Análisis Real

Matías Leiva

Índice

1. Conjuntos y Funciones

Una de las deficiones más importantes es la defición de conjunto. Esta es una de las definiciones más intuitivas, pero a la vez más difíciles de definir. La definición de conjunto que se utilizará es la siguiente: *Un conjunto es una colección no ordenada de elementos distintos.*[1]

Definición 1: Conjuntos

- El conjunto sin elementos ($\{\}$) se denota por $\emptyset$.
- Si $x \in B$ para todo $x \in A$, entonces A es un subconjunto de B y se denota por $A \subseteq B$.
- La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B = \{x |\ x \in A \vee x \in B\}$.
- La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B = \{x |\ x \in A \wedge x \in B\}$.

Ahora se definirá el concepto de función. Una función es una relación entre dos conjuntos, Dado un conjunto A y un conjunto B, una función f de A en B es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $f(x) \in B$. Se denota por $f : A \to B$.

1. Además, A es el dominio de f y B es el codominio de f. El rango de f es el conjunto de todos los valores que toma f y se denota por R_f. (Es decir, $R_f = \{f(x) |\ x \in A\}$).
2. Una función $f : A \to B$ es inyectiva si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ para todo $x, y \in A$.[2]
3. Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si para todo $x \in B$, existe algún $a \in A$, tal que, $f(a) = B$.[3]
4. Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

[1] *Todo es un conjunto*
[2] *Igualmente se puede definir de la siguiente manera: f es inyectiva si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ para todo $x, y \in A$.*
[3] $\forall x \in B\ \exists a \in A \mid f(a) = b$

2. Propiedades del valor absoluto

1. $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $|x| = |-x|$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|,\ b \neq 0$
6. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$
8. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Problemas 1

Demuestre las siguientes propiedades del valor absoluto:

- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$