

الصفحة 1 5	<h2 style="margin: 0;">الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</h2> <h3 style="margin: 0;">الدورة العادية 2018</h3> <h3 style="margin: 0;">-الموضوع-</h3>	 المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي	<h3 style="margin: 0;">المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه</h3>
★★	NS24		

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : "أ" و "ب"	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل.....(7.5 ن)
- التمرين 5 يتعلق بالتحليل.....(2.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

**التمرين 1: (3.5 نقطة)**

نذكر أن  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  جسم تبادلي وأن  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  حلقة واحدة، صفرها المصفوفة المنعدمة  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  وأن  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي .

لكل زوج  $(x, y)$  من  $\mathbb{C}^2$  نضع :  $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة  $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

1- بين أن  $E$  زمرة جزئية للزمرة  $(M_2(\mathbb{C}), +)$  0.25

2- أ) بين أن  $E$  فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  0.25

ب) نضع  $J = M(0, 1)$ . بين أن  $(I, J)$  أساس للفضاء المتجهي الحقيقي  $(E, +, \cdot)$  0.5

3- أ) بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{C}), \cdot)$  0.5

ب) بين أن  $(E, +, \cdot)$  حلقة تبادلية. 0.5

4- ليكن  $j$  التطبيق من  $\mathbb{C}^*$  نحو  $M_2(\mathbb{C})$  المعرف بما يلي:

$$j(x + iy) = M(x + y, -y) = \begin{pmatrix} x+y & -2y \\ -y & x-y \end{pmatrix} ; j((0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أ) بين أن  $j$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  نحو  $(M_2(\mathbb{C}), \cdot)$  0.5

ب) نضع  $E^* = E - \{O\}$ . بين أن  $E^* = j(\mathbb{C}^*)$  0.5

ج) استنتج أن  $(E^*, \cdot)$  زمرة تبادلية. 0.25

5- بين أن  $(E, +, \cdot)$  جسم تبادلي. 0.25

**التمرين 2: (3 نقط)**

ليكن  $p$  عددا أوليا بحيث:  $p = 3 + 4k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

1- بين أن لكل عدد صحيح نسبي  $x$ ، إذا كان  $x^2 \equiv 1 [p]$  فإن  $x^{p-5} \equiv 1 [p]$  0.5

2- ليكن  $x$  عددا صحيحا نسبيا يحقق:  $x^{p-5} \equiv 1 [p]$

أ) بين أن  $x$  و  $p$  أوليان فيما بينهما. 0.5

ب) بين أن:  $x^{p-1} \equiv 1 [p]$  0.5

ج) تحقق أن:  $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$  0.5

د) استنتج أن:  $x^2 \equiv 1 [p]$  0.5

3- حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $x^{62} \equiv 1 [67]$  0.5

**التمرين 3: (3.5 نقطة)**

ليكن  $m$  عددا عقديا.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية  $\square$  المعادلة  $(E_m)$  ذات المجهول  $z$ :

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1- أ) تحقق أن  $\Delta = (im - 2i)^2$  هو مميز المعادلة  $(E_m)$  0,25

ب) إعط حسب قيم العدد  $m$  مجموعة حلول المعادلة  $(E_m)$  0,5

2- من أجل  $m = i\sqrt{2}$ ، اكتب حلي المعادلة  $(E_m)$  على الشكل الأسّي. 0,5

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط  $A$  و  $\Omega$  و  $M$  و  $M'$  ذات الألفاق على التوالي  $a = -1 - i$  و  $\omega = i$  و  $m$  و  $m' = -im - 1 + i$

1- ليكن  $R$  الدوران الذي زاويته  $-\frac{\pi}{2}$  و يحول  $M$  إلى  $M'$ .

أ) تحقق أن  $\Omega$  هو مركز الدوران  $R$  0.25

ب) حدد  $b$  لحق النقطة  $B$  التي تحقق :  $A = R(B)$  0.5

2- أ) تحقق أن:  $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$  0,5

ب) استنتج أن النقط  $A$  و  $M$  و  $M'$  تكون مستقيمة إذا و فقط إذا كانت النقط  $A$  و  $B$  و  $\Omega$  و  $M$  متداورة. 0,5

ج) بين أن مجموعة النقط  $M$  بحيث تكون النقط  $A$  و  $M$  و  $M'$  مستقيمة هي دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها. 0,5

**التمرين 4: (7.5 نقطة)**

**الجزء I :**

1- أ) بين أن:  $\int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$  ;  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  0.5

ب) باستعمال تغيير المتغير :  $u = t^2$  بين أن:

$\int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$  ;  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  0.5

ج) استنتج أن:  $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$  ;  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  0.5

2- حدد :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$  0.25

## الجزء II :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و ليكن  $(C)$  منحناها في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.25 1- أ) بين أن  $f$  متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (يمكن استعمال نتيجة السؤال 2-I).

0.75 ج) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 2- أ) بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  ثم تحقق أن:

$$f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \quad ; \quad (\forall x \in ]0, +\infty[)$$

0.25 ب) استنتج أن  $f$  تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$

0.25 ج) تحقق أن:  $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$

0.5 3- مثل مبيانيا المنحنى  $(C)$  (يتم إنشاء نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0).

## الجزء III :

1- نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي:  $g(x) = f(x) - x$

0.5 أ) بين أن:  $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad (\forall x \in ]0, +\infty[)$

0.5 ب) استنتج أن الدالة  $g$  تناقصية قطعاً على  $]0, +\infty[$  ثم بين أن:  $g([0, +\infty[) = ]-\infty, 1[$

0.25 ج) بين أن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  على المجال  $]0, +\infty[$

2- ليكن  $a$  عدداً حقيقياً من المجال  $]0, +\infty[$

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = a$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.25 أ) بين أن:  $u_n > 0 \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 ب) بين أن:  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 ج) بين بالترجع أن:  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha| \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

0.25 د) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  تؤول إلى  $\alpha$

**التمرين 5: (2.5 نقطة)**

نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

1- بين أن  $F$  متصلة و تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$  0.5

2- أ) بين أن:  $F(x) \geq x$  ;  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  0.5

ب) بين أن  $F$  فردية ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$  0.5

ج) بين أن  $F$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  0.5

د) بين أن دالة التقابل العكسي  $G$  للدالة  $F$  قابلة للاشتقاق في 0 ثم احسب  $G'(0)$  0.5

انتهى

الصفحة 1 4	<h2 style="margin: 0;">الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</h2> <h3 style="margin: 0;">الدورة العادية 2018</h3> <p style="margin: 0;">-عناصر الإجابة-</p>	 المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي	<p style="margin: 0;">NR24</p> <p style="margin: 0; color: blue; font-weight: bold;">المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه</p>
------------------	---	---	---

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : "أ" و "ب"	الشعبة أو المسلك

سلم التنقيط	إشارة الحل	التمرين الأول	
0.25	$E$ زمرة جزئية للزمرة $(M_2(i), +)$	-1	
0.25	$E$ فضاء متجهي جزئي للفضاء $(M_2(i), +, \cdot)$	(أ)	-2
0.5	$(I, J)$ أسرة حرة ..... 0.25 $(I, J)$ أسرة مولدة و النتيجة ..... 0.25	(ب)	
0.5	$E$ جزء مستقر	(أ)	-3
0.5	$(E, +, ')$ حلقة تبادلية	(ب)	
0.5	$j$ تشاكل	(أ)	-4
0.5	$j(\mathbb{F}^*) = E^*$	(ب)	
0.25	$(E^*, ')$ زمرة تبادلية	(ج)	
0.25	$(E, +, ')$ جسم تبادلي	-5	

سلم التنقيط	إشارة للحل	التمرين الثاني	
0.5	الاستلزام: $(p-5)$ زوجي	1	
0.5	$x \nmid p=1$ (مبرهنة BEZOUT أو أي طريقة أخرى صحيحة)	(أ)	2
0.5	$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (مبرهنة FERMAT أو أي طريقة أخرى صحيحة)	(ب)	
0.5	التحقق من المتساوية	(ج)	

0.5	الاستنتاج: $[p] x^{k(p-5)} \equiv x^{k(p-1)} x^{2(k-1)}$	(د)	
0.5	67 عدد أولي و $16 = 3 + 4'$ $67 = 3 + 4'$ .....0.25 تطبيق نتائج التمرين.....0.25	3	

سلم التنقيط	إشارة الحل	التمرين الثالث	
0.25	التحقق	(أ)	I.
0.5	حالة $m = 2$ لدينا $S = \{-1 - i\}$ حالة $m \neq 2$ لدينا $S = \{-1 - i, -1 + i - im\}$	(ب)	
0.5	الشكل الأساسي للحل الأول.....0.25 الشكل الأساسي للحل الثاني.....0.25	2	
0.25	التحقق	(أ)	II.
0.5	$b = 2$	(ب)	
0.5	التحقق من المتساوية	(أ)	
0.5	التكافؤ: 0.25 لكل استلزام تقبل النتيجة في حالة عدم معالجة المترشح للحالة الخاصة $M = A$	(ب)	
0.5	التعرف على الدائرة.....0.25 تحديد المركز و الشعاع.....0.25 تقبل النتيجة في حالة عدم معالجة المترشح للحالة الخاصة $M = A$	(ج)	

سلم التنقيط	إشارة الحل	التمرين الرابع	
0.5	المتساوية	(أ)	I.
0.5	المتساوية	(ب)	
0.5	المتفاوتة المزدوجة: 0.25 لكل متفاوتة	(ج)	
0.25	حساب النهاية	2	

0.25	الاتصال على اليمين في 0	(أ)	1	.II			
0.5	قابلية الاشتقاق على اليمين في 0	(ب)					
0.75	حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0.25.....	(ج)					
	حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 0.25.....						
	التأويل المبياني 0.25.....						
0.5	قابلية الاشتقاق 0.25.....	(أ)	2				
	حساب المشتقة الأولى 0.25 .....						
0.25	رتابة $f$	(ب)					
0.25	التحقق	(ج)					
0.5	التمثيل المبياني 0.25..... نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0 0.25 .....	3	.III				
0.5	المتفاوتة المزدوجة: 0.25 لكل متفاوتة	(أ)			1		
	رتابة $g$ 0.25.....					(ب)	
	صورة $]0, +\infty[$ بالدالة $g$ 0.25.....						
0.25	وجود و وحدانية $\alpha$	(ج)					
0.25	إشارة المتتالية	(أ)		2	.III		
	تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية أو متفاوتة المتزايديات المنتهية					(ب)	
	الترجع						(ج)
	تقارب المتتالية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$						



التمرين الخامس	إشارة الحل	سلم التقييم
1	$F$ متصلة على $\square$ 0.25.....	0.5
	$F$ تزايدية قطعاً على $\square$ 0.25.....	
2	$\forall x \in ]0, +\infty[ F(x) \geq x$ 0.25..... حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0.25.....	(أ)
	$F$ فردية (نقبل كل حل صحيح) 0.25.....	
	حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ 0.25.....	(ب)
	$F$ تقابل من $\square$ نحو $\square$ 0.5	
(د)	قابلية اشتقاق $G$ في 0 0.25.....	0.5
	حساب $G'(0)$ 0.25.....	