数学物理方程

基础理论

常微分方程模型

马尔萨斯人口模型

$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

t表示时间，u是t的函数，表示任意时刻人口数目

短时间内人口增长速度和当前人口数量成正比，但未考虑到环境对人口的制约，即人口增长的非线性机制，

人口总数不太大时，可以使用上述的线性动力学描述

随着人口总数的增加，资源对人口增长的限制变得显著，人口的增长趋于缓慢

传染病模型

一个区域内共有M只老鼠，N只老鼠患传染病，求任意时刻患传染病老鼠个数

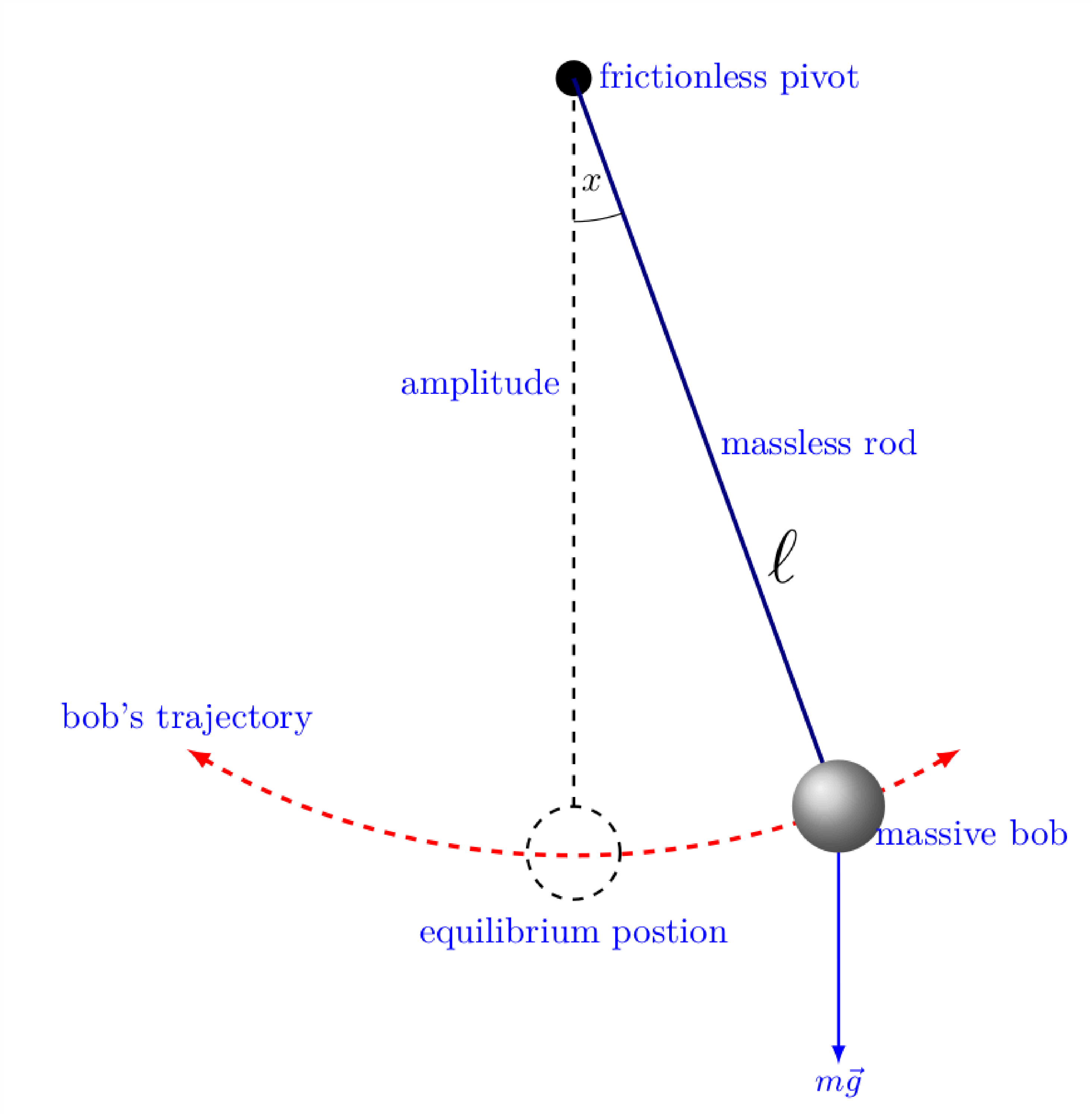
$$\forall t,\text{患病老鼠个数为}u\text{，健康老鼠为}v\text{，}u + v = M$$
$$\frac{du}{dt} = \beta uv = \beta u(M-u) = \alpha u - \beta u^2 = \alpha u(1 - \frac{u}{M})$$

患病增长率正比于uv，即患病鼠与正常鼠相遇的概率，这是一个非线性项

一开始$\frac{u}{M}$很小，可以忽略，非线性项可以忽略不计，约化为马尔萨斯人口模型，随着u增加，非线性项无法忽略，相对增长率下降，个体数目增长速率减缓，即为生长曲线

非线性动力学包含了个体数目增长的非线性机制，更好的描述人口增长

单摆问题



$$-mg\sin\theta = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{l * \frac{d\theta}{dt}}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

这里取逆时针方向为角度正方向，负号是因为角度与加速度方向相反

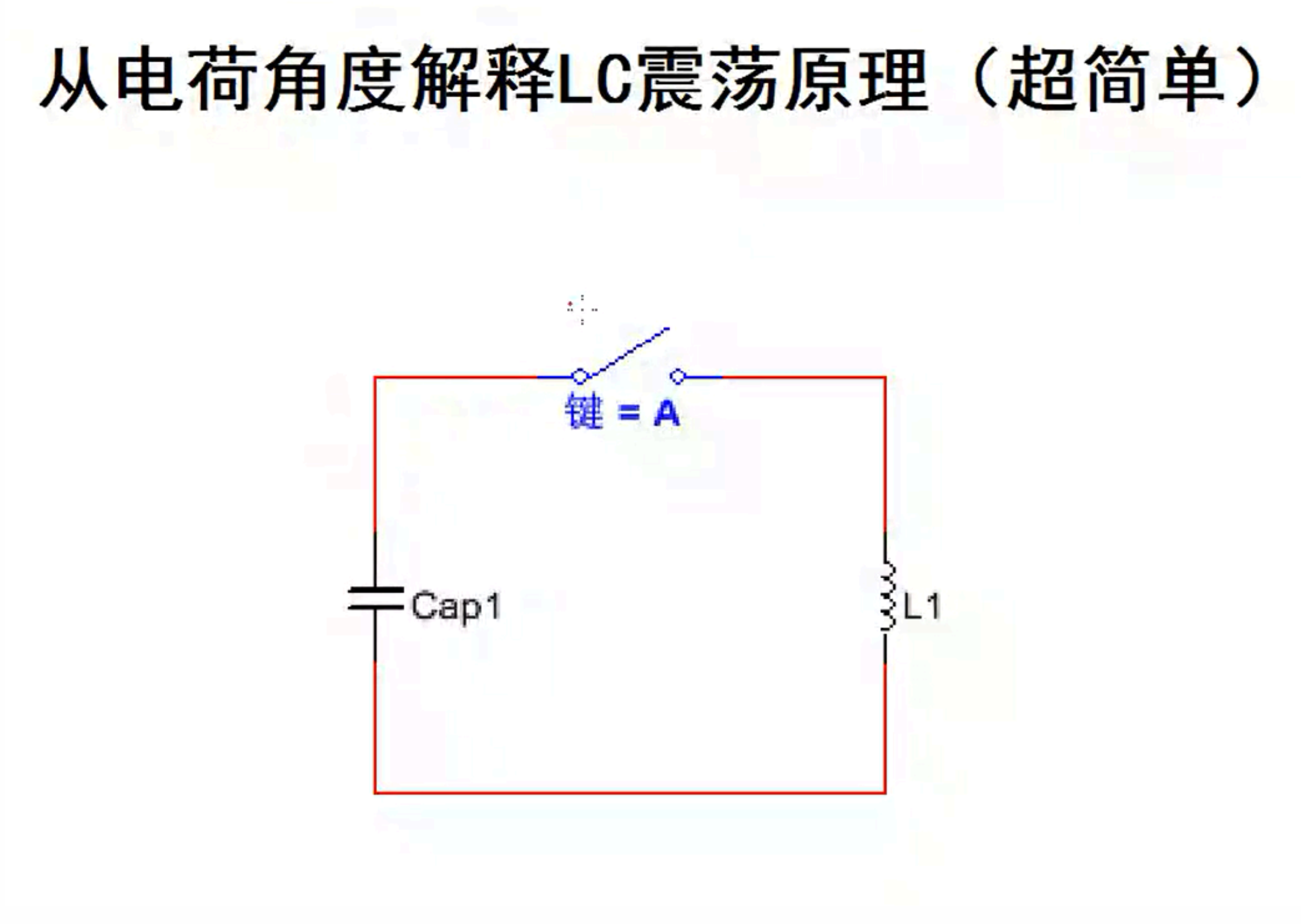
角度十分小时，$\sin x = x$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

即可求解

LC震荡电路

LC电路，电容器电荷量和电路电流的关系



初始时刻电荷Q_0，电流$I_0=0$

有基尔霍夫定律,电压变化

$$L\frac{di}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$
$$i=\frac{dQ}{dt}$$
$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{C}Q=0$$

RG传输线

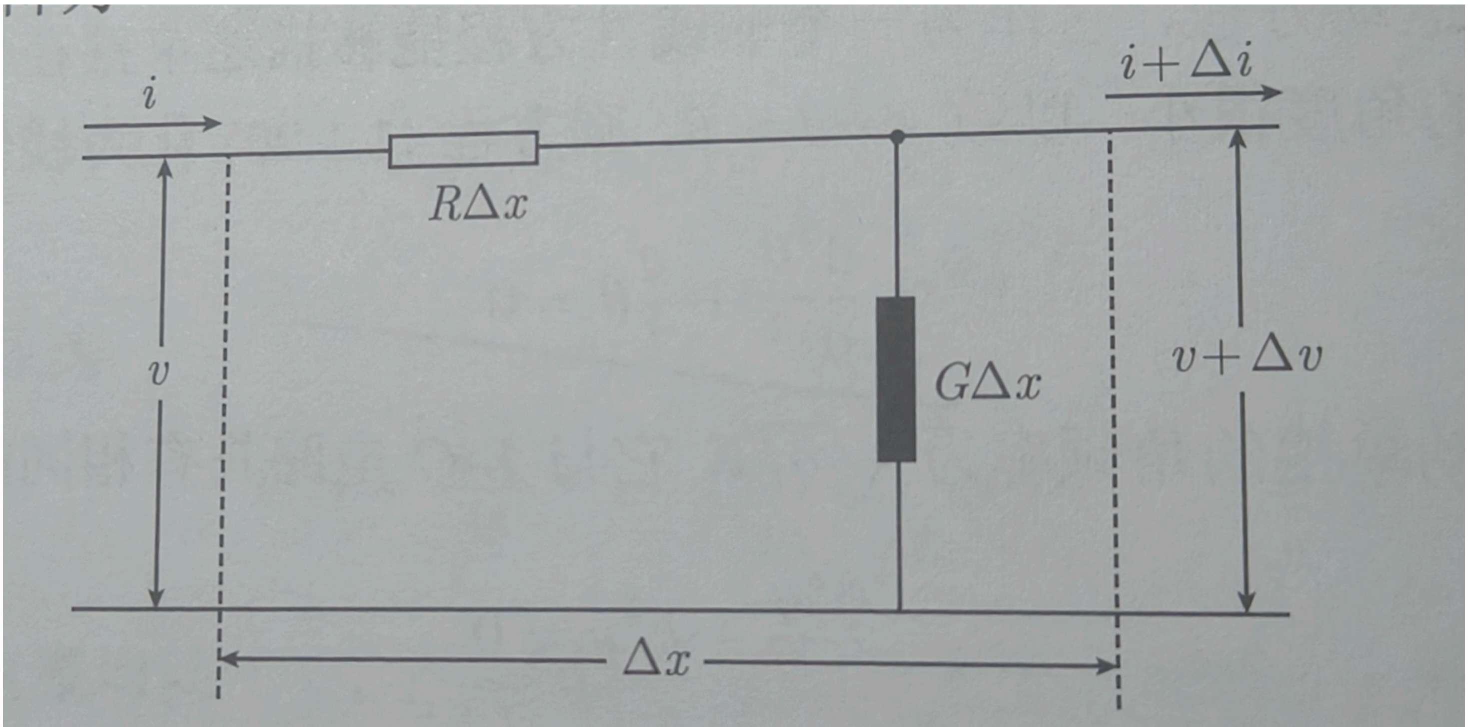


图 1.4　传输线的微元 Δx 的等效电路

电路中存在电阻R和电导$G=\frac{I}{U}$

选择微元$\Delta x, R.G$为单位长度电阻，电导

基尔霍夫电压，电流定律

$$
\begin{gathered}
v = iR\Delta x + v + \Delta v \\
i = i + \Delta i + G\Delta x \cdot (v + \Delta v) \\
\text{忽略小量的积}\Delta v\Delta x \\
\frac{dv}{dx} + iR = 0 \\
\frac{di}{dx} + vG = 0 \\
1\text{式对}x\text{求导，代入即可,相似的，可以求出}i
\end{gathered}
$$

捕食者-被捕食者模型

食草动物和食肉动物在同一区域生活，山猫吃了山兔，繁殖能力增强，山猫的数量增加，山兔的数量减少。然后山猫缺少食物，数量也下降，山兔缺少捕食者，数量上升。那么山猫的数量再次上升，不断循环

$$
\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = k_1 x - \mu xy \\
\frac{dy}{dt} = vxy - k_2 y
\end{gathered}
$$

x表示山兔的数量，y表示山猫的数量，山兔自然增长率大于0，减少是因为被捕食

山猫自然增长率小于0，增长是因为捕食

微分算子与拉普拉斯算子

矢量微分算子∇

函数的梯度

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

散度，矢量$E = (E_x, E_y, E_z)$

$$\nabla \cdot E = (\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k) \cdot (E_x i + E_y j + E_z k)$$

旋度，矢量

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

拉普拉斯算子∇^2

对于函数，为函数梯度的散度

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u$$

对于矢量函数，拉普拉斯算子为矢量函数分量的拉普拉斯算子之和

拉普拉斯算子是一个**二阶微分算子**，通常用符号 ∇^2 表示。它的核心思想是衡量一个函数在某一点的值与其周围点的**平均值**的差异程度。

直观理解：
你可以把它想象成一个“**均匀化**”或“**平滑度**”的度量器。

- 如果一个点函数值**高于**其周围邻域的平均值，拉普拉斯算子的值为**正**（类似一个“峰值”）。
- 如果一个点函数值**低于**其周围邻域的平均值，拉普拉斯算子的值为**负**（类似一个“谷底”）。
- 如果一个点函数值**等于**其周围邻域的平均值，拉普拉斯算子的值为**零**（类似一个“平坦”区域）。

因此，**拉普拉斯算子描述的是函数在该点的“凹凸性”或“发散”趋势。**

在笛卡尔坐标系（二维和三维）

拉普拉斯算子是梯度的散度（$\nabla \cdot \nabla$），所以写作 ∇^2。

- **二维空间 (x, y)**：
  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
  即，函数 $f(x, y)$ 在 x 方向的二阶偏导数加上在 y 方向的二阶偏导数。
- **三维空间 (x, y, z)**：
  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

拉普拉斯算子是许多描述自然界基本规律的核心方程的一部分。

1. 拉普拉斯方程$\nabla^2 f = 0$

这个方程描述的是**稳态**（不随时间变化）且**无源**的物理场。解这个方程的函数称为**调和函数。**

- **例子**：

- **静电场**：在无电荷的区域，电势满足拉普拉斯方程。
- **稳态热传导**：当物体内温度分布不再变化时，温度场满足拉普拉斯方程。
- **理想流体**：无旋不可压缩流体的速度势函数。
- **引力势**：在无物质区域，引力势满足拉普拉斯方程。

2. 泊松方程$\nabla^2 f = \rho$

这是拉普拉斯方程的推广，描述了场是由某个“源” ρ 产生的。

- **例子**：
  - **静电场**：在有电荷密度 ρ 的区域，电势满足泊松方程 $\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon_0$。
  - **牛顿引力**：在有物质密度 ρ 的区域，引力势满足泊松方程 $\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho$。

3. 热传导方程（扩散方程）$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u$

这个方程描述的是物理量（如温度、浓度）如何随时间扩散。等式左边是变化率，右边是拉普拉斯算子，表示扩散的驱动力正是物理量在空间分布的不均匀性（即偏离周围平均值的程度）。

4. 波动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$

这个方程描述波（声波、光波、水波）的传播。拉普拉斯算子在这里捕捉了波的“弯曲”或“曲率”，这决定了波如何从一个点传播到下一个点。

5. 薛定谔方程（量子力学）$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$

在这个量子力学的基石方程中，拉普拉斯算子 $\nabla^2 \psi$ 代表了粒子的**动能项**。它直接关联于粒子波函数的“曲率”，曲率越大，动能越高。

离散形式的拉普拉斯核（卷积模板） 常用的一种是：

```
[ 0, -1,  0]
[-1,  4, -1]
[ 0, -1,  0]
```

这个核的中心点权重为4，周围为-1，正好体现了“中心点减去周围点的平均值”的思想。

拉普拉斯算子 ∇^2 是一个**衡量函数局部平均值偏离程度的二阶微分算子**。它的核心思想是**“平均与差异”**。

从笛卡尔坐标系到极坐标，柱坐标和球坐标系的表达式转换。使用**链式法则**进行坐标变换。

将拉普拉斯算子从笛卡尔坐标 (x, y) 转换到极坐标 (r, θ)。二者的关系为：

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

目标： 证明在二维极坐标下，拉普拉斯算子为：

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

证明步骤：

1. **计算一阶偏导数的变换关系**

我们需要用 $\frac{\partial f}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ 来表示 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$。根据链式法则：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

首先计算四个关键的偏导数：

- 由 $r^2=x^2+y^2$，两边对x求导，得 $2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x$，所以 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$
- 同理，$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$
- 由 $\theta=\arctan(y/x)$，两边对x求导，得 $\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$
- 同理，$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$

代入链式法则公式：

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\quad(\text{操作符形式})$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\quad(\text{操作符形式})$$

2. **计算二阶偏导数（拉普拉斯算子）**
拉普拉斯算子是梯度的散度：$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。我们可以将其视为算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$ 作用于自身的结果。

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

将第一步得到的算子表达式代入：

$$\nabla^2=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2+\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2$$

3. **展开并简化**
展开平方项时需注意，这些是微分算子，它们的“乘积”意味着连续作用。

$$\begin{aligned}\nabla^2=&\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\\&+\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\end{aligned}$$

这是一个繁琐但直接的过程。展开后，许多交叉项会相互抵消，而剩下的项可以合并。最终结果为：

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

因此，

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

注意到 $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\frac{\partial f}{\partial r}+r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$，所以上式等价于：

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

将拉普拉斯算子从笛卡尔坐标 (x,y,z) 转换到球坐标 (r,θ,ϕ)。关系为：

其中 $r\geq 0$，$0\leq\theta\leq\pi$，$0\leq\phi<2\pi$。

类比于平面极坐标，分别考虑两个平面，最后计算一个偏导数，充分利用

$$z = r\cos(\theta), \rho = r\sin(\theta)$$

首先考虑球坐标与直角坐标的关系

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\begin{cases} x = r\cos(\phi)\sin(\theta) \\ y = r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$
$$\rho = r\sin(\theta)$$
$$x = \rho\cos(\phi)$$
$$y = \rho\sin(\phi)$$
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$
$$\rho^2 + z^2 = r^2$$
$$Fristly,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$
$$Add \quad it，then$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

然后，只要考虑

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \rho}$$

ρ, ϕ是独立的变量，所以二者没有关系

首先

$$\tan(\theta) = \frac{\rho}{z}$$
$$\theta = \arctan(\frac{\rho}{z})$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{\frac{1}{z}}{1 + (\frac{\rho}{z})^2} = \frac{z}{z^2 + \rho^2} = \frac{\cos(\theta)}{r}$$
$$and, \rho = r\sin(\theta), \text{两边对}\rho\text{求导}$$
$$1 = \frac{\partial r}{\partial \rho}\sin(\theta) + r\cos(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{\partial r}{\partial \rho}\sin(\theta) + \cos^2(\theta)$$
$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

即可求得结果

傅里叶级数

周期函数的傅里叶级数

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

考虑此时的基函数$1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \cdots$

他们是正交的，在$[-\pi, \pi]$等长度为2π的区间上，任取其中不同的两个做乘积，定积分为0

全文使用半周期T，导出这三个系数。处理具体问题时，函数的奇偶性，区间的选择可简化运算

傅里叶级数将周期函数表示为正弦和余弦函数的线性组合。对于周期为 2π 的函数 $f(x)$，其傅里叶级数展开为：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

其中，系数 a_0、a_n 和 b_n 需要通过积分推导。推导过程基于三角函数的正交性，即在区间 $[-\pi, \pi]$ 上，以下积分性质成立：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \pi & \text{if } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{if } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \pi & \text{if } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \text{对于所有整数} m, n$$

下面逐步推导三个系数。

对傅里叶级数两边在区间 $[-\pi, \pi]$ 上积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] dx$$

由于积分和求和可交换（假设函数满足适当条件），且根据正交性：

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0$ 对于 $n \geq 1$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = 0$ 对于 $n \geq 1$

因此，右边只剩下常数项积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx = a_0 \cdot 2\pi = a_0 2\pi$$

解得：

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

将傅里叶级数两边乘以 $\cos(mx)$（其中 m 为正整数）并在 $[-\pi, \pi]$ 上积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] \cos(mx)\,dx$$

展开右边：

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx$$

根据正交性：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx = 0\text{对于}m \geq 1\text{，所以第一项为零。}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0\text{对于所有}n, m\text{，所以第三项为零。}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ \pi & \text{if } n = m \neq 0 \end{cases}$$

因此，右边仅当 $n = m$ 时非零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = a_m \cdot \pi$$

解得：

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

由于 m 是任意的，对于一般 $n \geq 1$，有：

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

注意，此公式也适用于 $n = 0$，此时 $\cos(0x) = 1$，得到 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$，与之前一致。

将傅里叶级数两边乘以 $\sin(mx)$（其中 m 为正整数）并在 $[-\pi, \pi]$ 上积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right] \sin(mx)\,dx$$

展开右边：

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

根据正交性：

因此，右边仅当 $n = m$ 时非零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = b_m \cdot \pi$$

解得：

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx$$

对于一般 $n \geq 1$，有：

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

对于周期为 2π 的函数 $f(x)$，傅里叶系数为：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad for \quad n \geq 1$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad for \quad n \geq 1$$

一般的，如果半周期为 T，则通过变量变换 $x \to \frac{\pi x}{T}$，周期变为π,可得一般形式：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)$$

其中系数为：(注意到此时dx也发生了改变，从而改变了积分之前的系数)

$$a_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$$
$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$$

狄利克雷定理

对于一个给定的周期函数 $f(t)$，用它计算出的傅里叶级数，是否**必定收敛**？如果收敛，它是否**必定收敛于函数本身**

狄利克雷定理是一个函数能够被其傅里叶级数表示的**充分条件**（即满足这些条件时，结论一定成立），而必要条件是未知的，另一方面，即使不满足这些条件，也完全有可能是成立的

狄利克雷定理的表述如下：

设 $f(t)$ 是一个以 $2L$ 为周期的周期函数（定义在区间 $[-L, L]$ 上）。如果 $f(t)$ 满足以下 **"狄利克雷条件"**：

1. **绝对可积**：函数在一个周期内的绝对值的积分是有限的。

$$\int_{-L}^{L} |f(t)|\,dt < \infty$$

   （这个条件保证了傅里叶系数 a_n 和 b_n 的计算是有意义的。）
2. **分段连续**：在区间 $[-L, L]$ 上，函数 $f(t)$ 只有**有限个**第一类间断点（即跳跃间断点,左右极限存在但不相同）。这意味着函数可以被分成有限段，每一段内部都是连续的，只在有限个点上发生“跳跃”。
3. **分段光滑**：在区间 $[-L, L]$ 上，函数 $f(t)$ 只有**有限个**极值点。或者说，其导数 $f'(t)$ 也是分段连续的（也只有有限个第一类间断点）。

那么，函数 $f(t)$ 的傅里叶级数在每一点 t 上都**收敛**，并且其和 $S(t)$ 满足：

- 如果 t 是 $f(t)$ 的**连续点**，则傅里叶级数收敛于该点的函数值：

$$S(t) = f(t)$$

- 如果 t 是 $f(t)$ 的**第一类间断点**（跳跃点），则傅里叶级数收敛于该点**左极限**和**右极限**的**算术平均值**：

$$S(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$$

- 在周期端点（如 $t = \pm L$），傅里叶级数收敛于**左右极限的平均值。**由于周期性，端点处的行为与区间内的间断点行为一致。

1. **"分段"是关键**：定理的条件并不要求函数是"完美"的（处处连续、处处可导）。现实中的许多物理信号（如方波、锯齿波）都是分段连续和分段光滑的，因此狄利克雷定理保证了它们的傅里叶级数展开是有效的。这极大地扩展了傅里叶级数的应用范围。
2. **在间断点处的神奇行为**：这是狄利克雷定理最引人注目的结论之一。即使在函数发生跳跃的点上，傅里叶级数依然收敛，并且收敛到"中间值"。

   当用有限项傅里叶级数逼近时，在间断点附近会出现**吉布斯现象**（Gibbs Phenomenon），即 overshoot（过冲），但随着项数增加，这个过冲的峰值并不会消失，但其宽度会变窄，最终在间断点处仍收敛于平均值。
3. **区分"收敛"与"一致收敛"**：狄利克雷定理保证的是**逐点收敛**，而非**一致收敛**。在函数的连续区间内，级数是一致收敛于 $f(t)$ 的；但在间断点附近，由于吉布斯现象，收敛不是一致的。

考虑一个经典的周期函数——**方波**：

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } 0 < t < \pi \\ -1, & \text{如果 } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

周期为 2π。

- **检查狄利克雷条件**：
  - 它是绝对可积的。
  - 它在 $t = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$ 处有跳跃间断点（第一类间断点），但数量有限。因此是分段连续的。
  - 它是分段光滑的（除了间断点，导数均为0）。
- **结论**：根据狄利克雷定理，该方波的傅里叶级数处处收敛。
  - 在连续区域（例如 $t = \pi/2$），级数收敛于 $f(\pi/2) = 1$。
  - 在间断点（例如 $t = 0$），级数收敛于 $\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{(-1)+(1)}{2} = 0$。

特性	描述
目的	给出一个周期函数其傅里叶级数**收敛**并且收敛到**函数本身**（或其平均值）的**充分条件**。
核心条件	1. 绝对可积 2. 分段连续（有限个跳跃点） 3. 分段光滑（有限个极值点）
收敛结果	- **连续点**：收敛于 $f(t)$ - **间断点**：收敛于左右极限的**平均值**
重要性	将傅里叶级数的应用从"性质良好"的函数扩展到工程和物理中常见的、具有间断点的现实信号。
相关现象	在间断点附近会出现**吉布斯现象**。

半幅傅里叶级数

定义在有限区间上$(0, L)$上，不具有周期性。可以展开为半幅傅里叶级数。

仅仅使用$\sin nx$或$\cos nx$,如果为对称区间，考虑函数的奇偶性，如果只有一半，需要先补全

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{T}$$

$$\phi(x)=D_0+\sum_{n=1}^{+\infty}D_n\cos\frac{n\pi x}{T}$$

$$f(x)=\sin x,x\in(0.\pi)$$

分别使用$\sin nx,\cos nx$展开

傅里叶积分

定义在$(-\infty,+\infty)$上的非周期函数，进行傅里叶积分，首先傅里叶展开

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)$$

直接将周期$T\to+\infty$即可

$$a_0=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)dt$$

$f(t)$是绝对收敛的，$T\to+\infty$此时计算$a_0=0$

这里为了方便，仅仅考虑一个三角函数部分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dt$$

令

$$\frac{n\pi}{T}=\omega_n,\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{T}=\Delta\omega$$

$T\to+\infty$时，认为$\Delta\omega$为微元$d\omega$

$$a_n=\int_{-T}^{T}\frac{d\omega}{\pi}f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

那么

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{T})$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}f(t)\cos(\omega t)\,dt\right]\cos(\omega x)d\omega$$

立刻证明，此时$f(x)$定义在$\mathbb{R}$上，$\omega>0$

傅里叶变换

傅里叶变换简介

积分变换，就是将函数$f(t)$通过积分运算变为另一类函数，一般表示为

$$F(\beta)=\int_a^b f(t)K(\beta,t)dt$$

其中$K(\beta,t)$为积分变换的核，核与积分区间不同，构成了不同的积分变换

傅里叶积分可以推广到傅里叶变换，频谱从$\omega\in(0,+\infty)\rightarrow(-\infty,+\infty)$

从一个函数 $f(t)$ 的傅里叶积分表示出发，推导傅里叶变换及其逆变换。

傅里叶积分定理指出，一个定义在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积，且满足狄利克雷条件（在任意有限区间上只有有限个极值点和第一类间断点）的函数 $f(t)$，可以表示为以下积分形式：

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{\omega=0}^{+\infty}\left[\int_{t=-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt\right]d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)d\omega\right]dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(t)(e^{i\omega(x-t)}+e^{-i\omega(x-t)})d\omega\right]dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}d\omega\right]dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt}e^{i\omega x}dx
\end{aligned}$$

其中第四个等号需要做一个负换元，即得傅里叶变换

这个公式是推导的起点。其核心思想是：任何函数都可以看作是无数个不同频率的复指数函数 $e^{i\omega t}$ 的线性组合，而方括号内的积分就是计算每个频率分量 ω 的“权重”或“幅度”。

观察上面公式中的内层积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

这个积分的结果是一个关于频率 ω 的函数，我们将其定义为函数 $f(t)$ 的**傅里叶变换**，记作 $F(\omega)$ 或 $\mathcal{F}\{f(t)\}$

傅里叶变换 (Fourier Transform) 的定义：

$F(\omega)$ 被称为 $f(t)$ 的频谱，它描述了信号 $f(t)$ 中频率为 ω 的成分的复振幅。

现在，将我们新定义的 $F(\omega)$ 代回第一步的傅里叶积分公式中：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

这个公式告诉我们，如何从函数的频谱 $F(\omega)$ **还原**出原始的函数 $f(t)$。我们将其定义为**傅里叶逆变换**，记作 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$。

傅里叶逆变换 (Inverse Fourier Transform) 的定义：

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega}$$

$$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)d\omega \qquad \text{就是面积}$$

傅里叶变换的性质

1. 线性性质

   傅里叶变换是一个线性算子。这意味着对于任意两个函数 $f(t)$ 和 $g(t)$，以及任意两个常数 a 和 b（可以是复数），傅里叶变换满足以下性质：

$$\mathcal{F}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{F}\{f(t)\}+b\mathcal{F}\{g(t)\}$$

同样，傅里叶逆变换也是线性的：

$$\mathcal{F}^{-1}\{aF(\omega)+bG(\omega)\}=a\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}+b\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$$

证明：
根据傅里叶变换的定义 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$，我们有：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{af(t)+bg(t)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}[af(t)+bg(t)]e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}af(t)e^{-i\omega t}dt+\int_{-\infty}^{\infty}bg(t)e^{-i\omega t}dt \quad (\text{由积分的线性性})\\&=a\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt+b\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt\\&=a\mathcal{F}\{f(t)\}+b\mathcal{F}\{g(t)\}\end{aligned}$$

逆变换的线性性证明类似

---

2. 傅里叶变换的微分定理

微分定理有两个基本形式：时域微分和频域微分。

- 时域微分定理

叙述：
如果函数 $f(t)$ 及其前 $n-1$ 阶导数在 $|t|\to\infty$ 时都趋于零，且 $f^{(n)}(t)$ 的傅里叶变换存在，那么：

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\}=(i\omega)^nF(\omega)$$

其中 $f^{(n)}(t)$ 表示 $f(t)$ 的 n 阶导数。

证明（以 n=1 为例）：
对一阶导数进行傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{-i\omega t}dt$$

使用分部积分法，$\mathcal{F}\{f'(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}df(t)$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt &= \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega e^{-i\omega t})dt \\
&= 0 - (-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= i\omega F(\omega)
\end{aligned}
$$

这里的$f(x)$是绝对收敛的，趋于无穷时，收敛到0

对于高阶导数，重复应用此过程即可得证。

- 频域微分定理

叙述:

$$
\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}
$$

证明（以 n=1 为例）:
我们从傅里叶变换 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ 出发，对 ω 求导:

$$
\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt
$$

在满足一定条件（如 $f(t)$ 绝对可积，$tf(t)$ 绝对可积）下，积分与求导可以交换次序:

$$
\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\partial}{\partial\omega}(e^{-i\omega t})dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-i\omega t}dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-i\omega t}dt
$$

比较最后一项与傅里叶变换的定义，我们发现:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-i\omega t}dt = \mathcal{F}\{tf(t)\}
$$

因此:

$$
\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -i\mathcal{F}\{tf(t)\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{tf(t)\} = i\frac{dF(\omega)}{d\omega}
$$

对于高阶情况，重复求导即可。

---

3. 卷积的定义与卷积定理

卷积的定义

两个函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积（Convolution）定义为如下积分:

$$
f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi
$$

卷积运算描述了将一个函数（如系统响应 $g(x)$）与另一个函数（如输入信号 $f(x)$）进行“混合”或“平滑”的过程。它具有交换律、结合律和分配律等性质。一个换成ξ，另一个换成$x-\xi$

卷积定理

叙述:
时域中两个函数的卷积，对应于频域中它们傅里叶变换的乘积。反之，时域中两个函数的乘积，对应于频域中它们傅里叶变换的卷积（需乘以 $1/(2\pi)$）。用公式表示为:

卷积定理:

$$\mathcal{F}\{f(t)*g(t)\}=F(\omega)\cdot G(\omega)$$

证明：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)*g(t)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(t-\xi)d\xi\right]e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(t-\xi)e^{-i\omega t}d\xi dt\end{aligned}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(t-\xi)e^{-i\omega(t-\xi)}dt\right]e^{-i\omega\xi}d\xi$$

对内层积分进行变量代换，令 $u=t-\xi$，则 $t=u+\xi$，$dt=du$：

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{-i\omega u}du\right]e^{-i\omega}d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{-i\omega u}du\right]d\xi$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{-i\omega u}du\right]$$

$$=F(\omega)\cdot G(\omega)$$

- 相对于求导的傅里叶变换，考虑原函数的傅里叶变换

$$\int_{x_0}^{x}f(x)dx\sim\frac{F(\omega)}{i\omega}$$

$$\int_{x_0}^{x}f(t)dt=g(x),f(x)=g'(x)$$
$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(x)\}=\mathcal{F}\{g'(x)\}=i\omega G(\omega)$$
$$\frac{F(\omega)}{i\omega}=G(\omega)\sim g(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$$

δ函数

狄拉克δ函数（Dirac delta function）是一个广义函数（分布），满足以下三个性质：

- 零值性：$\delta(x)=0,x\neq0$
- 无限高：$\delta(x)=\infty,x=0$
- 归一性：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$

- 筛选性质，对于任意连续函数 $f(x)$，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,dx=f(a)$$

证明

取充分小的δ

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx
$$
$$
=\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x)\delta(x-a)dx
$$
$$
=f(a)\int_{a-\delta}^{a+\delta} \delta(x-a)dx=f(a)
$$

- $\delta(-x)=\delta(x)$，

证明

考虑积分：

$$
f_1(x)=\delta(x-x_1) \qquad f_2(x)=\delta(x-x_2)
$$
$$
\text{考虑积分}
$$
$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_1)f_2(x)dx=f_2(x_1)=\delta(x_1-x_2)
$$
$$
=\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_2)f_1(x)dx=f_1(x_2)=\delta(x_2-x_1)
$$

取$x=x_1-x_2$，那么$\delta(x)=\delta(-x)$

- **与任意函数的卷积**：

  $$
  f(x)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi-x)\,d\xi=f(x)
  $$

  同理，$\delta(x)*f(x)=f(x)$。因此，δ函数是卷积的单位元。

- **平移性质**：

  $$
  f(x)*\delta(x-a)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi-a)\,d\xi=f(x-a)
  $$

  即卷积结果使函数向右平移 a。

  充分使用偶函数的性质，取适合的区间，确定积分

傅里叶变换定义：

$$
\mathcal{F}[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}\,dx=e^{-i\omega\cdot 0}=1
$$

即：

$$
\mathcal{F}[\delta(x)]=1
$$

逆变换：

$$
\mathcal{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\,d\omega=\delta(x)
$$
$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-a)x}\,dx=\delta(\omega-a)
$$

等等（注：该积分在广义函数意义下成立）

又因为$\delta(x)$是偶函数的原因

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}d\omega
$$

这是一个有趣的结果

平移δ函数的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)e^{-i\omega x}\,dx = e^{-i\omega a}$$

频域平移：

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

位置算符的本征方程：

在量子力学中，位置算符 $\hat{x}$ 满足：

$$\hat{x}\delta(x-x_0) = x_0\delta(x-x_0)$$

证明：
对任意测试函数 $f(x)$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{x}\delta(x-x_0)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x-x_0)\,dx = x_0 f(x_0)$$

同时：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x_0\delta(x-x_0)\,dx = x_0 f(x_0)$$

因此，$\hat{x}\delta(x-x_0) = x_0\delta(x-x_0)$，即 $\delta(x-x_0)$ 是位置算符的本征函数，本征值为 x_0.

- δ函数是偶函数，且为卷积单位元。
- 其傅里叶变换为常数1，频域平移对应相位因子。
- 在量子力学中，δ函数是位置算符的本征函数。

δ函数的辅助函数

δ函数有两个特征

1. $\delta(x)$在0处取无穷大，在其他位置取0
2. $\delta(x)$是一个归一化的分布函数，$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$

一个函数序列 $\{f_\beta(x)\}$ 被称为δ函数的辅助函数，如果它满足以下性质：

1. **归一化**：对于每个 β，$\int_{-\infty}^{\infty} f_\beta(x)\,dx = 1$。
2. **极限行为**：当 β变化 时，在 $x \neq 0$ 处 $f_\beta(x) \to 0$，β取极限值时，$x = 0$ 处 $f_\beta(x) \to \infty$（但积分保持有限）。
3. **筛选性质**：对于任何连续函数 $g(x)$，有 $\lim_{\beta\to\beta_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta(x)g(x)\,dx = g(0)$。这模拟了δ函数的定义性质 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)\,dx = g(0)$.

以下是一些常见的δ函数辅助函数序列：

- **高斯序列**
- 这是一个钟形曲线，随着 n 增大，峰变尖变窄。
- $$G(x-a) = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}}\exp[-\frac{(x-a)^2}{\beta}]$$
- 最简单的辅助函数

- $$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} & (|x| \le \beta) \\ 0 & (|x| > \beta) \end{cases}$$
- **Sinc序列**
- $$f_n(x) = \frac{\sin(\beta x)}{\pi x}$$
- 这个序列在傅里叶分析中常见，但注意它在 $x = 0$ 处定义为 β/π。
- $$L(x-a) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{(x-a)^2 + \beta^2}$$
- $$S(x-a) = \frac{\beta}{\pi (x-a)^2} \sin^2\left(\frac{x-a}{\beta}\right)$$
- $$E(x-a) = \frac{1}{2\beta} \exp(-\frac{|x-a|}{\beta})$$

显然可以看出函数的峰值，随着β的变化，$(\beta \to 0)$峰值不断升高，直到$+\infty$

上面是在$(-\infty, +\infty)$上的归一化分布函数，

由于当$x \neq 0$时，$\delta(x) = 0$那么考虑有限闭区间内的归一化函数

$$C(x, b) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-b^2}{1-2b\cos x + b^2}$$

在区间$[-\pi, \pi]$上归一化，在$x = 0$处取峰值$\frac{1}{2\pi} \frac{1+b}{1-b}$

当$b \to 1$时，峰值趋于无穷

狄利克雷内核是傅里叶分析中的一个重要核函数，用于表示傅里叶级数的部分和。它本身不是δ函数的辅助函数序列（因为它是周期性的），但在周期函数的情境下，当 $n \to \infty$ 时，它表现出类似δ函数的性质。

可以使用复数求和等等计算

这里使用三角恒等式，**积化和差公式**，导出狄利克雷内核的封闭形式。

狄利克雷内核定义为：

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

积化和差公式之一是：

$$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

考虑求和：

$$S = \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kx) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

应用积化和差公式：

$$\cos(kx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(kx-\frac{x}{2}\right)\right]$$

因此：

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)(\cos x+\cos(2x)+\cdots+\cos(nx))$$

是一个望远镜级数：

$$S=\left[\sin\left(\frac{3x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]+\left[\sin\left(\frac{5x}{2}\right)-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right]+\cdots+\left[\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)-\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)\right]$$

大多数项相互抵消，只剩下：

$$2\sin(\frac{x}{2})(\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)+\cdots+\cos(nx))=\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

两边同时除以 $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ （当 $x\neq 2m\pi$）：

$$1+\sum_{k=1}^{n}2\cos(kx)=\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

两边同时取长度为2π的积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((n+\frac{1}{2}x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx=2\pi$$

这就是狄利克雷核的封闭形式：

$$D_n(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\,dx=1$$

这一性质在傅里叶分析中非常重要，它确保了狄利克雷核在某种意义上"逼近"了狄拉克δ函数，尽管它不是一个真正的δ函数辅助函数序列（因为它在某些点不收敛到零）。

狄利克雷倍核$B_m(x)$就是狄利克雷内核$D_m(x)$的二倍，此时为了归一，可以将区间改为一半

使用狄利克雷内核，$\delta(x)$辅助函数的性质证明狄利克雷定理，确定傅里叶级数，积分，变换的收敛行为

$$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

借助狄利克雷内核，狄利克雷倍核的$\delta(x)$函数形式，证明十分方便

首先使用m项傅里叶级数逼近

$$S_m(x)=a_0+\sum_{n=1}^{m}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

首先考虑一个周期为2π的函数$f(x)$，半周期为π

$$\begin{aligned}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[\cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)]dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(n(x-t))dt\end{aligned}$$

此时

$$
\begin{aligned}
S_m(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n(x-t))dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{m}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[1+2\cos(n(x-t))]dt \\
&= \sum_{n=1}^{m}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x-t)\right)}dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_m(x-t)dt
\end{aligned}
$$

$m\to+\infty$，$D_m(x)$**为**$\delta(x)$**的辅助函数**

$$
= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\delta(t-x)dt = f(x)
$$

如果函数$f(x)$是连续的，直接考虑$\delta(x)$的筛选性质即可

现在考虑$f(x)$的不连续点，因为狄利克雷内核$D_n(x)$为偶函数

$$
\begin{gathered}
S_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_m(x-t)dt \\
= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_m(x-t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_m(t-x)dt \\
let \qquad x-t=y \qquad t-x=z \\
= \frac{1}{2}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-y)D_m(y)dy + \frac{1}{2}\int_{-x-\pi}^{\pi-x} f(x+z)D_m(t-x)dz \\
\text{只要控制积分区间长度为}2\pi\text{即可} \\
= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_m(y)dy + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_m(z)dz \\
\text{分割积分区间} \\
= \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\pi} f(x-t)\delta(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x+t)\delta(t)dt\right](m\to+\infty)
\end{gathered}
$$

再次利用筛选性质，即可得到左右极限的算术平均数

典型函数的傅里叶变换

讨论以下函数的傅里叶变换

$$1.\sin(kx)\quad\cos(kx)$$
$$2.G(x)=e^{(-\frac{a}{2}x^2)}$$
$$3.\sec h(kx),k>0$$
$$4.\Delta(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{2} & \text{if } |x|<2\\ 0 & \text{if } |x|\geq 2\end{cases}$$
$$5.\frac{\sin^2 x}{x^2}$$
$$6.e^{-\beta|t|}$$
$$7.f(x)=\begin{cases}e^{-\beta t}\quad if\quad x\geq 0\\ 0\quad if\quad x<0\end{cases}$$
$$8.u(t)=\begin{cases}1\quad if\quad t\geq 0\\ 0\quad if\quad t<0\end{cases}$$
$$9.u(t)\text{的傅里叶变换的反变换}$$
$$10.u(x)\text{的微分性质}$$
$$11.\text{sgn}(x)=\begin{cases}1\quad if\quad x>0\\ 0\quad if\quad x=0\\ -1\quad if\quad x<0\end{cases}$$

$$\sin(kx)$$
$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{ikx}-e^{-ikx})e^{-i\omega x}dx$$
$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega-k)x}-e^{-i(\omega+k)x}dx$$
$$\text{而}\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}d\omega$$
$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}dx$$
$$=\frac{1}{2i}(2\pi\delta(\omega-k)-2\pi\delta(\omega+k))$$
$$=i\pi(\delta(\omega+k)-\delta(\omega-k))$$

同理$\cos kx$也可以得到

$$g(x)=e^{-\frac{a}{2}x^2}$$
$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a}{2}x^2}e^{-i\omega x}dx$$
$$=\frac{i}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a}{2}x^2}de^{-i\omega x}$$
$$=\frac{i}{\omega}(e^{-\frac{a}{2}x^2}e^{-i\omega x}|_{-\infty}^{+\infty}+a\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-i\omega x}e^{-\frac{a}{2}x^2}dx)$$
$$=\frac{ia}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-i\omega x}e^{-\frac{a}{2}x^2}dx$$
$$=\frac{ia}{\omega}\mathcal{L}\{xg(x)\}$$
$$=\frac{ia}{\omega}i\frac{dG(\omega)}{d\omega}$$
$$G(\omega)+\frac{a}{\omega}G'(\omega)=0$$

解微分方程即可

$$\Delta(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{2} & \text{if } |x|<2\\ 0 & \text{if } |x|\geq 2\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-2}^{0}(1+\frac{x}{2})e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{2}(1-\frac{x}{2})e^{-i\omega x}dx$$

$$=\int_0^2(2-x)\cos(\omega x)dx$$

$$=\frac{1}{\omega}\int_0^2(2-x)d\sin(\omega x)$$

$$=\frac{2\sin^2(\omega)}{\omega^2}$$

$$e^{-\beta|t|}$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt+\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}e^{i\omega t}dt$$

$$2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos(\omega t)dt$$

$$=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

此时考虑一个极限

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}=\begin{cases}0 & \omega\neq 0\\ \infty & \omega=0\end{cases}=C\delta(\omega)$$

这是$\delta(x)$的一个辅助函数,积分可得$C=\pi$

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\beta t} \quad if \quad x\geq 0\\ 0 \quad if \quad x<0\end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\beta+i\omega}$$

$$u(t)=\begin{cases}1 \quad if \quad t\geq 0\\ 0 \quad if \quad t<0\end{cases}$$

就是$\beta\to 0$时的情况

$$\mathcal{L}\{u(t)\}=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\beta+i\omega}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}-\lim_{\beta\to 0}\frac{i\omega}{\beta^2+\omega^2}$$

实部是$\delta(x)$的辅助函数，那么

$$F(\omega)=\pi\delta(x)+\frac{1}{i\omega}$$

符号函数则是阶跃函数的线性组合

$$\operatorname{sgn}(x)=u(x)-u(-x)$$

$$\mathcal{F}(u(x))=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$$

$$\mathcal{F}(u(-x))=\int_{-\infty}^{+\infty}u(-x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(y)e^{i\omega y}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(y)e^{-i(-\omega)y}dy$$

$$=\pi\delta(\omega)-\frac{1}{i\omega}$$

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(x)\}=\frac{2}{i\omega}$$

拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

傅里叶变换必须要求定义在$(-\infty,+\infty)$上，不可以在一个部分区间上。

绝对可积，要求$x\to\infty,f(x)=0$,傅里叶积分存在

这些要求太严格，例如常数函数$f(x)=a,\sin x$,阶跃函数(0或1)都不满足

对一个一般的函数$g(t),t\geq 0$,乘以一个阶跃函数$u(t)$，使定义域扩展到$(-\infty,+\infty)$

再乘以衰减因子$e^{-\beta t}$，容易满足绝对可积的条件,再考虑新函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt\\=&\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)u(t)e^{-(\beta+i\omega)t}dt\\=&\int_{0}^{+\infty}g(t)e^{-pt}dt\end{aligned}$$

这是因为当$t<0$时，单位阶跃函数为0

这就是拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(p),\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}=f(t)$$

其中拉普拉斯逆变换主要考虑使用留数计算

下面计算几个典型的例子

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\}&=\int_{0}^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt\\&=-\frac{1}{p}e^{-pt}|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}\\\mathcal{L}\{t\}&=\int_{0}^{+\infty}t\cdot e^{-pt}dt\\&=-\frac{1}{p}\int_{0}^{+\infty}td(e^{-pt})\\&=-\frac{1}{p}(te^{-pt}|_0^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}dt)\\&=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{p^2}\\\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}&=\int_{0}^{+\infty}e^{(\alpha-p)t}dt=\frac{1}{p-\alpha}\end{aligned}$$

讨论

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}$$

拉普拉斯变换的性质

- 线性，由于定积分的线性
- 微分定理1

$f'(t)$的拉普拉斯变换

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p)$$

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}df(t)$$

$$= e^{-pt}f(t)|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$$= pF(p) - f(0)$$

- 微分定理2

  对像函数$F(p)$求导

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p)$$

$$\frac{dF(p)}{dp} = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

$$-\frac{dF(p)}{dp} = \mathcal{L}\{tf(t)\}$$

- 积分定理

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt, g'(x) = f(x)$$

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \mathcal{L}\{g'(x)\} = pG(p) - g(0) = pG(p)$$

$$\frac{F(p)}{p} = G(p) = \mathcal{L}\{g(x)\}$$

- 位移定理1

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}e^{-pt}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt$$

$$= F(p-\alpha)$$

  注意到，这是拉普拉斯变换是一个关于p的函数，位移即自变量发生了改变

- 位移定理2,阶跃函数

$$u(t-a)f(t-a)$$

$$\int_a^{+\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} u(T)f(T)e^{-p(a+T)}dT$$

$$= e^{-pa}\int_0^{+\infty} u(T)f(T)e^{-pT}dT$$

$$= e^{-pa}\int_0^{+\infty} f(T)e^{-pT}dT$$

$$= e^{-pa}F(p)$$

- 拉普拉斯变换的卷积

  傅里叶变换的卷积

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$$

  对拉普拉斯变换，可以认为自变量小于0时，函数为0

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{0}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi+\int_{0}^{x}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi+\int_{x}^{+\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$$

第一项，第三项都为0，故

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{0}^{x}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$$

卷积的性质证明也是十分显然的

$$\begin{gathered}
F_1(p)F_2(p)=\int_0^{+\infty}f_1(x)e^{-px}dx\int_0^{+\infty}f_2(y)e^{-py}dy \\
\int_0^{+\infty}f_1(x)e^{-p(x+y)}dx\int_0^{+\infty}f_2(y)dy \\
let \quad x+y=u \\
=\int_0^{+\infty}f_1(u-y)e^{-pu}du\int_0^{u}f_2(y)dy \\
=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{u}f_1(u-y)f_2(y)dy\right]e^{-pu}du \\
=\mathcal{L}\{f_1(x)*f_2(x)\}
\end{gathered}$$

典型函数的拉普拉斯变换

考虑

$$\sin(kx),\cos(kx),\sinh(kx),\cosh(kx),tf(t),e^{\alpha t}f(t)$$

对于三角函数的拉普拉斯变换，求法多种多样

1. 直接按定义求定积分

$$\begin{gathered}
I=\int_0^{+\infty}\sin(kx)e^{-pt}dt \\
J=\int_0^{+\infty}\cos(kx)e^{-pt}dt \\
-pI=\int_0^{+\infty}\sin(kx)de^{-pt}=\sin(kx)e^{-pt}|_0^{+\infty}-k\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cos(kx)dx \\
pI=kJ \\
-pJ=\int_0^{+\infty}\cos(kx)de^{-pt}=\cos(kx)e^{-pt}|_0^{+\infty}+k\int_0^{+\infty}\sin(kx)e^{-pt}dt \\
kI+pJ=1 \\
I=\frac{k}{k^2+p^2},J=\frac{p}{k^2+p^2}
\end{gathered}$$

2. 考虑复数的指数形式

$$\begin{gathered}
e^{ikx}=\cos(kx)+i\sin(kx) \\
\mathcal{L}\{e^{ikx}\}=\int_0^{+\infty}e^{(ik-p)x}dx \\
=\frac{1}{p-ik}=\frac{p}{p^2+k^2}+i\frac{k}{p^2+k^2}
\end{gathered}$$

3. 直接利用指数转化

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(kx)\} &= \int_0^{+\infty}\sin(kx)e^{-px}dx \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}(e^{ikx}-e^{-ikx})e^{-px}dx \\
&= \frac{1}{2i}(\frac{1}{p-ik}-\frac{1}{p+ik}) \\
&= \frac{k}{p^2+k^2}
\end{aligned}
$$

4. 考虑微分方程

$$
f(x)=\sin(kx)\text{满足}
$$

$$
\begin{cases} \frac{d^2f(x)}{dx^2}+k^2f(x)=0 \\ f(0)=0, f'(0)=k \end{cases}
$$

两边做拉普拉斯变换

$$
p^2F(p)-k+k^2F(p)=0
$$

$$
F(p)=\frac{k}{p^2+k^2}
$$

对于$\sinh kx, \cosh kx$为e^{kx}的线性组合，直接求解即可，这里计算一个例子

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh kx\} &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(p-k)x}+e^{-(k+p)x}dx \\
&= \frac{p}{p^2-k^2}
\end{aligned}
$$

对于$tf(t)$类的函数，直接对$f(t)$的像函数微分即可

对于$e^{\alpha}f(t)$

$$
\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt=F(p)
$$

$$
\int_0^{+\infty}e^{\alpha t}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt=F(p-\alpha)
$$

这相当于将左边看成右边p的函数，这就是自变量的改变

应用举例

主要是解微分方程

基本数学物理方程

波动方程

首先建立波动方程

长度为L，水平放置的弦，弦平衡时所在的直线为x轴

任何时间t,位置x的弦点离开平衡位置的位移为$u(x,t)$

$u(x,0)=\phi(x)$表示初始时刻$t=0$时的形状

- 假定弦是均匀的，线密度为ρ
- 完全轻质，忽略重力，需要考虑质量，内部有张力，在平衡和振动是是紧绷的
- 弦振动的幅度很小，即$\partial u/\partial x$很小

首先分析无外力作用，忽略重力的情况，此时只有张力起作用

弦的振动幅度小，伸长量小，张力几乎不变，维持为常熟T

分析任意一个x处长度为Δs的微元，两端张力大小相同，方向不同

振动方向是垂直于x轴的，在x轴方向上合力为0

$$F_{合}=ma=m\frac{\partial v}{\partial t}=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$F_{合}=T\sin\alpha_1-T\sin\alpha_2=T(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

考虑微元质量

$$m=\rho\Delta s\sim\rho\Delta x$$

此时

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_x=\tan\alpha_1\sim\sin\alpha_1\quad\frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\Delta x}=\tan\alpha_2\sim\sin\alpha_2$$

考虑微分的定义

$$f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad\Delta y=f'(x)\Delta x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\sin\alpha_2-\sin\alpha_1}{\Delta x}$$
$$\sin\alpha_2-\sin\alpha_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

联立，即

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

考虑有外力作用的受迫振动，此时合外力发生改变

$$
\begin{aligned}
F_{合} &= T\sin\alpha_1 - T\sin\alpha_2 + F(x,t)\Delta x = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
&= T(\frac{\partial u}{\partial x}|_x - \frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\Delta x}) + F(x,t)\Delta x \\
T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x &+ F(x,t)\Delta x = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)
\end{aligned}
$$

其中$f(x,t)$是$F(x,t)/\rho$的结果

考虑重力就是外力作用的一种特殊情况

考虑阻尼振动

弦在介质中作微振动，阻力与速度成正比

$$F(x,t) = -k\frac{\partial u}{\partial t}$$

将此作为合外力即可

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

波动方程的结果容易推广到二维，三维振动的情况

高频传输线问题

不仅仅存在导线电阻，电路电导，还需考虑分布电容，分布电感

电压和电流是空间距离x和时间t的函数，选择微元Δx

基尔霍夫定律电压电流关系

$$v = v + \Delta v + R\Delta x i + L\Delta x\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$i = (i + \Delta i) + C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t} + G\Delta x v$$

此处已经忽略了二阶小量，化简操作后可以得到独立的方程

热传导方程

温度分布不均匀，热量从高温向低温方向流动，温度是x，t的函数

热传导的傅里叶定律

一维热传导系统置于x轴，热流的传递方向沿着x正方向，x处的温度为$u(x)$，温度梯度为$\partial u/\partial x$取一个单位面积

流经该单位面积的热量

$$Q=-k\frac{\partial u}{\partial x}$$

热流方向与温度梯度方向相反

长度为L，横截面积为S,端点位于$x=0,x=L$

任意时刻t，任意位置x的温度函数$u(x,t)$

取一段微元Δx，Δt时间内流入热量

$$Q_1=-kS\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}|_x$$

流出热量

$$Q_2=-kS\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\Delta x}$$

比热容定义

$$\Delta Q=cm\Delta u$$
$$c=\frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta u}$$

微元温度升高所需要的热量,根据热量守恒

$$Q_3=c\rho S\Delta x\Delta u$$
$$Q_1-Q_2=Q_3$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

拉普拉斯方程

二阶偏微分方程

二阶线性双变量偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial u}{\partial t}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

通式

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu+G=0$$
$$A,B,C,D,E,F,G\text{不含}u$$

$G=0$则为齐次的，否则为非齐次

$$\Delta=B^2-4AC$$

决定了偏微分方程的标准形式

$$\Delta>0\text{双曲线}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=[\cdots]\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=[\cdots]$$
$$\Delta=0\text{抛物线}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=[\cdots]\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=[\cdots]$$
$$\Delta<0\text{椭圆}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=[\cdots]$$
$$[\cdots]\text{不含二阶偏导数}$$

引入变量代换

$$\xi=\xi(x,y),\eta=\eta(x,y)$$
$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+d\frac{\partial u}{\partial \xi}+e\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G=0$$

其中

$$a=A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$
$$c=A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$
$$\text{如果他们都满足}$$
$$A\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y}+C\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2=0$$
$$\text{就化简了}$$

此方程有常数解γ_1,γ_2

$$W(x,y)=\gamma$$
$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial M}{\partial x}\Big/\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$A\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y}+C\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2=0$$
$$\text{两边除以}\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2$$
$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+B\frac{dy}{dx}+C=0$$
$$\text{解出}\frac{dy}{dx}$$

得到变换，代入即可

定解问题

一个完整的偏微分方程由泛定方程和初始条件，边界条件组成，例如，两端固定的弦振动方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x\in[0,L],t>0\\ U|_{t=0}=\phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\varphi(x)\\ U|_{x=0}=0,U|_{x=L}=0\end{cases}$$

泛定方程刻画广泛的规律，不涉及具体的规律和问题

数学物理方程也可以是非线性的

描述孤立子的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin u$$

冲击波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

线性方程和非线性方程的区别是线性方程满足叠加原理

首先定义算符，算符就是运算符号

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$\int \mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \int \mathrm{d}r$$
$$\surd, \quad \ln, \quad \sin$$

算符使用L表示

如果

$$L(au+bv)=aL(u)+bL(v)$$

那么L叫做线性算符

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D\frac{\partial}{\partial x}+E\frac{\partial}{\partial y}+F$$

就是一个线性算符，二阶线性齐次偏微分方程

叠加原理表述如下

$$if \quad u_i(x,y) \quad s.t. Lu_i=0 \Longrightarrow L\sum_{i=1}^{+\infty}u_i=0$$

而非线性方程不满足叠加原理

同样的方程，不同的初值条件，其解不同，定解条件主要包括初值条件，边值条件、

初值条件关系到系统的时间行为，泛定方程的时间导数为几阶，就有几个初值条件，振动方程就是一个例子

对于热传导方程，对t只有一阶导数，只有一个初值条件

不含时间的泛定方程，没有初值条件，如拉普拉斯方程

$$U|_{x=0}=0,U|_{x=L}=0$$

描述U行为的边值条件为第一类边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

包含$\partial u/\partial x$的条件为第二类边值条件

$$u+\beta\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L}=0$$

描述$u,\partial u/\partial x$组合的条件为第三类边值条件

上述三个条件都是齐次的，也有非齐次的边值条件

分离变量法

弦振动问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x\in[0,L],t>0\\ U|_{t=0}=\phi(x) & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\varphi(x)\\ U|_{x=0}=0,U|_{x=L}=0\end{cases}$$

使用分离变量法，

$$\begin{gathered}u(x,t)=X(x)T(t)\\ than\quad X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)\\ \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}\\ left\quad is\quad function\quad about\quad x,so\\ \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda\\ \Longrightarrow X''(x)+\lambda X(x)=0\\ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0\end{gathered}$$

此时要求泛定方程为齐次方程，否则$f(t)$无法消去，无法转化为常微分方程

此时$T(t)$不恒等于0，否则方程一直为0，没有意义

此时必须先解$X(x)$，因为$T(t)$的初值条件含x

$$\begin{gathered}u|_{x=0}=0,u|_{x=L}=0\\ X(0)T(t)=0,T(t)\neq 0,so,\\ X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=0,X(L)=0\end{gathered}$$

- $\lambda=0$

  $$X(x)=Ax+b,X(0)=X(L)=0\rightarrow A=B=0$$

  是一个平凡解，没有意义
- $\lambda<0$

$$
\begin{gathered}
t^2+\lambda=0 \\
t=\pm\sqrt{-\lambda}=\pm k \\
X(x)=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx} \\
X(0)=X(L)=0 \\
\Longrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{kL}+c_2e^{-kL}=0 \end{cases} \Longrightarrow c_1=c_2=0
\end{gathered}
$$

还是一个平凡解，没有意义

- $\lambda>0$

$$
\begin{gathered}
t^2+\lambda=0 \\
t=\pm\sqrt{\lambda}i=\pm ki \\
X(x)=c_1\cos(kx)+c_2\sin(kx) \\
X(0)=0\rightarrow c_1=0 \\
X(L)=0, X(x)\neq 0 \\
so \quad \sin(\sqrt{\lambda}L)=0 \\
\sqrt{\lambda}L=n\pi, \lambda=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\
X(x)=b_n\sin(\frac{n\pi x}{L})
\end{gathered}
$$

此时

$$
\begin{gathered}
T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \\
T''(t)+\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2T(t)=0 \\
T(t)=c_n\cos(\frac{n\pi a}{L}t)+d_n\sin(\frac{n\pi a}{L}t) \\
u(x,t)=\sin(\frac{n\pi x}{L})\left(c_n\cos(\frac{n\pi a}{L}t)+d_n\sin(\frac{n\pi a}{L}t)\right)
\end{gathered}
$$

注意到，这是只用了边值条件，未使用初值条件，根据叠加原理

$$
\begin{gathered}
u(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\sin(\frac{n\pi x}{L})\left(c_n\cos(\frac{n\pi a}{L}t)+d_n\sin(\frac{n\pi a}{L}t)\right) \\
u(x,0)=\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_n\sin(\frac{n\pi x}{L}) \\
\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n\pi a}{L}d_n\sin(\frac{n\pi x}{L})
\end{gathered}
$$

可以看出这是一个半幅傅里叶展开

$$
\begin{gathered}
c_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\phi(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\mathrm{d}x \\
\frac{n\pi a}{L}d_n=\frac{1}{L}\int_{-T}^{T}\varphi(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\mathrm{d}x \\
d_n=\frac{1}{n\pi a}\int_{-T}^{T}\varphi(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\mathrm{d}x
\end{gathered}
$$

基本定解问题

二维泛定方程的定解

第三类边值条件的定解

本征函数法

引入本征函数

分离变量法求解齐次方程，齐次边界条件的定解问题

非齐次问题无法使用叠加原理，根据边界条件，写出本征函数集合，直接给出形式解，代入泛定方程。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x\in[0,L],t>0 \\ U|_{t=0}=\phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\varphi(x) \\ U|_{x=0}=0,U|_{x=L}=0 \end{cases}$$

这里可以根据边界条件给出本征函数

$$U|_{t=0}=\phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

形成微分方程的定解问题，讨论λ的取值，解出$X(x)$

$$u=\sum_{i=1}^{+\infty}T(t)X(x)$$

$X(x)$是已知的，从而可以得到半幅傅里叶展开

此时需要注意本征函数的奇偶性，如果是关于$\sin x$那么从1开始，反之需要从0开始，即傅里叶级数的常数项

将u代入泛定方程

$$\sum_{i=1}^{+\infty} T^{''}(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sum_{i=1}^{+\infty} T(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left[T^{''}(t) + \left(\frac{na\pi}{L}\right)^2 T(t)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

此时

$$T^{''}(t) + \left(\frac{na\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0$$

此时求出的结果与分离变量法相同

下面举一个例子

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u|_{t=0} = \cos\frac{3\pi x}{2L}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, u|_{x=L} = 0$$

由边界条件可以确定本征函数，讨论λ的取值

$$\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x$$

从而可以得到形式解，代入泛定方程，得到常微分方程

再根据初始条件确定方程的解

非齐次方程的解法

考虑有边界条件的非齐次波动方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad x\in[0,L], t>0\\ U|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0\\ U|_{x=0} = 0, U|_{x=L} = 0\end{cases}$$

完全类似上述过程，选择本征函数，作半幅傅里叶变换，只不过此时也要将$f(x,t)$半幅傅里叶变换

$$u = \sum_{i=1}^{+\infty} T(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$
$$T(t) = \frac{2}{T}\int_0^T u\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$$
$$T(0) = T'(0) = 0$$

显然这可以转化为一个常微分方程的初值问题

另一方面

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$$
$$f_n(t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$$

代入泛定方程即可

即一个初值问题的常微分方程

利用拉普拉斯变换求解，使用卷积的拉普拉斯变换

泊松方程的定解问题

非齐次边界条件

施姆图-刘维尔理论

本征值问题

吊摆问题

行波法

一维波动方程

无边界条件的波动方程的定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

考虑将其转化为二元二阶片微分方程的标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$
$$\Delta=4a^2\geq 0$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\pm a$$
$$\begin{cases}x=at+\xi\\x=-at+\eta\end{cases}$$
$$\begin{cases}\xi=x-at\\\eta=x+at\end{cases}$$

代入，立刻

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

分别取偏积分

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=f_1(\xi)$$
$$u=\int f_1(\xi)\mathrm{d}\xi+g(\eta)$$
$$u=f(\xi)+g(\eta)=f(x-at)+g(x+at)$$

举一个例子

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y\\u|_{y=0}=x^2\\u|_{x=1}=\cos y\end{cases}$$

分别对x,y积分

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}x^2y^2+f(x)$$
$$u=\frac{1}{6}x^3y^2+f(x)+g(y)$$
$$f(x)+g(0)=x^2$$
$$\frac{1}{6}y^2+f(1)+g(x)=\cos y$$

需要求未知函数之和，排除特殊函数值即可

$$f(1)+g(0)=1$$

立刻得到结果

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x-at} = \phi(x) \\ u|_{x+at} = \varphi(x) \end{cases}$$

类似的，转换为标准的偏微分方程形式

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \\ u|_{\xi=0} = \phi\left(\frac{\eta}{2}\right) \\ u|_{\eta=0} = \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{cases}$$

此时，立刻有

$$u = f(\xi) + g(\eta)$$

代入条件

$$f(0) + g(\eta) = \phi\left(\frac{\eta}{2}\right)$$
$$f(\xi) + g(0) = \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

相同的处理方式，排除

$$f(0) + g(0) = \phi(0)$$
$$f(\xi) + g(\eta) = \cdots$$

最后将变量改为x, t即可

达朗贝尔公式

无界弦的自由振动

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u|_{t=0} = \phi(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x)$$

同样转化为标准形式

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

立刻得到

$$u = f(\xi) + g(\eta)$$
$$f(x) + g(x) = \phi(x) \quad 1$$
$$-af'(x) + ag'(x) = \varphi(x) \quad 2$$

对2式两边取积分，从0到x

$$
\begin{gathered}
-af(x)+ag(x)+af(0)-ag(0)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t \\
-af(x)+ag(x)+C=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t \\
f(x)+g(x)=\phi(x)
\end{gathered}
$$

即可解得

$$
f(x)\to f(\xi),g(x)\to g(\xi)
$$

代入即可

特征线法

考虑一阶线性偏微分方程

$$
\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,t)u=f(x,t)\\ u|_{t=0}=\phi(x)\end{cases}
$$

假定x是t的函数

$$
\begin{gathered}
x=x(t) \\
u(x,t)=u(x(t),t)=U(t) \\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}
\end{gathered}
$$

此时，假设

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x,t)
$$

即可化简结果，另外，为此假定一个初值条件，形成了常微分方程

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x,t) \\
x(0)=c \\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+b(x(t),t)U=f(x(t),t) \\
U|_{t=0}=\phi(c)
\end{gathered}
$$

解之，即可

一个例子

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t}+(x+t)\frac{\partial u}{\partial x}+u=x \\
u|_{t=0}=x
\end{gathered}
$$

首先

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+t \\
x(0)=c \\
\Longrightarrow x=ce^t+e^t-t-1 \\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+U=ce^t+e^t-t-1 \\
U(0)=c
\end{gathered}
$$

此时较为方便的方法是拉普拉斯变换，再求逆变换，由x得出c

$$c = (x - e^t + t + 1)e^{-t}$$

代入即可

无边界条件非齐次波动方程

首先考虑变上限函数的微分定理

$$U(x) = \int_a^y f(x,t)\mathrm{d}t$$
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = f(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \int_a^y \frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t$$

此时假定$y = y(x)$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \int_a^y \frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t + f(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

如果此时$y = x$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \int_a^x \frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t + f(x,x)$$

考虑一个非齐次的无边界条件强迫振动

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$
$$u|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

需要使用齐次化原理

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$$
$$\Omega|_{t=\tau} = 0 \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t}|_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

经过简单的变换

$$T = t - \tau$$
$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} = a^2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$$
$$u|_{T=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{T=0} = f(x,\tau)$$

使用达朗贝尔法是可以求解的，解为

$$\Omega(x,t,\tau)$$

下面证明

$$u = \int_0^t \Omega(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau$$

是原非齐次偏微分方程的解

首先验证初值

$t=0$时，积分上下限相同，初值为0

再计算微分的初值条件，

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t}=\Omega(x,t,t)+\int_0^t\frac{d\Omega(x,t,\tau)}{dt}\mathrm{d}\tau, \\
than\quad \Omega|_{t=\tau}=0\Longrightarrow\Omega(x,t,t)=0
\end{gathered}
$$

此时，原方程的微分初值条件也满足

最后验证满足原泛定方程

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^t\frac{\partial\Omega(x,t,\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\Omega(x,t,t)}{\partial t}+\int_0^t\frac{\partial^2\Omega(x,t,\tau)}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau \\
=f(x,t)+\int_0^t a^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\mathrm{d}\tau \\
=f(x,t)+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t\Omega\mathrm{d}\tau \\
=f(x,t)+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{gathered}
$$

泛定方程也是满足的，求解即可

至于一个更复杂的问题

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \\
u|_{t=0}=\phi(x)\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\varphi(x)
\end{gathered}
$$

需要将原问题分成两部分

齐次的泛定方程，非齐次的初始条件

非齐次的泛定方程，齐次的初始条件

根据叠加原理，泛定方程和初始条件均得到满足

积分变换法

傅里叶变换法

拉普拉斯变换法

联合变换法

贝塞尔函数

微分方程

Γ*函数*

贝塞尔方程

贝塞尔函数

贝塞尔函数的正交性

###

勒让德函数

勒让德方程

勒让德多项式

勒让德多项式性质

勒让德多项式正交完备性