NOM : ....

PRÉNOM : ....

CLASSE : ....

MATHÉMATIQUES
DEVOIR SURVEILLÉ

Ex 1	Ex 2	Ex 3		Note
/	/	/		/3

EXERCICE 1 : Les complexes sont nos amis

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = \mathrm{j}a$, $b' = \mathrm{j}b$ et $c' = \mathrm{j}c$ où j est le nombre complexe $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

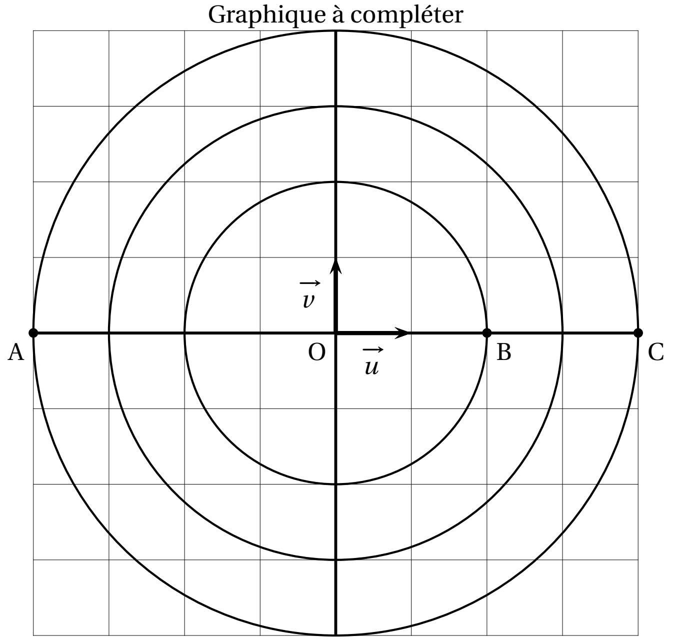
   a. Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.
   En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.

   b. Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique ci-dessous.
   Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.

2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
   Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

Graphique à compléter



EXERCICE 2 : Un peu de physique, mais pas trop...

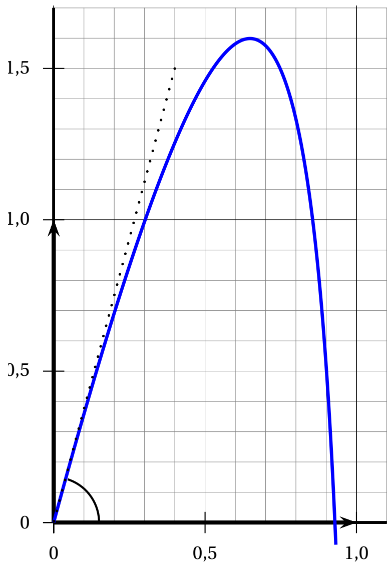
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.

   a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$:

   $$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$

   b. Démontrer que fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ et que, le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.

   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

EXERCICE 3 : VRAI-FAUX

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

   $$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x).$$

   Affirmation l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(4z^2-20z+37\right)(2z-7+2\mathrm{i})=0.$$

Affirmation les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

EXERCICE 4 : Complexes : suites...

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O};\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$.
On pose $z_0=8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1}=\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. **a.** Vérifier que :

$$\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

   b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

   c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.
   Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

   En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}$.

   b. Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, ..., A_n.
   On a ainsi : $\ell_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$.
   Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.