Кафедра ВМ-2 Пронина Е.В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

I семестр

Разработано кафедрой Высшей математики - 2

для студентов РТУ МИРЭА,

Институтов ИТ, РТС, ФТИ

2020 г.

ВВЕДЕНИЕ

В основе математического образования студента лежат такие дисциплины как высшая алгебра, аналитическая геометрия и математический анализ.

По разнообразию и важности использования в математике, физике и технике, линейная алгебра находится на первом месте среди разнообразных разделов алгебры.

В курсе высшей алгебры первого семестра рассматривается два больших раздела: основы линейной алгебры и алгебра многочленов. В курсе аналитической геометрии изучаются геометрические объекты: векторы, прямая на плоскости и в пространстве, плоскости, кривые и поверхности второго порядка.

Линейная алгебра имеет своей основной задачей изучение произвольных систем уравнений первой степени, для чего в начале курса вводится понятие матрицы и действия над ними, исследуется матричный аппарат. Далее большое внимание уделяется изучению определителей, обратных матриц и матричных уравнений.

Теория матриц тесно связана с теорией линейных преобразований и векторных пространств. Знакомство с линейными пространствами и математическими основами их преобразований начинается с введения в алгебру геометрических векторов.

Разделом, переходным от курса алгебры к математическому анализу, является раздел, посвященный изучению свойств кривых и поверхностей второго порядка, играющий важную роль в изучении кратных интегралов.

Математический аппарат алгебры многочленов предназначен не столько для практического отыскания корней уравнений, сколько для решения вопроса, связанного с существованием корней, что широко отражено в нашем курсе.

Лекция 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

1. Понятие матрицы. Прямоугольные, квадратные и диагональные матрицы.

2. Операции над матрицами.

3. Транспонирование матрицы.

4. Вычисление определителей первого, второго и третьего порядков.

1.1.Понятие матрицы
Прямоугольные, квадратные и диагональные матрицы

Определение 1. Совокупность $m \times n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов называется ***матрицей*** размера $m \times n$ или ***прямоугольной матрицей***. Если $m = n$ (количество строк совпадает с количеством столбцов), то – ***квадратной*** матрицей n-го порядка.

Матрицы принято обозначать большими латинскими буквами.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица размера 2×2, 2-го порядка.

Матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ - прямоугольная матрица размера 2×3.

Матрица $C = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ - прямоугольная матрица размера 4×2.

В общем виде матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – прямоугольная матрица размера $m \times n$.

В общем виде матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица размера $n \times n$.

Элементы матрицы обычно обозначаются маленькими латинскими буквами с двойными индексами – первый индекс соответствует номеру строки, на которой стоит элемент, второй – номеру столбца.

Элементы квадратной матрицы n-го порядка $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ*.

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{Столбец } \boldsymbol{j} & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \textbf{Строка } \boldsymbol{i} \end{array}$$

Матрица $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$.

Например, для матрицы $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = -1, \quad b_{13} = 5$$
$$b_{21} = 3, \quad b_{22} = 7, \quad b_{23} = -2$$

Определение 2. Матрица размера $1 \times n$, то есть состоящая из одной строки и n столбцов называется ***вектор*-строкой**.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ – вектор-строка.

Определение 3. Матрица размера $m \times 1$, то есть состоящая из одного столбца и m строк называется ***вектор-столбцом***.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец.

Определение 4. Если квадратная матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то она называется ***диагональной***. То есть диагональная матрица – это матрица, у которой все элементы, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, равны 0.

Определение 5. Если в диагональной матрице все диагональные элементы равны 1, то матрица называется ***единичной*****.** Единичную матрицу принято обозначать буковой *E*.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ или $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ – символ Кронекера.

$$E = (\delta_{ij}).$$

Определение 6. Квадратная матрица называется ***треугольной***, если ее элементы, стоящие выше (ниже) главной диагонали равны нулю.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Верхне-треугольная матрица

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нижне-треугольная матрица

1.2.Операции над матрицами

Над матрицами можно проводить некоторые математические операции, которые напоминают действия, проводимые над обычными числами.

Определение 7. Две матрицы одинакового размера называются ***равными***, если все элементы, стоящие на одних и тех же местах, равны между собой, т.е. если $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, то $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$, $1\le i\le m, 1\le j\le n$.

Пусть заданы матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ одинакового размера.

Определение 8. ***Суммой матриц*** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$, $1\le i\le m, 1\le j\le n$ называется матрица $C=(c_{ij})$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, для матриц $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ сумма вычисляется по формуле $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+0 & 2-1 & -7+5 \\ 0+3 & 6+7 & 1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 13 & -1 \end{pmatrix}$.

Определение 9. ***Произведением матрицы*** $A=(a_{ij})$, $1\le i, j\le n$ ***на*** некоторое ***число*** $\alpha\ne 0$ называется матрица $\alpha A=(\alpha a_{ij})$. То есть, чтобы умножить матрицу на некоторое не равное 0 число, нужно каждый элемент матрицы умножить на заданное число.

Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ матрица $3A=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -9 & 0 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$.

Задача 1. Даны 2 матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $2A-3B$.

Решение.

$$2A-3B=2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-6 & -2-15 \\ 4-15 & 8-(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -17 \\ -11 & 11 \end{pmatrix}$$

Ответ. $2A-3B=\begin{pmatrix} 0 & -17 \\ -11 & 11 \end{pmatrix}$.

Определение 10. ***Произведением матрицы*** $A=(a_{ij})$ размера $m\times k$ (***m*** строк, ***k*** столбцов) ***на матрицу*** $B=(b_{ij})$ размера $k\times n$ (***k*** строк, ***n*** столбцов) называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times n$ (***m*** строк, ***n*** столбцов), <u>каждый</u> элемент c_{ij} которой есть сумма поэлементных произведений *i*-ой строки матрицы *A* и *j*-го столбца матрицы *B*, где $1\le i,\ j\le n$.

$$a_{i1}\cdot b_{1j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Результат записываем в строку с номером *i* и в столбец с номером *j*

Столбец *j*

Строка *i*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{m1} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{h=1}^{k}a_{ih}\cdot b_{hj}$.

Перемножать две матрицы друг на друга мы имеем право только в случае, когда число столбцов в первой матрице совпадает с числом строк во второй матрице.

Задача 2. Даны 2 матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение.

6-5=1

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+(-1)\cdot 5 & 3\cdot 1+(-1)\cdot(-1) \\ 2\cdot 2+4\cdot 5 & 2\cdot 1+4\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 24 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot 2 & 2\cdot(-1)+1\cdot 4 \\ 5\cdot 3+(-1)\cdot 2 & 5\cdot(-1)+(-1)\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 13 & -9 \end{pmatrix}$$

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 24 & -2 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 13 & -9 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Даны 2 матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение.

$$A\cdot B=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{4\times 2}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}}_{2\times 3}=\underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 0 & 10 \\ -1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & 5 \\ 32 & -11 & 25 \end{pmatrix}}_{4\times 3}$$

$B\cdot A=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}}_{2\times 3}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{4\times 2}$ невозможно выполнить операцию умножения, поскольку число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы.

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 15 & 0 & 10 \\ -1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & 5 \\ 32 & -11 & 25 \end{pmatrix}$, $B\cdot A$ не определено.

Свойства операции сложения и умножения на число

1°. $\forall A, B$ – матрицы одного размера $A+B=B+A$.

Докажем свойство **1°.** Пусть рассматриваются квадратные матрицы размера $n\times n$. $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, где $1\le i, j\le n$.

Рассмотрим i-ую строку матриц A и B: $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix}$.

i-ая строка матрицы $A + B$ есть $\begin{pmatrix} a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \end{pmatrix}$, $1\le i\le n$.

i-ая строка матрицы $B + A$ есть $\begin{pmatrix} b_{i1}+a_{i1} & b_{i2}+a_{i2} & \dots & b_{in}+a_{in} \end{pmatrix}$, $1\le i\le n$.

Все числа $a_{ij}, b_{ij}\in\mathbf{R}$, $1\le i, j\le n$. В силу этого, для них выполняется свойство коммутативности сложения $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$, $1\le i, j\le n$. Т.е. каждый элемент матрицы $A + B$ равен соответствующему элементу матрицы $B + A$, т.е. матрицы равны по определению 7. Что и требовалось доказать.

2°. $\forall A, B, C$ – матрицы одного размера $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3°. $A+\Theta=A$, где Θ – нулевая матрица размерности совпадающей с размерностью матрицы *A*.

4°. $\forall A,B$ одного размера $\forall\lambda\in\mathbf{R}$ $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

5°. $\forall A$, $\forall\lambda,\delta\in\mathbf{R}$ $A(\lambda+\delta)=\lambda A+\delta A$.

6°. $\forall A,B,C$ – квадратные матрицы $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

7°. $\forall A,B,C$ – квадратные матрицы $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$, $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$.

Докажем свойство **7°**: $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$. Пусть рассматриваются квадратные матрицы размера $n\times n$. Обозначим $(A+B)\cdot C=D$, $A\cdot C=F$, $B\cdot C=T$.

$D=(d_{ij})$, $F=(f_{ij})$, $T=(t_{ij})$, где $1\le i,j\le n$.

Рассмотрим *i*-ую строку матриц *A* и *B*: $\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in}\end{pmatrix}$.

i-ая строка матрицы *A* + *B* есть $\begin{pmatrix}a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in}\end{pmatrix}$, $1\le i\le n$.

Рассмотрим *j*-ый столбец матрицы *C*: $C=\begin{pmatrix}c_{1j}\\ c_{2j}\\ \dots\\ c_{nj}\end{pmatrix}$.

На позиции (*i,j*) у матрицы $(A+B)\cdot C$ стоит элемент d_{ij}.

$$d_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_{1j}\\ c_{2j}\\ \dots\\ c_{nj}\end{pmatrix}=(a_{i1}+b_{i1})c_{1j}+(a_{i2}+b_{i2})c_{1j}+\dots+(a_{in}+b_{in})c_{nj}=$$

$$=\underbrace{a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{1j}+\dots+a_{in}c_{nj}}_{fij}+\underbrace{b_{i1}c_{1j}+b_{i2}c_{1j}+\dots+b_{in}c_{nj}}_{tij}$$

Видим, что каждый элемент $d_{ij}=f_{ij}+t_{ij}$, $1\le i,j\le n$. Значит, утверждение верно в общем случае, $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$. Что и требовалось доказать.

Заметим, что в общем случае $A\cdot B\ne B\cdot A$, мы имели возможность убедиться в этом при решении задачи 2. Матрицы, для которых $A\cdot B=B\cdot A$, называются ***перестановочными***. Матрица *E* перестановочна с любой матрицей, т.е. $\forall A$ $A\cdot E=E\cdot A=A$.

Доказательство последнего утверждения проведем, например, для матрицы 3×3.

Пусть задана матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третьего порядка, тогда

$$A\cdot E=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0+a_{13}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1+a_{13}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 0+a_{13}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0+a_{23}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1+a_{23}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 0+a_{23}\cdot 1 \\ a_{31}\cdot 1+a_{32}\cdot 0+a_{33}\cdot 0 & a_{31}\cdot 0+a_{32}\cdot 1+a_{33}\cdot 0 & a_{31}\cdot 0+a_{32}\cdot 1+a_{33}\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=A$$

Аналогично, можно показать, что при умножении матрицы A на единичную матрицу E слева, мы получим также матрицу A. Что и требовалось доказать.

1.3. Транспонирование матрицы

Определение 11. Пусть задана матрица $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$. Если теперь элементы строк этой матрицы записать в столбцы, при этом столбцы записать в строки, то полученная матрица размера $n\times m$ называется матрицей, ***транспонированной*** к данной. Обозначается $A^T=(a_{ij})^T$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\to A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ транспонированной является матрица $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования

I. $(A^T)^T=A$.

II. $(A+B)^T=A^T+B^T$.

III. $\forall A,\ \forall\lambda\in\mathbf{R}\ (\lambda\cdot A)^T=\lambda\cdot A^T$.

IV. $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Задача 4. Даны 2 матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B^T$.

Решение.

$$A\cdot B^T = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -11 & -5\\ 26 & 2 & 20\end{pmatrix}.$$

Ответ. $A\cdot B^T = \begin{pmatrix}-3 & -11 & -5\\ 26 & 2 & 20\end{pmatrix}$

1.4. Вычисление определителей первого, второго и третьего порядков

Каждой **квадратной** матрице A можно однозначно поставить в соответствие число, называемое ***определителем*** этой матрицы. Обозначается $|A|$ или $\det A$.

Определитель матрицы $A=a_{11}$ первого порядка равен числу a_{11}, т.е. $\det A = a_{11}$

Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ второго порядка равен числу $a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$, т.е.

$$\det A = \det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}.$$

Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ третьего порядка равен числу $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$, т.е.

$$\det A = \det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

Это правило запомнить проще, если построение слагаемых представить графически:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Произведение элементов на главной диагонали и на диагоналях ей параллельных, берем со знаком «+» и вычитаем произведения элементов на побочной диагонали и ей параллельных.

Это правило принято называть «правилом треугольника».

Правило Саррюса вычисления определителя третьего порядка также позволяет облегчить процесс вычисления.

Выписываем определитель матрицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Справа от него выписываем первые два столбца $\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$.

Произведение элементов на главной диагонали и на диагоналях ей параллельных, берем со знаком «+» и вычитаем произведения элементов на побочной диагонали и ей параллельных.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - \; + & + & + \end{array}$$

Задача 5. Даны 2 матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. Найти $\det A$ и $\det B$.

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - (2\cdot(-1)) = 12 + 2 = 14$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix} = \underbrace{1\cdot 3\cdot(-7)}_{-21} + \underbrace{0\cdot 6\cdot 2}_{0} + \underbrace{(-3)\cdot 4\cdot 5}_{-60} - \underbrace{5\cdot 3\cdot 2}_{30} - \underbrace{1\cdot 6\cdot 4}_{24} - \underbrace{0\cdot(-3)\cdot(-7)}_{0} =$$

$$-21 - 60 - 30 - 24 = -135$$

Ответ. $\det A = 14$, $\det B = -135$.

Задача 6. Найти $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Ответ. 1

Задача 7. При каких значениях x, определитель $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \sin x - (\cos x \cdot (-\sin x)) = 2\cos x \cdot \sin x = \sin 2x$$

$$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi n, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbf{Z}$$

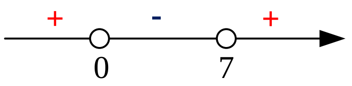
Ответ. $x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbf{Z}$

Задача 8. Решить неравенство $\begin{vmatrix} x-3 & 6 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} > 0$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-3 & 6 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-3)(x-4) - 12 = x^2 - 7x + 12 - 12 = x^2 - 7x > 0.$$

$x^2 - 7x > 0 \Leftrightarrow x(x-7) > 0$, решая это неравенство методом интервалов, получим:



Ответ. $x \in (-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$