EXERCICES BAC

EXERCICE 1 : D'après Bac Asie – juin 2013 et Amérique du Sud - novembre 2012

Vrai faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Dans les deux questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Soit S le point de coordonnées (1 ; 3 ; 5) et Δ_1 la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 5-4t \\ z & = & 2-2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

   Affirmation 1 : la droite Δ_2 de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t \\ y & = & 7+4t \\ z & = & 7+2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

   est la droite parallèle à la droite Δ_1 passant par le point S.

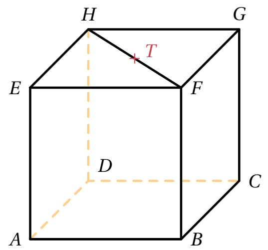
3. On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

   Affirmation 2 : la droite Δ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-t \\ y & = & 6-2t \\ z & = & -2+t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

   coupe le plan (IJK) au point $\text{E}\left(-\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



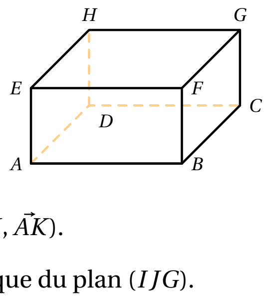
   Affirmation 3 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

EXERCICE 2 : D'après Bac Polynésie – juin 2015

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.

I, J et K sont les points tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJG).

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

3. Reproduire la figure et tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.

EXERCICE 3 : D'après Bac Métropole – juin 2015

Dans un repère orthonormé $(O,\ I,\ J,\ K)$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $C(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $D(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.
Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées :
$M_t(t;\ -1;\ 5)$ et $N_t(11;\ 0,8t;\ 1+0,6t)$.
Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).
   Lequel ? On donnera une représentation paramétrique de ce plan $\mathscr{P}$.
   c. Vérifier que la droite (AB), coupe le plan $\mathscr{P}$ au point $E(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

EXERCICE 4 : D'après Bac Métropole – juin 2014

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
On choisit AB comme unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ de l'espace.

1. Donner les coordonnées des points D et E.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

3. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure principale en radian de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.

   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que la mesure de α soit maximale.

   a. Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que : $ME\sin(\dfrac{\alpha}{2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin(\dfrac{\alpha}{2})$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
   d. Conclure.

EXERCICE 5 : D'après Bac Pondichéry – 2013

Pour chacune des questions, plusieurs propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 *point.*
Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan (P) est le plan ABC avec $A(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $B(-2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et $C(-3\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t+2t' \\ y &=& -t-2t' \\ z &=& -1-t+3t' \end{array}\right.$ t dans $\mathbb{R}$ t' dans $\mathbb{R}$.

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t \\ y &=& -t \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$ t dans $\mathbb{R}$.

On donne les points de l'espace $M(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et $N(1\ ;\ -2\ ;\ 9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est (à chaque fois, t dans $\mathbb{R}$, t' dans $\mathbb{R}$) :

a. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t+2t' \\ y & = & 1-t+t' \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t+t' \\ y & = & 1-t-2t' \\ z & = & 1-t-3t' \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2t+t' \\ y & = & 1-2t+2t' \\ z & = & -1-t' \end{array}\right.$

2. **a.** La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point K(−8 ; 3 ; 2).
   b. La droite (D) est une droite du plan (P).
   c. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

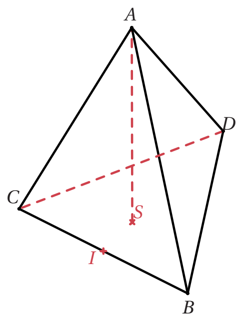
3. **a.** La droite (MN) et la droite (D) sont non coplanaires.
   b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

4. **a.** Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & -2-t \\ z & = & -3-t \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).

EXERCICE 6 : Vrai ou faux ?
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et le démontrer.

1. Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre.
2. Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
3. Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

EXERCICE 7 :
Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et I le milieu de $[BC]$.



1. Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADI).
2. En déduire que $(BC) \perp (AD)$.
   Le plan (ADI) est le plan orthogonal au segment $[BC]$ et passant par son milieu. Il est appelé plan médiateur du segment $[BC]$. Tous les points de ce plan sont équidistants de B et de C.

EXERCICE 8 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$. Le point M est un point du segment $[AG]$ distinct de A et de G.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $t \in]0;1[$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.
2. Construire la section du cube par le plan (IAM). Quelle est sa nature ?

3. Existe-t-il une valeur du réel t tel que les points J, M et I soient alignés ? Justifier.

4. Existe-t-il une valeur du réel t tel que les points H, M et I soient alignés ? Justifier.

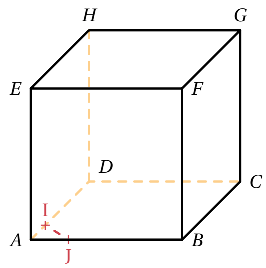
EXERCICE 9 :
$ABCDEFGH$ est un cube de côté a. Le point M est défini par $\overrightarrow{DM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

1. Construire la section du cube par le plan (AGM).

2. Démontrer que cette section est un losange $ANGP$ avec N et P les milieux respectifs de $[BF]$ et $[DH]$.

3. En déduire l'aire de cette section en fonction de a.

EXERCICE 10 :
$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que : $I \in [AD]$ et $AI = \dfrac{1}{3}AD$; $J \in [AB]$ et $AJ = \dfrac{1}{3}AB$.



Les propositions sont-elles vraies ou fausse ?
Le démontrer.

1. (IJ) est orthogonale à (EC) ;

2. (IJ) est orthogonale à (BG) ;

3. (IJ) est orthogonale à (HB) ;

4. (IJ) est orthogonale à (HC).

EXERCICE 11 :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ et I le milieu de $[AB]$.

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

2. Placer un point M du segment $[AC]$ et $\wp$ le plan passant par I et orthogonal à la droite (IM).

3. Construire le point N intersection de $\wp$ et de la droite (OB).

4. Conjecturer la position du point M pour laquelle la distance MN est minimale.

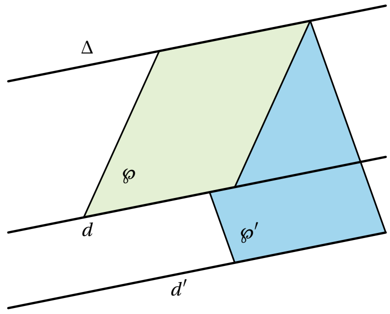
5. Démonstration

   a. Soit t le réel tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC}$. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t. On admet que $N(0;t;0)$.

   b. Exprimer la longueur MN en fonction de t.

   c. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette longueur est minimale.

EXERCICE 12 :
$ABCD$ est un tétraèdre. P, Q et R sont les points tels que $ABPC$, $ABQD$ et $ACRD$ sont des parallélogrammes. En se plaçant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, démontrer que les droites (BR), (CQ) et (DP) sont concourantes en un point K dont on déterminera les coordonnées.
EXERCICE 13 :
Une autre preuve du théorème du toit :



Soit $\wp$ et $\wp'$ deux plans sécants selon une droite Δ, d une droite de $\wp$ et d' une droite de $\wp'$telles que $d//d'$.
Il s'agit de démontrer que la droite Δ intersection de $\wp$ et $\wp'$ est parallèle à d et à d'.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et d' et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ. On considère des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ tels que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent $\wp$ et $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ dirigent $\wp'$.
   Traduire vectoriellement le fait que $\Delta \subset \wp$ puis que $\Delta \subset \wp'$.
2. En déduire une relation vectorielle entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$.
3. Conclure en utilisant le fait que $\wp$ et $\wp'$ sont sécants.

EXERCICE 14 :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = -2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

1. Les points $A(5;2;6)$ et $B(5;-6;4)$ appartiennent-ils à la droite Δ ?
2. Déterminer les valeurs des réels a et b tels que le point $C(4;a;b)$ appartienne à Δ.
3. Soit $M(x;y;z) \in \Delta$. Exprimer AM^2 en fonction de t.
4. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance AM soit minimale.

EXERCICE 15 :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

et $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t' \\ y = 1 + t + 3t' \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Le point $C(1;3;2)$ appartient-il au plan $\wp$?
2. Démontrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\wp$.
3. Soit $\wp'$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 + 2t + t' \\ z = -1 + 3t + t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

   a. Montrer que $C \in \wp'$.

b. Montrer que Δ coupe $\wp'$ en un point I dont on déterminera les coordonnées.

c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

4. Soit t un nombre réel et M le point de Δ de coordonnées : $M(-t+1\,;2t\,;-t+2)$.

a. Montrer que $CM^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la distance minimale de CM lorsque t décrit l'ensemble des réels.

EXERCICE 16 :

Soients $A(-2\,;0\,;1)$, $B(1\,;2\,;-1)$ et $C(-2\,;2\,;2)$ trois points de l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

2. Soit $D(-2\,;-1\,;0)$ et $E(-2\,;5\,;2)$. Démontrer que la droite (DE) et le plan (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.