1) Mostre que $P(A|A \wedge B) = 1$

$P(A|B)$ é $P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$

Logo, $P(A|A \wedge B) = \frac{P(\overbrace{A \wedge A \wedge B}^{(A \wedge B)})}{P(A \wedge B)}$

$= \frac{P(A \wedge B)}{P(A \wedge B)} = 1$

2) Termos:

Probabilidade de ter a doença $P(D) = 1/10000$

Probabilidade de não ter a doença $P(\neg D) = 1 - 1/10000$

Teste positivo dado que a pessoa tem a doença $P(\text{Positivo}|D) = 0,99$

Teste positivo dado que a pessoa não tem a doença $P(\text{Positivo}|\neg D) = 1 - 0,99 = 0,01$

Aplicando Bayes:

$$P(D|\text{Positivo}) = \frac{P(\text{Positivo}|D) \cdot P(D)}{P(\text{Positivo})}$$

___/___/___ Seg Ter Qua Qui Sex Sab Dom

$P(\text{Positivo}) = P(\text{Positivo} \mid D) \cdot P(D) + P(\text{Positivo} \mid \neg D) \cdot P(\neg D)$

$P(\text{Positivo}) = (0{,}99 \cdot 0{,}0001) + (0{,}01 \cdot 0{,}9999)$
$= 0{,}010098$

Logo $P(D \mid \text{Positivo}) = \dfrac{0{,}99 \cdot 0{,}0001}{0{,}010098}$

$\cong 0{,}0098$ Probalidade de ser a doença é $0{,}98\%$

3)

a) Termos:

$P(\text{Falsa}) = 1/10$

$P(\text{Normal}) = 9/10$

$P(\text{Cara} \mid \text{Falsa}) = 1$

$P(\text{Cara} \mid \text{Normal}) = 0{,}5$

$P(\text{Falsa} \mid \text{Cara}) = \dfrac{P(\text{Cara} \mid \text{Falsa}) \cdot P(\text{Falsa})}{P(\text{Cara})}$

Seg Ter Qua Qui Sex Sab Dom

$P(\text{Cara}) = (1 \cdot 0{,}1) + (0{,}5 \cdot 0{,}9) = 0{,}55$

$P(\text{Falsa} | \text{Cara}) = \frac{1 \cdot 0{,}1}{0{,}55} \cong 0{,}1818$

Probabilidade que a moeda seja falsa após sair cara uma vez é 18,18%.

b) Termos:

$P(5\text{Caras} | \text{Falsa}) = 1$

$P(5\text{ Caras} | \text{Normal}) = 0{,}5^5 = 0{,}03125$

$P(\text{Falsa} | 5\text{Caras}) = \frac{P(5\text{Caras} | \text{Falsa}) \cdot P(\text{Falsa})}{P(5\text{Caras})}$

$P(5\text{Caras}) = (1 \cdot 0{,}1) + (0{,}5^5 \cdot 0{,}9) = 0{,}128125$

$P(\text{Falsa} | 5\text{Caras}) = \frac{1 \cdot 0{,}1}{0{,}128125} \cong 0{,}7805$

Após cinco caras seguidas, a probabilidade de que a moeda seja falsa é 78,05%.

Seg Ter Qua Qui Sex Sab Dom

4) Termos:

$P(Azul) = 1/10$

$P(Verde) = 9/10$

$P(\text{Testemunha Azul} \mid Azul) = 0{,}75$

$P(\text{Testemunha Azul} \mid Verde) = 0{,}25$

$P(Azul \mid \text{Testemunha Azul}) =$

$$\frac{P(\text{Testemunha Azul} \mid Azul) \cdot P(Azul)}{P(\text{Testemunha Azul})}$$

$P(\text{Testemunha Azul}) = (0{,}75 \cdot 0{,}1) + (0{,}25 \cdot 0{,}9)$

$= 0{,}3$

$P(Azul \mid \text{Testemunha Azul}) = \dfrac{0{,}75 \cdot 0{,}1}{0{,}3} = 0{,}25$

A probabilidade de que o táxi realmente fosse azul é 25%. logo é mais provável que o taxi fosse verde (75%.)

Seg Ter Qua Qui Sex Sab Dom ___/___/___

5) Termos:

$P(\text{Vírus}) = 0{,}01$

$P(\neg \text{Vírus}) = 0{,}99$

Para A:

$P(\text{Positivo} \mid \text{Vírus}) = 0{,}95$

$P(\text{Positivo} \mid \neg \text{Vírus}) = 0{,}1$

$P(\text{Positivo}A) = (0{,}95 \cdot 0{,}01) + (0{,}1 \cdot 0{,}99) = 0{,}1085$

Aplicando Bayes:

$$P(\text{Vírus} \mid \text{Positivo}A) = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}01}{0{,}1085} \cong 0{,}0876$$

Para B:

$P(\text{Positivo}B) = (0{,}9 \cdot 0{,}01) + (0{,}05 \cdot 0{,}99) = 0{,}0585$

Aplicando Bayes:

$$P(\text{Vírus} \mid \text{Positivo}B) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}0585} \cong 0{,}1538$$

___/___/___ Seg Ter Qua Qui Sex Sab Dom

Teste A: $P(\text{Virus} | \text{Positivo A}) \cong 8{,}76\%$

Teste B: $P(\text{Virus} | \text{Positivo B}) \cong 15{,}38\%$

O teste B com resultado positivo é mais indicativo de que alguém tem realmente o vírus.

ECO MILENIUM