EXERCICES BAC

EXERCICE 1 : D'après Bac (Antilles-Guyane - juin 2014)

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types de gîte : l'hébergement A et l'hébergement B.
Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

1. **a.** Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

   b. Recopier et compléter les pointillés de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\,;\,y)$ possibles.

   $$x,\ y\text{entiers}\ x0\dots\ y0\dots \qquad \dots \qquad x,\ y$$

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3. **a.** Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b. Déterminer une telle solution.

   c. Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

   Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

   Calculer ces nombres.

EXERCICE 2 : D'après Bac (Métropole - juin 2011)

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
Théorème de Bézout :
«Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$. »
Théorème de Gauss :
«Soient a, b, c des entiers relatifs. Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c. »

1. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.

   Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0\ (p)$ et $a \equiv 0\ (q)$, alors $a \equiv 0\ (pq)$.

Partie B :

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9\ (17) \\ n \equiv 3\ (5) \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.

   On désigne par $(u\,;\,v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

   a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\,;\,v)$.

   b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
   Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.

   c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.

2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$.

   a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
   Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ (85)$.

  b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si, n peut s'écrire sous 1a forme $n = 43+85k$ où k est un entier relatif.

3. Application

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.

Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.

Combien a-t-elle de jetons ?

EXERCICE 3 : D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2007)

1. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

  a. Montrer que l'équation $(E)\ :\ 65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

  b. Montrer que l'équation $(E')\ :\ 17x - 40y = 1$
  admet au moins une solution.

  c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $\left(E'\right)$.

  d. Résoudre l'équation $\left(E'\right)$.
  En déduire qu'il existe un unique naturel $x_0 < 40$ tel que : $17x_0 \equiv 1\ (40)$.

2. Pour tout naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b\ (55)$ et si $a^{40} \equiv 1\ (55)$, alors $b^{33} \equiv a\ (55)$.

EXERCICE 4 : D'après Bac (Antilles-Guyane - 2015)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a,\ b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a Demander b

Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c \neq 0$
	    Affecter à a le nombre b
	    Affecter à b la valeur de c
	    Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.

Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px+q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.
   - **a.** Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
   - **b.** Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple $(u,\ v)$ qui convient.
   - **c.** Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$.
   - **d.** Décoder la lettre R.
2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.

   Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).
3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?