2024 年秋季《高等微积分 1》期末试卷

2025 年 1 月 8 日 9 : 00 – 11 : 00

本试卷分两页，共七道试题，其中第 1 题 10 分，其余每题各 15 分。

1 (1) 叙述任何版本的牛顿莱布尼茨 *(Newton-Leibniz)* 公式，并给出证明。

(2) 叙述定积分的换元公式，并给出证明。

解. (1) 牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式为如下的定理: 设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ 是可积函数, $F \in C([a, b])$ 且 $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式的证明: 设 $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ 是 $[a, b]$ 的任何剖分. 对每个 $1 \le i \le n$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot \Delta x_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

由此可得

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

当 $\max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} \to 0$ 时, 对上式两端取极限, 可得

$$F(b) - F(a) = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

注意到 f 在 $[a, b]$ 上可积, 上式右边的极限值为 $\int_a^b f(x)dx$, 这就证明了

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

或者有如下稍微弱一点的版本: 设 $f \in C([a,b])$, $F \in C([a,b])$ 且 $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

弱版本牛顿莱布尼兹公式的证明: 令 $S(x) = \int_a^x f(s)ds$. 由变上限积分定理有 $S \in C([a,b])$ 且 $S'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$. 定义函数 $H(x) = F(x) - S(x)$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$H(b) - H(a) = (b-a) \cdot H'(\xi) = (b-a) \cdot (F'(\xi) - S'(\xi)) = 0,$$

化简即得

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(2) 定积分的换元公式为如下的定理: 设 I, J 是区间, $\varphi\colon I \to J$ 有连续的导函数, $f \in C(J)$. 设 $A, B \in I, a, b \in J$ 满足 $a = \varphi(A), b = \varphi(B)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

换元公式的证明: 考虑 f 的变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(s)ds$, 则

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in J.$$

由链式法则, 有

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad \forall t \in I.$$

这样, 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned} &\int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_A^B \\ =&F(\varphi(B)) - F(\varphi(A)) = F(b) - F(a) \\ =&\int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

□

2 令 $f(x)=\sin x+x^2+1$.

(1) 证明：存在正数 r，使得 f 在 $[-r,r]$ 上是单射。

(2) 记 f 在 $[-r,r]$ 上的反函数为 g，求 $g^{(2)}(1)$ 的值。

解. (1) $f'(x)=\cos x+2x$ 是连续函数，且 $f'(0)=1$，从而存在正数 r 使得在 $[-2r,2r]$ 中 f' 处处为正。由此可知 f 在 $[-r,r]$ 中严格单调递增，因而在 $[-r,r]$ 上是单射。

(2) 利用反函数的求导定理，有

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{2g(x)+\cos g(x)}.$$

对上式再求导可得

$$g''(x)=-(2g(x)+\cos g(x))^{-2}(2g'(x)-(\sin g(x))g'(x))=-\frac{2g'(x)-(\sin g(x))g'(x)}{(2g(x)+\cos g(x))^2}.$$

代入 $g(1)=0$ 得到 $g'(1)=1$，进而有

$$g''(1)=-\frac{2-0}{1^2}=-2.$$

□

3 下凸函数的图像高于切线，低于割线。可用此完成如下两个问题。

(1) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的下凸函数。对任何实数 $a<b$，证明：

$$(b-a)f(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f'(a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

(2) 设 g 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^2 光滑函数，满足对 $|x|\geqslant 1$ 都有 $g(x)=|x|$，且对 $|x|\leqslant 1$ 有 $g''(x)\geqslant 0$. 证明：对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $|x|\leqslant g(x)\leqslant|x|+1$.

证明: (1) 由 f 下凸，可知

$$f(a)+f'(a)(x-a)\leq f(x)\leq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad \forall x\in[a,b].$$

对上述不等式积分可得下界：

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \big(f(a) + f'(a)(x-a)\big)\,dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(a).$$

类似的，可得上界

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)dx \\ &= (b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{(b-a)^2}{2} \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).\end{aligned}$$

(2) 只需对 $|x| \leq 1$ 证明 $|x| \leq g(x) \leq |x| + 1$。由条件 $g''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上非负可知 g 在 $[-1,1]$ 上是下凸函数。由 $g(-1) = g(1) = 1$ 可知 g 在 $x = \pm 1$ 两点处的割线为 $y = 1(-1 \leq x \leq 1)$，从而可得对 $x \in [-1,1]$ 有 $g(x) \leq 1 \leq |x| + 1$。

由 g 在 $x = 1$ 处可到，有 $g'(1) = g'(1+) = 1$，可知 g 在 $x = 1$ 处的切线为 $y = 1 + g'(1)(x-1) = x$。利用下凸函数图像高于切线可得对任何 x 都有 $g(x) \geq x$。类似的，$g'(-1) = g'(-1-) = 1$，g 在 $x = -1$ 处的切线为 $y = -(x+1) + 1 = -x$，可得对任何 x 都有 $g(x) \geq -x$。结合起来得到 $g(x) \geq \max\{x, -x\} = |x|$。 □

4 对非负整数 n，定义积分

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin t}dt.$$

(1) 利用和差化积公式 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$，建立 K_n 的递推关系式。

(2) 化简表达式 $\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n-1)t$.

(3) 结合 (1), (2) 的结果，计算积分

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}dt.$$

证明*:* (1) 对 $n \geq 2$，利用和差化积公式可得

$$\begin{aligned} K_n - K_{n-2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(\cos(n-1)t)(\sin t)}{\sin t} dt \\ &= \frac{2}{n-1} \sin(n-1)t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{n-1} \sin\frac{(n-1)\pi}{2} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数}, \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2}{n-1}, & \text{如果 } n \text{ 是偶数}. \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 记 $S = \sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n-1)t$。若 $\sin t = 0$，则 $t \in \mathbb{Z}\pi$，可得 $S = 0$。若 $\sin t \neq 0$，则利用和差化积公式可得

$$\begin{aligned} 2\sin t \cdot S &= \sum_{i=1}^{n} 2\sin t \sin(2i-1)t = \sum_{i=1}^{n} (\cos(2i-2)t - \cos 2it) \\ &= 1 - \cos 2nt = 2\sin^2(nt), \end{aligned}$$

即有 $S = \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}$。

可把结果总结成

$$S = \begin{cases} \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}, & \text{如果 } \sin t \neq 0, \\ 0, & \text{如果 } \sin t = 0. \end{cases}$$

(3) 由 (1) 的结果有 $K_{2n-1} = K_{2n-3} = \cdots = K_1 = \frac{\pi}{2}$。再利用 (2) 的结果可得

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n-1)t}{\sin t} dt = \sum_{i=1}^{n} K_{2i-1} = \frac{n}{2}\pi.$$

□

5 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 处处有各个高阶导函数，满足 $f(0) = 0$，且对任何 x 以及任何正整数 n 都有 $f(x) \geqslant 0, f^{(n)}(x) \geqslant 0$. 本题的目标是证明 f 恒等于零。

(1) 证明：对 $x < 0$ 有 $f(x) = 0$，进而对任何正整数 n 都有 $f^{(n)}(0) = 0$.

(2) 设 a 是任意给定的正数。利用 $x=0$ 处展至 n 阶带 *Lagrange* 余项的 *Taylor* 公式证明：对任何正整数 n，有 $f^{(n)}(a) \geqslant \frac{n!f(a)}{a^n}$.

(3) 设 a 是任意给定的正数。利用 (2) 的结果以及 $x=a$ 处带 *Lagrange* 余项的高阶 *Taylor* 公式证明 $f(a)=0$.

证明*:* (1) 由 f' 处处非负可知 f 单调递增，从而对 $x<0$ 有 $f(x) \leq f(0)=0$。结合条件 $f(x) \geq 0$ 得到 $f(x)=0$。这样，对任何非负整数 m 与负实数 x 有 $f^{(m)}(x)=0$。对正整数 n，由于 $f^{(n)}(0)$ 存在，结合归纳假设 $f^{(n-1)}(0)=0$ 可得

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{0-0}{x}=0.$$

(2) 利用 *Taylor* 公式，存在 $\xi \in (0,a)$ 使得

$$f(a)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}a^i+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}a^n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}a^n,$$

即有 $f^{(n)}(\xi)=\frac{n!f(a)}{a^n}$。由于 $(f^{(n)})'=f^{(n+1)}$ 处处非负可知 $f^{(n)}$ 单调递增，因而有 $f^{(n)}(a) \geq f^{(n)}(\xi)=\frac{n!f(a)}{a^n}$。

(3) 利用 $x=a$ 处带 *Lagrange* 余项的高阶 *Taylor* 公式可知：对正整数 n，存在 $\eta \in (a,2a)$ 使得

$$f(2a)=f(a)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}a^m+\frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}a^n \geq f(a)+\sum_{m=1}^{n-1}f(a)=nf(a),$$

即有 $f(a) \leq \frac{f(2a)}{n}$。取极限得到

$$f(a) \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{f(2a)}{n}=0,$$

结合 $f(a) \geq 0$ 可得 $f(a)=0$。 □

6 定义 $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ 为 $f(x)=(1-\frac{1}{x})^x$. 对整数 $n>1$，令

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\sum_{i=1}^{n-1}f(\frac{n}{i})^i.$$

(1) 证明：f 递增且对 $x>1$ 有 $f(x)<\frac{1}{e}$.

(2) 利用 (1) 的结论证明：数列 $\{S_n\}$ 单调递增且有界，从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在。

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 的值。

解. (1) $\ln f(x)$ 的导函数为

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{x-1} - (\ln x - \ln(x-1)) > 0,$$

可得 $f(x)$ 严格递增。结合

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to0-}(1+t)^{-1/t} = \frac{1}{e},$$

可得对 $x>1$ 有 $f(x)<\frac{1}{e}$。

(2) 利用 f 单调递增，可知

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{n+1}{i})^i > \sum_{i=1}^{n-1} f(\frac{n+1}{i})^i > \sum_{i=1}^{n-1} f(\frac{n}{i})^i = S_n.$$

利用 $f(x)<\frac{1}{e}$ 可知

$$S_n < \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{e^i} < \frac{1}{e-1}.$$

这就证明了 $\{S_n\}$ 单调递增且有上界，由单调收敛定理可得极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在。

(3) 记 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$。由 (2) 中的不等式可知 $S\le\frac{1}{e-1}$。

另一方面，对每个正整数 k，对 $n\ge k+1$ 有

$$S_n \ge \sum_{i=1}^{k} f(\frac{n}{i})^i.$$

对 $n\to+\infty$ 取极限可得

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n \ge \sum_{i=1}^{k}\lim_{n\to\infty} f(\frac{n}{i})^i = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{e^i}.$$

再对 $k\to+\infty$ 取极限，可得

$$S \ge \lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{e^i} = \frac{1}{e-1}.$$

结合起来可知所求的极限为 $S = \frac{1}{e-1}$。

$\square$

7 (1) 利用分部积分公式，判断无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{1+4u}} du$$

的收敛发散性。

(2) 证明：无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \sin(x)\sin(x^2) dx$$

收敛。

解. (1) 所述的无穷积分是收敛的。对正数 b，利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{\cos u}{\sqrt{1+4u}} du &= \frac{\sin u}{\sqrt{1+4u}}\Big|_0^b - \int_0^n (\sin u)(-\frac{1}{2})(1+4u)^{-3/2} 4du \\ &= \frac{\sin u}{\sqrt{1+4u}}\Big|_0^b + 2\int_0^b \frac{\sin u}{(1+4u)^{3/2}} du.\end{aligned}$$

显然 $\lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{\sin u}{\sqrt{4u+1}}\Big|_0^b \right) = 0$，再考虑无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{(1+4u)^{3/2}} du$。由于

$$\left|\frac{\sin u}{(1+4u)^{3/2}}\right| \le \frac{1}{(1+4u)^{3/2}} < \frac{1}{u^{3/2}}, \quad \forall u > 1,$$

利用比较定理可知无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{(1+4u)^{3/2}} du$ 绝对收敛。
结合起来可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{1+4u}} du = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{(1+4u)^{3/2}} du$$

是收敛的。

(2) 证法一：利用和差化积公式可得

$$\int_1^{+\infty} \sin x \sin x^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2-x) - \cos(x^2+x)}{2} dx.$$

分别处理右边的无穷积分。

对 $\int_1^{+\infty}\cos(x^2-x)dx$，令 $u=x^2-x$，则当 $x\geq 1$ 时 u 关于 x 严格单调递增（因为 $u'=2x-1>0$），且可解得 $x=\frac{1+\sqrt{1+4u}}{2}$。用此换元可得

$$\int_1^{+\infty}\cos(x^2-x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{\sqrt{1+4u}}du.$$

对对 $\int_1^{+\infty}\cos(x^2+x)dx$，令 $u=x^2+x$，则当 $x\geq 1$ 时 u 关于 x 严格单调递增，且可解得 $x=\frac{-1+\sqrt{1+4u}}{2}$。用此换元可得

$$\int_1^{+\infty}\cos(x^2+x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{\cos u}{\sqrt{1+4u}}du.$$

利用 (1) 的结论,可知前述两个无穷积分都收敛,由此可得无穷积分 $\int_1^{+\infty}\sin(x)\sin(x^2)dx$ 收敛。

证法二：对正数 b，利用分部积分公式可得如下等式 $(*)$：

$$\begin{aligned}\int_1^b\sin x\sin(x^2)dx&=\int_1^b\frac{\sin x}{2x}(-\cos x^2)'dx\\&=\frac{-\sin x\cos(x^2)}{2x}\Big|_1^b+\int_1^b(\frac{\sin x}{2x})'\cos(x^2)dx\\&=\frac{-\sin x\cos(x^2)}{2x}\Big|_1^b+\int_1^b\left(\frac{\cos x\cos(x^2)}{2x}-\frac{\sin x\cos(x^2)}{2x^2}\right)dx.\end{aligned}$$

分别考虑上式右边三项的极限。首先有

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{-\sin x\cos(x^2)}{2x}\Big|_1^b=\frac{\sin 1\cos 1}{2}.$$

其次，由于 $|\frac{\sin x\cos(x^2)}{2x^2}|\leq\frac{1}{2x^2}$，利用比较定理可知无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos(x^2)}{2x^2}dx$ 绝对收敛。

最后考虑无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\cos(x^2)}{2x}dx$。再次使用分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_1^b\frac{\cos x\cos(x^2)}{2x}dx&=\int_1^b\frac{\cos x}{4x^2}(\sin x^2)'dx\\&=\frac{\cos x\sin(x^2)}{4x^2}\Big|_1^b+\int_1^b\left(\frac{\sin x\sin(x^2)}{4x^2}+\frac{\cos x\sin(x^2)}{2x^3}\right)dx.\end{aligned}$$

由于

$$|\frac{\sin x\sin(x^2)}{4x^2}|\leq\frac{1}{4x^2},\quad|\frac{\cos x\sin(x^2)}{2x^3}|\leq\frac{1}{2x^3},$$

利用比较定理可知无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \sin(x^2)}{4x^2} dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x \sin(x^2)}{2x^3} dx$ 均绝对收敛。结合 $\lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{\cos x \sin(x^2)}{4x^2} \Big|_1^b \right) = -\frac{\cos 1 \sin 1}{4}$，可得无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x \cos(x^2)}{2x} dx$ 收敛。

代回等式 $(*)$，就证明了题述无穷积分 $\int_1^{+\infty} \sin(x) \sin(x^2) dx$ 收敛。

$\square$