

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 22

ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵎⴰⵔ
ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵎⴰⵔ
ⵏ ⵍⵎⴰⵎⴰⵔ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتتنوع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل والمتتاليات العددية	11 نقطة

- بالنسبة للمسألة ، \ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

التمرين الأول : (3 ن)

- نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين $A(2, 1, 0)$ و $B(-4, 1, 0)$
- (1) ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ متجهة منظمية عليه . 0.5
- بين أن $x + y - z - 3 = 0$ هي معادلة ديكراتية للمستوى (P)
- (2) لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ 0.75
- بين أن (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(-1, 1, 0)$ و شعاعها 3
- (3) أ- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) ثم استنتج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) 0.5
- ب- بين أن مركز الدائرة (C) هو النقطة $H(0, 2, -1)$ 0.5
- (4) بين أن $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ ثم استنتج مساحة المثلث OHB 0.75

التمرين الثاني : (3 ن)

I- نعتبر العدد العقدي $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ بحيث

(1) بين أن معيار العدد العقدي a هو $2\sqrt{2} + \sqrt{2}$ 0.5

(2) تحقق من أن $a = 2\left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$ 0.25

(3) أ- بإخطاط $\cos^2 \theta$ ، حيث θ عدد حقيقي ، بين أن $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$ 0.25

ب- بين أن $a = 4\cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$ (نذكر أن $\sin 2\theta = 2\cos \theta \sin \theta$) 0.5

ج- بين أن $4\cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i\sin \frac{\pi}{8}\right)$ هو شكل مثلثي للعدد a ثم بين أن $a^4 = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}\right)^4 i$ 0.5

II- نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقطتين Ω و A اللتين لحقاهما

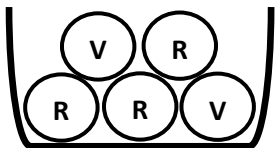
على التوالي هما ω و $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $\omega = \sqrt{2}$ و R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(1) بين أن اللق b للنقطة B صورة النقطة A بالدوران R هو $2i$ 0.5

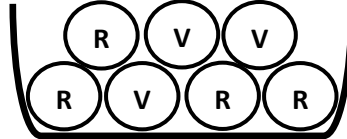
(2) حدد مجموعة النقط M ذات اللق z بحيث $|z - 2i| = 2$ 0.5

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق U_1 على 7 كرات : أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)
و يحتوي صندوق U_2 على 5 كرات : ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان (لا يمكن التمييز بينها باللمس)



الصندوق U_2



الصندوق U_1

I) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1
ليكن A الحدث : " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين " .
و B الحدث : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " .

بين أن $p(A) = \frac{12}{35}$ و $p(B) = \frac{1}{7}$

II) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_1 ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_2
ليكن C الحدث : " الحصول على ثلاث كرات حمراء " .

بين أن $p(C) = \frac{6}{35}$

المسألة : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : 2 cm)

(I) بين أن $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$ هي مجموعة تعريف الدالة f 0.5

(2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ و أول هندسيا النتيجة (النتيجتين المتوصل إليهما) . 0.75

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده . 0.5

ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x) = x - x \ln x$) 0.5

(3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f 0.75

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1[$ و تزايدية على كل من المجالين $[1, e[$ و $]e, +\infty[$ 1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f 0.25

(II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

و ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)

(1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x) = 0$, $x \in]0, +\infty[$ 0.5

ب- نعطي جدول القيم التالي : 0.5

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

(2) أ- تحقق من أن $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى 0.5

(C_f) في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α

ج- حدد ، انطلاقا من (C_g) ، إشارة الدالة g على المجال $[1, \alpha]$ و بين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[1, \alpha]$ 0.5

(3) أنشئ ، في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) 1.25

(4) أ- بين أن $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$ (لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من D_f) 0.75

ب- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين 0.75

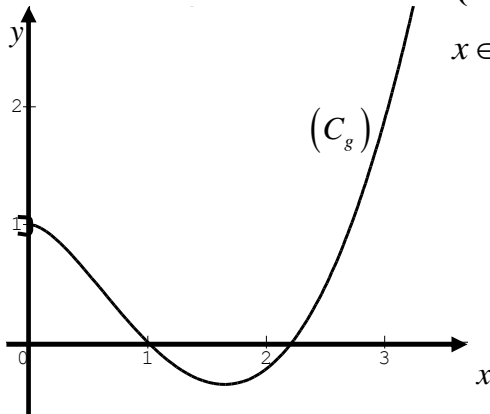
الذين معادلتهما $x = \sqrt{e}$ و $x = 1$

(III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من IN

(1) بين بالترجع أن $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من IN 0.5

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال (II) 2 ج-) 0.5

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها . 0.75



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- عناصر الإجابة -

NR 22

ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ
ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ
ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

تؤخذ بعين الاعتبار مختلف مراحل الحل وتقبل كل طريقة صحيحة تؤدي إلى الحل

التمرين الأول (3 ن)

0.5	(1)	0.5
0.25 ل (S) فلكة (الفلكة التي أحد أقطارها [AB] أو اعتبار $M(x, y, z)$ والتوصل إلى المعادلة $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$) و 0.25 للمركز و 0.25 للشعاع	(2)	0.75
أ- 0.25 ل $d(\Omega, (P)) = \sqrt{3}$ و 0.25 ل $d(\Omega, (P)) < 3$ ب- 0.5	(3)	1
0.5 لتحديد $\overline{OH} \wedge \overline{OB}$ و 0.25 لمساحة المثلث هي $\frac{9}{2}$	(4)	0.75

التمرين الثاني (3 ن)

0.25 ل $ a = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$ و 0.25 للحساب	(1-I)	0.5
0.25	(2)	0.25
أ- 0.25 ل $1 + \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8}$ و 0.25 ل $\sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$ ب- 0.5 ل $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ و 0.25 للمتساوية $a^4 = (2\sqrt{2+\sqrt{2}})^4 i$ ج- 0.5	(3)	1.25
0.25 للكتابة $b - \omega = i(a - \omega)$ و 0.25 للتوصل إلى أن $b = 2i$	(1-II)	0.5
0.25 لترجمة $ z - 2i = 2$ إلى $BM = 2$ أو اعتبار $z = x + iy$ و التوصل إلى المعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$ و 0.25 للمجموعة هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها 2	(2)	0.5

التمرين الثالث (3 ن)

1 للتوصل إلى أن $p(A) = \frac{12}{35}$ و 1 للتوصل إلى أن $p(B) = \frac{1}{7}$	(I)	2
1 للتوصل إلى أن $p(C) = \frac{6}{35}$	(II)	1

المسألة (11 ن)

أ- 0.25 لكل نهاية من النهايتين و 0.25 للتأويل ب- 0.25 للتوصل إلى $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و 0.25 للاستنتاج ج- 0.25 للنهية و 0.25 للتأويل	(1-I)	0.5
أ- 0.75 ب- 0.25 ل $f'(x) \leq 0$ لكل x من $]0,1]$ و 0.25 ل f تناقصية على $]0,1]$ و 0.25 ل $f'(x) \geq 0$ لكل x من $[1,e[\cup]e,+\infty[$ و 0.25 ل f تزايدية على كل من المجالين $[1,e[$ و $]e,+\infty[$ ج- 0.25	(2)	1.75
أ- 0.5 ب- 0.25 ل g متصلة على المجال $[2,2, 2,3]$ و 0.25 ل $g(2,2) \times g(2,3) < 0$ ج- 0.25 لإشارة g على المجال $[1,\alpha]$ و 0.25 ل $x(1 - \ln x) > 0$ لكل x من $[1,\alpha]$	(3)	2
أ- 0.25 ب- 0.5 ج- 0.25 ل g متصلة على المجال $[2,2, 2,3]$ و 0.25 ل $g(2,2) \times g(2,3) < 0$ ج- 0.25 لإشارة g على المجال $[1,\alpha]$ و 0.25 ل $x(1 - \ln x) > 0$ لكل x من $[1,\alpha]$	(1-II)	1
أ- 0.25 ب- 0.5 ج- 0.25 لإشارة g على المجال $[1,\alpha]$ و 0.25 ل $x(1 - \ln x) > 0$ لكل x من $[1,\alpha]$	(2)	1.25
أ- 0.5 لتحديد دالة أصلية و 0.25 للنتيجة ب- 0.5 للمساحة ب cm^2 هي $4 \times \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x)) dx$ و 0.25 للتوصل إلى أن المساحة هي $2(e - 1 - 2 \ln 2) cm^2$	(3)	1.25
أ- 0.5 لتحديد دالة أصلية و 0.25 للنتيجة ب- 0.5 للمساحة ب cm^2 هي $4 \times \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x)) dx$ و 0.25 للتوصل إلى أن المساحة هي $2(e - 1 - 2 \ln 2) cm^2$	(4)	1.5
أ- 0.5 لتحديد دالة أصلية و 0.25 للنتيجة ب- 0.5 للمساحة ب cm^2 هي $4 \times \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x)) dx$ و 0.25 للتوصل إلى أن المساحة هي $2(e - 1 - 2 \ln 2) cm^2$	(1-III)	0.5
أ- 0.5 لتحديد دالة أصلية و 0.25 للنتيجة ب- 0.5 للمساحة ب cm^2 هي $4 \times \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x)) dx$ و 0.25 للتوصل إلى أن المساحة هي $2(e - 1 - 2 \ln 2) cm^2$	(2)	0.5
أ- 0.5 لتحديد دالة أصلية و 0.25 للنتيجة ب- 0.5 للمساحة ب cm^2 هي $4 \times \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x)) dx$ و 0.25 للتوصل إلى أن المساحة هي $2(e - 1 - 2 \ln 2) cm^2$	(3)	0.75

