# **EXERCICES BAC**

### EXERCICE 1: D'après Bac (Antilles-Guyane - juin 2014)

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types de gîte : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit en hébergement A coûte  $24 \in$  et une nuit en hébergement B coûte  $45 \in$ .

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

- **1. a.** Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.
  - **b.** Recopier et compléter les pointillés de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples (x; y) possibles.

$$x$$
,  $y$ entiers  $x0...y0...$   $x$ ,  $y$ 

- 2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.
- **3. a.** Justifier que l'équation 8x + 15y = 1 admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.
  - **b.** Déterminer une telle solution.
  - **c.** Résoudre l'équation (E) : 8x + 15y = 146 où x et y sont des nombres entiers relatifs.
- 4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

Calculer ces nombres.

### EXERCICE 2: D'après Bac (Métropole - juin 2011)

# Partie A: Restitution organisée des connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Théorème de Bézout :

«Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant au + bv = 1.»

Théorème de Gauss:

«Soient a, b, c des entiers relatifs. Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.»

- 1. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.
- **2.** Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.

Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que  $a \equiv 0$  (p) et  $a \equiv 0$  (q), alors  $a \equiv 0$  (pq).

#### Partie B :

On se propose de déterminer l'ensemble  $\mathcal S$  des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \ (17 \\ n \equiv 3 \ (5) \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de  $\mathscr{S}$ .

On désigne par (u; v) un couple d'entiers relatifs tel que 17u + 5v = 1.

- **a.** Justifier l'existence d'un tel couple (u; v).
- **b.** On pose  $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ . Démontrer que  $n_0$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
- **c.** Donner un exemple d'entier  $n_0$  appartenant à  $\mathcal{S}$ .
- **2.** Caractérisation des éléments de  $\mathscr{S}$ .
  - **a.** Soit n un entier relatif appartenant à  $\mathcal{S}$ . Démontrer que  $n - n_0 \equiv 0$  (85).

- **b.** En déduire qu'un entier relatif n appartient à  $\mathcal{S}$  si, et seulement si, n peut s'écrire sous 1a forme n = 43 + 85k où k est un entier relatif.
- 3. Application

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.

Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.

Combien a-t-elle de jetons?

### EXERCICE 3: D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2007)

- 1. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
  - **a.** Montrer que l'équation (E) : 65x 40y = 1 n'a pas de solution.
  - **b.** Montrer que l'équation (E'): 17x 40y = 1 admet au moins une solution.
  - **c.** Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
  - **d.** Résoudre l'équation (E'). En déduire qu'il existe un unique naturel  $x_0 < 40$  tel que :  $17x_0 \equiv 1$  (40).
- **2.** Pour tout naturel a, démontrer que si  $a^{17} \equiv b$  (55) et si  $a^{40} \equiv 1$  (55), alors  $b^{33} \equiv a$  (55).

## EXERCICE 4: D'après Bac (Antilles-Guyane - 2015)

#### Partie A:

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note r(a, b) le reste dans la division euclidienne de a par b. On considère l'algorithme suivant :

centier naturel a, bentiers naturels non nuls a b cr(a, b)  $c \neq 0$  ab bc cr(a, b) b

- 1. Faire fonctionner cet algorithme avec a = 26 et b = 9 en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.
- **2.** Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls *a* et *b*. Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls *a* et *b* sont premiers entre eux ou non.

### Partie B:

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

13
ABCDEFGHIJKLM
0123456789101112
NOPQRSTUVWXYZ
13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

**Étape 1 :** on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.

**Étape 2 :** à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.

**Étape 3 :** on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px + q$$
 (26) et  $0 \le x' \le 25$ .

**Étape 4 :** à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

- **1.** Dans cette question, on choisit p = 9 et q = 2.
  - a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
  - **b.** Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que : 9u + 26v = 1. Donner sans justifier un couple (u; v) qui convient.
  - **c.** Démontrer que  $x' \equiv 9x + 2$  (26) équivaut à :  $x \equiv 3x' + 20$  (26).

Page 2 sur **??** Exercices Bac

- d. Décoder la lettre R.
- **2.** Dans cette question, on choisit q=2 et p est inconnu. On sait que J est codé par D. Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).
- **3.** Dans cette question, on choisit p = 13 et q = 2.

Coder les lettres B et D.

Que peut-on dire de ce codage?