2022 年秋季《高等微积分 1》期中参考答案

本试卷共七道题, 分两页, 其中第 $1,4,5,7$ 题各 15 分, 第 2 题 20 分, 第 $3,6$ 题各 10 分. 可直接引用课堂上与讲义上的命题与例子.

1 (1) 叙述函数 f 在 x_0 处可微的定义.

(2) 证明: 一元函数 f 在 x_0 处可微的充分必要条件是 f 在 x_0 处可导.

(3) 设 $g(0)=h(0)=0$, 且对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|g(x)|\le|h(x)|$. 证明: 如果 g 与 h 在 $x=0$ 处都可导, 则 $|g'(0)|\le|h'(0)|$.

解. (1) 称 f 在 x_0 处可微, 如果存在线性映射 $L:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, L(h)=Ah, \forall h\in\mathbf{R}$, 使得在 $h=0$ 的某个邻域中有 $f(x_0+h)=f(x_0)+L(h)+\alpha(h)$, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0$.

(2)

$$
\begin{aligned}
& f\text{在}x_0\text{处可导}\\
\iff & \text{极限}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{存在}\\
\iff & \text{存在}A\in\mathbf{R},\text{使得}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\\
\iff & \text{存在}A\in\mathbf{R},\text{使得}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h}=0\\
\iff & \text{存在}A\in\mathbf{R},\text{使得}f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+\alpha(h),\text{且}\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0\\
\iff & f\text{在}x_0\text{处可微}.
\end{aligned}
$$

(3) 由条件, 对任何 $x\neq 0$ 有

$$|\frac{g(x)-g(0)}{x}|=\frac{|g(x)|}{|x|}\le\frac{|h(x)|}{|x|}=|\frac{h(x)-h(0)}{x}|,$$

利用极限不等式可得

$$\lim_{x\to 0}|\frac{g(x)-g(0)}{x}| \le \lim_{x\to 0}|\frac{h(x)-h(0)}{x}|$$

此即 $|g'(0)| \le |h'(0)|$. $\square$

2 (1) 设 k,n 是正整数且 $k \le n$, 计算函数极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})...(1-x^{n-k+1})}{(1-x^k)(1-x^{k-1})...(1-x^1)}.$$

(2) 设 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}}$.

(3) 给定实数 a,b, 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{a}{n})^2+\frac{b^2}{n^2}\right)^{n/2}$.

(4) 给定无理数 α 与实数 $x\in(-1,1)$. 计算数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

解答. (1) 所求的极限值为 C_n^k.

注意到, 对正整数 m, 有

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^m}{1-x} = \lim_{x\to 1}\left(1+x+...+x^{m-1}\right) = m,$$

由此可得

$$\lim_{x\to 1}\frac{\prod_{i=n-k+1}^{n}(1-x^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1-x^i)} = \lim_{x\to 1}\frac{\prod_{i=n-k+1}^{n}\frac{1-x^i}{1-x}}{\prod_{i=1}^{k}\frac{1-x^i}{1-x}} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)...1} = C_n^k.$$

(2) 所求的极限值为 α. 由 $|\frac{\beta}{\alpha}|<1$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\alpha-\beta}$. 特别的,

$$\frac{1}{3} < \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n}{\alpha-\beta} < 1,$$

故存在 $N\in\mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $n>N$ 有

$$\frac{1}{3} < \frac{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n}{\alpha-\beta} < 1,$$

这样就有

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3}} < \sqrt[n]{\frac{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n}{\alpha-\beta}} < 1, \quad \forall n > N.$$

注意到 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, 利用夹逼定理可得 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n}{\alpha-\beta}} = 1$. 由此可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}} = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n}{\alpha-\beta}} = \alpha.$$

(3) 当 $a = b = 0$ 时, 所求的极限显然为 1. 以下假设 a, b 不全为零, 注意到

$$\left((1+\frac{a}{n})^2 + \frac{b^2}{n^2}\right)^{n/2} = \left((1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})^{\frac{1}{\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})}$$

其中指数的极限为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot (\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}) = a.$$

下面来计算底数的极限. 考虑数列 $\{\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$, 它们趋近于零, 且其中至多一项为零, 利用 Heine 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})^{\frac{1}{\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e.$$

结合这两方面可得

$$\lim_{n\to\infty} \left((1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})^{\frac{1}{\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})} = e^a.$$

总结起来, 任何情况下都有

$$\lim_{n\to\infty} \left((1+\frac{a}{n})^2 + \frac{b^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^a.$$

(4) 所求的极限值为 0. 令 $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |\frac{\alpha-n}{n+1}| \cdot |x| = |x| < 1,$$

利用作业中证明过的结论: 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q<1$, 则有 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 由此结论, 可知所求极限的值为 0.

□

3 设 $f(x):[0,1]\to[0,\pi]$ 是可导函数, 满足当 $f(x)\in(0,\pi]$ 时有 $x=\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$, 且当 $f(x)=0$ 时有 $x=1$. 求 $f'(0)$ 的值.

解. 所求 $f'(0)$ 的值为 $-\pi$.

由条件知 $f(0)\neq 0$, 从而有 $0=\frac{\sin(f(0))}{f(0)}$, 可得 $f(0)=\pi$.

由连续性可知在 $x=0$ 附近 $f(x)\neq 0$. 这样, 有 $xf(x)=\sin(f(x))$, 对此求导可得

$$f(x)+xf'(x)=\cos(f(x))f'(x).$$

特别的, 取 $x=0$ 代入上式, 有 $f(0)=\cos(f(0))f'(0)$. 结合 $f(0)=\pi$ 即得 $f'(0)=-\pi$.

□

4 设映射 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足: 存在常数 $0<L<1$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|,\quad \forall x,y\in[a,b].$$

(1) 证明: f 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

(2) 定义数列 $\{x_n\}$ 为: $x_1\in[a,b]$, 且对 $n\geq 1$ 有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$. 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 f 的唯一的不动点.

证明: (1) 对任何 x_0, 对任何 $\epsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\epsilon}{L}$, 则对任何 $x\in B_\delta(x_0)\cap[a,b]$, 有 $|x-x_0|<\delta$. 利用条件得到

$$|f(x)-f(x_0)|\leq L|x-x_0|<L\cdot\delta=\epsilon,$$

这就验证了 f 在每点 x_0 处都连续.

(2) 有界闭区间 $[a,b]$ 在欧氏度量下是完备的度量空间, 因为对其中的任何 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 由 $\mathbb{R}$ 的完备性可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 再由极限不等式可得 $a \le \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le b$, 说明 $[a,b]$ 中的任何无穷序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛到 $[a,b]$ 中的某点.

令 $g(x) = \frac{1}{2}(x + f(x))$, 显然 g 是从 $[a,b]$ 到 $[a,b]$ 的映射. 注意到, 对任何 $x, y \in [a,b]$, 有

$$|g(x) - g(y)| = \frac{1}{2}|x + f(x) - y - f(y)| \le \frac{|x-y| + |f(x) - f(y)|}{2} \le \frac{1+L}{2}|x-y|.$$

由 $0 < L < 1$ 可知 $\frac{1+L}{2} \in (0,1)$, 上式表明 g 是压缩映射. 利用压缩映像定理, 可得序列 $\{x_n\}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ 收敛到 g 的唯一的不动点 x_*. 最后,

$$g(x) = x \iff \frac{x + f(x)}{2} = x \iff f(x) = x,$$

说明 x_* 也是 f 的唯一不动点. □

5 (1) 令 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, 利用对乘积函数 $1 = f(x)\cdot(x^2+1)$ 求高阶导数的 Leibniz 法则, 对每个正整数 n 计算 $f^{(n)}(0)$ 的值.

(2) 令 $g(x) = e^{\alpha x^2/2} = \exp(\frac{\alpha}{2}x^2)$, 利用复合函数的高阶导数的法则, 对每个正整数 n 计算 $g^{(n)}(0)$ 的值.

6 设 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 满足 $f(0) = f(1)$. 设 $\alpha \in (0,1)$ 是给定的实数. 证明: 存在 $x \in [0,1]$ 使得 $f(x) = f(x+\alpha)$ 或 $f(x) = f(x+1-\alpha)$.

证明*:* 用反证法, 假设对任何 $x \le 1-\alpha$ 有 $f(x) \ne f(x+\alpha)$, 且对任何 $x \le \alpha$ 有 $f(x) \ne f(x+1-\alpha)$. 令 $g(x) = f(x+\alpha) - f(x)$, $h(x) = f(x+1-\alpha) - f(x)$, 则 g 是 $[0, 1-\alpha]$ 上的连续函数, h 是 $[0,\alpha]$ 上的连续函数, 且 g, h 处处非零. 这样, 由介值定理可知 g, h 恒正或恒负. 注意到

$$g(0) + h(\alpha) = (f(\alpha) - f(0)) + (f(1) - f(\alpha)) = 0,$$

说明 g, h 的符号相反.

(1) 若 g 恒正且 h 恒负, 由最值定理可知 f 在 $[a,b]$ 上有最大值, 设为 $f(x_0)$. 若 $x_0 \le 1-\alpha$, 则由 g 恒正可得 $f(x_0+\alpha) > f(x_0)$, 矛盾! 若 $x_0 > 1-\alpha$, 则由 h 恒负可得 $f(x_0 - (1-\alpha)) > f(x_0)$, 亦矛盾!

(2) 若 g 恒负且 h 恒正, 则用 $-f$ 代替 f, 转化为 (1) 的情形, 或者将 (1) 的证明中 $f(x_0)$ 换成 f 在 $[a,b]$ 上的最小值. $\square$

7 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 满足对任何 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\le 1.$$

(1) 证明: 对任何实数 x 与正整数 n, 有 $|f(nx)-nf(x)|\le n-1$.

(2) 证明: 对任何实数 y 与正整数 m,n, 有 $|\frac{f(my)}{m}-\frac{f(ny)}{n}|\le\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.(提示: 在 (1) 的结论中取 $x=my$)

(3) 对每个给定的实数 x, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{n}$ 存在. 记 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{n}$, 并证明 $|f(x)-g(x)|\le 1$.

(4) 证明: 前述定义的函数 $g(x)$ 满足对任何 $x,y\in\mathbb{R}$ 有 $g(x+y)=g(x)+g(y)$.

证明: (1) 利用三角不等式, 有

$$|f(nx)-nf(x)|=\Big|\sum_{i=1}^{n-1}(f((i+1)x))-f(ix)-f(x))\Big|\le\sum_{i=1}^{n-1}\Big|f((i+1)x))-f(ix)-f(x)\Big|\le n-1.$$

(2) 由 (1) 的结论, 有

$$|f(nmy)-nf(my)|\le n-1,\quad |f(mny)-mf(ny)|\le m-1,$$

结合三角不等式可得

$$\begin{aligned}|nf(my)-mf(ny)|&=|(f(nmy)-nf(my))-(f(mny)-mf(ny))|\\&\le|f(nmy)-nf(my)|+|f(mny)-mf(ny)|\\&\le n-1+m-1,\end{aligned}$$

从而有

$$|\frac{f(my)}{m}-\frac{f(ny)}{n}|\le\frac{n-1+m-1}{mn}<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

(3) 对给定的 x, 考虑数列 $\{\frac{f(nx)}{n}\}$, 对每个 $\epsilon>0$, 取正整数 $N>\frac{2}{\epsilon}$, 利用 (2) 的结论可知对 $m,n>N$, 有

$$|\frac{f(my)}{m}-\frac{f(ny)}{n}|<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<\frac{2}{N}<\epsilon,$$

这表明数列 $\{\frac{f(nx)}{n}\}$ 是 Cauchy 列, 从而其极限存在.

利用 (1) 的结论, 有 $|\frac{f(nx)}{n} - f(x)| \leq \frac{n-1}{n}$. 进而由极限不等式得到

$$|f(x) - g(x)| = \lim_{n\to\infty} |\frac{f(nx)}{n} - f(x)| \leq 1.$$

(4) 利用条件, 可得

$$|\frac{f(nx+ny)}{n} - \frac{f(nx)}{n} - \frac{f(ny)}{n}| \leq \frac{1}{n},$$

利用极限不等式即得到

$$|g(x+y) - g(x) - g(y)| = \lim_{n\to\infty} |\frac{f(nx+ny)}{n} - \frac{f(nx)}{n} - \frac{f(ny)}{n}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

即有 $g(x+y) = g(x) + g(y)$. $\square$