Практическое занятие 13

Скалярные и векторные поля

Если в каждой точке M пространственной области определена некоторая скалярная или векторная величина, то говорят, что задано поле этой величины, соответственно скалярное или векторное.

Если положение точки M определять ее координатами по отношению к координатной системе *Oxyz*, то задание поля скалярной величины равносильно заданию числовой функции $u(M) = u(x, y, z)$.

Задание поля векторной величины $\vec{a}$ в системе координат *Oxyz* осуществляется путем задания ее проекций на координатные оси:

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно.

Определение 1. Производной функции $u(M)$ в точке M_0 по направлению прямой *l* называется

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma,$$

где

$\vec{\tau} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} -$ единичный вектор направления *l*.

Определение 2. Градиентом скалярной функции $u(M)$ в точке M_0 называется вектор

$$\mathrm{grad}u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\vec{k}.$$

Используя понятие градиента, формулу для производной функции $u(M)$ в точке M_0 по направлению можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (\mathrm{grad}u(M_0), \vec{\tau})$$

Пример 1. Найти значение производной поля $u(x,y) = 3x^2 + 2y^3$ в точке $M_0(-1;2)$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если $M(2;1)$.

Вычислим частные производные функции $u(x,y)$ и их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x, \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = -6$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 24$$

$$\mathrm{grad}u(M_0) = -6\vec{i} + 24\vec{j}$$

Найдем координаты единичного вектора $\vec{\tau}$ заданного направления:

$\overrightarrow{M_0M} = 3\vec{i} - \vec{j},\ \left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$$\vec{\tau} = \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{j}$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (\mathrm{grad}u(M_0), \vec{\tau}) = \frac{-6\cdot 3 - 24\cdot 1}{\sqrt{10}} = \frac{-42}{\sqrt{10}}$$

Знак «минус» говорит о том, что поле $u(x,y) = 3x^2 + 2y^3$ в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$ убывает.

Пример 2. Найти значение производной поля $u = x^2z - 3xyz + y^2z$ в точке $M_0(-1,1,-1)$ по направлению вектора $\bar{l}$, образующего с координатными осями Ox и Oy соответственно углы $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, а с осью Oz угол $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

$$cos\alpha = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad cos\beta = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Направляющие косинусы любого вектора связаны соотношением:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \ \Rightarrow\ cos^2\gamma = \frac{1}{4}$$

По условию $\gamma > \frac{\pi}{2}$, значит, $cos\gamma = -\frac{1}{2}$.

Единичный вектор заданного направления $\bar{l}$ имеет координаты $\vec{\tau} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Вычислим частные производные функции $u(x,y,z)$ и их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz - 3yz, \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 5$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3xz + 2yz, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -5$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 - 3xy + y^2, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 5$$

$$\mathrm{grad}u(M_0) = (5;\ -5;\ 5)$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (\mathrm{grad}u(M_0), \vec{\tau}) = \frac{5 - 5 \cdot \sqrt{2} - 5}{2} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 3. Найти угол между градиентами функций $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $v(x, y, z) = ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M_0(0; 1; 1)$.

Решение. Найдем градиенты данных функций в точке $M_0(0;1;1)$:

$$grad\, u\big|_{(0;1;1)} = \left.\frac{x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right|_{(0;1;1)} = \frac{\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{2}},$$

$$grad\, v\big|_{(0;1;1)} = \left.\frac{2x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} + 2z\,\bar{k}}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_{(0;1;1)} = \bar{j} + \bar{k}.$$

Косинус угла φ между $grad\, u$ и $grad\, v$ в точке M_0 определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{grad\, u\big|_{M_0} \cdot grad\, v\big|_{M_0}}{\left|grad\, u\big|_{M_0}\right| \cdot \left|grad\, v\big|_{M_0}\right|}.$$

Таким образом,

$$\cos\varphi = \frac{0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1}{\sqrt{0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \sqrt{0 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 1 \text{ и } \varphi = 0°.$$

Ответ: $\varphi = 0°$.

Пример 4. Найти в точке $M_0(1;0;0)$ направление и величину наибольшего изменения скалярного поля

$$u(x,y,z)=x^2y+y^2z+xz^2.$$

Решение. Направление наибольшего изменения поля указывает вектор $grad\, u$. Найдем его:

$$grad\, u=(2xy+z^2)\,\bar{i}+(x^2+2yz)\,\bar{j}+(y^2+2xz)\,\bar{k},$$

значит, в точке M_0

$$grad\, u\big|_{M_0}=\bar{j}$$

и направление наибольшего изменения поля в точке $M_0(1;0;0)$ совпадает с направлением оси Oy. Величина наибольшего изменения поля в этой точке равна

$$\max\left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_{M_0}=\left|grad\, u\big|_{M_0}\right|=1.$$

Определение 3. Дивергенцией или расходимостью векторного поля $\vec{a}=P\vec{\imath}+Q\vec{\jmath}+R\vec{k}$ называется скалярная величина, равная сумме частных производных координат вектора $\vec{a}$ по соответствующим переменным. Обозначается

$$\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Определение 4. Ротором или вихрем векторного поля $\vec{a}=P\vec{\imath}+Q\vec{\jmath}+R\vec{k}$ называется вектор с координатами

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Обозначается символом $\mathrm{rot}\vec{a}$.

$$\mathrm{rot}\vec{a}=[\nabla,\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

Пример 5. Найти дивергенцию векторного поля

$$\bar{a} = (3x + z)\,\bar{i} + (x - 3y + 2z)\,\bar{j} + (2x + y + 4z)\,\bar{k}$$

в точке $M_0(2; -1; 1)$.

Решение. По формуле имеем

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}(3x + z) + \frac{\partial}{\partial y}(x - 3y + 2z) + \frac{\partial}{\partial z}(2x + y + 4z) =$$
$$= 3 - 3 + 4 = 4.$$

В любой точке пространства $\operatorname{div}\bar{a} = 4$.

Пример 6. Найти ротор векторного поля

$$\bar{a}(x, y, z) = x^3 y\,\bar{i} + y^3 z\,\bar{j} + z^3 x\,\bar{k}.$$

Решение. Воспользуемся формулой для ротора

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 y & y^3 z & z^3 x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^3 x) - \frac{\partial}{\partial z}(y^3 z)\right)\bar{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z}(x^3 y) - \frac{\partial}{\partial x}(z^3 x)\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^3 z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 y)\right)\bar{k} =$$

$$= -y^3\,\bar{i} - z^3\,\bar{j} - x^3\,\bar{k}.$$

Пример 7. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F} = 2z\vec{i} - xy^2\vec{j} + \vec{k}$ в точке $P(5; -2; -2)$.

Пример 8. Найти ротор векторного поля $\vec{F} = 2z\vec{i} - xy^2\vec{j} + \vec{k}$ в точке $P(5; -2; -2)$.

***Задачи для самостоятельного решения*.**

1. $u(x,y,z) = 3x^2y\sqrt{z} + xy\ln z$; grad$u$ в точке M(-1,2,1) ортогонален вектору $\vec{e} = (1, a, 3)$. Найти a.
2. 2. $u(x,y,z) = x^2yz(2x - 3y + 5z)$; grad$u$ в точке $M(1,1,1)$ ортогонален вектору $\vec{e} = (1, a, -1)$. Найти a.
3. $u(x,y,z) = 2x^3 - 5xyz + ay^2$; grad$u$ в точке M(-2,1,2) параллелен вектору $\vec{e} = (7, -2,5)$. Найти a.
4. $u = e^{-2x}y^2z$. Найти производную функции u по направлению вектора $\vec{e} = (2,1,-2)$ в точке M(0,-1,2).
5. $u = \frac{x^2y}{z^3}$. Градиент функции u в точке M(1,2,-1) параллелен вектору $\vec{e} = 8\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + 12\vec{k}$. Найти a.
6. . $u = \frac{2x+3y}{z^2}$. Найти производную функции u по направлению вектора $\vec{e} = 6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ в точке M(2,-2,1).
7. $u = 4\arcsin x + 3\arccos y + a\,\mathrm{arctg}\, z$. Производная функции u по направлению вектора $\vec{e} = (-1, -2, 2)$ в точке M(3/5, 4/5, 1) равна 1. Найти a.
8. $\vec{E} = 2x^3y\vec{\imath} - y\ln y\,\vec{\jmath} + e^{az}\vec{k}$. Дивергенция поля $\vec{E}$ в точке M(-1,1,0) равна 6. Найти a.
9. $\vec{E} = (y - 2z)\vec{\imath} + (2x - z)\vec{\jmath} + (ay + z)\vec{k}$. $\left|\mathrm{rot}\vec{E}\right| = 3,\ a < 0$. Найти a.
10. $\vec{E} = (2x - y)\vec{\imath} + (5x + 3z)\vec{\jmath} + (ax - z)\vec{k}$. rot$\vec{E}$ параллелен вектору $\vec{e} = (1,1,-2)$. Найти a.
11. $\vec{E} = (\mathrm{arctg}\, x)\vec{\imath} + (e^{-5y})\vec{\jmath} + (a\ln z^2)\vec{k}$. M(-1,0,4), div$\vec{E}(M) = 3$. Найти a.
12. $\vec{E} = (\mathrm{arctg}\, 2x)\vec{\imath} + (y^2z - 5x)\vec{\jmath} + az\vec{k}$. M(0,2,3), div$\vec{E}(M) = 0$. Найти a.
13. $\vec{E} = 2ay\vec{\imath} + x\vec{\jmath} - z\vec{k}$. $\vec{e} = (1, -2,1)$, div$\left[\vec{E}, \vec{e}\right] = 5$. Найти a.
14. $\vec{E} = (x + y)\vec{\imath} + 2az\vec{\jmath} - x\vec{k}$. $\vec{e} = \vec{\jmath} - \vec{k}$, rot$\left[\vec{E}, \vec{e}\right]$ ортогонален вектору с координатами (2,1,-3). Найти a.
15. $u(x,y,z) = ax^3y^2z$, M(1,-1,2), div grad$u|_M = 32$. Найти a.