

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

## الدورة الاستدراكية 2013

### الموضوع

RS24



4	مدة الإختبار	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بحساب الاحتمالات.....(3ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(8.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(1.75ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

**التمرين الأول : (3.5 نقط) (الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما)**

I - لكل  $x$  و  $y$  من المجال  $G = ]1, 2[$  نضع:  $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$

0.5 1- بين أن  $*$  قانون تركيب داخلي في المجموعة  $G$

2- نذكر أن  $(\square_+, \times)$  زمرة تبادلية.

نعتبر التطبيق  $f$  من  $\square_+^*$  نحو  $G$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

0.75 (أ) بين أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\square_+^*, \times)$  نحو  $(G, *)$

0.5 (ب) استنتج أن  $(G, *)$  زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد .

II - نذكر أن  $(M_3(\square), +, \times)$  حلقة واحدة صفرها  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ووحدتها  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن  $(M_3(\square), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و نضع:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0.5 1- (أ) تحقق أن:  $A^3 = O$  ثم استنتج أن  $A$  قاسم للصفر في الحلقة  $(M_3(\square), +, \times)$ .

0.5 (ب) تحقق أن:  $(A^2 - A + I)(A + I) = I$  ثم استنتج أن المصفوفة  $A + I$  تقبل مقلوبا في  $(M_3(\square), +, \times)$  يتم تحديده.

0.75 2- لكل  $a$  و  $b$  من  $\square$  نضع  $M(a, b) = aI + bA$  و نعتبر المجموعة  $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \square^2\}$  بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له.

**التمرين الثاني: (3 ن)**

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I - نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال أربع كرات من الصندوق ونعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق.

1 (1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$

0.5 (2) احسب  $E(X)$  الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$

II - نقوم بالتجربة العشوائية التالية في 3 مراحل كالاتي:

المرحلة 1: نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق.

المرحلة 2: نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى.

المرحلة 3: نسحب بالتتابع وبدون إحلال 3 كرات من الكيس الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية. نعتبر الأحداث التالية:

N "الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء"  
 R "الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء"  
 E "جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء"

(1) بين أن :  $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$  0.5

(2) احسب  $p(E)$  0.5

(3) احسب احتمال الحدث  $R$  علما أن الحدث  $E$  قد تحقق. 0.5

### التمرين الثالث: (3.5 ن)

I - ليكن  $a$  عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة  $\square$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$  :  $(E)$

(1) بين أن:  $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$  و  $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$  هما حللي المعادلة  $(E)$  0.5

(2) نأخذ :  $a = e^{i\theta}$  حيث  $0 < \theta < \pi$

أ- بين أن:  $a - 1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$  0.5

ب- استنتج الشكل المثلثي لكل حل من الحلين  $z_1$  و  $z_2$  1

II - المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و منظم و مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

نفترض أن:  $\text{Re}(a) < 0$  و نعتبر النقط  $A(a)$  و  $B(-i)$  و  $C(i)$  و  $B'(1)$

(1) حدد لحقي كل من  $J$  و  $K$  منتصفي  $[AC]$  و  $[AB]$  على التوالي بدلالة  $a$  0.5

(2) ليكن  $r_1$  الدوران الذي مركزه  $J$  وقياس زاويته  $\frac{\pi}{2}$  و  $r_2$  الدوران الذي مركزه  $K$  وقياس زاويته  $\frac{\pi}{2}$

نضع  $C' = r_1(C)$  و  $A' = r_2(A)$  و ليكن  $c'$  لحق  $C'$  و  $a'$  لحق  $A'$

بين أن:  $a' = z_1$  و  $c' = z_2$  0.5

(3) أحسب  $\frac{a' - c'}{a - 1}$  ثم استنتج أن المستقيم  $(AB')$  ارتفاع في المثلث  $A'B'C'$  0.5

### التمرين الرابع: (8.25 ن)

(1) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}$   
 $f(0) = 1$

أ- بين أن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  0.5

ب - ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0$ ) 0.5

ج - بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  وأن:  $f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$  ;  $(\forall x > 0)$  0.5

د - ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  0.5

(2) لتكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

وليكن  $(C_F)$  المنحنى الممثل للدالة  $F$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أ - حدد دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$  على المجال  $[e, +\infty[$  0.25

ب - بين أن :  $t \ln t \leq \sqrt{1+t^2} \ln^2 t \leq \sqrt{2} t \ln t$  ;  $(\forall t \geq e)$  0.5

ج - بين أن :  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2} \ln^2 t} dt \leq \ln(\ln x)$  ;  $(\forall x \geq e)$  0.75

د- استنتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  وأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$  0.5

هـ - بين أن  $(C_F)$  يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما. 0.5

ز - أنشئ  $(C_F)$  ( نأخذ  $F(1) \leq 0,5$  و  $F\left(\frac{1}{e}\right) \leq 0,4$  ) 1

(3) لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$  نضع :  $\varphi(x) = x - F(x)$

أ - بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$  ثم ادرس تغيرات الدالة  $\varphi$  0.75

ب - بين أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ، المعادلة  $\varphi(x) = n$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في المجال  $[0, +\infty[$  0.5

ج - بين أن :  $\alpha_n \geq n$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$  ثم احسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  0.5

(4) أ- بين أن :  $0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$  ;  $(\forall n \geq 1)$  ( يمكنك استعمال مبرهنة التزايد المتناهية ) 0.5

ب - احسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$  0.5

### التمرين الخامس: (1.75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  نضع :  $u_n = \left( \frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$  و  $v_n = \ln(u_n)$

(1) تحقق أن :  $v_n = n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$  ;  $(\forall n \geq 1)$  0.25

(2) باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية ، بين أن :  $v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$  ;  $(\forall n \geq 1)(\exists c \in ]n, n+1[)$  0.5

(3) بين أن :  $\frac{-n^2}{(1+n^2) \arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2) \arctan(n+1)}$  ;  $(\forall n \geq 1)$  0.5

(4) احسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  0.5

انتهى

# أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

## التمرين الأول

1

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع  $\alpha = (x-1)(y-1)$  و  $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y \in G$

يعني نريد أن نبين أن :  $\forall (x,y) \in G^2 ; 1 < x * y < 2$  من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$  و  $x * y < 2$  يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall (x,y) \in G^2 ; \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} > 0 \text{ و } \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} < 2$$

يعني :  $\forall (x,y) \in G^2 ; \alpha > 0$  و  $\beta > 0$  و  $\alpha + \beta > 0$

إلى العمل : ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من المجال  $G = ]1,2[$

إذن :  $1 < x < 2$  و  $1 < y < 2$

ومنه :  $0 < (x-1) < 1$  و  $0 < (y-1) < 1$

أي :  $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية  $(x-1)(y-1)$  كمية موجبة قطعاً .

يعني :  $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك :  $1 < x < 2$  و  $1 < y < 2$

إذن :  $-1 < (x-2) < 0$  و  $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن :  $(x-2)$  و  $(y-2)$  كميتان سالبتان قطعاً .

إذن : جداهما كمية موجبة قطعاً . يعني :  $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة :  $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية  $(x-2)(y-2)$

نحصل على :  $2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2) > 0$

$> (x-1)(y-1) + (x-1)(y-2)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً التالية :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

نحصل على :  $\frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y < 2$  (1)

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة :  $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية  $(x-2)(y-2)$

نجد :  $2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية  $2(x-1)(y-1)$

نجد :  $2(x-1)(y-1) + 2(x-2)(y-2) > 0$

$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$

يعني :  $2[(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)] > 0$

$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

$$2 > \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} : \text{ نجد}$$

يعني :  $\forall (x,y) \in G^2 ; 2 > x * y$  (2)

من النتيجة (1) و (2) نستنتج أن :  $\forall (x,y) \in G^2 ; 1 < x * y < 2$

يعني :  $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y \in G$

و بالتالي \* قانون تركيب داخلي في المجموعة  $G$  .

2

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$$

$$x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$$

لدينا  $f$  تطبيق معرف بما يلي :

لكي يكون التطبيق  $f$  تشاكلاً يكفي أن نتحقق من أن :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; f(x \times y) = f(x) * f(y)$$

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من المجموعة  $\mathbb{R}_+^*$  .

$$f(x) * f(y) = \left( \frac{x+2}{x+1} \right) * \left( \frac{y+2}{y+1} \right) \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{2 \left( \frac{x+2}{x+1} - 1 \right) \left( \frac{y+2}{y+1} - 1 \right) + \left( \frac{x+2}{x+1} - 2 \right) \left( \frac{y+2}{y+1} - 2 \right)}{\left( \frac{x+2}{x+1} - 1 \right) \left( \frac{y+2}{y+1} - 1 \right) + \left( \frac{x+2}{x+1} - 2 \right) \left( \frac{y+2}{y+1} - 2 \right)}$$

$$= \frac{\left( \frac{2}{x+1} \right) \left( \frac{1}{y+1} \right) + \left( \frac{-x}{x+1} \right) \left( \frac{-y}{y+1} \right)}{\left( \frac{1}{x+1} \right) \left( \frac{1}{y+1} \right) + \left( \frac{-x}{x+1} \right) \left( \frac{-y}{y+1} \right)}$$

$$= \frac{xy+2}{xy+1} = f(x \times y)$$

إذن :  $f(x) * f(y) = f(x \times y)$

إذن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  نحو  $(G, *)$  .

لكي يكون  $f$  تقابلاً يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \in G), (\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = y$$

أو بتعبير أسهل : يكون  $f$  تطبيقاً تقابلياً عندما يكون للمعادلة  $f(x) = y$

ذات المجهول  $x$  حل وحيد في  $\mathbb{R}_+^*$  مرتبط بـ  $y$  .

ليكن  $y$  عنصراً من المجموعة  $G$  و لنحل في  $\mathbb{R}_+^*$  المعادلة  $f(x) = y$  .

$$\frac{x+2}{x+1} = y \text{ هذه المعادلة تصبح :}$$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم  $(x+1)$

$$(x+2) = y(x+1)$$

يعني :  $x+2 = xy + y$  يعني :  $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم  $\frac{1}{1-y}$

$$x = \frac{y-2}{1-y} \text{ نجد :}$$

نلاحظ أن التعبير  $\frac{y-2}{1-y}$  وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

$$x = \frac{y'-2}{1-y'} \text{ أي وجود عدد آخر } y' \text{ يحقق}$$

$$\frac{y-2}{1-y} = \frac{y'-2}{1-y'}$$

$$\text{أي : } y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$$

لدينا :  $A^3 = A \times A \times A$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

إذن :  $A^3 = O$

لدينا المصفوفة  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  هي العنصر المحايد لـ  $+$  في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن  $A \neq O$

و لدينا :  $A^3 = A \times A^2 = O$

مع :  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$

إذن نستنتج أن  $A \neq O$  و توجد مصفوفة و هي  $A^2$  تخالف  $O$

و تحقق  $A \times A^2 = A^2 \times A = O$

إذن حسب التذكير : المصفوفة  $A$  قاسم للصفر في الحلقة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

$$(A^2 - A + I) \times (A + I) = A^3 + A^2 - A^2 - A + A + I$$

$$= A^3 + I = O + I = I$$

و بما أن  $A$  و  $I$  مصفوفتان من  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة  $(A^2 - A + I)$  عنصر من  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة تبادلية وحدتها  $I$  إذن  $\times$  تبادلي في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني :  $(A + I) \times (A^2 - A + I) = (A^2 - A + I) \times (A + I) = I$

و بالتالي  $(A + I)$  مصفوفة قابلة للقلب في  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

و مقلوبها هو المصفوفة  $(A^2 - A + I)$ .

و لدينا :  $(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$(A^2 - A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

خلاصة :

مقلوب المصفوفة  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  هي المصفوفة  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

أي :  $(y - y') = 0$  أي :  $y = y'$

و بالتالي فإن التعبير  $\frac{y-2}{1-y}$  وحيد .

إذن المعادلة  $f(x) = y$  تقبل حلا وحيدا و هو  $\frac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى  $\mathbb{R}_+$ .

يعني أنه يكفي أن نبين أن :  $\frac{y-2}{1-y} > 0$  ;  $y \in ]1, 2[$  ;

لدينا :  $1 < y < 2$  إذن :  $-1 < (y - 2) < 0$

و لدينا :  $1 < y < 2$  إذن :  $-1 < (1 - y) < 0$

إذن  $(y - 2)$  و  $(1 - y)$  كميتان سالبتان قطعا .

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني :  $\frac{y-2}{1-y} > 0$  ;  $y \in ]1, 2[$  ;

إذن :  $f(x) = y$  :  $(\exists ! x = \frac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+)$  ;  $(\forall y \in G)$  ,

يعني أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}_+$  نحو  $G$ .

خلاصة :  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}_+, \times)$  نحو  $(G, *)$ .



نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الانطلاق و يحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي  $f$  من مجموعة  $(E, *)$  نحو  $(F, \cdot)$  فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة  $(F, \cdot)$  انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة  $(E, *)$  عن طريق التطبيق  $f$ .

ومن ثم :

إذا كان  $*$  تبادلي أو تجميعي في  $E$  فإن  $\cdot$  تبادلي أو تجميعي في  $F$ .

إذا كان  $e$  هو العنصر المحايد للقانون  $*$  في  $E$  فإن  $f(e)$  هو العنصر

المحايد للقانون  $\cdot$  في  $F$ .

إذا كان  $x'$  هو مماتل  $x$  بالنسبة للقانون  $*$  في  $E$  فإن  $f(x')$  هو مماتل

$f(x)$  بالنسبة للقانون  $\cdot$  في  $F$

في هذا السؤال لدينا  $f$  تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{R}_+, \times) \mapsto (G, *)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة  $(G, *)$  انطلاقا من البنية الجبرية

لـ  $(\mathbb{R}_+, \times)$  عن طريق التطبيق  $f$ .

و بما أن  $(\mathbb{R}_+, \times)$  زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن  $(G, *)$  زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي  $f(1)$

أي العدد  $\frac{3}{2}$ . و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$(\forall x \in G) ; x * \frac{3}{2} = \frac{3}{2} * x = x$$



تذكير : لتكن  $(E, *, \cdot)$  حلقة و  $e$  هو العنصر المحايد للقانون  $*$  في  $E$ .

نقول بأن عنصرا  $x$  من  $E$  قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

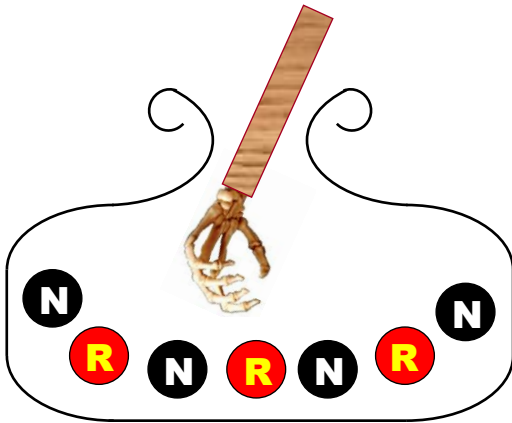
$$\begin{cases} x \neq e \\ \exists y \in E \setminus \{e\} ; x \cdot y = y \cdot x = e \end{cases}$$

نعتبر الحلقة الواحدة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$  التي صفرها  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## التمرين الثاني

1



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتل  $7^4$  نتيجة ممكنة .  
يعني :  $card(\Omega) = 7^4 = 2401$

بحيث :  $\Omega$  هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

$X$  هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني :  $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  سيكون إذن التطبيق  $P_X$  المعروف على المجموعة  $\{0,1,2,3,4\}$  نحو المجال  $[0,1]$  بما يلي :

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

$$k \mapsto P_X(k) = p[X = k]$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة  $k$  من قيم المتغير العشوائي  $X$  .

**لنحسب :  $p[X = 0]$**

الحدث  $[X = 0]$  هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد  $3^4$  إمكانية لسحب الكرات الأربع .

$$p[X = 0] = \frac{3^4}{7^4} = \frac{81}{2401} \quad \text{إذن :}$$

**لنحسب :  $p[X = 1]$**

الحدث  $[X = 1]$  هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :

$4^1$  إمكانية لسحب الكرة السوداء

$C_4^1$  إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء

$3^3$  إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء

$$p[X = 1] = \frac{4^1 \times C_4^1 \times 3^3}{7^4} = \frac{432}{2401} \quad \text{إذن :}$$

**لنحسب :  $p[X = 2]$**

الحدث  $[X = 2]$  هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين . و من أجل ذلك لدينا :

$4^2$  إمكانية لسحب الكرتين السوداءوين .

$C_4^2$  إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداءوين .

$3^2$  إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .

$$p[X = 2] = \frac{4^2 \times C_4^2 \times 3^2}{7^4} = \frac{864}{2401} \quad \text{إذن :}$$

لكي يكون  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$(\forall x, y \in E) \quad ; \quad \begin{cases} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \\ 1 \cdot x = x \end{cases}$$

بحيث  $\times$  هو الضرب في  $\mathbb{R}$

و  $+$  هو جمع المصفوفات في  $M_3(\mathbb{R})$

و  $\cdot$  هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .

في البداية نبين أن  $(E, +)$  زمرة جزئية من الزمرة  $(M_3(\mathbb{R}), +)$  لدينا  $E$  جزء غير فارغ من  $M_3(\mathbb{R})$

لتكن  $M(a, b)$  و  $M(c, d)$  مصفوفتان من  $E$  .

$$\begin{aligned} M(a, b) - M(c, d) &= aI + bA - cI - dA \\ &= (a - c)I + (b - d)A \\ &= M(a - c, b - d) \in E \end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

إذن  $(E, +)$  زمرة جزئية من الزمرة  $(M_3(\mathbb{R}), +)$

و بما أن  $+$  تبادلي في  $M_3(\mathbb{R})$  فإن  $(E, +)$  زمرة تبادلية (1)

نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون  $E$  جزء من الفضاء المتجهي

الحقيقي  $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$  و كون  $E$  جزء مستقر بالنسبة للقانون  $(\cdot)$

و ذلك لأن  $\forall M(a, b) \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} ; \alpha \cdot M(a, b) = M(\alpha a, \alpha b) \in E$

$$(2) \quad (\forall A, B \in E) \quad ; \quad \begin{cases} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \\ (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\ (\alpha \times \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) \\ 1 \cdot A = A \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي نعتبر الأسرة  $(I, A)$  .

من الواضح أن الأسرة  $(I, A)$  مولدة للفضاء المتجهي  $(E, +, \cdot)$  .

لأن :  $\forall M(a, b) \in E ; M(a, b) = aI + bA$

يعني أن كل مصفوفة من  $E$  تكتب على شكل تآلفية خطية للمصفوفتين  $I$  و  $A$

لنبين الآن أن الأسرة  $(I, A)$  حرة .

من أجل ذلك نطلق من تآلفية خطية منعدمة للمصفوفتين  $I$  و  $A$  .

$$a \cdot I + b \cdot A = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3b & 2b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3b & 2b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

إذن الأسرة  $(I, A)$  حرة .

و بما أن  $(I, A)$  أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي  $E$  فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي



يعني :  $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$   
 $= p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3) \times p(N)$   
 $= \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \frac{12}{55}$



$p(E) = p(E \cap N) + p(E \cap R)$   
 $= \frac{12}{55} + p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)$   
 $= \frac{12}{55} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}$   
 $= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \frac{87}{385}$



**نحسب  $p_E(R)$**   
 $p_E(R) = \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E) \times p(R)}{p(E)}$   
 $= \frac{p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)}{p(E)}$   
 $= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \frac{1}{29}$



لنحل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية :  
 $(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

لدينا :  $\Delta = 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2$   
 $= -4(a-1)^2$   
 $= (2i(a-1))^2$   
 إذن المعادلة  $(E)$  تقبل حلين عقديين  $z_1$  و  $z_2$  .

$$z_1 = \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$



لدينا  $a = e^{i\theta}$  مع  $0 < \theta < \pi$  إذن :  $(a-1) = e^{i\theta} - 1$   
 $(a-1) = e^{i\theta} - 1 = \cos \theta + i \sin \theta - 1$   
 $= \cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta)$

هدفنا هو البحث عن  $r$  و  $\varphi$  بحيث :  $(a-1) = r e^{i\varphi}$   
 يعني :  $\cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$

أي :  $\begin{cases} \cos(\theta) - 1 = r \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) = r \sin(\varphi) \end{cases}$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد :  $(\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$

**نحسب :  $p[X=3]$**

الحدث  $[X=3]$  هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :  
 $3^1$  إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

$C_4^1$  إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

$4^3$  إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

إذن :  $p[X=3] = \frac{3^1 \times C_4^1 \times 4^3}{7^4} = \frac{768}{2401}$

**نحسب :  $p[X=4]$**

الحدث  $[X=4]$  هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

إذن :  $p[X=4] = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  هو التطبيق  $P_X$  المعروف بما يلي

$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$

0	$\mapsto P_X(0) = \frac{81}{2401}$
1	$\mapsto P_X(1) = \frac{432}{2401}$
2	$\mapsto P_X(2) = \frac{864}{2401}$
3	$\mapsto P_X(3) = \frac{768}{2401}$
4	$\mapsto P_X(4) = \frac{256}{2401}$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\frac{81}{2401} + \frac{432}{2401} + \frac{864}{2401} + \frac{768}{2401} + \frac{256}{2401} = 1$$



$E(X) = \sum_{k=0}^4 k \cdot p[X=k]$   
 $= 0 \left( \frac{81}{2401} \right) + 1 \left( \frac{432}{2401} \right) + 2 \left( \frac{864}{2401} \right) + 3 \left( \frac{768}{2401} \right) + 4 \left( \frac{256}{2401} \right)$   
 $= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$



لدينا :  $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث  $E$  هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحب متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزئ الحدث  $E$  في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

- $E_1$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى
- $E_2$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية
- $E_3$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب :  $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

و منه :  $p_N(E) = p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3)$



2

II

لدينا  $r_1$  دوران مركزه  $J$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

و لدينا  $r_1(C) = C'$  إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(C') - aff(J)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(C) - aff(J))$$

$$\Leftrightarrow \left( c' - \frac{a+i}{2} \right) = i \left( i - \frac{a+i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1 - ia + a + i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا  $r_2$  دوران مركزه  $K$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$

و لدينا  $r_2(A) = A'$  إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(A') - aff(K)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A) - aff(K))$$

$$\Leftrightarrow \left( a' - \frac{a-i}{2} \right) = i \left( a - \frac{a-i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia - 1 + a - i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

إذن :  $c' = z_2$  و  $a' = z_1$

3

II

$$\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2} \times \frac{1}{(a-1)}$$

$$= \frac{i(a-1)}{(a-1)} = i$$

$$\arg\left(\frac{a' - c'}{a - 1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ و منه : } \frac{a' - c'}{a - 1} = i$$

$$\left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'A'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ يعني :}$$

و هذا يعني أن المستقيم  $(AB')$  عمودي على المستقيم  $(A'C')$ .

أي أن المستقيم  $(AB')$  ارتفاع في المثلث  $A'B'C'$

لأن  $B' \in (AB')$  و  $(A'C') \perp (AB')$ .

التمرين الرابع

1

I

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0^+)^2}} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ إذن :}$$

و هذا يعني أن الدالة  $f$  متصلة على يمين الصفر .

لنحسب الآن نهاية  $f$  بجوار  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (+\infty)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ إذن :}$$

$$\text{يعني : } \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + \sin^2 \theta = r^2$$

$$\text{يعني : } 2(1 - \cos \theta) = r^2$$

$$\text{يعني : } 2 \left( 1 - \left( 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - 1 \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 2 \left( 2 - 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 4 \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 4 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } r > 0 \text{ و } r = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

يكفي الآن تحديد قيمة  $\varphi$  . و نطلق من الكتابة  $\sin \theta = r \sin \varphi$

$$\text{يعني : } \sin \left( 2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{يعني : } \frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{يعني : } \varphi \equiv \frac{\theta - \pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{إذن : } (a - 1) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \left( \frac{\theta - \pi}{2} \right)}$$

2

I

ب

في البداية لدينا :

$$(1 + i) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1 - i) = \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{إذن : } z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

1

II

لدينا  $J$  هي منتصف القطعة  $[AC]$ .

$$\text{إذن : } aff(J) = \frac{aff(A) + aff(C)}{2} = \frac{a+i}{2}$$

و لدينا  $K$  هي منتصف القطعة  $[AB]$ .

$$\text{إذن : } aff(K) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} = \frac{a-i}{2}$$

لدينا :  $\psi(x) = x \ln x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[ \subset \mathbb{R}$

إذن :  $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

إذن الدالة  $f = \varphi \circ \psi$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$ .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0, +\infty[$  . لدينا :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}-1} (1 + (x \ln x)^2)'$$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(x \ln x)'$$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(1 + \ln x)$$

$$= \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

نلاحظ في البداية أن :  $(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}} > 0$  ;  $(\forall x > 0)$  ;

إذن إشارة  $f'(x)$  تتعلق بإشارتي الكميتين  $(\ln x)$  و  $(1 + \ln x)$  .  
الكمية  $\ln x$  تنعدم في 1 و الكمية  $1 + \ln x$  تنعدم في  $\frac{1}{e}$  .  
نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة  $f$  كما يلي :

$x$	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$1 + \ln x$		-	0	+
$f'(x)$		-	0	-
$f$	1	$f(\frac{1}{e})$	1	0

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{(\ln x)} dx$$

$$= \ln(|\ln x|) + c ; c \in \mathbb{R}$$

بما أن :  $\ln x \geq 1$  فإن  $x \in [e; +\infty[$

نأخذ الثابتة  $c$  تساوي 0 نجد أن الدالة  $x \rightarrow \ln(\ln x)$  دالة أصلية

للدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$  على المجال  $[e; +\infty[$  .

و أشير إلى أن  $x \rightarrow \ln(\ln x)$  دالة معرفة ومتصلة على  $]1; +\infty[$

إذن فهي متصلة على  $[e; +\infty[$  لأن :  $[e; +\infty[ \subset ]1; +\infty[$  .

1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة  $f$  على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق  $(1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})$  نجد :

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - 1 - (x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{-(x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x (\ln x)^2) \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= (-0) \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (0)^2} (1 + \sqrt{1 + (0)^2})} \right) = (0) \left( \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$$

و هذا يعني أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين الصفر و  $f'_d(0) = 0$  .

1 ج

تذكير : إذا كانت  $g$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$  .

و كانت  $f$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $J$  .

إذن تكون الدالة  $f \circ g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  إذا كان :  $g(I) \subseteq J$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} ; (\forall x \in \mathbb{R})$$

ونضع :  $\psi(x) = x \ln x ; \forall x \in ]0; +\infty[$

إذن :  $f(x) = \varphi \circ \psi(x) ; \forall x \in ]0; +\infty[$

لدينا  $\psi$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$

و  $\varphi$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .

إذن تكون الدالة  $\varphi \circ \psi$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

إذا كان :  $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0, +\infty[$  .

و هذا يعني حسب خاصية التآطير و النهايات أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_e^x f(t) dt = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{constante réelle}) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad \text{إذن :}$$

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التآطير في العدد الموجب قطعاً  $x$  نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) < \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) : \text{لنحسب النهاية :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) \times \frac{\ln x}{\ln x} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \right) \times \frac{\ln x}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y = \ln x}} \frac{\ln y}{y} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) = 0 \quad \text{إذن :}$$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} \right) < \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$x \rightarrow +\infty \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$

$0 \quad \quad \quad 0$

و منه حسب خاصية النهايات و التآطير نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt = 0$$

## 2 ب

ليكن  $t$  عنصراً من المجال  $[e, +\infty[$ .

ننتقل من المتفاوتة  $0 < 1$  و نضيف إلى طرفيها الكمية  $(t \ln t)^2$

$$\text{نجد : } (t \ln t)^2 < 1 + (t \ln t)^2$$

$$\text{و منه : } \sqrt{(t \ln t)^2} < \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

$$(1) \quad (\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

و لدينا كذلك  $t \geq e$  إذن  $\ln t \geq 1$ .

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفاً بطرف نجد :  $t \ln t \geq e > 1$

نحتفظ بالمتفاوتة :  $(\forall t \geq e) ; t \ln t > 1$

التي تصبح :  $(\forall t \geq e) ; (t \ln t)^2 > 1$

نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية  $(t \ln t)^2$

$$\text{نجد : } (\forall t \geq e) ; 2(t \ln t)^2 > 1 + (t \ln t)^2$$

$$(2) \quad (\forall t \geq e) ; \sqrt{2} t \ln t > \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$$

## 2 ج

من خلال آخر تآطير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{t \ln t} \right) < \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} < \frac{1}{t \ln t}$$

ليكن  $x$  عدداً حقيقياً بحيث  $x \geq e$ .

ندخل التكامل  $\int_e^x dt$  على هذا التآطير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_e^x \left( \frac{1}{t \ln t} \right) dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\ln(\ln t)]_e^x < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < [\ln(\ln t)]_e^x \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x) \quad \text{يعني :}$$

## 2 د

لدينا حسب آخر تآطير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

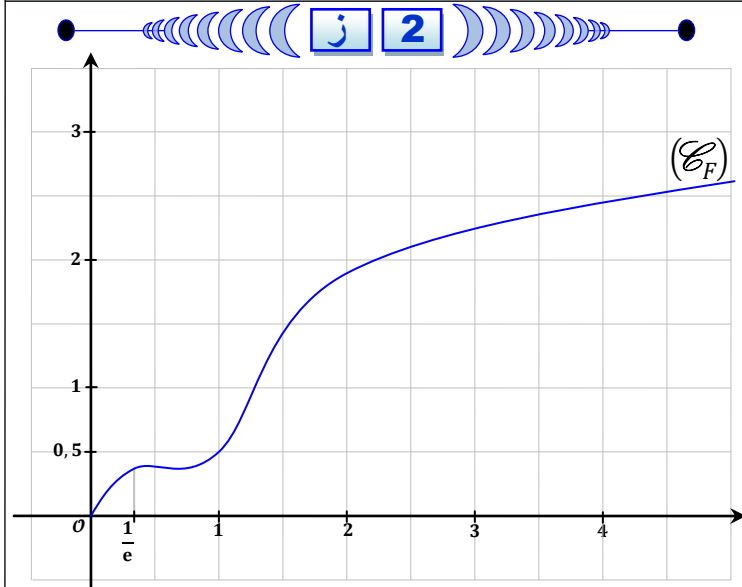
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

$x \rightarrow +\infty \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$

$+\infty \quad \quad \quad +\infty$



نستعمل النهاية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$  لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - F(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{F(x)}{x}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$

من جهة ثانية لدينا  $\varphi$  معرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $\varphi(x) = x - F(x)$  ولدينا كذلك  $F$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$  بحيث :  $F'(x) = f(x)$

إذن  $\varphi$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  ولدينا :  $\varphi'(x) = 1 - F'(x) = 1 - f(x)$  نلاحظ أنه إذا كان  $x = 0$  فإن  $f(x) = 1$  يعني :  $1 - f(x) = 0$  أي :  $\varphi'(x) = 0$

إذا كان  $0 \leq x \leq \frac{1}{e}$  فإن  $f(0) \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن  $f$  دالة تناقصية على المجال  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$  .  
إذن :  $1 \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$  .  
إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$  .

إذا كان  $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$  فإن  $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq f(1)$

لأن  $f$  دالة تزايدية على المجال  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$  .  
إذن  $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq 1$  يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$  .  
إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$  .

إذا كان  $x \geq 1$  فإن  $f(x) \leq f(1)$  .  
لأن  $f$  دالة تناقصية على المجال  $[1, +\infty[$  .

إذن :  $f(x) \leq 1$  يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$  .  
إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $[1, +\infty[$  .

خلاصة :  $\varphi$  دالة تزايدية قطعاً على المجال  $[0, +\infty[$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{لدينا :} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \left( \frac{1}{+\infty} \right) \times (\text{constante réelle}) + 0 = 0 \end{aligned}$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$  (2)

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى  $(E_F)$  يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل .

2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى  $(E_F)$  ندرس إشارة المشتقة الثانية  $F''(x)$  .

لدينا  $F$  دالة عددية معرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  .  
إذن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $[0, +\infty[$  .

أو بتعبير الاشتقاق نكتب :  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, +\infty[$  .  
و بما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  فإن الدالة  $F'$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  .

$$\text{ولدينا : } (\forall x \in ]0, +\infty[) ; F''(x) = f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^2}$$




إذن تنعدم الدالة  $F''(x)$  على المجال  $]0, +\infty[$  عندما تنعدم الكميتين  $(\ln x)$  و  $(1 + \ln x)$  .

أي تنعدم الدالة  $F''(x)$  إذا كان  $x = 1$  أو  $x = \frac{1}{e}$  .

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين وذلك حسب جدول الإشارة السابق .  
و بالتالي  $(E_F)$  يقبل نقطتي انعطاف أفصولهما على التوالي  $\frac{1}{e}$  و 1 .

و يمكن أن نضيف جدول التقعر للمنحنى  $(E_F)$  و ذلك انطلاقاً من جدول إشارة  $f'(x)$  .

لأن :  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; F''(x) = f'(x)$

$x$	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$	
$F''(x)$	−	0	+	0	−
$(\mathcal{E}_F)$	 <u>مقعر</u>	نقطة انعطاف 	 <u>محدب</u>	نقطة انعطاف 	 <u>مقعر</u>

(\*)  $1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$  ومنه :

بما أن  $\alpha_n \geq n \geq 1$  فإن  $\alpha_n \in [1; +\infty[$  و  $n \in [1; +\infty[$  لدينا  $\alpha_n \geq n$  إذن  $f(\alpha_n) \leq f(n)$  لأن  $f$  تناقصية على  $[1; +\infty[$  إذن بالرجوع إلى التأيير (\*) نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

(1)  $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)$  يعني :

في المرحلة الثانية نطبق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة  $F$  في  $[0; n]$  إذن يوجد عنصر  $\varepsilon$  من  $]0; n[$  بحيث :

$$\frac{F(n) - F(0)}{n - 0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

يعني :  $0 < \varepsilon < n$  و  $\frac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا :  $0 < \varepsilon < n$  إذن :  $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني :  $0 < 1 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$  أي :

(2)  $-f(n) < \frac{-F(n)}{n} < 0$  يعني :  $0 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$  أي :

نجمع التأييرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)$$

ما يهمنا في هذا التأيير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

أي :  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)$

(3)  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$  الذي يصبح :

(4)  $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}$  و من التأيير (1) نستنتج أن :

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

(\*)  $(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$

#### 4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

إذن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F(n)}{n} + f(n) \right) = 0$

و منه فإن التأيير (\*) يُصبح :

$$(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

#### 3 ب

لدينا  $\varphi$  دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال  $[0, +\infty[$  .

إذن  $\varphi$  تقابل من المجال  $[0, +\infty[$  نحو صورته  $\varphi([0, +\infty[)$  .

و لدينا :  $\varphi([0, +\infty[) = \left[ \varphi(0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right] = [0, +\infty[$

إذن  $\varphi$  تقابل من المجال  $[0, +\infty[$  نحو المجال  $[0, +\infty[$  .

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall y \in [0, +\infty[) , (\exists ! x \in [0, +\infty[) ; \varphi(x) = y$$

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا .

إذن :  $n \in [0, +\infty[$  لأن  $\mathbb{N} \subset [0, +\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ  $\alpha_n$  في المجال  $[0, +\infty[$

بحيث :  $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة  $\varphi(x) = n$  ذات المجهول  $x$  تقبل حلا وحيدا

و هو  $\alpha_n$  في المجال  $[0, +\infty[$  و ذلك كيفما كان  $n \in \mathbb{N}$  .

أو بتعبير أخير :  $\varphi(\alpha_n) = n ; (\exists ! \alpha_n \geq 0) ; (\forall n \in \mathbb{N})$

#### 3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن :  $\alpha_n \geq 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن  $F(\alpha_n) \geq F(0)$  لأن  $F$  تزايدية على المجال  $[0, +\infty[$  .

يعني أن :  $F(\alpha_n) \geq 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$  (1)

و نعلم أن :  $\varphi(x) = x - F(x) ; (\forall x \geq 0)$

إذن :  $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$  لأن  $\alpha_n \geq 0$

يعني :  $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$  (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على :  $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني :  $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن :  $\varphi(\alpha_n) = n ; (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن :  $\alpha_n \geq n ; (\forall n \in \mathbb{N})$

نلاحظ أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$  إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = +\infty$

#### 4 أ

ليكن  $n \geq 1$  و  $n \in \mathbb{N}$  .

لدينا الدالة  $F$  متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$

بحيث :  $F'(x) = f(x) ; \forall x \in [0, +\infty[$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة  $F$  في أي مجال

محدود يوجد ضمن  $[0, +\infty[$  .

في المرحلة الأولى : نختار المجال  $[0; \alpha_n]$  .

لدينا  $[0; \alpha_n] \subset [0, +\infty[$  لأن  $\alpha_n \geq 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن ، حسب مبرهنة التزايديات المنتهية ، يوجد عنصر  $c$  من المجال

$[0; \alpha_n]$  بحيث :  $\frac{F(\alpha_n) - F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$

يعني :  $0 < c < \alpha_n$  و  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا :  $0 < c < \alpha_n$  إذن :  $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$



إذن بالرجوع إلى المتساوية (\*\*): نجد :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم  $n^2$  نجد :

$$n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

$$v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال (1) نجد :

خلاصة :

$$(\forall n \geq 1), (\exists c \in ]n; n+1[); v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$



لدينا :  $n < c < n+1$

ندخل الدالة  $\arctan$  على هذا التأيير و علما أنها تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$  نجد :

$$(1) \arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك :  $n < c < n+1$

$$(2) (1+n^2) < (1+c^2) < 1+(n+1)^2$$

نضرب التأييرين (1) و (2) طرفاً بطرف نجد :

$$(1+n^2)\arctan(n) < (1+c^2)\arctan(c) < (1+(n+1)^2)\arctan(n+1)$$

ندخل على هذا التأيير دالة المقولوب نجد :

$$\frac{1}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} < \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{1}{(1+n^2)\arctan(n)}$$

و نضرب أطراف هذا التأيير في العدد السالب قطعاً  $-n^2$  نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال (2) نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

(\*)

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(\blacksquare) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$$

من جهة أخرى نعلم أن :  $\varphi(x) = x - F(x)$  ;  $(\forall x \geq 0)$

لدينا  $\alpha_n \geq 0$  إذن  $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن :  $\varphi(\alpha_n) = n$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن :  $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$  يعني :  $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$

$$\text{أي : } \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\text{يعني : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{\alpha_n}\right)$$

$$\text{يعني : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right) = 1 \quad 0 = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right)$$

$$\text{و بالتالي : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{أي : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1$$



ليكن  $n$  عددا صحيحاً طبيعياً بحيث :  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n) &= \ln\left(\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right) \\ &= n^2 \ln\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right) \\ &= n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] \end{aligned}$$



نعتبر  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \ln(\arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب الدالتين أن الدالة  $f$  متصلة

على  $]0; +\infty[$  و كذلك  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

لأن  $\ln$  دالة قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و  $\arctan$  دالة قابلة

للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $]0; +\infty[ \subset \mathbb{R}$ .

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة  $f$  في أي مجال

محدود و يوجد ضمن  $]0; +\infty[$

ليكن  $n \geq 1$  و نختار المجال  $[n; n+1]$ .

إذن يوجد عدد حقيقي  $c$  من المجال  $]n; n+1[$  بحيث :

$$(\ast\ast) \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)$$

لدينا :  $\forall x \in ]0; +\infty[; f(x) = \ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(\arctan(x))'}{\arctan(x)} = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2) \arctan(x)}$$

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + (n+1)^2) \arctan(n+1)} \text{ لدينا :}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^2}{n^2 + 2n + 2} \right) \left( \frac{1}{\arctan(n+1)} \right) \\ &= (-1) \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{-2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)} \text{ و لدينا كذلك :}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^2}{n^2 + 1} \right) \left( \frac{1}{\arctan(n+1)} \right) \\ &= (-1) \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{-2}{\pi} \end{aligned}$$

إذن التأطير ( $\otimes$ ) يُصبح :

$$\left( \frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)} \right) < v_n < \left( \frac{-n^2}{(1 + (n+1)^2) \arctan(n+1)} \right)$$

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$   
 $n \rightarrow \infty \quad \frac{-2}{\pi} \quad n \rightarrow \infty \quad \frac{-2}{\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \frac{-2}{\pi} \text{ إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد :}$$

$$u_n = e^{v_n} \text{ إذن } v_n = \ln(u_n) \text{ و لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{v_n} = e^{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right)} = e^{\left( \frac{-2}{\pi} \right)} \text{ و منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = e^{\left( \frac{-2}{\pi} \right)} \text{ و بالتالي :}$$

والحمد لله رب العالمين