BAC BLANC - DOCUMENT DE TRAVAIL

Table des matières

1 La queue du lézard

EXERCICE 1 : Amérique du Sud Novembre 2018 **4 points**

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b. Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}(1+u(x)).$$

a. Déterminer les variations de f' sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

2 Ce matin, un lapin...

EXERCICE 2 : Polynésie juin 2018 **5 points**

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.
À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'évènement : «le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : «le lapin est dans la galerie B à l'étape n». On note c_n la probabilité de l'évènement : «le lapin est dans la galerie C à l'étape n».
À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.
Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   - **a.** Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   - **b.** Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   - **a.** Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.
   - **b.** En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

3 Où dors-tu, tortue tordue ?

EXERCICE 3 : Amérique du Sud **4 points**

Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre. Cette île, étant le point de convergence de nombreuses tortues, des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données sur celles-ci.

Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 100 mètres.

Le plan $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x ; y ; z)$ avec $z < 0$ se situe dans l'océan.

La modélisation des spécialistes établit que :

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 3+t \\ y & = & 6t \\ z & = & -3t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \text{ réel ;}$$

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 10k \\ y & = & 2+6k \\ z & = & -4k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \text{ réel ;}$$

1. Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.

2. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

   a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}$ est normal aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

   b. On admet que la distance minimale entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la distance HH$'$ où $\overrightarrow{\text{HH}'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ avec H appartenant à la droite $\mathcal{D}_1$ et H$'$ appartenant à la droite $\mathcal{D}_2$.

   Déterminer une valeur arrondie en mètre de cette distance minimale.

   On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel

▷ Calcul formel	
1	Résoudre$(\{10*k-3-t=3*l, 2+6*k-6*t=13*l, -4*k+3*t=27*l\}, \{k, l, t\})$ $\to \left\{\left\{k=\dfrac{675}{1814}, \ell=\dfrac{17}{907}, t=\dfrac{603}{907}\right\}\right\}$

3. Les scientifiques décident d'installer une balise en mer.

   Elle est repérée par le point B de coordonnées (2 ; 4 ; 0).

   a. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}_1$.

   Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

   b. En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

4 Le renard dans le poulailler

EXERCICE 4 : Amérique du Nord 2018 **5 points**

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.

Au $1^{e}r$ juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1^er juillet de l'année $2012 + n$.

Partie A - Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1. **a.** On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

   Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.

   b. Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1^er juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{15\,000}\begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}$.

   On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

   b. Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

   c. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{2,8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n & = & \dfrac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{array}\right.$$

   Décrire l'évolution des deux populations.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent.
On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 0,001u_n \times v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-7}u_n \times v_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

Le tableau ci-dessous présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

	A	B	C
1	Modèle de la **partie B**		
2	n	u_n	v_n
3	0	2 000 000	120
4	1	1 960 000	120
5	2	1 920 800	119
6	3	1 884 228	117
7	4	1 851 905	114
8	5	1 825 160	111
9	6	1 804 988	107
10	7	1 792 049	103
11	8	1 786 692	99
12	9	1 789 005	94
13	10	1 798 854	91
14	11	1 815 930	87
15	12	1 839 780	84
16	13	1 869 827	81
17	14	1 905 378	79
18	15	1 945 622	77
19	16	1 989 620	77
20	17	2 036 288	76
21	18	2 084 374	77
22	19	2 132 440	78
23	20	2 178 846	80
24	21	2 221 746	83
25	22	2 259 109	87
26	23	2 288 766	91
27	24	2 308 508	97

1. Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?
2. Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

Partie C

Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.
Est - il possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$? (On parle alors d'état stable.)

5 C'est une petite crevette qui est sur le bord de l'eau et qui pleure. Passant par là, un escargot lui demande : - Mais pourquoi pleures-tu ? - Ma mère est partie à un cocktail et n'est toujours pas revenue...

EXERCICE 5 : Asie juin 2018 **5 points**

Une ferme aquatique exploite une population de crevettes qui évolue en fonction de la reproduction naturelle et des prélèvements effectués.
La masse initiale de celte population de crevettes est estimée à 100 tonnes.
Compte tenu des conditions de reproduction et de prélèvement, on modélise la masse de la population de crevettes, exprimée en tonne, en fonction du temps, exprimé en semaine, par la fonction f_p, définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_p(t) = \frac{100p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-pt}}$$

où p est un paramètre strictement compris entre 0 et 1 et qui dépend des différentes conditions de vie et d'exploitation des crevettes.

1. Cohérence du modèle

a. Calculer $f_p(0)$.

b. On rappelle que $0 < p < 1$.
Démontrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $1-(1-p)\mathrm{e}^{-pt} \geqslant p$.

c. En déduire que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $0 < f_p(t) \leqslant 100$.

2. Étude de l'évolution lorsque $p = 0,9$

Dans cette question, on prend $p = 0,9$ et on étudie la fonction $f_{0,9}$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_{0,9}(t) = \frac{90}{1-0,1\mathrm{e}^{-0,9t}}.$$

a. Déterminer les variations de la fonction $f_{0,9}$.

b. Démontrer pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $f_{0,9}(t) \geqslant 90$.

c. Interpréter les résultats des questions 2. a. et 2. b. dans le contexte.

3. Retour au cas général

On rappelle que $0 < p < 1$.

Exprimer en fonction de p la limite de f_p lorsque t tend vers $+\infty$.

4. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$H(t) = 100\ln\left(2-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)+50t$$

est une primitive de la fonction $f_{1/2}$ sur cet intervalle.

b. En déduire la masse moyenne de crevettes lors des 5 premières semaines d'exploitation, c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction $f_{1/2}$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
En donner une valeur approchée arrondie à la tonne.