

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 24

ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ | ⵏ ⵓⵎⵓⵔ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ | ⵏ ⵓⵎⵓⵔ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵏ ⵓⵎⵓⵔ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية.....(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنىات الجبرية.....(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

1- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة التالية: $z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$: (E)

(أ) تحقق أن $(3 - i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E) 0.25

(ب) حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن: $b \neq 0$) 0.5

(ج) تحقق أن: $b = (1 - i\sqrt{3})a$ 0.25

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر.
لتكن A النقطة التي لحقها a و B النقطة التي لحقها b

(أ) حدد العدد العقدي b_1 لحق النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{P}{2}$ 0.5

(ب) بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$ 0.5

(ج) تحقق أن: $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ 0.5

(د) لتكن C نقطة ، لحقها c ، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB و تخالف A و O 0.5

حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{c}{c-a}$

التمرين الثاني: (3 نقط)

ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث: [2015] 1436 ؛ x^{1439}

1- علما أن: $1 = 749' - 2015' - 1051' - 1436'$ ، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما. 0.25

2- ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015

(أ) بين أن d يقسم 1436 0.5

(ب) استنتج أن x و 2015 أوليان فيما بينهما. 0.5

3- (أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $x^{1440} \equiv 1 [5]$ و $x^{1440} \equiv 1 [13]$ و $x^{1440} \equiv 1 [31]$ 0.75

(لاحظ أن: $2015 = 5.13.31$)

(ب) بين أن: $x^{1440} \equiv 1 [65]$ ثم استنتج أن: $x^{1440} \equiv 1 [2015]$ 0.5

4- بين أن : [2015] 1051 ؛ x 0.5

التمرين الثالث: (4 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ حلقة واحدة وحدتها $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ أن $(\square, +)$ زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي x نضع: $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $E = \{M(x) / x \in \mathbb{C}\}$

نزود E بقانون التركيب الداخلي T المعروف بما يلي: $M(x)T M(y) = M(x + y + 1)$ (" x, y)²)

1- ليكن j التطبيق من E نحو E المعروف بما يلي: $j(x) = M(x - 1)$ (" x)²)

(أ) بين أن j تشاكل من $(+, \cdot)$ نحو (E, T) 0.5

(ب) بين أن (E, T) زمرة تبادلية. 0.5

2- (أ) بين أن: $M(x)' M(y) = M(x + y + xy)$ (" x, y)²) 0.5

(ب) استنتج أن E جزء مستقر من $(M_2(\cdot, \cdot), ')$ و أن القانون " \times " تبادلي في E 0.5

(ج) بين أن القانون " \times " توزيعي بالنسبة للقانون " T " في E . 0.5

(د) تحقق أن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في (E, T) و أن I هو العنصر المحايد في $(E, ')$. 0.5

3- (أ) تحقق أن: $M(x)' M\left(\frac{x}{1+x}\right) = I$ (" x)²) 0.25

(ب) بين أن $(E, T, ')$ جسم تبادلي. 0.75

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي:

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = x(1 + \ln^2 x) \quad \text{إذا كان} \quad x > 0$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- (أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 0.25

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

(ج) أحسب $f'(x)$ من أجل $x > 0$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

3- (أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1} . 0.25

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y = x$ 0.25

(ج) أنشئ المنحنى (C) . (نأخذ: $e^{-1} = 0.4$) 0.5

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = e^{-1}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ (" n)²)

1- بين بالترجع أن: $u_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 0.5

2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.5

3- نضع: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ 0.5

(أ) بين أن: $e^{-1} \leq l \leq 1$ 0.25

(ب) حدد قيمة l 0.5

الجزء الثالث: لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

0.25 1- (أ) بين أن الدالة: $H: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة: $h: x \mapsto x \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$

0.5 (ب) بين أن: $\int_1^x t \ln^2(t) dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t) dt$ ($\forall x > 0$)

0.5 (ج) استنتج أن: $F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$ ($\forall x > 0$)

0.25 2- (أ) بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0, +\infty[$

0.5 (ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x) dx$

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $g(0) = \ln 2$ و $g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ إذا كان $x > 0$

0.5 1- (أ) بين أن: $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$ ($\forall t \in [x, 2x]$) ($\forall x > 0$)

0.5 (ب) بين أن: $e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2$ ($\forall x > 0$)

0.25 (ج) استنتج أن الدالة g متصلة على اليمين في 0.

0.75 2- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x > 0$

0.5 3- (أ) بين أن: $-1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}$ ($\forall t > 0$) (يمكنك استعمال مبرهنة التزايديات المنتهية)

0.5 (ب) بين أن: $-1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$ ($\forall x > 0$)

0.5 (ج) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- عناصر الإجابة -

NR 24

ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵓⵎⵎⴰⵔ
ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵓⵎⵎⴰⵔ
ⵏ ⵓⵎⵎⴰⵔ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

التمرين الأول	عناصر الإجابة	سلم التقطيع
1- أ)	التحقق	0.25
ب)	نحصل على : $b = 4$ و $a = 1 + i\sqrt{3}$	0.5
ج)	التحقق	0.25
2- أ)	نحصل على : $b_1 = a(1 - i) = (1 + i\sqrt{3})(1 - i)$	0.5
ب)	التحقق من أن : $b - a = \sqrt{3}(b_1 - a)$	0.5
ج)	نحصل على : $\frac{b}{b - a} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{p}{6}}$ إذن $\arg\left(\frac{b}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$	0.5
د)	النقط O و A و B و C متداورة إذن ، $\frac{b}{b - a}$ ، $\frac{c}{c - a}$ ونحصل على $\arg\left(\frac{c}{c - a}\right) \equiv \frac{p}{6} [p]$ تمنح 0,25 في حالة توصل التلميذ إلى النتيجة : $\arg\left(\frac{c}{c - a}\right) \equiv \frac{p}{6} [2p]$	0.5
التمرين الثاني	عناصر الإجابة	سلم التقطيع
1-	مبرهنة بوزو انطلاقا من الملاحظة أو أية طريقة صحيحة أخرى	0.25
2- أ)		0.5
ب)	الاستنتاج	0.5
3- أ)	تطبيق مبرهنة فيرما ثلاث مرات و تمنح 0.25 عن كل تطبيق	0.75
ب)	5 و 13 أوليين فيما بينهما 0.25	0.5

	0.25.....	31 و 65 أوليين فيما بينهما	
0.5	1436 [2015] ؛ x^{1439} و $1436' 1051 - 2015' 749 = 1$	توظيف العلاقتين:	-4
سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الثالث	
0.5	التشاكل.....0.5ن	(أ) 1-	
0.5	$E = (,)^j$0.25	(ب)	
	صورة زمرة تبادلية بتشاكل.....0.25		
0.5	المتساوية	(أ) 2-	
0.5	الاستنتاج.....0.25	(ب)	
	التبادلية.....0.25		
0.5	التوزيعية	(ج)	
0.5	$M(-1)$ هو العنصر المحايد0.25ن	(د)	
	I هو العنصر المحايد.....0.25ن		
0.25	المتساوية	(أ) 3-	
0.75	استنتاج من السؤال 3- (أ) أن كل عنصر من E يخالف $M(-1)$ يقبل مماثل0.25	(ب)	
	باقي الخاصيات0.5		
سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الرابع	
0.5	حساب النهايتين.....0.25ن	الجزء الأول	1-
	التأويل المبياني.....0.25ن		
0.25		(أ) 2-	
0.5	حساب النهاية.....0.25	(ب)	
	التأويل المبياني.....0.25		
0.5	حساب المشتقة.....0.25	(ج)	
	الرتابة.....0.25		
0.25	نقطة الإنعطاف	(أ) 3-	
0.25		(ب)	

0.5	يتم الأخذ بعين الاعتبار نقطة الإنعطاف و الفرع اللا نهائي و نصف المماس	(ج)	
0.5		-1	الجزء الثاني
0.5	الرتابة.....0.25ن	-2	
	التقارب..... 0.25 ن		
0.25		(أ -3)	
0.5	$l = 1$	(ب)	
0.25		(أ -1)	الجزء الثالث
0.5		(ب)	
0.5		(ج)	
0.25		(أ -2)	
0.5	$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\frac{3}{4}$0.25ن $\int_0^1 f(x) dx = -F(0) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{3}{4}$0.25ن لأن الدالة F متصلة على اليمين في 0	(ب)	
عناصر الإجابة		التمرين الخامس	
0.5		(أ -1)	
0.5		(ب)	
0.25		(ج)	
0.75	قابلية الاشتقاق.....0.25ن $g'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$0.5ن	-2	
0.5	تطبيق مبرهنة التزايدت المنتهية $(\forall t > 0) \quad (\exists s \in]0, t[) : \frac{e^{-t} - 1}{t} = -e^{-s}$ ثم تأطير e^{-s} كما تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(أ -3)	

0.5	توظيف نتيجة السؤال 3-أ)	(ب)
0.5	<p>0.25..... $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = -1$</p> <p>0.25..... وتأويل النتيجة $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1$</p>	(ج)