NOM : ....

PRÉNOM : ....

CLASSE : ....

MATHÉMATIQUES
DEVOIR SURVEILLÉ 5

Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4		Note
/5.5	/10	/4	/10.5		/30

Le sujet est composé d'un certain nombre d'exercices indépendants.Vous devez traiter tous les exercices. Pour chaque exercice, vous pouvez admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Vous êtes invités à faire figurer sur votre copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 : Les complexes sont nos amis — 5.5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = \mathrm{j}a$, $b' = \mathrm{j}b$ et $c' = \mathrm{j}c$ où j est le nombre complexe :

$$j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

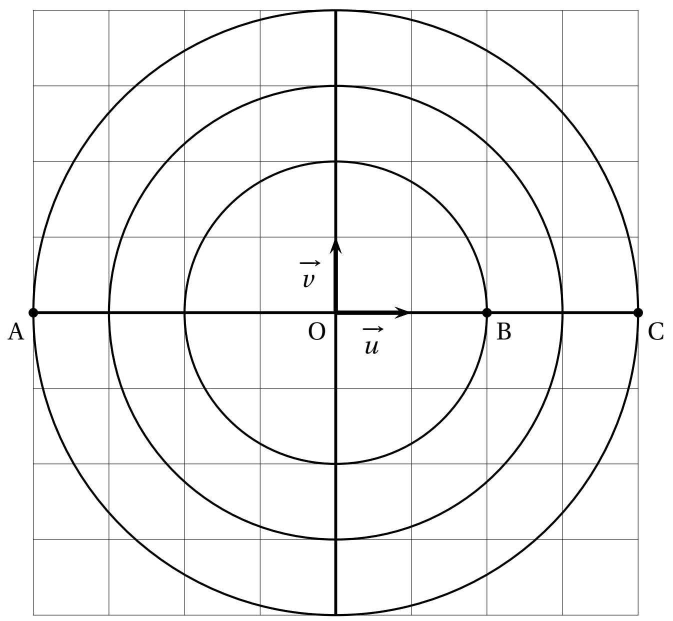
a. Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.
En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.

b. Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique ci-dessous.
Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.

2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

Graphique à compléter

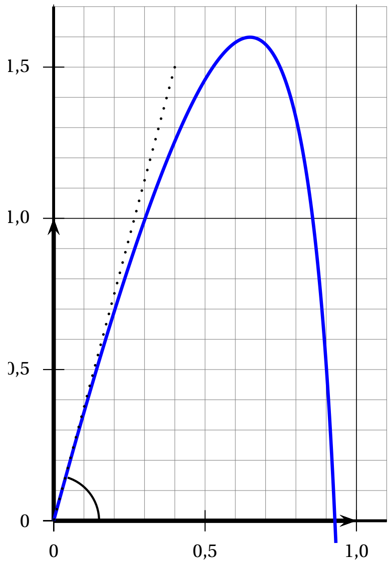


EXERCICE 2 : Un peu de physique, mais pas trop... 10 points

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1[$. On note f' sa fonction dérivée.

a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$

b. Démontrer que fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;1[$ et que,
le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. On cherche à déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Si on essaye de résoudre l'inéquation $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \leqslant 1,6$, on se retrouve devant une équation que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.

Posons m la fonction définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par $m(b) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) = b-2+\ln(4)-2\ln(b)$.

a. Etudier les variations de la fonction m pour b supérieur à 2.

b. Déterminer : $\lim\limits_{b\to+\infty} m(b)$

c. Dresser le tableau de variation de m sur $[2;+\infty[$

d. Démontrer que l'équation $m(b) = 1,6$ admet une unique solution b_0 dans $[2;10]$. En donner un encadrement à 0,01 près.

e. Conclure.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.

L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

EXERCICE 3 : VRAI-FAUX **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué deux points par réponse exacte correctement justifiée.

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x).$$

Affirmation l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(4z^2-20z+37\right)(2z-7+2\mathrm{i})=0.$$

Affirmation les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

EXERCICE 4 : Complexes : suites... **10.5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On pose $z_0=8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1}=\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. **a.** Vérifier que :

$$\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

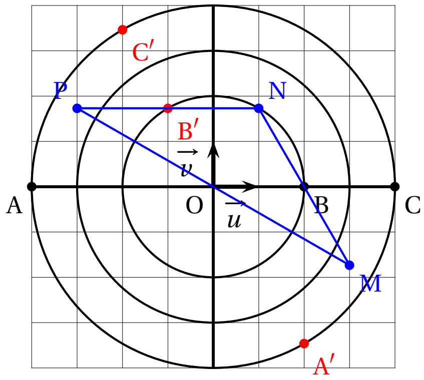
b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, …, A_n.
On a ainsi : $\ell_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

	Exercice 1 : Les complexes sont nos amis	5.5/5.5
1.a	$\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ $a' = a\mathrm{j} = -4\mathrm{j} = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\left(-e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right) = 4\left(e^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}\right) = 4e^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)} = 4e^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}} = 4e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ $b' = b\mathrm{j} = 2\mathrm{j} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ $c' = c\mathrm{j} = 4\mathrm{j} = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$	1.5
1.b	 $\lvert a'\rvert = 4$ donc A′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re\left(a'\right) = 2$ et $Im\left(a'\right) < 0$, on peut donc placer A′ $\lvert b'\rvert = 2$ donc B′ est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et on a $Re\left(b'\right) = -1$ et $Im\left(b'\right) > 0$, on peut donc placer B′ $\lvert c'\rvert = 4$ donc C′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re\left(c'\right) = -2$ et $Im\left(c'\right) > 0$, on peut donc placer C′	1.5
2.b	$a' = -c'$ donc A′ et C′ sont symétriques par rapport à O alors O, A′ et C′ sont alignés $arg\left(b'\right) = arg\left(c'\right) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires d'où O, B′ et C′ sont alignés. Finalement O, A′, B′ et C′ sont alignés.	1
3.b	$z_{\mathrm{M}} = \frac{a'+c}{2} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ $z_{\mathrm{N}} = \frac{c'+c}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ $z_{\mathrm{P}} = \frac{c'+a}{2} = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ MNP semble isocèle en N d'après le dessin MN=$\lvert z_{\mathrm{N}} - z_{\mathrm{M}}\rvert = \left\lvert 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right\rvert = 4$ et PN=$\lvert z_{\mathrm{N}} - z_{\mathrm{P}}\rvert = \lvert 4\rvert = 4$ On a MN=NP donc MNP est bien isocèle en N	1.5
	Exercice 2 : Un peu de physique, mais pas trop...	10/10
1.a	On va utiliser : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ $f'(x) = b + 2\times\frac{-1}{1-x} = \cdots = \frac{-bx+x-2}{1-x}$	1

1.b	Puisque la fonction f est dérivable, et que l'on connaît sa fonction dérivée, on va étudier le signe de la fonction dérivée pour connaître les variations de la fonction f. Soit x dans $[0\,;\,1[$. On a $x<1$ et donc, $0<1-x$. Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur, qui est une quantité affine, de coefficient directeur $-b$ négatif (puisque b est supérieur à 2) et donc on aura bien une fonction dérivée d'abord positive, pour $x \leqslant \dfrac{b-2}{b}$, puis négative. On remarque le nombre $\dfrac{b-2}{b} = 1-\dfrac{2}{b}$ est un nombre inférieur à 1 et positif, car b est un réel positif, supérieur à 2. On peut donc affirmer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{b-2}{b}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{b-2}{b}\,;\,1\right[$. Ces variations indiquent que f atteint un maximum pour $x=\dfrac{b-2}{b}=1-\dfrac{2}{b}$. Ce maximum est donc $f\left(1-\dfrac{2}{b}\right)=b\times\left(1-\dfrac{2}{b}\right)+2\ln\left(1-\left(1-\dfrac{2}{b}\right)\right)=b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$. Le maximum de la fonction f s'établit bien à $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.	3
2.a	La fonction m est dérivable sur son ensemble de définition et on a pour tout b supérieur à 2 : $m'(b)=1-\dfrac{2}{b}$. Comme b est supérieur à 2, on en déduit que $m'(b)$ est positif, et même strictement positif pour $b>2$, et donc que la fonction m est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.	1.5
2.b	TODO	1
2.c	TODO	0.5
2.d	La fonction m étant continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,10]$ et 1,6 étant une valeur intermédiaire entre $m(0)=0$ et $m(10)\approx 4,8$, le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre b_0 antécédent de 1,6 par m sur $[2\,;\,10]$. Comme m est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$, il n'y aura pas d'autre antécédent que celui là. Un balayage à la calculatrice donne $5,69<b_0<5,70$.	1.5
2.e	Les valeurs du paramètre b garantissant une hauteur maximale $m(b)$ ne dépassant pas 1,6 mètre sont donc les réels de l'intervalle $[2\,;\,b_0]$, soit, en donnant une valeur approchée (nécessairement par défaut, vu que m est croissante) de l'intervalle $[2\,;\,5,69]$.	0.5
3.	Si on choisit $b=5,69$, alors, cela signifie que la tangente tracée en pointillés est la droite d'équation : $$y=f'(0)\times(x-0)+f(0)=\dfrac{b-2}{1-0}\times x+0=(5,69-2)x=3,69x$$ Cela signifie que l'origine du repère, le point de coordonnée $(1\,;\,0)$ et le point de coordonnées $(1\,;\,3,69)$ forment un triangle rectangle, dans lequel le côté opposé à l'angle θ mesure 3,69 et le côté adjacent mesure 1, donc la tangente de l'angle est donnée par $\tan\theta=\dfrac{3,69}{1}=3,69$. À la calculatrice (réglée en mode degrés), on obtient $\theta=\arctan(3,69)\approx 74,8$ degrés	1
	Exercice 3 : VRAI-FAUX	4/4

1.	• Soit $I = \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$. ∘ $\ln(6x-2)$ n'existe que si $6x-2>0$, c'est-à-dire $x>\frac{1}{3}$; donc $\ln(6x-2)$ existe si $x \in I$. ∘ $\ln(2x-1)$ n'existe que si $2x-1>0$, c'est-à-dire $x>\frac{1}{2}$; donc $\ln(2x-1)$ existe si $x \in I$. ∘ $\ln(x)$ n'existe que si $x>0$; donc $\ln(x)$ existe si $x \in I$. • Sur l'intervalle I : $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff \ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$ $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$ • On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$. $\Delta = 11^2-4\times 12\times 2 = 25 = 5^2$; $x'=\frac{11+5}{2\times 12}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$ et $x''=\frac{11-5}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ $x' \in I$ et $x'' \notin I$ donc l'équation du départ n'admet qu'une solution dans l'intervalle I. **L'affirmation est fausse.**	2
2.	• Les solutions de l'équation $\left(4z^2-20z+37\right)(2z-7+2i)=0$ sont les solutions des deux équations $4z^2-20z+37=0$ et $2z-7+2i=0$. • On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2-20z+37=0$. $\Delta = 20^2-4\times 4\times 37=-192<0$; l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{20+i\sqrt{192}}{2\times 4}=\frac{20+8i\sqrt{3}}{8}=\frac{5}{2}+i\sqrt{3}$ et $z_2=\frac{5}{2}-i\sqrt{3}$ • On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z-7+2i=0$: $2z-7+2i=0 \iff 2z=7-2i \iff z=\frac{7}{2}-i$ Cette équation a pour solution le nombre complexe $z_3=\frac{7}{2}-i$. • On appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. ∘ $\mathrm{PA}=\lvert z_1-z_{\mathrm{P}}\rvert=\left\lvert\frac{5}{2}+i\sqrt{3}-2\right\rvert=\left\lvert\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right\rvert=\sqrt{\frac{1}{4}+3}=\sqrt{\frac{13}{4}}$ ∘ $\mathrm{PB}=\lvert z_2-z_{\mathrm{P}}\rvert=\left\lvert\frac{5}{2}-i\sqrt{3}-2\right\rvert=\left\lvert\frac{1}{2}-i\sqrt{3}\right\rvert=\sqrt{\frac{1}{4}+3}=\sqrt{\frac{13}{4}}$ ∘ $\mathrm{PC}=\lvert z_3-z_{\mathrm{P}}\rvert=\left\lvert\frac{7}{2}-i-2\right\rvert=\left\lvert\frac{3}{2}-i\right\rvert=\sqrt{\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{13}{4}}$ • PA = PB = PC donc les solutions de l'équation sont les affixes de trois points situés sur le cercle de centre P d'affixe 2 et de rayon $\frac{13}{4}$. **L'affirmation est vraie.**	2
	Exercice 4 : Complexes : suites...	10.5/10.5
1.a	$\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$	0.5

1.b	$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 8$ donc $\boxed{z_1 = 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$ $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}}$ donc $\boxed{z_2 = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$ $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{6}}$ donc $\boxed{z_3 = 3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$ $\arg(z_3) = \dfrac{-\pi}{2}$ donc z_3 est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative et $\boxed{\mathrm{Im}\,(z_3) = -3\sqrt{3}}$	2

1.c

FIGURE REPRÉSENTATION DES POINTS A_0, A_1, A_2, A_3

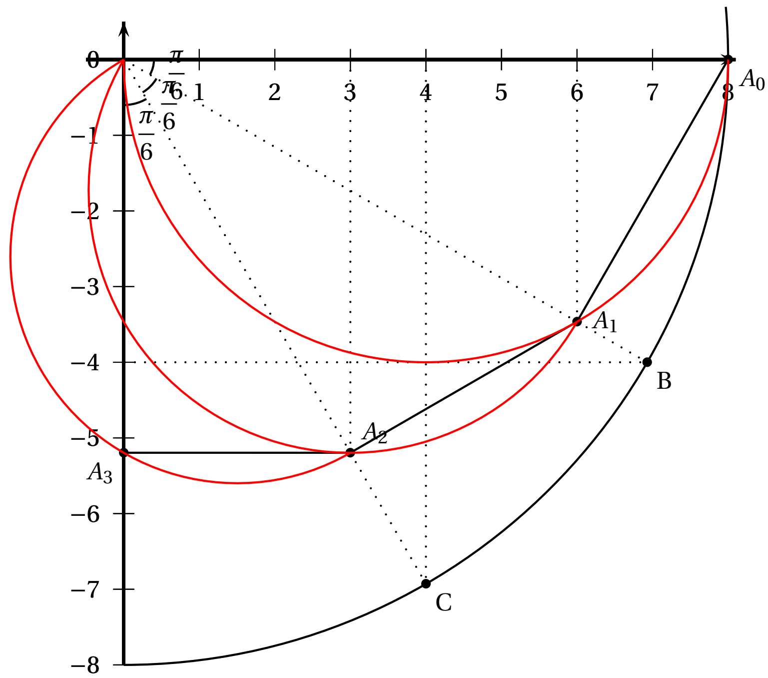
La relation $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_n$ montre en prenant les arguments que

$\arg(z_{n+1}) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) + \arg(z_n)$. Or $\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}A_n}, \overrightarrow{\mathrm{O}A_{n+1}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

On a donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}A_0}, \overrightarrow{\mathrm{O}A_1}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$, puis $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}A_0}, \overrightarrow{\mathrm{O}A_2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}A_0}, \overrightarrow{\mathrm{O}A_3}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

- A_0 a pour affixe 8 ;
- On sait que $\sin -\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$. On trace donc l'horizontale partant du point de coordonnées $(0\ ;\ -4)$ qui coupe le cercle de centre O de rayon 8 en un point B d'abscisse positive. La droite verticale d'équation $x = 6$ coupe OB en A_1.
- On sait que $\cos -\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. On trace donc la verticale ale partant du point de coordonnées $(4\ ;\ 0)$ qui coupe le cercle de centre O de rayon 8 en un point C d'ordonnée négative. La droite verticale d'équation $x = 3$ coupe OC en A_2.
- Enfin A_3 est le projeté orthogonal de A_2 sur l'axe des ordonnées puisque $\mathrm{O}A_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{O}A_2$ ou encore $\mathrm{O}A_3 = \cos\dfrac{\pi}{6}\mathrm{O}A_2$.



Remarque :

Puisque que pour tout naturel n, $\mathrm{O}A_{n+1} = \cos\dfrac{\pi}{6}\mathrm{O}A_n$, le point A_{n+} est la projeté orthogonal de A_n sur la droite $\mathrm{O}A_{n+1}$.

A_1 est donc le point d'intersection de la droite (OB) avec le demi-cercle de diamètre $[\mathrm{O}A_0]$ contenant les points d'ordonnée négative.

A_2 est le point d'intersection de la droite (OC) avec le demi-cercle de diamètre $[\mathrm{O}A_1]$. (voir les demi-cercles tracés en rouge)

A_3 est le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec le demi-cercle de diamètre $[\mathrm{O}A_2]$.

2

2.a	*Initialisation* $z_0 = 8 \times 1 \times 1 = 8$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$. *Hérédité* : On suppose que pour $n \geqslant 0$, $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ et on va montrer que $z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}}$ On a $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} z_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ *(par hypothèse de récurrence).* Donc $z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}}$ *(en utilisant la propriété $a^n \times a = a^{n+1}$ pour tout nombre réel a)* . Donc la propriété est héréditaire. La propriété est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang $n \geqslant 0$, elle l'est aussi au rang $n+1$ Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel n.	1.5
2.b	On a donc $u_n = \|z_n\| = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ puis $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8 \times 0 = 0}$	1.5
3.a	$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_k - z_k}{\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_k} = \frac{\cancel{z_k}\left(\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} - 1\right)}{\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\cancel{z_k}} = \frac{\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} - 1}{\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}} = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ On multiplie par le conjugué du dénominateur : $\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})(3+\mathrm{i}\sqrt{3})}{(3-\mathrm{i}\sqrt{3})(3+\mathrm{i}\sqrt{3})} = \frac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}-3\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{9+3} = \frac{-4\mathrm{i}\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{12\times\sqrt{3}} = \frac{-12\mathrm{i}}{12\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$ On a donc $\left\|\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}}\right\| = \left\|-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right\| \iff \frac{\|z_{k+1} - z_k\|}{\|z_{k+1}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \frac{A_kA_{k+1}}{OA_{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff$ $A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}$.	1.5
3.b	D'après la question précédente, pour tout entier naturel k, $A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|z_{k+1}\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} = \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1}$ Donc $\ell_n = \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right)$ Puis $\ell_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{2-\sqrt{3}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$ Pour finir, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{8}{2-\sqrt{3}}(1-0) = \frac{8}{2-\sqrt{3}} \approx 29{,}86$	1.5