2023 年春季《高等微积分 2》期末考试参考解答

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题 10 分, 其余每题 15 分.

1 (1) 叙述高斯 *(Gauss)* 公式与斯托克斯 *(Stokes)* 公式.

(2) 给定 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场 $\mathbf{F} = (\cos x \sin y \cos z, \sin x \cos y \cos z, \sin x \sin y \sin z)$, 判断是否存在光滑函数 $\phi(x, y, z)$, 使得 $\nabla \phi = \mathbf{F}$. 若不存在, 请说明理由; 若存在, 请找出 ϕ.

解. (1) *Gauss* 公式: 设三维有界闭区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是分块光滑的曲面, 取指向 Ω 外面的定向. 设 P, Q, R 是 Ω 上的 C^1 光滑函数, 则有

$$\iint_{\partial\Omega} P dydz + Q dzdy + R dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Stokes 公式: 设定向曲面 S 的边界 ∂S 是分段光滑的, 按照右手法则对 ∂S 规定一个定向, 把取好这个定向的边界记作 ∂S^+. 设 P, Q, R 是 S 上的 C^1 光滑函数, 则有

$$\oint_{\partial S^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

(2) 不存在 $\phi(x, y, z)$ 使得 $\nabla \phi = \mathbf{F}$. 否则的话, 应该有 $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$, 但直接计算可得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos x \sin y \cos z & \sin x \cos y \cos z & \sin x \sin y \sin z \end{pmatrix} \\ &= (2 \sin x \cos y \sin z, *, *) \\ &\neq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

矛盾! $\square$

2 (1) 求出二元函数 $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3 + 3$ 的所有极值点.

(2) 设 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是光滑函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 在约束条件 $x_1 + \cdots + x_n = 0$ 下的条件极大值点. 证明:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}).$$

证明: (1) f 有唯一的极值点 $(1,1)$.

f 的临界点方程为

$$f'_x = 3y - 3x^2 = 0, \quad f'_y = 3x - 3y^2 = 0,$$

结合起来可得 $x = y^2 = x^4$, 解得 f 的全部临界点为 $(0,0), (1,1)$.

f 的海瑟矩阵为

$$H_f = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

在 $(0,0)$ 处 $H_f = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 对应的二次型为 $6h_1h_2$ 是不定的, 可知 $(0,0)$ 不是 f 的极值点. 在 $(1,1)$ 处 $H_f = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ 是负定的 (因为 $-H_f$ 的顺序主子式都大于零), 可知 $(1,1)$ 是 f 的极大值点.

(2) 利用 *Lagrange 乘子法*, 存在实数 λ 使得 $(\mathbf{a}, \lambda)$ 是 Lagrange 辅助函数

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(x_1 + \cdots + x_n)$$

的临界点, 即满足如下的临界点方程:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda = 0, \quad \forall 1 \le i \le n,$$

这就得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}).$$

□

3 (1) 在区间 $[0,1)$ 上求解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y'' - y = 4e^{-x} \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(2) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 C^1 光滑映射, 且满足

$$f(x) = x^2 + \int_0^x (x-t) f'(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

请确定 $f(x)$, 需要证明你的结论.

解. (1) 先解齐次方程 $y'' - y = 0$, 其特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 有两个特征根 $\lambda = \pm 1$, 得到齐次 ODE 两个线性无关解 $\phi_1(x) = e^{-x}, \phi_2(x) = e^x$.

再用常数变易法求非齐次方程 $y'' - y = f(x)$ 的一个特解 $y(x) = C_1(x)\phi_1(x) + C_2(x)\phi_2(x)$, 这里 $f(x) = 4e^{-x}$. 为保证 $y(x)$ 是特解, 只需

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

解得

$$C_1(x) = \int \frac{-\phi_2 f}{\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2} dx,$$
$$C_2(x) = \int \frac{\phi_1 f}{\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2} dx,$$

具体算出

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \int -e^x \cdot 4e^{-x} dx = -2x + C_1,$$
$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int e^{-x} \cdot 4e^{-x} dx = -e^{-2x} + C_2,$$

结合起来的到非齐次方程 $y'' - y = 4e^{-x}$ 的所有解为

$$y(x) = (-2x + C_1)e^{-x} + (-e^{-2x} + C_2)e^x = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - (2x+1)e^{-x}.$$

结合初值条件 $y(0)=y'(0)=0$, 解得 $C_1=0, C_2=1$, 即所求初值问题的解为

$$y(x)=e^x-(2x+1)e^{-x}.$$

(2) 显然 $f(0)=0$, 用分部积分化简, 得到

$$f(x)=x^2+(x-t)f(t)\big|_{t=0}^{t=x}+\int_0^x f(t)dt=x^2+\int_0^x f(t)dt,$$

求导得到

$$f'(x)=2x+f(x).$$

令 $f(x)=C(x)e^x$, 代入上式可得 $C'(x)=2xe^{-x}$, 从而有

$$C(x)=C(0)+\int_0^x 2xe^{-x}dx=-2xe^{-x}-2e^{-x}+2,$$

进而得到

$$f(x)=-2x-2+2e^x=2e^x-2x-2.$$

□

4 (1) 设 L 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线, 其上有如下对称性: 设线性映射 $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为

$$\Phi(x,y,z)=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z, a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z, a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵, 即满足 $A^TA=I_3$. 已知 Φ 将 L 双射成 L 自身. 证明: 对任何连续函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 有

$$\int_L f ds=\int_L (f\circ\Phi)\, ds.$$

(2) 设曲线 $L=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1, x+2y+z=0\}$. (利用对称性) 计算第一型曲线积分

$$\int_L (2x^2+x+y^2+y)ds.$$

解. (1) 取 L 的参数化 $\gamma:[a,b]\to L$, 则 $\beta=\Phi\circ\gamma:[a,b]\to L$ 也是 L 的参数化. 可利用后者来计算第一型曲线积分

$$\begin{aligned}\int_L f ds &= \int_a^b f(\beta(t))\sqrt{\beta'(t)^T\beta'(t)}dt\\ &= \int_a^b f(\beta(t))\sqrt{\gamma'(t)^TA^TA\gamma'(t)}dt\\ &= \int_a^b f(\Phi(\gamma(t)))\sqrt{\gamma'(t)^T\gamma'(t)}dt\\ &= \int_L f\circ\Phi ds.\end{aligned}$$

(2) L 上有对称性 $(x,y,z)\to(-x,-y,-z)$, 可得 $\int_L xds=0=\int_L yds$. 另外还有对称性 $(x,y,z)\to(z,y,x)$, 可得 $\int_L x^2ds=\int_L z^2ds$. 由此可得

$$\int_L(2x^2+x+y^2+y)ds=\int_L(2x^2+y^2)ds=\int_L(x^2+y^2+z^2)ds=\int_L 1ds=\mathrm{length}(L)=2\pi.$$

□

5 (1) 令 $[0,1]^n=\{(x_1,\dots,x_n)|0\le x_i\le 1, i=1,\dots,n\}$, 求如下 n 重积分的值:

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}dx_1\cdots dx_n.$$

(2) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 令 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. 令 $u=x+y, v=y$ 结合换元公式证明:

$$\iint_D f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy=\int_0^1 uf\left(\frac{u}{2}\right)du+\int_1^2(2-u)f\left(\frac{u}{2}\right)du.$$

解. (1) 直接化成累次积分, 可得

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n}x_1dx_1\dots dx_n=\int_{[0,1]^{n-1}}dx_2\cdots dx_n\int_0^1 x_1dx_1=\frac{1}{2}.$$

类似的有

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n}x_idx_1\dots dx_n=\frac{1}{2},$$

进而得到

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(2) 令 $u=x+y, v=y$, 则 $x=u-v, y=v$, 当 $(x,y)\in D$ 时可得对 u,v 的限制为

$$0\le u-v\le 1,\quad 0\le v\le 1,$$

即 $0\le v\le u\le v+1\le 2$, 这等价于

$$0\le u\le 2,\quad \max\{0,u-1\}\le v\le \min\{1,u\}.$$

利用换元公式可得

$$\begin{aligned}
&\iint_D f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy\\
=&\iint_{0\le v\le u\le v+1\le 2} f(\frac{u}{2})\cdot\left|\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|\cdot dudv\\
=&\int_0^2 f(\frac{u}{2})du\int_{\max\{0,u-1\}}^{\min\{1,u\}}dv\\
=&\int_0^1 f(\frac{u}{2})du\int_0^u dv+\int_1^2 f(\frac{u}{2})du\int_{u-1}^1 dv\\
=&\int_0^1 uf\left(\frac{u}{2}\right)du+\int_1^2(2-u)f\left(\frac{u}{2}\right)du.
\end{aligned}$$

□

6 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续的二阶导数, $f(0)=g(0)=1$, 且对 Oxy 平面上任何定向的简单闭曲线 C 都有

$$\int_C\left[y^2f(x)+2ye^x-8yg(x)\right]dx+2\left[yg(x)+f(x)\right]dy=0.$$

求函数 $f(x),g(x)$.

解. 设 C 围成的有界区域为 D, 则利用格林公式可得

$$\begin{aligned}
0&=\int_C\left[y^2f(x)+2ye^x-8yg(x)\right]dx+2\left[yg(x)+f(x)\right]dy\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}2\left[yg(x)+f(x)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[y^2f(x)+2ye^x-8yg(x)\right]\right)dxdy\\
&=2\iint_D\left(y(g'(x)-f(x))+f'(x)-e^x+4g(x)\right)dxdy.
\end{aligned}$$

记 $F(x,y)=y(g'(x)-f(x))+f'(x)-e^x+4g(x)$, 它是连续函数, 上式表明对任何点 $\mathbf{a}$, 在以 $\mathbf{a}$ 为圆心的任何闭圆盘上 F 的积分都等于零. 若 $F(\mathbf{a})\neq 0$, 不妨设 $F(\mathbf{a})>0$, 由连续性可知存在正数 r, 使得在以 $\mathbf{a}$ 为圆心 r 为半径的闭圆盘 D 处处有 $F\geq \frac{F(\mathbf{a})}{2}$, 从而有

$$\iint_D F dxdy \geq \iint_D \frac{F(\mathbf{a})}{2} dxdy = \frac{F(\mathbf{a})}{2}\pi r^2 > 0,$$

矛盾! 所以 F 恒等于零, 即对任何 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有

$$y(g'(x)-f(x))+f'(x)-e^x+4g(x)=0.$$

取 $y=0$ 得到 $f'(x)-e^x+4g(x)=0$; 代回上式得到对任何 y 都有 $y(g'(x)-f(x))=0$, 因而 $g'(x)=f(x)$. 这样, 有

$$g'(x)=f(x),\quad f'(x)-e^x+4g(x)=0,$$

得到 $g(x)$ 满足 *ODE*

$$g''+4g=e^x.$$

二阶线性齐次 ODE $y''+4y=0$ 的两个线性无关解为 $\sin 2x, \cos 2x$. 利用常数变易法 (或经直接观察) 可得上述非齐次方程有特解 $\frac{1}{5}e^x$. 由此可得

$$g(x)=\frac{1}{5}e^x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x,\quad f(x)=\frac{1}{5}e^x-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x,$$

结合 $f(0)=g(0)=1$ 得到 $C_1=\frac{4}{5}, C_2=\frac{2}{5}$, 从而本题所求的 f,g 为

$$f(x)=\frac{1}{5}e^x-\frac{8}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x,\quad g(x)=\frac{1}{5}e^x+\frac{4}{5}\cos 2x+\frac{2}{5}\sin 2x.$$

□

7 (1) 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中封闭的光滑曲面, 取指向外部的定向, 每点 $(x,y,z)\in S$ 处 S 的单位外法向量为 $\mathbf{n}(x,y,z)$, 记 S 围成的区域为 Ω. 证明: 对 Ω 上的光滑函数 f,g, 有

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_\Omega (\nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g)\, dxdydz,$$

其中 $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}$ 表示 g 对方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数, $\Delta g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$.

(2) 设 S, Ω 如前一小问所述, 已知坐标原点在 S 的内部. 用 r 表示每点 (x, y, z) 到原点的距离, 即 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 设光滑函数 u 在 Ω 中每点处都满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. 利用第 (1) 小问的结论, 计算如下积分

$$I = \iint_S \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS.$$

解. (1) 记 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, 利用 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}
&\iint_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS \\
=&\iint_S (fg_x, fg_y, fg_z) \cdot (n_x, n_y, n_z) dS \\
=&\iint_S fg_x dydz + fg_y dzdx + fg_z dxdy \\
=&\iiint_\Omega \left(\frac{\partial(fg_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fg_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fg_z)}{\partial z} \right) dxdydz \\
=&\iiint_\Omega (\nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g)\, dxdydz.
\end{aligned}$$

(2) 取正数 ϵ 足够小, 令 $V = \Omega \backslash B_\epsilon(\mathbf{0})$. 记 $v = \frac{1}{r}$, 它是 V 上的光滑函数, 且在 V 上处处都有 $\Delta v = 0$. 对 $B_\epsilon(\mathbf{0})$ 的边界 S_ϵ 取指向 $B_\epsilon(\mathbf{0})$ 的定向, 利用 Gauss 定理可得

$$\begin{aligned}
&\iint_S \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS - \iint_{S_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS \\
=&\iint_{\partial V} \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS \\
=&\iint_{\partial V} (uv_x - vu_x) dydz + (uv_y - vu_y) dzdx + (uv_z - vu_z) dxdy \\
=&\iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv_x - vu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uv_y - vu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uv_z - vu_z) \right) dxdydz \\
=&\iiint_V (u\Delta v - v\Delta u)\, dxdydz \\
=&0,
\end{aligned}$$

即有

$$I = \iint_{S_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS.$$

在 S_ϵ 上, 有 $\mathbf{n} = (\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}, \frac{z}{\epsilon})$, 由此可得

$$
\begin{aligned}
&\iint_{S_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS \\
=& \iint_{S_\epsilon} \frac{-1}{\epsilon^2} u dS - \frac{1}{\epsilon} \iint_{S_\epsilon} u_x dydz + u_y dzdx + u_z dxdy \\
=& -\frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} u dS - \frac{1}{\epsilon} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le \epsilon^2} \Delta u dxdydz \\
=& -\frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} u dS.
\end{aligned}
$$

利用 u 在 $(0,0,)$ 处的连续性可得

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{\epsilon \to 0+} \iint_{S_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS \\
&= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(-\frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} u dS \right) \\
&= -4\pi \cdot u(0,0,0).
\end{aligned}
$$

$\square$