PGCD-BEZOUT-GAUSS

Table des matières

1 Activités mentales

EXERCICE 1 :
Déterminer de tête et à l'aide des règles de divisibilité, les PGCD des entiers suivants :

1. 12 et 42.
2. 45 et 105.
3. 92 et 69.
4. 72 et 108.

EXERCICE 2 :
Sur un vélodrome, deux cyclistes partent en même temps d'un point M et roulent à vitesse constante.
Le coureur A boucle le tour en 35 secondes ; le coureur B en 42 secondes.
Au bout de combien de temps le coureur A aura-t-il un tour d'avance sur le coureur B ?

EXERCICE 3 :

1. On veut découper un rectangle de 24 cm sur 40 cm en carrés dont le côté est le plus grand possible, sans perte.
   Combien doit mesurer le côté du carré ?
2. On dispose d'un grand nombre de rectangles du type précédent que l'on veut assembler bord à bord pour former le carré le plus petit possible.
   Combien doit mesurer le côté du carré ?

EXERCICE 4 :
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 78 et 108.
2. 144 et 840.
3. 202 et 138.

EXERCICE 5 :
Montrer que deux entiers naturels consécutifs non nuls sont premiers entre eux.

EXERCICE 6 :
En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,;\ y)$ qui vérifient les équations suivantes :

1. $5(x+3) = 4y$
2. $41x + 9y = 0$

EXERCICE 7 :
Trouver un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ qui vérifie l'équation : $7x + 5y = 1$.

EXERCICE 8 :
Existe-il des couples d'entiers $(x\,;\ y)$ solutions de chacune des équations suivantes ?

1. $37x + 25y = 1$
2. $51x + 39y = 1$
3. $51x + 39y = 2016$

2 PGCD

EXERCICE 9 :
Dresser la liste des diviseurs positifs de 72 et de 60. En déduire leur PGCD.
EXERCICE 10 :
Si, en un point donné du ciel, un astre A apparaît tous les 28 jours et un astre B tous les 77 jours, avec quelle périodicité les verra-t-on simultanément en ce point ?
EXERCICE 11 :
Déterminer tous les entiers naturels n inférieurs à 200 tels que : $PGCD(n;324)=12$.
EXERCICE 12 :
a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a>b$.

1. Démontrer que : $PGCD(a;b)=PGCD(a-b;b)$.
2. Calculer les PGCD des entiers suivants par cette méthode, répétée autant de fois que nécessaire :

   a. 308 et 165.
   b. 1 008 et 308.
   c. 735 et 210.

3 Algorithme d'Euclide

EXERCICE 13 :

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 441 et 777.
2. 2004 et 9185.

EXERCICE 14 :
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 2 012 et 7 545.
2. 1 386 et 546.

EXERCICE 15 :
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 4 935 et 517.
2. 1 064 et 700.

EXERCICE 16 :
Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?

1. 4 847 et 5 633.
2. 5 617 et 813.

EXERCICE 17 :
Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier positif, on obtient respectivement 10 et 11 comme reste.
Quel est cet entier ?
EXERCICE 18 :
En divisant 1 809 et 2 527 par un même entier naturel, les restes sont respectivement 9 et 7.
Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir comme diviseur ?
EXERCICE 19 :
On note n un naturel non nul, $a=3n+1$ et $b=5n-1$.

1. Montrer que le $PGCD(a,b)$ est un diviseur de 8.
2. Pour quelles valeurs de n, $PGCD(a,b)$ est-il égal à 8 ?

EXERCICE 20 :
n est un entier relatif quelconque. On pose :

$$A=n-1 \text{ et } B=n^2-3n+6.$$

1. **a.** Démontrer que le PGCD de A et de B est égal au PGCD de A et de 4.

b. Déterminer, selon les valeurs de l'entier n, le PGCD de A et de B.

2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, $n \neq 1$,
$\dfrac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

4 Théorème de Bézout

EXERCICE 21 :
Soit l'égalité de Bézout : «Soit a et b deux entiers non nuls et D leur PGCD. Il existe un couple d'entiers relatifs telle que $au+bv=D$ ».

1. Démontrer le théorème de Bézout «a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tel que $au+bv=1$ ».

2. En déduire que si $PGCD(a;b)=D$, alors $a=Da'$ et $b=Db'$ avec $PGCD(a';b')=1$.

EXERCICE 22 :
Démontrer que, pour tout relatif k,
$(7k+3)$ et $(2k+1)$ sont premiers entre eux.
EXERCICE 23 :
n est un entier naturel , $a=7n+4$ et $b=5n+3$.
Montrer, pour tout n, que a et b sont premiers entre eux.
EXERCICE 24 :
Démontrer que pour tout relatif n, les entiers $(14n+3)$ et $(5n+1)$ sont premiers entre eux. En déduire $PGCD(87;31)$.
EXERCICE 25 :
Prouver que la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n.
EXERCICE 26 :
Prouver que la fraction $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ est irréductible pour tout entier naturel n.
EXERCICE 27 :
La fraction $\dfrac{n^3+n}{2n+1}$ est-elle irréductible pour tout entier naturel n ?
EXERCICE 28 :
Montrer que 17 et 40 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x;y)$ tel que : $17x-40y=1$.
EXERCICE 29 :
Montrer que 23 et 26 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x;y)$ tel que : $23x+26y=1$.
EXERCICE 30 :
L'équation $6x+3y=1$ admet-elle des solutions entières ? Et l'équation $7x+5y=1$?
EXERCICE 31 :
Montrer que 221 et 331 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x;y)$ tel que : $221x-331y=1$.
EXERCICE 32 : Vrai ou faux ?
S'il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au+bv=3$, alors le PGCD de a et de b est égal à 3. Justifier.
EXERCICE 33 :
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants.
On donnera la réponse sous forme d'un tableau.

1. $\begin{cases} xy=1512 \\ PGCD(x,y)=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy=300 \\ PGCD(x,y)=5 \end{cases}$

5 Théorème de Gauss

EXERCICE 34 :
En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les couples d'entiers relatifs $(a;b)$ qui vérifient :

$$33a-45b=0.$$

EXERCICE 35 :

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ qui vérifient :
$$7(x-3) = 5(y-2).$$
2. De la question précédente, déterminer les entiers naturels x tels que : $7x \equiv 1$ (5).

EXERCICE 36 :
En utilisant le théorème de de Gauss, démontrer le corollaire du théorème de Gauss :«Si b et c divisent a et si b et c sont premiers entre eux, alors bc divise a ».
EXERCICE 37 :
Montrer que si $n \equiv 0$ (8) et $n \equiv 0$ (9), alors $n \equiv 0$ (72).

6 PPCM

EXERCICE 38 :
Soit deux entiers relatifs a et b.
On appelle $PPCM(a; b)$ le plus petit multiple strictement positif de a et de b.

1. Calculer $PPCM(18; 12)$ et $PPCM(24 ; 40)$.
2. Calculer $\frac{7}{6} + \frac{11}{15}$. Que représente $PPCM(6 ; 15)$?

EXERCICE 39 :
On appelle $D = PGCD(a ; b)$ et
$M = PPCM(a ; b)$.

1. Montrer que si $a = Da'$ et $b = Db'$, alors $M = Da'b'$.
2. En déduire que : $D \times M = ab$.

7 Équation du type $ax + by = c$

EXERCICE 40 :
Soit l'identité de Bézout : «Soit a et b deux entiers non nuls et D leur PGCD. Il existe un couple d'entiers relatifs tel que $au + bv = D$ ».
Démontrer le corollaire du théorème de Bézout : «L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple du $PGCD(a ; b)$ ».
EXERCICE 41 :
Soit l'équation (E) : $4x - 3y = 2$.

1. Déterminer une solution particulière entière à (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

EXERCICE 42 :
Soit l'équation (F) : $3x - 4y = 6$.

1. Déterminer une solution particulière entière à (F).
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

EXERCICE 43 :
Soit l'équation (G) : $5x + 8y = 2$.

1. Déterminer une solution particulière entière à (G).
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

EXERCICE 44 :
Soit l'équation $13x - 23y = 1$.

1. Déterminer une solution particulière entière, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, à cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

EXERCICE 45 :

1. Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ des nombres entiers relatifs, solutions de l'équation :

$$\text{(E)} \ : \ 8x - 5y = 3.$$

2. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p; q)$ de nombres entiers vérifiant :

   $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

   Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E).

3. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieur à 2 000.

EXERCICE 46 :

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$7x - 5y = 1.$$

   a. Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).

   b. Montrer que le couple d'entiers $(x; y)$ est solution de (E) si, et seulement si, $7(x-3) = 5(y-4)$.

   c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases} \text{ où } \ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons, il y a x jetons rouges et y jetons verts.

   Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

	Exercice 1 :	0/
4.	**1.** $PGCD(12\ ;\ 42) = 6$ **2.** $PGCD(45\ ;\ 105) = 15$ **3.** $PGCD(92\ ;\ 69) = 23$ **4.** $PGCD(72\ ;\ 108) = 36$	
	Exercice 2 :	0/
	$PGCD(35,42) = 7$ et $35 = 7\times 5$, $42 = 7\times 6$. Lorsque le coureur A aura fait 6 tours, le coureur B aura fait 5 tours, soit un temps de $35\times 6 = 210$ s.	
	Exercice 3 :	0/
2.	**1.** $PGCD(24\ ;\ 40) = 8$. Le côté du carré doit diviser 24 et 40, donc le plus grand côté possible est de 8 cm. **2.** $40 = 8\times 5$ et $24 = 8\times 3$ Pour former le plus petit carré, il faut mettre 3 fois la longueur et 5 fois la largeur du rectangle, soit 120 cm.	
	Exercice 4 :	0/
3.	**1.** $PGCD(78;108) = 6$ car $108 = 78\times 1+30$ $78 = 30\times 2+18$ $30 = 18\times 1+12$ $18 = 12\times 1+6$ $12 = 6\times 2$ **2.** $PGCD(144;840) = 24$ car $840 = 144\times 5+120$ $144 = 120\times 1+24$ $120 = 24\times 5$ **3.** $PGCD(202;138) = 2$ car $202 = 138\times 1+64$ $138 = 64\times 2+10$ $64 = 10\times 6+4$ $10 = 4\times 2+2$ $4 = 2\times 2$	
	Exercice 5 :	0/
	$(-1)n+1(n+1) = 1$. Donc d'après le théorème de Bézout, n et $(n+1)$ sont premiers entre eux.	
	Exercice 6 :	0/

2.	**1.** 4 divise $5(x+3)$. Or $PGCD(4,5)=1$, donc d'après le théorème de Gauss, 4 divise $(x+3)$. On a donc $x+3=4k$. En remplaçant dans l'équation, on obtient $y=5k$. Les couples solutions sont : $\begin{cases} x=-3+4k \\ y=5k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ **2.** $41x=9(-y)$ (1) 9 divise $41x$. Or $PGCD(9,41)=1$, donc d'après le théorème de Gauss, 9 divise x. On a donc $x=9k$. En remplaçant dans l'équation, on obtient $y=-41k$. Les couples solutions sont : $\begin{cases} x=9k \\ y=-41k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$	
	Exercice 7 :	0/
	$(-2\ ;\ 3)$ est solution.	
	Exercice 8 :	0/
3.	**1.** Oui car $PGCD(37\ ;\ 25)=1$, donc d'après le théorème de Bézout, il existe au moins un couple solution. **2.** Non car $PGCD(51\ ;\ 39)=3$ et comme 1 n'est pas multiple de 3, d'après le corollaire de Bézout, il n'y a pas de solution. **3.** Oui car $PGCD(51\ ;\ 39)=3$ et comme 2016 est divisible par 3, d'après le corollaire du Bézout, il existe des solutions entières.	
	Exercice 9 :	0/
	Exercice 10 :	0/
	Exercice 11 :	0/
	Exercice 12 :	0/
	Exercice 13 :	0/
2.	**1.** $PGCD(441\ ;\ 777)=21$ car $777=441\times1+336$ $441=336\times1+105$ $336=105\times3+21$ $105=21\times5$ **2.** $PGCD(9185\ ;\ 2004)=167$ car $9185=2004\times4+1169$ $2004=1169\times1+835$ $1169=835\times1+334$ $835=334\times2+167$ $334=167\times2$	
	Exercice 14 :	0/
	Exercice 15 :	0/
	Exercice 16 :	0/
	Exercice 17 :	0/
	Exercice 18 :	0/

Exercice 19 : 0/

Exercice 20 : 0/

Exercice 21 : 0/

Exercice 22 : 0/

$(-2)(7k+3)+7(2k+1)=-14k-6+14k+7=1$.
D'après le théorème de Bézout, $(7k+3)$ et $(2k+1)$ sont premiers entre eux pour tout entier relatif k.

Exercice 23 : 0/

Exercice 24 : 0/

Exercice 25 : 0/

Exercice 26 : 0/

Exercice 27 : 0/

Exercice 28 : 0/

On utilise l'algorithme d'Euclide :

$40 = 17\times 2+6 \qquad (1)$

$17 = 6\times 2+5 \qquad (2)$

$6 = 5\times 1+1 \qquad (3)$

40 et 17 sont donc premiers entre eux.

On remonte l'algorithme d'Euclide :
de (3), on obtient $5=6-1$

On remplace dans (2) :
$17=6\times 3-1$ donc $6\times 3=17+1$

On multiplie (1) par 3

$$\begin{aligned}40\times 3 &= 17\times 6+6\times 3\\ &= 17\times 6+17+1\\ &= 17\times 7+1\end{aligned}$$

On a alors $17\times(-7)-40\times(-3)=1$.

Exercice 29 : 0/

Exercice 30 : 0/

Exercice 31 : 0/

Exercice 32 : Vrai ou faux ? 0/

Exercice 33 : 0/

Exercice 34 : 0/

Exercice 35 : 0/

Exercice 36 : 0/

Exercice 37 : 0/

Exercice 38 : 0/

Exercice 39 : 0/

Exercice 40 : 0/

Exercice 41 : 0/

2.	• (2 ; 2) est une solution particulière. • Soit $(x\ ;\ y)$ la solution générale, on écrit : $\begin{cases} 4x-3y=2 \\ 4(2)-3(2)=2 \end{cases}$ En soustrayant termes à termes, on obtient : $4(x-2)=3(y-2)$ (1) 3 divise $4(x-2)$. Or $PGCD(4;3)=1$, donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $(x-2)$. On a alors : $x-2=3k$. En remplaçant dans (1), on obtient : $y-2=4k$. L'ensemble des couples solutions est de la forme : $\begin{cases} x=2+3k \\ y=2+4k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$	
	Exercice 42 :	0/
	Exercice 43 :	0/
	Exercice 44 :	0/
	Exercice 45 :	0/
	Exercice 46 :	0/