ЛЕКЦИЯ 16. МНОГОЧЛЕНЫ

1. Понятие многочлена.

2. Действия над многочленами. Теорема о делении с остатком.

3. Алгоритм деления многочлена на многочлен. Схема Горнера.

4. Корни многочлена и их кратность. Теорема Безу.

16.1. Понятие многочлена

Определение 1. Функция $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, где $n \in \mathbf{Z}$ называется ***многочленом***. Число n называется степенью многочлена, $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ – действительные или комплексные числа (многочлен рассматривается в комплексной области), a_n – старший коэффициент многочлена, $a_n \neq 0$. Независимая переменная z также может принимать как действительные, так и комплексные значения.

Если все $a_n = 0, a_{n-1} = 0, ..., a_1 = 0, a_0 = 0$.

Если в многочлене степени n все коэффициенты, кроме a_n обращаются в ноль, то такой многочлен называется *одночленом*.

Степень многочлена $f(z)$ принято обозначать $\deg f$.

16.2. Действия над многочленами

Определение 2. Два многочлена $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ и $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0$ равны тогда и только тогда, когда их степени одинаковы ($n = m$), и равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной.

$$P(z) = Q(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \deg P = \deg Q \\ a_i = b_i, 0 \le i \le n \end{cases}$$

Для многочленов определены операции сложения и умножения.
Пусть даны два произвольных многочлена

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ и $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0$

Определение 3. Многочлен $R(z) = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + ... + c_1 z + c_0$, где каждое $c_i = a_i + b_i$, $0 \le i \le k, k = \max(m, n)$ называется ***суммой*** многочленов $P(z)$ и $Q(z)$. При сложении многочленов необходимо складывать коэффициенты при соответствующих степенях.

Операция сложения позволяет ввести понятие противоположного многочлена.

Определение 4. Многочлен $-P(z) = -a_n z^n - a_{n-1}z^{n-1} - ... - a_1 z - a_0$ называется многочленом ***противоположным*** многочлену $P(z)$ и связан с ним равенством $P(z) + (-P(z)) = 0$.

Определение 5. Многочлен $S(z) = d_{m+n}z^{m+n} + d_{m+n-1}z^{m+n-1} + ... + d_1 z + d_0$, где каждое $d_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j$, $k = i + j$ называется ***произведением*** многочленов $P(z)$ и $Q(z)$. При перемножении многочленов необходимо раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Очевидно, что поскольку ни один из старших коэффициентов $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, то и старший коэффициент многочлена $S(z)$ $d_{m+n} \neq 0$. $\deg S = m + n$.

Задача 1. Найти произведение многочленов $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + z - 7$ и $Q(z) = 3z^2 - 4z - 1$.

Решение.

$P(z) \cdot Q(z) = (2z^3 - 5z^2 + z - 7)(3z^2 - 4z - 1) =$

$= 6z^5 - 8z^4 - 2z^3 - 15z^4 + 20z^3 + 5z^2 + 3z^3 - 4z^2 - z - 21z^2 + 28z + 7 =$

$= 6z^5 - 23z^4 + 21z^3 - 20z^2 + 27z + 7$

Ответ. $P(z) \cdot Q(z) = 6z^5 - 23z^4 + 21z^3 - 20z^2 + 27z + 7$.

Пусть два произвольных многочлена $P(z)$ и $Q(z)$ определены выше. Говорят, что многочлен $Q(z)$ делит многочлен $P(z)$ без остатка, если $P(z) = Q(z) \cdot T(z)$, где $T(z)$ – многочлен, $\deg T = s$, причем $s < n$ или $s + m = n$. Однако, далеко не всегда один многочлен делит другой без остатка. В связи с этим имеет смысл рассмотреть важную теорему, которую принято называть *теоремой о делении с остатком*.

Теорема 1. Пусть заданы многочлены $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ и $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0$ степеней n и m соответственно, причем $Q(z)$ – ненулевой многочлен. Тогда существуют многочлены $T(z)$ и $R(z)$ такие, что

$$P(z) = Q(z) \cdot T(z) + R(z),$$

$\deg R < \deg Q$.

Многочлен $T(z)$ называют ***частным***, а многочлен $R(z)$ - ***остатком*** от деления $P(z)$ на $Q(z)$. Заметим, что может оказаться $R(z) \equiv 0$.

Многочлены $T(z)$ и $R(z)$ определены однозначно.

Доказательство.

Сначала докажем существование многочленов $T(z)$ и $R(z)$, считая при этом многочлен $Q(z)$ имеет неизменную степень *m*, а степень многочлена $P(z)$ может меняться.

$\deg P = n, \deg Q = m$, a_n, b_n - старшие коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ соответственно.

Пусть $n < m$. В этом случае $P(z) = Q(z)\cdot 0 + P(z)$. Откуда получаем $T(z) \equiv 0$, $R(z) \equiv P(z)$.

Пусть теперь $n \geq m$. Доказательство проведем методом математической индукции.

1. $n = m$. Положим $R(z) = P(z) - \dfrac{a_n}{b_n}Q(z)$ **(1)**

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ и

$$\frac{a_n}{b_n}Q(z) = \frac{a_n}{b_n}b_n z^n + \frac{a_n}{b_n}b_{n-1}z^{n-1} + ... + \frac{a_n}{b_n}b_1 z + \frac{a_n}{b_n}b_0 = a_n z^n + \frac{a_n}{b_n}b_{n-1}z^{n-1} + ... + \frac{a_n}{b_n}b_1 z + \frac{a_n}{b_n}b_0$$

Так как $\deg P = \deg\left(\dfrac{a_n}{b_n}Q\right)$ и старшие коэффициенты совпадают и равны a_n, то $\deg R < \deg Q$.

Перепишем равенство (1) в виде $P(z) = \dfrac{a_n}{b_n}Q(z) + R(z) \Rightarrow T(z) = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Таким образом, для случая $m = n$ $R(z) = P(z) - \dfrac{a_n}{b_n}Q(z)$ и $T(z) = \dfrac{a_n}{b_n}$.

2. Пусть $n > m$ и для любого многочлена степени меньшей *n*, частное и остаток от деления на $Q(z)$ существуют.

Рассмотрим многочлен $S(z) = P(z) - \dfrac{a_n}{b_n}z^{n-m}Q(z)$ **(2)**

Очевидно, $\deg S < \deg P$ и согласно предположению индукции для многочлена $S(z)$ существуют частное и остаток от деления на $Q(z)$, т.е. его можно записать в виде

$S(z) = Q(z)\cdot T_S(z) + R_S(z)$, **(3)**

при этом $\deg R_S < \deg Q$. Подставим $S(z)$ в (2) и выразим $P(z)$:

$$Q(z)\cdot T_S(z) + R_S(z) = P(z) - \frac{a_n}{b_n}z^{n-m}Q(z)$$

$$P(z) = Q(z)\cdot T_S(z) + R_S(z) + \frac{a_n}{b_n}z^{n-m}Q(z)$$

$$P(z) = Q(z)\cdot \underbrace{\left(T_S(z) + \frac{a_n}{b_n}z^{n-m}\right)}_{\text{частное}} + \underbrace{R_S(z)}_{\text{остаток}}$$

Таким образом, нами доказано существование частного и остатка от деления многочлена $P(z)$ на $Q(z)$.

Докажем единственность.

Предположим, что многочлен $P(z)$ можно представить разными способами

$P(z) = Q(z) \cdot T(z) + R(z)$, $\deg R < \deg Q$ **(4)**

$P(z) = Q(z) \cdot T'(z) + R'(z)$, $\deg R' < \deg Q$ **(5)**

Вычтем из равенства (5) равенство (4):

$$P(z) - P(z) = Q(z) \cdot T(z) + R(z) - Q(z) \cdot T'(z) - R'(z)$$

$$Q(z)(T(z) - T'(z)) + R(z) - R'(z) = 0$$

$R'(z) - R(z) = Q(z)(T(z) - T'(z))$ **(6)**

Предположим, что многочлены $R(z)$ и $R'(z)$ различны. Тогда $R'(z) - R(z)$ - ненулевой многочлен, следовательно, $T(z) - T'(z)$ - ненулевой многочлен. Так как при умножении многочлена на многочлен их степени складываются, то $\deg Q(T - T') \geq \deg Q$, но поскольку $\deg R < \deg Q$ и $\deg R' < \deg Q$, то $\deg(R' - R) < \deg Q$.

Получается, что в формуле (6) степень многочлена в левой части не равна степени многочлена в правой части, значит, равенство (6) не имеет места по определению равенства многочленов. Это противоречие доказывает ошибочность предположения, что $R(z)$ и $R'(z)$ различны, тогда $R'(z) - R(z)$ - нулевой многочлен, но тогда и $T(z) - T'(z)$ – нулевой многочлен, т.е. $T(z) = T'(z)$. Единственность доказана. Теорема 1 доказана полностью.

3. Алгоритм деления многочлена на многочлен. Схема Горнера

Рассмотрим на примере способ деления многочлена степени n на многочлен степени m, при $n \geq m$. Этот алгоритм называется деление «уголком» и работает аналогично алгоритму деления «уголком» обычных чисел.

Задача 2. Разделить многочлен $P(z) = 2z^3 - z^2 - 3z - 19$ на многочлен $Q(z) = z^2 + 2z + 3$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} \;\;2z^3 - z^2 - 3z - 19 & \underline{z^2 + 2z + 3} \\ \underline{2z^3 + 4z^2 + 6z} & \;\;2z - 5 \\ \qquad -5z^2 - 9z - 19 & \\ \qquad \underline{-5z^2 - 10z - 15} & \\ \qquad\qquad\quad z - 4 & \end{array}$$

Частное $T(z) = 2z - 5$, остаток от деления $R(z) = z - 4$. Тогда по теореме 1

$$2z^3 - z^2 - 3z - 19 = \underbrace{(2z - 5)}_{Q(z)} \cdot (z^2 + 2z + 3) + \underbrace{(z - 4)}_{R(z)}.$$

Ответ. $2z^3 - z^2 - 3z - 19 = (2z - 5) \cdot (z^2 + 2z + 3) + z - 4$.

Схема Горнера

Приведем алгоритм, который позволяет разделить многочлен $P(z)$ произвольной степени n на многочлен $z-a$. Для многочлена $P(z)$ запишем теорему о делении с остатком:

$$P(z)=(z-a)\cdot Q(z)+R(z) \quad \mathbf{(7)}$$

Очевидно, что $\deg P=\deg Q+1$ и $R(z)=R$ - некоторое число.

Пусть, как и ранее

$P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0$, тогда частное

$Q(z)=b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+...+b_1 z+b_0$.

Подставим $Q(z)$ в правую часть равенства (7)

$P(z)=(z-a)\cdot(b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+...+b_1 z+b_0)+R$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$P(z)=b_{n-1}z^n+(b_{n-2}-ab_{n-1})z^{n-1}+...+(b_0-ab_1)z+(R-ab_0)$.

По определению равенства многочленов, многочлены в правой и левой частях равны, когда равны коэффициенты при соответствующих степенях, т.е.

$b_{n-1}=a_n$

$b_{n-2}-ab_{n-1}=a_{n-1}\Rightarrow b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$

…

$b_0-ab_1=a_1\Rightarrow b_0=a_1+ab_1$

$R-ab_0=a_0\Rightarrow R=a_0+ab_0$

Результаты вычисления удобно записывать в специальную таблицу, которую называют схемой Горнера. В первой строке таблицы, начиная со второго столбца, выписывают коэффициенты многочлена – делимого, во второй строке таблицы сначала выписывают a, после, начиная о второго столбика – коэффициенты многочлена, который есть частное от деления.

	a_n *старший коэффициент*	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0 *свободный член*
a	$b_{n-1}=a_n$ *старший коэффициент*	$b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$	$\cdots$	$b_0=a_1+ab_1$ *свободный член*	$R=a_0+ab_0$ *остаток*

Задача 3. Разделить многочлен $P(z)=-z^4+2z^3+3z^2-z+4$ на $(z-3)$, пользуясь схемой Горнера.

Решение.

Искомый многочлен $Q(z)=b_3 z^3+b_2 z^2+b_1 z+b_0$, $z_0=3$

$b_3=a_4=-1$

$b_2 = a_3 + ab_3 = 2 + 3\cdot(-1) = -1$
$b_1 = a_2 + ab_2 = 3 + 3\cdot(-1) = 0$
$b_0 = a_1 + ab_1 = -1 + 3\cdot(0) = -1$
$Q(z) = -z^3 - z^2 - 1$
$R = 4 + 3\cdot(-1) = 1$

	-1	2	3	-1	4
$a = 3$	$b_3 = a_4 = -1$	$2+3\cdot(-1) = -1$	$3+3\cdot(-1) = 0$	$-1+3\cdot(0) = -1$	$4+3\cdot(-1) = 1$

Ответ. $P(z) = (-z^3 - z^2 - 1)(z-3) + 1$.

16.4. Корни многочлена и их кратность. Теорема Безу

Пусть задан многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ и пусть $c \in \mathbf{R}$ - произвольное число. Выражение $P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + ... + a_1 c + a_0 \in \mathbf{R}$ и называется ***значением многочлена*** $P(z)$ при $z = c$.

Теорема 2. Значение многочлена $P(z)$ при $z = c$ равно остатку от деления $P(z)$ на $(z-c)$.

Доказательство. По теореме о делении с остатком $P(z) = (z-c)\cdot Q(z) + R(z)$, тогда $P(c) = \underbrace{(c-c)}_{0}\cdot Q(c) + R(c) \Rightarrow P(c) = R(c)$. Что и требовалось доказать.

Определение 6. Уравнение $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0, a_n \neq 0$ где $n \in \mathbf{Z}$ называется ***алгебраическим уравнением*** n-ой степени.

Корнем многочлена называется такое число z_0, при котором многочлен обращается в ноль $f(z_0) = 0$.

Следствие 1.2. Число $z_0 \in \mathbf{R}$ является корнем многочлена $P(z)$ тогда и только тогда, когда $z - z_0$ делит $P(z)$ без остатка.

Доказательство.

Пусть z_0 – корень многочлена $P(z)$, тогда $P(z_0) = 0$. По теореме 2 $P(z_0) = R(z_0)$, т.е. $R(z_0) = 0$ т.е. $z - z_0$ делит $P(z)$ без остатка.

Пусть теперь $z - z_0$ делит $P(z)$ без остатка, т.е. $R(z_0) = 0$. По теореме 2 $R(z_0) = P(z_0)$, а значит $P(z_0) = 0$ и z_0 - корень многочлена $P(z)$ по определению.

Следствие доказано.

Это следствие часто называют *теоремой Безу*.

Если z_0 – корень многочлена $P(z)$, то $P(z)$ может делиться и на $(z-z_0)^k, k>1$. Пусть k – такое число, что $P(z)=(z-z_0)^k Q(z)$, где многочлен $Q(z)$ не делится на $(z-z_0)$ без остатка. В этом случае говорят, что z_0 – корень кратности k многочлена $P(z)$. Если $k=1$, то z_0 называют простым корнем.

Теорема 3 (***Основная теорема алгебры***).

Пусть $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z + a_0$, $\deg P \geq 1$ многочлен с комплексными коэффициентами. Тогда $P(z)$ имеет хотя бы один комплексный корень.

Пусть многочлен $P(z)$ имеет корень z_1 кратности k_1, тогда $P(z)=(z-z_1)^{k_1}\cdot Q_{n-k_1}(z)$. Согласно теореме 3 $Q_{n-k_1}(z)$ имеет хотя бы один комплексный корень, например z_2 кратности k_2, т.е. $P(z)=(z-z_1)^{k_1}\cdot(z-z_2)^{k_2}\cdot Q_{n-k_1-k_2}(z)$.

Таким образом, если $z_1, z_2, ..., z_m$ – корни многочлена $P(z)$ (действительные или комплексные) кратностей $k_1, k_2, ..., k_m$, $k_1+k_2+...+k_m=n$, то многочлен $P(z)$ можно представить в виде $P(z)=(z-z_1)^{k_1}\cdot(z-z_2)^{k_2}\cdot ...\cdot(z-z_m)^{k_m}$

Теорема 4 (***Теорема Гаусса***). Всякий многочлен $P(z)$ степени n имеет ровно n корней (действительных или комплексных) взятых с учетом их кратностей.

Теорема 5. Пусть многочлен $P(z)$ – многочлен с <u>действительными коэффициентами</u>. Если комплексное число z_0 является корнем многочлена $P(z)$, то и сопряженное к нему число $\bar{z}_0$ также является корнем многочлена $P(z)$.

Доказательство. Пусть $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z + a_0$ – многочлен с действительными коэффициентами и z_0 – комплексный корень. Тогда

$$P(z_0)=a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1}+...+a_1 z_0 + a_0 \text{ и } a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1}+...+a_1 z_0 + a_0 = 0$$

По свойству операции сопряжения

$\overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$, но тогда $\overline{P(z_0)} = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0 + a_0} = 0$

Поскольку все $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ – действительные, то $\overline{a_n}, = a_n$, $\overline{a_{n-1}} = a_{n-1}, \ldots,$ $\overline{a_1} = a_1, \overline{a_0} = a_0$.

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0 + a_0} = a_n (\overline{z_0})^n + a_{n-1} (\overline{z_0})^{n-1} + ... + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$$

$$a_n (\overline{z_0})^n + a_{n-1} (\overline{z_0})^{n-1} + ... + a_1 \overline{z_0} + a_0 = P(\overline{z_0}) = 0$$

Из последнего равенства следует, что $\overline{z_0}$ – корень многочлена $P(z)$. Теорема доказана.

Отсюда следует, что многочлен с вещественными (действительными) коэффициентами всегда имеет чётное число комплексных (невещественных) корней.

Теорему 5 можно обобщить следующим образом.

Теорема 6. Пусть $P(z)$ – многочлен с <u>действительными коэффициентами</u>. Если комплексное число z_0 является корнем кратности k многочлена $P(z)$, то и сопряженное к нему число $\bar{z}_0$ также является корнем кратности k многочлена $P(z)$.

Теорема 7. Если $P(z)$ – многочлен с <u>действительными коэффициентами</u> имеет комплексный корень $z_0 = x_0 + iy_0$, то он делится без остатка на квадратный трехчлен $z^2 + pz + q$, где $p = -2\operatorname{Re} z_0 = -2x_0 \in \mathbf{R}$, $q = x_0^2 + y_0^2 \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ – корень многочлена $P(z)$, тогда по теореме 5, $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ – также корень $P(z)$. Т.е. $P(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$. Преобразуем последнее выражение

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - z\overline{z_0} - zz_0 + z_0\overline{z_0} = z^2 - z(\overline{z_0} + z_0) + z_0\overline{z_0}$$

$$\overline{z_0} + z_0 = x_0 - iy_0 + x_0 + iy_0 = 2x_0 = 2\operatorname{Re} z_0$$

$$z_0\overline{z_0} = (x_0 + iy_0)(x_0 - iy_0) = x_0^2 + y_0^2$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители с действительными коэффициентами следующим образом:

$$P(z)=(z-z_1)^{k_1}\cdot(z-z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m}(z^2+p_1z+q_1)^{s_1}\ldots(z^2+p_tz+q_t)^{s_t}$$

Задача 4. Известно, что комплексное число $z_0=2-i$ является корнем многочлена $P(z)=z^4-9z^3+31z^2-49z+30$. Разложить многочлен на линейные множители и на множители с действительными коэффициентами.

Решение.

Поскольку $P(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами, то по теореме 5 число $\overline{z_0}=2+i$ также является его корнем. Тогда многочлен делится на квадратный трехчлен с действительными коэффициентами z^2+pz+q, где $p=-2\operatorname{Re}z_0=-4$, $q=x_0^2+y_0^2=5$, т.е. на многочлен z^2-4z+5.

Поделим многочлен $P(z)$ на квадратный трехчлен z^2-4z+5. Получим $P(z)=(z^2-4z+5)(z^2-5z+6)$. Многочлен $z^2-5z+6=(z-2)(z-3)$.

Таким образом $P(z)=(z^2-4z+5)(z-2)(z-3)$ – разложение на множители с действительными коэффициентами.

$P(z)=(z-(2+i))(z-(2-i))(z-2)(z-3)$ – разложение на линейные множители.

Теорема 8. (***теорема о рациональном корне***). Пусть $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ является его корнем, то p – является делителем a_0, q – является делителем a_n.

Задача 5. Указать корни многочлена $P(z)=z^3-4z^2+z+6$, пользуясь теоремой 8.

Решение.

Найдем делители $a_0=-6$

d: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

Найдем делители $a_n=1$

d: ±1

Таким образом, корнями могут быть числа $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.

$P(1)\neq0$, $P(-1)=0\Rightarrow -1$– корень многочлена $P(z)$

$P(2)=0\Rightarrow 2$ – корень многочлена $P(z)$, $P(-2)\neq0$

$P(3)=0\Rightarrow 3$ – корень многочлена $P(z)$, $P(-3)\neq0$

$P(6)\neq0$, $P(-6)\neq0$.

Ответ. –1,2,3 – корни многочлена $P(z)=z^3-4z^2+z+6$.