Математический анализ, 2 семестр

Лекция 9

9.4. Приложения двойного и тройного интеграла

9.4.1. Геометрические приложения двойного интеграла.

1. Площадь плоской фигуры (рис. 9.1)

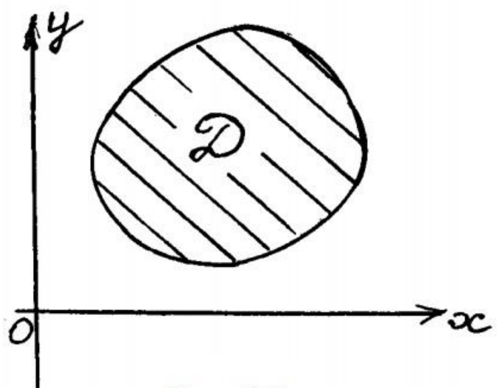

Рис. 9.1.

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

2. Объем цилиндрического тела (рис. 9.2)

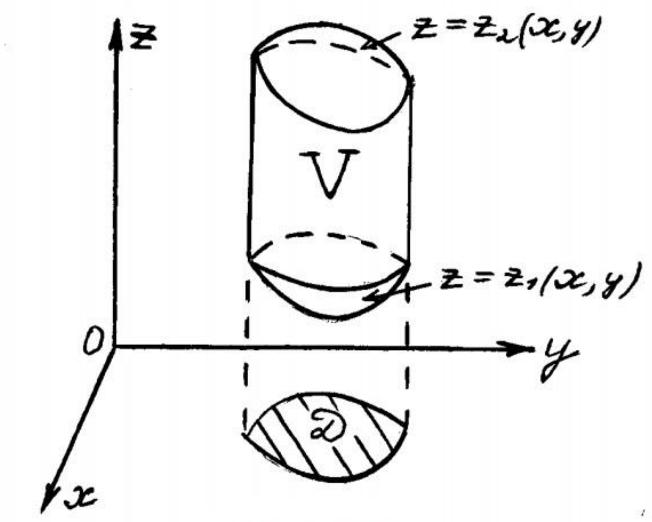

Рис. 9.2.

$$V = \iint\limits_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))dxdy$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 2x + 3$ (рис. 9.3)

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-1}^{3} dx \int\limits_{x^2}^{2x+3} dy = \int\limits_{-1}^{3} y\Big|_{x^2}^{2x+3} dx = \int\limits_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2) dx =$$

$$= \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = (9 + 9 - 9) - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

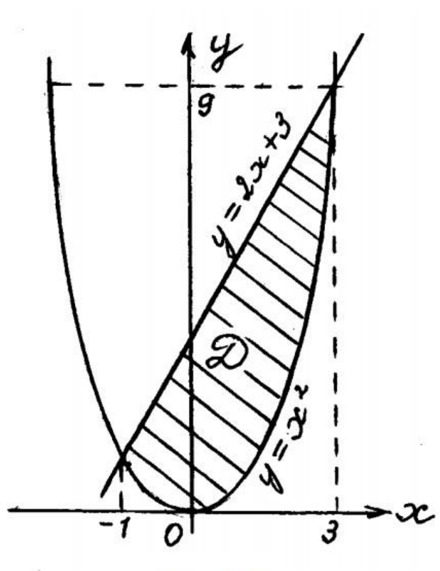

Рис. 9.3.

Пример 2. Вычислить площадь области, ограниченной графиками функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

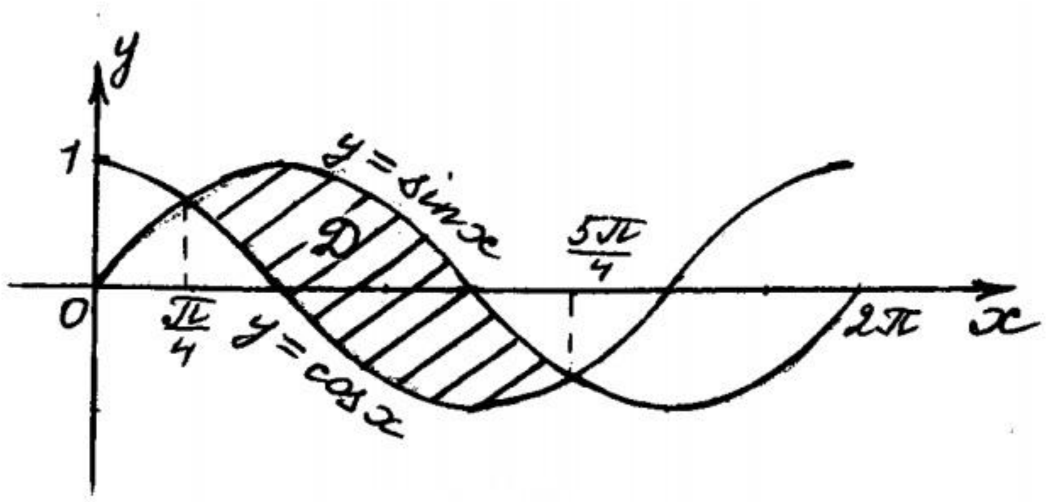

Рис. 9.4.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} dy =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)dx =$$

$$= (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ (рис. 9.5).

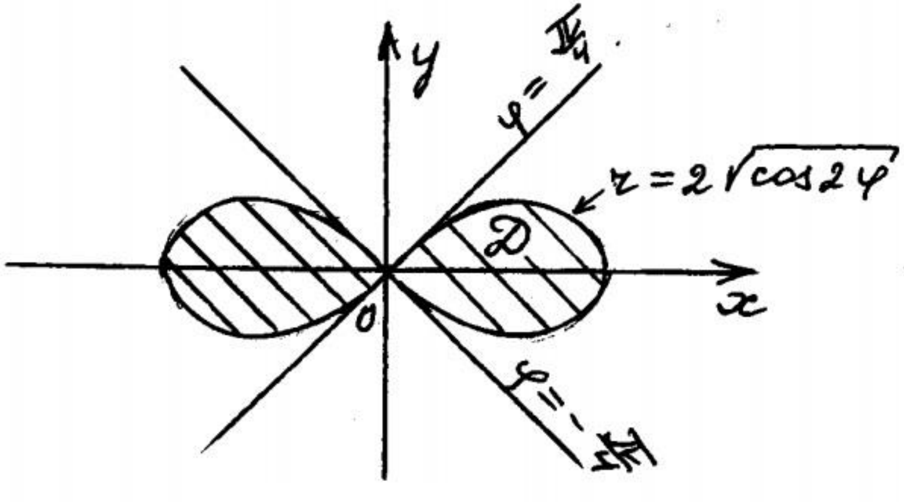

Рис. 9.5.

$$S = \iint\limits_D dxdy = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} rdr =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi \, d\varphi = 2\sin 2\varphi|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 4$$

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $z = 0$, $y + z = 4$ (рис. 9.6).

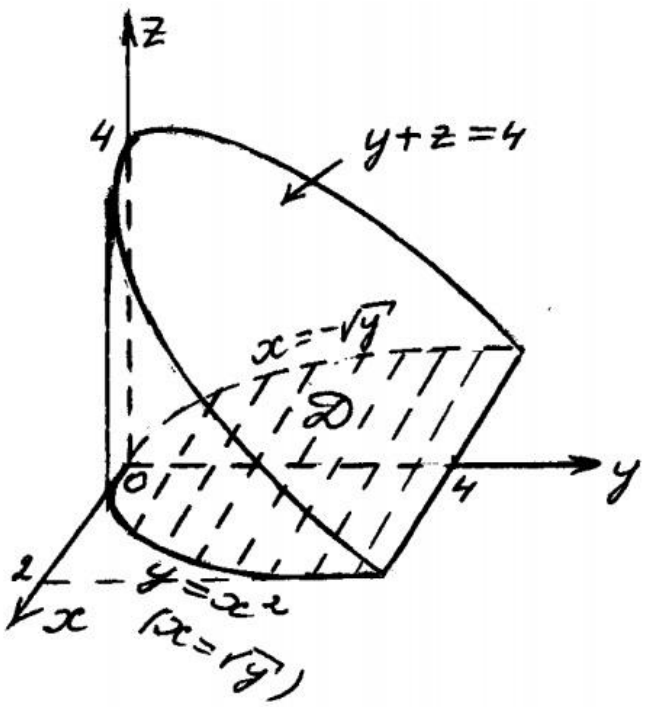

Рис. 9.6.

$$V = \iint_D z(x,y)dxdy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4-y)dx =$$

$$= \int_0^4 (4-y)x\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 (4-y)2\sqrt{y}dy =$$

$$= \int_0^4 \left(8\sqrt{y} - 2y\sqrt{y}\right)dy =$$

$$= \left(8 \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^4 = 8 \cdot \frac{16}{3} - 32 \cdot \frac{4}{5} = \frac{256}{15}$$

Пример 5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 1 + x^2 + y^2$, $z = 3 - x^2 - y^2$ (рис. 9.7).

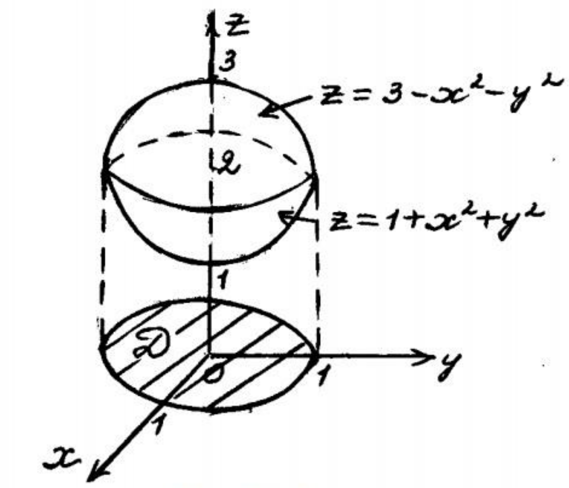

Рис. 9.7.

$$D: 1 + x^2 + y^2 = 3 - x^2 - y^2, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

$$V = \iint_D \big(z_2(x,y) - z_1(x,y)\big)dxdy =$$

$$= \iint_D \big(3 - x^2 - y^2 - (1 + x^2 + y^2)\big)dxdy =$$

$$= 2\iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2)rdr =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 (r - r^3)dr = 4\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$$

Пример 6. Вычислить объем области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4 \\ z^2 \ge x^2+y^2 \end{cases}$$

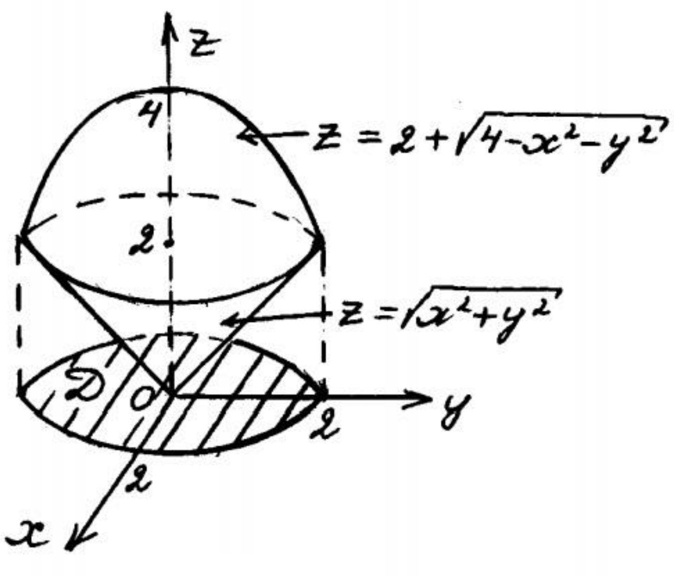

Рис. 9.8.

Поверхности пересекаются при $z=2$:

$$x^2+y^2=4$$

$$V=\iint\limits_D \big(z_2(x,y)-z_1(x,y)\big)dxdy=$$

$$=\iint\limits_D \left(2+\sqrt{4-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (2+\sqrt{4-r^2}-r)rdr=$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2 + \sqrt{4 - r^2} - r) r dr =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^2 (2r - r^2) dr + \int_0^2 \sqrt{4 - r^2} \cdot r dr \right) = 2\pi \left(\left(r^2 - \frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{4 - r^2} d(4 - r^2) \right) = 2\pi \left(4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (4 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^2 \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) = 8\pi$$

9.4.2. Механические приложения двойного интеграла.

Если область D расположена на плоскости xOy, и по области распределена масса так, что плотность ρ в каждой точке $M(x, y)$, принадлежащей области D, известна как функция координат точки:

$$\rho = \rho(x, y)$$

то масса области (пластины) вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy$$

Статические моменты пластины относительно координатных осей Ox и Oy соответственно равны

$$m_x = \iint\limits_D y\rho(x, y)dxdy, \quad m_y = \iint\limits_D x\rho(x, y)dxdy$$

а координаты центра масс C пластины вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{m_y}{m}, y_c = \frac{m_x}{m}$$

Моменты инерции пластины относительно координатных осей Ox и Oy и момент инерции относительно начала координат также вычисляются с помощью двойного интеграла:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) dxdy$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y) dxdy$$

$$I_o = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy = I_x + I_y$$

Заметим, что, моменты инерции пластины относительно начала координат I_o и относительно оси Oz I_z совпадают: $I_z = I_o = I_x + I_y$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить координаты центра масс однородной пластины ($\rho(x, y) = 1$) ограниченной параболой $y = 2x^2$ и прямой $y = 2$ (рис. 9.9).

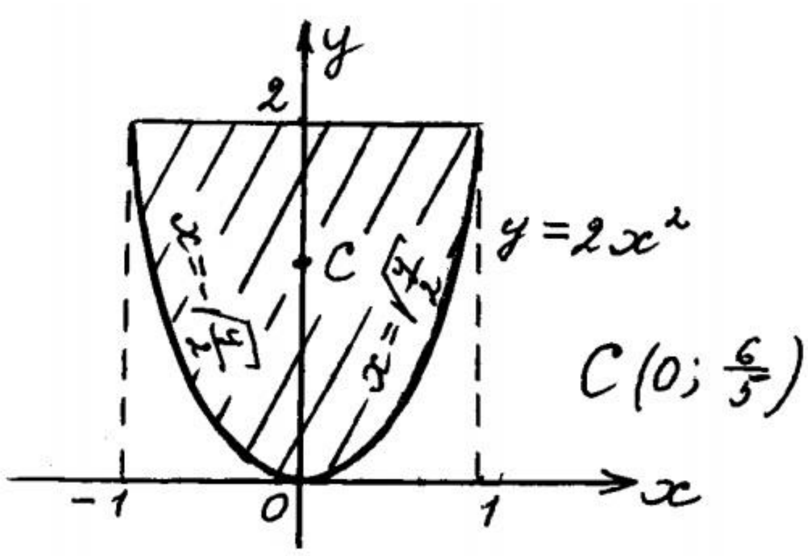

Рис. 9.9.

Вычислить также момент инерции этой пластины относительно координатных осей и относительно начала координат.

$$m = S = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)dx = \left(2x - 2 \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

В силу симметрии относительно оси *Oy* и однородности пластины, абсцисса центра масс $x_c = 0$. Для определения ординаты центра масс вычислим статический момент относительно оси *Ox*:

$$m_x = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} y\,dx = \int_0^2 yx\Big|_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} dy = \int_0^2 y \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{y}{2}}\,dy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^2 y^{\frac{3}{2}}dy = \sqrt{2}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^2 = \sqrt{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} = \frac{16}{5}$$

$$y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{16}{5}\cdot\frac{3}{8} = \frac{6}{5},\ \ C\left(0;\frac{6}{5}\right)$$

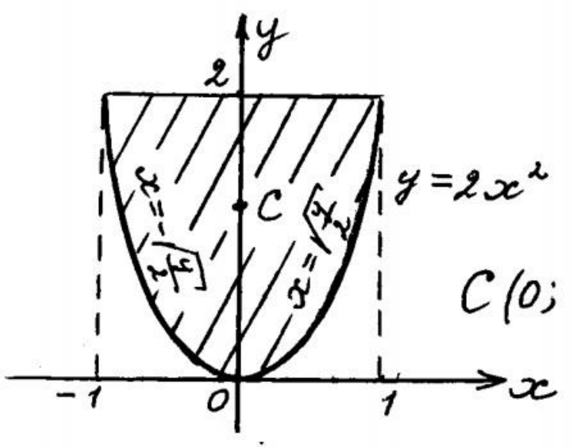

Рис. 9.9.

Вычислим моменты инерции относительно осей координат и относительно начала координат:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} y^2 dx = \int\limits_0^2 y^2\sqrt{2y}dy = \left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot y^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{7}$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 dxdy = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{2x^2}^2 x^2 dy = \int\limits_{-1}^1 x^2 y|_{2x^2}^2 dx = \int\limits_{-1}^1 x^2(2-2x^2)dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^1 = \frac{8}{15}$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{32}{7} + \frac{8}{15} = \frac{536}{105}$$

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородной пластины ($\rho(x,y)=1$), ограниченной кардиоидой $r=1+\cos\varphi$ (рис. 9.10).

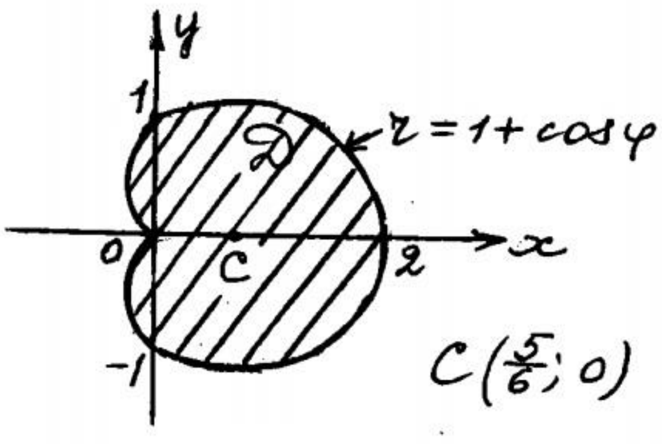

Рис. 9.10.

Т.к. кардиоида симметрична относительно оси Ox и пластина однородна, ее центр масс находится на оси Ox ($y_c=0$). Вычислим массу пластины:

$$m=S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{1+\cos\varphi}rdr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1+\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{3\pi}{2}$$

Вычислим статический момент пластины относительно оси Oy:

$$m_y = \iint\limits_D x dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} r\cos\varphi\, r dr = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,(1 + 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + \cos^3\varphi) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) = \left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

$$m_y = \frac{1}{3}\left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$$

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{5\pi}{4}\cdot\frac{2}{3\pi} = \frac{5}{6}, \qquad C\left(\frac{5}{6};0\right)$$

Пример 3. Вычислить координаты центра масс однородной пластины ($\rho(x, y) = 1$), ограниченной дугой эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

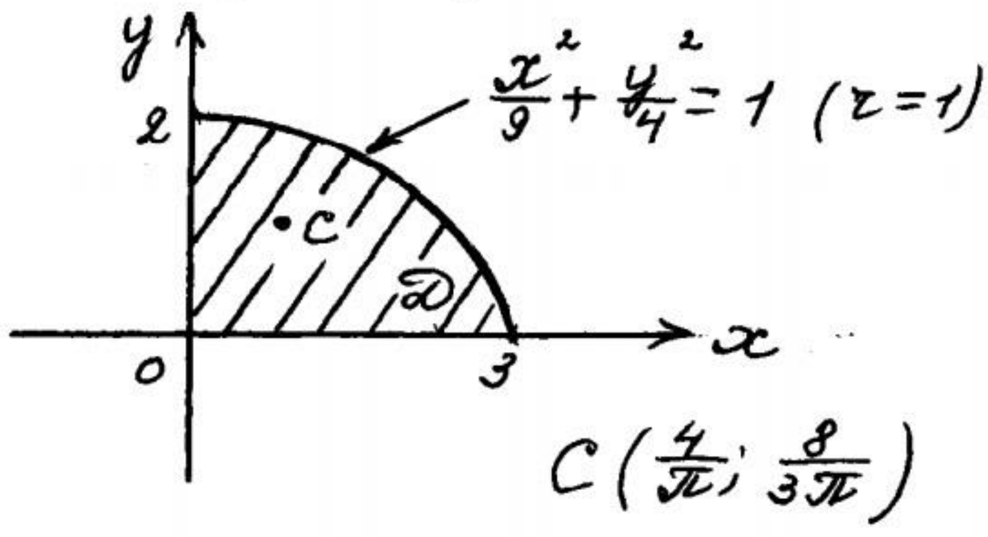

Рис. 9.11.

и осями координат (область расположена в первой четверти, рис. 9.11). Вычислить также моменты инерции пластины относительно осей *Ox*, *Oy* и относительно начала координат.

Воспользуемся обобщенными полярными координатами:

$$x = 3r\cos\varphi\,, y = 2r\sin\varphi\,, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Якобиан этого отображения $I = 6r$.

Уравнение эллипса в этих координатах имеет наиболее простой вид:

$r = 1.$

$$m = S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 6rdr = \frac{3\pi}{2}$$

$$m_x = \iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 2r\sin\varphi \cdot 6rdr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 12r^2dr = 4$$

$$m_y = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 3r\cos\varphi \cdot 6rdr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 18r^2dr = 6$$

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{4}{\pi}, \qquad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{8}{3\pi}, \qquad C\left(\frac{4}{\pi}; \frac{8}{3\pi}\right)$$

$$I_x = \iint\limits_D y^2 dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 4r^2 \sin^2\varphi \cdot 6r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^1 24r^3 dr = \frac{3\pi}{2}$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 9r^2 \cos^2\varphi \cdot 6r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^1 54r^3 dr$$

$$= \frac{27\pi}{8}$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{3\pi}{2} + \frac{27\pi}{8} = \frac{39\pi}{8}$$

Пример 4. Вычислить координаты центра масс пластины, ограниченной окружностью

$$(x-1)^2+y^2=1$$

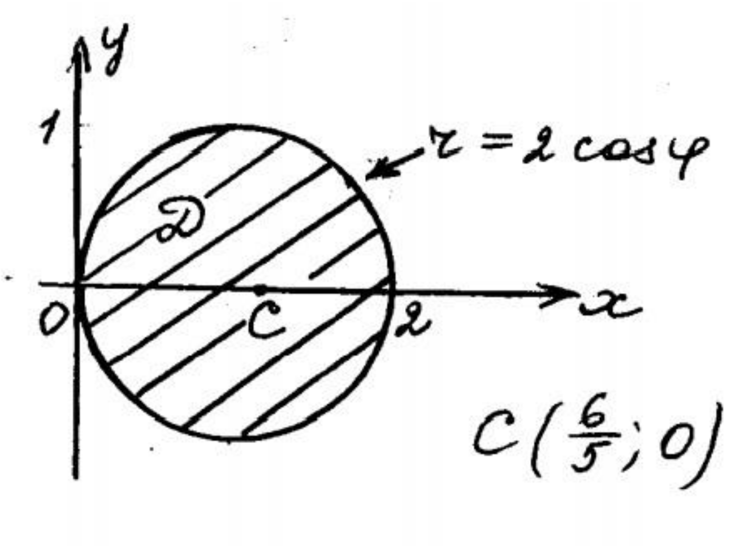

Рис. 9.12.

если плотность пластины в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до начала координат (рис. 9.12)

$$\rho(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$$

где k – коэффициент пропорциональности. Воспользуемся полярными координатами и запишем уравнение окружности в полярных координатах:

$$x^2-2x+1+y^2=1$$

$$x^2+y^2=2x,\quad r^2=2r\cos\varphi,\quad r=2\cos\varphi,\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} kr\cdot rdr=$$

$$=k\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi=\frac{k}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3\varphi\, d\varphi=\frac{8k}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)=$$

$$=\frac{8k}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32k}{9}$$

Центр масс пластины принадлежит оси *Ox*, т.к. область симметрична относительно этой оси и функция $\rho(x,y)$ является четной относительно переменной *y* ($y_c=0$).

$$m_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi \cdot kr \cdot rdr =$$

$$= k \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 4k \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi \, d\varphi =$$

$$= 4k \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)^2 d(\sin\varphi)$$

$$= [t = \sin\varphi] = 4k \int\limits_{-1}^{1} (1-2t^2+t^4)dt = 4k\left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{64k}{15}$$

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{64k}{15} : \frac{32k}{9} = \frac{6}{5}, \quad C\left(\frac{6}{5}, 0\right)$$

9.4.3. Геометрические приложения тройного интеграла.

Объем тела *V* равен тройному интегралу по области *V* (рис. 9.13)

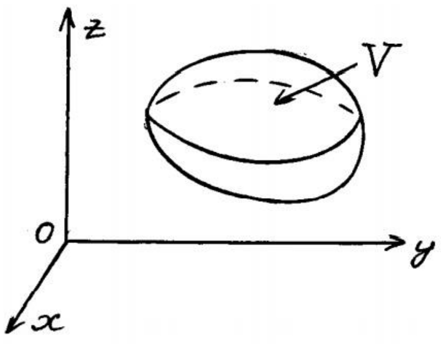

Рис. 9.13.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

При вычислении объемов круглых тел применяют цилиндрические или сферические координаты. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить объем тетраэдра, ограниченного плоскостью $3x + y + 2z = 6$ и координатными плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (рис. 9.14).

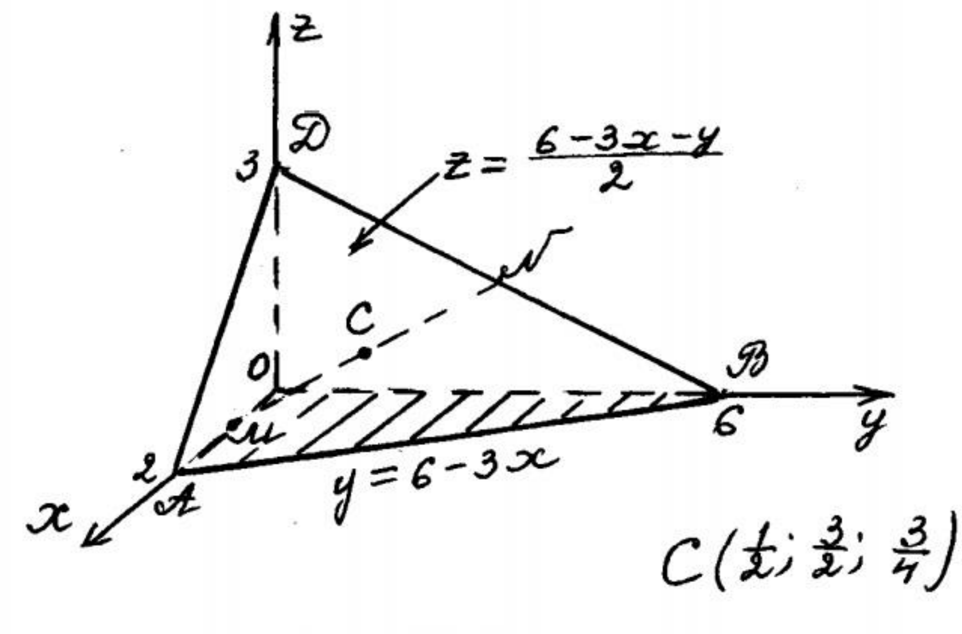

Рис. 9.14.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{6-3x} dy \int_0^{\frac{6-3x-y}{2}} dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{6-3x} \frac{6-3x-y}{2} dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{6-3x} \frac{6-3x-y}{2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{6-3x} \big((6-3x)-y\big)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left((6-3x)y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{6-3x} dx =$$

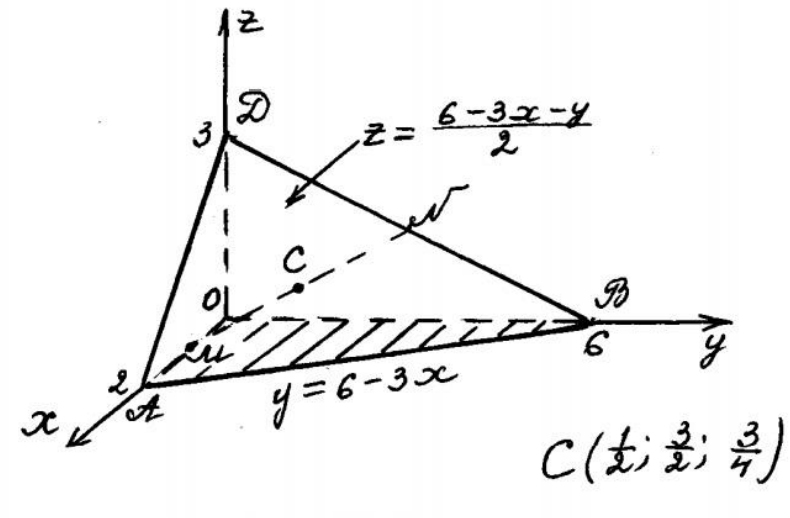

Рис. 9.14.

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{(6-3x)^2}{2} dx = \frac{9}{4}\int\limits_0^2 (x-2)^2\, dx = 6$$

Проверьте результат, пользуясь формулой для вычисления объема тетраэдра:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $2z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 2$ (рис. 9.15).

Воспользуемся цилиндрическими координатами и перепишем уравнение поверхности: $2z = r^2,\ z = \frac{r^2}{2}$.

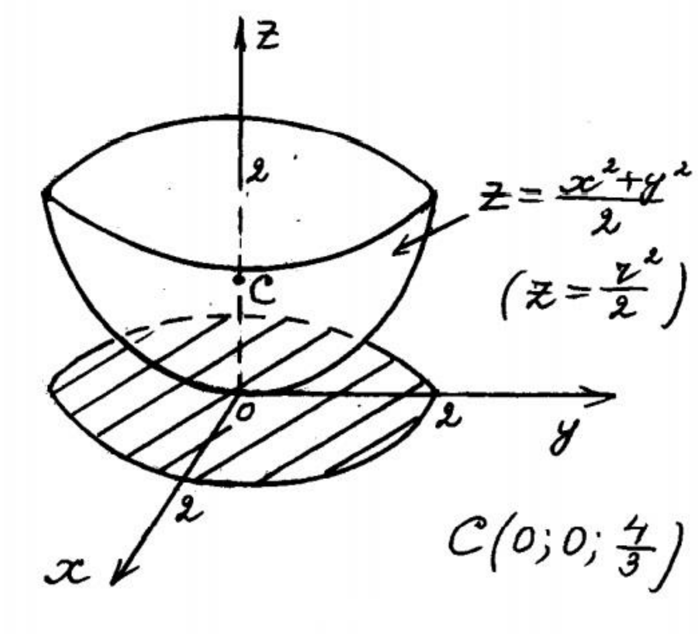

Рис. 9.15.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{2} rdz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 rz\Big|_{r^2/2}^{2} dr = 2\pi \int_0^2 r\left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{8}\right)\Bigg|_0^2 = 4\pi$$

Пример 3. Вычислить объем полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ (рис. 9.16)

Воспользуемся сферическими координатами r, φ, θ:

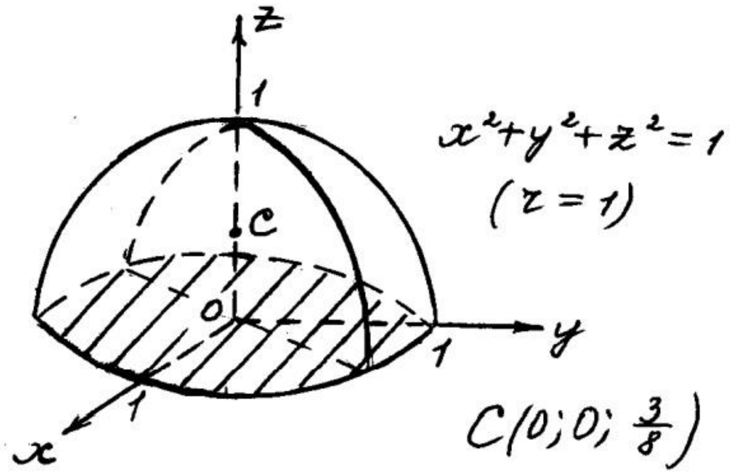

Рис. 9.16.

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq r \leq 1, \qquad I = r^2 \cos\theta$$

$$V = \iiint\limits_V dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 r^2 \cos\theta \, dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \int\limits_0^1 r^2 dr =$$

$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

9.4.4. Механические приложения тройного интеграла.

Тройной интеграл применяется для вычисления массы и координат центра масс трехмерного тела, а также для вычисления моментов инерции и других физических величин. Если $\rho(x,y,z)$ – плотность тела, заполняющего область V трехмерного пространства, то масса тела m равна:

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$$

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей yOz, xOz и xOy вычисляются соответственно по формулам:

$$m_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$m_{xz} = \iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz$$

$$m_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz$$

а координаты центра масс тела равны:

$$x_c = \frac{m_{yz}}{m}, \qquad y_c = \frac{m_{xz}}{m}, \qquad z_c = \frac{m_{xy}}{m}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить координаты центра масс однородного тетраэдра, ограниченного плоскостями $3x + y + 2z = 6, x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (рис. 9.14).

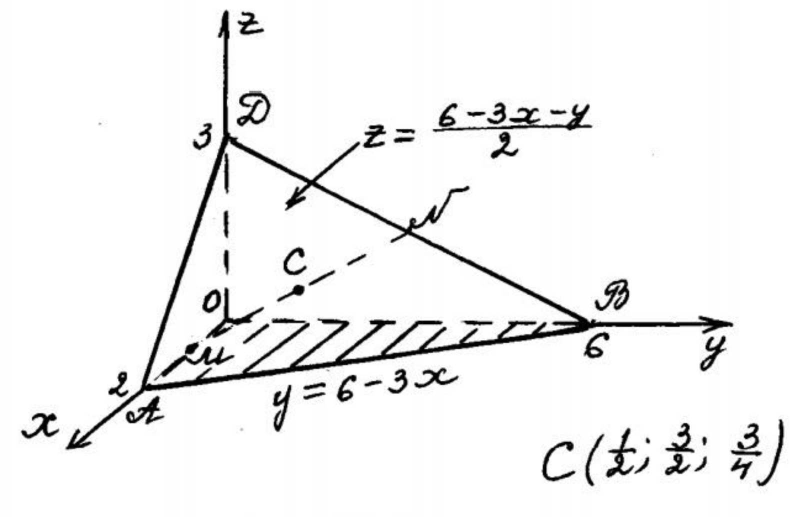

Рис. 9.14.

Значение постоянной плотности ρ не влияет на положение центра масс тела, поэтому будем считать $\rho = 1$. Тогда $m = V = 6$. Вычислим m_{yz}:

$$m_{yz} = \iiint\limits_V x dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{6-3x} dy \int_0^{\frac{6-3x-y}{2}} x dz = \frac{9}{4}\int_0^2 x(x-2)^2\, dx =$$

$$= \frac{9}{4}\int_0^2 x(x-2)^2\,dx = \frac{9}{4}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^2 = 3$$

$$x_c = \frac{m_{yz}}{m} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Проверьте самостоятельно:

$$m_{xz} = 9, m_{xy} = \frac{9}{2},\ y_c = \frac{m_{xz}}{m} = \frac{3}{2},\ z_c = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{3}{4}, \qquad C\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

Как известно, центр масс однородного тетраэдра совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины противоположных ребер тетраэдра.

Пусть M – середина ребра AO, N – середина ребра BD. $M(1;0;0), N\left(0{,}3,\frac{3}{2}\right), C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$. Результат, полученный интегрированием, совпадает с результатом, полученным геометрическим способом.

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородного тела ($\rho = 1$), ограниченного поверхностью $2z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 2$ (рис. 9.15). Вычислить также момент инерции тела относительно оси *Oz*.

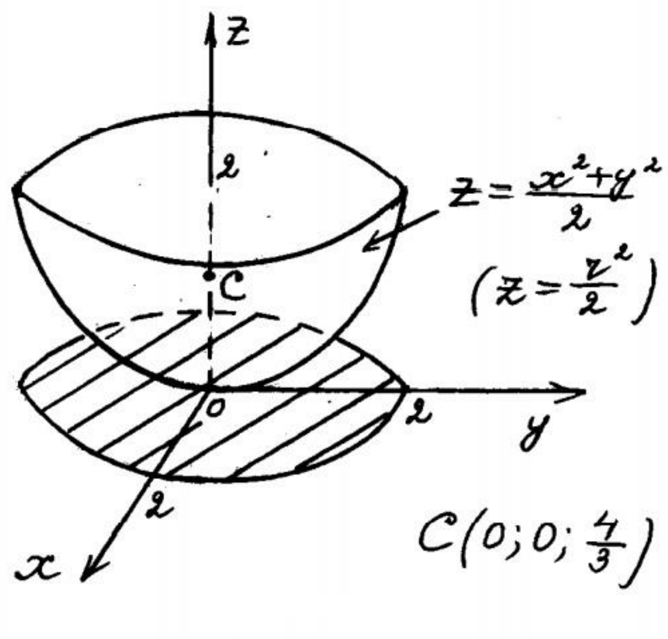

Рис. 9.15.

$$m = V = 4\pi$$

$$m_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 zrdz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr = 2\pi \int_0^2 \left(2r - \frac{r^5}{8}\right)dr = 2\pi\left(r^2 - \frac{r^6}{48}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{3}$$

$$z_c = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{16\pi}{3} : 4\pi = \frac{4}{3}$$

В силу однородности тела и его симметрии относительно оси *Oz*, центр масс *C* лежит на оси *Oz*.

$$C\left(0; 0; \frac{4}{3}\right)$$

Момент инерции тела, относительно оси *Oz* вычисляется по формуле:

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 \cdot rdz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 r^3 z\Big|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr = 2\pi \int\limits_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = 2\pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{3}$$

Пример 3. Вычислить координаты центра масс однородного полушара:

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 1, \rho = 1$ (рис. 9.16).

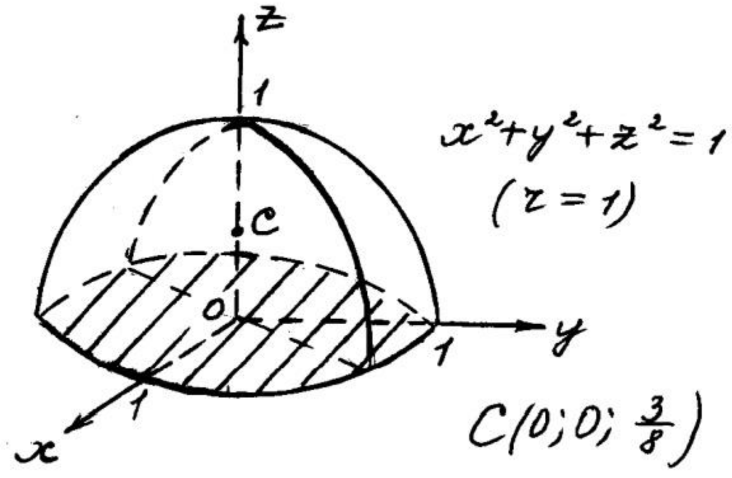

Рис. 9.16.

Вычислить также момент инерции полушара относительно оси *Oz*.

Воспользуемся сферическими координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}, \qquad I = r^2\cos\theta,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$$

Т.к. в силу симметрии и однородности тела центр масс лежит на оси *Oz*, вычислим m_{xy}:

$$m_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 r\sin\theta\, r^2\cos\theta\, dr =$$

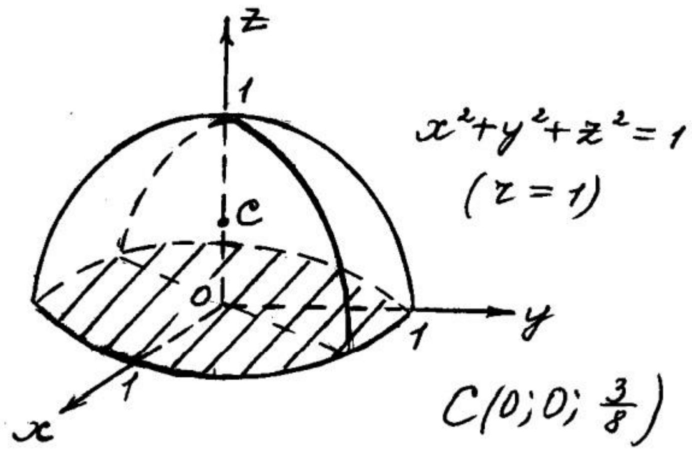

Рис. 9.16.

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int\limits_0^1 r^3 dr = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$z_C = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{\pi}{4} : \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{8}, \qquad C\left(0{,}0,\frac{3}{8}\right)$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

Выразим подынтегральную функцию через сферические координаты:

$$x^2 + y^2 = (r\cos\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\varphi\cos\theta)^2 = r^2\cos^2\theta$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2\cos^2\theta \cdot r^2\cos\theta\, dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta \int_0^1 r^4 dr =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta) d(\sin\theta) = \frac{2\pi}{5}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{15}$$

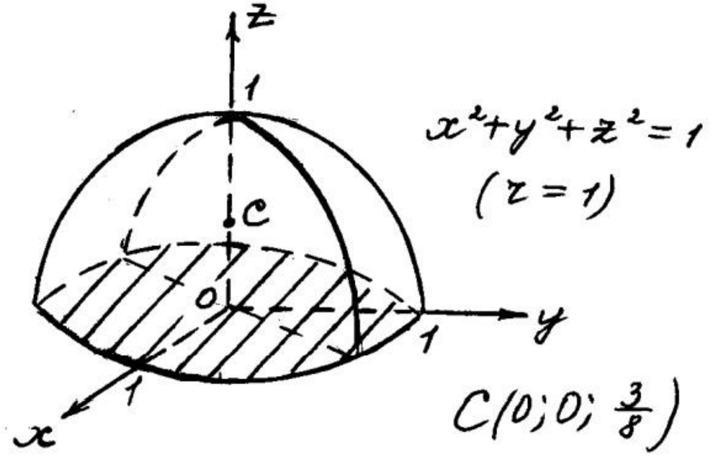

Рис. 9.16.