EXERCICES APPROFONDISSEMENT

EXERCICE 1 : Carrelage d'une pièce

Pour carreler une pièce rectangulaire mesurant 4,18 m sur 5,67 m, un carreleur propose à des propriétaires le choix entre deux modèles de dalles carrées.

1. Le premier modèle a 29 cm de côté et coûte 2,30 € l'unité.

   Avec ce modèle, il n'utilise que des dalles entières et il complète avec du joint autour de chaque dalle.

   a. Calculer le nombre maximal de dalles que l'on peut poser dans la largeur de la pièce.

   b. Calculer le nombre maximal de dalles que l'on peut poser dans la longueur de la pièce.

   c. Les joints autour des dalles auront-ils tous la même largeur ?
   Si oui, quelle est cette largeur ?

2. Le second modèle a 36 cm de côté et coûte 3,10 € l'unité.

   Avec ce modèle-là, il est préconisé d'utiliser des joints de 0,6 cm et le carreleur est alors dans l'obligation de couper des dalles. Les découpes ne sont pas réutilisées. Calculer le nombre de dalles nécessaires.

3. Quel sera le choix le moins coûteux pour l'achat des dalles ?

EXERCICE 2 : Vrai ou faux ?

Pour chacune des quatre propositions, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une démonstration de la réponse choisie.

1. **Proposition 1 :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. On appelle S l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.

   Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k-1\ ;\ 3k-1)$ où k est un entier relatif. »

3. Soit a et b deux entiers naturels.

   Proposition 3 : «S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$, alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

4. On considère l'équation (E) : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.

   Proposition 4 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E). »

EXERCICE 3 : Conjonction de comètes

Le but est de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 13\ [19] \\ n \equiv 6\ [12] \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.

   On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $19u + 12v = 1$.

   a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.

   b. On pose $n_0 = 6 \times 19u + 13 \times 12v$.
   Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.

   c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.

2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$.

   a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
   Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ (228)$.

   b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si, n peut s'écrire sous la forme $n = -6 + 228k$ où k est un entier relatif.

3. Application.

La comète A passe tous les 19 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 13 ans.

La comète B passe tous les 12 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 6 ans.

Dans combien d'années pourra-t-on observer les deux comètes la même année ?

EXERCICE 4 : Restes chinois

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} N \equiv 5\ [13] \\ N \equiv 1\ [17] \end{cases}$$

1. Vérifier que 239 est solution de ce système.
2. Soit N un entier relatif solution de ce système.
   Démontrer que N peut s'écrire sous la forme :
   $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
3. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.
4. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

EXERCICE 5 : Un problème du VIII$^{\text{e}}$ siècle

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers vérifiant :
   $$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2. \end{cases}$$
   a. Montrer que le couple $(a\ ;\ -b)$ est solution de (E).
   b. Quel est le reste dans la division de N par 40 ?
3. **a.** Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   b. Au VIII$^{\text{e}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.
   Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?