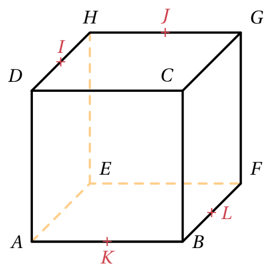
EXERCICES DE BASE

1 Activités mentales

Pour les exercices suivants , $ABCDEFGH$ est un pavé droit ; I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$.



EXERCICE 1 :
Donner la position relative des deux droites citées :

1. (DB) et (EF) ;
2. (IJ) et (AF) ;
3. (IC) et (AB) ;
4. (JF) et (EH).

Solution : /

1. (DB) et (EF) non coplanaires ;
2. (IJ) et (AF) parallèles ;
3. (IC) et (AB) non coplanaires ;
4. (JF) et (EH) sécantes.

EXERCICE 2 :
Donner la position relative des deux plans cités :

1. (DCG) et (AEF) ;
2. (IJA) et (HDC) ;
3. (IJE) et (CKL).

Solution : /

1. (DCG) et (AEF) parallèles ;
2. (IJA) et (HDC) sécants selon (IJ) ;
3. (IJE) et (CKL) parallèles.

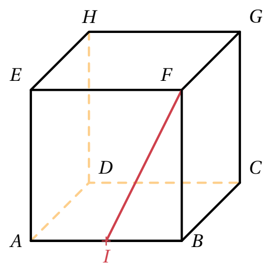
EXERCICE 3 :
Donner la position relative de la droite et du plan cités :

1. (IJ) et (ABF) ;
2. (IJ) et (BCG) ;
3. (KE) et (ABF).

Solution : /

1. (IJ) parallèle à (ABF) ;
2. (IJ) et (BCG) sécants ;
3. (KE) est incluse dans (ABF).

EXERCICE 4 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$.



Quelle est la nature de la section du cube par :

1. le plan (IFG) ?
2. le plan (IFC) ?

Solution : /

1. un rectangle
2. un triangle isocèle en I

EXERCICE 5 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$.
Les droites suivantes sont-elles orthogonales ?

1. (IF) et (FG) ?
2. (IF) et (FH) ?
3. (BF) et (EH) ?
4. (BF) et (AC) ?

Solution : /

1. (IF) et (FG) sont orthogonales.
2. (IF) et (FH) ne sont pas orthogonales
3. (BF) et (EH) sont orthogonales.
4. (BF) et (AC) sont orthogonales.

EXERCICE 6 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$.
Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{F...}$
2. $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{B...}$
3. $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DG}=...$

Solution : /

1. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{FG}$;
2. $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{BE}$;
3. $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}$.

EXERCICE 7 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$ (voir figure de l'exercice 4).

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{FI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. O étant le centre du cube, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Solution : /

1. $\overrightarrow{FI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$.

2. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

EXERCICE 8 :
Dans un repère $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3\,;2\,;4)$; $B(-1\,;1\,;0)$ et $C(2\,;-3\,;5)$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Donner les coordonnées des vecteurs :
   $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$.

Solution : /

1. $\overrightarrow{AB}(2;-1;-4)$; $\overrightarrow{AC}(5;-5;1)$ et $\overrightarrow{BC}(3;-4;5)$.

2. $\vec{u}(-1;3;-9)$ et $\vec{v}(14;-17;16)$.

EXERCICE 9 :
Dans un repère$(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2\,;5\,;-1)$; $B(0\,;3\,;4)$ et le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;4)$.

1. Déterminer les coordonnées du point C défini par $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis celles du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

3. Déterminer les coordonnées du centre K de ce parallélogramme.

Solution : /

1. $C(4;4;3)$;

2. $\overrightarrow{AB}(-2;-2;5)$ et $D(2;2;8)$;

3. $K(2;3,5;3,5)$.

EXERCICE 10 :
Dans un repère$(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2\,;5\,;-1)$; $B(2\,;-3\,;4)$ et le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;4)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. Le point B appartient-il à Δ ?

Solution : /

1. Représentation paramétrique de la droite Δ : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2. Le point B n'appartient pas à Δ.

EXERCICE 11 :
Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite Δ de représentation paramétrique :

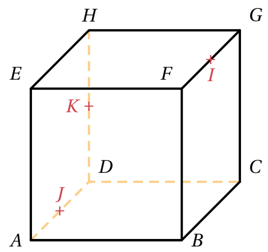
$$\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Donner un vecteur directeur de Δ et un point de Δ.

Solution :
$\vec{u}(4\,;\,0\,;\,-1)$ dirige Δ et $A(-3\,;\,2\,;\,0)$ appartient à Δ.

2 Étude de positions relatives

Pour les exercices suivants, $ABCDEFGH$ est un cube et I, J et K sont les milieux respectifs de $[FG]$, $[AD]$ et $[DH]$.



EXERCICE 12 :
Déterminer en justifiant les positions relatives des droites ci-dessous.
On donnera leur intersection éventuelle.

1. (IB) et (GC).
2. (HB) et (GA).
3. (GC) et (BA).

EXERCICE 13 :
Déterminer en justifiant les positions relatives des droites ci-dessous.
On donnera leur intersection éventuelle.

1. (JK) et (AH).
2. (FD) et (GH).
3. (IB) et (HJ).

EXERCICE 14 :
Déterminer en justifiant les positions relatives des droites et plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.

1. (EJ) et (HDA).
2. (JK) et (ABE).
3. (IJ) et (AFG).

EXERCICE 15 :
Déterminer en justifiant les positions relatives des droites et plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.

1. (FH) et (ACE).
2. (EJ) et (BCG).
3. (IJ) et (ABE).

EXERCICE 16 :
Déterminer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous.
On donnera leur intersection éventuelle.

1. (ABJ) et (GIC).
2. (KGI) et (EAD).
3. (KGI) et (ABE).

EXERCICE 17 :
Déterminer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous.
On donnera leur intersection éventuelle.

1. (EBG) et (HDC).
2. (EBI) et (HDC).
3. (IJK) et (HDC).

EXERCICE 18 :
$ABCD$ est un tétraèdre, I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CD]$ et $[AC]$.
Déterminer en justifiant les positions relatives des éléments ci-dessous.
On donnera leur intersection éventuelle.

1. (IK) et (AD).
2. (IK) et (AB).
3. (IJ) et (AID).
4. (ABJ) et (ACD).
5. (DIK) et (ABD).
6. (IJ) et (KBD).

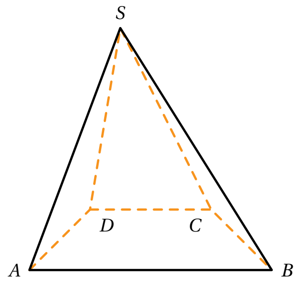
EXERCICE 19 :
$ABCDE$ est une pyramide de sommet A à base rectangulaire et I est un point du segment $[AE]$.

1. Justifier que la droite (BC) est parallèle au plan (EAD).
2. En déduire l'intersection des plans (IBC) et (EAD).

EXERCICE 20 :
A, B, C et D sont quatre points non coplanaires et Δ est la droite parallèle à (BC) passant par D. I est le milieu de $[AC]$.
Quelle est l'intersection de Δ avec :

1. Le plan (IBD) ?
2. Le plan (ABC) ?

EXERCICE 21 :
$ABCDS$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze.



Reproduire la figure et construire les intersections des plans :

1. (SAB) et (SDC) ;
2. (SAD) et (SBC).

EXERCICE 22 :
$ABCDEFGH$ est un pavé droit, I le point du segment $[AE]$ tel que $AI = \frac{3}{4}AE$ et J le point du segment $[CG]$ tel que $CJ = \frac{1}{4}CG$.
Les droites suivantes sont-elles coplanaires ?

1. (AB) et (IF) ;
2. (DJ) et (IF) ;
3. (BC) et (AE) ;
4. (EH) et (IJ) .

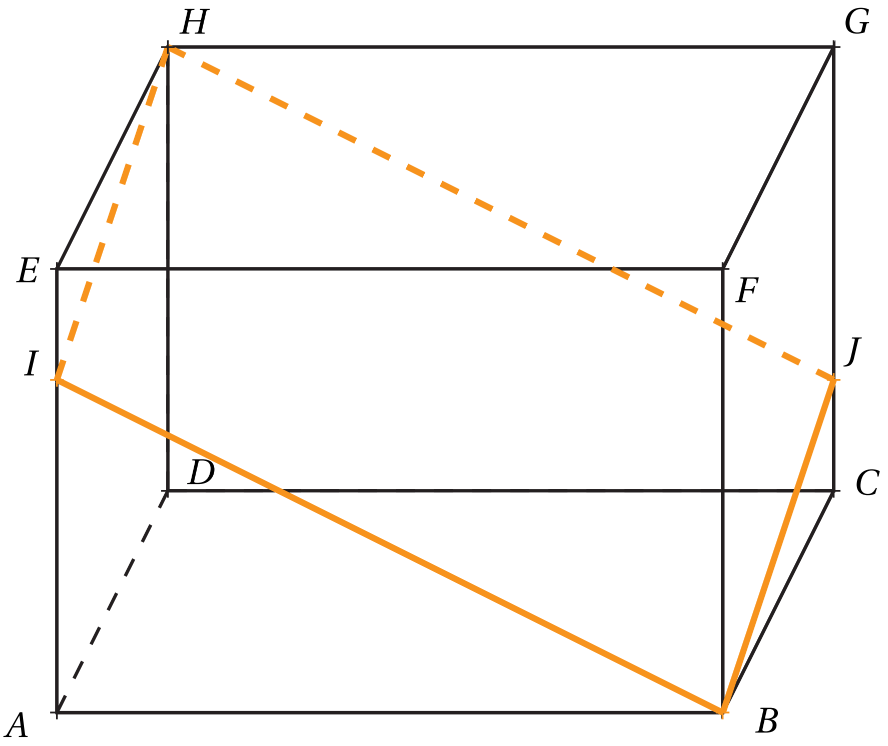
3 Sections

EXERCICE 23 :

1. Reproduire la figure de l'exercice précédent.
2. Tracer l'intersection du plan (BIJ) avec la face $EABF$.
3. Tracer l'intersection du plan (BIJ) avec la face $DCGH$.
4. Terminer la construction de la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (BIJ).

Solution : /

1. L'intersection du plan (BIJ) avec la face $EABF$ est le segment $[BI]$.
2. L'intersection du plan (BIJ) avec la face $DCGH$ est la parallèle à (IB) passant par J. C'est le segment $[JH]$.



EXERCICE 24 :

1. Reproduire la figure de l'exercice précédent.
2. Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $EADH$.
3. Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $DCGH$.
4. Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $BCGF$.
5. Terminer la construction de la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (DIJ).

EXERCICE 25 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I et J les points tels que $I \in [HD]$ et $HI = \frac{2}{3}HD$; $J \in [FG]$ et $FJ = \frac{3}{4}FG$.
Construire la section du cube par le plan (EIJ).

EXERCICE 26 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que $I \in [EF]$ et $EI = \frac{1}{3}EF$; $J \in [BC]$ et $BJ = \frac{1}{2}BC$; $K \in [HG]$ et $HK = \frac{3}{4}HG$.
Construire la section du cube par le plan (IJK).

EXERCICE 27 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CD]$ et $[EH]$.
Construire la section du cube par le plan (IJK).

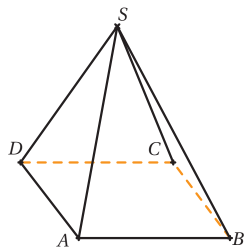
EXERCICE 28 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que $I \in [AE]$ et $AI = \frac{1}{4}AE$; $J \in [DH]$ et $DJ = \frac{3}{4}DH$; $K \in [FG]$ et $FK = \frac{1}{3}FG$.
Construire la section du cube par le plan (IJK).

EXERCICE 29 :
$ABCDEFGH$ est un cube ; I est le milieu de $[EH]$; J est le milieu de $[BC]$ et K le point du segment $[GH]$ tel que : $HK = \frac{2}{3}HG$.
Déterminer et construire la section du cube par le plan (IJK).

EXERCICE 30 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que : $I \in [AD]$ et $AI = \frac{1}{3}AD$; $J \in [FG]$ et $FJ = \frac{2}{3}FG$; $K \in [AB]$ et $AK = \frac{1}{3}AB$.
Déterminer et construire la section du cube par le plan (IJK).

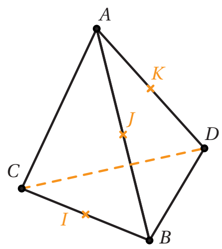
EXERCICE 31 :
On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme ci-dessous.

1. Reproduire la figure et placer les points I et J milieux respectifs des segments $[SD]$ et $[AB]$
2. Construire en justifiant la section de la pyramide par le plan (CIJ).



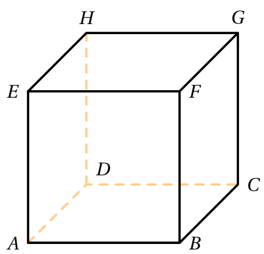
EXERCICE 32 :
On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ comme ci-dessous avec I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[AD]$.

1. Reproduire la figure.
2. Construire en justifiant la section du tétraèdre par le plan (IJK).
3. Quelle est la nature de cette section ? Justifier.



4 Orthogonalité

Pour les exercices suivants, $ABCDEFGH$ est un cube.



EXERCICE 33 :

1. Citer six droites orthogonales à la droite (EA) ;
2. Citer six droites orthogonales à la droite (EB) ;

3. Citer deux droites orthogonales au plan (BCG) ;
4. Citer deux droites orthogonales au plan (AFG).

EXERCICE 34 :

1. Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG).
2. En déduire que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.

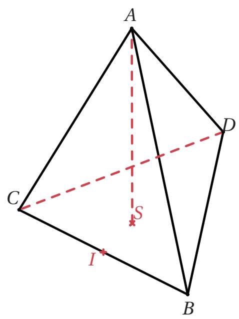
Solution : /

1. Les droites (BC) et (BF) sont deux droites sécantes du plan (BCG) et, par propriété du cube, $(AB) \perp (BC)$ et $(AB) \perp (BF)$.
   Donc (AB) est orthogonale au plan (BCG).
2. (AB) est orthogonale au plan (BCG), donc (AB) est orthogonale à toute droite du plan(BCG), et en particulier, (AB) et (CF) sont orthogonales.

EXERCICE 35 :
Les droites suivantes sont-elles orthogonales ? Le démontrer.

1. (EG) et (GC) ;
2. (EB) et (EG) ;
3. (AF) et (BC) ;
4. (AC) et (HF) ;
5. (BD) et (EC) ;
6. (CE) et (AG).

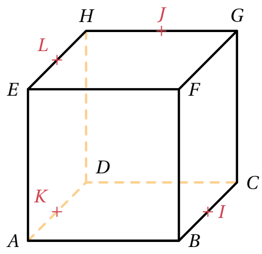
EXERCICE 36 :
$ABCD$ est un tétraèdre régulier, S est le pied de la hauteur issue de A relativement à la base BCD et I est le milieu de $[BC]$.



1. Démontrer que les droites (AS) et (BC) sont orthogonales.
2. En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (AIS).
3. En déduire que les points A, I, S et D sont coplanaires et que les points I, S et D sont alignés.

5 Vecteurs

Pour les exercices suivants, $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



EXERCICE 37 :
Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{A...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E...}$
3. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A...}$

EXERCICE 38 :
Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{L...} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AI}$
3. $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JL}$

EXERCICE 39 :
Dans chacun des cas suivants, les vecteurs sont-ils coplanaires ? Le justifier.

1. $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EG}$;
2. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BF}$;
3. $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{HG}$;
4. $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

EXERCICE 40 :
Le point M est défini par $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF}$

1. En fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ exprimer les vecteurs suivants :
   $\overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{MJ}$.
2. Les droites (BK) et (MJ) sont-elles parallèles ?

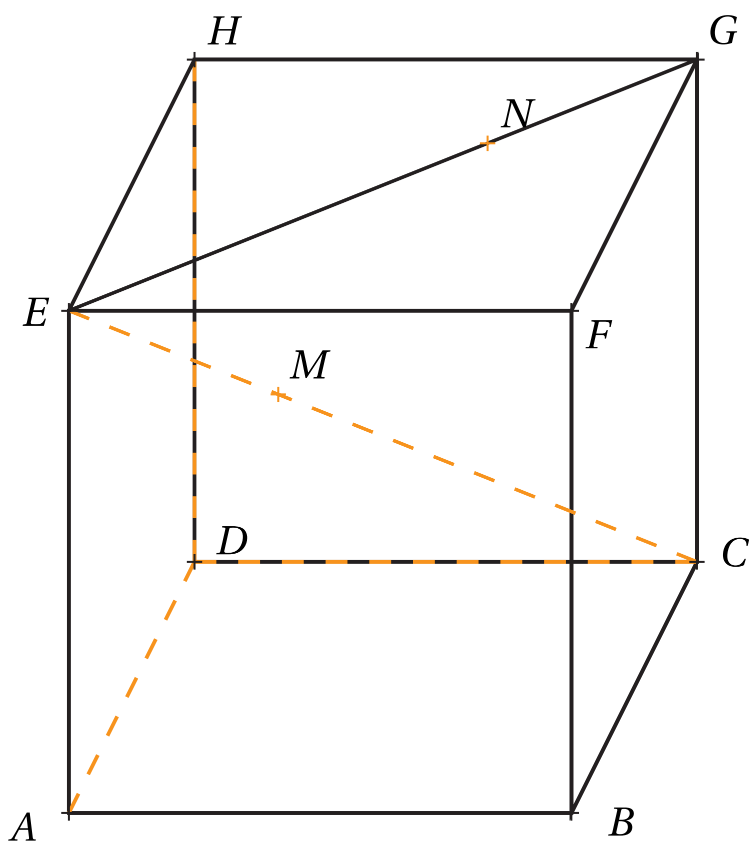
   Le démontrer en utilisant la question précédente.
3. Que peut-on en déduire concernant les points B, K, M et J ?

EXERCICE 41 :
On considère les points M et N définis par :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$
et
$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$.

1. Construire la figure.
2. Démontrer que les points C, E et M sont alignés.
3. Démontrer que les points E, F, H et N sont coplanaires.

Solution :

1.



2. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} =$
$-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} =$
$-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et
$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CM}$.
Donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires et les points C, E et M sont alignés.

3. $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{FB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$. Donc $N \in (EFG)$ et les points E, F, H et N sont coplanaires.

EXERCICE 42 :
Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{LE}$ sont coplanaires.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

EXERCICE 43 :
$ABCDEFGH$ est un cube.
On considère le point K défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{HF}$ et M un point du segment $[BF]$.

1. Que peut-on dire des points D, M, K et H ?
2. Montrer qu'il existe un unique réel $t \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BF}$.

3. Montrer que si $t = \frac{4}{5}$, les points D, M et K sont alors alignés.

EXERCICE 44 :
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3;2;4)$; $B(-1;1;0)$ et $C(2;-3;5)$. Déterminer les coordonnées des points M, N et P définis par :

1. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
2. $\overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{BC}$
3. $2\overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

EXERCICE 45 :
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-4;2;3)$, $B(1;5;2)$, $C(0;5;4)$ et $D(-6;-1;-2)$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
2. Que peut-on en déduire concernant les points A, B, C et D ?

Solution : /

1. $\overrightarrow{AD}(-2\,;\,-3\,;\,-5)$. D'autre part :
   $\overrightarrow{AB}(5\,;\,3\,;\,-1)$ donc $2\overrightarrow{AB}(10\,;\,6\,;\,-2)$ et
   $\overrightarrow{AC}(4\,;\,3\,;\,1)$ donc $-3\overrightarrow{AC}(-12\,;\,-9\,;\,-3)$.
   Ainsi $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}(-2\,;\,-3\,;\,-5)$. Donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
2. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, et que les points A, B, C et D sont coplanaires.

EXERCICE 46 :
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(0;3;-1)$, $B(2;-2;0)$, $C(4;1;5)$ et $D(2;21;12)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Le point D appartient-il à ce plan ?

EXERCICE 47 :
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(5;0;-3)$, $C(2;-2;-2)$ et $D(0;5;-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Le point D appartient-il à ce plan ?

EXERCICE 48 :
On reprend l'énoncé de l'exercice 42 en se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Écrire les coordonnées des points de la figure. On écrira les coordonnées de M en fonction de t.
2. Démontrer à l'aide des coordonnées que D, M et I sont alignés si et seulement si $t = \frac{4}{5}$.

6 Représentations paramétriques

Dans toute cette partie, on munit l'espace d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

EXERCICE 49 :
On considère les points $A(-3\,;\,2\,;\,4)$ et $B(-1\,;\,1\,;\,0)$. Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

EXERCICE 50 :

Soit Δ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = 3+t \\ z = 1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
2. Le point $M(-3;4;1)$ appartient-il à la droite Δ ?
3. Donner les coordonnées de trois points de la droite Δ.
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de Δ.

EXERCICE 51 :
Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t-2 \\ y = 4 \\ z = 2t-1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
2. Le point $M(-3;4;-3)$ appartient-il à la droite Δ ?
3. Donner les coordonnées de trois points de Δ.
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de la droite Δ.

EXERCICE 52 :
Soient $A(-4;1;2)$ et $B(-1;2;5)$. Donner une
représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants :

1. La droite (AB) ;
2. Le segment $[AB]$;
3. La demi-droite $[AB)$.

EXERCICE 53 :
Donner une représentation paramétrique de :

1. La droite $(O ; \vec{i})$;
2. La droite $(O ; \vec{j})$;
3. La droite $(O ; \vec{k})$.

EXERCICE 54 :
On considère les points $A(-3 ; 2 ; 4)$, $B(-1 ; 1 ; 0)$ et $C(-5 ; 4 ; 6)$.
Vérifier que A, B et C définissent un plan et écrire une représentation paramétrique du plan (ABC).
EXERCICE 55 :
Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3-t+5t' \\ y = 1+t' \\ z = -5t+3t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Donner les coordonnées d'un couple de vecteurs
directeurs de $\wp$ et un point de $\wp$.
2. Le point $M(6;2;-6)$ appartient-il à $\wp$?
3. Donner les coordonnées de trois points de $\wp$.
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de $\wp$.

EXERCICE 56 :
Soient $A(-4;1;2)$; $B(-1;2; 5)$ et $C(1;0;6)$.

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).
4. Démontrer que le point $D(-3;-4;1)$ appartient au plan (ABC).
5. Déterminer une autre représentation paramétrique du plan (ABC).

EXERCICE 57 :
Donner une représentation paramétrique des plans suivants :

1. Le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
2. Le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$;
3. Le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE 58 :
Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1. $\begin{cases} x = -k \\ y = 3 + 2k \\ z = 4 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

2. $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 3 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x = k - 2 \\ y = 7 - 3k \\ z = 2 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Solution : /

Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-1\ ;\ 3\ ;\ 1)$

1. d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}(-1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ qui n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{u}$. Δ et d sont donc soit sécantes, soit non coplanaires.

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \\ z=-1+t \\ x=-k \\ y=3+2k \\ z=4-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k=1-t \\ 3+2k=-2+3t \\ 4-k=-1+t \\ x=-k \\ y=3+2k \\ z=4-k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k=t-1 \\ -2+3t=1+2t \\ 4-t+1=-1+t \\ x=-k \\ y=3+2k \\ z=4-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ t=3 \\ t=3 \\ x=-2 \\ y=7 \\ z=2 \end{cases}$$

Les droites d et Δ sont donc sécantes en $A(-2\ ;\ 7\ ;\ 2)$.

2. d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -1)$ qui n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{u}$. Δ et d sont donc soit sécantes, soit non coplanaires.

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \\ z=-1+t \\ x=1+k \\ y=-2k \\ z=3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+k=1-t \\ -2k=-2+3t \\ 3-k=-1+t \\ x=1+k \\ y=-2k \\ z=3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-t \\ t=2 \\ 3=-1!!! \\ x=1+k \\ y=-2k \\ z=3-k \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution et les droites d et Δ sont donc non coplanaires.

3. d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1\ ;\ -3\ ;\ -1)$ qui est pas colinéaire avec $\overrightarrow{u}$. Δ et d sont donc parallèles. $B(1\ ;\ -2\ ;\ -1) \in \Delta$. Vérifions si $B \in d$ pour savoir si elles sont confondues :

$$\begin{cases} 1=1+k \\ -2=-2k \\ -1=3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=4 \end{cases}.$$

Il n'existe pas de réel k tel que les coordonnées de B vérifient le système, donc B n'appartient pas à d et les droites d et Δ sont strictement parallèles.

EXERCICE 59 :

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=8+2t \\ y=-5-4t \\ z=3+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1. $$\begin{cases} x=2+3t \\ y=7-6t \\ z=-3+3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

2. $$\begin{cases} x=1-t \\ y=4-t \\ z=2 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

$$\textbf{3. } \begin{cases} x=-1+t \\ y=7-2t \\ z=-2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 60 :
Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=t-2t' \\ y=1+3t+t' \\ z=2-5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

Déterminer la nature de $\wp \cap \wp'$ dans chacun des cas
suivants où $\wp'$ est définie par une représentation paramétrique :

$$\textbf{1. } \begin{cases} x=-2-3t-t' \\ y=2-2t+4t' \\ z=2+5t-5t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{2. } \begin{cases} x=4-3t+5t' \\ y=-2t+t' \\ z=5+5t-5t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{3. } \begin{cases} x=-3+2t+t' \\ y=2-t+2t' \\ z=1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 61 :
Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=4-t+3t' \\ y=1-t+5t' \\ z=t-t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\wp$ et du plan :

1. $(O; \vec{i}, \vec{j})$
2. $(O; \vec{i}, \vec{k})$
3. $(O; \vec{j}, \vec{k})$

EXERCICE 62 :
Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=4-t+3t' \\ y=1-t+5t' \\ z=t-t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de $\wp$ avec la droite d donnée par une représentation paramétrique :

$$\textbf{1. } \begin{cases} x=2+t \\ y=3+3t \\ z=5-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{2. } \begin{cases} x=1+4t \\ y=10t \\ z=-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{3. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=-3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 63 :
Soit $ABCDEFGH$ un cube ; I et J les milieux respectifs de $[EG]$ et $[GH]$.
On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AI) puis de la droite (DJ).

2. Démontrer que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.