Практическое занятие 11

Контрольная работа №2
Несобственный интеграл, двойной интеграл, тройной интеграл
Решение примерного варианта

1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)\ln^2(x+2)}$.

Решение.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)\ln^2(x+2)} = \int_0^{+\infty} \frac{d(\ln(x+2))}{\ln^2(x+2)} = -\frac{1}{\ln(x+2)}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\ln(a+2)} - \frac{1}{\ln 2}\right) =$$

$= \frac{1}{\ln 2}$. Интеграл сходится.

б) $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$.

Решение.

Рассмотрим два случая замены переменной в данном интеграле:

- $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx = \left[\begin{matrix} t = e^{-x^3}; t_1 = 1;\ t_2 = 0 \\ dt = -e^{-x^3} \cdot 3x^2 dx \end{matrix}\right] = -\int_1^0 \frac{1}{3} dt = -\frac{1}{3} t\Big|_1^0 =$
  $= -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$;
- $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx = \left[\begin{matrix} t = x^3; t_1 = 0;\ t_2 = +\infty \\ dt = 3x^2 dx \end{matrix}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-t} dt = -\frac{1}{3} e^{-t}\Big|_0^{+\infty} =$
  $= -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$. Интеграл сходится.

Возможно вычислить интеграл, внеся под знак дифференциала x^2:

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} e^{-x^3}\, dx^3 = -\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} e^{-x^3}\, d(-x^3) = -\frac{1}{3} e^{-x^3}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}.$$

в) $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{matrix} t = \sqrt{x}; t_1 = 0;\ t_2 = 1 \\ dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{matrix}\right] = \int_0^1 2\sin t dt = -2\cos t\big|_0^1 = 2(1-\cos 1).$$

Интеграл сходится.

2. Расставить в интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ пределы интегрирования двумя способами.

а) D: $\begin{cases} x+y=3 \\ y=2x \\ 0\le y\le 2. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения выразим $y=3-x$ и построим область D на координатной плоскости (рис.1). Найдём точку пересечения двух прямых: $3-x=2x$, получаем $x=1$, тогда $y=2$.

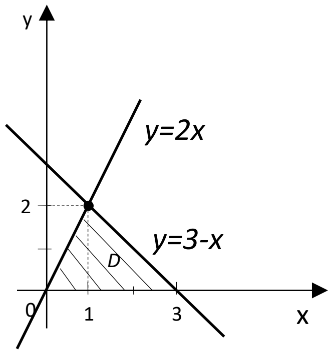

Рис. 1

В направлении оси *Ox* область *D* заключена между прямыми $x=\frac{y}{2}$ и $x=3-y$, а по оси *Oy* снизу и сверху ограничена $y=0$ и $y=2$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x,y)dx.$$

При другом порядке интегрирования необходимо разбить область D на две области: $D_1=\{0\le x\le 1; 0\le y\le 2x\}$ и $D_2=\{1\le x\le 3; 0\le y\le 3-x\}$, тогда:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x} f(x,y)dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{3-x} f(x,y)dy.$$

б) $\boldsymbol{D}$: $\begin{cases} \boldsymbol{y = x^2} \\ \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{y = 0} \\ \boldsymbol{x \geq 0}. \end{cases}$

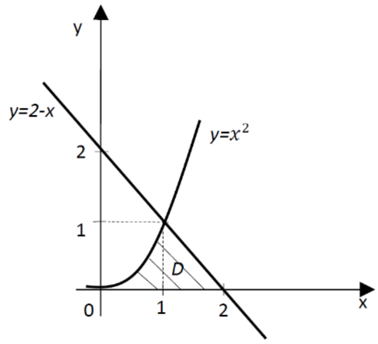

Рис. 2

Решение.

Из второго уравнения выразим $y = 2 - x$ и построим область D на координатной плоскости (рис.2). Найдём точку пересечения параболы и прямой:

$2 - x = x^2$, получаем $x^2 + x - 2 = 0$, найдем корни квадратного уравнения: $x_1 = -2,\ x_2 = 1$, нас интересует второй корень, для которого $y_2 = 1$.

В направлении оси *Ox* область *D* заключена между $x = \sqrt{y}$ и $x = 2 - y$, а по оси *Oy* снизу и сверху ограничена *y*=0 и *y*=1:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

При другом порядке интегрирования необходимо разбить область *D* на две области: $D_1 = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x^2\}$ и $D_2 = \{1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2 - x\}$, тогда:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

3. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры D, ограниченной заданными линиями:

а) D: $\begin{cases} \boldsymbol{y = e^{-x}};\ \ \boldsymbol{y = 0} \\ \boldsymbol{x = 1};\ \ \boldsymbol{x = 2} \end{cases}$.

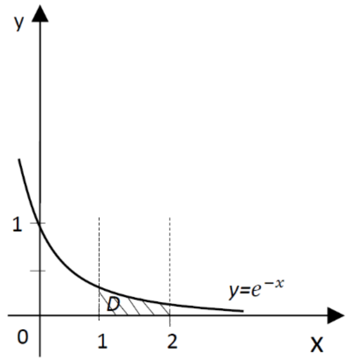

Рис. 3

Решение.

Изобразим на координатной плоскости (рис. 3) графики данных функций и определим область D. График $y = e^{-x}$ пересекает ось Oy в точке y=1.

Площадь получившейся области D вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле: $S = \iint_D dxdy$. В направлении оси Ox область D заключена между $x = 1$ и $x = 2$, а по оси Oy снизу и сверху ограничена y=0 и $y = e^{-x}$, тогда:

$$S = \iint_D dxdy = \int_1^2 dx \int_0^{e^{-x}} dy = \int_1^2 dx y|_0^{e^{-x}} = \int_1^2 e^{-x}dx = -e^{-x}|_1^2 = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}.$$

б) D: $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 = y} \\ \boldsymbol{y \le -x} \end{cases}$.

Решение.

Выделим полный квадрат из первого уравнения $x^2 + y^2 = y \ \to x^2 + y^2 - y = 0 \ \to$ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Полученное уравнение является уравнение окружности радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Построим данные графики и определим область, площадь которой необходимо вычислить (рис.4) $S = \iint_D dxdy$.

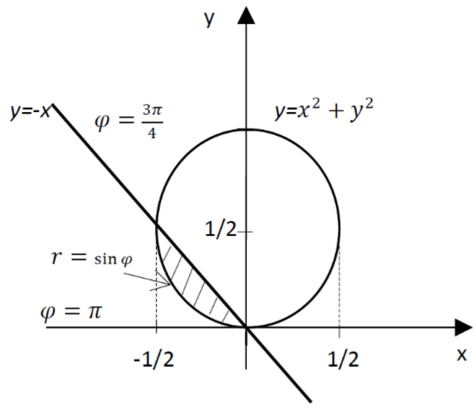

Рис. 4

Для вычисления площади получившейся области лучше перейти к полярным координатам: $\begin{cases} x = r\cos x \\ y = r\sin x \end{cases}$, тогда $x^2 + y^2 = y$ будет выглядеть $r^2(\cos^2\varphi +$ $+\sin^2\varphi) = r\sin\varphi \to \ r^2 = r\sin\varphi \ \to r = \sin\varphi$. Угол φ будет меняться от $\frac{3\pi}{4}$ до π, это видно из рис. 4, искомая область находится ниже прямой $y = -x$, которая делит II и IV четверти пополам, а r будет меняться от 0 до $\sin\varphi$. Тогда площадь в полярных координатах будет рассчитываться следующим образом:

$$S = \iint_D dxdy = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} rdr = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\sin\varphi} = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left[\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right] = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} - \frac{1}{4}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{8}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\left(0 - \sin\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}.$$

4. Найти объём с помощью тройного интеграла:

а) $\begin{cases} \boldsymbol{x = 0; y = 0; z = 0} \\ \boldsymbol{4x + 2y - z = 8} \end{cases}$.

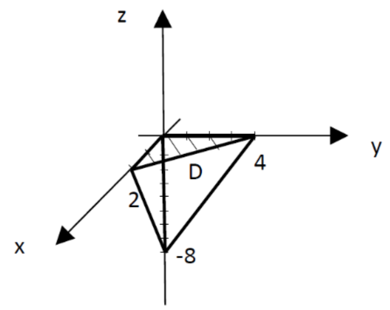

Рис. 5

Решение.

Поочерёдно полагая каждую координату равной нулю, отметим полученные прямые на координатных плоскостях:

$z = 0: 4x + 2y = 8 \ \rightarrow y = 4 - 2x;$

$x = 0: 2y - z = 8 \ \rightarrow z = 2y - 8;$

$y = 0: 4x - z = 8 \ \rightarrow z = 4x - 8.$

Координаты точек пересечения с осями координат: $x = 2, y = 4, z = -8$. Полученная фигура (рис. 5) - пирамида - ограничена координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0, z = 0$ и плоскостью $4x + 2y - z = 8$.

Область V проецируется на плоскость xOy в область D.

Объём данной фигуры рассчитывается по формуле: $V = \iiint dxdydz$. Расставим сначала пределы интегрирования. Для этого интеграла по переменной z верхний предел интегрирования задан однозначно: $z = 0$. Чтобы получить нижний предел, выразим z из $4x + 2y - z = 8$, получаем $z = 4x + 2y - 8$. По переменной y нижний предел интегрирования задан однозначно: $y = 0$. Для получения верхнего предела выразим y из $4x + 2y - z = 8$, считая при этом, что $z = 0$ (так как линия расположена в плоскости xOy). Получаем: у=$4 - 2x$. Сведём тройной интеграл к последовательности трёх определённых интегралов.

$$V = \iiint dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_{4x+2y-8}^{0} dz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (8 - 2y - 4x)dy =$$

$$= \int_0^2 (4x^2 - 16x + 16)dx = \left.\frac{4x^3}{3}\right|_0^2 - \left.\frac{16x^2}{2}\right|_0^2 + 16x|_0^2 = \frac{32}{3}.$$

Ответ легко проверить, зная формулу для расчёта объёма пирамиды.

б) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 \le 4z} \\ \boldsymbol{0 \le z \le 1} \end{cases}$.

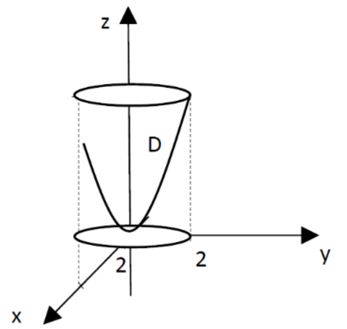

Рис. 6

Решение.

Для построения данной фигуры на координатных осях положим $z = 1$ - верхняя граница, тогда видно, что в сечении получается круг радиусом 2 (рис. 6). Полагая поочерёдно $x = 0$ и $y = 0$, получаем уравнения парабол, искомая фигура - параболоид вращения.

Для нахождения объёма удобнее будет использовать цилиндрические координаты.

Выразим z из первого соотношения: $x^2 + y^2 = 4z$, получим $z = \frac{x^2+y^2}{4}$. Перейдя к цилиндрическим координатам (r, φ, z) , $\begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{bmatrix}$, получим $z = \frac{r^2}{4}$, тогда $0 \le r \le 2$. Угол φ будет меняться от 0 до 2π. Пределы интегрирования для переменной z будут $\frac{r^2}{4} \le z \le 1$. Тогда объём будет рассчитываться следующим образом:

$$V = \iiint dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rdr \int_{\frac{r^2}{4}}^1 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\left(1 - \frac{r^2}{4}\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}\bigg|_0^2 - \frac{r^4}{16}\bigg|_0^2 \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Приведем еще один *примерный вариант контрольной работы № 2*.

1. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{xdx}{\sqrt{25-16x^2}}$$

2. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_8^{+\infty} \frac{3dx}{x^2-7x+10}$$

3. Вычислить массу и координаты центра масс однородной пластины $(\rho(x,y)=1)$, заданной на координатной плоскости xOy системой неравенств: $2x^2 \leq y \leq 5-3x^2$

4. Вычислить массу дуги параболы $y=x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $A\left(\frac{2}{3};\frac{4}{9}\right)$, если линейная плотность $\rho(x,y)=\frac{y}{x}$.

5. Вычислить объем тела, заданного системой неравенств: $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4-3x^2-3y^2$.

6. Вычислить площадь полной поверхности тела, заданного системой неравенств:

   $40 \leq z \leq \sqrt{41^2-x^2-y^2}$.

7. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

   по области D, заданной системой неравенств:

   $y \leq x^2+y^2 \leq 4y, \quad x \leq 0.$

<u>Ответы</u> к примерному варианту:

1. $\frac{5}{16}$
2. $ln2$
3. $m = \frac{20}{3}, \quad C\left(0, \frac{12}{5}\right)$
4. $\frac{49}{162}$
5. $\frac{11\pi}{6}$
6. 163π
7. $-\frac{3}{4}$