



الصفحة

1

1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2012  
الموضوع

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

|   |                |                                |           |                     |
|---|----------------|--------------------------------|-----------|---------------------|
| 9 | المعامل        | NS24                           | الرياضيات | المادة              |
| 4 | مدة<br>الإنجاز | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) |           | الشعبة<br>أو المسلك |

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(5.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

**التمرين الأول : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ نعتبر المصفوفتين } I \text{ و } A \text{ في الحلقة الواحدية } (M_3(\mathbb{R}), +, \times),$$

- (1) احسب  $A^2$  و  $I - A$  0.75  
(2) استنتج أن  $A$  تقبل مقلوبا المطلوب تحديده . 0.5

**II** - لكل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  من المجال  $I = ]1, +\infty[$  نضع :  $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

(1) تحقق أن  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$  0.25

(2) بين أن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $I$  0.5

(3) نذكر أن  $(\mathbb{R}^{**}, \times)$  زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق  $\varphi : \mathbb{R}^{**} \rightarrow I$   
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$

أ- بين أن التطبيق  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}^{**}, \times)$  نحو  $(I, *)$  0.5

ب- استنتج بنية  $(I, *)$  0.25

ج- بين أن المجموعة  $\Gamma = \left\{ \sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{N} \right\}$  زمرة جزئية من  $(I, *)$  0.75

**التمرين الثاني : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .

**I** - نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$  حيث  $a$  عدد عقدي غير منعدم.

(1) حدد  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E)$  0.75

(2) أ- تحقق أن :  $z_1 z_2 = a^2(i-1)$  0.25

ب- بين أن :  $z_1 z_2$  عدد حقيقي  $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$  0.5

**II** - ليكن  $c$  عددا حقيقيا غير منعدم و  $z$  عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $M$  التي ألحاقها على التوالي هي :  $1$  و  $1+i$  و  $c$  و  $ic$  و  $z$  (لاحظ أن  $c = \bar{c}$ )

(1) أ- بين أن :  $A$  و  $D$  و  $M$  مستقيمية  $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$  0.5

ب- بين أن :  $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$  0.5

(2) ليكن  $h$  لحق النقطة  $H$ ، المسقط العمودي للنقطة  $O$  على  $(AD)$

أ- بين أن :  $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$  0.75

ب- استنتج أن :  $(CH) \perp (BH)$  0.25

**التمرين الثالث: (3 نقطة)**

نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E) : 143x - 195y = 52$

0.5 (1) أ- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195 واستنتج أن المعادلة  $(E)$  تقبل حلا في  $\mathbb{Z}^2$

0.75 ب- علما أن الزوج  $(-1, -1)$  حل خاص للمعادلة  $(E)$ ، حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E)$  مبرزا مراحل الحل .

0.5 (2) ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع 5

بين أن لكل  $k$  من  $\mathbb{Z}$  لدينا:  $n^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$

(3) ليكن  $x$  و  $y$  عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث:  $x \equiv y \pmod{4}$

0.5 أ- بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{Z}^*$  لدينا:  $n^x \equiv n^y \pmod{5}$

0.5 ب- استنتج أن لكل  $n$  من  $\mathbb{Z}^*$  لدينا:  $n^x \equiv n^y \pmod{10}$

0.25 (4) ليكن  $x$  و  $y$  عددين صحيحين طبيعيين بحيث يكون الزوج  $(x, y)$  حلا للمعادلة  $(E)$

بين أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{Z}^*$ ، العددين  $n^x$  و  $n^y$  لهما نفس رقم الوحدات في أنظمة العد العشري .

**التمرين الرابع: (5.5 نقطة)**

$n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

ليكن  $(C_n)$  المنحنى الممثل للدالة  $f_n$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5 (1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

0.5 (2) أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_n)$  بجوار  $-\infty$

0.5 ب- بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_n)$  بجوار  $+\infty$ ، وحدد الوضع النسبي

للمنحنى  $(C_n)$  و  $(D)$

0.75 (3) ادرس تغيرات الدالة  $f_n$  ثم ضع جدول تغيراتها .

0.75 (4) أنشئ المنحنى  $(C_3)$  ( نأخذ  $f_3(-1,5) \approx 0$  و  $f_3(-0,6) \approx 0$  و  $f_3(1,1) \approx \ln 3$  )

0.25 (5) أ- بين أنه إذا كان  $n \geq 3$  فإن  $\frac{e}{n} < \ln n$

1 ب- بين أنه إذا كان  $n \geq 3$  فإن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل بالضبط حلين  $x_n$  و  $y_n$  حيث :

$$-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0 \quad \text{و} \quad x_n \leq -\ln n$$

0.5 ج- احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

(6) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x & ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

0.25 أ- بين أن الدالة  $g$  متصلة على اليمين في 0

ب- تحقق أن لكل  $n \geq 3$  :  $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$  0.25

ج- استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$  0.25

### التمرين الخامس: (4.5 نقطة)

نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على  $[0,1]$  بما يلي :  $F(0) = 1$  و  $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$  لكل  $x$  من  $]0,1]$

(1) ليكن  $x$  من  $[0,1]$  . بين أن لكل  $t$  من  $[0,x]$  لدينا :  $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$  0.25

(2) ليكن  $x$  من  $]0,1]$

أ- بين أن :  $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$  0.5

ب- بين أن :  $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$  ثم استنتج أن الدالة  $F$  متصلة على اليمين في الصفر . 0.75

(3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل  $x$  من  $[0,1]$  :  $\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left( \frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$  0.75

(4) ليكن  $x$  من  $]0,1]$

أ- بين أن :  $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left( \frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$  0.5

ب- بين أن  $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$  ( يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1 ) 0.75

ج- بنطبق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة  $F$  في المجال  $[0,x]$  بين أن : 0.75

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د- استنتج أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0 0.25

انتهى الموضوع



الصفحة

1

1

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

## الدورة العادية 2012

### عناصر الإجابة

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

| المادة           | الرياضيات                      | NR24 | المعامل     | 9 |
|------------------|--------------------------------|------|-------------|---|
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) |      | مدة الإنجاز | 4 |

توزع النقطة الممنوحة لكل سؤال حسب مراحل الحل عند التصحيح

| التمرين الأول:  | 3.5 نقطة   |
|-----------------|--|
| I - (1)         | حساب $I - A$ ..... 0.25 ن  |
|                 | حساب $A^2$ ..... 0.5 ن   |
| (2)             | $A^{-1} = A + I$ ..... 0.5 ن   |
| II - (1)        | التحقق ..... 0.25 ن  |
| (2)             | * قانون تركيب داخلي ..... 0.5 ن  |
| (3) أ-          | $\varphi$ تشاكل ..... 0.25 ن   |
|                 | $\varphi$ تقابلي ..... 0.25 ن  |
| ب-              | $(I, *)$ زمرة تبادلية ..... 0.25 ن   |
| ج-              | $\Gamma$ زمرة جزئية من $(I, *)$ ..... 0.75 ن (0.25 ن ل $\Gamma \neq \emptyset$ و 0.25 ن ل $\Gamma$ جزء مستقر و 0.25 ن للماتل ينتمي للمجموعة $\Gamma$ ) |
| التمرين الثاني: | 3.5 نقطة   |
| I - (1)         | تحديد حلي المعادلة ..... 0.75 ن  |
| (2) أ-          | التحقق من $z_1 z_2 = a^2(i-1)$ ..... 0.25 ن  |
| ب-              | $\arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow z_1 z_2 \in \square$ ..... 0.5 ن   |
| II - (1) أ-     | $A$ و $D$ و $M$ مستقيمية $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ ..... 0.5 ن   |
| ب-              | $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$ ..... 0.5 ن  |
| (2) أ-          | $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$ ..... 0.75 ن  |
| ب-              | $(CH) \perp (BH)$ ..... 0.25 ن   |
| التمرين الثالث: | 3 نقط  |
| (1) أ-          | تحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195 ..... 0.25 ن   |
|                 | وجود حلول $(E)$ ..... 0.25 ن   |
| ب-              | حل المعادلة $(E)$ ..... 0.75 ن (منها 0.25 ن عن مراحل الحل)   |
| (2)             | $n^{4k} \equiv 1[5]$ ..... 0.5 ن   |
| (3) أ-          | $n^x \equiv n^y[5]$ ..... 0.5 ن (منها 0.25 ن عن حالة $n \equiv 0[5]$ )   |
| ب-              | $n^x \equiv n^y[10]$ ..... 0.5 ن (منها 0.25 ن عن $n^x \equiv n^y[2]$ )   |
| (4)             | للعددين $n^x$ و $n^y$ نفس رقم الوحدات ..... 0.25 ن   |

|   |                        |
|---|------------------------|
| 5.5 نقطة  | <b>التمرين الرابع:</b> |
| حساب النهايتين ..... 0.5 ن (0.25 ن لكل نهاية)   | (1)                    |
| الفرع اللانهائي بجوار $-\infty$ ..... 0.5 ن   | (2) أ-                 |
| المقارب المائل ..... 0.25 ن<br>الوضع النسبي ..... 0.25 ن  | ب-                     |
| حساب $f'_n(x)$ ..... 0.25 ن<br>تغيرات $f_n$ ..... 0.25 ن<br>جدول تغيرات $f_n$ ..... 0.25 ن                                | (3)                    |
| إنشاء المنحنى $(C_3)$ ..... 0.75 ن  | (4)                    |
| $\frac{e}{n} < \ln n$ ..... 0.25 ن  | (5) أ-                 |
| وجود ووحدانية $x_n$ ..... 0.25 ن<br>وجود ووحدانية $y_n$ ..... 0.75 ن  | ب-                     |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ ..... 0.5 ن (0.25 ن لكل نهاية)      | ج-                     |
| اتصال الدالة $g$ على اليمين في 0 ..... 0.25 ن   | (6) أ-                 |
| التحقق ..... 0.25 ن   | ب-                     |
| استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n} = -1$ ..... 0.25 ن  | ج-                     |
| 4,5 نقطة  | <b>التمرين الخامس:</b> |
| المتفاوتتان ..... 0.25 ن  | (1)                    |
| $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$ ..... 0.5 ن   | (2) أ-                 |
| $\forall x \in ]0,1] , \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ..... 0.5 ن<br>استنتاج اتصال $F$ على اليمين في الصفر ..... 0.25 ن | ب-                     |
| استعمال المكاملة بالاجزاء ..... 0.75 ن  | (3)                    |
| حساب $F'(x)$ ..... 0.5 ن  | (4) أ-                 |
| تأطير $F'(x)$ ..... 0.75 ن  | ب-                     |
| $-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ ..... 0.75 ن  | ج-                     |
| قابلية اشتقاق $F$ على اليمين في الصفر ..... 0.25 ن  | د-                     |