

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 24

ⵜⴰⵎⴰⵏⵜ ⵏ ⵓⵎⵎⵓⵔ
ⵜⴰⵎⴰⵏⵜ ⵏ ⵓⵎⵎⵓⵔ
ⵏ ⵓⵎⵎⵓⵔ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

★★

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ جسم تبادلي.

لكل (x, y) من \mathbb{C}^2 ، نضع: $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ و $E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ 0.5

2- تحقق أن: 0.5

$$M(x, y) \cdot M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3- نضع $E^* = E - \{M(0, 0)\}$ ونعتبر التطبيق: $f: E^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ الذي يربط العدد العقدي $z = x + iy$ بالمصفوفة

$M(x, y)$ من E ، حيث الزوج (x, y) من \mathbb{C}^2 ،

(أ) بين أن f تشاكل من (E^*, \cdot) نحو (\mathbb{C}^*, \cdot) 0.25

(ب) استنتج أن (E^*, \cdot) زمرة تبادلية و أن عنصرها المحايد هو $M(1, 0)$ 0.75

4- بين أن $(E, +, \cdot)$ جسم تبادلي. 0.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(أ) أحسب $M(x, y) \cdot A' \cdot M(x, y)$ من أجل $M(x, y)$ عنصر من E 0.5

(ب) استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل ماثلا في $(M_3(\mathbb{C}), \cdot)$ 0.5

التمرين الثاني: (3 نقط)

الجزء الأول: ليكن (a, b) عنصرا من $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم $a^3 + b^3$

1- بين أن: $[173] \mid a^{171} \equiv -b^{171}$ (لاحظ أن: $171 = 3 \times 57$) 0.25

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b 0.25

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a + b$ 0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم a

(أ) باستعمال ميرهنة فيرما بين أن: $[173] \mid a^{172} \equiv b^{172}$ 0.5

(ب) بين أن: $[173] \mid a^{171}(a + b) \equiv 0$ 0.5

(ج) استنتج أن 173 يقسم $a + b$ 0.5

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ المعادلة التالية: $(E) \quad x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$

ليكن (x, y) عنصرا من $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ حلا للمعادلة (E) ؛ نضع: $x + y = 173k$ ، حيث $k \in \mathbb{R}^*$

1- تحقق أن: $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$

2- بين أن: $k = 1$ ثم حل المعادلة (E) .

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و موجه (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى و غير مستقيمية.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة : $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$

1- (أ) بين أن: $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$

(ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2

2- بين أنه إذا كانت $\bar{z}_2 = z_1$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي.

3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $]0, \pi[$

(أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α

(ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$

4- ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من $]0, \pi[$

نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا للمعادلة : $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$

(أ) بدون حساب z_1 و z_2 تحقق أن: $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$

(ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة q .

التمرين الرابع: (7 نقط)

الجزء الأول:

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعاً x يوجد عدد حقيقي

θ محصور بين 0 و x بحيث : $e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$

2- استنتج أن:

(أ) $1 - x < e^{-x}$; $(x > 0)$

(ب) $x + 1 < e^x$; $(x > 0)$

(ج) $0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$; $(\forall x > 0)$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $f(0) = 1$ و $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ إذا كان $x > 0$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

0.5 1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أول مبياننا النتيجة المحصل عليها.

0.25 2- أ) بين أن: $1 - e^{-x} + x - \frac{x^2}{2} \leq x - \frac{x^3}{6}$ (" $x^3 > 0$) (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- أ) من الجزء الأول)

0.5 ب) استنتج أن: $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ (" $x^3 > 0$)

0.5 3- أ) تحقق أن: $f(x) = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$ (" $x > 0$)

0.75 ب) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها.

0.75 4- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ وأن $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$ (" $x > 0$)

0.5 ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ب) من الجزء الأول)

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n

0.5 1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n > 0$

0.5 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ج) من الجزء الأول)

0.5 3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة: $\ln(f(x)) = x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

التمرين الخامس: (3 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I =]0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

0.5 1- أ) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I

0.5 ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I .

0.25 ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعاً على المجال I

0.5 2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع: $u = \sqrt{e^t - 1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

0.5 ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

0.25 3- أ) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده.

0.5 ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F .

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016
- عناصر الإجابة -

NR 24

ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵏ ⵓⵎⵎⴰⵔⴰⵏ
ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵏ ⵓⵎⵎⴰⵔⴰⵏ
ⵏ ⵓⵎⵎⴰⵔⴰⵏ ⵏ ⵓⵎⵎⴰⵔⴰⵏ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

★★

الرياضيات

المادة

4

مدة الإنجاز

شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

الشعبة أو المسلك

9

المعامل

3.5 نقط	التمرين الأول
0.5	1- تطبيق الخاصية المميزة لزمرة جزئية
0.5	2- التحقق
0.25	3- (أ) تعريف تشاكل
0.25	(ب) الإشارة إلى أن: $(\mathbb{Z}^*, ')$ زمرة تبادلية و j تشاكل
0.25	الإشارة إلى أن: $j(\mathbb{Z}^*) = E^*$
0.25	1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z}^*, ')$ و $j(1) = M(1,0)$
0.25	4- $(E, +)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $O = M(0,0)$ حسب السؤال 1- و $(E^*, ')$ زمرة تبادلية حسب السؤال 3-ب) القانون " ' " توزيعي بالنسبة للقانون " + " في E
0.5	5- (أ) $A' M(x, y) = O = M(0,0)$
0.5	(ب) برهان بالخلف أو أية طريقة صحيحة أخرى

3 نقط	التمرين الثاني
	الجزء الأول
0.25	1- الانطلاق من $[173]$ ؛ $b^3 - a^3$ و ملاحظة أن 57 عدد فردي
0.25	2- 173 يقسم a إذن يقسم a^3 إذن يقسم $a^3 - b^3 = (a^3 + b^3) - 173$ و بما أن 173

	عدد أولي فإنه يقسم b و العكس صحيح لأن a و b لهما نفس الدور	
0.25	173 يقسم a إذن حسب السؤال 2- يقسم أيضا b و منه 173 يقسم $a + b$	-3
0.25	- 173 عدد أولي و لا يقسم a إذن أولي مع a - حسب السؤال 2- فإن 173 أولي أيضا مع b	-4 (أ)
0.25	تطبيق مبرهنة فيرما بالنسبة للعدد a ثم بالنسبة للعدد b .	
0.5	استعمال نتيجتي السؤالين 1- و 4- (أ)	(ب)
0.5	تطبيق مبرهنة كوص أو أية طريقة صحيحة أخرى	(ج)
الجزء الثاني		
0.25	التحقق	-1
0.25	مجموع عددين صحيحين يساوي 1 نستنتج أن $k = 1$	-2
0.25	حلي المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$: (86,87) و (87,86)	

3.5 نقط	التمرين الثالث	
0.5	اثبات المتساوية	-1 (أ)
0.5	شرط تداول أربع نقط	(ب)
0.5	في هذه الحالة لدينا: $z = \frac{ z_1 ^2}{\text{Re}(z_1)}$ ، خ	-2
0.5	$z_2 = e^{ia} z_1$	-3 (أ)
0.5	حسب السؤالين 1- و 3- (أ) فإن: $\left \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right = 1$ أو أية طريقة صحيحة أخرى	(ب)
0.5	الإنطلاق من: $z_1 + z_2 = \frac{e^{iq} + 1}{6}$ و $z_1 z_2 = \frac{e^{iq} - 1}{6}$ و $z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}$	-4 (أ)
0.5	مع $0 < \frac{q}{2} < \frac{p}{2}$ $z = 2 \frac{e^{iq} - 1}{e^{iq} + 1} = 2i \tan \frac{q}{2} = 2 \tan \frac{q}{2} e^{i \frac{p}{2}} = \dots$	(ب)

التمرين الرابع		7 نقط
<u>الجزء الأول:</u>		
0.25	- تطبيق مبرهنة التزايد المتناهية	-1
0.25	- الحصول على $e^q = \frac{x}{1 - e^{-x}}$	
0.25	لدينا: $0 < q < x$ و $1 < e^q = \frac{x}{1 - e^{-x}}$	(أ) -2
0.25	لدينا: $0 < q < x$ و $e^q = \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^x$	(ب)
0.25	لدينا: $0 < q < x$ و $q = \ln \frac{xe^x}{e^x - 1}$	(ج)
<u>الجزء الثاني</u>		
0.5	اتصال الدالة على اليمين في 0	(أ) -1
0.25	اثبات النهاية	(ب)
0.25	التأويل المبياني	
0.25	اثبات المتفاوتة: اعتبار الجواب صحيح و لو لم يتطرق المترشح للحالة: $x = 0$	(أ) -2
0.5	اثبات المتفاوتة المزدوجة	(ب)
0.5	التحقق	(أ) -3
0.5	استنتاج النهاية	(ب)
0.25	الدالة قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	
0.25	قابلية اشتقاق الدالة على المجال $]p, +\infty[$	(أ) -4
0.5	حساب $f'(x)$	
0.5	الاستنتاج	(ب)
<u>الجزء الثالث</u>		
0.5	البرهان بالترجع	-1
0.25	المتتالية تناقصية باستعمال نتيجة السؤال 2-ج) من الجزء الأول أو أية طريقة أخرى	-2

0.25	المتتالية متقاربة	
0.25	0 هو الحل الوحيد باستعمال نتيجة السؤال 2 -ج) من الجزء الأول و $\ln(f(0))=0$ أو أية طريقة أخرى	-3
0.25	نهاية المتتالية	

التمرين الخامس			3 نقط
0.5	الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ موجبة إذن الإشارة حسب $0 < x \leq \ln 2$ أو $x^3 \ln 2$	(أ)	-1
0.25	الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ متصلة على المجال I إذن.....	(ب)	
0.25	حساب الدالة المشتقة الأولى.		
0.25	الدالة F تزايدية قطعاً على المجال I	(ج)	
0.5	حساب التكامل بتقنية تغيير المتغير و لا تقبل أية طريقة أخرى	(أ)	-2
0.25	حساب النهاية الأولى	(ب)	
0.25	حساب النهاية الثانية		
0.25	الدالة تقابل من I نحو $\left] \frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right[$ (تمنح النقطة كاملة و لو أخطأ المترشح في تحديد J)	(أ)	-3
0.5	الافتقاء بتحديد الصيغة: $F^{-1}(x) = \ln \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{p}{4}}$ أو أية صيغة أخرى صحيحة	(ب)	