

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014

الموضوع

NS 24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $a_n = \underbrace{333 \dots 31}_n$ (n مرة الرقم 3)

0.5 1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان.

0.5 2- بين أن لكل n من \mathbb{N}^* : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3- بين أن لكل k من \mathbb{N} : $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$

0.75 4- بين أن لكل k من \mathbb{N} : $3a_{30k+1} \equiv 0 \pmod{31}$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

0.5 5- بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، إذا كان $[30] \nmid n$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حولا في \mathbb{Z}^2

التمرين الثاني: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}), +, \times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\mathbb{C}), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من \mathbb{C} ، نضع : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$

0.5 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{C}), +)$.

0.75 2- احسب $J^2 = J' J$ حيث : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{C}), \times)$

3- نعرف على $M_2(\mathbb{C})$ قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من \mathbb{C}^* نحو $M_2(\mathbb{C})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a + ib$ (a و b عدنان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a, b)$.

0.5 (أ) بين أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو $(M_2(\mathbb{C}), *)$

0.25 (ب) نضع : $E^* = E - \{O\}$. بين أن : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0.5 (ج) بين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية.

0.5 4- بين أن : $A * (B + C) = A * B + A * C$ $(\forall (A, B, C) \in E^3)$

0.5 5- استنتج مما سبق أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي.

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $q = \frac{p}{2} + \frac{p}{4}i$

1- نعتبر في المجموعة \square المعادلة التالية: $(E) \quad z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

(أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $D = (\sqrt{2}ie^{iq})^2$ 0.25

(ب) اكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة \square . 0.75

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألقاها على التوالي 1 و -1 و $e^{iq + \frac{p}{4}i}$ و $e^{iq - \frac{p}{4}i}$ و $\sqrt{2}e^{iq}$

(أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان. 0.5

(ب) ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية. 0.25

(ج) استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$. 0.25

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{p}{2}$

(أ) اعط الصيغة العقدية للدوران r . 0.25

(ب) تحقق أن لحق النقط B صورة النقط I بالدوران r هو: $b = \sqrt{2}e^{iq} + i$ 0.5

(ج) بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان. 0.25

4- حدد لحق النقط C صورة النقط A بالإزاحة التي متجهتها $\begin{pmatrix} 1 \\ -v \end{pmatrix}$ 0.25

5- بين أن النقط A هي منتصف القطعة $[BC]$. 0.25

التمرين الرابع: (8 نقط)

$$f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; x > 0$$

$$f(0) = 0$$

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

1- (أ) بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

(ب) أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

2- (أ) بين أن: $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ $(\forall x \in \square_+^*)$ 0.25

(ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ 0.25

0.5 (ج) بين أن: $f'(\alpha) = 0$ $(\exists \alpha \in]0, 1[)$

0.5 (د) استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

0.5 1-أ) تحقق أن: $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ $(\forall t \in [1, +\infty[)$

ب) بين أن: $F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ $(\forall x \in [1, +\infty[)$

1

(لاحظ أن: $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt$)

ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

1

0.5 2-أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$

0.25 ب) أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0, +\infty[$

0.5 III-1-أ) بين أن: $-t \ln t \leq \frac{1}{e}$ $(\forall t \in]0, +\infty[)$

0.25 ب) بين أن: $f(t) \leq \frac{1}{e}$ $(\forall t \in [0, +\infty[)$

0.25 ج) استنتج أن: $F(x) < x$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 \in]0, 1[$ و $u_{n+1} = F(u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 أ) بين أن: $u_n \in]0, 1[$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة.

0.5 ج) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الخامس: (2 نقط)

$$g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} ; x > 0$$
$$g(0) = 0$$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0, +\infty[$ ، نضع $L(x) = \int_x^1 g(t) dt$

أ) بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

ب) أحسب $L(x)$ من أجل $x > 0$ 0.25

ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$ 0.5

3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

بين أن المتتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.5

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014

عناصر الإجابة

NR 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

سلم التقييط و عناصر الإجابة

التمرين الأول	عناصر الإجابة	سلم التقييط
-1	- التحقق من أجل $a_1 = 31$ - التحقق من أجل $a_2 = 331$	تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.25 نقطة
-2	البرهان بالترجع أو أية طريقة صحيحة أخرى	تمنح 0.5 نقطة
-3	- تطبيق مبرهنة فيرما: 10 و 31 أوليان فيما بينهما - الحصول على الجواب النهائي	تمنح 0.5 نقطة تمنح 0.25 نقطة
-4	- استعمال نتيجتي السؤالين 2- و 3- - تطبيق مبرهنة كوص للاستنتاج	تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.5 نقطة
-5	إذا وجد الزوج (x, y) فحسب مبرهنة بوزو فإن 31 و a_n أوليين فيما بينهما و هو ما يناقض نتيجة السؤال 4- و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى.	تمنح 0.5 نقطة
التمرين الثاني		
-1	الخاصية المميزة لزمرة جزئية	تمنح 0.5 نقطة
-2	- حساب J^2 - E خ J و E د J^2 و الإستنتاج.....	تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.5 نقطة
(أ-3)	j تشاكل	تمنح 0.5 نقطة
(ب)	$j(\mathbb{F}^*) = E^*$	تمنح 0.25 نقطة
(ج)	$(\mathbb{F}^*, ')$ زمرة تبادلية و صورة زمرة تبادلية بتشاكل	تمنح 0.5 نقطة

تمنح 0.5 نقطة	توظيف توزيعية قانون الضرب " " بالنسبة للجمع "+" في الحلقة (, , + ,) M_2	-4
تمنح 0.5 نقطة	من الأسئلة 1- و 3-ج و 4-	-5
	التمرين الثالث	
تمنح 0.25 نقطة	التحقق	1- أ)
تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.25 نقطة لكل شكل	- تحديد حلي المعادلة - الشكلين المثلثيين	ب)
تمنح 0.5 نقطة	تعامد المستقيمين	2- أ)
تمنح 0.25 نقطة	استقامية النقط	ب)
تمنح 0.25 نقطة	واسط القطعة	ج)
تمنح 0.25 نقطة	الصيغة العقدية للدوران تقبل حتى لو اقتصر على صيغة غير مختصرة	3- أ)
تمنح 0.5 نقطة	لحق B	ب)
تمنح 0.25 نقطة	تعامد المستقيمين	ج)
تمنح 0.25 نقطة	لحق C	-4
تمنح 0.25 نقطة	A منتصف $[BC]$	-5
	التمرين الرابع	
تمنح 0.25 نقطة	- اتصال الدالة f على المجال المفتوح $]0, +\infty[$	I-1- أ)
تمنح 0.25 نقطة	- اتصال الدالة f على اليمين في 0	
تمنح 0.25 نقطة	إشارة $f(x)$	ب)
تمنح 0.25 نقطة	المتساوية	2- أ)
تمنح 0.25 نقطة	قابلية الاشتقاق	ب)
تمنح 0.5 نقطة	تطبيق مبرهنة رول على المجال $[0,1]$	ج)
تمنح 0.5 نقطة	الاستنتاج من السؤالين 2-أ و 2-ب)	د)
تمنح 0.5 نقطة	التحقق	II-1- أ)
تمنح 0.25 نقطة	- الوصول إلى متفاوتة المزدوجة	ب)

	$\frac{1}{2} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \text{ و } \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \frac{\ln t}{t} dt \text{ و } \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$	
<p>تمنح 0.25 نقطة</p> <p>تمنح 0.5 نقطة</p>	<p>- حساب التكامل $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$</p> <p>- الوصول إلى النتيجة النهائية</p>	
<p>تمنح 0.25 نقطة</p> <p>تمنح 0.5 نقطة</p> <p>تمنح 0.25 نقطة</p>	<p>- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$</p> <p>- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$</p> <p>- التأويل الهندسي</p>	(ج)
<p>تمنح 0.25 نقطة</p> <p>تمنح 0.25 نقطة</p>	<p>- قابلية الاشتقاق: الدالة f متصلة على المجال $[0, +\infty[$ و F هي دالة أصلية للدالة f على هذا المجال .</p> <p>- حساب الدالة المشتقة</p>	(2- أ)
تمنح 0.25 نقطة	تغيرات الدالة	(ب)
تمنح 0.5 نقطة	المتفاوتة	(III-1- أ)
تمنح 0.25 نقطة	المتفاوتة	(ب)
تمنح 0.25 نقطة	النتيجة: $F(x) < x$	(ج)
تمنح 0.5 نقطة	البرهان بالترجع أو أية طريقة صحيحة أخرى	(2- أ)
<p>تمنح 0.25 نقطة</p> <p>تمنح 0.25 نقطة</p>	<p>- المتتالية تناقصية قطعاً</p> <p>- المتتالية متقاربة</p>	(ب)
تمنح 0.5 نقطة	تحديد النهاية كالحل الوحيد للمعادلة $F(x) = x$	(ج)
		<u>التمرين الخامس</u>
<p>تمنح 0.25 نقطة</p> <p>تمنح 0.25 نقطة</p>	<p>- اتصال الدالة g على المجال المفتوح $]0, +\infty[$</p> <p>- اتصال الدالة g على اليمين في 0</p>	-1
تمنح 0.25 نقطة	اتصال الدالة L على المجال $]0, +\infty[$ كدالة أصلية للدالة g على	(2- أ)

	المجال $[0, +\infty[$	
تمنح 0.25 نقطة	حساب التكامل $L(x)$ من أجل $x > 0$	(ب)
تمنح 0.25 نقطة	- حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \frac{1}{e}$ - الاستنتاج : بما أن الدالة L متصلة على اليمين في 0 فإن $L(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$	(ج)
تمنح 0.25 نقطة	- الدالة g متصلة على القطعة $[0,1]$ اذن المتتالية $(s_n)_n$ متقاربة - نهاية المتتالية هي $\lim_{n \in \mathbb{N} + \mathbb{Y}} s_n = L(0) = \frac{1}{e}$	-3