

EXERCICES BAC

EXERCICE 1 : D'après Bac (Antilles-Guyane - juin 2014)

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types de gîte : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

1.
 - a. Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.
 - b. Recopier et compléter les pointillés de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x ; y)$ possibles.

x, y entiers $x0 \dots y0 \dots \dots x, y$

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.
3.
 - a. Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.
 - b. Déterminer une telle solution.
 - c. Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

Calculer ces nombres.

EXERCICE 2 : D'après Bac (Métropole - juin 2011)

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Théorème de Bézout :

« Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$. »

Théorème de Gauss :

« Soient a, b, c des entiers relatifs. Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c . »

1. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.
2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Dédurre du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 (p)$ et $a \equiv 0 (q)$, alors $a \equiv 0 (pq)$.

Partie B :

On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{S} des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 (17) \\ n \equiv 3 (5) \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de \mathcal{S} .

On désigne par $(u ; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

- a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u ; v)$.
 - b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à \mathcal{S} .
 - c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à \mathcal{S} .

2. Caractérisation des éléments de \mathcal{S} .

- a. Soit n un entier relatif appartenant à \mathcal{S} .
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 (85)$.

d. Décoder la lettre R.

2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.

Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$.

Coder les lettres B et D.

Que peut-on dire de ce codage ?