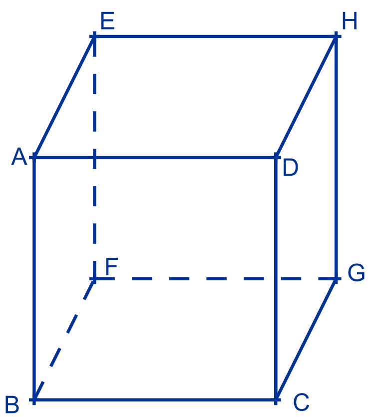
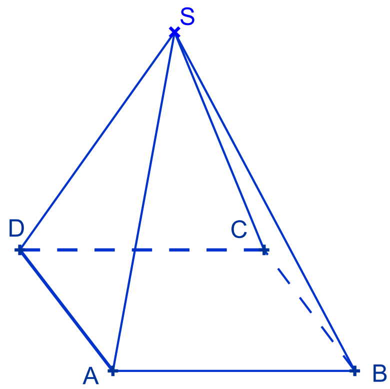
Espace : droites, plans et vecteurs
Connaissances nécessaires à ce chapitre :
— Utiliser une représentation d'un objet de l'espace
— Calculer des aires et des volumes
— Maîtriser le calcul vectoriel dans le plan avec ou sans repère
— Utiliser la colinéarité de deux vecteurs
— Résoudre des systèmes.



1. $ABCDEFGH$ est un cube de côté a.
   (a) Exprimer la distance EB en fonction de a.
   (b) Préciser la nature du triangle FBC.
   (c) Étudier la nature du triangle EBG.
2. $ABCDEFGH$ est un cube de côté a.
   (a) Calculer le volume de ce cube.
   (b) Calculer le volume du tétraèdre $ABDE$.
   (c) En déduire le volume du polyèdre $BCGFEHD$
3. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit $A(1;4)$, $B(-2;-1)$, $C(-1;0,7)$ et $E(1;1)$.
   (a) A, B et C sont-ils alignés ?
   (b) Soit $\mathscr{D}$ la droite parallèle à (AB) passant par E et $M(x;y)$ un point de $\mathscr{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel t tel que $\overrightarrow{EM} = t\overrightarrow{AB}$.
   (c) Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{AB}$.
4. Résoudre les systèmes suivants :
   (a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} y = 4x - 3 \\ -12x + 5y = 9 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -12x + 3y = 7 \end{cases}$

ACTIVITÉ 1 Voir ou revoir dans l'espace...

Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de centre O.
Soit I et J les milieux respectifs des segments $[SC]$ et $[SD]$ et K le point du segment $[SB]$ tel que $SK = \frac{1}{3}SB$.



1. Reproduire et compléter la figure en perspective cavalière.
2. Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire des positions relatives des droites citées ?
   (a) (OB) et (CD)
   (b) (IJ) et (AB)
   (c) (OK) et (SD)
   (d) (OK) et (AS)
3. Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire des positions relatives des plans cités ?
   (a) (OCK) et (SAD)
   (b) (OIJ) et (SAB)
   (c) (IJK) et (BAC)
4. Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire des positions relatives de la droite et du plan cités ?
   (a) (SK) et (OCD)
   (b) (IJ) et (ABC)
   (c) (OC) et (ABD)
5. Résumer les positions relatives possibles dans un tableau pour chacun des cas suivants :

(a) Pour deux droites de l'espace.

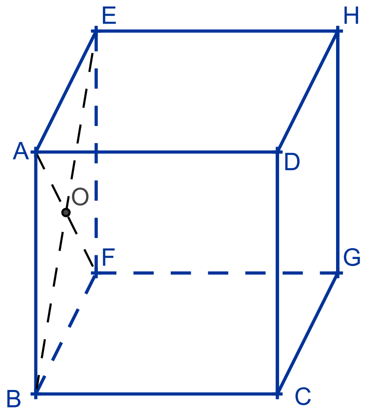
(b) Pour deux plans de l'espace.

(c) Pour un plan et une droite de l'espace.

ACTIVITÉ 2 Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur étudiée dans le plan. Un vecteur est donc défini par sa direction, son sens et sa norme et les propriétés des vecteurs du plan sont aussi étendues aux vecteurs de l'espace (relation de Chasles, colinéarité, propriétés algébriques.

On considère la figure ci-contre où $ABCDEFGH$ est un cube et O est le centre du carré $ABEF$.



1. Citer trois vecteurs égaux.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. Reproduire la figure et placer le point M défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$.
   Citer un plan contenant le point M.
4. Placer le point N défini par $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
   Citer un plan contenant le point N.
5. Conjecturer une caractérisation vectorielle de l'appartenance d'un point à un plan défini par trois points non alignés.

ACTIVITÉ 3 : Définir une droite ou un plan par un système d'équations

PARTIE A : Droite de l'espace

Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace, on considère une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-6;1;5)$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

1. (a) Écrire une relation vectorielle traduisant l'appartenance du point M à la droite $\mathscr{D}$.
   (b) Écrire un système que doivent vérifier les coordonnées $(x;y;z)$ du point M pour que M appartienne à la droite $\mathscr{D}$.
2. Reprendre la première question avec $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$.

PARTIE B : Plan de l'espace

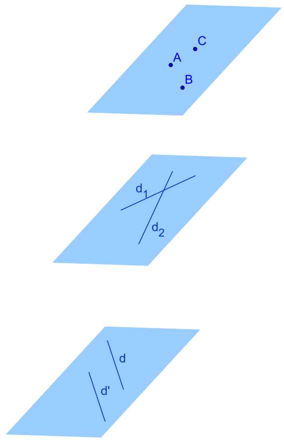
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère un plan $\mathscr{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\-3\\8\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-6;1;5)$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

1. (a) Écrire une relation vectorielle traduisant l'appartenance du point M au plan $\mathscr{P}$.
   (b) Écrire un système que doivent vérifier les coordonnées $(x;y;z)$ du point M pour que M appartienne au plan $\mathscr{P}$.
2. Reprendre la première question avec $\mathscr{P}$ dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$.

1. Positions relatives de droites et plans

RAPPELS :



(a) Un plan est défini par :

- trois points non alignés ou
- deux droites sécantes ou
- deux droites strictement parallèles.

(b) Si un plan $\mathscr{P}$ contient deux points distincts A et B de l'espace, alors il contient la droite (AB). On note $(AB) \subset \mathscr{P}$.

(c) Tous les résultats de géométrie plane (théorèmes de Thalès, de Pythagore...) s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Dans la suite du paragraphe, $ABCDEFGH$ est un cube.

PROPRIÉTÉS : Positions relatives de deux droites
Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (c'est-à-dire qu'il existe un plan les contenant toutes les deux), soit non coplanaires (c'est-à-dire qu'il n'existe aucun plan les contenant toutes les deux) ; Si elles sont coplanaires, alors elles sont soit sécantes, soit parallèles (strictement parallèles ou confondues)

[gray]0.6	droites coplanaires (dans un même plan)	21 cm droites non coplanair
[gray]0.8 droites sécantes	droites strictement parallèles	droites confondues

PROPRIÉTÉS : Positions relatives de deux plans
Deux plans de l'espace sont soit sécants (leur intersection est une droite), soit parallèles.

[gray]0.8 plans sécants	plans parallèles

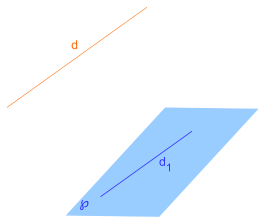
PROPRIÉTÉS : Positions relatives d'une droite et d'un plan
Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

[gray]0.8 droite et plan sécants	droite et plan parallèles

2. Parallélisme dans l'espace

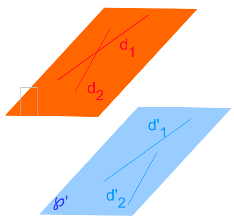
PROPRIÉTÉ :
— Si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
— Si deux plans sont parallèles à un même plan alors ils sont parallèles entre eux.

PROPRIÉTÉ : Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.



Exemple :
d est parallèle à d_1 et d_1 est contenue dans le plan $\wp$ donc d est parallèle à $\wp$.

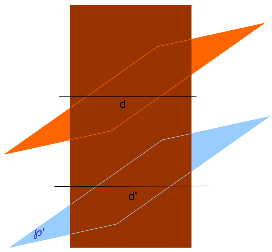
PROPRIÉTÉ : Si un plan $\wp$ contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes d' un plan $\wp'$ alors les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles
Exemple :



d_1 et d_2 sont deux droites du plan $\wp$; d_1 et d_2 sont sécantes et parallèles à deux droites du plan $\wp'$ donc les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles.

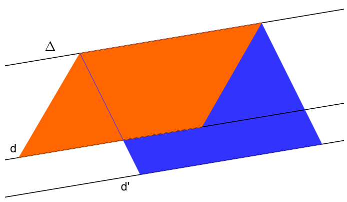
PROPRIÉTÉ : Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles entre elles.

Exemple :



Les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles et $\wp$ et $\wp''$ sont sécants avec $\wp \cap \wp'' = d$ donc $\wp'$ et $\wp''$ sont sécants et $\wp' \cap \wp'' = d'$ où d' est une droite parallèle à d.

PROPRIÉTÉ Théorème du toit :



Soit $\wp$ et $\wp'$ deux plans distincts, sécants selon une droite Δ.

Si une droite d de $\wp$ est strictement parallèle à une droite d' de $\wp'$ alors la droite Δ intersection de $\wp$ et $\wp'$ est parallèle à d et à d'.

Preuve : Par hypothèse, $\wp \cap \wp' = \Delta$ et $d//d'$ Les droites d et d' sont parallèles donc elles sont coplanaires. Donc, il existe un plan Q qui contient à la fois d et d'. Mais alors d et Δ sont contenues dans $\wp$; et d' et Δ sont contenues dans $\wp'$. Donc : $\wp \cap Q = d$ et $\wp' \cap Q = d'$. Montrons que $d//\Delta$. Supposons que d et Δ ne soient pas parallèles. Donc elles sont sécantes en un point A.

$A \in d$ et $A \in \Delta$.

- $A \in d$ et $d = \wp \cap Q$ donc $A \in Q$.
- $A \in \Delta$ et $\Delta = \wp \cap \wp'$ donc $A \in \wp'$.

D'où $A \in Q \cap \wp' = d'$.

Par conséquent, $A \in d'$ et $A \in d$ et par conséquent, d et d' sont sécantes en A. Ce qui est absurde, contraire à notre hypothèse.

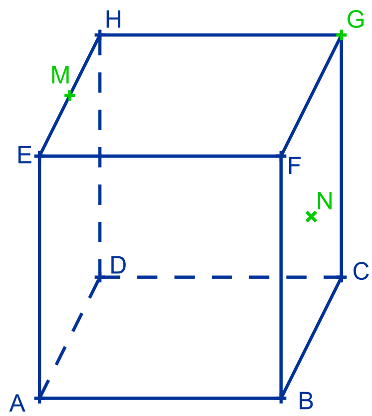
Les droites d et Δ sont donc parallèles. De plus, comme d et d' sont

parallèles, on en déduit que les droites d' et Δ sont aussi parallèles.
Conclusion : L'intersection de $\wp$ et $\wp'$ est une droite Δ parallèle à la fois à d et à d'.

Remarque : une autre démonstration de ce théorème est proposée dans l'exercice 67

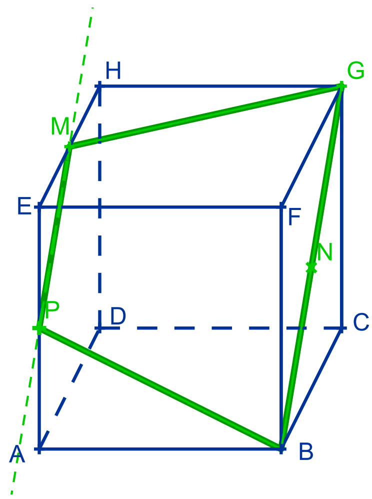
Méthode 1 : Construire la section d'un solide par un plan : Ex. 23 p. ? ? ?
Il s'agit de construire l'intersection de ce plan avec chacune des faces du solide.

Exercice d'application : On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. On note M le milieu du segment $[EH]$ et N celui de $[FC]$.



Tracer la section de ce cube par le plan (MNG) .

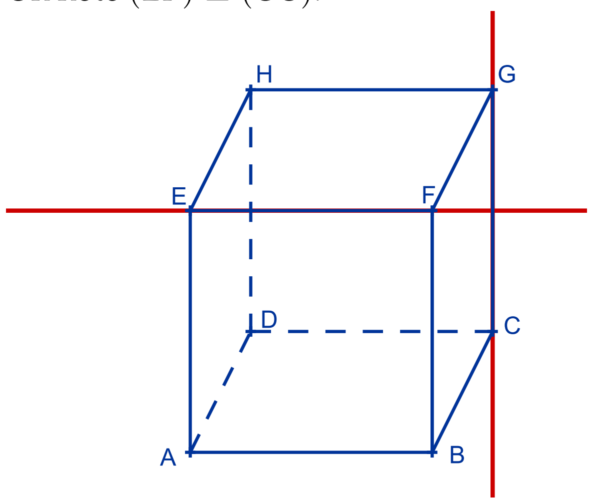
Correction :
L'intersection du plan (MNG) avec la face $HEFG$ est le segment $[MG]$. Il est visible, on le trace donc en trait plein.
G, N et B sont alignés, donc l'intersection du plan (MNG) avec la face $FGCB$ est le segment $[GB]$. Il est visible, on le trace donc en trait plein.
Les faces $EHDA$ et $FGCB$ étant parallèles, l'intersection du plan (MNG) avec la face $EHDA$ est le segment passant par M et parallèle à (GN).
Il n'est pas visible, on le trace donc en pointillés.
Notons P le point d'intersection de (MNG) et (EA). L'intersection du plan (MNG) avec la face $ABFE$ est le segment $[PB]$. Il est visible, on le trace donc en trait plein.
La section du cube par le plan (MNG) est le polygone $MGBP$ hachuré en vert.Comme $(MP)//(GB)$, il s'agit d'un trapèze.



3. Orthogonalité dans l'espace
   Définition : Orthogonalité de deux droites
   Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.

   Remarque : Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais la réciproque est fausse.

   Exemple : Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre,
   $(EF)//((HG)$ et $(HG) \perp (GC)$ donc (EF) et (GC) sont orthogonales.
   On note $(EF) \perp (GC)$.



   Définition : Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Théorème : Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Méthode 2 : Démontrer l'orthogonalité de deux droites Ex. 30 p. ? ? ?
Exercice d'application : Dans le cube $ABCDEFGH$ représenté dans l'exemple précédent, démontrer que $(GC) \perp (BD)$.
Correction : La droite (GC) est perpendiculaire à (BC) et à (CD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC) donc (GC) est orthogonale au plan (ABC) donc à toutes les droites de ce plan. En particulier, on en déduit que $(GC) \perp (BD)$.

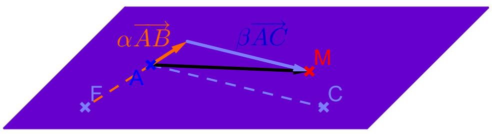
4. Vecteurs de l'espace
On étend à l'espace la définition et les propriétés des vecteurs étudiées dans le plan.

Propriétés : vecteurs colinéaires :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Propriété caractéristique : A et B étant deux points distincts de l'espace, la droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Définition : Vecteurs coplanaires
Trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement leurs représentants de même origine A ont des extrémités B, C et D telles que A, B, C et D appartiennent à un même plan.

Propriété caractéristique : A , B et C étant trois points non alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, avec α et β deux nombres réels.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan (ABC).

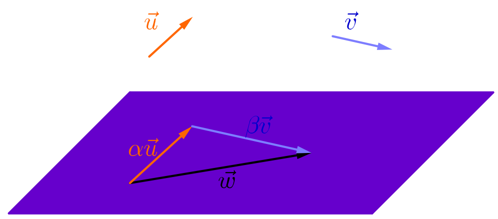


Preuve : A, B et C ne sont pas alignés. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc un repère du plan (ABC).

— Si M appartient à (ABC), alors M, A, B et C étant coplanaires, il existe α et β deux nombres réels tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

— Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, avec α et β deux nombres réels, alors il existe un point N de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \beta\overrightarrow{AC}$. M est donc un point de la droite parallèle à (AC) passant par N. Donc, comme $N \in (ABC)$, $M \in (ABC)$.

Propriété : Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.



Preuve : Soit A, B, C et M les points de l'espace tels que $\vec{w} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si A, B, C et M sont coplanaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $A\vec{M} = \alpha A\vec{B} + \beta A\vec{C} \Leftrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Méthode 3 : Démontrer que quatre points sont coplanaires : Ex. 37 p. ? ? ?
Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un en fonction des deux autres.
Exercice d'application : Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que $BCGD$ soit un parallélogramme.

(a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

(b) En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{IE} + \beta\overrightarrow{IF}$.

(c) En déduire que les points I, E, G et F sont coplanaires.

Correction :

(a) $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

(b) Il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{IE} + \beta\overrightarrow{IF} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2\alpha}{3}\overrightarrow{AC} + -\frac{\beta}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2\beta}{3}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ et $\frac{2}{3}\alpha = 1$ et $\frac{2}{3}\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$.
D'où $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IF}$

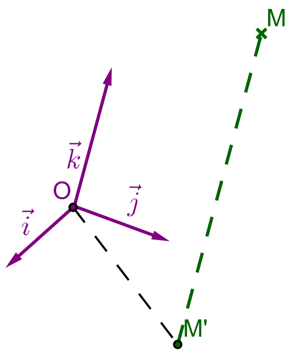
(c) On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires, donc les points I, E, G et F sont coplanaires.

5. Repérage dans l'espace

Théorème : Si O est un point de l'espace et $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

Preuve :

— EXISTENCE
Soit $\wp$ le plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ (qui ne sont pas colinéaires car $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont non coplanaires).
Soit M' le point d'intersection de $\wp$ et de la droite parallèle à



$(O\overrightarrow{k})$ passant par M.

$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont coplanaires avec $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ non colinéaires, donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. D'autre part, $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{MM'} = z\overrightarrow{k}$. D'où $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$

— UNICITÉ

Supposons qu'il existe deux triplets de réels $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.

On a alors $(z'-z)\overrightarrow{k} = (x-x')\overrightarrow{i} + (y-y')\overrightarrow{j}$.

Comme $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires, il n'existe pas de couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que $\overrightarrow{k} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$, on en déduit que $z - z' = 0$, et par suite, que $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Définition : $(x;y;z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M. $(x;y;z)$ sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Propriétés : Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

et le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées : $K\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2};\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Si de plus $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Propriétés : Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel. Alors :
$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$.
Si de plus $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé,
$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Méthode 4 : Utiliser les coordonnées pour étudier la coplanarité de quatre points : Ex. 41 p. ? ? ?
Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant un vecteur en fonction des deux autres.
Exemple : Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, Démontrer que les points $A(1;2;0)$, $B(-1;1;1)$, $C(1;4;1)$ et $D(3;-1;-3)$ sont coplanaires.
Correction : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}2=-2\alpha\\-3=-\alpha+2\beta\\-3=\alpha+\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-2\end{cases}.$$

Le système ayant un unique couple solutions, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

6. Représentation paramétrique de droites et de plans
Propriété : Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.
$M(x;y;z)\in\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\y=y_A+t\beta\\z=z_A+t\gamma\end{cases}$$

Preuve : $M(x;y;z)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x_A+t\alpha\\y=y_A+t\beta\\z=z_A+t\gamma\end{cases}$

Définition : On dit que le système d'équations :
$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$ où $t \in \mathbf{R}$ est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Propriété : Dans un repère$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, le plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$.
$M(x; y; z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$

Preuve : $M(x; y; z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$ Cela se traduit en terme de coordonnées par :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$

.

Définition : On dit que le système d'équations :
$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$ où $t \in \mathbf{R}$ et $t' \in \mathbf{R}$ est une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$.

Remarque : il existe une infinité de représentations paramétriques, que ce soit pour une droite ou pour un plan.

Méthode 5 : utiliser des représentations paramétriques pour déterminer des intersections : Ex. 52 p. ? ? ?

Exercice d'application : Étudier les positions relatives du plan $\wp$ et

de la droite d puis du plan $\wp$ et de la droite d'. On donnera leur intersection éventuelle.
Le plan $\wp$ a pour représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = -2 + t - t' \quad \text{avec } t \in \mathbf{R} \text{ et } t' \in \mathbf{R} \\ z = 3 - t \end{cases}$
La droite d a pour représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 - 2t \quad \text{avec } t \in \mathbf{R} \\ z = 1 + 2t \end{cases}$
La droite d' a pour représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \quad \text{avec } t \in \mathbf{R} \\ z = 1 + 3t \end{cases}$
Correction
Attention : la même lettre t désigne deux paramètres différents. Il faut donc changer de lettre dans les résolutions de système pour les différencier.

$\wp$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$. d et d' ont pour vecteur directeur respectif $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w'}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$ donc d est parallèle à $\wp$. Le point $A(2;5;1)$ appartient à d. S'il appartient à $\wp$ alors $d \subset \wp$, sinon d est strictement parallèle à $\wp$.
Or, $\begin{cases} 2 = 1 - 2t + 3t' \\ 5 = -2 + t - t' \\ 1 = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t + 3t' = 1 \\ t - t' = 7 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{5}{3} \\ t' = -5 \\ t = 2 \end{cases}$
Le système n'ayant pas de solution, $A \notin \wp$ donc d est strictement parallèle à $\wp$.
Déterminons maintenant $\wp \cap d'$: $M \in \wp \cap d' \Leftrightarrow$ il existe trois réels t, t' et k tels que :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = -2 + t - t' \\ z = 3 - t \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - k = 1 - 2t + 3t' \\ -2 + k = -2 + t - t' \\ 1 + 3k = 3 - t \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k + 2t - 3t' = -3 \\ k - t + t' = 0 \\ 3k + t = 2 \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

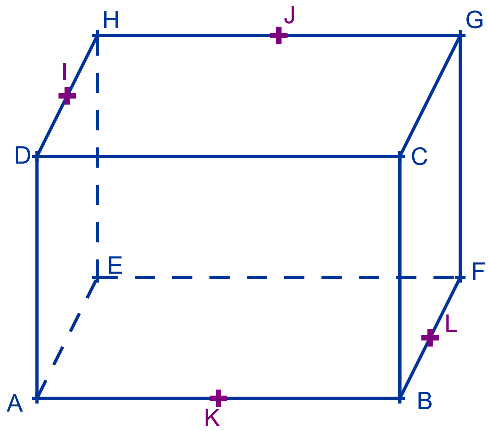
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - 2t' = -3 \\ 3k - 3t + 3t' = 0 \\ 3k + t = 2 \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - 8t' = -12 \\ -4t + 3t' = -2 \\ 2k + t = 2 \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5t' = -14 \\ 4t = 3t' + 2 \\ 2k = -t + 2 \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{14}{5} \\ t = \frac{52}{20} \\ k = \frac{-1}{5} = -0,2 \\ x = 4,2 \\ y = -2,2 \\ z = 0,4 \end{cases}$$

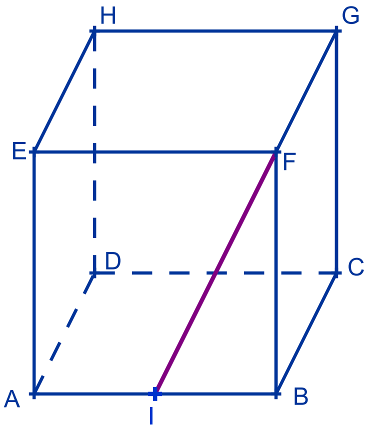
Ainsi, $\wp$ et d' sont sécantes au point $K(4,2; -2,2; 0,4)$

S'ENTRAINER Activités mentales

Pour les exercices 1 à 3, $ABCDEFGH$ est un pavé droit ; I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$.



1. Donner la position relative des deux droites citées :
   (a) (DB) et (EF) ;
   (b) (IJ) et (AF) ;
   (c) (IC) et (AB) ;
   (d) (JF) et (EH).
2. Donner la position relative des deux plans cités :
   (a) (DCG) et (AEF) ;
   (b) (IJA) et (HDC) ;
   (c) (IJE) et (CKL).
3. Donner la position relative de la droite et du plan cités :
   (a) (IJ) et (ABF) ;
   (b) (IJ) et (BCG) ;
   (c) (KE) et (ABF).
4. $ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$.



   Quelle est la nature de la section du cube par :
   (a) le plan (IFG) ?
   (b) le plan (IFC) ?
5. $ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$ (voir figure de l'exercice 4).
   Les droites suivantes sont-elles orthogonales ?
   (a) (IF) et (FG) ?
   (b) (IF) et (FH) ?
   (c) (BF) et (EH) ?
   (d) (BF) et (AC) ?
6. $ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$ (voir figure de l'exercice 4).
   Compléter les égalités vectorielles suivantes :
   (a) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{F...}$
   (b) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{B...}$
   (c) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DG} = ...$

7. $ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$ (voir figure de l'exercice 4).

   (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{FI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

   (b) O étant le centre du cube, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

8. Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3;2;4)$; $B(-1;1;0)$ et $C(2;-3;5)$.

   (a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   (b) Donner les coordonnées des vecteurs : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$.

9. Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2;5;-1)$; $B(0;3;4)$ et le vecteur $\vec{u}(2;-1;4)$.

   (a) Déterminer les coordonnées du point C défini par $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis celles du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

   (c) Déterminer les coordonnées du centre K de ce parallélogramme.

10. Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,on considère les points $A(2;5;-1)$; $B(2;-3;4)$ et le vecteur $\vec{u}(2;-1;4)$.

    (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

    (b) Le point B appartient-il à Δ ?

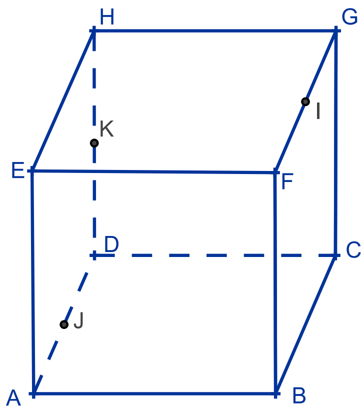
11. Dans un repère$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,on considère la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Donner un vecteur directeur de Δ et un point de Δ.

ÉTUDE DE POSITIONS RELATIVES

Pour les exercices 12 à 17, $ABCDEFGH$ est un cube et I, J et K sont les milieux respectifs de $[FG]$, $[AD]$ et $[DH]$.

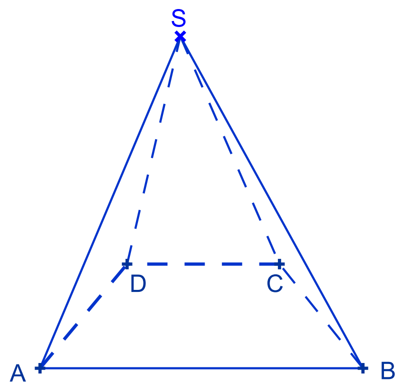


12. Déterminer en justifiant les positions relatives des droites ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.
    (a) (IB) et (GC).
    (b) (HB) et (GA).
    (c) (GC) et (BA).
13. Déterminer en justifiant les positions relatives des droites ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.
    (a) (JK) et (AH).
    (b) (FD) et (GH).
    (c) (IB) et (HJ).
14. Déterminer en justifiant les positions relatives des droites et plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.
    (a) (EJ) et (HDA).
    (b) (JK) et (ABE).
    (c) (IJ) et (AFG).
15. Déterminer en justifiant les positions relatives des droites et plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.
    (a) (FH) et (ACE).
    (b) (EJ) et (BCG).
    (c) (IJ) et (ABE).
16. Déterminer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.
    (a) (ABJ) et (GIC).
    (b) (KGI) et (EAD).
    (c) (KGI) et (ABE).
17. Déterminer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.
    (a) (EBG) et (HDC).
    (b) (EBI) et (HDC).
    (c) (IJK) et (HDC).
18. $ABCD$ est un tétraèdre, I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CD]$ et $[AC]$.
    Déterminer en justifiant les positions relatives des éléments ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.
    (a) (IK) et (AD).
    (b) (IK) et (AB).
    (c) (IJ) et (AID).
    (d) (ABJ) et (ACD).
    (e) (DIK) et (ABD).
    (f) (IJ) et (KBD).
19. $ABCDE$ est une pyramide de sommet A à base rectangulaire et I est un point du segment $[AE]$.
    (a) Justifier que la droite (BC) est parallèle au plan (EAD).
    (b) En déduire l'intersection des plans (IBC) et (EAD).
20. A, B, C et D sont quatre points non coplanaires et Δ est la droite parallèle à (BC) passant par D. I est le milieu de $[AC]$. Quelle est l'intersection de Δ avec :

(a) Le plan (IBD) ?

(b) Le plan (ABC) ?

21. $ABCDS$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze.



Reproduire la figure et construire les intersections des plans :

(a) (SAB) et (SDC) ;

(b) (SAD) et (SBC) ;

22. $ABCDEFGH$ est un pavé droit, I le point du segment $[AE]$ tel que $AI = \frac{3}{4}AE$ et J le point du segment $[CG]$ tel que $CJ = \frac{1}{4}CG$.

Les droites suivantes sont-elles coplanaires ?

(a) (AB) et (IF) ;

(b) (DJ) et (IF) ;

(c) (BC) et (AE) ;

(d) (EH) et (IJ) .

SECTIONS

23. MÉTHODE 1 p. ? ? ?

(a) Reproduire la figure de l'exercice précédent.

(b) Tracer l'intersection du plan (BIJ) avec la face $EABF$.

(c) Tracer l'intersection du plan (BIJ) avec la face $DCGH$.

(d) Terminer la construction de la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (BIJ).

24. (a) Reproduire la figure de l'exercice précédent.

(b) Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $EADH$.

(c) Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $DCGH$.

(d) Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $EHGF$.

(e) Terminer la construction de la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (DIJ).

25. $ABCDEFGH$ est un cube et I et J les points tels que $I \in [HD]$ et $HI = \frac{2}{3}HD$; $J \in [FG]$ et $FJ = \frac{3}{4}FG$.

Construire la section du cube par le plan (EIJ).

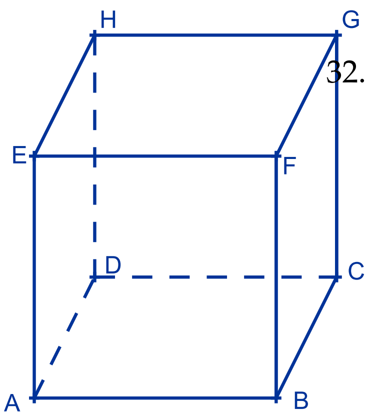
26. $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que $I \in [EF]$ et $EI = \frac{1}{3}EF$; $J \in [BC]$ et $BJ = \frac{1}{2}BC$; $K \in [HG]$ et

$HK = \dfrac{3}{4}HG$.
Construire la section du cube par le plan (IJK).

27. $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CD]$ et $[EH]$. Construire la section du cube par le plan (IJK).

28. $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que $I \in [AE]$ et $AI = \dfrac{1}{4}AE$; $J \in [DH]$ et $DJ = \dfrac{3}{4}DH$; $K \in [FG]$ et $FK = \dfrac{1}{3}FG$.
Construire la section du cube par le plan (IJK).

ORTHOGONALITÉ
Pour les exercices 30 à 32, $ABCDEFGH$ est un cube.



29. (a) Citer six droites orthogonales à la droite (EA) ;

 (b) Citer six droites orthogonales à la droite (EB) ;

 (c) Citer deux droites orthogonales au plan (BCG) ;

 (d) Citer deux droites orthogonales au plan (AFG) .

30. MÉTHODE 2 p. ? ? ?

 (a) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG).

 (b) En déduire que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.

31. Les droites suivantes sont-elles orthogonales ? Le démontrer.

 (a) (EG) et (GC) ;

 (b) (EB) et (EG) ;

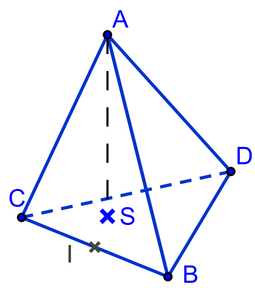
 (c) (AF) et (BC) ;

 (d) (AC) et (HF) ;

 (e) (BD) et (EC) ;

 (f) (CE) et (AG) .

32. $ABCD$ est un tétraèdre régulier, S est le pied de la hauteur issue de A relativement à la base BCD et I est le milieu de $[BC]$.



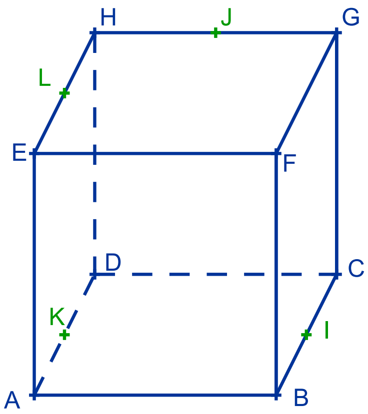
(a) Démontrer que les droites (AS) et (BC) sont orthogonales.

(b) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (AIS).

(c) En déduire que les points A, I, S et D sont coplanaires et que les points I, S et D sont alignés.

VECTEURS

Pour les exercices 34 à 39, $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



33. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

   (a) $\overrightarrow{A...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

   (b) $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E...}$

   (c) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A...}$

34. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

   (a) $\overrightarrow{...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

   (b) $\overrightarrow{L...} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AI}$

   (c) $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JL}$

35. Dans chacun des cas suivants, les vecteurs sont-ils coplanaires ? Le justifier.

   (a) $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EG}$;

   (b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BF}$;

   (c) $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{HG}$;

   (d) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

36. Le point M est défini par $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF}$

   (a) Exprimer les vecteurs suivants en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$: $\overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{MJ}$.

   (b) Les droites (BK) et (MJ) sont-elles parallèles ? Le démontrer en utilisant la question précédente.

   (c) Que peut-on en déduire concernant les points B, K, M et J ?

37. MÉTHODE 3 p. ? ? ? On considère les points K et L définis par :
$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et
$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$.

   (a) Construire la figure.

   (b) Démontrer que les points C, E et K sont alignés.

(c) Démontrer que les points E, F, H et L sont coplanaires.

38. Répondre par vrai ou faux en justifiant :

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{LE}$ sont coplanaires.

(c) Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

39. $ABCDEFGH$ est un cube.
On considère le point K défini par $\overrightarrow{HK} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{HF}$ et M un point du segment $[BF]$.

(a) Que peut-on dire des points D, M, K et H ?

(b) Montrer qu'il existe un unique réel $t \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BF}$.

(c) Montrer que si $t = \dfrac{4}{5}$, les points D, M et K sont alignés.

40. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3;2;4)$; $B(-1;1;0)$ et $C(2;-3;5)$. Déterminer les coordonnées des points M, N et P définis par :

(a) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

(b) $\overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{BC}$

(c) $2\overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$

41. MÉTHODE 4 p. ? ? ? Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-4;2;3)$, $B(1;5;2)$, $C(0;5;4)$ et $D(-6;-1;-2)$.

(a) Démontrer que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

(b) Que peut-on en déduire concernant les points A, B, C et D ?

42. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(0;3;-1)$, $B(2;-2;0)$, $C(4;1;5)$ et $D(2;21;12)$.

(a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

(b) Le point D appartient-il à ce plan ?

43. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(5;0;-3)$, $C(2;-2;-2)$ et $D(0;5;-2)$.

(a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

(b) Le point D appartient-il à ce plan ?

44. On reprend l'énoncé de l'exercice 38 en se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

(a) Écrire les coordonnées des points de la figure. On écrira les coordonnées de M en fonction de t.

(b) Démontrer à l'aide des coordonnées que D, M et

I sont alignés si et seulement si $t = \frac{4}{5}$.

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES
Dans toute cette partie, on munit l'espace d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

45. Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

   (a) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
   (b) Le point $M(-3;4;1)$ appartient-il à la droite Δ ?
   (c) Donner les coordonnées de trois points de la droite Δ.
   (d) Déterminer une autre représentation paramétrique de Δ.

46. Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 4 \\ z = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

   (a) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
   (b) Le point $M(-3;4;-3)$ appartient-il à la droite Δ ?
   (c) Donner les coordonnées de trois points de Δ.
   (d) Déterminer une autre représentation paramétrique de la droite Δ.

47. Soient $A(-4;1;2)$ et $B(-1;2;5)$. Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants :
   (a) La droite (AB) ;
   (b) Le segment $[AB]$;
   (c) La demi-droite $[AB)$.

48. Donner une représentation paramétrique de :
   (a) La droite $(O\vec{i})$;
   (b) La droite $(O\vec{j})$;
   (c) La droite $(O\vec{k})$.

49. Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t + 5t' \\ y = 1 + t' \\ z = -5t + 3t' \end{cases}$$
$$t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$$

   (a) Donner les coordonnées d'un couple de vecteurs directeurs de $\wp$ et un point de $\wp$.
   (b) Le point $M(6;2;-6)$ appartient-il à $\wp$?
   (c) Donner les coordonnées de trois points de $\wp$.

(d) Déterminer une autre représentation paramétrique de $\wp$.

50. Soient $A(-4;1;2)$; $B(-1;2;5)$ et $C(1;0;6)$.
    (a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
    (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
    (c) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).
    (d) Démontrer que le point $D(-3;-4;1)$ appartient au plan (ABC).
    (e) Déterminer une autre représentation paramétrique du plan (ABC).
51. Donner une représentation paramétrique des plans suivants :
    (a) Le plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$;
    (b) Le plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$;
    (c) Le plan $(O; \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
52. MÉTHODE 5 p. ? ? ? Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

(a) $\begin{cases} x = -k \\ y = 3 + 2k \\ z = 4 - k \end{cases}, k \in \mathbf{R}$

(b) $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 3 - k \end{cases}, k \in \mathbf{R}$

(c) $\begin{cases} x = k - 2 \\ y = 7 - 3k \\ z = 2 - k \end{cases}, k \in \mathbf{R}$

53. Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

(a) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 - 6t \\ z = -3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

(b) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

(c) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

54. Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2t' \\ y = 1 + 3t + t' \\ z = 2 - 5t \end{cases}$$
$$t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$$

Déterminer la nature de $\wp \cap \wp'$ dans chacun des cas suivants :

(a) $\begin{cases} x = -2 - 3t - t' \\ y = 2 - 2t + 4t' \\ z = 2 + 5t - 5t' \end{cases}$
$t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$

(b) $\begin{cases} x = 4 - 3t + 5t' \\ y = -2t + t' \\ z = 5 + 5t - 5t' \end{cases}$
$t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$

(c) $\begin{cases} x = -3 + 2t + t' \\ y = 2 - t + 2t' \\ z = 1 + t \end{cases}$
$t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$

55. Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \end{cases}$$
$$t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\wp$ et du plan :

(a) $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

(b) $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$

(c) $(O; \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

56. Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \end{cases}$$
$$t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de $\wp$ avec la droite d donnée par une représentation paramétrique :

(a) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

(b) $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 10t \\ z = -3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

(c) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = -3 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

57. Soit $ABCDEFGH$ un cube et I ; J les milieux respectifs de $[EG]$ et $[GH]$.
On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AI) puis de la droite (DJ).

(b) Démontrer que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

S'entraîner au Bac

58. Vrai faux, d'après Bac Asie, juin 2013 et Amérique du sud, novembre 2012
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

(a) Dans les deux questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(b) Soit S le point de coordonnées $(1\,;3\,;5)$ et Δ_1 la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 5-4t \\ z & = & 2-2t \end{array}\right., t \in \mathbf{R}$$

Affirmation 1 : La droite Δ_2 de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t \\ y & = & 7+4t \\ z & = & 7+2t \end{array}\right., t \in \mathbf{R}$$

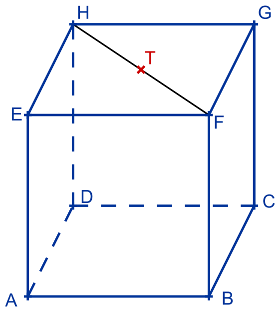
est la droite parallèle à la droite Δ_1 passant par le point S.

(c) On considère les points $\mathrm{I}(1\,;\,0\,;\,0)$, $\mathrm{J}(0\,;\,1\,;\,0)$ et $\mathrm{K}(0\,;0\,;1)$.
Affirmation 2 : la droite Δ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-t \\ y & = & 6-2t \\ z & = & -2+t \end{array}\right., t \in \mathbf{R}$$

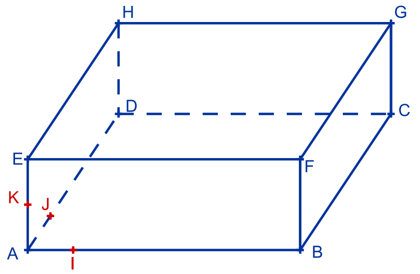
coupe le plan (IJK) au point $\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

(d) Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 3 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

59. D'après Bac Polynésie, juin 2015
On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$. I, J et K sont les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



(a) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJG).

(b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

(c) Reproduire la figure et tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.

60. D'après Bac Métropole, juin 2015

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, B$(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, C$(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et D$(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées :

$M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0,8t\ ;\ 1+0,6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

(a) i. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

ii. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).

Lequel ? On donnera une représentation paramétrique de ce plan $\mathcal{P}$.

iii. Vérifier que la droite (AB), coupe le plan $\mathcal{P}$ au point E$(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

iv. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

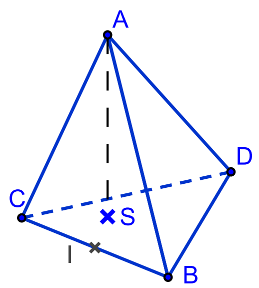
(b) i. Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

ii. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

APPROFONDIR

61. Vrai ou faux ?
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et le démontrer.
   (a) Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre.
   (b) Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
   (c) Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

62. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et I le milieu de $[BC]$.

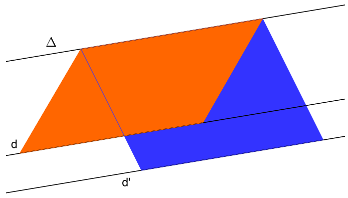


   (a) Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADI).
   (b) En déduire que $(BC) \perp (AD)$.
   Remarque : Le plan (ADI) est le plan orthogonal au segment $[BC]$ et passant par son milieu. Il est appelé plan médiateur du segment $[BC]$. Tous les points de ce plan sont équidistants de B et de C.

63. $ABCDEFGH$ est un cube et I et J ; les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$. Le point M est un point du segment $[AG]$ distinct de A et de G.
   (a) Montrer qu'il existe un unique réel $t \in]0;1[$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.
   (b) Construire la section du cube par le plan (IAM). Quelle est sa nature ?
   (c) Existe-t-il une valeur du réel t tel que les points J, M et I soient alignés ? Justifier.
   (d) Existe-t-il une valeur du réel t tel que les points H, M et I soient alignés ? Justifier.

64. $ABCDEFGH$ est un cube de côté a. Le point M est défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.
   (a) Construire la section du cube par le plan (AGM).
   (b) Démontrer que cette section est un losange $ANGP$ avec N et P les milieux respectifs de $[BF]$ et $[DH]$.
   (c) En déduire l'aire de cette section en fonction de a.

65. logo info
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ et I le milieu de $[AB]$.
   (a) Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.
   (b) Placer un point M du segment $[AC]$ et $\wp$ le plan passant par I et orthogonal à la droite (IM).
   (c) Construire le point N intersection de $\wp$ et de la droite (OB).
   (d) Conjecturer la position du point M pour laquelle la distance MN est minimale.
   (e) DÉMONSTRATION
      i. Soit t le réel tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC}$. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t. On admet que $N(0;t;0)$.
      ii. Exprimer la longueur MN en fonction de t.
      iii. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette longueur est minimale.
66. $ABCD$ est un tétraèdre. P, Q et R sont les points tels que $ABPC$, $ABQD$ et $ACRD$ sont des parallélogrammes. En se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, démontrer que les droites (BR), (CQ) et (DP) sont concourantes en un point K dont on déterminera les coordonnées.
67. Une autre preuve du théorème du toit (voir page ? ? ?) :



Soit $\wp$ et $\wp'$ deux plans sécants selon une droite Δ, d une droite de $\wp$ et d' une droite de $\wp'$telles que $d//d'$.
Il s'agit de démontrer que la droite Δ intersection de $\wp$ et $\wp'$ est parallèle à d et à d'.
   (a) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et d' et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ. On considère des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ tels que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent $\wp$ et $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ dirigent $\wp'$.
   Traduire vectoriellement le fait que $\Delta \subset \wp$ puis que $\Delta \subset \wp'$.
   (b) En déduire une relation vectorielle entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$.
   (c) Conclure en utilisant le fait que $\wp$ et $\wp'$ sont sécants.
68. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit Δ la droite de représentation

paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

(a) Les points $A(5;2;6)$ et $B(5;-6;4)$ appartiennent-ils à la droite Δ ?

(b) Déterminer les valeurs des réels a et b tels que le point $C(4;a;b)$ appartienne à Δ.

(c) Soit $M(x;y;z) \in \Delta$. Exprimer AM^2 en fonction de t.

(d) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance AM soit minimale.

69. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

et $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t' \\ y = 1 + t + 3t' \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$$

(a) Le point $C(1;3;2)$ appartient-il au plan $\wp$?

(b) Démontrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\wp$.

(c) Soit $\wp'$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 + 2t + t' \\ z = -1 + 3t + t' \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}, t' \in \mathbf{R}$$

i. Montrer que $C \in \wp'$.

ii. Montrer que Δ coupe $\wp'$ en un point I dont on déterminera les coordonnées.

iii. Montrer que $CI = \sqrt{3}$

(d) Soit t un nombre réel et M le point de Δ de coordonnées $M(-t+1;2t;-t+2)$.

i. Montrer que $CM^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

ii. Montrer que CI est la distance minimale de CM lorsque t décrit l'ensemble des réels.

70. Soient $A(-2;0;1)$, $B(1;2;-1)$ et $C(-2;2;2)$ trois points de l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

(b) Soit $D(-2;-1;0)$ et $E(-2;5;2)$. Démontrer que la droite (DE) et le plan (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Je teste mes connaissances

A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Étudier les positions relatives de droites et de plans dans l'espace
- Construire et justifier la construction d'une section
- Calculer avec des vecteurs de l'espace
- Démontrer la coplanarité de points ou vecteurs
- Utiliser les représentations paramétriques de droites et plans de l'espace
- Étudier des positions relatives dans l'espace

QCM d'auto-évaluation

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes :

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a, avec I, J les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[GH]$ et L est un point du segment $[GH]$.

La droite (BI) est :

1. orthogonale à (IJ)
2. orthogonale à (IL)
3. orthogonale à (DG)

L'intersection du plan (BIL) avec le plan (ABF) est :

1. une droite passant par le milieu de $[AB]$
2. une droite passant par le point B
3. une droite parallèle à (IL)

La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (BIL) est :

1. un triangle
2. un parallélogramme
3. un quadrilatère quelconque

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

1. $\overrightarrow{BJ} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. les points L, I, B et F sont coplanaires
3. $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{CG}$

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;2)$, $C(3;0;0)$ et $D(5;-2;-4)$.

Les points A, B et C :

1. sont alignés
2. sont coplanaires
3. définissent un plan

Les points A, B, C et D :

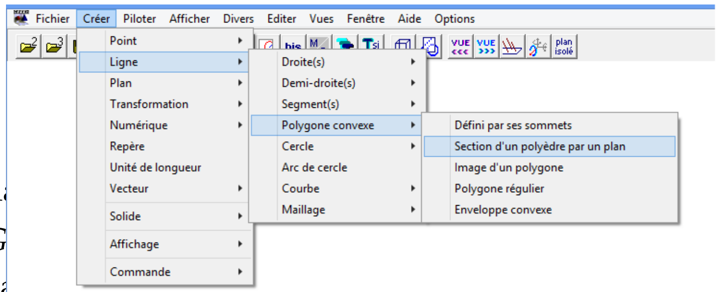
1. sont coplanaires
2. vérifient l'égalité $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$
3. $D \in (BC)$

Une représentation paramétrique de :

1. la droite (AB) est $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$
2. du plan (ABC) est : $\begin{cases} x = 5 + t + 4t' \\ y = -2 - t - 2t' \\ z = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ et $t' \in \mathbf{R}$
3. du plan (ABC) est : $\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = t \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ et $t' \in \mathbf{R}$

Soit $E(0;-1;1)$:

1. la droite parallèle à (AB) et passant par $E(3;4;5)$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$
2. Le point E appartient au plan (ABC)
3. les droites (AB) et (DE) sont non coplanaires



Travaux pratiques

TP 1 Section d'un cube par un pl

1. Construire un cube $ABCDEFG$
2. Construire l'intersection de ch
   par le plan (IJK) dans chacun
   (a) I et J sont les milieux resp
   est un point du segment [
   (b) I et J sont les milieux resp
   est un point du segment [
   (c) I et J sont les milieux resp
   est un point du segment [
   (d)
3. Vérifier ensuite chacune des
   cube par le plan (IJK) comme

TP 2 Étudier les positions relatives à l'aide d'un logiciel de calcul formel

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

— Le plan $\wp$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 7 + 4t - t' \\ z = -1 + 3t + 2t' \end{cases} , t \in \mathbf{R} \text{ et } t' \in \mathbf{R}$$
— Le plan $\wp'$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 5 - t + 2t' \\ y = 2 + 3t - 4t' \\ z = 1 + 5t' \end{cases} , t \in \mathbf{R} \text{ et } t' \in \mathbf{R}$$
— La droite d_1 de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -5t \end{cases} , t \in \mathbf{R}$$
— La droite d_2 de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 9 + 7t \\ z = -4 - 5t \end{cases} , t \in \mathbf{R}$$

— le point $A(-1;10;4)$.

$\boxed{1}$ `resoudre([1-2t=2-3k,3-3t=9+7k,-5t=-4-5k],[t,k])`

$$[] \tag{1}$$

$\boxed{2}$ `resoudre([-3+2t=2-3k,7+4t-u=9+7k,-1+3t+2u=-4-5k],[t,u,k])`

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{17} & -\frac{281}{51} & \frac{53}{51} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$\boxed{3}$ `resoudre([5-t+2u=2-3k,2+3t-4u=9+7k,1+5u=-4-5k],[t,u,k])`

$$\begin{pmatrix} k+1 & -k-1 & k \end{pmatrix} \tag{3}$$

$\boxed{4}$ `resoudre([-3+2t=1-2k,7+4t-u=3-3k,-1+3t+2u=-5k],[t,u,k])`

$$[] \tag{4}$$

$\boxed{5}$ `resoudre([5-t+2u=1-4k,2+3t-4u=3+3k,1+5u=5k],[t,u,k])`

$$\begin{pmatrix} -\frac{24}{11} & -\frac{64}{55} & -\frac{53}{55} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$\boxed{6}$ `resoudre([-3+2t=-1,7+4t-u=10,-1+3t+2u=4],[t,u])`

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

A l'aide des résultats fournis par la copie d'écran ci-dessus d'un logiciel de calcul formel, répondre aux questions suivantes, en précisant la ligne de la copie d'écran vous permettant de conclure :

1. Le point A appartient-il au plan $\wp$?
2. Déterminer la position relative des droites d_1 et d_2.
3. Déterminer la position relative de la droite d_1 et du plan $\wp$.
4. Déterminer la position relative de la droite d_2 et du plan $\wp$.
5. Déterminer la position relative de la droite d_1 et du plan $\wp'$.
6. Déterminer la position relative de la droite d_2 et du plan $\wp'$.

TP 3 En cinématique :

La position à l'instant t ($t > 0$) d'un point M en mouvement dans l'espace se définit dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ par les coordonnées $M(x(t); y(t); z(t))$.

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont appelées équations horaires du mouvement. Par exemple, on considère deux points M et N dont les mouvements en fonction du temps, sont donnés respectivement par : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2 - 4t \\ z(t) = -2 + 3t \end{cases}$

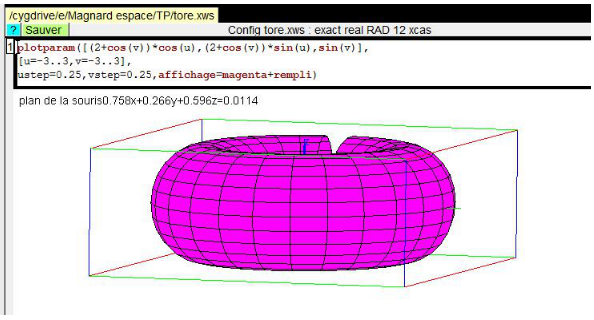
et $\begin{cases} x(t) = 2 - 3t + 2t^2 \\ y(t) = 1 \\ z(t) = -2 \end{cases}$.

Sachant que le vecteur vitesse d'un point $P(x(t);y(t);z(t)$ à l'instant t est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et que le vecteur accélération du point P à l'instant t est $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}$:

1. Montrer que le point M est animé d'un mouvement rectiligne uniforme (sa vitesse est constante).
2. Montrer que le point N est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié (son accélération est constante).

Récréation Énigme :
Vous avez étudié dans ce chapitre les représentations paramétriques de droites , mais de nombreuses autres courbes du plan comme de l'espace ont des représentations paramétriques. Dans un repère orthonormé du plan, saurez-vous par exemple construire à l'aide des valeurs remarquables du sinus l'allure de la courbe de Lissajous dont un système d'équations paramétrique est :
$\begin{cases} x(t) = sin(2t) \\ y(t) = sin(3t) \end{cases}$, $t \in]-\pi;\pi]$?

De même, vous avez étudié les représentations paramétriques de plans , mais de nombreuses autres surfaces ont des représentations paramétriques comme le tore ci-dessous représenté à l'aide du logiciel xcas :


/cygdrive/e/Magnard espace/TP/tore.xws
?
Sauver
Config tore.xws : exact real RAD 12 xcas
1
plotparam([(2+cos(v))*cos(u),(2+cos(v))*sin(u),sin(v)],
[u=-3..3,v=-3..3],
ustep=0.25,vstep=0.25,affichage=magenta+rempli)
plan de la souris0.758x+0.266y+0.596z=0.0114