Математический анализ, 2 семестр

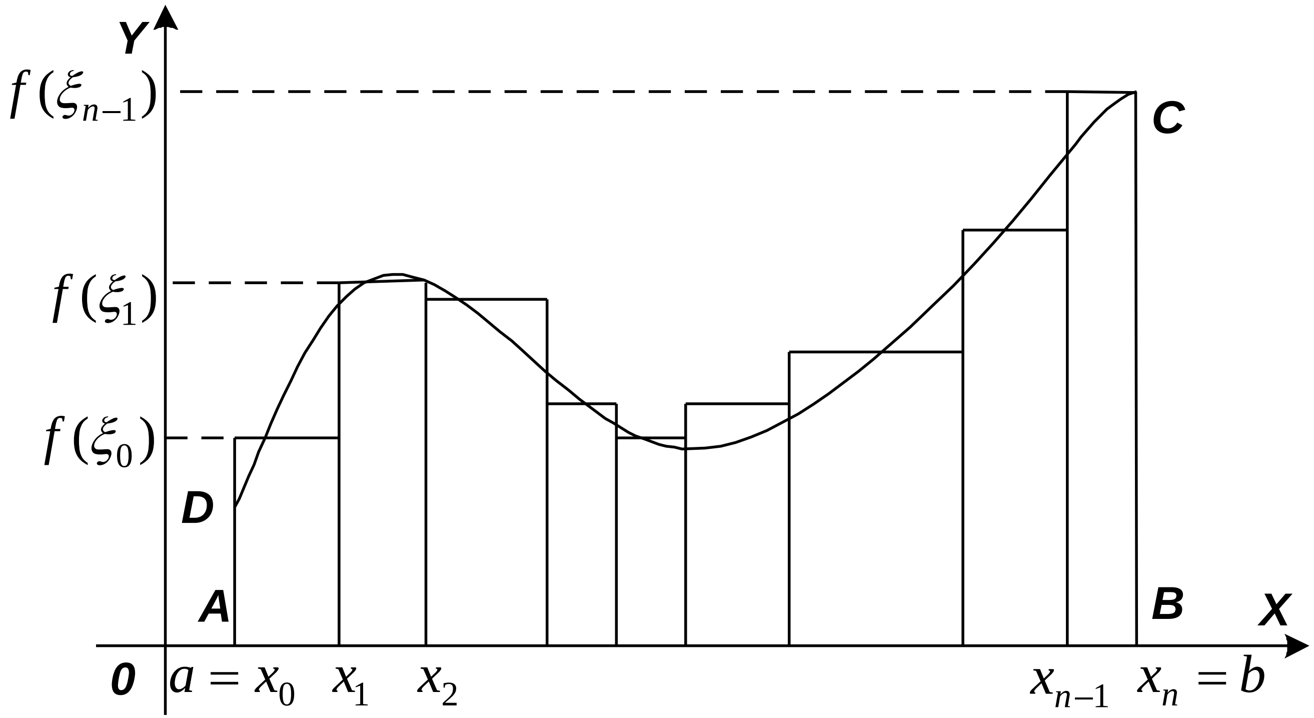
Лекция 4

Определенный интеграл

Определенный интеграл

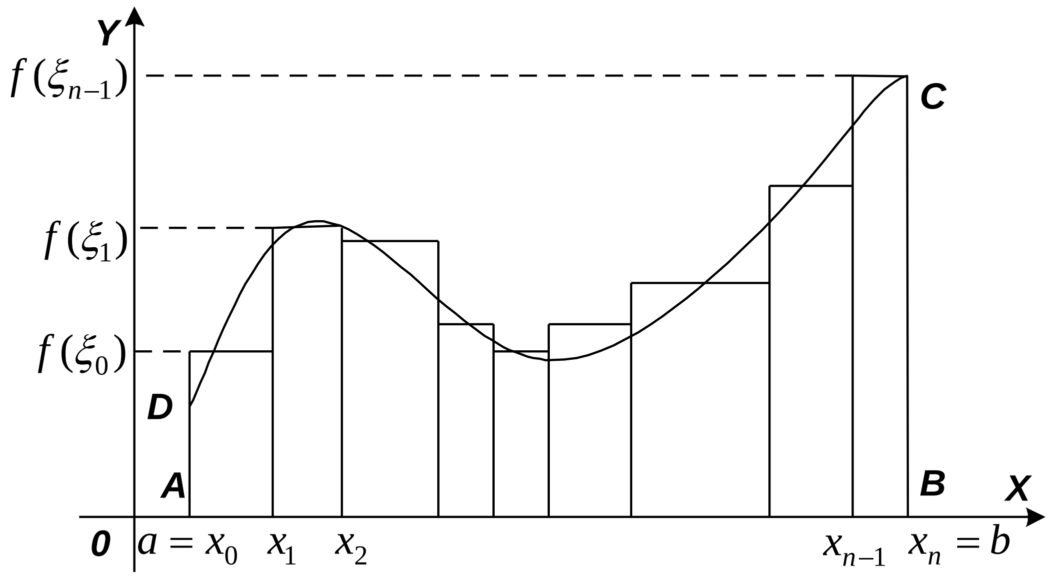
5.1. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и принимает на этом отрезке только положительные значения. Рассмотрим на плоскости xOy фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a, b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*.



Разделим отрезок $[a, b]$ на n отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Длину отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,2, \ldots, n-1$, а максимальное значение Δx_i обозначим d. На каждом отрезке произвольно выберем точку $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и построим прямоугольник с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Площадь такого прямоугольника равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. Сумма площадей всех построенных прямоугольников приближенно равна площади криволинейной трапеции

$$S_{aDCb} \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Точное значение площади криволинейной трапеции по определению равно пределу сумм площадей построенных прямоугольников при условии, что $d = \max\limits_i\{\Delta x_i\}$ стремится к нулю:

$$S_{aCDb} = \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

5.2. Определение определенного интеграла

Рассмотрим теперь *произвольную* функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$. Также, как и при вычислении площади криволинейной трапеции, разделим отрезок $[a, b]$ на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,2, \dots, n-1$, и на каждом отрезке произвольно выберем точку ξ_i.

Определение 1. Совокупность точек деления

$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, а также промежуточных точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ называется *разбиением отрезка*, а $d = \max_i \{\Delta x_i\}$ – *диаметром разбиения*.

Определение 2. Сумма

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению отрезка.

Замечание. Каждому разбиению отрезка соответствует определенная интегральная сумма.

Определение 3. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения отрезка. Обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

В определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx$

x – переменная интегрирования,

$f(x)$ – подынтегральная функция,

a – нижний предел интегрирования,

b – верхний предел интегрирования.

Определение 4. Если определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке существует, то функция называется *интегрируемой* по Риману (или, для краткости, просто интегрируемой) на этом отрезке.

*Бернхард Риман (1826-1866)– немецкий математик и механик.

Замечание. В отличие от неопределенного интеграла, определенный интеграл представляет собой *число*, а не функцию. Если интеграл существует, то это число определяется однозначно и зависит только от вида функции $f(x)$ и от пределов интегрирования a и b.

Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от выбора обозначения для переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

и т.д.

5.3. Теорема существования определенного интеграла

Определение 5. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$, если отрезок можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых $f(x)$ непрерывна.

Теорема 1 (существования определенного интеграла). Если $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Из интегрируемости функции необходимо следует ее ограниченность.

<u>Пример</u> неинтегрируемой на $[a, b]$ функции.

Функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 0, x - \text{иррациональное число} \\ 1, x - \text{рациональное число} \end{cases}.$$

Выберем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. В каждом $[x_i, x_{i+1}]$ существует хотя бы одна рациональная точка. Выберем ее в качестве ξ_i .

Тогда интегральная сумма $\sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_i = b - a$.

Если в качестве ξ_i выбрать иррациональные точки (в каждом $[x_i, x_{i+1}]$ существует хотя бы одна иррациональная точка), то интегральная сумма $\sum_{i=0}^{n-1} 0 \cdot \Delta x_i = 0$. Следовательно, предел интегральной суммы зависит от выбора разбиения, значит, определенный интеграл от функции Дирихле не существует, функция не является интегрируемой.

5.4. Свойства определенного интеграла

1. Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, определенный интеграл от этой функции на отрезке $[a, b]$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Т.к. все $\Delta x_i = 0$, интегральная сумма равна нулю.

3. $\int_a^b dx = b - a$. Т.к. $f(x) \equiv 1$, интегральная сумма есть $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i$, т.е. равна сумме длин отрезков разбиения, длине $[a, b]$.

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, т.к. все Δx_i меняют знак, если разбиение отрезка проводить от b к a.

5. Линейность:

$$\int_a^b \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

Доказательство. Составим интегральную сумму для функции $g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [c_1 f_1(\xi_i) + c_2 f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= c_1 \sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i)\Delta x_i + c_2 \sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i)\Delta x_i$$

Перейдем к пределу в этих равенствах при $d \to 0$.

6. Аддитивность:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

независимо от взаимного расположения точек a, b и c на числовой прямой.

7. Интегрирование неравенств: если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Рассмотрим разность $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx =$$

$$= \lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (g(\xi_i) - f(\xi_i))\, \Delta x_i \geq 0$$

т.к. каждое слагаемое по условию неотрицательно.

Следовательно,

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

При доказательстве использовалось свойство линейности определенного интеграла.

8. Оценка определенного интеграла:

если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Доказательство. Так как непрерывная на отрезке функция является ограниченной, то $m \leq f(x) \leq M$.

Используя свойство 7, проинтегрируем это неравенство:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

9. ***Теорема*** *о среднем*: если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

То есть определенный интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой внутренней точке отрезка.

Для $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ можно определить геометрический смысл теоремы о среднем: существует точка $c \in [a, b]$ такая, что площадь криволинейной трапеции, верхней границей которой является функция $f(x)$, равна площади прямоугольника с основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$.

5.5. Интеграл с переменным верхним пределом

Получим основную формулу интегрального исчисления, которая устанавливает связь между понятиями определенного интеграла и неопределенного, а точнее, первообразной.

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Очевидно, что при изменении одного из пределов (например, верхнего) величина интеграла будет изменяться.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема по любой части этого отрезка, и поэтому $\forall x \in [a, b]$ существует интеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, называемый *интегралом с переменным верхним пределом.*

Значение функции $\Phi(x)$ раскрывает следующая теорема.

***Теорема* 2 (*о дифференцируемости определенного интеграла по переменному пределу*).** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в любой внутренней точке x этого отрезка $(a < x < b)$, причем справедливо равенство

$$\Phi'(x) = f(x), \quad \text{т.е.} \quad \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Имеет место аналогичное равенство:

$$\int_x^b (f(t)\,dt)' = -f(x).$$

Доказательство. Зафиксируем любое значение $x \in [a, b]$ и придадим ему приращение $\Delta x \neq 0$ столь малое, чтобы точка $x + \Delta x$ лежала внутри отрезка $[a, b]$, т.е. $a \leq x + \Delta x \leq b$. Тогда $\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$. Найдем производную функции $\Phi(x)$. Имеем

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\ .$$

Теперь к полученному интегралу применим теорему о среднем значении:

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\Delta x,$$

где $c \in [x, x + \Delta x]$, если $\Delta x > 0$ (или $c \in [x + \Delta x, x]$, если $\Delta x < 0$).

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta\Phi(x) \to 0$, т.е. $\Phi(x)$ – непрерывна в любой точке отрезка $[a, b]$. Кроме того,

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c).$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $c \to x$ при $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

Поэтому $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Таким образом, установлено следующее утверждение:

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *имеет на этом отрезке первообразную, а именно, функцию* $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

5.6. Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ – произвольная первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная и

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

Полагая в этом равенстве $x = a$, получим

$$0 = F(a) + C, \qquad C = -F(a)$$

Полагая в этом равенстве $x = b$, получим

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, поэтому полученное равенство можно переписать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Мы получили формулу, которую называют формулой Ньютона-Лейбница. Исаак Ньютон (1643-1727) – английский математик, физик, астроном. Вильгельм Лейбниц (1646-1716) – немецкий математик.

Формула Ньютона-Лейбница является основной формулой интегрального исчисления. Она устанавливает связь между определенным интегралом и первообразной одной и той же функции. Правую часть формулы принято записывать $F(x)|_a^b$.

Рассмотрим примеры.

<u>Пример</u> 1.

$$\int_1^{64}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^{64}\left(x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^{64}=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-2\cdot 64^{\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{3}{2}\cdot 1^{\frac{2}{3}}-2\cdot 1^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{2}\left(64^{\frac{2}{3}}-1\right)-2\left(64^{\frac{1}{2}}-1\right)=8{,}5$$

<u>Пример</u> 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$$

Пример 3.

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Пример 4.

$$\int_{0}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^{3/2} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

5.7. Замена переменной в определенном интеграле

С помощью формулы Ньютона-Лейбница установим правило замены переменной в определенном интеграле. Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Полагаем, что функция $x=\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(t)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную производную на некотором отрезке $[t_1,t_2]$, причем $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$ и значения $\varphi(t)$ на отрезке $[t_1,t_2]$ принадлежат отрезку $[a,b]$. Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

Действительно, пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, тогда $F(\varphi(t))$ – первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Вычислим левую и правую часть равенства с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t_2)\big) - F\big(\varphi(t_1)\big) = F(b) - F(a)$$

Совпадение полученных значений доказывает справедливость формулы замены переменной в определенном интеграле. Заметим, что при вычислении определенного интеграла методом замены переменной не требуется возвращаться к исходной переменной. Рассмотрим примеры.

Пример 5.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \begin{bmatrix} \ln x = t, \ t_1 = 0 \\ \dfrac{dx}{x} = dt, \ t_2 = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Пример 6.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot sinx^2\, dx = \left[\begin{matrix} x^2 = t,\ 2xdx = dt,\ \ xdx = \dfrac{dt}{2} \\ t_1 = 0,\quad t_2 = \pi \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sint\, dt = \frac{1}{2}(-cost)|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(-cos\pi + cos0) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

Пример 7.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[\begin{matrix} x = \sin t\,, t = \arcsin x \\ t_1 = \arcsin 0 = 0,\ t_2 = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \\ dx = \cos t\ \ dt \end{matrix}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

<u>*Пример*</u> *8.*

$$\int_{0}^{3} \frac{3x - 2}{\sqrt{x + 1}} dx = \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt{x+1}, & t_1 = 1,\ t_2 = 2 \\ x = t^2 - 1, & dx = 2tdt \end{array}\right] = \int_{1}^{2} \frac{3(t^2 - 1) - 2}{t} 2tdt =$$

$$= 2 \int_{1}^{2} (3t^2 - 5) dt = 2(t^3 - 5t)|_{1}^{2} = 2\big((8 - 1) - 5(2 - 1)\big) = 4$$

Пример 9.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dtgx}{3+\operatorname{tg}^2 x} = \begin{bmatrix} t = tgx \\ t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

5.8. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x), v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$, то формула интегрирования по частям для определенного интеграла приобретает вид:

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu$$

Действительно, так как $(uv)' = u'v + uv'$, то $uv -$ первообразная для функции $(u'v + uv')$, следовательно, $\int_a^b (u'v + uv')\,dx = uv|_a^b$.

Или $\int_a^b (u'v + uv')\,dx = \int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv|_a^b$,

или $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$.

Рассмотрим примеры.

Пример 10.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x\,, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} = x \ln x|_1^e - \int_1^e dx = e - x|_1^e =$$

$$= e - (e - 1) = 1$$

Пример 11.

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x\,dx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x\big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx =$$

$$= \pi + \sin x\big|_0^{\pi} = \pi$$

Пример 12.

$$\int_0^1 x\,arctg\,x\,dx = \begin{bmatrix} u = arctg\,x\,, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, v = \dfrac{1}{2}x^2 & \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\,arctg\,x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - arctg\,x)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{4}$$

<u>Пример</u> 13.

$$I = \int_0^{\pi} e^x sinxdx = \begin{bmatrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = sinxdx, v = -cosx \end{bmatrix} = -e^x cosx|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x cosxdx$$

$$=$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = cosxdx, v = sinx \end{bmatrix} = e^{\pi} + 1 + e^x sinx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x sinxdx =$$

$$= e^{\pi} + 1 - I$$

$$2I = e^{\pi} + 1 => I = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

Рассмотрим определенный интеграл с симметричными нижним и верхним пределами: $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$.

В первом интеграле введем замену переменной: $\begin{bmatrix} x=-t, & dx=-dt \\ t_1=a, & t_2=0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Можно сделать вывод:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(-x) = -f(x) \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(-x) = f(x) \end{cases}$$

То есть для нечетной функции интеграл в симметричных пределах равен нулю, а для четной функции интеграл берется по половинному отрезку и удваивается.