2020 级微积分 A1 期末考试

mathsdream 整理版

2020.12.29

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. 常微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解为 __________.

2. 由曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 围成的平面区域的面积为 __________.

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3 + \sqrt{1-x^2})dx =$ __________.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t)dt}{x\sin x} =$ __________.

5. 曲线段 $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 3)$ 的弧长为 __________.

6. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx =$ __________.

7. $\displaystyle\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx =$ __________.

8. $\displaystyle\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx =$ __________.

9. 常微分方程 $xy' + y = 2x^3y^2$ 的通解为 __________.

10. 设广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$ 收敛, 则参数 p 的范围为 __________.

二、解答题

11. (8 分) 设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$。

12. (8 分) 求抛物线的一段 $y=\sqrt{2x}$, $0\le x\le 1$, 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积, 以及所得旋转面的侧面积。

13. (10 分) 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$。

14. (10 分) 设 $x>0$, 求常微分方程 $x^2y''+xy'-y=\ln x$ 的通解。

15. (8 分) 设 $f\in C^{(2)}[0,\pi]$, 且 $f(\pi)=2$, $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin x\,dx=5$, 求 $f(0)$。

16. (10 分) 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$ 的收敛性, 若收敛, 求广义积分值; 若发散, 说明理由。

17. (6 分) 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)dt$, 证明: 当 $x>0$ 时, $|f(x)|\le\frac{1}{x}$。

18. (10 分) 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且为有界函数, 即 $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|\le M$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

    (I) 证明: 常微分方程 $y'+y=f(x)$ 的每个解 $y=y(x)$ 当 $x\in[0,+\infty)$ 都是有界函数, 即 $\exists M_1>0$, 使得 $|y(x)|\le M_1, x\in[0,+\infty)$;

    (II) 当 $x\in(-\infty,0]$ 时, 常微分方程 $y'+y=f(x)$ 是否存在有界解? 若存在, 有几个? (请证明你的结论)

三、附加题（本题完全正确才有分，且分数不计入总分，仅用于评判 A+）

是否存在 $[1,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 满足 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$, 但 $\int_1^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 发散? 若存在, 给出满足条件的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的例子; 若不存在, 请证明你的结论。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 常微分方程 $y''-2y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$.

解析:先求解特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$,解得 $\lambda=1\pm i$。因此,通解为:$y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$。

2. 由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $x=0$, $y=0$ 围成的平面区域的面积为 $\frac{1}{6}$.

解析：即函数 $y=(1-\sqrt{x})^2$ 与 $x=0$ 到 $x=1$ 之间的面积：

$$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=\frac{1}{6}.$$

3. $\int_{-1}^{1}(x^3+\sqrt{1-x^2})dx=\frac{\pi}{2}$.

解析：由于 x^3 是奇函数，所以 $\int_{-1}^{1}x^3dx=0$。而 $\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上与 x 轴围成的面积为半个单位圆的面积，即 $\frac{\pi}{2}$。因此，原积分值为 $\frac{\pi}{2}$。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{x\sin x}=\frac{1}{2}$.

解析：由洛必达法则可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{1}{2}.$$

5. 曲线段 $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ $(0\le x\le 3)$ 的弧长为 $\frac{14}{3}$.

解析：应用弧长公式：

$$L=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^3\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^3=\frac{14}{3}.$$

6. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$.

解析：这种二次根号下一次分式，一般有两种手法：

方法一（直接换元）：令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, 则 $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx=\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$。代入积分得：

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx&=\int t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt\\
&=4\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt\\
&=4\int\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{(t^2+1)^2}\right)dt\\
&=4\left(\arctan t-\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}\arctan t\right)+C\\
&=2\arctan t-\frac{2t}{t^2+1}+C\\
&=2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}+C
\end{aligned}$$

方法二（三角换元）：将被积函数 $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 写成 $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$，然后令 $x=\sin\theta(\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$，则 $\cos\theta>0$，代入积分得：

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx &= \int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \int\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta d\theta\\ &= \int(1+\sin\theta)d\theta\\ &= \theta-\cos\theta+C\\ &= \arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

注 1：一个积分算出来多种看上去不同的结果是正常的，事实上第一种的结果也可以化成第二种的结果，但没必要，改卷时都会验算接受。

注 2：做三角换元要注意设定变量的范围，确定原变量能一一对应的取到所有值，然后注意去根号时的正负。

7. $\displaystyle\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx=\frac{x\sec^2 x}{2}-\frac{\tan x}{2}+C.$

解析：两种不同类型函数（x 和 $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$）的乘积的积分，准备使用分部积分。选取复杂的分式部分 $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ 为求原函数的部分，令 $u=x, dv=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}dx$。则 $du=dx$，而

$$\begin{aligned}v &= \int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx\\ &= \int\frac{-d(\cos x)}{\cos^3 x}\\ &= \frac{1}{2\cos^2 x}+C\\ &= \frac{\sec^2 x}{2}+C\end{aligned}$$

因此，原积分为：

$$\begin{aligned}\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx &= uv-\int vdu\\ &= \frac{x\sec^2 x}{2}-\int\frac{\sec^2 x}{2}dx\\ &= \frac{x\sec^2 x}{2}-\frac{\tan x}{2}+C\end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\pi.$

解析：令 $x=2\sin\theta\,(\theta:0\to\dfrac{\pi}{2})$, 则 $dx=2\cos\theta d\theta$，代入积分得：

$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin\theta)^2}{\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}\cdot 2\cos\theta d\theta\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta\\ &= \pi.\end{aligned}$$

9. 常微分方程 $xy' + y = 2x^3y^2$ 的通解为 $y = \dfrac{1}{Cx - x^3}$.

解析：这是一个伯努利方程，令 $z = y^{-1}$，则 $y' = -z'/z^2$。代入原方程得到 $z' - \dfrac{1}{x}z = -2x^2$。这是一个一阶线性微分方程，使用公式或常数变易法求解，解得 $z = -x^3 + Cx$，回代，得到 $y = \dfrac{1}{Cx - x^3}$。

注：可以注意到，$y = 0$ 也是原方程的解，但这个解无法和上面的解统一。我们一般定义一个 n 阶微分方程的通解是一个含 n 个任意常数的解的表达式，能表示出方程尽可能多的解，但不一定能表示出所有解。所以 $y = 0$ 没有被包含在答案中，其一般被称为是方程的一个奇异解。（不过就算是写了 $y = 0$，也是判对的）

10. 设广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 收敛, 则参数 p 的范围为 $1 < p < 3$.

解析：首先判断积分问题点，积分有两处问题点：0 和 $+\infty$，因此分别考虑 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 和 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 的收敛性，原积分收敛当且仅当这两个积分都收敛。

（1）当 $x \to 0^+$ 时，$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，因此 $\dfrac{1 - \cos x}{x^p} \sim \dfrac{x^{2-p}}{2}$。所以 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 的敛散性与 $\displaystyle\int_0^1 x^{2-p} dx$ 相同，而 $\displaystyle\int_0^1 x^{2-p} dx$ 收敛当且仅当 $2 - p > -1$，即 $p < 3$。

（2）对 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$，考虑积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 和 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$。前者收敛当且仅当 $p > 1$，后者由结论或 Dirichlet 判别法可知，当 $p > 0$ 时收敛。所以，当 $p > 1$ 时，$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 收敛，当 $0 < p \leq 1$ 时发散。而当 $p \leq 0$ 时，$\dfrac{1 - \cos x}{x^p} \geq 1 - \cos x$，后者的积分发散，因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 发散。所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 收敛当且仅当 $p > 1$。
综上所述，原积分收敛当且仅当 $1 < p < 3$。

注：一个广义积分如果对区间分段得到两个积分，则要求这两个积分都收敛，原积分才收敛。如果是将被积函数拆成两个函数，得到两个积分，则结论为两个积分都收敛时原积分收敛，一个积分收敛另一个发散时原积分发散，两个积分都发散时原积分可能收敛也可能发散，需要具体分析。

二、解答题解析

11. (8 分) 设 $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt$, 求 $\displaystyle\int_0^1 f(x) dx$。

解析：$f(x)$ 是一个含参积分的形式，非常适合求导。由微积分基本定理，$f'(x) = e^{-x^2}$。由于

其适合求导，我们可以使用分部积分，利用上它的导数：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= xf(x)|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx \\ &= 0 - \int_0^1 xe^{-x^2}dx \\ &= - -\frac{1}{2}e^{-x^2}\bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(e^{-1}-1).\end{aligned}$$

12. (8 分) 求抛物线的一段 $y=\sqrt{2x}$, $0 \le x \le 1$, 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积, 以及所得旋转面的侧面积。

解析：体积：

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \int_0^1 \pi(2x)dx = \pi.$$

侧面积：

$$S = \int_0^1 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1).$$

13. (10 分) 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$。

解析（万能换元）：简单的被积函数，准备万能换元：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} -1+\frac{1}{1-\sin x}dx \\ &= \frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}dx \\ &\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{(t-1)^2}dt \\ &= -\frac{\pi}{3}+1+\sqrt{3}\end{aligned}$$

另解（三角变换）：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} -1+\frac{1}{1-\sin x}dx \\ &= -\frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx \\ &= -\frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx \\ &= -\frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x + \sec x\tan x dx \\ &= -\frac{\pi}{3} + \tan x + \sec x|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} + 1\end{aligned}$$

14. (10 分) 设 $x>0$, 求常微分方程 $x^2y''+xy'-y=\ln x$ 的通解。

解析：这是一个欧拉方程，做换元 $t=\ln x$，则 $x=e^t$，

$$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

代入微分方程，得到 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-y=t$。这是一个常系数线性微分方程，先求齐次方程的通解，特征方程 $\lambda^2-1=0$，解得 $\lambda=\pm1$，因此齐次方程的通解为 $y_h=C_1e^t+C_2e^{-t}$。再求非齐次方程的一个特解，t 是一个一次多项式，且 0 不是特征根，所以令 $y_p=At+B$，代入方程得到 $A=-1,B=0$，因此特解为 $y_p=-t$。因此，非齐次方程的通解为：$y=C_1e^t+C_2e^{-t}-t$。回代 $t=\ln x$，得到原方程的通解为：$y=C_1x+\dfrac{C_2}{x}-\ln x$。

15. (8 分) 设 $f\in C^{(2)}[0,\pi]$, 且 $f(\pi)=2$, $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\sin x\,dx=5$, 求 $f(0)$。

解析：不同类型的函数，适合用分部积分，这里我们先研究 $\int_0^\pi f''(x)\sin xdx$：

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f''(x)\sin xdx &= \int_{x=0}^{x=\pi}\sin xdf'(x)\\ &= f'(x)\sin x|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos xdx\\ &= -\int_{x=0}^{x=\pi}\cos xdf(x)\\ &= -f(x)\cos x|_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\sin xdx\\ &= f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi f(x)\sin xdx\end{aligned}$$

因此，$\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\sin x\,dx=f(\pi)+f(0)=5$，所以 $f(0)=3$。

16. (10 分) 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\right)dx$ 的收敛性, 若收敛, 求广义积分值; 若发散, 说明理由。

解析：问题点在无穷处，分析被积函数在无穷处的渐近行为：

$$\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-\frac{1}{x}\sim\frac{1}{6x^3}\quad(x\to+\infty).$$

而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx$ 收敛，因此原积分收敛。

接下来计算积分值，先做换元，我不是很想看 arcsin，令 $t=\arcsin\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{\sin t}$，$dx=$

$-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt$。代入积分得：

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(t-\sin t)\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt \\
&= \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}(t-\sin t)d\left(-\frac{1}{\sin t}\right) \\
&= -\frac{t-\sin t}{\sin t}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos t}{\sin t}dt \\
&= 1-\frac{\pi}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}\sin t dt \\
&= 1-\frac{\pi}{2}-\int_1^0\frac{1-u}{1-u^2}du \quad (u=\cos t) \\
&= 1-\frac{\pi}{2}+\int_0^1\frac{1}{1+u}du \\
&= 1-\frac{\pi}{2}+\ln 2
\end{aligned}$$

17. (6 分) 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)dt$, 证明: 当 $x>0$ 时, $|f(x)|\le\dfrac{1}{x}$。

解析：复合函数的积分，先做换元，令 $u=t^2$，则 $dt=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}du$，代入积分得：

$$\int_x^{x+1}\sin(t^2)dt=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du.$$

这个积分是两类不同函数乘积，考虑分部积分：

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du\right| &= \frac{1}{2}\left|-\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\bigg|_{x^2}^{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{u^{3/2}}du\right| \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{u^{3/2}}du\right) \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

注：这里换完元后，得到的积分是经典的 $\dfrac{\sin x}{x^p}$ 的积分。如果有印象的话，这东西的广义积分书上有结论。建议好好学习著名案例《高等微积分教程（上）》P.195 例题 6.2.1，结论和证明过程都非常有价值。事实上，后半部分的解答完全照搬该例题的证明第一段。

18. (10 分) 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且为有界函数, 即 $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|\le M$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

    (I) 证明: 常微分方程 $y'+y=f(x)$ 的每个解 $y=y(x)$ 当 $x\in[0,+\infty)$ 都是有界函数, 即 $\exists M_1>0$, 使得 $|y(x)|\le M_1, x\in[0,+\infty)$;

    (II) 当 $x\in(-\infty,0]$ 时, 常微分方程 $y'+y=f(x)$ 是否存在有界解? 若存在, 有几个? (请证明你的结论)

解析：

(I) 这是一个一阶线性微分方程，使用公式求解，其的解为：

$$y=e^{-x}\left(C+\int_0^x e^t f(t)dt\right)$$

对其分析：

$$\begin{aligned}|y| &\le e^{-x}\left(|C|+\int_0^x e^t|f(t)|dt\right)\\ &\le |C|e^{-x}+Me^{-x}\int_0^x e^t dt\\ &= |C|e^{-x}+M(1-e^{-x})\\ &\le |C|+M\end{aligned}$$

所以 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界的。

(II) 假设某个 $y(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上有界，我们来看看其能推出 C 的什么结论。要使得其有界，主要是需要当 $x\to-\infty$ 时，y 有界。考虑下式：

$$ye^x = C+\int_0^x e^t f(t)dt$$

当 $x\to-\infty$ 时，左边极限 0，因此右边极限也为 0。又因为 $|f(t)|\le M$，所以 $|e^t f(t)|\le Me^t$，而 $\int_0^{-\infty} Me^t dt$ 收敛，因此 $\int_0^{-\infty} e^t f(t)dt$ 绝对收敛。于是有：

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{x\to-\infty}\left(C+\int_0^x e^t f(t)dt\right)\\ &= C+\int_0^{-\infty} e^t f(t)dt\\ &= C-\int_{-\infty}^0 e^t f(t)dt\end{aligned}$$

因此，C 只能为 $\int_{-\infty}^0 e^t f(t)dt$。下面验证这个解确实是有界解：

$$\begin{aligned}|y| &= \left|e^{-x}\left(\int_{-\infty}^0 e^t f(t)dt+\int_x^0 e^t|f(t)|dt\right)\right|\\ &= \left|e^{-x}\left(\int_{-\infty}^x e^t f(t)dt\right)\right|\\ &\le e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t M dt\\ &= M\end{aligned}$$

所以该解确实为有界解。综上所述，常微分方程在 $(-\infty,0]$ 上存在唯一一个有界解。

注：在课本（《高等微积分教程（上）》）中，一阶线性常微分方程的通解是这样写的：

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

这里的 $\int$ 没有积分上下限，看上去是一个不定积分。但不定积分是一个集合，对集合进行计算是没道理的。实际上，书上有提到，这里的 $\int p(x)dx$ 指的是 $p(x)$ 的某一个原函数。这样写可能是为了让式子看起来更加简洁清晰，但 $\int p(x)dx$ 这种形式实在难以用于具体的计算分析（比如算在某点的值就不好表示）。所以在实际这类一般问题时，一般会用定积分构造一个具体的原函数，比如 $\int_0^x p(t)dt$ 或 $\int_{-\infty}^x p(t)dt$。

三、附加题解析

是否存在 $[1,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 满足 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$, 但 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 发散? 若存在, 给出满足条件的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的例子; 若不存在, 请证明你的结论。

思路：这个很像比较判敛法的结论，但缺少了非负函数的条件，所以猜测应该是不对的。

如果想构造反例的话，首先 $f(x)$ 肯定不能是一个非负函数，否则由比较判敛可以得到这俩积分的敛散性是相同的。更进一步，$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 应该收敛但不绝对收敛。这种积分我们学过的不多，最常见的就是当 $0<p<1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛但不绝对收敛。接下来构造 $g(x)$，如果 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 发散，则 $\int_1^{+\infty} f(x)(g(x)-1)dx = \int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx - \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散。所以，我们实际需要找一个趋于 0 的函数 $h(x)$，使得 $\int_1^{+\infty} f(x)h(x)dx$ 发散。一种想法是非负函数的积分比一般函数更难收敛。所以令 $h(x)$ 和 $f(x)$ 符号相同，这样 $f(x)h(x)$ 就是非负函数了，那最好的，就是它本身了。

解答：存在。取 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$，$g(x) = 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$。则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$。而

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx + \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}dx\right)
\end{aligned}$$

三个积分中，第一个积分收敛，第二个积分发散，第三个积分收敛，因此原积分发散。即 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 发散。