题目

一、填空

不按顺序

1. 已知$P(X \geq t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}, t \geq 0$，则$E(X) =$______.
2. 离散型随机变量X的取值范围为非负整数，其生成函数$g(z) = \frac{c}{2-z^2}$，则$c =$______，$E(X) =$______.
3. 设X的密度函数为$f(x) = 2\theta\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}x^2e^{-\theta x^2}$，已知$x_i(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$，则$\theta$的极大似然估计为_____.
4. 设X服从正态分布$N(3, \sigma^2)$，且$P(3 < X < 6) = \Phi(1) - \frac{1}{2}$，则$\sigma =$______.
5. 设X与Y独立，且密度函数分别为$f(x)$和$g(y)$，则$Z = X - Y$的密度函数$g(z) =$______.
6. 设X服从$[0,\ 2]$上的均匀分布，$Y = 2X - X^3$，则$P(Y \leq 1) =$______.
7. 设$X_i(i = 1,\ 2)$独立，服从参数为λ_i的泊松分布，则$E(X_1 + X_2) =$______，$D(X_1 + X_2) =$______.
8. 在$[0,\ 1]$上随机取n个点，则这n个点的最大值的期望为______.

二、计算

1. 已知随机变量X的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3},\ -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2},\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{12}x + \frac{7}{12},\ 1 \leq x < 2 \\ 1,\ x \geq 2 \end{cases}$$

   求$P(X \leq 1),\ P(1),\ P(1 < X \leq 2)$.
2. 设$X_i(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$独立同分布，$P(X_i = -1) = \frac{1}{4}$，$P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$，$P(X_i = 1) = \frac{1}{4}$，$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$，
   (1) 求S_n的生成函数。
   (2) 求$P(S_n = 0)$.
3. 设事件A在一次试验中发生的概率为θ，θ在$[0,\ 1]$上均匀分布。为估计θ，进行了n次独立观测试验，其中事件A发生了x次，求θ的贝叶斯估计$\hat{\theta}_A$.

三、证明

1. 设A和B是(Ω, F)上的概率测度。
   (1) 证明：$\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}Q$是概率测度。
   (2) 举反例，a和b是常数，$a + b = 1$，则$aP + bQ$不一定是概率测度。
2. 证明：$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

奖励题

若 $X \sim N(0,1)$，Y 服从自由度为 n 的卡方分布，求证 $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ 服从自由度为 n 的 t-分布。

参考解答

填空

1. $\frac{3}{4}$
   解法一：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty P(X \geq t)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)dt \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

解法二:

先求密度函数

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -\frac{dP(X \geq t)}{dt} \\
&= \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t}
\end{aligned}
$$

再求期望

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty tf(t)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}te^{-t} + te^{-2t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(2) + \frac{1}{4}\Gamma(2) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

2. 1 2

根据生成函数的定义

$$
g(z) = \sum_{i=0}^\infty P(X=i)z^i = \frac{c}{2-z^2}
$$

故

$$
g(1) = \sum_{i=0}^\infty P(X=i) = 1 = c
$$

解法一:

对$g(z)$求导，得到

$$
g'(z) = \sum_{i=0}^\infty = i \cdot P(X=i)z^{i-1} = \frac{2z}{(2-z^2)^2}
$$

注意到

$$
E(X) = \sum_{i=0}^\infty i \cdot P(X=i) = g'(1) = 2
$$

解法二:

利用泰勒展开得到

$$
g(z) = \frac{1}{2\left(1-\frac{z^2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^\infty \left(\frac{z^2}{2}\right)^i
$$

则

$$
P(X=i) = \begin{cases} 0, \ i\text{为奇数} \\ \frac{1}{2^{\frac{i}{2}+1}}, \ i\text{为偶数} \end{cases}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2n}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{(n+1)+1}{2^n} \right) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

3. $\frac{3n}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(2\theta \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\ln L(\theta) = n \ln \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{3n}{2} \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^2 - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{1}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{3n}{2\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\theta = \frac{3n}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

4. 3

注意到$\mu = 3$，故

$$P(3 < X < 6) = P(0 < \frac{X-3}{\sigma} < \frac{3}{\sigma}) = \Phi(\frac{3}{\sigma}) - \frac{1}{2}$$

则

$$\sigma = 3$$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} f(z+t)g(t)dt$

令$W = Y$，则

$$\begin{cases} X = Z + W \\ Y = W \end{cases}$$

$Jacobi$行列式

$$|J| = \left| \frac{\partial(X,\, Y)}{\partial(Z,\, W)} \right| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = 1$$

故

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y) \cdot |J| dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(z+y)g(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(z+t)g(t)dt
\end{aligned}
$$

6. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

根据题意

$$2X - X^3 - 1 \le 0$$

$$(X-1)(-X^2 - X + 1) \le 0$$

三根分别为1，$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，从而得到

$$1 \le X \le 2$$

或

$$0 \le X \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

从而

$$P(Y \leq 1)=\frac{2-1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}-0}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

7. $\lambda_1+\lambda_2 \quad \lambda_1+\lambda_2$

泊松分布的期望与方差均为λ，且X_1与X_2独立，故

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\lambda_1+\lambda_2$$

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)=\lambda_1+\lambda_2$$

8. $\frac{n}{n+1}$

设$X=\max\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$，注意到分布函数

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x,\ X_2 \leq x,\ \ldots,\ X_n \leq x) \\ &= [P(X_1 \leq x)]^n \\ &= x^n \end{aligned}$$

故密度函数

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=nx^{n-1}$$

$$E(X)=\int_0^1 nx^{n-1}\cdot xdx=\frac{n}{n+1}$$

计算

1.

$$P(X \leq 1)=F(1)=\frac{2}{3}$$

$$P(X=1)=F(1)-\lim_{x \to 1^-} F(x)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P(1<x \leq 2)=F(2)-F(1)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

2.

(1)

X_i的生成函数

$$\begin{aligned} h(z) &= P(X_i=-1)\cdot z^{-1}+P(X_i=0)\cdot z^0+P(X_i=1)\cdot z \\ &= \frac{1}{4z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{4} \\ &= \left(\frac{\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt{z}}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

又X_i相互独立，故S_n的生成函数

$$g(z)=h^n(z)=\left(\frac{\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt{z}}}{2}\right)^{2n}$$

(2)

注意到$g(z)$常数项即为$P(S_n=0)$

$$P(S_n=0)=\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

3.

θ的先验分布密度函数

$$\pi(\theta)=1$$

X的密度函数服从二项分布，为

$$h(X|\theta) = C_n^x \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

联合密度函数

$$h(\theta,\ X) = h(X|\theta)\pi(\theta) = C_n^x \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

对θ归一化得到后验分布密度函数

$$\pi(\theta|X) = \frac{1}{B(x+1,\ n-x+1)} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

这是$Beta$分布，期望

$$\hat{\theta}_A = \frac{x+1}{(x+1)+(n-x+1)} = \frac{x+1}{n+2}$$

证明

1.

(1)证明满足非负性、正规性、可加性即可，这些是容易得出的。
(2)取$a=-1,\ b=2$，显然不满足非负性。（事实上需要额外满足$0 \le a,\ b \le 1$）

2.

设$P(A)=a,\ P(B)=b,\ P(AB)=c$，即证

$$-\frac{1}{4} \le c - ab \le \frac{1}{4}$$

考虑到$0 \le P \le 1$，我们有

$$\begin{cases} 0 \le c \le 1 \\ 0 \le a-c \le 1 \\ 0 \le b-c \le 1 \\ 0 \le a+b-c \le 1 \end{cases}$$

左边

$$\begin{aligned} c-ab &\ge c - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &\ge c - \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \\ &\ge -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

当且仅当$c=0,\ a=b=\frac{1}{2}$时取等，不考虑样本点概率为0的情况下可理解为$A,\ B$互斥且概率均为$\frac{1}{2}$.
右边

$$\begin{aligned} c-ab &\le c-c^2 \\ &= -\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \\ &\le \frac{1}{4} \end{aligned}$$

当且仅当$a=b=c=\frac{1}{2}$时取等，不考虑样本点概率为0的情况下可理解为$A=B$且概率均为$\frac{1}{2}$.
综上所述，

$$|P(AB)-P(A)P(B)| \le \frac{1}{4}$$

奖励

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$g(y)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

要证结论为

$$h(z)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

令

$$\begin{cases}Z=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}\\W=Y\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}X=Z\sqrt{\frac{W}{n}}\\Y=W\end{cases}$$

考虑$Jacobi$行列式

$$|J|=\left|\frac{\partial(X,\,Y)}{\partial(Z,\,W)}\right|=\left\|\begin{matrix}\sqrt{\frac{W}{n}} & \frac{Z}{2\sqrt{Wn}}\\0 & 1\end{matrix}\right\|=\sqrt{\frac{W}{n}}$$

故

$$\begin{aligned}h(z)&=\int_0^\infty f(x)g(y)\cdot|J|dw\\&=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\sqrt{\frac{w}{n}}dw\\&=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2w}{2n}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{w}{2}}\cdot\sqrt{\frac{w}{n}}dw\\&=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\cdot2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{(z^2+n)w}{2n}}w^{\frac{n-1}{2}}dw\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\cdot2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{2n}{z^2+n}t\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{2n}{z^2+n}dt,\ t=\frac{(z^2+n)w}{2n}\\&=\frac{1}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}dt\\&=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$