Resolución de Integrales

IntegralesUfro

Índice

1. Integrales Primer Semestre 2023

Problema 1.

Resolver la Integral:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\tan(x)}}{\left(\sin(x)+\cos(x)\right)^{2}}dx$$

Problema 2.

Resolver la Integral:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^{4}+1\right)^{3}}$$

Problema 3.

Resolver la Integral:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(a\cdot\sec(x))}{1+\sin^{2}(x)}dx$$

Problema 4.

Resolver la Integral:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(\left(ax\right)^{2}+1)}{x^{2}+b^{2}}dxe$$

Problema 5.

Resolver la Integral:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^{4}+a_{1})(x^{4}+a_{2})\cdots(x^{4}+a_{n})}$$

Problema 6.

Resolver la Integral:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos(\theta)+a^{2}}$$

2. Soluciones

Esta es una breve introducción a lo que serán las soluciones de los problemas planteados en la sección anterior, en esta sección se mostrarán las soluciones de los problemas planteados en el semestre, y se mostrarán los pasos a seguir para resolverlos, además de mostrar los trucos que se pueden utilizar para resolverlos.

Es importante mencionar que las soluciones que se mostrarán en esta sección, no son las únicas soluciones posibles, si tienen alguna duda o sugerencia, no duden en contactarme a mi cuenta de instagram: @integralesufro.

Finalmente, para que esta introduccion no sea tan aburrida, les dejo una historia conmovedora:

Había una vez un gatito matemático llamado Fibonacci, cuyo amor por las secuencias perfectas era proporcional a su curiosidad felina. Saltaba entre números primos y raíces cuadradas, pero su fascinación máxima residía en la mágica Razón Áurea. Deslizándose por la espiral, Fibonacci encontró un universo geométrico donde los triángulos se multiplicaban siguiendo su famosa serie. Calculó los ángulos divinos y, en ese instante, su fama felina creció exponencialmente entre los matemáticos, ¡miau-tiplicando su legado para siempre! ♡

2.1. Solución P1

Sea $\mathcal{I}$ la integral a resolver, entonces, tenemos que:

$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\tan(x)}dx}{(\sin(x)+\cos(x))^2} \cdot \frac{\sec(x)^2}{\sec(x)^2}$$

Entonces obtenemos la siguiente integral:

$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\tan(x)} \cdot \sec(x)^2 dx}{(\tan(x)+1)^2}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} \tan(x) = u \\ \sec(x)^2 dx = du \end{cases} \quad \therefore \mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{u}}{(u+1)^2} du \to \begin{cases} \sqrt[3]{u} = a \\ \dfrac{\sqrt[3]{u}}{3u} du = da \end{cases} \quad \therefore \mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{3u^3}{(1+u^3)^2} du$$

Luego realizando integración por partes, obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{3x^3}{(1+x^3)^2} dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \dfrac{3u^2}{(u^3+1)^2} du \\ du = dx & v = \dfrac{-1}{(u^3+1)} \end{bmatrix} \implies \frac{-x}{(x^3+1)^2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$$

Ahora para realizar la Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$, hacemos el siguiente truco, llamemos a la integral $\mathcal{I}$, entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = u \\ \dfrac{1}{x^2} dx = -du \end{cases} \quad \therefore \mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u^3+1} du \to 2\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u^3+1} du + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$$

Entonces la integral $\mathcal{I} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-x+1} dx$, ahora para resolver, completamos el cuadrado en el denominador, obteniendo lo siguiente:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

Después los siguientes pasos es transformar la integral, para obtener un arco tangente, lo que resulta en la siguiente expresión:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(x)\Big|_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{s} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

2.2. Solución P2

Para resolver esta integral usaremos bastantes trucos, asi que vamos a ir paso a paso. Primero, vamos a hacer la siguiente integración por partes:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^4+1)^n} = \mathcal{I}(n), \qquad \begin{bmatrix} u = \dfrac{1}{(x^4+1)^n} & dv = dx \\ du = \dfrac{-n\cdot 4x^3}{(x^4+1)^{n+1}} & v = x \end{bmatrix} = \frac{x}{(x^4+1)^n}\Big|_0^\infty + 4n\int_0^\infty \frac{x^4}{(x^4+1)^{n+1}}dx$$

$$\mathcal{I}(n) = 4n\int_0^\infty \frac{x^4}{(x^4+1)^{n+1}}dx = 4n\int_0^\infty \frac{x^4+1-1}{(x^4+1)^{n+1}}dx = 4n\cdot\mathcal{I}(n) - 4n\cdot\mathcal{I}(n+1)$$

Aquí usamos la siguiente formula de recurrencia:

$$\mathcal{I}(n) = 4n\cdot\mathcal{I}(n) - 4n\cdot\mathcal{I}(n+1) \implies \mathcal{I}(n+1) = \frac{4n-1}{4n}\cdot\mathcal{I}(n)$$

$$\therefore \mathcal{I}(3) = \frac{4\cdot 2-1}{4\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 1-1}{4\cdot 1}\cdot\mathcal{I}(1)$$

Ahora nos queda calcular $\mathcal{I}(1)$, para ello usamos la siguiente sustitución:[a]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{dx}{\frac{1}{x^2}+x^2}\cdot\frac{1}{x^2} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} = u \\ \dfrac{1}{x^2}dx = -du \end{cases} \quad \to \therefore \mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{du}{u^2+\frac{1}{u^2}} = \mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{u^2}{u^4+1}du$$

$$2\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int_0^\infty \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx \quad \begin{cases} x-\dfrac{1}{x} = u \\ 1+\dfrac{1}{x^2}dx = du \end{cases}$$

$$2\mathcal{I} = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{u^2+2}du \qquad \therefore \mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{1}{u^2+2}du = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Finalmente tendríamos que, $\mathcal{I}(3) = \dfrac{4\cdot 2-1}{4\cdot 2}\cdot\dfrac{4\cdot 1-1}{4\cdot 1}\cdot\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} = \dfrac{21\pi}{64\sqrt{2}}$

[a] Un compañero en instagram resolvió una integral similar, aquí les dejo el link de la solución: IntegralesQueHablan solución.

2.3. Solución P3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(a\cdot\sec(x))}{1+\sin^2(x)}dx\cdot\frac{\sec^2(x)}{\sec^2(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(a\cdot\sec(x))\sec^2(x)}{\sec^2(x)+\tan^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln(a)+\ln(\sec(x)))}{1+2\tan^2(x)}\cdot\sec^2(x)dx$$

$$\begin{cases}\tan(x)=u\\ dx\cdot\sec^2(x)=du\end{cases} \to \int_0^{\infty}\frac{\ln(a)+\frac{1}{2}\ln(u^2+1)}{1+2u^2}du = \int_0^{\infty}\frac{\ln(a)}{1+2u^2}du+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\ln(u^2+1)}{2u^2+1}du$$

$$\begin{cases}u\sqrt{2}=x\\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{2}}\end{cases} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\infty}\frac{\ln(a)}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\ln(\frac{x^2}{2}+1)}{x^2+1}dx\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln(a)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{\ln(x^2+2)-\ln(2)}{x^2+1}dx$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln(a)-\frac{\pi\ln(2)}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{\ln(x^2+2)}{x^2+1}dx^{a} \begin{cases}x=\tan\theta\\ dx=\sec^2(\theta)d\theta\end{cases} \to \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan^2(\theta)+2)d\theta$$

Ahora usaremos un nuevo truco, que es la derivación bajo el signo de la integral[b], para ello definimos la función $\mathcal{I}(a)$ como:

$$\mathcal{I}(a)^{c} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan^2(\theta)+a)d\theta \to \mathcal{I}'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial a}\ln(\tan^2(\theta)+a)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2(\theta)+a}d\theta$$

$$\mathcal{I}'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2(\theta)+a}\cdot\frac{\sec^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}d\theta \begin{cases}\tan\theta=u\\ \sec^2(\theta)d\theta=du\end{cases} \to \int_0^{\infty}\frac{1}{(u^2+a)(u^2+1)}du$$

Realizando fracciones parciales, tenemos que:

$$\mathcal{I}'(a) = \frac{1}{a-1}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+1}du-\frac{1}{a-1}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+a}du$$

$$\mathcal{I}'(a) = \frac{1}{a-1}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{(a-1)\sqrt{a}}\cdot\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}\frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}$$

Luego, integrando respecto a a tenemos que:

$$\mathcal{I}(a) = \frac{\pi}{2}\int\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}da = \begin{cases}\sqrt{a}=v\\ \dfrac{1}{2\sqrt{a}}da=dv\end{cases} \to \pi\int\frac{1}{v+1}dv = \pi\ln(\sqrt{a}+1)+C$$

Finalmente, como $\mathcal{I}(0)=0$, tenemos que $C=0$, por lo que:

$$\mathcal{I}(a) = \pi\ln(\sqrt{a}+1) \implies \mathcal{I}(2) = \pi\ln(\sqrt{2}+1)$$

Dandonos como resultado final:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln(a)-\frac{\pi\ln(2)}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{I}(2) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln(a)-\frac{\pi\ln(\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

[a]Resultado que nos servirá más adelante, recordar!!
[b]Aquí puedes encontrar un ejemplo más sencillo: https://www.youtube.com/watch?v=wsfvX4Mtrho&
[c]Notar que $\mathcal{I}(0)=0$. https://www.youtube.com/watch?v=iNaiq_IETEs

2.4. Solución P4

$$\int_0^\infty \frac{\ln((ax)^2+1)}{x^2+b^2}dx = \begin{cases} ax = u \\ dx = \dfrac{du}{a} \end{cases} \to \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\ln(u^2+1)}{\dfrac{u^2}{a^2}+b^2}\cdot\frac{a^2}{a^2}du \to a\int_0^\infty \frac{\ln(u^2+1)}{u^2+(ab)^2}du$$

$$a\int_0^\infty \frac{\ln(u^2+1)}{u^2+(ab)^2}du = \begin{cases} u = x\cdot(ab) \\ du = dx\cdot(ab) \end{cases} \to a^2 b\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2\cdot(ab)^2)}{(ab)^2(1+x^2)}dx = \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\ln\left((ab)^2(\frac{1}{(ab)^2}+x^2)\right)}{1+x^2}dx$$

$$\frac{2}{b}\int_0^\infty \frac{\ln(ab)}{x^2+1}dx + \frac{2}{b}\int_0^\infty \frac{\ln\left(x^2+\dfrac{1}{(ab)^2}\right)}{x^2+1}dx^{a} = \frac{\pi}{b}\ln(ab) + \frac{\pi}{b}\ln\left(\frac{1}{ab}+1\right) = \frac{\pi}{b}\ln(ab+1)$$

Bueno, este resultado fue bastante corto, para rellenar un poco más, dejemos algunas integrales, que pueden ser útiles para el futuro:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sec(x))}{1+a\sin^2(x)}dx^{b} = \frac{\pi}{2\sqrt{a+1}}\left(\ln(\sqrt{a+1}+1) - \ln(\sqrt{a+1}\,)\right)$$

[a] Aquí utilizamos el resultado de la integral anterior, cuando usamos el truco de feymann.
[b] En realidad nunca más usaremos esta integral, solo la quería mostrar jejejeje.

2.5. Solución P5

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+a_1)(x^4+a_2)\cdots(x^4+a_n)} \to \frac{1}{(x^4+a_1)(x^4+a_2)\cdots(x^4+a_n)} = \frac{A}{x^4+a_1} + \frac{B}{x^4+a_2} + \cdots + \frac{Z}{x^4+a_n}$$

Multiplicando por el denominador de la izquierda, obtenemos que:

$$1 = A(x^4+a_2)(x^4+a_3)\cdots(x^4+a_n)+B(x^4+a_1)(x^4+a_3)\cdots(x^4+a_n)+\cdots+Z(x^4+a_1)\cdots(x^4+a_{n-1}) \to \Big\{ x = \sqrt[4]{a_1}\cdot\sqrt{i}$$

$$1 = A(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)+0+\cdots+0 \implies A = \frac{1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)}$$

Repitiendo todos los pasos anteriores, pero ahora con $x = \sqrt[4]{a_2}\cdot\sqrt{i}$, obtenemos que:

$$1 = 0 + B(a_1-a_2)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)+\cdots+0 \implies B = \frac{1}{(a_1-a_2)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)}$$

Y así sucesivamente, hasta llegar a que:

$$Z = \frac{1}{(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)}$$

Ya que $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, entonces podemos escribir que:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+a_1)(x^4+a_2)\cdots(x^4+a_n)} = A\cdot\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+a_1} + \cdots + Z\cdot\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+a_n}$$

$$A\cdot\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+a_1} = \begin{cases} x = u\sqrt[4]{a_1} \\ dx = du\cdot\sqrt[4]{a_1}\end{cases} \to \frac{A}{\sqrt[4]{(a_1)^3}}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^4+1}{}^{a} = \frac{A}{\sqrt[4]{(a_1)^3}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Repetimos este proceso para cada una de las integrales, y obtenemos que la siguiente expresión es la solución al problema:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(a_1)^3}(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{(a_n)^3}(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)}\right)$$

Un ejemplo de esto es $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^4+4)(x^4+\pi)}$, entonces la solución es:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(4^3)}(\pi-4)} + \frac{1}{\sqrt[4]{(\pi^3)}(4-\pi)}\right) \approx 0,0908$$

Lo que concuerda con la solución de Wolfram Alpha:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^4+4)(x^4+\pi)}\,dx = \frac{-2\sqrt{2}\pi^{1/4}+\pi}{8(-4+\pi)} \approx 0{,}0908648$$

[a] Esta integral la hicimos en el problema 2!! Pan comido!.

2.6. Solución P6

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos(\theta)+a^2}{}^{a} = \begin{cases} \theta-\pi = x \\ d\theta = dx \end{cases} \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos(x+\pi)+a^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+2a\cos(x)+a^2} = \begin{cases} \tan(\frac{x}{2}) = u \\ dx = \dfrac{2du}{1+u^2} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2du}{2a(1-u^2)+(a^2+1)(1+u^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2du}{(a^2+1)u^2-2au^2+(a^2+2a+1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2du}{(a-1)^2u^2+(a+1)^2}$$

$$\frac{2}{(a-1)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2+\dfrac{(a+1)^2}{(a-1)^2}} = \frac{2}{(a-1)^2}\cdot\frac{(a-1)}{(a+1)}\cdot\arctan\left(\frac{x(a-1)}{a+1}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi}{a^2-1}$$

[a] Aquí asumí que a era mayor que 1, después habría que hacer varios cambios, en cuanto valores absolutos y cosas así, tarea para el lector muejejej.