Практическое занятие 5

Вычисление определенного интеграла.

Приложения определенного интеграла.

1. Вычисление определенного интеграла

1.1. Формула Ньютона-Лейбница

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x) -$ любая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Примеры.

1. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_1^8 = \frac{3}{2}\left(8^{\frac{2}{3}} - 1\right) = \frac{9}{2}$

2. $\int_0^{\pi/2} sin3x\,dx = -\frac{1}{3}cos3x\big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}\left(cos\frac{3\pi}{2} - cos0\right) = \frac{1}{3}$

3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = arcsin\frac{x}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}} = arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

1.2. Формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ \varphi(t_1) = a, \ \ \varphi(t_2) = b \end{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Примеры.

1. $\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx = \begin{bmatrix} x=2sint, \ \ dx=2costdt \\ t=arcsin\frac{x}{2}, \ \ t_1=\frac{\pi}{6}, \ \ t_2=\frac{\pi}{3} \\ \sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4sin^2t}=2cost \end{bmatrix} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 2cost2cost\,dt =$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} (2 + 2cos2t)\, dt = (2t + sin2t)|_{\pi/6}^{\pi/3} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \left(sin\frac{2\pi}{3} - sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

2. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\cdot arctgx} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{d(arctgx)}{arctgx} = \begin{bmatrix} t=arctgx \\ t_1=\frac{\pi}{4},\ \ t_2=\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{t} = ln|t|\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$

$= ln\frac{\pi}{3} - ln\frac{\pi}{4} = ln\frac{4}{3}$

3. $\int_{-1}^{2} \frac{3xdx}{\sqrt{2+x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2+x}=t,\quad x=t^2-2 \\ dx=2tdt \\ t_1=1,\ \ t_2=2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{3(t^2-2)2tdt}{t} = \int_1^2 (6t^2 - 12)\, dt = (2t^3 - 12t)|_1^2 =$

$= 2(8-1) - 12(2-1) = 14 - 12 = 2$

4. $\int_1^e \frac{ln^2x}{x} dx = \int_1^e ln^2x\, d(lnx) = \begin{bmatrix} lnx=t \\ t_1=0,\ \ t_2=1 \end{bmatrix} = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

1.3. Формула интегрирования по частям

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu$$

Примеры.

1. $\int_0^{\pi/2} x \cdot sin3xdx = \begin{bmatrix} u=x,\ \ du=dx \\ dv=sin3xdx,\ \ v=-\frac{1}{3}cos3x \end{bmatrix} =$

$= \left(-\frac{1}{3}xcos3x\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} cos3x\, dx = \left(\frac{1}{9}sin3x\right)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{9}$

2. $\int_1^e \frac{lnx}{x^2} dx = \begin{bmatrix} u=lnx,\ \ du=\frac{dx}{x} \\ dv=\frac{1}{x^2}dx,\ \ v=-\frac{1}{x} \end{bmatrix} = \left(-\frac{lnx}{x}\right)\Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\Big|_1^e =$

$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$

3. $\int_0^1 arccosxdx = \begin{bmatrix} arccosx=t,\ \ t_1=\frac{\pi}{2},\ \ t_2=0 \\ x=cost,\ \ dx=-sintdt \end{bmatrix} = -\int_{\pi/2}^{0} t \cdot sint\, dt =$

$= \int_0^{\pi/2} t \cdot sint\, dt = \begin{bmatrix} u=t,\ \ du=dt \\ dv=sintdt,\ \ v=-cost \end{bmatrix} = (-tcost)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} costdt =$

$= sint\Big|_0^{\pi/2} = 1$

Домашнее задание. Типовой расчет, 2 семестр. Задача 1.2 № 1-20.

2. **Приложения определенного интеграла**

2.1. Площадь плоской фигуры

1. Площадь области на плоскости xOy, ограниченной графиками функций $y = f(x), y = g(x)$ $(g(x) < f(x))$ и прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически, т.е. уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$, $x(t_1) = a, x(t_2) = b$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

3. Площадь сектора, ограниченного линией, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, и двумя лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 d\varphi$$

Примеры. Вычислить площадь области D.

1. $D: \begin{cases} y = sinx \\ y = cosx \\ x = 0 \ \ (x \geq 0) \end{cases}$.

Найдем правую границу области (точку пересечения графиков функций $y = sinx$ и $y = cosx$: $sinx = cosx \ \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

$S=\int_0^{\pi/4}(cosx-sinx)\,dx=(sinx+cosx)\Big|_0^{\pi/4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-$
$(0+1)=\sqrt{2}-1$

2. $D:\begin{cases} y=\frac{1}{x\sqrt{1+lnx}} \\ y=0 \\ x=1,\ x=e^3 \end{cases}$

$S=\int_1^{e^3}\frac{1}{x\sqrt{1+lnx}}dx=\int_1^{e^3}\frac{1}{\sqrt{1+lnx}}dlnx=\begin{bmatrix} lnx=t \\ t_1=0 \\ t_2=3 \end{bmatrix}=\int_0^3\frac{d(t+1)}{\sqrt{1+t}}=$
$=2\sqrt{1+t}\Big|_0^3=4-2=2$

3. $D: r=5cos\varphi$

$cos\varphi\geq 0,\ -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(5cos\varphi)^2\,d\varphi=\frac{25}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{25}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}sin2\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{25\pi}{4}$$

4. $D:\begin{cases} y=\frac{x^2}{3} \\ y=4-\frac{2}{3}x^2 \end{cases}$

Точки пересечения двух парабол:

$\frac{x^2}{3}=4-\frac{2}{3}x^2\ \Leftrightarrow\ x^2=4\ \Leftrightarrow\ x=\pm 2$

$$S=\int_{-2}^{2}\left(4-\frac{2}{3}x^2-\frac{x^2}{3}\right)dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

2.2. Вычисление длины дуги кривой

1. Длина дуги плокой кривой, заданной на координатной плоскости уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

2. Длина дуги плоской кривой, заданной на координатной плоскости параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$, $x(t_1) = a, x(t_2) = b$.

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

3. Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [t_1, t_2] \\ z = z(t) \end{cases}$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

4. Длина дуги плоской кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi$$

Примеры. Вычислить длину дуги плоской кривой L.

1. L: $\begin{cases} y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$y' = \frac{-e^x + e^{-x}}{2} = -shx$, $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + sh^2x} = chx$

$$L = \int_0^3 chx\,dx = (shx)|_0^3 = sh3$$

2. $L: \begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - cost \end{cases}, \; 0 \le t \le 2\pi$

$x' = 1 - cost, \; y' = sint$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - cost)^2 + sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2cost}dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2sin^2\frac{t}{2}dt} = 2\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt = -4\,cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4(-1-1) = 8$$

3. $L: \begin{cases} r = 6sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$r' = 6cos\varphi$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{36sin^2\varphi + 36cos^2\varphi}\,d\varphi = 6\varphi|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi$$

2.3. Вычисление объемов

1. Объем тела, площадь S сечения которого плоскостью, перпендикулярной оси Ox, известна как функция $S = S(x)$ переменной x

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

2. Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

3. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}(y(t))^2x'(t)dt$$

Примеры.

1. Найти объем тела, полученного при пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=16$ и плоскостей $z=0,\ z=2$.
   Сечение, перпендикулярное оси Oz, - круг $x^2+y^2=16-z^2$, радиус которого равен $\sqrt{16-z^2}$. Площадь его $\pi(16-z^2)$.
   $$V=\int_0^2\pi(16-z^2)\,dz=\pi\left(16z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^2=\pi\left(32-\frac{8}{3}\right)=\frac{88}{3}\pi$$
2. Найти объем тела, полученного вращением кривой $y=\sqrt{x}e^x$, $0\le x\le 1$ вокруг оси Ox.
   $$V=\pi\int_0^1 xe^{2x}\,dx=\begin{bmatrix}u=x,\ \ du=dx\\ dv=e^{2x}dx,\ \ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{bmatrix}=$$
   $$=\pi\left(\frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1e^{2x}dx\right)=\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1\right)=$$
   $$=\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right)=\pi\frac{e^2+1}{4}$$

2.4. Вычисление площади поверхности вращения

1. Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* графика функции $y=f(x)$, $x\in[a,b]$

$$S_{\text{вр}}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

2. Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$.

$$S_{\text{вр}} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

<u>*Примеры*</u>.

1. Вычислить площадь поверхности тела, образуемого вращением кривой $y = x^3,\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$.

   $y' = 3x^2,\ \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+9x^4}$

$$S_{\text{вр}} = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^3\sqrt{1+9x^4}dx = \frac{2\pi}{4\cdot 9}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+9x^4}\, d(1+9x^4)dx =$$

$$= \frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{27}\left(\left(1+\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{\pi}{27}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{27}\cdot\frac{61}{64}$$

<u>*Домашнее задание*</u>. Типовой расчет, 2 семестр. Задача 1.3 № 1-38.