1 Notizen 2011-07-16

- Berechne Zeta-Funktion von $C :: f := x^2z^3 + y^2z^3 + x^5 + y^5 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$.
- $deg(C) = deg(f) = 5$, 1 Doppelpunkt $(0:0:1)$, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}((0:0:1)) = \frac{\partial f}{\partial y}((0:0:1)) = \frac{\partial f}{\partial z}((0:0:1)) = f((0:0:1)) = 0$
- $U := \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)\backslash C$, man weiss $(Z(U \coprod V) = Z(U)Z(V))$: $Z(C,T) = \frac{Z(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q))}{Z(U,T)} = \frac{det(1-q^2T\psi|H^0_{MW}(U,\mathbb{F}_q))det(1-q^2T\psi|H^2_{MW}(U,\mathbb{F}_q))}{(1-q^2T)(1-qT)(1-T)} = \frac{det(1-q^2T\psi|H^2_{MW}(U,\mathbb{F}_q))}{(1-qT)(1-T)}$
- Berechne $det(1-q^2T\psi|H^2_{MW}(U,\mathbb{F}_q))$, Wenn C nicht singulaer und $\overline{C}$ lift nach $\mathbb{Q}_q$, i.e. $\overline{C}$ definiert durch $\overline{f}$ und $\overline{f} \mod p \equiv f$, $(\mathbb{Z}_q/(p) \cong \mathbb{F}_q)$, dann $H^2_{dR}(\overline{U}) \cong H^2_{MW=rig}(\overline{U}) \cong H^2_{MW}(U)$, $\overline{U} = \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}_q) \setminus \overline{C}$
- C singulaer, aber lift $\overline{C}$ glatt, dann $H^2_{dR}(\overline{U}) \cong H^2_{MW=rig}(\overline{U}) \twoheadrightarrow_\phi H^2_{MW}(U)$
- Deshalb: Berechne $det(1-q^2T\psi|H^2_{MW}(\overline{U},\mathbb{Q}_q))$ (weil wir wissen wie das geht, dank Griffiths) und betrachte Eigenwerte davon.
- Dann weiss man, dass $Eig = \{\alpha, q, \beta_1, ..., \beta_{10}\}$ mit $|\beta_i| = \sqrt{q}$, und α "anomal", i.e. der Unterraum $< \alpha >_{\mathbb{Q}_q} = ker(\phi)$, sodass $det(1-q^2T\psi|H^2_{MW}(U,\mathbb{F}_q)) = \frac{det(1-q^2T\psi|H^2_{MW}(\overline{U},\mathbb{Q}_q))}{T-\alpha}$
- Berechne $det(1-q^2T\psi|H^2_{MW}(\overline{U},\mathbb{Q}_q))$:

$$\psi(\prod_i x_i^{a_i}) = \prod_i x_i^{a_i/q}, \text{ if } a_i \equiv 0 \mod q, \text{ fuer alle} i, 0 \text{ sonst}$$
$$\psi(\frac{\Omega}{\prod x_i}) = \frac{\Omega}{p^n \prod x_i}, n = 2$$

- Berchnung siehe Hinweise.ps
- Reduktion: $\frac{GF_{x_i}}{F_k^s}\Omega \equiv \frac{1}{s-1}\frac{G_{x_i}}{F_k^{s-1}}\Omega$
- Praezision: $det(1-q^2T\psi|H^2_{MW}(\overline{U},\mathbb{Q}_q)) \in \mathbb{Z}[T] \subset \mathbb{Q}[T] \subset \mathbb{Q}_q[T]$ und da wir alle Eigenwerte davon kennen, wissen wir, dass wir nur bis eine Genauigkeit p^{N_1} berechnen muessen.

$$\psi(\frac{G}{F_k^t}\Omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi(F^{q-t}G\prod x_i\Delta^i)}{F_k^{i+1}} \frac{\Omega}{p^n \prod x_i} \quad \equiv = \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{\psi(F^{q-t}G\prod x_i\Delta^i)}{F_k^{i+1}} \frac{\Omega}{p^n \prod x_i} \mod p^{N_1}$$

- Wir erhalten ein Polynom γ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ (da wir dort rechnen in Singular), muessen aber noch p-adisch approximieren, so erhaelt man Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$