PGCD-BEZOUT-GAUSS

Table des matières

1 Activités mentales 1
2 PGCD 3
3 Algorithme d'Euclide 3
4 Théorème de Bézout 4
5 Théorème de Gauss 5
6 PPCM 6
7 Équation du type $ax + by = c$ 6

1 Activités mentales

EXERCICE 1 :
Déterminer de tête et à l'aide des règles de divisibilité, les PGCD des entiers suivants :

1. 12 et 42.
2. 45 et 105.
3. 92 et 69.
4. 72 et 108.

Solution : /
1. $PGCD(12\ ;\ 42) = 6$
2. $PGCD(45\ ;\ 105) = 15$
3. $PGCD(92\ ;\ 69) = 23$
4. $PGCD(72\ ;\ 108) = 36$

EXERCICE 2 :
Sur un vélodrome, deux cyclistes partent en même temps d'un point M et roulent à vitesse constante.
Le coureur A boucle le tour en 35 secondes ; le coureur B en 42 secondes.

Au bout de combien de temps le coureur A aura-t-il un tour d'avance sur le coureur B ?

Solution :
$PGCD(35, 42) = 7$ et $35 = 7 \times 5$, $42 = 7 \times 6$.
Lorsque le coureur A aura fait 6 tours, le coure

EXERCICE 3 :

1. On veut découper un rectangle de 24 cm sur 40 cm en carrés dont le côté est le plus grand possible, sans perte.
   Combien doit mesurer le côté du carré ?
2. On dispose d'un grand nombre de rectangles du type précédent que l'on veut assembler bord à bord pour former le carré le plus petit possible.
   Combien doit mesurer le côté du carré ?

Solution : /
1. $PGCD(24\ ;\ 40) = 8$. Le côté du carré doit diviser 24 et 40, donc le plus grand côté possible est de 8 cm.
2. $40 = 8 \times 5$ et $24 = 8 \times 3$
   Pour former le plus petit carré, il faut mettre 3 fois la longueur et 5 fois la largeur du rectangle, soit 120 cm.

EXERCICE 4 :
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 78 et 108.
2. 144 et 840.
3. 202 et 138.

Solution :

1. $PGCD(78;108) = 6$ car
   $108 = 78 \times 1 + 30$
   $78 = 30 \times 2 + 18$
   $30 = 18 \times 1 + 12$
   $18 = 12 \times 1 + 6$
   $12 = 6 \times 2$

2. $PGCD(144;840) = 24$ car
   $840 = 144 \times 5 + 120$
   $144 = 120 \times 1 + 24$
   $120 = 24 \times 5$

3. $PGCD(202;138) = 2$ car
   $202 = 138 \times 1 + 64$
   $138 = 64 \times 2 + 10$
   $64 = 10 \times 6 + 4$
   $10 = 4 \times 2 + 2$
   $4 = 2 \times 2$

EXERCICE 5 :

Montrer que deux entiers naturels consécutifs non nuls sont premiers entre eux.

Solution :
$(-1)n + 1(n+1) = 1$. Donc d'après le théorème de B

EXERCICE 6 :
En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ qui vérifient les équations suivantes :

1. $5(x+3) = 4y$
2. $41x + 9y = 0$

Solution :

1. 4 divise $5(x+3)$. Or $PGCD(4,5) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 4 divise $(x+3)$.
   On a donc $x + 3 = 4k$.
   En remplaçant dans l'équation, on obtient $y = 5k$.
   Les couples solutions sont : $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 5k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
2. $41x = 9(-y)$ (1)
   9 divise $41x$. Or $PGCD(9,41) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 9 divise x.
   On a donc $x = 9k$.
   En remplaçant dans l'équation, on obtient $y = -41k$.
   Les couples solutions sont : $\begin{cases} x = 9k \\ y = -41k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 7 :

Trouver un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ qui vérifie l'équation : $7x+5y = 1$.

Solution :
$(-2\ ;\ 3)$ est solution.

EXERCICE 8 :
Existe-il des couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ solutions de chacune des équations suivantes ?

1. $37x + 25y = 1$
2. $51x + 39y = 1$
3. $51x + 39y = 2016$

Solution : /

1. Oui car $PGCD(37\ ;\ 25) = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, il existe au moins un couple solution.
2. Non car $PGCD(51\ ;\ 39) = 3$ et comme 1 n'est pas multiple de 3, d'après le corollaire de Bézout, il n'y a pas de solution.
3. Oui car $PGCD(51\ ;\ 39) = 3$ et comme 2016 est divisible par 3, d'après le corollaire du Bézout, il existe des solutions entières.

2 PGCD

EXERCICE 9 :
Dresser la liste des diviseurs positifs de 72 et de 60. En déduire leur PGCD.
EXERCICE 10 :
Si, en un point donné du ciel, un astre A apparaît tous les 28 jours et un astre B tous les 77 jours, avec quelle périodicité les verra-t-on simultanément en ce point ?
EXERCICE 11 :
Déterminer tous les entiers naturels n inférieurs à 200 tels que : $PGCD(n;324) = 12$.
EXERCICE 12 :
a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$.

1. Démontrer que : $PGCD(a;b) = PGCD(a-b;b)$.
2. Calculer les PGCD des entiers suivants par cette méthode, répétée autant de fois que nécessaire :

   a. 308 et 165.
   b. 1 008 et 308.
   c. 735 et 210.

3 Algorithme d'Euclide

EXERCICE 13 :

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 441 et 777.
2. 2004 et 9185.

Solution : /

1. $PGCD(441\ ;\ 777) = 21$ car
   $777 = 441 \times 1 + 336$
   $441 = 336 \times 1 + 105$
   $336 = 105 \times 3 + 21$
   $105 = 21 \times 5$

2. $PGCD(9185\ ;\ 2004) = 167$ car
   $9185 = 2004 \times 4 + 1169$
   $2004 = 1169 \times 1 + 835$
   $1169 = 835 \times 1 + 334$
   $835 = 334 \times 2 + 167$
   $334 = 167 \times 2$

EXERCICE 14 :
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 2 012 et 7 545.
2. 1 386 et 546.

EXERCICE 15 :
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 4 935 et 517.

2. 1 064 et 700.

EXERCICE 16 :
Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?

1. 4 847 et 5 633.

2. 5 617 et 813.

EXERCICE 17 :
Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier positif, on obtient respectivement 10 et 11 comme reste.
Quel est cet entier ?

EXERCICE 18 :
En divisant 1 809 et 2 527 par un même entier naturel, les restes sont respectivement 9 et 7.
Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir comme diviseur ?

EXERCICE 19 :
On note n un naturel non nul, $a = 3n + 1$ et $b = 5n - 1$.

1. Montrer que le $PGCD(a, b)$ est un diviseur de 8.

2. Pour quelles valeurs de n, $PGCD(a, b)$ est-il égal à 8 ?

EXERCICE 20 :
n est un entier relatif quelconque. On pose :

$$A = n - 1 \text{ et } B = n^2 - 3n + 6.$$

1. **a.** Démontrer que le PGCD de A et de B est égal au PGCD de A et de 4.

b. Déterminer, selon les valeurs de l'entier n, le PGCD de A et de B.

2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, $n \neq 1$,
$\dfrac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif ?

4 Théorème de Bézout

EXERCICE 21 :
Soit l'égalité de Bézout : «Soit a et b deux entiers non nuls et D leur PGCD. Il existe un couple d'entiers relatifs telle que $au + bv = D$ ».

1. Démontrer le théorème de Bézout «a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $au + bv = 1$ ».

2. En déduire que si $PGCD(a; b) = D$, alors $a = Da'$ et $b = Db'$ avec $PGCD(a'; b') = 1$.

EXERCICE 22 :
Démontrer que, pour tout relatif k,

$(7k+3)$ et $(2k+1)$ sont premiers entre eux.

Solution :
$(-2)(7k + 3) + 7(2k + 1) = -14k - 6 + 14k + 7 = 1.$
D'après le théorème de Bézout, $(7k + 3)$ et $(2k + 1)$ sont premiers entre eux pour tout entie

EXERCICE 23 :
n est un entier naturel , $a = 7n + 4$ et $b = 5n + 3$.
Montrer, pour tout n, que a et b sont premiers entre eux.

EXERCICE 24 :
Démontrer que pour tout relatif n, les entiers $(14n + 3)$ et $(5n + 1)$ sont premiers entre eux. En déduire $PGCD(87; 31)$.

EXERCICE 25 :
Prouver que la fraction $\dfrac{n}{2n + 1}$ est irréductible pour tout entier naturel n.

EXERCICE 26 :
Prouver que la fraction $\dfrac{2n + 1}{n(n + 1)}$ est irréductible pour tout entier naturel n.

EXERCICE 27 :
La fraction $\dfrac{n^3 + n}{2n + 1}$ est-elle irréductible pour tout entier naturel n ?

EXERCICE 28 :
Montrer que 17 et 40 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $17x - 40y = 1$.

Solution :

On utilise l'algorithme d'Euclide :

$40 = 17 \times 2 + 6 \qquad (1)$

$17 = 6 \times 2 + 5 \qquad (2)$

$6 = 5 \times 1 + 1 \qquad (3)$

40 et 17 sont donc premiers entre eux.

On remonte l'algorithme d'Euclide :
de (3), on obtient $5 = 6 - 1$

On remplace dans (2) :
$17 = 6 \times 3 - 1$ donc $6 \times 3 = 17 + 1$

On multiplie (1) par 3

$$\begin{aligned} 40 \times 3 &= 17 \times 6 + 6 \times 3 \\ &= 17 \times 6 + 17 + 1 \\ &= 17 \times 7 + 1 \end{aligned}$$

On a alors $17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1$.

EXERCICE 29 :
Montrer que 23 et 26 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $23x + 26y = 1$.

EXERCICE 30 :
L'équation $6x + 3y = 1$ admet-elle des solutions entières ? Et l'équation $7x + 5y = 1$?

EXERCICE 31 :
Montrer que 221 et 331 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $221x - 331y = 1$.

EXERCICE 32 : Vrai ou faux ?
S'il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 3$, alors le PGCD de a et de b est égal à 3. Justifier.

EXERCICE 33 :
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants.
On donnera la réponse sous forme d'un tableau.

1. $\begin{cases} xy = 1512 \\ PGCD(x, y) = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy = 300 \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$

5 Théorème de Gauss

EXERCICE 34 :
En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les couples d'entiers relatifs $(a; b)$ qui vérifient :

$$33a - 45b = 0.$$

EXERCICE 35 :

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ qui vérifient :

$$7(x-3) = 5(y-2).$$

2. De la question précédente, déterminer les entiers naturels x tels que : $7x \equiv 1\ (5)$.

EXERCICE 36 :
En utilisant le théorème de de Gauss, démontrer le corollaire du théorème de Gauss :«Si b et c divisent a et si b et c sont premiers entre eux, alors bc divise a ».

EXERCICE 37 :
Montrer que si $n \equiv 0\ (8)$ et $n \equiv 0\ (9)$, alors $n \equiv 0\ (72)$.

6 PPCM

Exercice 38 :
Soit deux entiers relatifs a et b.
On appelle $PPCM(a;b)$ le plus petit multiple strictement positif de a et de b.

1. Calculer $PPCM(18;12)$ et $PPCM(24\ ;\ 40)$.
2. Calculer $\frac{7}{6}+\frac{11}{15}$. Que représente $PPCM(6\ ;\ 15)$?

Exercice 39 :
On appelle $D = PGCD(a\ ;\ b)$ et
$M = PPCM(a\ ;\ b)$.

1. Montrer que si $a = Da'$ et $b = Db'$, alors $M = Da'b'$.
2. En déduire que : $D \times M = ab$.

Exercice 40 :
Soit a et b deux naturels tels que $a < b$.
En utilisant les propriétés de l'exercice ** texte à modifier**, déterminer a et b tels que : $PGCD(a\ ;\ b) = 6$ et $PPCM(a\ ;\ b) = 102$.

7 Équation du type $ax + by = c$

Exercice 41 :
Soit l'identité de Bézout : «Soit a et b deux entiers non nuls et D leur PGCD. Il existe un couple d'entiers relatifs tel que $au + bv = D$ ».
Démontrer le corollaire du théorème de Bézout : «L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple du $PGCD(a\ ;\ b)$ ».

Exercice 42 :
Soit l'équation (E) : $4x - 3y = 2$.

1. Déterminer une solution particulière entière à (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Solution :

- $(2\ ;\ 2)$ est une solution particulière.
- Soit $(x\ ;\ y)$ la solution générale, on écrit :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 4(2) - 3(2) = 2 \end{cases}$$

En soustrayant termes à termes, on obtient :

$4(x-2) = 3(y-2)$ (1)

3 divise $4(x-2)$. Or $PGCD(4;3) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $(x-2)$. On a alors :

$x - 2 = 3k$.

En remplaçant dans (1), on obtient : $y - 2 = 4k$.

L'ensemble des couples solutions est de la forme :

$$\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 2 + 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 43 :
Soit l'équation (F) : $3x - 4y = 6$.

1. Déterminer une solution particulière entière à (F).
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice 44 :
Soit l'équation (G) : $5x + 8y = 2$.

1. Déterminer une solution particulière entière à (G).
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

EXERCICE 45 :
Soit l'équation $13x - 23y = 1$.

1. Déterminer une solution particulière entière, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, à cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

EXERCICE 46 :

1. Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ des nombres entiers relatifs, solutions de l'équation :
$$(\text{E})\ :\ 8x - 5y = 3.$$
2. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p; q)$ de nombres entiers vérifiant :
$m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E).
3. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieur à 2 000.

EXERCICE 47 :

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$:
$$7x - 5y = 1.$$
   a. Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).
   b. Montrer que le couple d'entiers $(x; y)$ est solution de (E) si, et seulement si, $7(x-3) = 5(y-4)$.
   c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que :
$$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$
2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons, il y a x jetons rouges et y jetons verts.
Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?