ЛЕКЦИЯ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

1. Вектор, как направленный отрезок.

2. Линейные операции над векторами: умножение вектора на число; сложение векторов и их свойства.

3. Проекция вектора на ось. Свойства проекции.

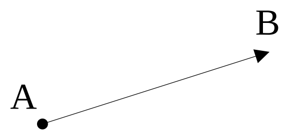
4. Канонические базисы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ на плоскости и $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в пространстве. Условие коллинеарности двух векторов. Декартовы координаты вектора.

5. Деление вектора в заданном соотношении.

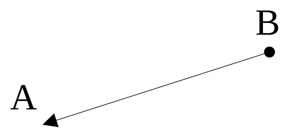
6.1. Вектор, как направленный отрезок

Пусть на плоскости заданы две точки A и B.

Определение 1. Отрезок называется ***направленным***, если принят во внимание порядок, в котором заданы его концы



направленный отрезок AB



направленный отрезок BA

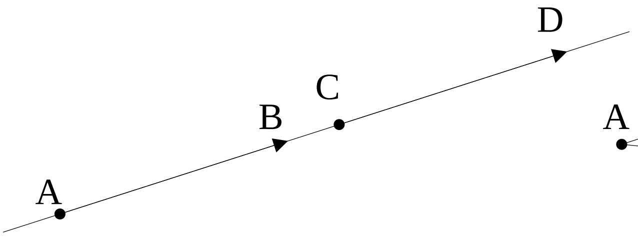
Две точки A и B на плоскости задают 2 различных направленных отрезка AB и BA.

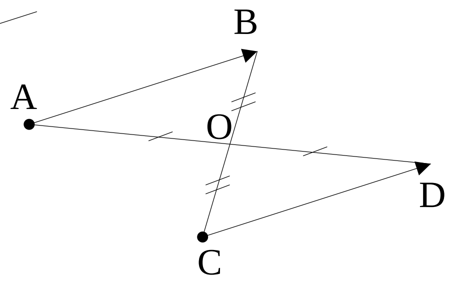
AA – нулевой направленный отрезок, так как его начало и конец совпадают.

Ненулевые направленные отрезки AB и CD называются *одинаково направленными*, если одинаково направлены лучи AB и CD.

Определение 2. Два направленных отрезка AB и CD, расположенные на одной прямой считаются ***равными***, если равны отрезки AB и CD, а лучи AB и CD задают одинаковые направления.

Если же отрезки AB и CD не расположены на одной прямой, то они считаются ***равными***, если середины отрезков AD и BC совпадают, что равносильно тому, что четырехугольник $ABCD$ - параллелограмм, а лучи AB и CD задают одинаковые направления.





Определение 3. Направленные отрезки называют ***связанными*** (или ***закрепленными***) ***векторами***.

Определение 4. ***Вектором*** (или ***свободным вектором***) называется класс всех равных между собой направленных отрезков $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$.

Класс всех нулевых направленных отрезков называется нулевым вектором (или $\vec{0}$)

Определение 5. ***Длиной*** (или ***модулем***) вектора $\vec{AB}$ называется длина направленного отрезка *AB*.

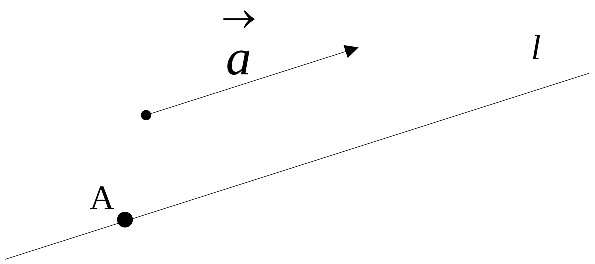
Длина вектора $\vec{AB}$ обозначается $\left|\vec{AB}\right|$.

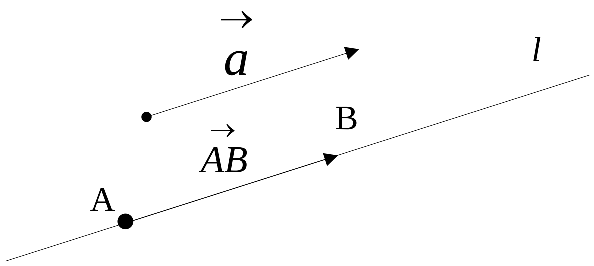
Определение 6. Вектор называется ***единичным***, если его длина равна единице.

Единичный вектор называется ***ортом***, обозначается $\vec{a}^{\,0}$, $\left|\vec{a}^{\,0}\right| = 1$.

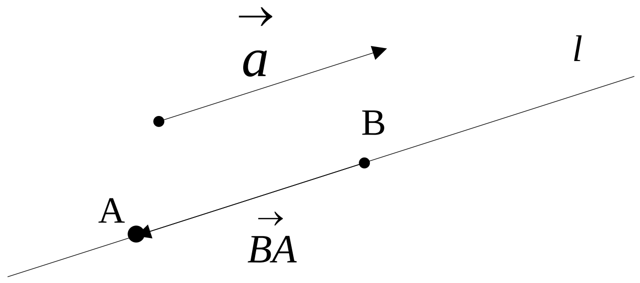
Отложить вектор $\vec{a}$ от точки *A* означает построить направленный отрезок $\vec{AB}$, входящий в класс направленных отрезков, образующих класс $\vec{a}$.

Рассмотрим вектор $\vec{a}$. Отложим от точки *A* направленный отрезок $\vec{AB}$. Для этого зададим прямую, параллельную вектору $\vec{a}$ и проходящую через точку *A*.





Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется вектором противоположным вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

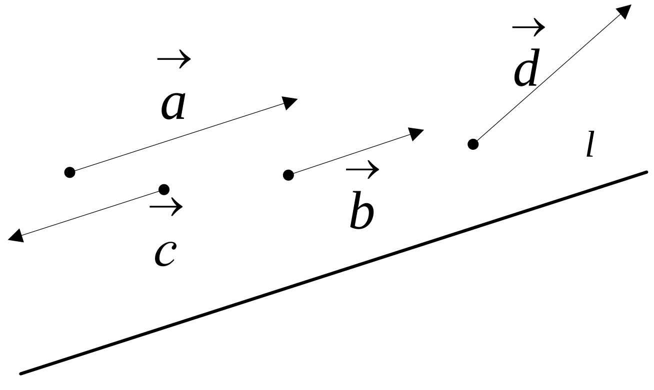


Отложить вектор $\vec{a}$ от точки A означает построить направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, входящий в класс направленных отрезков, образующих класс $\vec{a}$.

Определение 7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если существует прямая, которой они параллельны.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

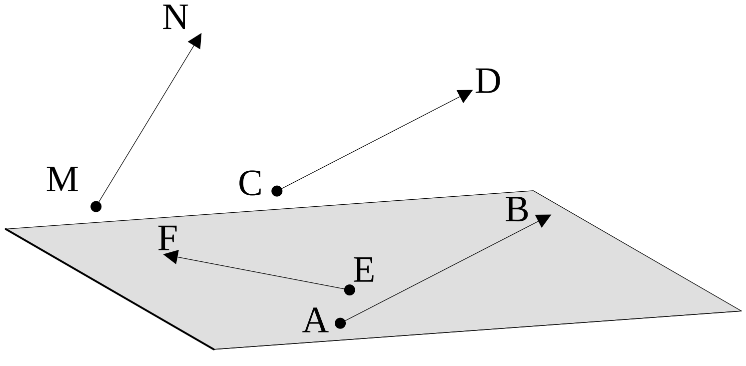
Вектор $\vec{d}$ не коллинеарен ни одному из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



Определение 8. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если существует плоскость, которой они параллельны.

Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ – компланарны.

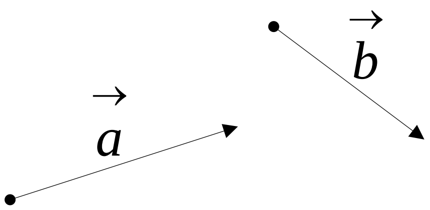
Векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ не компланарны.



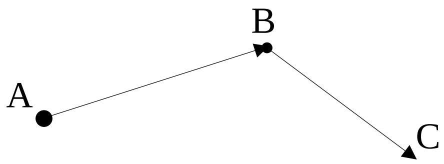
6.2. Линейные операции над векторами: умножение вектора на число; сложение векторов и их свойства.

1. Сумма векторов.

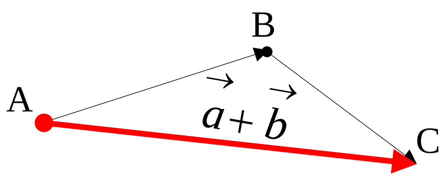
Пусть заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Отложим эти векторы последовательно от некоторой точки *A*, как показано на рисунке



Вектор $\vec{AC}$ называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Обозначается $\vec{a}$ + .

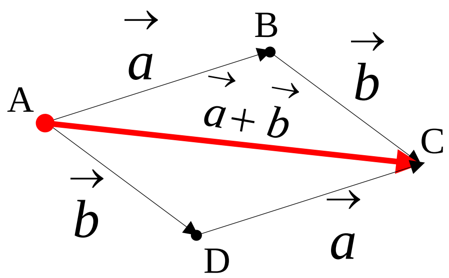
Этот способ построения суммы векторов называется ***правилом треугольника***.

Свойства суммы векторов

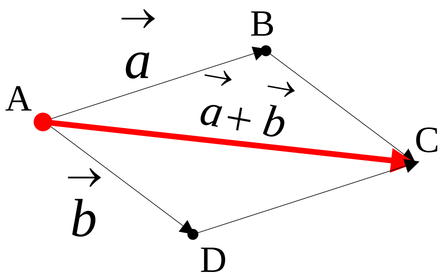
1°. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

2°. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

3°. Коммутативность сложения $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

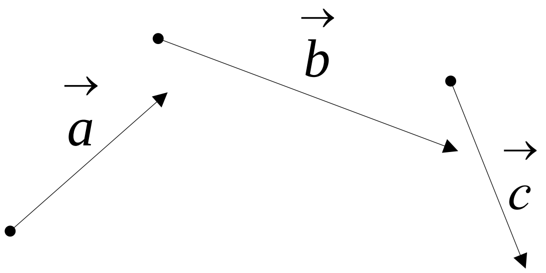


Это свойство позволяет при нахождении суммы векторов пользоваться правилом параллелограмма.

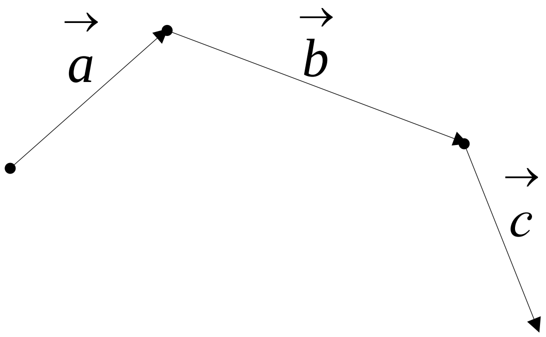


4°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Пусть заданы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

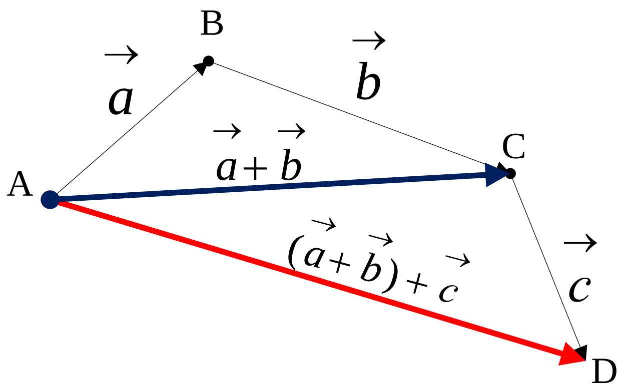


Отложим последовательно эти векторы от некоторой точки *A*, как показано на рисунке.



По определению суммы $\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

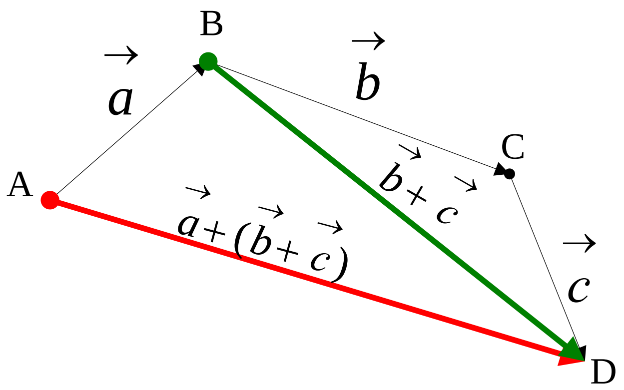
$\vec{AD}=\vec{AC}+\vec{CD}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.



С другой стороны,

$\vec{BD} = \vec{b} + \vec{c}$

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



Тем самым доказано, что сложение векторов ассоциативно:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Аналогично определяется сумма любого числа векторов – это есть вектор, который замыкает ломаную, построенную из заданных векторов.

Определение 9. ***Разностью*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что

$\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$.

2. Умножение вектора на число

Определение 10. ***Произведением*** вектора $\vec{a}$ на некоторое отличное от нуля число $\lambda \in \mathbf{R}$ называется вектор $\vec{\lambda a}$, такой что

1) $\vec{\lambda a} \,||\, \vec{a}$, причем, если $\lambda > 0$, то векторы $\vec{\lambda a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены (сонаправлены), если $\lambda < 0$, то векторы $\vec{\lambda a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены.

2) $\left|\vec{\lambda a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$.

Свойства умножения вектора на число

1°. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

2°. $\alpha \cdot (\vec{\beta a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

3°. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

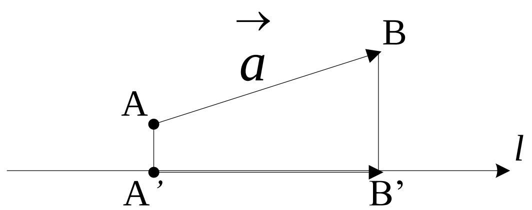
4°. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Утверждение 1. Если вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, то существует такое число $\lambda \in \mathbf{R}$, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

6.3. Проекция вектора на ось. Свойства проекции

Определение 11. ***Осью*** называется прямая с заданной на ней ориентацией.

Пусть задана ось, назовем которую l и вектор $\overrightarrow{AB}$. Опустим из концов A и B перпендикуляры на ось l, получим некоторый направленный отрезок $\overrightarrow{A'B'}$.

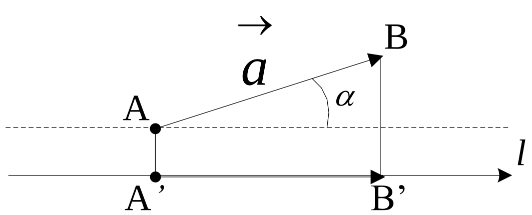


Определение 12. ***Проекцией*** вектора $\vec{a}$ на ось l называется число, равное длине направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ и взятое со знаком «+», если исходный вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с осью l и со знаком «-», если вектор $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлен оси l.

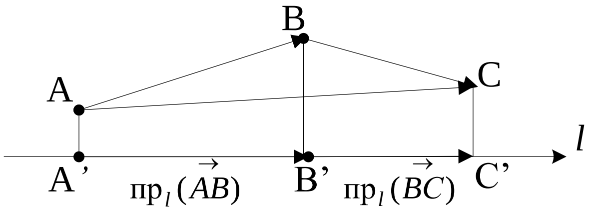
Обозначение $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$.

Основные свойства проекций

1°. $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha$, где α – угол между вектором и осью.



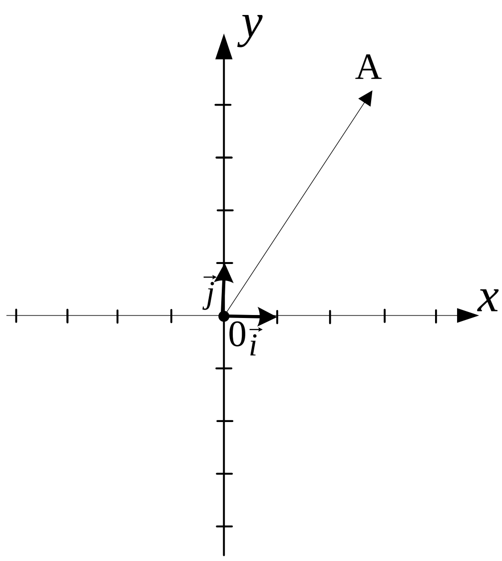
2°. $\text{пр}_l(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \text{пр}_l(\overrightarrow{AB}) + \text{пр}_l(\overrightarrow{BC})$.



6.4. Канонические базисы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ на плоскости и $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в пространстве. Условие коллинеарности векторов. Декартовы координаты вектора

Выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат *Oxy*. Пусть $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - единичные векторы, идущие в положительном направлении осей *Ox* и *Oy*.

Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Пару векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ называют ***ортонормированным базисом*** на плоскости.



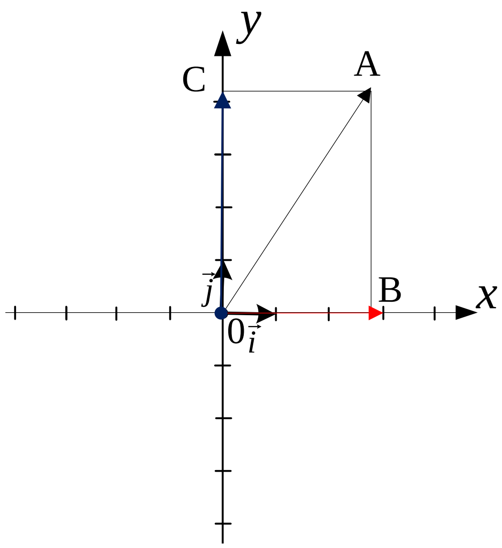
Зададим вектор $\vec{a}$, начало которого совпадает с началом координат *O*, а конец находится в некоторой точке *A*.
Пусть $AB \,||$ оси *Oy*, $AC \,||$ оси *Ox* – проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

Видим, что вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

$\vec{OB} \,||\, \vec{i}$, $\vec{OC} \,||\, \vec{j}$, значит, согласно утверждению 1, найдутся такие числа x и y, что $\vec{OB} = x \cdot \vec{i}$, $\vec{OC} = y \cdot \vec{j}$.

Тогда $\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ – **<u>разложение вектора</u>** $\vec{a}$ по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Коэффициенты x, y в разложении вектора по базисным векторам определены однозначно.

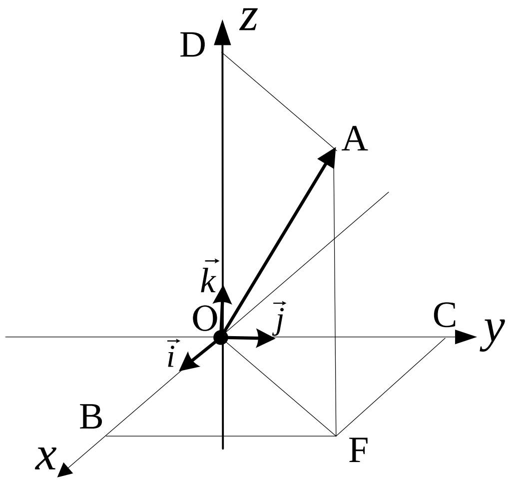


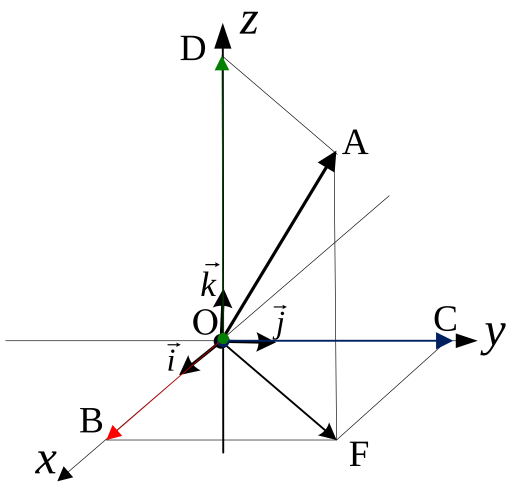
Эти коэффициенты называются координатами вектора $\vec{a}$ на плоскости. Записывается в виде $\vec{a} = (x, y)$. Заметим, что координаты вектора $\vec{a}$, берущего свое начало в начале системы координат совпадают с координатами точки *A* на плоскости.

Выберем в пространстве декартову прямоугольную систему координат *Oxyz*. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, идущие в положительном направлении осей *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Пару векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называют ***орто-нормированным базисом*** в пространстве.

Зададим вектор $\vec{a}$, начало которого совпадает с началом координат *O*, а конец находится в некоторой точке *A*. Рассмотрим проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси - *OB, OC, OD.*





Видим, что вектор

$\vec{a} = \vec{OA} = \vec{OD} + \vec{OF} = \vec{OD} + (\vec{OB} + \vec{OC})$.

$\vec{OB} \,||\, \vec{i}$, $\vec{OC} \,||\, \vec{j}$, $\vec{OD} \,||\, \vec{k}$ значит, согласно утверждению 1, найдутся такие числа x, y, z что $\vec{OB} = x \cdot \vec{i}$, $\vec{OC} = y \cdot \vec{j}$, $\vec{OD} = z \cdot \vec{k}$.

Тогда $\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ – **<u>разложение вектора</u>** $\vec{a}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Так же, как и на плоскости, коэффициенты x, y, z в разложении вектора по базисным векторам определены однозначно.

Эти коэффициенты называются координатами вектора $\vec{a}$ в пространстве. Записывается в виде $\vec{a} = (x, y, z)$.

Заметим, что координаты вектора $\vec{a}$, берущего свое начало в начале системы координат совпадают с координатами точки A в пространстве.

Определение 13. Вектор $\vec{OA}$, идущий из начала координат в точку A называется ***радиус-вектором*** точки A.

Теорема 1. Два вектора $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$ $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны их координаты. То есть $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$

Теорема 2. Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и некоторое число $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

1) При сложении векторов их координаты складываются:

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

2) При умножении вектора на число каждая координата этого вектора умножается на это число:

$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Теорема 3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Доказательство.

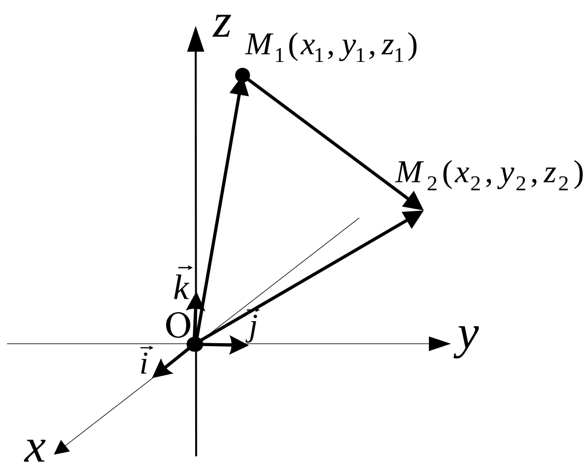
Пусть заданы два коллинеарных вектора $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, при этом $\vec{b}\neq 0$. Согласно утверждению 1 $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$ или $(x_1,y_1,z_1)=(\lambda x_2,\lambda y_2,\lambda z_2)$, т.е. $x_1=\lambda x_2, y_1=\lambda y_2, z_1=\lambda z_2$. Откуда следует $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ (*).

Пусть координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$, тогда существует λ такое что $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$, т.е. векторы коллинеарны. Что и требовалось доказать.

Декартовы координаты вектора

Выберем в пространстве декартову прямоугольную систему координат *Oxyz*, с базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Пусть в пространстве заданы две точки своими координатами $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Радиус-векторы $\vec{OM}_1$ и $\vec{OM}_2$ этих точек имеют координаты $\vec{OM}_1=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{OM}_2=(x_2,y_2,z_2)$.



Это означает, что в разложении по базису $\vec{OM}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ и $\vec{OM}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$.

$$\vec{M_1M}_2=\vec{OM}_2-\vec{OM}_1=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}.$$

Таким образом, $\vec{M_1M}_2=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

Утверждение 1. Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, заданного своими координатами вычисляется по формуле $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

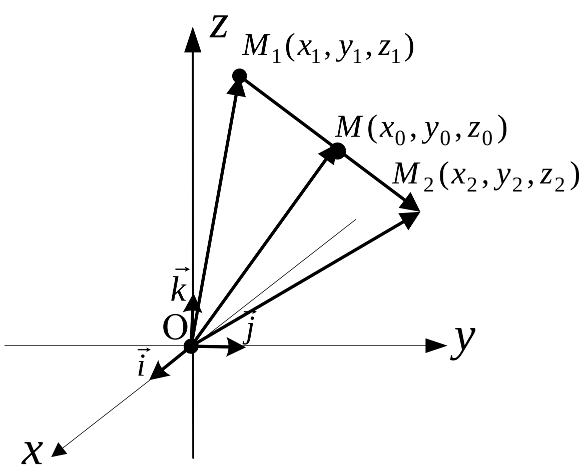
6.5. Деление отрезка в заданном соотношении

Выберем в пространстве декартову прямоугольную систему координат *Oxyz*, с базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Пусть задан отрезок M_1M_2 и точка $M(x_0, y_0, z_0)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, считая от точки M_1. Найдем координаты точки M .

Это означает, что $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$. Это условие можно переписать в виде $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}$. (**)

$\overrightarrow{M_1M} = (x_0 - x_1)\,\vec{i} + (y_0 - y_1)\,\vec{j} + (z_0 - z_1)\,\vec{k}$

$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x_0)\,\vec{i} + (y_2 - y_0)\,\vec{j} + (z_2 - z_0)\,\vec{k}$



Перепишем соотношение (**) , заменив векторы их разложением по базису:

$$(x_0 - x_1)\,\vec{i} + (y_0 - y_1)\,\vec{j} + (z_0 - z_1)\,\vec{k} = \lambda(x_2 - x_0)\,\vec{i} + \lambda(y_2 - y_0)\,\vec{j} + \lambda(z_2 - z_0)\,\vec{k}$$

Согласно теореме 1,

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x_0 \\ y_0 - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y_0 \\ z_0 - z_1 = \lambda z_2 - \lambda z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + \lambda x_0 = \lambda x_2 + x_1 \\ y_0 + \lambda y_0 = \lambda y_2 + y_1 \\ z_0 + \lambda z_0 = \lambda z_2 + z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0(1+\lambda) = \lambda x_2 + x_1 \\ y_0(1+\lambda) = \lambda y_2 + y_1 \\ z_0(1+\lambda) = \lambda z_2 + z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda x_2 + x_1}{(1+\lambda)} \\ y_0 = \dfrac{\lambda y_2 + y_1}{(1+\lambda)} \\ z_0 = \dfrac{\lambda z_2 + z_1}{(1+\lambda)} \end{cases}$$