ЛЕКЦИЯ 12. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

1. Окружность, как простейшая кривая второго порядка: способ задания, характеристики.

2.Каноническое уравнение эллипса. График.

3. Каноническое уравнение гиперболы. График.

4. Каноническое уравнение параболы. График.

5. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.

Определение 1. ***Линиияму (кривыми)*** второго порядка называются ***линии*** (***кривые***) определяемые относительно текущих координат уравнением второй степени:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad \textbf{(1)}$$

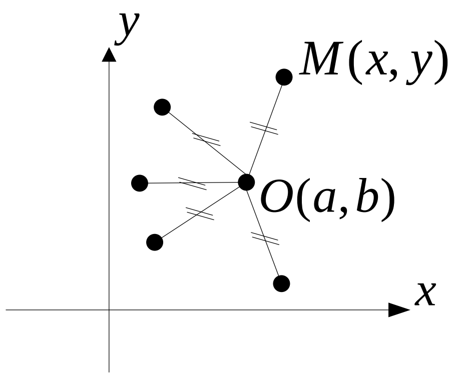
где коэффициенты $A,B,C,D,E,F\in\mathbf{R}$ и $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Далее в нашем курсе мы рассмотрим такие кривые второго порядка, как окружность, эллипс, гипербола, парабола. Получим уравнения, задающие эти кривые, изучим из характеристики (будем говорить – ***параметры***), графики и оптические свойства.

12.1. Окружность

Окружность – простейшая кривая второго порядка.

Определение 2. ***Окружностью***, радиуса *R* с центром в точке *O*(*a*;*b*) называется множество всех точек *M* плоскости, удовлетворяющих условию *OM* = *R*.



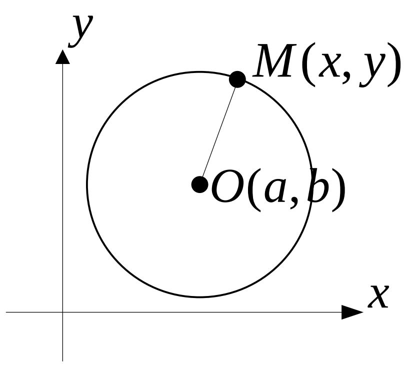
Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка окружности

Тогда $OM=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

Условие $OM=R$ можно записать в виде $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$

Или $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ **(2)**

уравнение окружности



Ему удовлетворяют только координаты точек лежащих на окружности.

Если $a=0, b=0$ (центр окружности лежит в начале координат), то уравнение (1) принимает вид

$$x^2+y^2=R^2 \qquad \textbf{(3)}$$

каноническое уравнение окружности

Система координат, в которой уравнение окружности имеет вид (2) называется ***канонической*** (для данной окружности)

Преобразуем уравнение (2) к виду (1):

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+y^2-R^2=0$

Сравнивая с (1), можем заметить:

1) коэффициенты при квадратах переменных *x* и *y* равны между собой;

2) коэффициент при *xy* равен нулю.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть теперь в уравнении (1) $B=0$, $A=C$, при этом $A\neq 0$, $C\neq 0$. Уравнение (1) перепишется в виде $Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$.

Поделим обе части на *A*: $x^2+y^2+\frac{2D}{A}x+\frac{2E}{A}y+\frac{F}{A}=0$

Выделим полные квадраты:

$$\left(x^2+\frac{2D}{A}x+\frac{D^2}{A^2}\right)-\frac{D^2}{A^2}+\left(y^2+\frac{2E}{A}y+\frac{E^2}{A^2}\right)-\frac{E^2}{A^2}+\frac{F}{A}=0$$

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A} \quad (*)$$

Если $\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A}>0$, то уравнение (*) определяет окружность с центром $O\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$, радиусом $R=\sqrt{\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A}}$.

Если $\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A}=0$, то уравнение (*) примет вид $\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0$. Ему удовлетворяют координаты единственной точки $O\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$.

Если $\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A}<0$, то уравнение (*) не определяет никакой линии, так как нет точек, координаты которых удовлетворяют условиям уравнения (*).

Задача 1. Доказать, что уравнение $x^2+y^2+6x-10y=11$ определяет окружность. Найти ее центр и радиус, выполнить чертеж. Указать систему координат, в которой уравнение имеет канонический вид. Записать уравнение касательной к этой окружности в точке $M_0(0;-1)$

Решение.

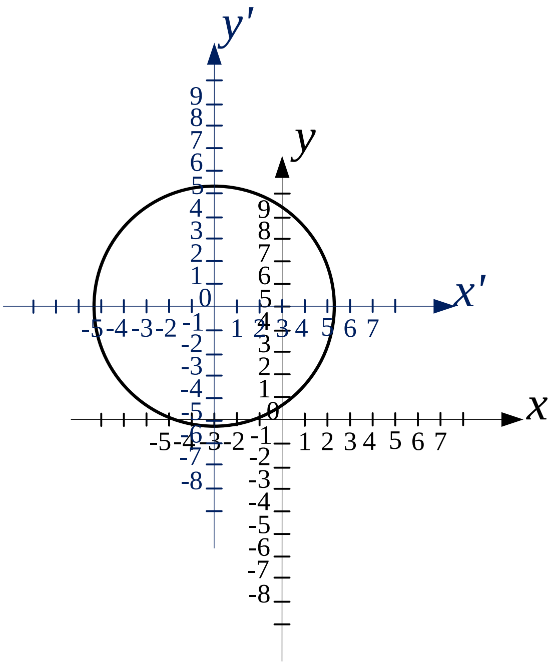
Выделим полные квадраты

$$(x^2+6x+9)-9+(y^2-10y+25)-25-11=0$$

$$(x+3)^2+(y-5)^2-45=0$$

$(x+3)^2+(y-5)^2=45$ – уравнение окружности с центром в точке $O'(-3;5)$, $R=3\sqrt{5}$.

Выполним параллельный перенос осей, сместив начало координат в точку $O'(-3;5)$ и получим новую систему координат $O'x'y'$. В новой системе координат уравнение окружности будет иметь канонический вид $(x')^2+(y')^2=45$.



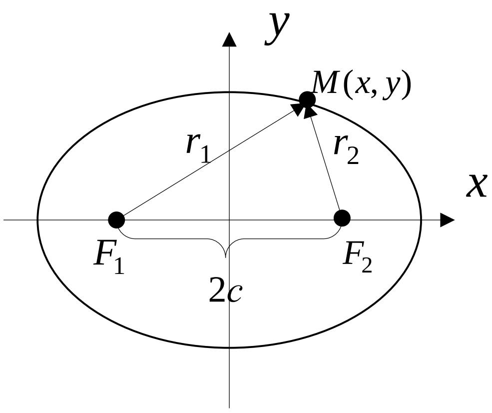
Пусть $M_0(0;-1)$ - точка касания. Вектор $\overrightarrow{O'M_0}=(3;-6)$ можно выбрать в качестве вектора нормали к искомой касательной. Составим уравнение прямой, проходящей через заданную точку с известным нормальным вектором:

$3(x-0)-6(y+1)=0$ или $3x-6y-6=0 \Rightarrow x-2y-2=0$.

Ответ. $(x+3)^2+(y-5)^2=45$ - уравнение окружности с центром в точке $O'(-3;5)$, $R=3\sqrt{5}$; $x-2y-2=0$ - уравнение касательной.

12.2. Эллипс

Определение 3. ***Эллипсом*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.



Расстояние между фокусами называется ***фокусным расстоянием*** и обозначается через $F_1F_2 = 2c$, $F_1M + F_2M = 2a$.

$F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ называются ***фокальными радиусами*** точки M.

По определению $2a > 2c \Rightarrow a > c$.

Для вывода уравнения эллипса выберем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпадало с серединой отрезка F_1F_2, а фокусы F_1 и F_2 находились бы на оси Ox. Тогда $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Пусть $M(x;y)$ – произвольная (текущая) точка эллипса.

$$F_1M = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,,\quad F_2M = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

Из условия $F_1M + F_2M = 2a$ следует, что $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$.

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ возведем обе части равенства в квадрат.

$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$.

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$ поделим обе части на 4.

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$ возведем обе части равенства в квадрат.

$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$.

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$.

$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$.

$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$.

Так как $a > c$, то $a^2 > c^2$. Пусть $a^2 - c^2 = b^2$. **(4)**

Обратите внимание, сейчас речь идет о случае, когда <u>$a > b$.</u>

Тогда $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Поделим обе части на a^2b^2.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textbf{(5)}$$

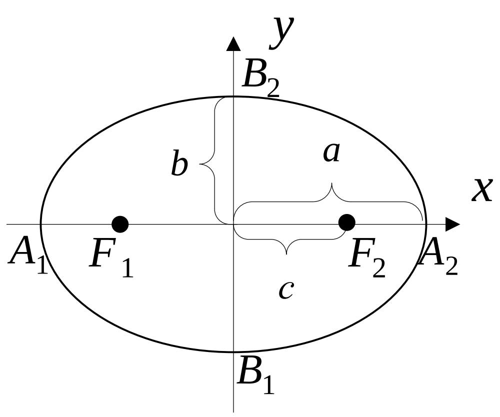
каноническое уравнение эллипса

Система координат, в которой уравнение эллипса имеет вид (5) называется *канонической*.

Исследуем форму эллипса и установим его свойства, пользуясь каноническим уравнением.

1. Оси Ox и Oy являются осями симметрии, точка $O(0;0)$ – центром симметрии, она же – ***центр эллипса***.

2. Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$ и $B_2(0;-b)$ называются ***вершинами эллипса***. Так как $|x| \le a, |y| \le b$, то эллипс есть ограниченная кривая, расположенная внутри прямоугольника.



Отрезок A_1A_2, содержащий фокусы эллипса называется его ***большой осью***. Отрезок B_1B_2 – ***малой осью*** эллипса. Отрезки проведенные из центра эллипса в его вершины – OA_1, OA_2 – ***большие полуоси*** эллипса, OB_1, OB_2 – ***малые полуоси*** эллипса. Большая и малая полуоси равны a и b соответственно. Ось, на которой расположены фокусы называется ***фокальной осью*** эллипса.

Формула (4) дает связь между значением расстояния между фокусами, большой и малой полуосями.

В качестве характеристики формы эллипса часто используют соотношение $\frac{c}{a}$.

Определение 4. Величина, равная отношению расстояния между фокусами к большой оси эллипса называется ***эксцентриситетом*** эллипса. $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Так как $c < a$, то $0 < \varepsilon < 1$

Ниже показано изменение формы эллипса в зависимости от соотношения полуосей

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

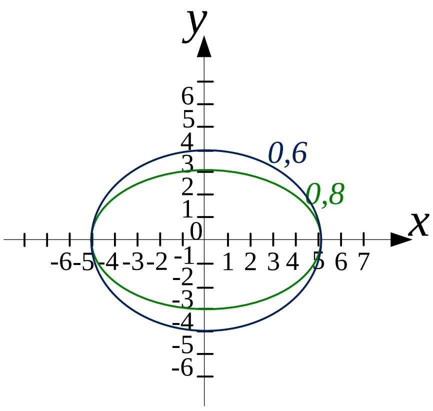
$a = 5, b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4$

$\varepsilon = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$a = 5, b = 4 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9} = 3$

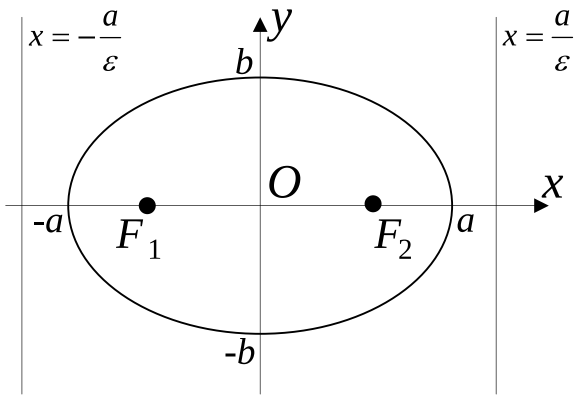
$\varepsilon = \frac{3}{5} = 0{,}6$



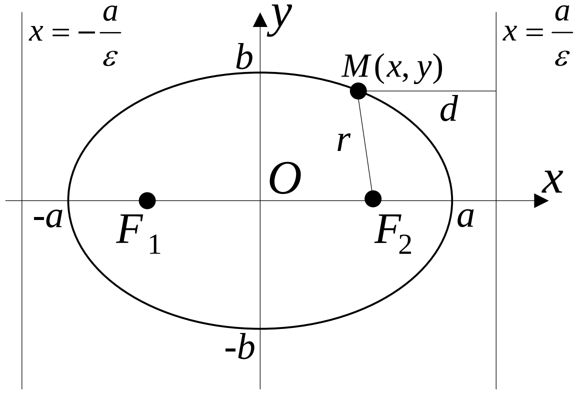
Определение 5. Прямые $x = \frac{a}{\varepsilon}$, $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами*** эллипса.

У эллипса две директрисы – правая и левая.

Директрисы перпендикулярны фокальной оси эллипса.



Теорема 1. Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-либо фокуса, а d – расстояние от этой же точки до ближайшей к фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса



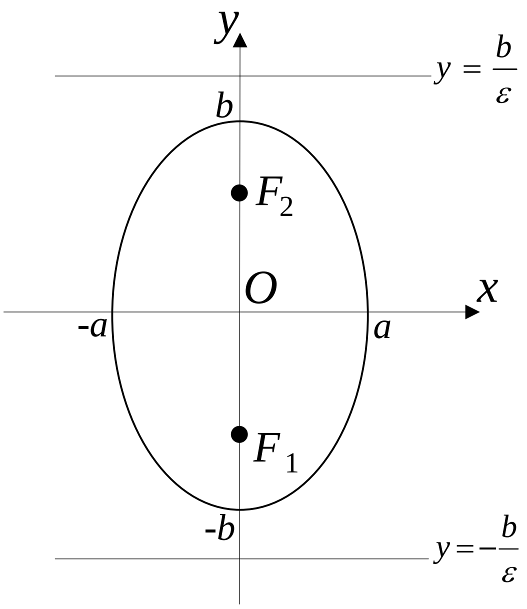
Выше мы рассматривали случай, когда $a > b$.

Если $\underline{b > a}$, то фокусы эллипса расположены на оси ординат и имеют координаты $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$.

В этом случае $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

Уравнения директрис: $y = -\frac{b}{\varepsilon}$, $y = \frac{b}{\varepsilon}$



Ниже показано изменение формы эллипса в зависимости от соотношения полуосей в случае, когда фокусы расположены на оси Oy.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

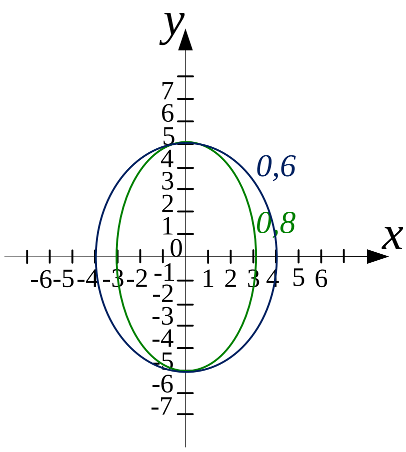
$$b = 5, a = 3 \Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\varepsilon = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$b = 5, a = 4 \Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\varepsilon = \frac{3}{5} = 0{,}6$$



Задача 2. Привести уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$ к каноническому виду. Указать длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис.

Решение.

Поделим обе части уравнения на 1176

$$\frac{24x^2}{1176} + \frac{49y^2}{1176} = 1$$

$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ - каноническое уравнение эллипса.

$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$ - большая полуось эллипса.

$b^2 = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$ - малая полуось эллипса.

Так как $a > b$, то фокусы лежат на оси абсцисс.

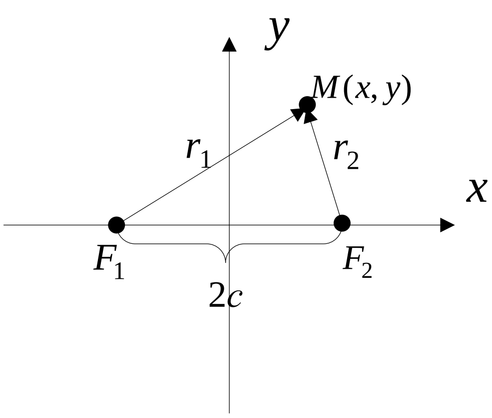
$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25} = 5$, $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$.

$\varepsilon = \frac{5}{7}$, директрисы $x = \frac{7}{5/7} = \frac{49}{5} = 9{,}8$, $x = -\frac{7}{5/7} = -\frac{49}{5} = -9{,}8$.

Если $\underline{b = a}$, то каноническое уравнение эллипса принимает вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ или $x^2 + y^2 = a^2$ уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = a$, тогда $c = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$, т.е. фокусы имеют координаты $F_1(0;0)$ и $F_2(0;0)$, т.е. совпадают друг с другом.

12.3. Гипербола

Определение 6. ***Гиперболой*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.



Расстояние между фокусами называется ***фокусным расстоянием*** и обозначается через $F_1F_2 = 2c$, $|F_1M - F_2M| = 2a$.

$F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ называются ***фокальными радиусами*** точки M.

По определению $2a < 2c \Rightarrow a < c$.

Для вывода уравнения гиперболы выберем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпадало с серединой отрезка F_1F_2, а фокусы F_1 и F_2 находились бы на оси Ox. Тогда $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Пусть $M(x;y)$ - произвольная (текущая) точка гиперболы.

$$F_1M = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Из условия $F_1M - F_2M = \pm 2a$ следует, что $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$.

После упрощений, аналогичных проведенным выше для эллипса, получим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \textbf{(6)}$$

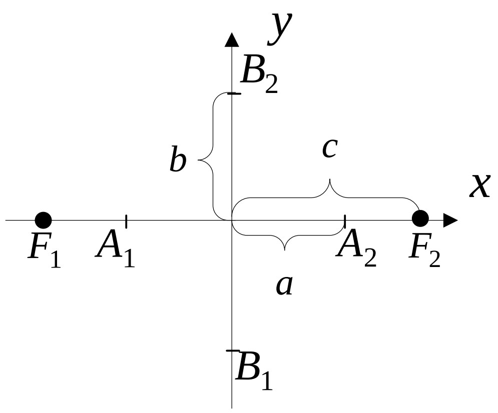
каноническое уравнение гиперболы

Система координат, в которой уравнение гиперболы имеет вид (6) называется *канонической*.

Здесь $c^2-a^2=b^2$ **(7)**

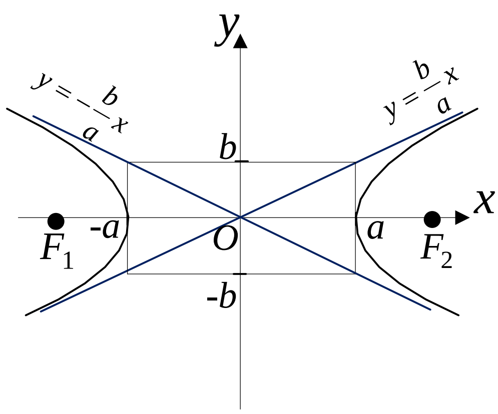
Исследуем форму гиперболы и установим ее свойства, пользуясь каноническим уравнением.

1. Оси Ox и Oy являются осями симметрии, точка $O(0;0)$ – центром симметрии, она же – ***центр гиперболы***.



2. Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ называются ***вершинами гиперболы***. Так как $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$, т.е., точка лежит на гиперболе, то $|x|\geq a$.

3. Из уравнения гиперболы, очевидно неравенство $\frac{x^2}{a^2}>\frac{y^2}{b^2}$, т.е. если точка лежит на гиперболе, то $|y|<\frac{b}{a}|x|$. Таким образом, гипербола – линия, состоящая из двух частей – ***ветвей гиперболы***, левой и правой.



Прямые $y=-\frac{b}{a}x$ и $y=\frac{b}{a}x$ называются ***асимптотами*** гиперболы.

Отрезок A_1A_2, содержащий фокусы гиперболы называется его ***действительной осью***. Отрезок B_1B_2 – ***мнимой осью*** гиперболы. Отрезки проведенные из центра гиперболы в его вершины - OA_1, OA_2 – ***действительные полуоси*** гиперболы, OB_1, OB_2 – ***мнимые полуоси*** гиперболы. Действительная и мнимая полуоси равны a и b соответственно. Ось, на которой расположены фокусы называется ***фокальной осью*** гиперболы.

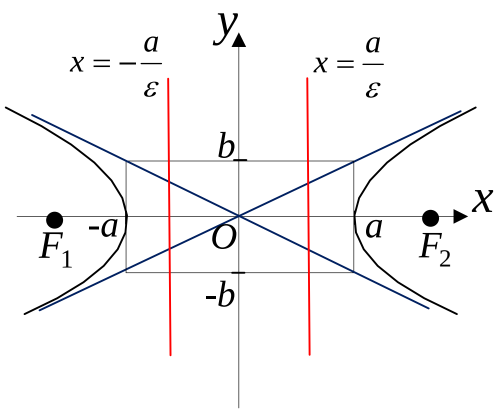
Формула (7) дает связь между значением расстояния между фокусами, действительной и мнимой полуосями

Определение 7. Величина, равная отношению расстояния между фокусами к действительной оси гиперболы называется ***эксцентриситетом*** гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,.$$

Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

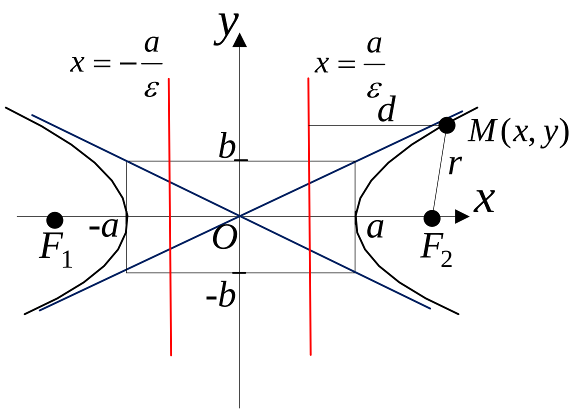
Определение 8. Прямые $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами*** гиперболы.



У гиперболы две директрисы – правая и левая.

Директрисы гиперболы перпендикулярны фокальной оси гиперболы.

Теорема 2. Если r – расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-либо фокуса, а d – расстояние от этой же точки до ближайшей к фокусу директрисы, то отношение $\dfrac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы.



Ниже показано изменение формы гиперболы в зависимости от соотношения полуосей в случае, когда фокусы расположены на оси *Ox*.

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

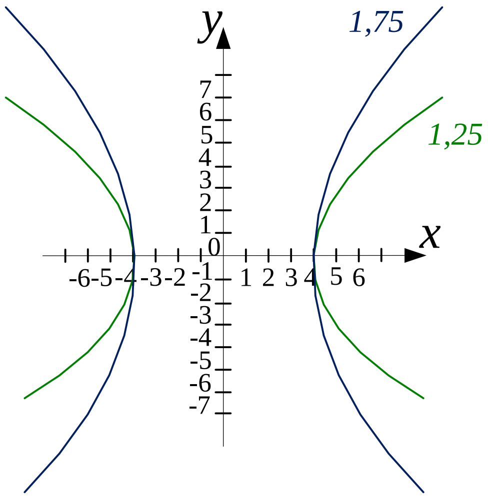
$$a=4, b=3 \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\varepsilon=\frac{5}{4}=1{,}25$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{33}=1$$

$$a=4, b=\sqrt{33} \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{49}=7$$

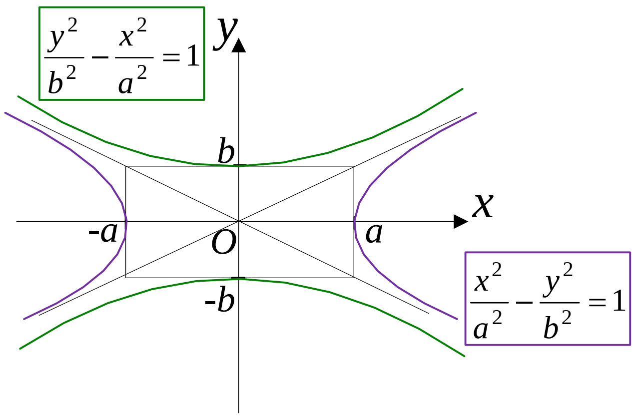
$$\varepsilon=\frac{7}{4}=1{,}75$$



Кривая, определяемая уравнением

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \textbf{(8)}$$

также задает гиперболу. Фокусы гиперболы (8) лежат на оси *Oy*. Действительная ось принадлежит оси *Oy*, мнимая – оси *Ox*. Директрисы перпендикулярны оси *Oy*.



Эта гипербола является сопряженной гиперболе (6). На рисунке показано взаимное расположение этих гипербол.

Если <u>b = a</u>, то каноническое уравнение гиперболы принимает вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ или $x^2-y^2=a^2$. Такую гиперболу называют равнобочной или равноосной.

Задача 3. Привести уравнение гиперболы $16x^2-9y^2=144$ к каноническому виду. Указать длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис.

Решение.

Поделим обе части уравнения на 144.

$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1$$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ - каноническое уравнение гиперболы.

$a^2=9\Rightarrow a=3$ - действительная полуось гиперболы.

$b^2=16\Rightarrow b=4$ - мнимая полуось гиперболы.

Фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс.

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$, $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$.

$\varepsilon=\frac{5}{3}$, директрисы $x=\frac{3}{5/3}=\frac{9}{5}=1{,}8$, $x=-\frac{3}{5/3}=-\frac{9}{5}=-1{,}8$.

Задача 4. Показать, что уравнение $4y^2-8y-x^2-6x-9=0$ определяет гиперболу. Найти координаты ее фокусов, указать систему координат, в которой уравнение гиперболы имеет канонический вид.

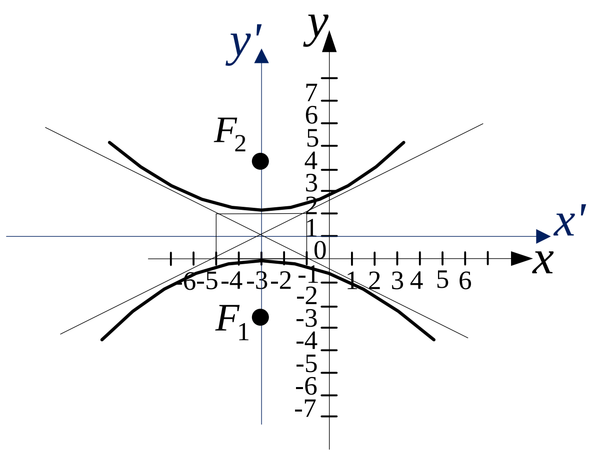
Решение. Выделим полные квадраты по переменным *x* и *y*.

$$4(y^2-2y+1)-4-(x^2+6x+9)=0.$$

$$4(y-1)^2-(x+3)^2=4.$$

Поделим обе части уравнения на 4

$(y-1)^2-\frac{(x+3)^2}{4}=1$ уравнение гиперболы с центром $O'(-3;1)$ в системе координат $O'x'y'$ имеет канонический вид.



$a^2=4\Rightarrow a=2$ – мнимая полуось гиперболы, параллельна оси *Ox*.

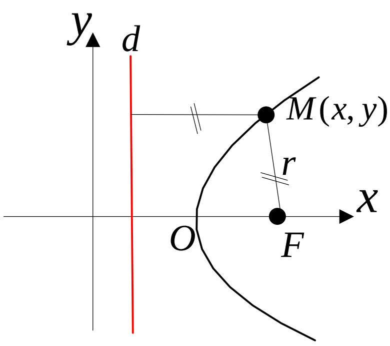
$b^2=1\Rightarrow b=1$ – действительная полуось гиперболы, параллельная оси *Oy*.

Фокусы гиперболы лежат на действительной оси, параллельной оси *Oy*.

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$, $F_1(-3;1+\sqrt{5})$ и $F_2(-3;1-\sqrt{5})$.

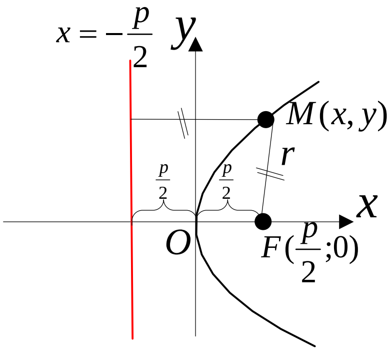
12.4. Парабола

Определение 9. ***Параболой*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки F этой плоскости, называемой ***фокусом***, равно расстоянию до прямой d, называемой директрисой, не проходящей через F.



Расстояние от фокуса до директрисы называется ***фокальным параметром*** параболы и обозначается p, $\underline{p>0}$.

Для вывода уравнения параболы выберем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокус F находился бы на оси Ox, вершина параболы O располагалась бы посередине между d и F. Тогда $x=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы (или $x+\frac{p}{2}=0$), $F(\frac{p}{2};0)$ - фокус параболы.



Пусть $M(x;y)$ - произвольная (текущая) точка параболы.

$$\rho(M,d)=\frac{\left|x+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1}}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,\quad \rho(M,F)=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}\,.$$

Из условия $\rho(M,d)=\rho(M,F)$ следует, что $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$.

Возведем обе части последнего выражения в квадрат .

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2\Rightarrow x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2\,.$$

$$y^2=2px \qquad \textbf{(9)}$$

каноническое уравнение параболы

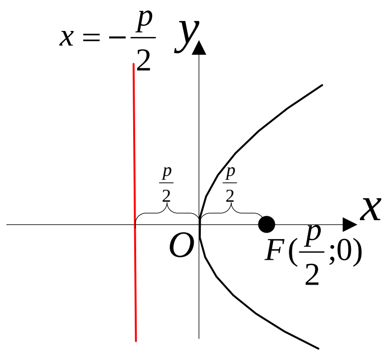
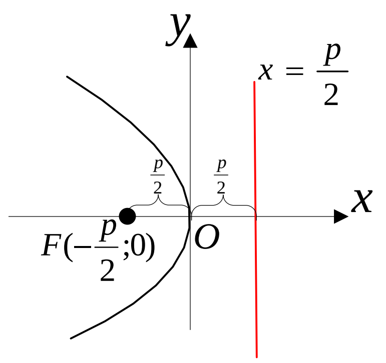
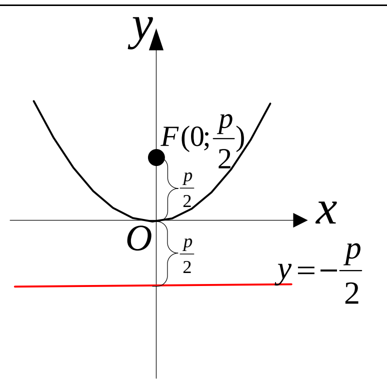
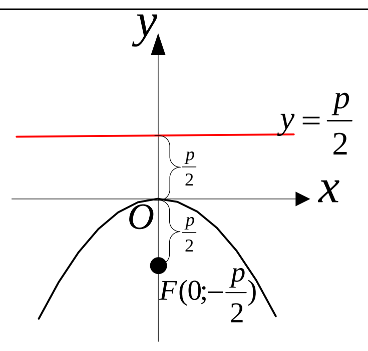
Система координат, в которой уравнение параболы имеет вид (9) называется *канонической*.

Исследуем форму гиперболы и установим ее свойства, пользуясь каноническим уравнением.

1. Парабола симметрична относительно прямой, перпендикулярной директрисе и содержащей фокус параболы. Эта прямая является ***осью симметрии*** параболы. Точка пересечения параболы с осью симметрии параболы называется ***вершиной параболы***.

2. Так как $p > 0$, то $x \ge 0$ и все точки параболы, задаваемой уравнением (9), лежат в правой полуплоскости относительно оси *Oy*.

Для параболы возможны следующие варианты расположения.

$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
	
$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
	

Задача 5. Дана парабола $y^2 = 8x$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы.

Решение.

В нашем случае $2p = 8 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow \frac{p}{2} = 2$. Поскольку парабола задана каноническим уравнением, то вершина находится в $O(0;0)$. Фокус $F(2;0)$, директриса $x = -2$.

Ответ. Фокус $F(2;0)$, директриса $x = -2$.

Задача 6. Показать, что уравнение $y^2+6y+6x+3=0$ определяет параболу. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы, указать систему координат, в которой уравнение параболы имеет канонический вид.

Решение.

Поскольку в нашем случае только переменная *y* входит в уравнение во второй степени, выделим полный квадрат относительно *y*:

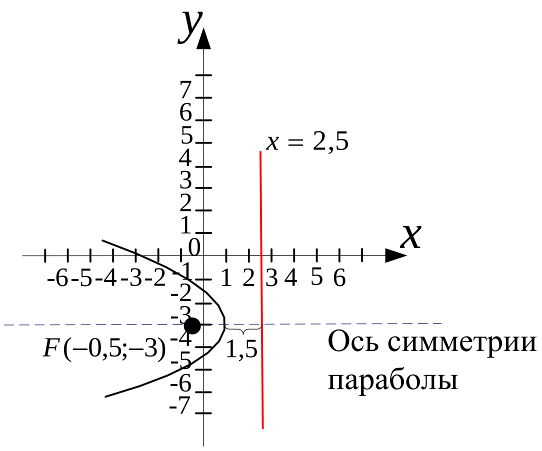
$y^2+6y+9-9+6x+3=0$.

$(y^2+6y+9)=6-6x$.

$(y+3)^2=-6(x-1)$ - уравнение параболы, центр в точке $O(1;-3)$.

$2p=6 \Rightarrow p=3 \Rightarrow \frac{p}{2}=1{,}5$.

Фокус $F(-0{,}5;-3)$, директриса $x=2{,}5$.



Ответ. Фокус $F(-0{,}5;-3)$, директриса $x=2{,}5$.

Задача 7. Составить уравнение параболы, если дан ее фокус $F(4;0)$ и уравнение директрисы $x=-4$.

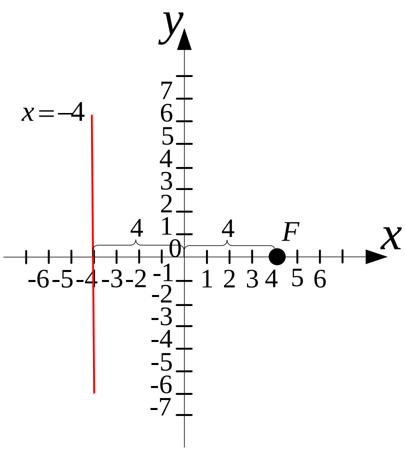
Решение.

Для решения задачи удобно сделать чертеж.

Видно, что параметр $p = 8$.

Вершина находится в начале координат, уравнение вида $y^2=2px$

С учетом $p = 8$: $y^2=16x$.

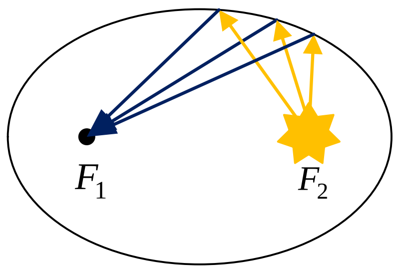


Ответ. $y^2=16x$

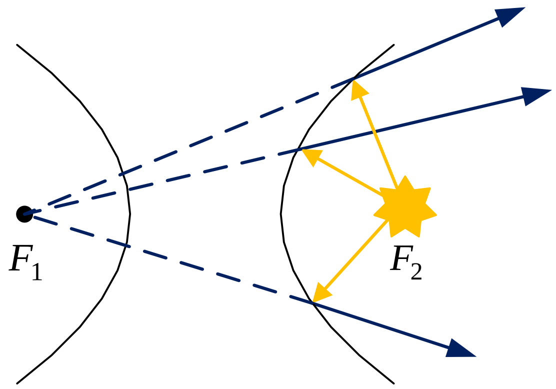
12.5. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.

Изучение кривых второго порядка представляет особый интерес для дальнейшего исследования их оптических свойств.

Оптическое свойство эллипса состоит в следующем: если в один из фокусов эллипса с зеркальной внутренней «поверхностью» поместить источник света, то все лучи, после отражения от «поверхности» эллипса сойдутся в другом его фокусе.



Оптическое свойство гиперболы состоит в следующем: если в один из фокусов гиперболы с зеркальной внутренней «поверхностью» поместить источник света, то все лучи, после отражения от «поверхности» гиперболы видятся исходящими из другого ее фокуса.



Оптическое свойство параболы состоит в следующем: если в фокус параболы с зеркальной внутренней «поверхностью» поместить источник света, то все лучи, после отражения от «поверхности» параболы будут направлены параллельно оси параболы.