Комбинаторика – важный раздел математики, знание которого необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходиться иметь дело физикам, химикам, психологам, лингвистам, специалистам по кодам, инженерам и многим другим научно-техническим работникам.

Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.

«Комбинаторика» 2006 г.

Каждый способ данного заполнения позволяет разместить на k местах некоторые из n элементов.

- Элементы не могут повторяться, поэтому он называется размещением без повторений из n элементов по k
- Порядок важен

1-шаг. Выбрать из имеющихся n

2-шаг. Выбрать из оставшихся $n-1$

k-шаг. Из оставшихшя $n-(k-1)=n-k+1$

Из н элементов по к = $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$

Эту формулу можно записать иначе, домножив числитель и знаменатель на произведение (n-k)(n-k-1)…1

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 1}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(Размещение без повторений)

Но если брать размещения без повторений, в которые входят все n элементов, то они могут отличаться лишь порядком входящих в них элементов.

Такие размещения из n элементов по n элементов называют перестановками из n элементов

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

(Перестановки без повторений)

Если некоторые элементы совпадают, то получится меньшее число перестановок.

Это перестановка из n элементов k различных типов.

Количество элементов из каждого типа = $n_{k,} \quad k \in \mathbb{Z}$

Общее количество элементов, то есть $n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$

$$\tilde{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_n!}$$

(Перестановки с повторениями)

В тех случаях, когда нас интересует лишь ее состав, говорят о сочетаниях.

Сочетаниями из n элементов по k называют любой выбор k элементов из имеющихся различных n элементов.

- Отличаются друг от друга только составом, но не порядком элементов

Число сочетаний, которые можно составить из n элементов по k, обозначают через C_n^k

Сочетания – это в точности подмножества из k элементов заданного множества из n элементов.

Формула для сочетаний легко получается из выведенной ранее формулы для размещений. В самом деле, составим сначала все сочетания из n элементов по k, записав каждое в виде некоторого размещения, а потом будем переставлять входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получается все размещения из n элементов по k, для каждого сочетания можно сделать $k!$

$$k!\, C_n^k = A_n^k$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

(Сочетание без повторений)

Имеются предметы ***n* различных типов**. Сколькими способами можно сделать из них **комбинацию из *k* элементов**, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации, при этом **предметы одного типа могут повторяться**? Иными словами, различные комбинации должны отличаться количеством предметов хотя бы одного типа.

Такие комбинации называют сочетаниями с повторениями из элементов n типов по k, а их число обозначают $\bar{C}_n^k$

Различным комбинациям при этом соответствует различные перестановки с повторениями, а каждой перестановке с повторением соответствует своя комбинация.

$$\bar{C}_n^k = P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Встречаются задачи, в которых на сочетания с повторениями налагается дополнительное условие – в них обязательно должны входить элементы r фиксированных типов, где $r \leq n$.

Для решение возьмем с самого начала по одному элементу каждого такого типа. Тем самым в сочетаний с повторениями из элементов n типов по k окажутся заняты r мест. Остальные же $k - r$ мест можно заполнят любыми элементами, принадлежащими по условию к n типам. Поэтому комбинаций искомого вида столько же, сколько и сочетаний с повторениями из n типов, содержащих по $k - r$ элементов каждое, то есть

$$\bar{C}_n^{k-r} = C_{n+k-r-1}^{k-r}$$

(Сочетание с повторениями)

Возьмем n объектов $\{a_1, \dots, a_n\}$. Мы хотим выбирать объект из этого множества и возвращать обратно и так к раз. В силу правила умножения мы получим количество способов выбирать kобъектов равным $n \cdot n \dots \cdot n = n^k$ (n умножаем k раз)

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

(Размещение с повторениями)

Примеры

1. Трое ребят собрали с яблони 40 яблок сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми?
2. На урок труда учитель должен принести 28 цветных листсов. У учителя белая, синяя, красная, желтая, зеленая бумага. Сколько способов учитель может выбрать из необходимых ему 28 листов?
3. Сколько нечетных шестизначных чисел (1, 3, 5, 7, 9)?

Список литератиуры:

[Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. «Комбинаторика» 2006 г. стр. 40]

[Райдагорский А. М. «Комбинаторика» ФББ МГУ стр. 8]

Размещение без повторений	разместить на k местах некоторые из n элементов	Элементы не могут повторятся, порядок важен	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Перестановки без повторений	размещения из n элементов по n элементов	Отличаются только порядком	$P_n = n!$
Размещение с повторениями	выбирать объект из множества состоящий из n элементов и возвращать обратно и так k раз	Элементы могут повторятся, порядок важен	$\bar{A}_n^k = n^k$
Сочетание без повторений	из n различных элементов по k	Отличаются только составом, но не порядком	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$
Сочетание с повторениями	из элементов n типов по k	Порядок не важен, но элементы одного типа могут повторятся	$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Перестановки с повторениями	перестановка из n элементов k различных типов	В отличий от обычных перестановок некоторые элементы совпадают, поэтому получится меньшее число перестановок	$\tilde{P}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_n!}$