**Практическое занятие 9**

# Вычисление тройного интеграла

## 1. Вычисление тройного интеграла повторным интегрированием в декартовых координатах

Пусть функция трех переменных $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в пространственной области $V$ , которая ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, а снизу - поверхностью $z = z_1(x, y)$, где функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ определены и непрерывны в области $D \in Oxy$. Область $D$ – проекция пространственной области $V$ на плоскость $Oxy$. Тогда вычисление тройного интеграла сводится к последовательному (справа налево) вычислению определенного интеграла по переменной $z$ (переменные $x$ и $y$ считаются при этом константами) и двойного интеграла от функции, полученной в результате интегрирования по $z$ и подстановки пределов $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$, по области D.

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

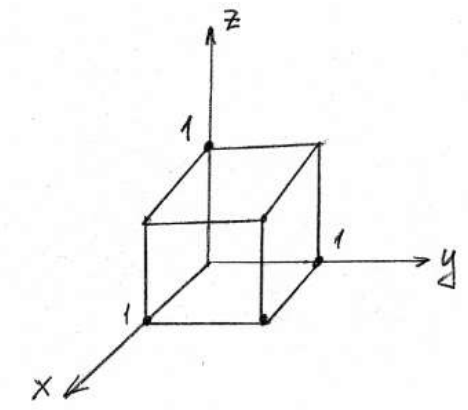
В частности, если область V представляет собой прямоугольный параллелепипед, определяемый неравенствами $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \\ e \le z \le f \end{cases}$, то

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)dz.$$

Порядок интегрирования можно изменять.

<u>*Примеры.*</u> Вычислить тройной интеграл по области $V$, ограниченной заданными поверхностями:

<u>*Пример 1*</u>. $\iiint_V 4xze^{xy}dxdydz, V = \begin{cases} x = 0; x = 1 \\ y = 0; y = 1 \\ z = 0; z = 1 \end{cases}.$




Областью интегрирования является куб со стороной, равной 1, с вершиной в начале координат.

$$\iiint_V 4xze^{xy}dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 4xze^{xy}dz =$$

так как при интегрировании по переменной $z$ остальные переменные являются константами, вынесем константные множители за знак внутреннего интеграла:

$$= 4\int_0^1 dx \int_0^1 xe^{xy}dy \int_0^1 z\,dz =$$

за знак интеграла по у вынесем также переменную $x$, являющуюся константным множителем при интегрировании по $y$:

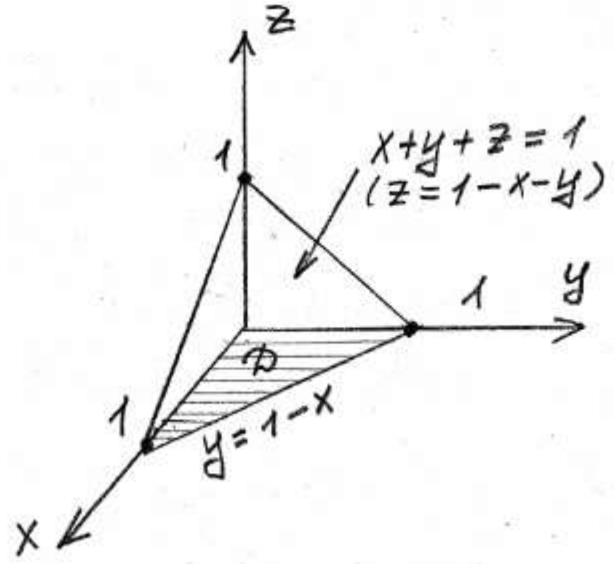
$$= 4\int_0^1 xdx \int_0^1 e^{xy}dy \int_0^1 z\,dz = 4\int_0^1 xdx \int_0^1 e^{xy}dy \cdot \frac{z^2}{2}\bigg|_0^1 =$$

$$= 2\int_0^1 xdx \int_0^1 e^{xy}dy = 2\int_0^1 xdx \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{xy}|_0^1 =$$

$$= 2\int_0^1 (e^x - 1)\,dx = 2(e^x - x)|_0^1 = 2\big(e - 1 - (1 - 0)\big) = 2e - 4.$$

<u>*Пример 2*</u>. $\iiint_V \ z\,dxdydz, V = \begin{cases} x = 0; y = 0; z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$

Областью интегрирования является тэтраэдр, расположенный в 1 октанте. Границами являются координатные плоскости и наклонная плоскость $x + y + z = 1 \ \Leftrightarrow z = 1 - x - y$.




$$\iiint_V \ z\,dxdydz = \iint_D \ dxdy \int_0^{1-x-y} zdz,$$

область D – треугольник в плоскости $Oxy$, ограниченный линиями: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}.$

Прямая $y = 1 - x$ получена из уравнения плоскости при $z = 0$.

$$\iint_D \ dxdy \int_0^{1-x-y} zdz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} zdz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( \frac{z^2}{2} \bigg|_0^{1-x-y} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy =$$

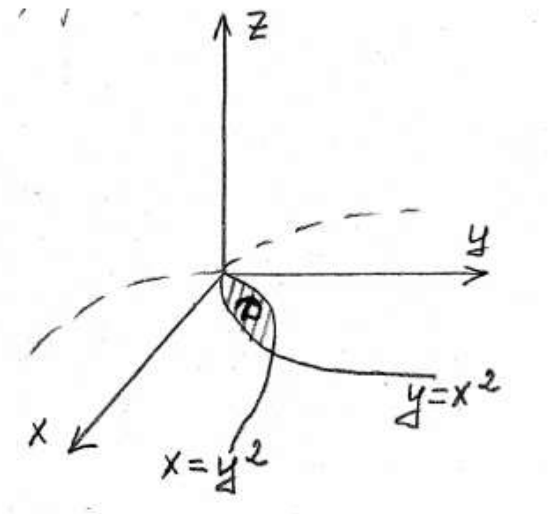
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} ((1 - x)^2 - 2(1 - x)y + y^2)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left( (1 - x)^2 y - (1 - x)y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 ((1-x)^3 - (1-x)^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3)dx = \frac{1}{6}\left(-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

<u>*Пример 3*</u>. $\iiint_V \; xyzdxdydz, V = \begin{cases} y = x^2; x = y^2 \\ z = 0; z = xy \end{cases}.$

Область D на плоскости $Oxy$ ограничена линиями $y = x^2; x = y^2 \; \Leftrightarrow \; y = x^2; y = \sqrt{x}$. Точки пересечения находятся из решения уравнения $\sqrt{x} = x^2$. $x = 0; x = 1$. На этом отрезке кривая $y = x^2$, являющаяся параболой, расположена ниже кривой $y = \sqrt{x}$, являющей параболой с ветвями вдоль оси $OX$.




$$\iiint_V \; xyzdxdydz = \int_0^1 xdx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy \int_0^{xy} zdz = \int_0^1 xdx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy \; \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{xy} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2y^3dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3dx \; \frac{y^4}{4}\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{8}\int_0^1 x^3\,(x^2 - x^8)dx =$$

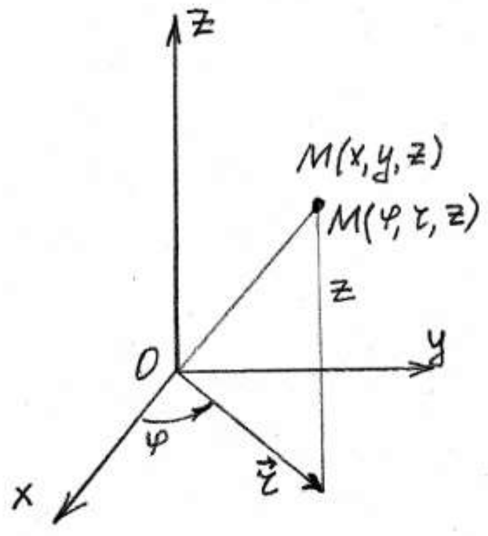
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 (x^5 - x^{11})dx = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{12}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

**Задачи для самостоятельного решения.**

Вычислить тройной интеграл по области $V$, ограниченной заданными поверхностями:

1. $\iiint_V x^2y^2zdxdydz, V = \begin{cases} x = 1; x = 3 \\ y = 0; y = 2 \\ z = 2; z = 5 \end{cases}.$ Ответ: $242\frac{2}{3}$.
2. $\iiint_V (1-y)xzdxdydz, V = \begin{cases} x = 0; y = 0; z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$ Ответ: $\frac{1}{144}$.

## 2. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических, сферических координатах




*Цилиндрические координаты* представляют собой обобщение полярных координат на плоскости $Oxy$. Связь цилиндрических и декартовых координат определяется формулами: $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi, \\ z = z \end{cases}$

где для точки $M$ в пространственной области с координатами $(x,y,z)$: $r$ – длина радус-вектора $\vec{r}$, проведенного к проекции точки M на плоскость $Oxy$;

$\varphi$ – угол, образуемый $\vec{r}$ с положительным направлением оси $Ox$.

Переход к тройному интегралу в цилиндрических координатах осуществляется по формуле:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V\prime} f(rcos\varphi, rsin\varphi, z)rd\varphi drdz.$$

$$dxdydz = rd\varphi drdz.$$

$V'$ - область интегрирования, описанная в координатах $(\varphi, r, z)$,

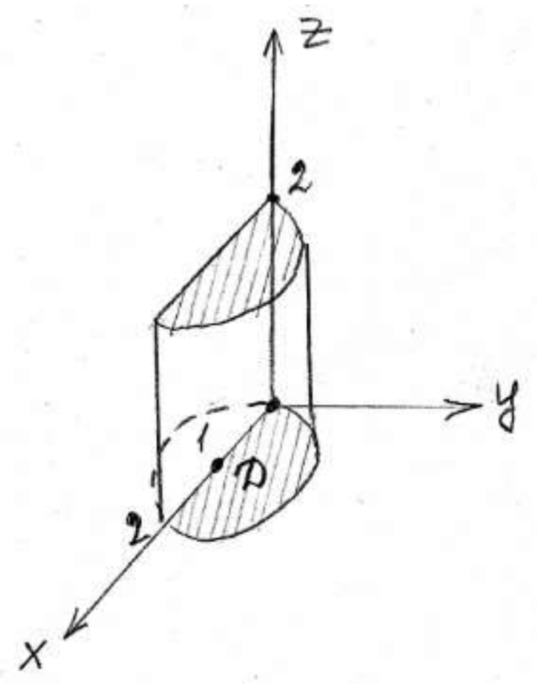
$r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z \in R.$

Переходить к цилиндрическим координатам удобно, если область интегрирования $V$ образована цилиндрической поверхностью.

*Примеры.*

*Пример 4*. Вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам:

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}zdxdydz,\ V=\begin{cases}0\le y\le\sqrt{2x-x^2}\\ z=0\\ z=2\end{cases}.$$




Определим вид области интегрирования $V$.

$z=0$ и $z=2$ – плоскости, параллельные $Oxy$.

Преобразуем уравнение границы области в плоскости $Oxy$:

$y=\sqrt{2x-x^2} \Leftrightarrow\ y^2=2x-x^2\ \Leftrightarrow$

$y^2+x^2-2x+1=1\ \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+y^2=1$. Это окружность с центром в точке (1,0) радиуса 1. Учитывая условие $y\ge 0$, в плоскости $Oxy$ имеем полуокружность.

Введем на плоскости полярные координаты.

$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $r$ меняется от нуля до границы окружности. Уравнение окружности $y^2=2x-x^2\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2=2x$ в полярных координатах:

$r^2=2rcos\varphi\ \Leftrightarrow r=2cos\varphi.$

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}zdxdydz=\iiint_{V\prime} rzrd\varphi drdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2cos\varphi}dr\int_0^2 r^2zdz=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2cos\varphi}r^2dr\int_0^2 zdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2cos\varphi}r^2dr\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=$$

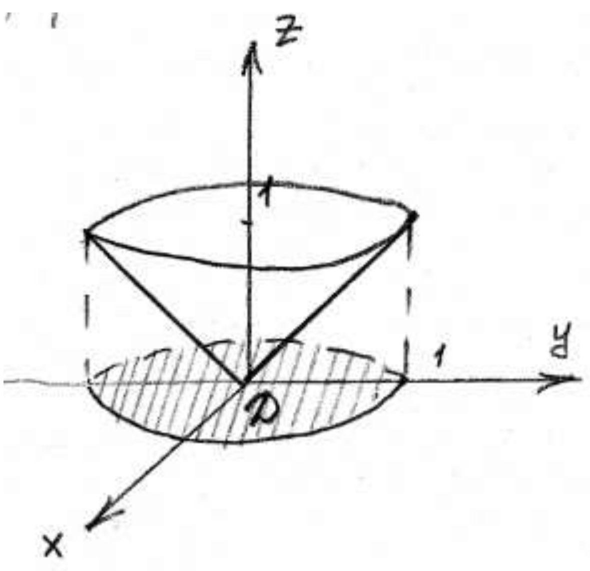
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2cos\varphi}r^2dr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2cos\varphi}=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^3\varphi d\varphi=$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\varphi d sin\varphi = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - sin^2\varphi) d sin\varphi = \frac{16}{3}\left(sin\varphi - \frac{sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{16}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{9}.$$

<u>*Пример 5*</u>. $\iiint_V \ zdxdydz, V = \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1, \ z \geq 0 \end{cases}.$

$x^2 + y^2 = z^2$ – уравнение конуса, учитывая условие $z \geq 0$, получаем область интегрирования – верхнюю часть конуса, ограниченную плоскостью $z = 1$.




В цилиндрических координатах уравнение конуса примет вид:

$r^2 = z^2$, т. е. $r = z$.

При пересечении конуса и плоскости $z = 1$ образуется окружность: подставим в уравнение конуса $z = 1 \ \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 1$, в цилиндрических координатах $r = 1$.

Новые переменные изменяются:

$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq z \leq 1.$

$$\iiint_V \ zdxdydz = \iiint_{V'} zrd\varphi drdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_r^1 zdz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \frac{z^2}{2}\Big|_r^1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1 - r^2)dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{8}\varphi|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

**Задачи для самостоятельного решения.**

Вычислить тройной интеграл по области $V$, ограниченной заданными поверхностями, перейдя к цилиндрическим координатам:

1. $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz, V=\begin{cases} x^2+y^2=z \\ z=1 \end{cases}.$

*Комментарии:*

– $x^2+y^2=z$ – уравнение параболоида, вершина в начале координат, $z \geq 0$.

– Проекцией области $V$ на плоскость $Oxy$ является круг с центром в начале координат радиуса 1.

*Ответ*: $\frac{\pi}{6}$.

2. $\iiint_V (1+x^2+y^2)dxdydz, V=\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \\ z=3 \end{cases}.$

*Комментарии*:

$x^2+y^2=4$ – уравнение цилиндра

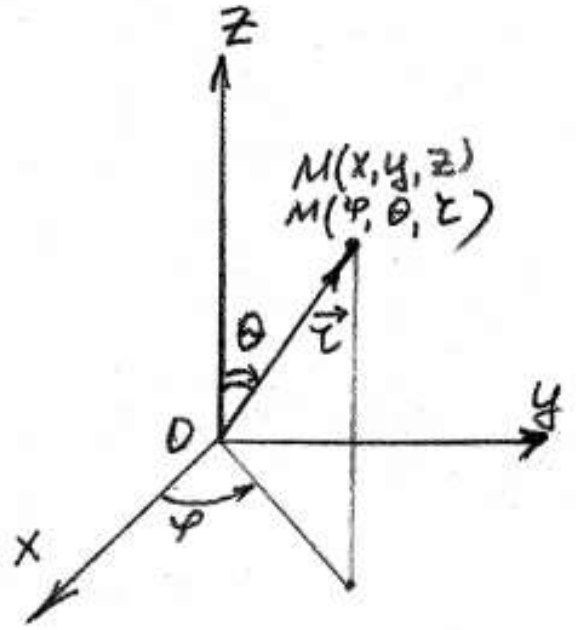
*Ответ*: 36π.

*Сферическими координатами* точки $M(x, y, z)$ называется тройка чисел $r, \varphi, \theta$, где:

$r -$ длина радиус-вектора точки $M$,

$\varphi -$ угол, образованный проекцией $\vec{r}$ на плоскость $Oxy$ и осью $Ox$,

$\theta -$ угол отклонения $\vec{r}$ от оси $Oz$.




Связь сферических и декартовых координат определяется формулами:
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \cdot \sin\theta \\ y = r\sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$

$\iiint_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \cdot r^2\sin\theta d\varphi dr d\theta.$

$dxdydz = r^2\sin\theta d\varphi dr d\theta.$

$V'$ – область интегрирования, описанная в координатах $(\varphi, r, \theta)$, $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$

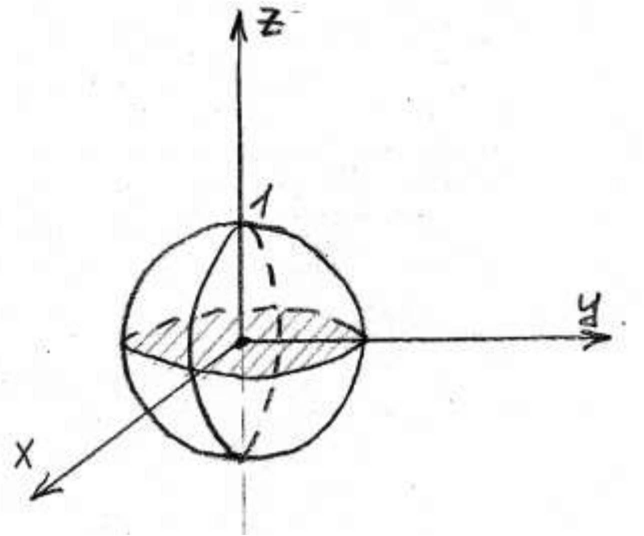
Переходить к сферическим координатам удобно, если область интегрирования $V$ есть шар (уравнение его границы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферических координатах имеет вид $r = R$) или его часть, а также, если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$.

<u>*Примеры.*</u>

Вычислить тройной интеграл, перейдя к сферическим координатам:

<u>*Пример 6*</u>. $\iiint_V \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $V: x^2+y^2+z^2 \le 1$ – шар.

Граница области - сфера, в сферических координатах ее уравнение $r = 1$.




Пределы изменения координат: $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iiint_{V\prime} \frac{r^2 sin\theta d\varphi dr d\theta}{1+r^3} =$$

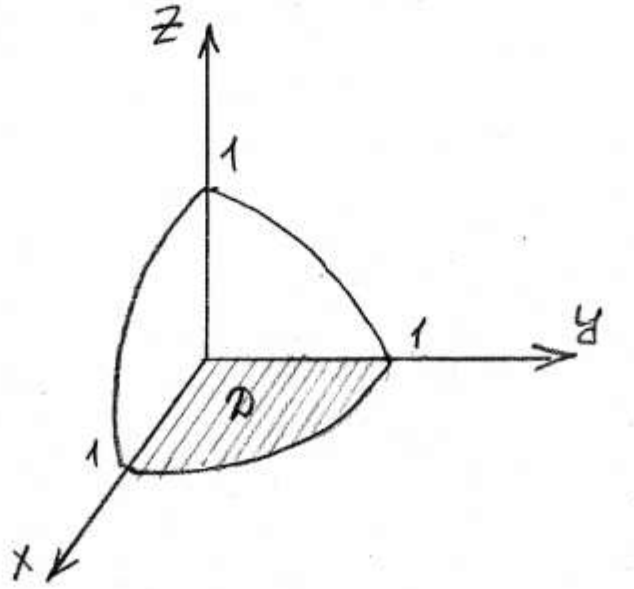
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^3} dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+r^3} d(r^3+1) =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \cdot ln|1+r^3|_0^1 = \frac{ln2}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\, (-cos\theta)|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{ln2}{3}\int_0^{2\pi} 2d\varphi = \frac{4\pi}{3} ln2.$$

<u>*Пример 7*</u>. $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,\ V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \end{cases}$ − часть шара, расположенная в I октанте.




Пределы изменения сферических координат:

$0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \iiint_{V'} r^4 sin\theta d\varphi dr d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta \cdot \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^1 =$$

$$\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(-cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.$$

**Задача для самостоятельного решения.**

Вычислить тройной интеграл по области $V$, ограниченной заданными поверхностями, перейдя к сферическим координатам:

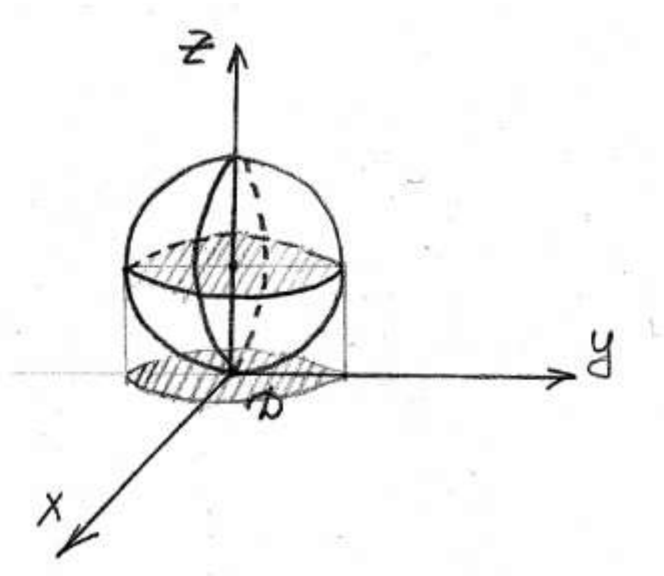
$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz, V: x^2+y^2+z^2 \leq 2z.$$

*Комментарии:*

– Преобразуем уравнение границы области интегрирования

$$x^2+y^2+z^2 = 2z \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2z = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2-2z+1 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 = 1.$$

Область интегрирования – шар с центром в точке (0,0,1) радиуса 1.




– В сферических координатах уравнение сферы (границы области $V$) будет выглядеть так:

$$x^2+y^2+z^2 = 2z \Leftrightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Leftrightarrow r = 2\cos\theta$$

– Пределы изменения сферических координат:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta.$$

*Ответ*: $\frac{4}{3}\pi$.