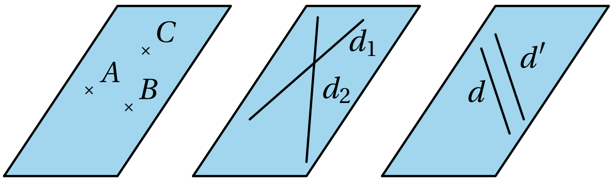
ESPACE : DROITES, PLANS ET VECTEURS

1 Positions relatives de droites et plans



Rappel :

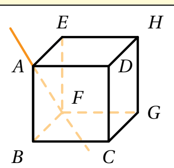
1. Un plan est défini par :
   - trois points non alignés ou
   - deux droites sécantes ou
   - deux droites strictement parallèles.
2. Si un plan $\mathscr{P}$ contient deux points distincts A et B de l'espace,
   alors il contient la droite (AB). On note $(AB) \subset \mathscr{P}$.
3. Tous les résultats de géométrie plane (théorèmes de Thalès, de Pythagore...)
   s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Dans la suite du paragraphe, $ABCDEFGH$ est un cube.

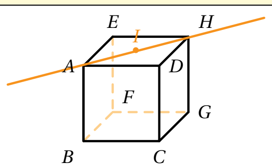
Propriétés : Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (c'est-à-dire qu'il existe un plan les contenant toutes les deux), soit non coplanaires (c'est-à-dire qu'il n'existe aucun plan les contenant toutes les deux).
Si elles sont coplanaires, alors elles sont soit sécantes, soit parallèles (strictement parallèles ou confondues).

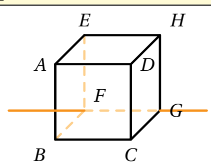
Droites coplanaires (dans un même plan)			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites strictement parallèles		Droites confondues



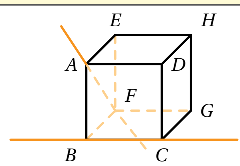
(AD) et (AF) sont sécantes en A



I centre de ADHE (AH) et (AI) sont confondues



(AD) et (FG) sont strictement parallèles

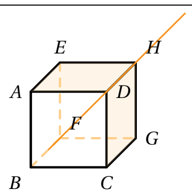


(BC) et (AF) sont non coplanaires

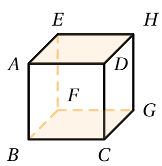
Propriétés : Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont soit sécants (leur intersection est une droite), soit parallèles.

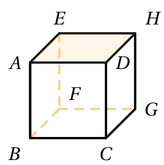
Plans sécants	Plans parallèles



Les plans (CGH) et (ADH) sont sécants selon la droite (DH)



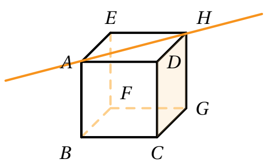
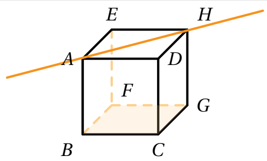
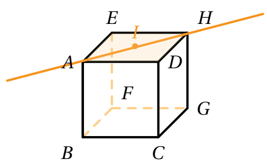
Les plans (BCG) et (ADH) sont strictement parallèles



Les plans (EAD) et (ADH) sont confondus

Propriétés : Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
		
La droite (AH) est sécante en H au plan (DCG)	La droite (AH) est strictement parallèle au plan (BCG)	(AH) est contenue dans le plan (ADH)

2 Parallélisme dans l'espace

Propriété :

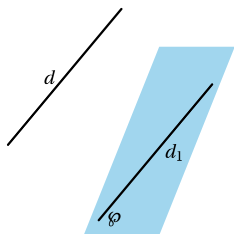
- Si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux plans sont parallèles à un même plan alors ils sont parallèles entre eux.

Propriété :

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Exemple :

d est parallèle à d_1 et d_1 est contenue dans le plan $\wp$ donc d est parallèle à $\wp$.

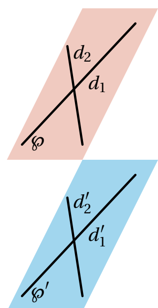


Propriété :

Si un plan $\wp$ contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes d' un plan $\wp'$ alors les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles.

Exemple :

d_1 et d_2 sont deux droites du plan $\wp$; d_1 et d_2 sont sécantes et respectivement parallèles à deux droites du plan $\wp'$ donc les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles.

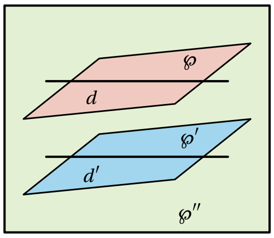


Propriété :

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles entre elles.

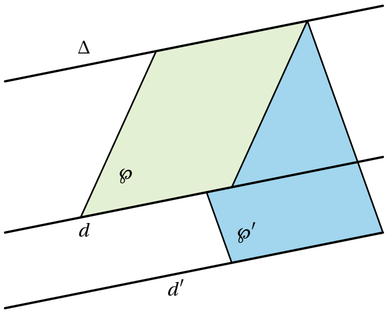
Exemple :

Les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles et $\wp$ et $\wp''$ sont sécants avec $\wp \cap \wp'' = d$, donc $\wp'$ et $\wp''$ sont sécants et $\wp' \cap \wp'' = d'$ où d' est une droite parallèle à d.



Propriété : Théorème du toit

Soit $\wp$ et $\wp'$ deux plans distincts, sécants selon une droite Δ.
Si une droite d de $\wp$ est strictement parallèle à une droite d' de $\wp'$ alors la droite Δ intersection de $\wp$ et $\wp'$ est parallèle à d et à d'.



Preuve :

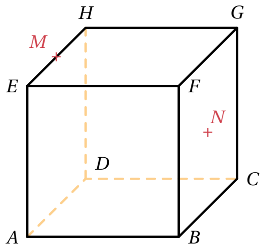
Par hypothèse, $\wp \cap \wp' = \Delta$ et $d//d'$. Les droites d et d' sont parallèles donc elles sont coplanaires. Donc, il existe un plan Q qui contient à la fois d et d'. Mais alors d et Δ sont contenues dans $\wp$ et d' et Δ sont contenues dans $\wp'$. Donc : $\wp \cap Q = d$ et $\wp' \cap Q = d'$.
Montrons que $d//\Delta$. Supposons que d et Δ ne soient pas parallèles. Donc elles sont sécantes en un point A.
$A \in d$ et $A \in \Delta$.

- $A \in d$ et $d = \wp \cap Q$ donc $A \in Q$.
- $A \in \Delta$ et $\Delta = \wp \cap \wp'$ donc $A \in \wp'$. D'où $A \in Q \cap \wp' = d'$.

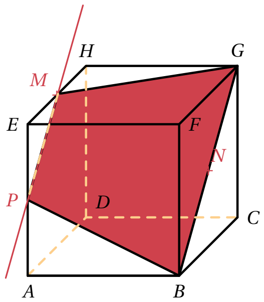
Par conséquent, $A \in d'$ et $A \in d$ et par conséquent, d et d' sont sécantes en A. Ce qui est absurde, contraire à notre hypothèse.
Les droites d et Δ sont donc parallèles. De plus, comme d et d' sont parallèles, on en déduit que les droites d' et Δ sont aussi parallèles.
Conclusion : L'intersection de $\wp$ et $\wp'$ est une droite Δ parallèle à la fois à d et à d'.

Méthode 1 : Construire la section d'un solide par un plan

Il s'agit de construire l'intersection de ce plan avec chacune des faces du solide.
Exercice :
On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. On note M le milieu du segment $[EH]$ et N celui de $[FC]$.



Tracer la section de ce cube par le plan (MNG).
Correction
L'intersection du plan (MNG) avec la face $HEFG$ est le segment $[MG]$. Il est visible, on le trace donc en trait plein.
G, N et B sont alignés, donc l'intersection du plan (MNG) avec la face $FGCB$ est le segment $[GB]$. Il est visible, on le trace donc
en trait plein.



Les faces $EHDA$ et $FGCB$ étant parallèles, l'intersection du plan (MNG) avec la face $EHDA$ est le segment passant par M et parallèle à (GN). Il n'est pas visible, on le trace donc en pointillés.
Notons P le point d'intersection de (MNG) et (EA). L'intersection du plan (MNG) avec la face $ABFE$ est le segment $[PB]$. Il est visible, on le trace donc en trait plein.
La section du cube par le plan (MNG) est le polygone $MGBP$ colorié en rouge. Comme $(MP)//(GB)$, il s'agit d'un trapèze.

3 Orthogonalité dans l'espace

Droites orthogonales

Définition : Orthogonalité de deux droites

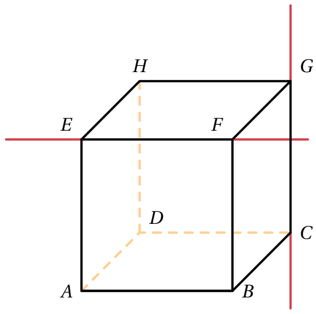
Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.

Remarque :

Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais la réciproque est fausse.

Exemple :

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, $(EF)//(HG)$ et $(HG) \perp (GC)$ donc (EF) et (GC) sont orthogonales. On note $(EF) \perp (GC)$.



Définition : Orthogonalité dune droite et dun plan

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Théorème :

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Méthode 2 : Démontrer l'orthogonalité de deux droites

Exercice :
Dans le cube $ABCDEFGH$ représenté dans l'exemple précédent, démontrer que $(GC) \perp (BD)$.
Correction
La droite (GC) est perpendiculaire à (BC) et à (CD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC) donc (GC) est orthogonale au plan (ABC) donc à toutes les droites de ce plan. En particulier, on en déduit que $(GC) \perp (BD)$.

4 Vecteurs de l'espace

Remarque :

On étend à l'espace la définition et les propriétés des vecteurs étudiées dans le plan.

Propriétés : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Propriété : Caractéristique

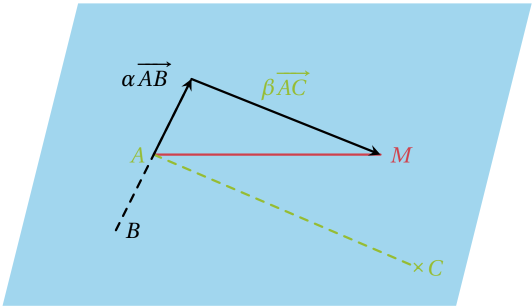
A et B étant deux points distincts de l'espace, la droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Définition : Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement leurs représentants de même origine A ont des extrémités B, C et D telles que A, B, C et D appartiennent à un même plan.

Propriété : Caractéristique

A, B et C étant trois points non alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, avec α et β deux nombres réels.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan (ABC).



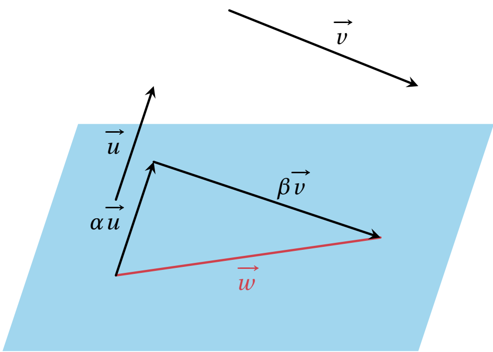
Preuve :

A, B et C ne sont pas alignés. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc un repère du plan (ABC).

- Si M appartient à (ABC), alors M, A, B et C étant coplanaires, il existe α et β deux nombres réels tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.
- Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que
  $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, avec α et β deux nombres réels, alors il existe un point N de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB}$.
  $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \beta\overrightarrow{AC}$. M est donc un point de la droite parallèle à (AC) passant par N. Donc, comme $N \in (ABC)$, $M \in (ABC)$.

Propriété :

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que
$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.



Preuve :

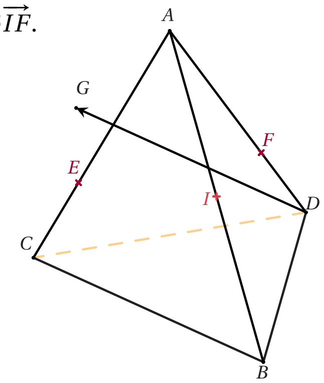
Soit A, B, C et M les points de l'espace tels que $\vec{w} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si A, B, C et M sont coplanaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Méthode 3 : Démontrer que quatre points sont coplanaires

Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un en fonction des deux autres.

Exercice :
Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que $BCGD$ soit un parallélogramme.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IG}=\alpha\overrightarrow{IE}+\beta\overrightarrow{IF}$.
3. En déduire que les points I, E, G et F sont coplanaires.



Correction

1. $\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
   $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}$
   $=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$
   $=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$
   $=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$.
2. Il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IG}=\alpha\overrightarrow{IE}+\beta\overrightarrow{IF}$
   soit $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2\alpha}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{\beta}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2\beta}{3}\overrightarrow{AD}$
   Pour obtenir cette égalité, il suffit de prendre α et β tels que :
   $-\frac{3}{2}=-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$ et $\frac{2}{3}\alpha=1$ et $\frac{2}{3}\beta=1$, soit, $\alpha=\frac{3}{2}$ et $\beta=\frac{3}{2}$.
   D'où $\overrightarrow{IG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{IF}$
3. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires, donc les points I, E, G et F sont coplanaires.

5 Repérage dans l'espace

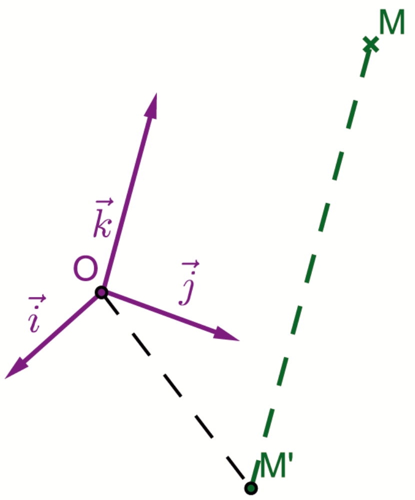
Théorème :

Si O est un point de l'espace et $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}.$$

Preuve :

- Existence



Soit $\wp$ le plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (qui ne sont pas colinéaires car $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires).
Soit M' le point d'intersection de $\wp$ et de la droite parallèle à $(O\vec{k})$ passant par M. $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont coplanaires avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires, donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$. D'autre part, $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}$.
D'où $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- Unicité
Supposons qu'il existe deux triplets de réels $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.
On a alors $(z'-z)\vec{k} = (x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j}$.
Comme $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, il n'existe pas de couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que $\vec{k} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, on en déduit que $z - z' = 0$, et par suite, que $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Définition :

$(x;y;z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
x est l'abscisse de M, y est l'ordonnée de M et z est la cote de M.
$(x;y;z)$ sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Propriétés :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
et le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées : $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
Si de plus $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Propriétés :

Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel. Alors :

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.
Si de plus $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Méthode 4 : La coplanarité de points en utilisant leurs coordonnées

Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un des vecteurs en fonction des deux autres.
Exercice :
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, Démontrer que les points $A(1;2;0)$, $B(-1;1;1)$, $C(1;4;1)$ et $D(3;-1;-3)$ sont coplanaires.
Correction
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}2=-2\alpha\\-3=-\alpha+2\beta\\-3=\alpha+\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-2\end{cases}$.
Le système ayant un unique couple solution, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

6 Représentation paramétrique de droites et de plans

Propriété :

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.
$M(x;y;z)\in\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\y=y_A+t\beta\\z=z_A+t\gamma\end{cases}$$

Preuve :

$M(x;y;z)\in\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :
$\begin{cases}x-x_A=t\alpha\\y-y_A=t\beta\\z-z_A=t\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x_A+t\alpha\\y=y_A+t\beta\\z=z_A+t\gamma\end{cases}$

Définition :

On dit que le système d'équations :
$\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\y=y_A+t\beta\\z=z_A+t\gamma\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, le plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z)\in\mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$

Preuve :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :

$$\begin{cases} x - x_A = t\alpha + t'\alpha' \\ y - y_A = t\beta + t'\beta' \\ z - z_A = t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}.$$

Définition :

On dit que le système d'équations :

$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $t'\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$.

Remarque :

Il existe une infinité de représentations paramétriques, que ce soit pour une droite ou pour un plan.

Méthode 5 : Étudier des positions relatives

Exercice :

Étudier les positions relatives des droites d et d' puis du plan $\wp$ et de la droite d'. On donnera leur intersection éventuelle.

Le plan $\wp$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = -2 + t - t' \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

Les droites d et d' ont pour représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$d' : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Correction

Attention : la même lettre t désigne deux paramètres différents. Il faut donc changer de lettre dans les résolutions de système pour les différencier.

$\wp$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d et d' ont pour vecteur directeur respectif $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$ donc d est parallèle à $\wp$. Le point $A(2;5;1)$ appartient à d. S'il appartient à $\wp$ alors $d \subset \wp$, sinon d est strictement parallèle à $\wp$.

Or, $\begin{cases} 2 = 1 - 2t + 3t' \\ 5 = -2 + t - t' \\ 1 = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t + 3t' = 1 \\ t - t' = 7 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{5}{3} \\ t' = -5 \\ t = 2 \end{cases}$

Le système n'ayant pas de solution, $A \notin \wp$ donc d est strictement parallèle à $\wp$.

Déterminons maintenant $\wp \cap d'$: $M \in \wp \cap d' \Leftrightarrow$ il existe trois réels t, t' et k tels que :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = -2 + t - t' \\ z = 3 - t \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - k = 1 - 2t + 3t' \\ -2 + k = -2 + t - t' \\ 1 + 3k = 3 - t \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k + 2t - 3t' = -3 \\ k - t + t' = 0 \\ 3k + t = 2 \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

En finissant la résolution du système, on obtient $t' = \dfrac{14}{5}$; $t = \dfrac{52}{20}$ et $k = \dfrac{-1}{5} = -0,2$, ce qui nous donne $x = 4,2$; $y = -2,2$ et $z = 0,4$.

Ainsi, $\wp$ et d' sont sécantes au point $K(4,2;-2,2;0,4)$