Практическое занятие 15.

Комплексные числа.

Комплексные числа. Действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Операция сопряжения.

Мнимая единица.

Определение. Обозначим буквой i и будем называть мнимой единицей число такое, что $i^2 = -1$.

Комплексное число.

Выражение вида $x + iy$, где $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, называется комплексным числом в алгебраической форме. Обозначают комплексное число буквой z.
При этом действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = Rez, y = Imz$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Сложение. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$.

Сложение комплексных чисел и умножение комплексных чисел:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Отсюда видно, что для умножения двух комплексных чисел достаточно раскрыть скобки по обычным правилам и заменить i^2 на –1.

Вычитание комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению. **Разностью** $z_1 - z_2$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется число z, обладающее свойством $z_2 + z = z_1$. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Неотрицательное число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется ***модулем*** комплексного числа z. Очевидно,

$$\mathrm{Re}\, z \le |z|, \quad \mathrm{Im}\, z \le |z|.$$

Операция сопряжения комплексных чисел.

Число $\overline{z} = x - iy$называется **сопряжённым** числу $z = x + iy$. Имеем

$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Значит, произведение двух комплексно-сопряженных чисел есть число действительное и неотрицательное.

Деление на комплексное число, отличное от нуля, определяется как операция, обратная умножению. **Частным $\boldsymbol{z_1/z_2}$** двух комплексных чисел z_1и z_2, где $z_2 \neq 0$, называют число z, обладающее свойством: $z_2 \cdot z = z_1$.

Для нахождения частного выполняют преобразования:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|z_2|^2} + i \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{|z_2|^2}.$$

Задачи.

1. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме.

$$z_1 = -1 + 2i, z_2 = 3 - 5i.$$

Имеем

$$z_1 + z_2 = (-1 + 2i) + (3 - 5i) = (-1 + 3) + i(2 - 5) = 2 - 3i;$$

$$z_1 - z_2 = (-1 + 2i) - (3 - 5i) = (-1 - 3) + i(2 - (-5)) = -4 + 7i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 + 2i) \cdot (3 - 5i) = -3 + 5i + 6i - 10i^2 = (-3 + 10) + i(5 + 6) = 7 + 11i;$$

$$\overline{z_1} = -1 - 2i;\ \overline{z_2} = 3 + 5i;$$

$$|z_1| = \sqrt{1 + 4} = 5; |z_2| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-1 + 2i)}{(3 - 5i)} = \frac{(-1 + 2i)(3 + 5i)}{(3 - 5i)(3 + 5i)} = \frac{-3 - 10 + i(-5 + 6)}{34} = -\frac{13}{34} + i\frac{1}{34}.$$

2. Найти Rez и Imz, если $z = \frac{2}{1+i} - \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{2-2i}{1-2i}$.

(ответ $\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{5}$).

3. Выполнить действия:

а) $\frac{2}{-i} + i(1 + i)$;

б) $\frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2-i}$.

(ответы: а) $-1 + 3i$; б) $0.$)

4. Показать, что $z + \bar{z} = 2Rez; z - \bar{z} = i \cdot 2Imz$.
5. Доказать тождества: $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$; $\overline{z^n} = \bar{z}^n$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Решение. Докажем, например, что $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

$$\overline{z_1z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1),$$
$$\bar{z}_1\bar{z}_2 = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

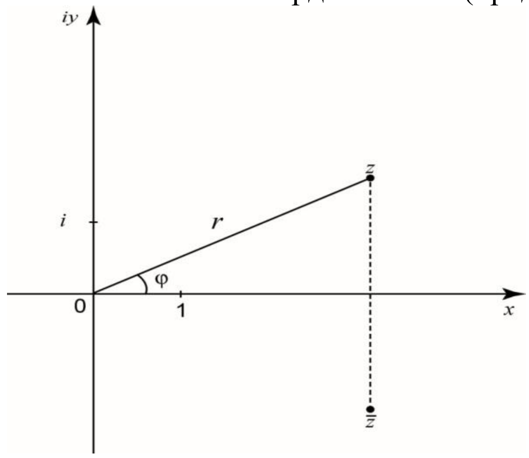
значит, $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Так как комплексное число $\boldsymbol{z=x+iy}$ является упорядоченной парой (x,y) действительных чисел, а множество всевозможных пар (x,y) действительных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с координатной плоскостью, то каждую точку (x,y) можно принять за изображение комплексного числа $z=x+iy$. При таком соглашении действительную плоскость называют *комплексной плоскостью* (обозначение: **C**) и $z=x + iy$ считают точкой этой плоскости.

Ось Ox называется *вещественной осью*, а ось Oy называется *мнимой осью* комплексной плоскости. Их уравнения Im z = 0 и Re z = 0 соответственно. Отметим, что *операция комплексного сопряжения* (переход от z к $\overline{z}$) геометрически сводится к отражению плоскости **C** относительно вещественной оси.

Положение точки z на плоскости **C** однозначно определяется не только парой x = Re z, y = Im z, но также и парой (r,ϕ), где $r=|z|$, ϕ - угол между положительным направлением оси x и направлением из начала координат на z (предполагается, что $r > 0$).



Угол ϕ называется *аргументом* числа z. Для любого $z \neq 0$ аргумент определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Значение аргумента числа z, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется *главным значением аргумента* и обозначается arg z.

Если x = Re z, y = Im z, $r=|z|$, $\phi = arg\, z$, то $x = r \cos\phi$, $y = r \sin\phi$. Отсюда получается тригонометрическая форма записи комплексного числа z:

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Аргумент числа z находим из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}.$$

Для нахождения аргумента также можно воспользоваться формулами:

$$arg\, z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, z \in I \text{ или } IV \text{ четверти} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, z \in II \text{ четверти} \\ arctg\dfrac{y}{x} \pm \pi, z \in III \text{ четверти} \end{cases};$$

$arg\, z = \frac{\pi}{2}, z \in Oy$ и $y > 0$, $arg\, z = -\frac{\pi}{2}, z \in Oy$ и $y < 0$,

$arg\, z = \pi, z \in Ox$ и $x < 0$, $arg\, z = 0, z \in Ox$ и $x > 0$

Операция сложения комплексных чисел z_1 и z_2 может быть выполнена по правилу параллелограмма, то есть по правилу сложения направленных отрезков (векторов), выходящих из начала координат и оканчивающихся в точках z_1 и z_2. Расстояние между точками z_1 и z_2 совпадает с модулем их разности: $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.

Запишем числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме:
$z_1=r_1\cdot(cos\,\phi_1 + i\,sin\,\phi_1)$, $z_2=r_2(cos\,\phi_2 + i\,sin\,\phi_2)$.
После преобразований с применением тригонометрической формулы сложения, получим
$z_1 z_2 = r_1 r_2(cos(\phi_1+\phi_2) + i\,sin(\phi_1+\phi_2))$.
Таким образом, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент произведения – сумме аргументов множителей.

Возведение комплексного числа в натуральную степень *(формула Муавра)*:
$z^n = r^n(cos\, n\,\phi + i\, sin\, n\,\phi), \quad n\in\mathbf{N}$.

Все **корни n-й степени из числа z** находятся по формуле
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{argz+2\pi k}{n} + i\sin\frac{argz+2\pi k}{n}\right), k = 0,1,\ldots,(n-1)$.

Показательная форма комплексного числа.

Если $|z| = 1$, $\varphi = argz$, тогда $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, то есть функция $e^{i\varphi}$ для любого действительного числа φ определяется *формулой Эйлера*
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
Тогда имеем *показательную форму* комплексного числа

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Умножение и деление комплексных чисел в показательной форме:
$$z_1z_2 = |z_1|e^{i\varphi_1}|z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\varphi_1}}{|z_2|e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

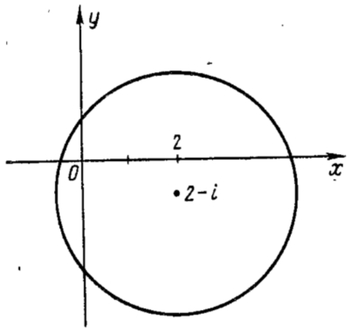
Формула Муавра: $\boldsymbol{z^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi}}$.

Формула корней -ой степени из комплексного числа:
$\boldsymbol{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \ldots, (n-1)}$.

Задачи.
1. Определить геометрические места точек на комплексной плоскости, для которых выполняется:

а) $|z| = 1$;
б) $|z - 2 + i| = 3$;
в) $Rez = 5$;
г) $Rez^2 = a^2$;
д) $argz = \frac{\pi}{3}$.
Решение.
а) По определению, $|z|$ - расстояние от начала координат до точки z. Для данного множества точек это расстояние должно быть одним и тем же, равным 1, поэтому искомое множество точек является окружностью с центром в начале координат и радиусом 1;

б) Так как $|z_1 - z_2|$ равно расстоянию между точками z_1и и z_2, то из равенства $|z - (2 - i)| = 3$ следует, точки z данного множества удалены от точки $2 - i$ на расстояние, равное 3, то есть данное множество точек представляет собой окружность с центром в точке $2 - i$ и радиуса 3.



в) по определению, $Rez = x$, поэтому уравнение можно переписать в виде $x = 5$, и это уравнение определяет прямую, параллельную оси OY;

г) так как $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, то $Rez^2 = x^2 - y^2$, поэтому условие $Rez^2 = a^2$ равносильно уравнению $x^2 - y^2 = a^2$, которое, как известно, определяет равностороннюю гиперболу.

д) уравнению $argz = \frac{\pi}{3}$ удовлетворяют точки, расположенные на луче, выходящем из начала координат под углом $\frac{\pi}{3}$ к положительному направлению оси OX.

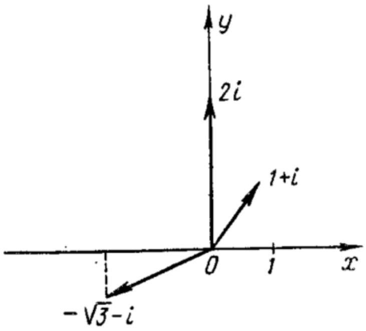
2. Представить в тригонометрической форме числа $z_1 = 1 + i.\, z_2 = -\sqrt{3} - i$, $z_3 = 2i, z_4 = -5$.

Решение. Определим модули данных чисел по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,, \qquad |z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$|z_3| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2, \qquad |z_4| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

Для того, чтобы найти аргументы, построим точки z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексной плоскости.



Заметим, что точка z_1 лежит в первой четверти, а z_2 - в третьей. Точка z_3 лежит на мнимой оси, точка z_4 - на отрицательной вещественной полуоси.

$$argz_1 = \varphi_1 : \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};$$

$$argz_2 = \varphi_2 : \begin{cases} \cos\varphi_2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_2 = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_2 = -\frac{5\pi}{6};$$

$$argz_3 = \varphi_3 : \begin{cases} \cos\varphi_3 = \dfrac{0}{2} \\ \sin\varphi_3 = \dfrac{2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$argz_4 = \varphi_4 : \begin{cases} \cos\varphi_4 = \dfrac{-5}{5} = -1 \\ \sin\varphi_4 = \dfrac{0}{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_4 = \pi.$$

Тогда тригонометрические формы данных чисел

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$z_2 = -\sqrt{3} - i = 2\ \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right);$$

$$z_3 = 2i = 2\ \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$z\quad = -5 = 5\ (\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)).$$

3. Вычислить $\left(-\sqrt{3} - i\right)^5$.

Решение. В предыдущей задаче мы нашли тригонометрическую форму числа $-\sqrt{3} - i$

$$-\sqrt{3} - i = \ 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Применим формулу Муавра

$$\left(-\sqrt{3} - i\right)^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 16\sqrt{3} - 16i.$$

4. Найти $\sqrt[3]{1 + i}$.

Решение. Тригонометрическая форма $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Для вычисления кубических корней из данного числа воспользуемся формулой $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{argz + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{argz + 2\pi k}{n}\right), k = 1, \dots, (n-1)$.

В нашем случае $n = 3, k = 0,1,2$.

Получим три различных значения корня:

$$\sqrt[3]{1 + i}_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right), k = 0,1,2.$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

5. Найти корни уравнения $z^8 - 2\sqrt{3}z^4 + 4 = 0$ и построить их на комплексной плоскости.

Решение. Обозначим $z^4 = t$, тогда данное уравнение превратится в квадратное уравнение относительно t:

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 4 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения отрицательный: $D = -4$, следовательно корни комплексные $t = \sqrt{3} \pm i$. Тогда корни исходного уравнения : $\sqrt[4]{\sqrt{3} \pm i}$. Числа $\sqrt{3} + i$ и $\sqrt{3} - i$ - комплексно сопряжённые, поэтому модули у них одинаковые, равны 2, а аргументы отличаются знаком:

$$arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}, arg(\sqrt{3} - i\ ) = -\frac{\pi}{6}.$$

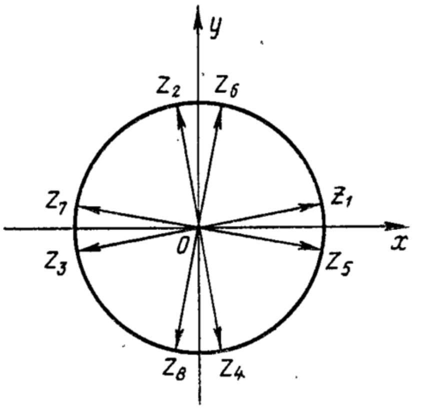
Используя формулу корней, находим корни четвёртой степени из этих чисел:

$$z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{3} + i}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4}\right), (k = 0,1,2,3),$$

$$z_{5,6,7,8} = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{3} - i}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4}\right), (k = 0,1,2,3).$$

Заметим, что все корни $z_1, z_2, \dots, z_8$ имеют одинаковые модули: $|z_k| = \sqrt[4]{2}$ $(k = 1,2,\dots,8)$. Отсюда следует, что все они лежат на окружности с центром в начале координат радиуса $\sqrt[4]{2}$. Аргументы этих чисел $\pm\frac{\pi}{24} + \pi k.$ Это значит, что аргумент числа z_2 отличается от аргумента z_1 на $\frac{\pi}{2}$, аргумент z_3 отличается от аргумента z_1 на π, аргумент z_4 отличается от аргумента z_1 на $\frac{3\pi}{2}$. Поэтому, построив на плоскости вектор z_1, получим точки z_2, z_3, z_4, если повернём вектор z_1 на углы $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ соответственно. Таким образом, точки z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[4]{2}$.

Таким же образом строятся точки z_6, z_7, z_8: строим точку z_5 и вписываем в окружность квадрат с вершинами в этой точке, остальные его вершины дадут точки z_6, z_7, z_8.



Типовой расчёт, задача 2.14.
Выполнить действия. Ответ представить в алгебраической форме:

$$z=\frac{\left(-32-32i\sqrt{3}\right)^{22}}{2^{132}}.$$

Решение. Найдем модуль и аргумент числа $a=-32-32i\sqrt{3}$ и представим его в показательной форме.

$$\left|-1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2.$$

$$a=32\left(-1-i\sqrt{3}\right)=32\cdot 2\left(-\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=64\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=64e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Тогда

$$z=\frac{\left(-32-32i\sqrt{3}\right)^{22}}{2^{132}}=\frac{\left(64e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^{20}}{2^{120}}=\frac{2^{120}e^{i\left(-\frac{40\pi}{3}\right)}}{2^{120}}.$$

Отбросим полные периоды 2π: $-\frac{40\pi}{3}=-\frac{42\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=-14\pi+\frac{2\pi}{3}$.

Значит главное значение аргумента искомого числа есть $\frac{2\pi}{3}$.

Окончательно имеем

$$z=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это алгебраическая форма искомого комплексного числа.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти модуль и аргумент комплексных чисел, представить числа в тригонометрической и показательной формах: $3i, 1+i\sqrt{3}, -7, \sqrt{3}-i, 2-2i$.

Ответ: $3i=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$-7=7(\cos\pi+i\sin\pi)=7e^{i\pi},$$

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)},$$

$$2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

2. Вычислить степени, применяя формулу Муавра: $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$,

$$\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)^8,$$

$$(-2+2i)^6.$$

   Ответ: $8i; 1296; 512i$.

3. Решить уравнения:

   $a)\ z^2+i=0,\qquad b) z^4-16=0,\qquad c) z^6-4z^3+8=0.$

Ответ: $a)\ z_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}; z_{1,2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b)$z_1=2, z_2=2i, z_3=-2, z_4=-2\mathrm{i}$;

$$c)\ z_{1,\dots,6}=\sqrt{2}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{12}/+\frac{2\pi}{3}k\right)}, k=0,1,2.$$