Baccalauréat S Métropole–La Réunion 22 juin 2018

Table des matières

1 Analyse - Exponentielle 1

2 Probabilité 3

3 Espace 4

4 Complexes 6

5 Spécialité 6

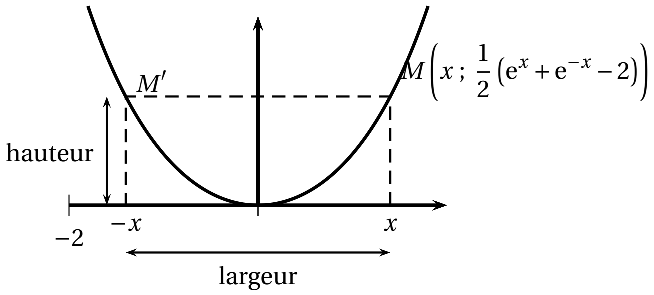
1 Analyse - Exponentielle

Exercice 1 : Commun - Analyse expo **6 points**

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une «chaînette ».
On s'intéresse ici aux «arcs de chaînette» délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.
On définit la «largeur » et la «hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2.$$

a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $\left(e^x\right)^2 - 4e^x - 1 = 0$.

c. En posant $X = e^x$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
        m ← (a + b)/2
        Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
                b ← m
        Sinon :
                a ← m
        Fin Si
Fin Tant que
```

a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

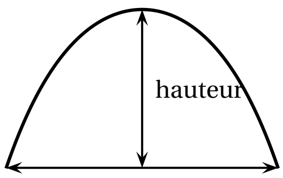
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

6. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$\left(E'\right) : \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.

2 Probabilité

EXERCICE 2 : Commun - Proba **4 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

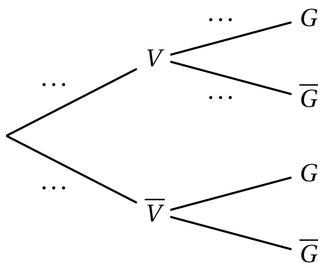
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : «la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : «la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'évènement G.

   b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

   a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

   b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

3. On interroge un échantillon de 3 750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3\,750$.

   On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{X - 1\,500}{30}$.

   On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

   En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1 450 et 1 550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

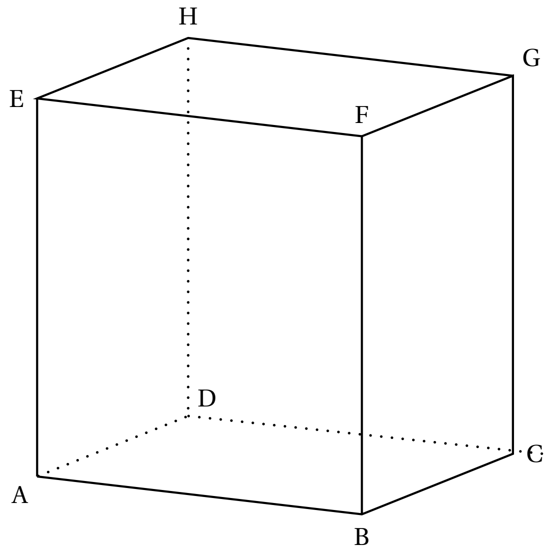
3 Espace

EXERCICE 3 : Commun - Espace **5 points**

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.
On rappelle que dans un tétraèdre MNPQ, *la hauteur issue de* M *est la droite passant par* M *orthogonale au plan* (NPQ).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH.



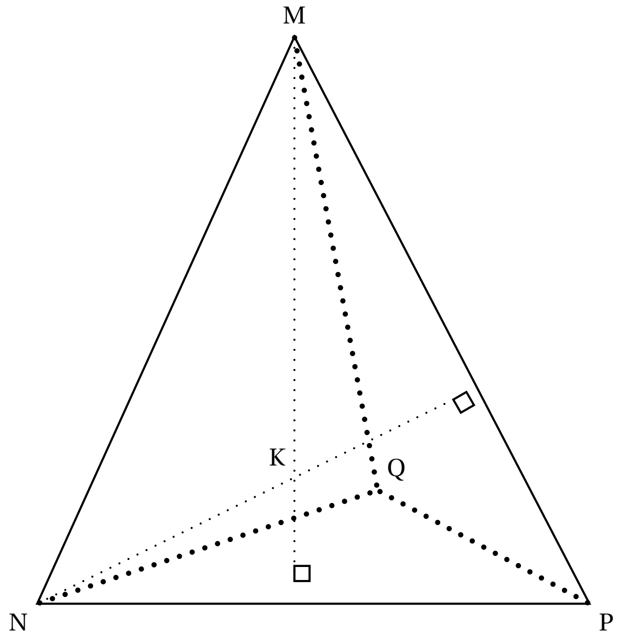
On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées «grandes diagonales» du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre ABCE.
   a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
   b. Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?
2. On considère le tétraèdre ACHF et on travaille dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AD}}\,,\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
   a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.
   b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.
   c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H.
   Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1. **a.** Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

   b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

   Ainsi, on obtient la propriété suivante :

   Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

   (On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont «opposées» lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$\mathrm{R}(-3\ ;\ 5\ ;\ 2), \mathrm{S}(1\ ;\ 4\ ;\ -2), \mathrm{T}(4\ ;\ -1\ ;\ 5) \quad \text{et } \mathrm{U}(4\ ;\ 7\ ;\ 3).$$

Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier.

4 Complexes

EXERCICE 4 : Obli - complexes **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - \text{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. **a.** Vérifier que :

$$\frac{3 - \text{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}.$$

b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \text{e}^{-\text{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\text{i}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{O}A_{k+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, ..., A_n.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

5 Spécialité

EXERCICE 5 : Spécialité **5 points**

Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer un couple solution $(x\,;\,y)$ où x et y sont deux entiers naturels.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et $\left(y_n\right)$ par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ est solution de l'équation (E).

b. En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} > x_n$.

3. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

1. Soient a et b deux entiers naturels.

Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.

2. Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors x^2-1 et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

3. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.