АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0$, (*)

где не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю.

Если поверхность невырожденная, то существует преобразование декартовой прямоугольной системы координат такое, что уравнение (*) может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых каноническими и определяющих следующие типы поверхностей:

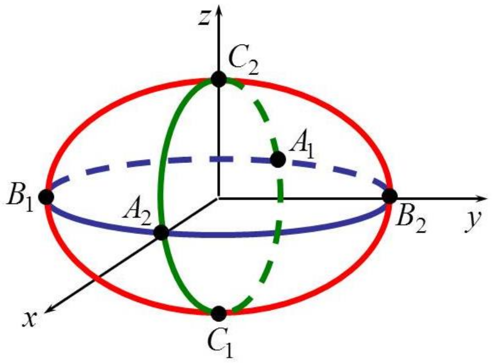
1) **Эллипсоид**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

В частном случае, если a=b=c=r, уравнение примет вид

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

Это уравнение задает сферу радиуса R с центром в начале координат.



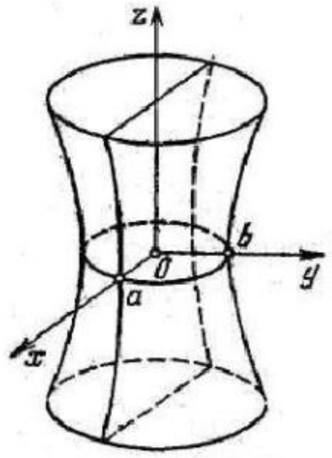
При сечении эллипсоида одной из координатных плоскостей (z=0 или x=0 или y=0) получается эллипс. Например, при z=0

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2) Гиперболоид

А) Однополостный

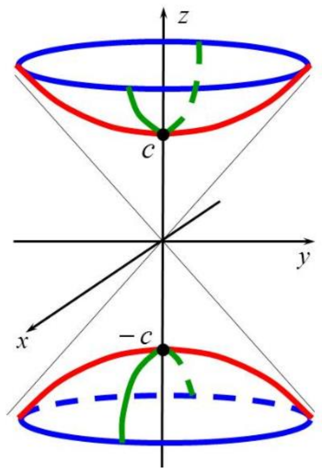
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



При пересечении однополостного гиперболоида плоскостью z=0 получается эллипс, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

А при пересечении однополостного гиперболоида одной из плоскостей x=0 или y=0 – гиперболы



$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ соответственно.}$$

<u>Б) Двуполостный</u>

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Двуполостный гиперболоид не имеет пересечений с плоскостью XOY, т.к. при z=0 уравнение

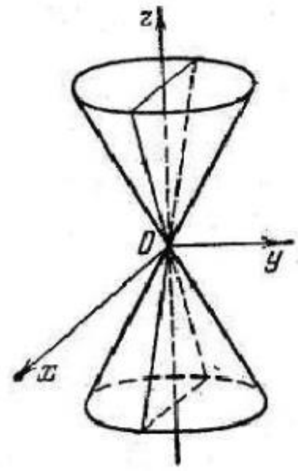
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

не имеет решение на множестве действительных чисел.

При пересечении двуполостного гиперболоида одной из плоскостей x=0 или y=0 получаются гиперболы. Заметим, что они являются сопряженными гиперболами к тем, которые получены в пункте А).

<u>3) Конус второго порядка</u>:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



Для получения пересечения конуса с плоскостью XOY подставим в уравнение конуса z=0:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

Решением этого уравнения является точка O(0;0;0).

При пересечении конуса с плоскостями z=$\pm$c получаем эллипсы.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ =1;

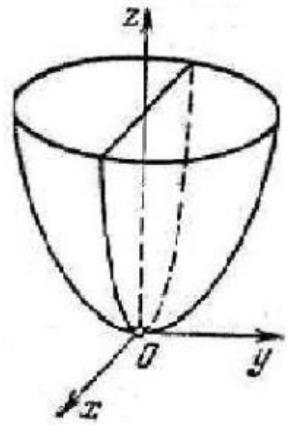
Пересечением конуса с координатной плоскостью YOZ является пара прямых:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 => \left[\begin{aligned} z&=\frac{c}{b}y \\ z&=-\frac{c}{b}y \end{aligned}\right.$$

Аналогично, получается пара пересекающихся прямых при y=0 в плоскости XOZ.

<u>4) Параболоид</u>

А) Эллиптический: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z,$



Сечение эллиптического параболоида плоскостью y=0 приводит к уравнению параболы

$$\frac{x^2}{a^2} = z$$

Это парабола в плоскости XOZ, ветви которой направлены вверх.

В плоскости YOZ аналогично:

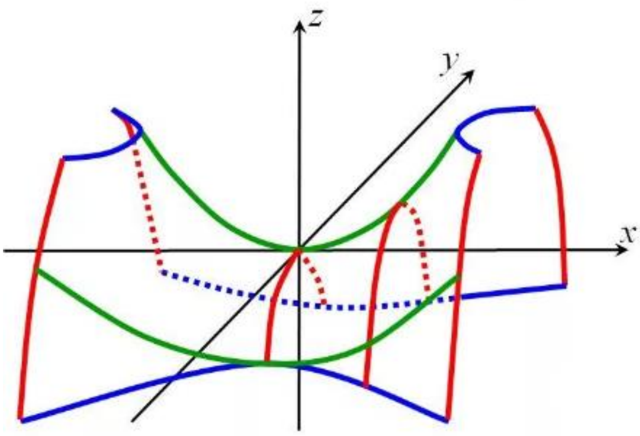
$$\frac{y^2}{b^2} = z$$

Б) Гиперболический: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.

В случае гиперболического параболоида пересечение поверхностей с координатными плоскостями являются параболы:

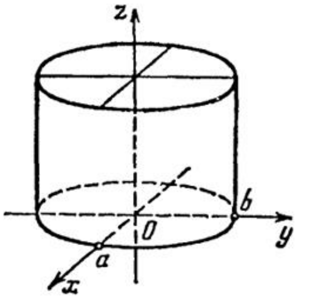
$\frac{x^2}{a^2} = z$ в плоскости XOZ $(y = 0)$ и $-\frac{y^2}{b^2} = z$ в плоскости YOZ $(x = 0)$.

Кроме того, пересечением поверхности с горизонтальной плоскостью z=const является гипербола.

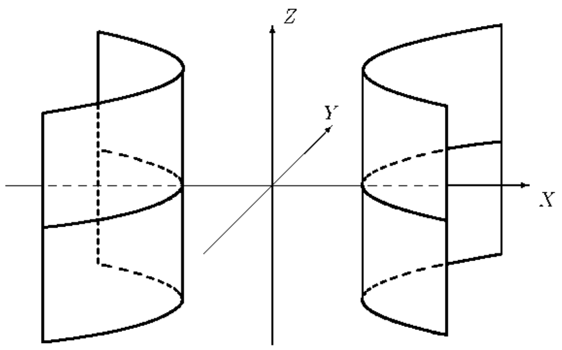


5) Цилиндр второго порядка

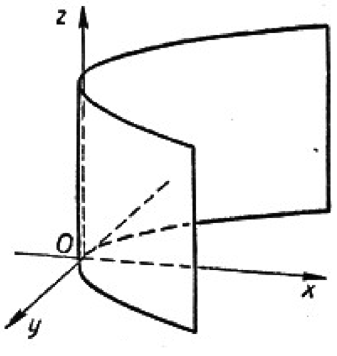
А) Эллиптический: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Б) Гиперболический: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



В) Параболический: $y^2=2px\ (p>0)$



Рассматриваются еще, так называемые, вырожденные поверхности:

мнимый эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$,

мнимый конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$,

мнимый эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

пара мнимых пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$,

пара пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$,
пара параллельных плоскостей: $x^2 - a^2 = 0$,
пара мнимых параллельных плоскостей: $x^2 + a^2 = 0$,
пара совпавших плоскостей: $x^2 = 0$,

<u>Задача 1:</u>
Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$25x^2 - 50x - 100y^2 - 4z^2 - 75 = 0$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду. Сделать чертеж. Найти сечения поверхности плоскостями:

а) $y = 0$;
б)$x = 7$.

<u>Решение:</u>
Приведем уравнение поверхности к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат:
$25x^2 - 50x - 100y^2 - 4z^2 - 75 = 0$,
$25(x^2 - 2x + 1) - 100y^2 - 4z^2 - 100 = 0$,
$25(x-1)^2 - 100y^2 - 4z^2 = 100$.

Разделив обе части уравнения на свободный член, получим уравнение двуполостного гиперболоида:

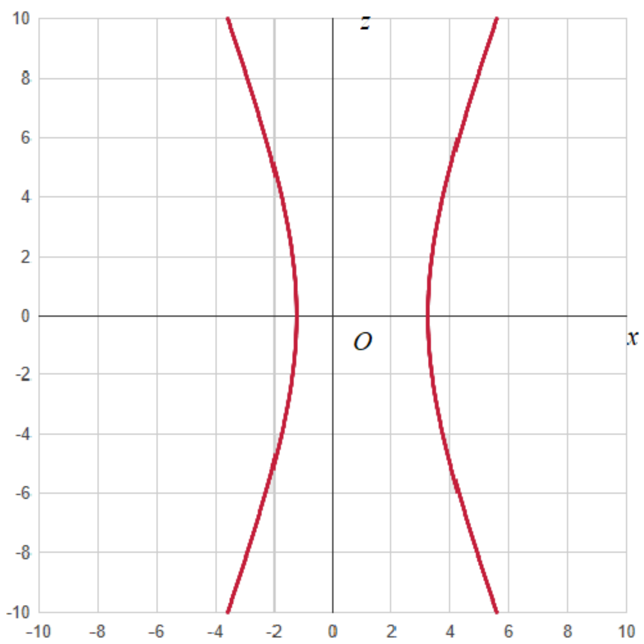
$$\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{25} = 1 \qquad (1)$$

Найдем координаты вершин.
Заметим, что $y^2 + \frac{z^2}{25} = \frac{(x-1)^2}{4} - 1$, следовательно,
при $y = z = 0$, $\frac{(x-1)^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$,
то есть вершины гиперболы имеют координаты: (3;0;0) и (–1;0;0).

Для того чтобы построить чертеж поверхности, сначала надо построить сечения.
а) *y=0*, тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1.$$

Значит, плоскость *y=0* пересекает гиперболоид, и линией пересечения является гипербола в плоскости *XOZ* с центром в точке $x_0=1$ и $z_0=0$ и полуосями $a=2$ и $b=5$; асимптоты гиперболы: $z = \pm\frac{5}{2}(x-1)$.
Сделаем чертеж гиперболы:



б) пересечение поверхности с плоскостью x=7 определяется уравнением:

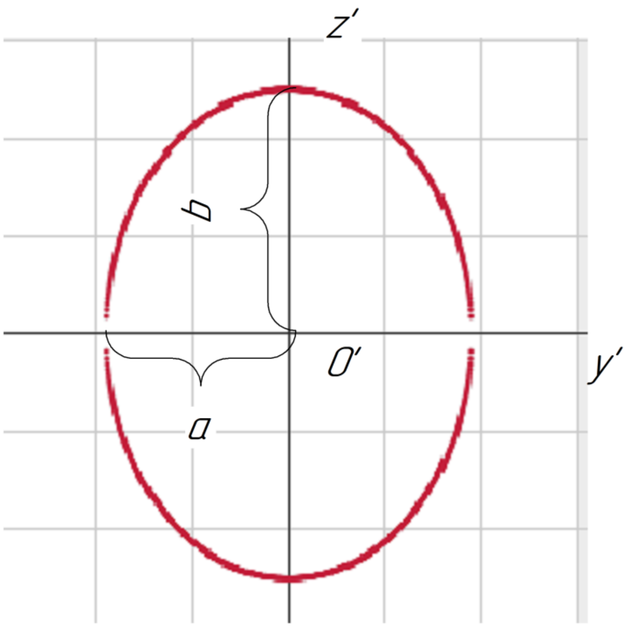
$$y^2 + \frac{z^2}{25} = 8,$$

что равносильно уравнению эллипса

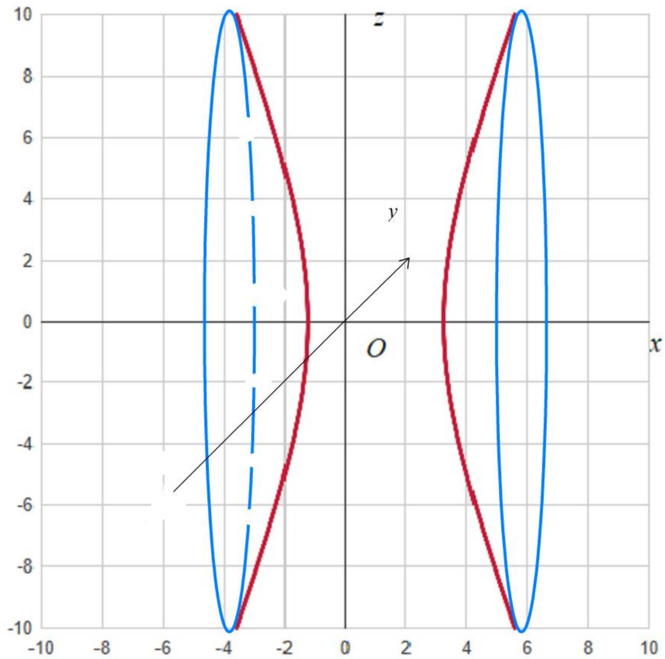
$$\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{200} = 1$$

с полуосями $a = 2\sqrt{2}$ и $b = 10\sqrt{2}$и центром в точке *(7;0;0)* на плоскости, параллельной YOZ .

Проведем в плоскости x=7 оси $O'Y'$и $O''Z'$ параллельно осям OYи OZ и построим эллипс:



Теперь сделаем чертеж поверхности:



Задача №2.

Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$x^2 - 9y^2 - 4x - 18y - 9z - 32 = 0$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду. Найти сечение поверхности плоскостями:

а) y = -1;

б) x = 2;

<u>Решение</u>:

$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 9z - 32 = 0$

$(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 - 9z - 27 = 0$

$(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 = 9(z + 3)$

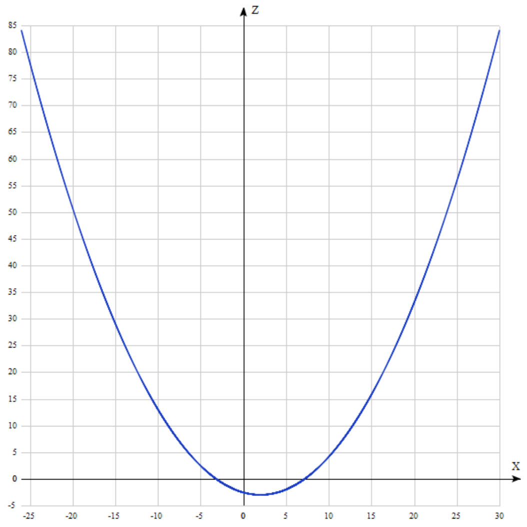
$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{1} = z + 3$ - гиперболический параболоид

а) y = -1 $\Longrightarrow$ $\frac{(x-2)^2}{9} = z + 3$ - уравнение параболы

б) x = 2 $\Longrightarrow$ $-\frac{(y+1)^2}{1} = z + 3$ - уравнение параболы а) Координаты вершины

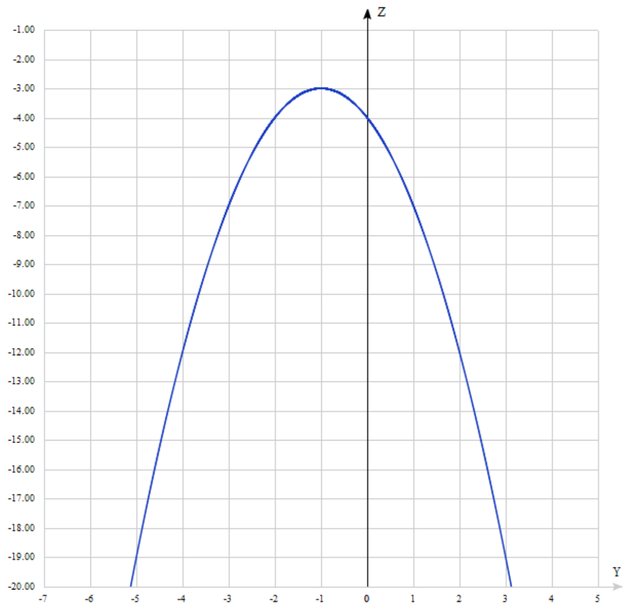
0 (-2; -1; -3)

z = $\frac{(x-2)^2}{9} - 3$



Z = 0 $\Longrightarrow$ $(x-2)^2$ = 27 $\Longrightarrow$ x = 2 $\pm 3\sqrt{3}$ - координаты точек пересечения с осью OX

б) Z = - $(y+1)^2$ – 3



Задача №3. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$

Решение: запишем параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = -3t \\ z = -2+4t \end{cases}$$

и подставим в уравнение однополостного гиперболоида

$\frac{(4t)^2}{16}+\frac{(-3t)^2}{9}-\frac{(4t-2)^2}{4}=1$

$t^2+t^2-\frac{1}{4}(16t^2-16t+4)=1$

$2t^2-4t^2+4t-1=1$

$t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0 \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$

Прямая и поверхность имеют единственную общую точку М (4; -3; 2).

Задача № 4. Установить, какая кривая определяется уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z \\ x-2y+2=0 \end{cases}$$

Решение: $x = 2y - 2$ - подставим в уравнение поверхности

$\frac{(2y-2)^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z$

$\frac{4(y-1)^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z$

$3(y-1)^2-y^2=6z$

$3y^2-6y+1-y^2=6z$

$2y^2-6y+1=6z$

$2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=6z+\frac{7}{2}$

$\boldsymbol{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=3\left(z+\frac{7}{12}\right)}$

уравнение параболы