$ 处连续。

研究在 $x=0$ 处的可导性：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$，所以 f 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$。

为研究导函数的连续性，需要先得到 $f'(x)$ 的表达式：当 $x\neq 0$ 时，有 $f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，故导函数在 $x=0$ 处不连续。

故选 C。

16. 以下结论中, 不能由 $f(x)-f(0)=\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)(x\to 0)$ 得到是 <u>C</u>

A. $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续。

B. $f'(0)=0$

C. $f''(0)=0, f'''(0)=1$

D. $x_0=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点。

解析：

A. 等式两边令 $x\to 0$，得到 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)-f(0)=0$，所以 f 在 $x=0$ 处连续。正确。

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3!}x^2+o(x^2)=0$，所以 $f'(0)=0$。正确。

C. 很遗憾，泰勒和很多定理一样，它也只是个单向命题，可以由 n 阶可导推出泰勒展开，但不能由泰勒展开推出 n 阶可导。举反例如下：令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3!}+x^4\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则，首先 $f(x)-f(0)=\dfrac{1}{3!}x^3+x^4\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$，满足题目条件，其次，其一阶导为

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+4x^3\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-2x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

考虑在 $x=0$ 处的二阶导数：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+4x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

该极限不存在，所以 $f''(0)$ 不存在，更不用说 $f'''(0)$ 了。错误。

D. 因为 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x^3}=\dfrac{1}{3!}+o(1)$，由极限的保号性，存在 $x=0$ 的某去心邻域内，等式左边大于 0，所以在该邻域内，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，当 $x<0$ 时，$f(x)<f(0)$，所以 $x=0$ 不是极值点。正确。

故选 C。

17. 设 $f(x)=x^3e^x$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 4 阶导数 $f^{(4)}(0)=\underline{\text{B}}$

A. 36

B. 24

C. 12

D. 6

解析: 单点处的导数，考虑泰勒。在 $x=0$ 处展开：

$$f(x)=x^3(1+x+o(x))=x^3+x^4+o(x^4)$$

对比泰勒展开定义，得到 $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}=1$，所以 $f^{(4)}(0)=24$，选 B。

18. 方程 $x^4+x^3+3x^2-100x-1=0$ 在实轴上恰有 $\underline{\text{B}}$ 个根.

A. 1

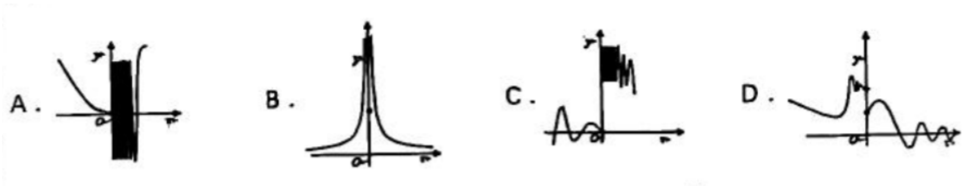
B. 2

C. 3

D. 4

解析: 设 $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 - 100x - 1$，则 $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 6x - 100$，$f''(x) = 12x^2 + 6x + 6 \geq 0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，且 $f'(0) = -100 < 0, f'(5) = 255 > 0$，所以 $f'(x)$ 有且仅有一个实根 $x_0 \in (0, 5)$，且在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增。而 $f(0) = -1 < 0$，当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) \to +\infty$，当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to +\infty$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上有且仅有一个实根，在 $(x_0, +\infty)$ 上也有且仅有一个实根，所以 $f(x)$ 在实轴上恰有两个根，选 B。

19. 以下哪个图可能是导函数的图像 A



解析：由达布定理（《高等微积分教程（上）》例 4.1.6），导数具有介值性，观察图像，C、D 的图像在 $x = 0$ 处大幅断开，不可能满足介值性。B 考虑包含 0 的一个小区间，也无法满足介值性。故选 A。

20. 函数 $e^{\sin x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式为 B

A. $1 + x + x^2 + o(x^3)$

B. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

C. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

D. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

解析：

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + o((\sin x)^3) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

故选 B。

21. 下列条件中可以推出数列 $\{a_n\}$ 收敛的是 D

A. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N 和正整数 p, 使得对任意 $n > N$ 都有 $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$.

B. 存在正整数 N, 使得对任意 $k \in \{0, 1, ..., N-1\}$ ，数列 $\{a_{nN+k}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛

C. 存在正整数 k, 使得 $\{a_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

D. 存在正整数 N 和正整数 T, 使得对任意 $n > N$ 都有 $n(a_n - a_{n+T}) = Ta_{n+T}$

解析：

A. 看上去像柯西收敛准则，但实则不是，柯西收敛准则要 p 是可任意取的，而这里 p 是固定的。举反例：$a_n = (-1)^n$，取 $p = 2$，则对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N = 1$，使得对任意 $n > N$，都有 $|a_{n+2} - a_n| = 0 < \epsilon$，但 $\{a_n\}$ 发散。错误。

B. 该条件的含义是，数列可以分成几个子列，每个子列都收敛。子列的极限可能不同，无法推出原数列收敛。举反例：$a_n = (-1)^n$，取 $N = 2$，则对任意 $k \in \{0, 1\}$，数列 $\{a_{2n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛，但 $\{a_n\}$ 发散。错误。

C. k 次方很好整活，特别是平方可以抹除正负。比如取 $a_n = (-1)^n$，则 $\{a_n^2\}$ 收敛，但 $\{a_n\}$ 发散。错误。

D. 由条件可得 $(n+T)a_{n+T} = na_n$，设 $b_n = na_n$，则 $b_{n+T} = b_n$，所以 $\{b_n\}$ 是一个周期为 T 的数列，所以 $\{b_n\}$ 有界，设 $|b_n| \leq M$，则 $|a_n| = \dfrac{|b_n|}{n} \leq \dfrac{M}{n} \to 0$，所以 $\{a_n\}$ 收敛，且极限为 0。正确。

故选 D。

22. 以下结论不正确的是 A

A. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1.$

B. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1.$

C. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1.$

D. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)} = 1.$

解析：

A.

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\tan(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3}(\tan x)^3 + o((\tan x)^3) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)}{\left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = 2\end{aligned}$$

理论上剩下三个选项都是泰勒公式硬算即可，不过对于它们，有如下利用拉格朗日中值定理的快速做法。

B. 设 $f(x) = \tan x$，则由拉格朗日中值定理，存在 ξ 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间，使得

$$\frac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\tan x - \sin x} = f'(\xi) = \sec^2 \xi$$

当 $x \to 0$ 时，$\xi \to 0$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\tan x - \sin x} = \sec^2 0 = 1$。

C. 设 $g(x)=\sin x$，则由拉格朗日中值定理，存在 η 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间，使得

$$\frac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=g'(\eta)=\cos\eta$$

当 $x\to 0$ 时，$\eta\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\cos 0=1$。

D. 由 B、C 两题的结果可得

$$\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}=\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}$$

由 B、C 两题的结果可知，当 $x\to 0$ 时，左边极限为 $1\cdot 1=1$。

故选 A。

23. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 <u>C</u>

A. 若 g 连续且 f 单调有界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(f(x))$ 存在且有限。

B. 若 f 在 $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ 中每一点处的极限都存在且有限, 则 f 有界

C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{u\to a}g(u)=b\in\mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=b$.

D. 若 g 连续且 f 有界, 则函数 $g(f(x))$ 有界

解析：

A. 由 f 单调有界可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在,设为 A,由 g 连续可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(f(x))=g(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=g(A)$ 存在且有限。正确。

B. 设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A_1$，则对 $\epsilon=1$，存在 $M_1>0$，当 $x>M_1$ 时，有 $|f(x)-A_1|<1$，所以 $f(x)$ 在 $(M_1,+\infty)$ 上有界。类似地，设 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A_2$，则存在 $M_2>0$，当 $x<-M_2$ 时，有 $|f(x)-A_2|<1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-M_2)$ 上有界。所以只需要证明 $f(x)$ 在 $[-M_2,M_1]$ 上有界。假设 $f(x)$ 在 $[-M_2,M_1]$ 上无界，则存在 $x_n\in[-M_2,M_1]$，使得 $|f(x_n)|>n$，则数列 $\{f(x_n)\}$ 发散到 ∞，但由 $x_n\in[-M_2,M_1]$，可知 $\{x_n\}$ 有收敛子列，设该子列收敛于 $x_0\in[-M_2,M_1]$，则由 f 在 x_0 处极限存在且有限可知 $\{f(x_n)\}$ 有收敛子列，与其发散到 ∞ 矛盾，所以 $f(x)$ 在 $[-M_2,M_1]$ 上有界。综上，f 有界。正确。

C. 仔细阅读书上定理（《高等微积分教程（上）定理 2.3.3），会发现这个漏了条件“当 $x\neq x_0$ 时，$f(x)\neq a$”。这是因为，函数在某点的极限值和函数在这点的值是无关的。举反例：设

$$f(x)=0\quad g(u)=\begin{cases}1, & u\neq 0,\\ 0, & u=0.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim\limits_{u\to 0}g(u)=1$，但 $\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))=\lim\limits_{x\to 0}g(0)=0\neq 1$。错误。

D. 由 f 有界可知，存在 $M>0$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有 $|f(x)|\leq M$，由 g 连续可知，g 在有界闭区间 $[-M,M]$ 上有界，设 $|g(u)|\leq N$ 对任意 $u\in[-M,M]$ 成立，则对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有 $|g(f(x))|\leq N$，所以 $g(f(x))$ 有界。正确。

故选 C。

24. 以下正确的结论是 <u>C</u>

A. 若函数 f 在任意一点 $x_0\in\mathbb{R}$ 处的极限都为 0, 则 $f(x)\equiv 0$.

B. 若 f,g 可导, $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$.

C. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+f'(x)) = 0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

D. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

解析:

A. 函数在某点的极限和函数在某点的值无关，可举反例：设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在任意一点处的极限都为 0，但 $f(x) \not\equiv 0$。错误。

B. 洛必达法则是一个从 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在得到 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且相等的单向命题，不能逆向使用。举反例：设

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad g(x) = x.$$

则 f,g 可导，且 $g'(x) = 1 \neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$，但 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x})$ 不存在。错误。

C. 令 $h(x) = f(x)e^x$，则 $h'(x) = (f(x)+f'(x))e^x$，所以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{e^x} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty} \frac{h'(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} (f(x)+f'(x)) = 0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+f'(x)) = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$。正确。

D. 举反例 $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\cos(x^2) - \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ 不存在。错误。

故选 C。

25. 设 $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是 $\underline{\text{B}}$

A. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都有 $f'(x) \neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不变号.

B. 若 f 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0) > 0$ 则存在 $\delta > 0$ 使得 f 在区间 $(-\delta,\delta)$ 中单调递增.

C. 若 f 在 $x=0$ 处连续, 且 $g'(0) = g(0) = 0$, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0.

D. 若 f,g 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f(0)=0, g(0)=3, f(1)=\ln 3, g(1)=1$, 则存在 $a \in (0,1)$ 使得 $f'(a)g(a)+g'(a)=0$.

解析:

A. 由达布定理，如果 $f'(x)$ 有变号，则在某点处必为 0，矛盾。正确。

B. 单点的导数正负说明无法说明有关单调性的信息，区间上才有意义。可举反例

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f'(0) = 1 > 0$，但当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) = 1 + 4x\sin\dfrac{1}{x} - 2\cos\dfrac{1}{x}$，在 0 的任意邻域内都存在 $f'(x) < 0$ 的点，所以 f 在任意邻域内都不是单调递增的。错误。

C. 由导数定义可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} \\ &= f(0)\cdot g'(0) = 0\end{aligned}$$

所以 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导数为 0。正确。

D. 设 $h(x)=g(x)e^{f(x)}$，则 $h(0)=3, h(1)=e^{\ln 3}=3$，由罗尔定理，存在 $a\in(0,1)$，使得 $h'(a)=0$，即 $g'(a)e^{f(a)}+g(a)e^{f(a)}f'(a)=0$，所以 $f'(a)g(a)+g'(a)=0$。正确。

故选 B。

实际考试体现来看，全选择题的形式将原来只在最后一两道证明题考察的理论部分全放出来了，变成了更多的概念相关题目，这一形式相比往年，全选择题更有利于基础较差的同学获取分数，而更多概念题使得在往年只靠计算就可以拿高分的同学则会遇到困难。最终导致观感上同学们普遍反映卷子比往年难，但平均分有所上升。