Семинар 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

Понятие матрицы. Прямоугольные, квадратные и диагональные матрицы. Операции над матрицами. Транспонирование матрицы. Вычисление определителей первого, второго и третьего порядков.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ: Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами Лекции 1. Алгебра матриц. Выписать основные определения и свойства.

Понятие матрицы Прямоугольные, квадратные и диагональные матрицы. Операции над матрицами

Пример 1. Определить размер матриц $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -12 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 11 \\ -1 & 23 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

Решение. Например, матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$- квадратная матрица размера 2×2, 2-го порядка.

Матрица $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -12 \end{pmatrix}$- прямоугольная матрица размера 2×3.

Матрица $C=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 11 \\ -1 & 23 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$- прямоугольная матрица размера 4×2.

Пример 2. Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 10 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть матрица C = A + B.

$$C=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 7\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 1 & -5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+10 & 0+1 & 7-5\\ 5+3 & 2+0 & -3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 2\\ 8 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $C=\begin{pmatrix}6 & 1 & 2\\ 8 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Пример 3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$. Найти матрицы 4А, -2А.

Решение.

$$4A=4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\\ 4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -8 & 12\\ 16 & -24\end{pmatrix}.$$

$$-2A=-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\\ 4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & -6\\ -8 & 12\end{pmatrix}.$$

Ответ. $4A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -8 & 12\\ 16 & -24\end{pmatrix}$, $-2A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & -6\\ -8 & 12\end{pmatrix}$

Пример 4. Даны 2 матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $2A-3B$.

Решение.

$$2A-3B=2\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 0\\ -18 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0-6 & -2-0\\ 6+18 & -4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ 24 & -7\end{pmatrix}$$

Ответ. $2A-3B=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ 24 & -7\end{pmatrix}$.

Пример 5. Даны 2 матрицы $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-3)\cdot 2+1\cdot(-5) & (-3)\cdot 1+1\cdot 1\\ 2\cdot 2+0\cdot(-5) & 2\cdot 1+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-3)+1\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 0\\ (-5)\cdot(-3)+1\cdot 2 & (-5)\cdot 1+1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 17 & -5\end{pmatrix}$$

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix}-11 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 17 & -5\end{pmatrix}$.

Пример 6. Даны 2 матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\\ 0 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ и. Найти матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение.

$A\cdot B=\underbrace{\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}}_{2\times 3}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\\ 0 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}}_{4\times 2}$ невозможно выполнить операцию умножения, поскольку число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы.

$$B\cdot A=\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\\ 0 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}}_{4\times 2}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}}_{2\times 3}=\underbrace{\begin{pmatrix}14 & 9 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 8 & 12 & 0\\ -10 & -3 & -2\end{pmatrix}}_{4\times 3}$$

Ответ. $A\cdot B$ не определено, $B\cdot A=\begin{pmatrix}14 & 9 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 8 & 12 & 0\\ -10 & -3 & -2\end{pmatrix}$.

Транспонирование матрицы

Пример 7. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 3 & 6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ найти транспонированную матрицу.

Решение. Транспонированной является матрица $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Пример 8. Даны 2 матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B^T$.

Решение.

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -12 & -10 \\ 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 19 & -12 & -10 \\ 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Пример 9. Найти $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - x + 4$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $f(A) = 2A^2 - A + 4 \cdot E$, где E – единичная матрица.

$$2A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot E = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2A^2 - A + 4E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ. $f(A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычисление определителей первого, второго и третьего порядков

Определитель матрицы $A = a_{11}$ первого порядка: $\det A = a_{11}$

Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третьего порядка:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

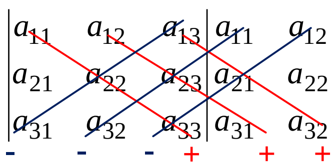
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Правило Саррюса вычисления определителя третьего порядка также позволяет облегчить процесс вычисления.

Выписываем определитель матрицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Справа от него выписываем первые два столбца $\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$.

Произведение элементов на главной диагонали и на диагоналях ей параллельных, берем со знаком «+» и вычитаем произведения элементов на побочной диагонали и ей параллельных.



Пример 10. Даны две квадратные матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -4\\ 1 & 6 & -2\end{pmatrix}$. Найти $\det A$ и $\det B$.

Решение.

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-((-5)\cdot(-1))=4-5=-1$$

$$\det B=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -4\\ 1 & 6 & -2\end{vmatrix}=\underbrace{2\cdot 5\cdot(-2)}_{-20}+\underbrace{0\cdot 6\cdot 1}_{0}+\underbrace{3\cdot(-4)\cdot 1}_{-12}-\underbrace{1\cdot 5\cdot 1}_{5}-\underbrace{2\cdot 6\cdot(-4)}_{-48}-\underbrace{0\cdot 3\cdot(-2)}_{0}=$$
$$-20-12-5+48=11$$

Ответ. $\det A=-1,\ \det B=11.$

Пример 11. Найти $\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & -\cos x\end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & -\cos x\end{vmatrix}=-\cos^2 x-\sin^2 x=-1.$$

Ответ. 1

Пример 12. Решить уравнение $\begin{vmatrix}x+1 & x-1\\ x & x+1\end{vmatrix}=0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, вычислив определитель:

$$\begin{vmatrix}x+1 & x-1\\ x & x+1\end{vmatrix}=(x+1)^2-x(x-1)=x^2+2x+1-x^2+x=3x+1$$

$$3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

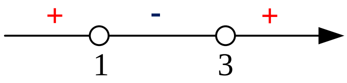
Ответ. $x=-\dfrac{1}{3}$.

Пример 13. Решить неравенство $\begin{vmatrix}x-1 & x-1\\ 6 & x+3\end{vmatrix}<0.$

Решение. Преобразуем левую часть неравенства, вычислив определитель:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ 6 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)(x+3) - 6(x-1) = x^2 + 2x - 3 - 6x + 6 = x^2 - 4x + 3.$$

Решим неравенство, разложив квадратный трехчлен в левой части на множители: $(x-1)(x-3) < 0$, решая это неравенство методом интервалов, получим:



Ответ. $x \in (1;3)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить $4A - 5B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Ответ. $\begin{pmatrix} -16 & 13 \\ -30 & -37 \end{pmatrix}$

2. Вычислить $2A + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ. $\begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & -19 & 1 \end{pmatrix}$

3. Вычислить $-A + 3E$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Заданы матрицы А и В, вычислить, если это возможно, произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ -18 & -15 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}20 & 40\\ -10 & -20\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot B=(31)$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}12 & 0 & -6 & 9 & 3\\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5\\ 8 & 0 & -4 & 5 & 2\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -7 & 5\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot B$ не определено, $B\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 14\\ 4 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -12 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -12 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -4\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 11 & 5 & 2\\ 20 & 0 & 19\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 14\\ -5 & 8 & -11\\ 6 & 5 & 15\end{pmatrix}$.

11*. Найти $f(A)$, если $f(x)=-2x^2+5x+9$ и $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

Ответ. $f(A)=\begin{pmatrix}12 & 18\\ 0 & -24\end{pmatrix}$

12*. Найти $f(A)$, если $f(x)=2x^3+x^2+2$ и $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

Ответ. $f(A)=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

13*. Найти $f(A)$, если $f(x)=2x^2-3x+5$ и $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ. $f(A)=\begin{pmatrix}19 & -5 & 8\\ -8 & 20 & 20\\ 1 & 8 & 30\end{pmatrix}$

Транспонировать матрицу А и найти $A\cdot A^T$ и $A^T\cdot A$.

14. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot A^T=\begin{pmatrix}5 & -6\\ -6 & 9\end{pmatrix}$, $A^T\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 13\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot A^T=\begin{pmatrix}14 & 32\\ 32 & 77\end{pmatrix}$, $A^T\cdot A=\begin{pmatrix}17 & 22 & 27\\ 22 & 29 & 36\\ 27 & 36 & 45\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot A^T=\begin{pmatrix}10 & 4 & -1\\ 4 & 8 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $A^T\cdot A=\begin{pmatrix}6 & -1\\ -1 & 13\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}3\\ -7\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot A^T=\begin{pmatrix}9 & -21 & 6 & 3\\ -21 & 49 & -14 & -7\\ 6 & -14 & 4 & 2\\ 3 & -7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $A^T\cdot A=(63)$.

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

Ответ. $A\cdot A^T=\begin{pmatrix}6 & 5 & 1\\ 5 & 10 & 10\\ 1 & 10 & 21\end{pmatrix}$, $A^T\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 0 & 9 & -3\\ 5 & -3 & 26\end{pmatrix}$.

Вычислить определители:

19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ **20.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ **21.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **22.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **24.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **25.** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Ответы. **19.** -9; **20.** 0; **21.** 15; **22.** 1; **23.** -12; **24.** 9; **25.** 3.

Решить уравнения

26. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$ **27.** $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$

28. $\begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & -\cos x \end{vmatrix} = 0$ **29*.** $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0$

Ответы.

26. 13; **27.** 1;2 **28.** $x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}$; **29.** $x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$