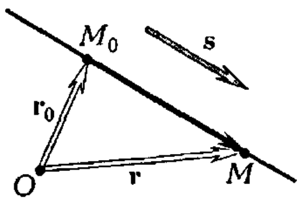
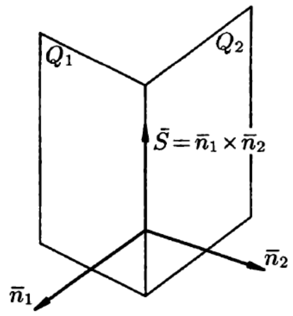
Семинар 11. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

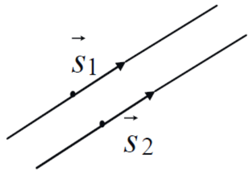
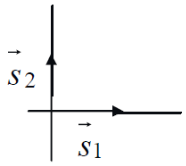
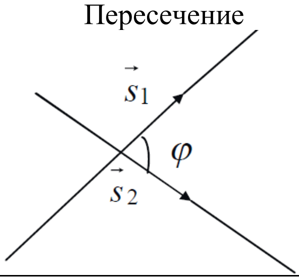
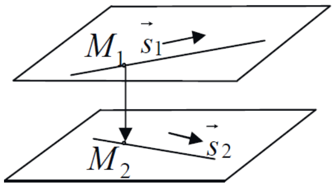
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ. Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами Лекции 11 *Прямая в пространстве.* Выписать основные определения и формулы.

Для наглядности представим основной теоретический материал по теме в виде трех таблиц.

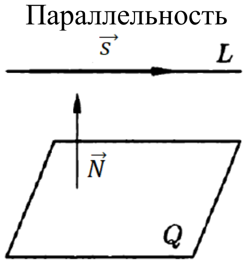
Уравнения прямой в пространстве

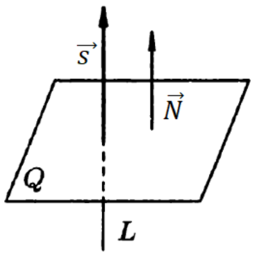
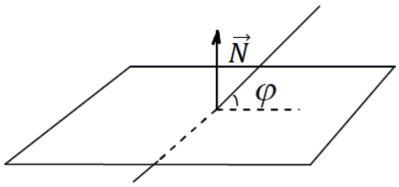
№	Способ задания прямой	Вид уравнения
1	***Векторное уравнение*** прямой, проходящей через точку M_0, параллельно заданному вектору $\vec{s}$ – направляющий вектор прямой: $\vec{s} \parallel \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$, где t – скалярный множитель (параметр)	$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{s}$ 
2	***Канонические уравнения*** прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и параллельно вектору $\vec{s} = \{m, n, p\}$.	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$
3	***Параметрические уравнения*** прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{m; n; p\}$	$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$
4	***Общие уравнения прямой***: прямая как линия пересечения двух плоскостей	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ 
5	***Уравнение прямой через две точки*** $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Взаимное расположение прямых в пространстве

№	Расположение прямых в пространстве	Условия расположения прямых: $l_1: \quad \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ $l_2: \quad \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$
1	Параллельность 	$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$
2	Перпендикулярность 	$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
3	Пересечение 	$\cos\varphi=\dfrac{\lvert\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2\rvert}{\lvert\vec{s}_1\rvert\lvert\vec{s}_2\rvert}=$ $=\dfrac{\lvert m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
4	Скрещивание 	$M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. $(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2)\neq 0$ $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$

Взаимное расположение прямой и плоскости

№	Расположение прямой и плоскости	$L: \quad \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ $Q: \quad Ax+By+Cz+D=0$
1	Параллельность 	$\vec{N}\perp\vec{s} \Leftrightarrow \vec{N}\cdot\vec{s}=0 \Rightarrow$ $Am+Bn+Cp=0$

2	Перпендикулярность 	$\vec{N} // \vec{s} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$
3	Пересечение 	$\sin\varphi = \dfrac{\lvert Am + Bn + Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$
4	Условие принадлежности прямой плоскости	$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$
5	Точка пересечения прямой с плоскостью	$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$

Пример 1. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(5; -2; 1)$.

Решение. Канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B имеют вид:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \Rightarrow \frac{x+1}{5+1} = \frac{y-2}{-2-2} = \frac{z-3}{1-3} \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-2}$$

или

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-1}$$

$\vec{s} = (3; -2; -1)$ - направляющий вектор прямой AB.

Из канонических уравнений получим параметрические уравнения прямой AB:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = t \\ \dfrac{y-2}{-2} = t \\ \dfrac{z-3}{-1} = t \end{cases} \Rightarrow$$

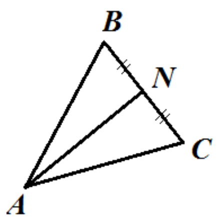
$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ – канонические уравнения прямой AB;

$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой AB.

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(7; 2; -6)$, $B(11; -3; 5)$, $C(-3; 4; -2)$. Составить канонические и параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A.

Решение. Точка N – середина стороны BC, поэтому координаты точки N найдем по формулам:



$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_N = \frac{11 - 3}{2} = 4$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_N = \frac{-3 + 4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$z_N = \frac{z_B + z_C}{2} \Rightarrow z_N = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2}$$

Получили координаты $N(4; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

Медиана проходит через точки A и N, имеем:

$$\frac{x-7}{4-7} = \frac{y-2}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{z+6}{\frac{3}{2} + 6} \Rightarrow \frac{x-7}{-3} = \frac{y-2}{-3/2} = \frac{z+6}{15/2} \Rightarrow$$

$\frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+6}{15}$ – канонические уравнения медианы.

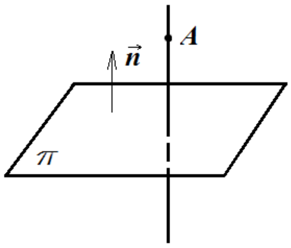
Параметрические уравнения медианы AN: $\begin{cases} \frac{x-7}{-6} = t \\ \frac{y-2}{-3} = t \\ \frac{z+6}{15} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6t + 7 \\ y = -3t + 2 \\ z = 15t - 6 \end{cases}$

Ответ: $\frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+6}{15}$ – канонические уравнения медианы AN;

$\begin{cases} x = -6t + 7 \\ y = -3t + 2 \\ z = 15t - 6 \end{cases}$ – параметрические уравнения медианы AN.

Пример 3. Составить параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку $A(-7; -3; 2)$ перпендикулярно плоскости π: $x - 4y - 5z + 8 = 0$. Найти точку P прямой, соответствующую значению параметра $t = 2$.

Решение. Вектор нормали данной плоскости $\vec{n} = (1; -4; -5)$ перпендикулярен ей и по условию должен быть параллелен искомой прямой. Значит, направляющий вектор искомой прямой $\vec{s} = \vec{n} = (1; -4; -5)$.



Тогда $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = -4t - 3 \\ z = -5t + 2 \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой l.

Точка $P \in l$ при $t = 2$, тогда $\begin{cases} x = 2 - 7 \\ y = -4 \cdot 2 - 3 \\ z = -5 \cdot 2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -11 \\ z = -8 \end{cases}$

$$P(-5; -11; -8)$$

Ответ: $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = -4t - 3 \\ z = -5t + 2 \end{cases}$; $P(-5; -11; -8)$.

Пример 4. Даны общие уравнения прямой l: $\begin{cases} x - 2y + 3z + 15 = 0 \\ 2x + 3y - 4z - 12 = 0 \end{cases}$ привести их к каноническому виду.

Решение. Найдем координаты какой-либо точки M_0, принадлежащей прямой l.

Для этого одну из координат выберем произвольно, например, положим в обоих уравнениях $z = 0$:

$$\begin{cases} x - 2y + 15 = 0 \\ 2x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -15 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

Отсюда получаем $x_0 = -3, y_0 = 6$. Таким образом точка $M_0(-3; 6; 0)$.

Прямая l задана как пересечение двух плоскостей: $\begin{cases} x - 2y + 3z + 15 = 0 \\ 2x + 3y - 4z - 12 = 0 \end{cases}$, следовательно ее направляющий вектор $\vec{s}$ должен быть перпендикулярен нормальным векторам этих плоскостей.

Так как $\overrightarrow{n_1} = (1; -2; 3), \overrightarrow{n_2} = (2; 3; -4)$, то $\vec{s} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 10\vec{j} + 7\vec{k} \Rightarrow$

$$\vec{s} = (-1; 10; 7)$$

Найдем канонические уравнения прямой по формуле:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \Rightarrow$$

$$\frac{x + 3}{-1} = \frac{y - 6}{10} = \frac{z}{7}$$

Ответ: $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-6}{10} = \frac{z}{7}$.

Пример 5. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(2;-5;1)$ и параллельно прямой $\begin{cases}2x+3y+z-6=0\\4x-3y-z+2=0\end{cases}$.

Решение. Найдем направляющий вектор данной прямой:

$$\vec{s}=[\vec{n_1},\vec{n_2}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\2 & 3 & 1\\4 & -3 & -1\end{vmatrix}=6\vec{j}-18\vec{k},\ \vec{s}=(0;6;-18)\Rightarrow\vec{s}\perp Ox$$

Вектор $\vec{s}$ будет по условию параллелен и искомой прямой, поэтому ее канонические уравнения:

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-1}{-18}\ \Rightarrow\ \frac{x-2}{0}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-1}{-3}$$

$$\text{Ответ.}\frac{x-2}{0}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-1}{-3}.$$

Пример 6. Определить угол между прямыми $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-7}{3}$ и $\frac{x-4}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-6}{-2}$.

Решение. По формуле

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+\ p_1p_2|}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}\cdot\sqrt{{m_2}^2+{n_2}^2+{p_2}^2}}$$

где $\vec{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$ и $\vec{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$– направляющие векторы прямых.

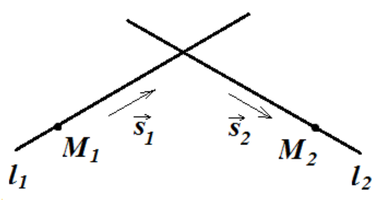
$\vec{s}_1=(2;-6;3)$ и $\vec{s}_2=(1;2;-2)$, получаем $\cos\varphi=\frac{|2\cdot1+(-6)\cdot2+3\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{16}{21}$,

$\varphi=\arccos\frac{16}{21}(\approx 40^\circ)$.

Ответ: $\varphi=\arccos\frac{16}{21}$.

Пример 7. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y+11}{2}=\frac{z+6}{1}$ пересекаются. Найти точку их пересечения.

Решение. Точка $M_1(1;-2;0)$ лежит на первой прямой, а $M_2(-1;-11;-6)$ – на второй.



Найдем смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1,\vec{s}_2$:

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1-1;\ -11+2;\ -6-0)=(-2,-9,-6)$,

$\vec{s}_1=(2;\ -1;\ -2)$, $\vec{s}_2=(1;2;1)\Rightarrow$

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\ \vec{s}_1,\vec{s}_2\right)=\begin{vmatrix}-2 & -9 & -6\\2 & -1 & -2\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2\cdot3+9\cdot4-6\cdot5=0.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ компланарны и две прямые лежат в одной плоскости. Векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ неколлинеарны (их координаты не пропорциональны), поэтому прямые не параллельны, т.е. пересекаются.

Найдем точку пересечения прямых. Уравнение одной из прямых запишем в параметрическом виде и из уравнений второй прямой найдем значение параметра t, отвечающего точке пересечения:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t-2 \\ z = -2t \end{cases}$$

Подставим эти выражения x, y, z в уравнения второй прямой, получим:

$$\frac{2t+2}{1} = \frac{-t+9}{2} = \frac{-2t+6}{1} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|c} 4+4t = 9-t & 9-t = 12-4t \\ 5t = 5 & 3t = 3 \\ t = 1 & t = 1 \end{array}$$

$$t = 1$$

Оба уравнения дают одно и то же значение t.

Следовательно, точка пересечения: $\begin{cases} x = 2+1 \\ y = -1-2 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 3;\ y = -3;\ z = -2$

$(3, -3, -2)$ – координаты точки пересечения прямых

Ответ: $(3, -3, -2)$.

Пример 8. Доказать, что прямые $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$

перпендикулярны.

Решение. Найдем направляющие векторы прямых:

$$\overrightarrow{s_1} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-5-4)\vec{\imath} - (-10+16)\vec{\jmath} + (-2-4)\vec{k} =$$

$$= -9\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 6\vec{k} = (-9; -6; -6).$$

Из параметрических уравнений второй прямой имеем $\overrightarrow{s_2} = (2; 3; -6)$.

Рассмотрим скалярное произведение направляющих векторов:

$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = -9 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-6) = -18 - 18 + 36 = 0$$

Скалярное произведение векторов равно нулю, следовательно, $\overrightarrow{s_1}$ и $\overrightarrow{s_2}$ перпендикулярны и прямые перпендикулярны.

Пример 9. Найти угол между прямой $\begin{cases} x = 9 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ и плоскостью $4x - 2y + 2z + 7 = 0$.

Решение. Из уравнений прямой и плоскости имеем: $\vec{s} = (1; -2; -1)$ - направляющий вектор прямой , $\vec{n} = (4; -2; 2)$ – вектор нормали плоскости.

Найдем угол между прямой и плоскостью по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}\,|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{|1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Пример 10. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ с плоскостью

$3x - 2y + z - 2 = 0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$

Подставляем значения x, y, z в уравнение плоскости:

$3(2t - 1) - 2(t + 1) - t + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 3t = 6 \ \Rightarrow t = 2$

Искомая точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты:

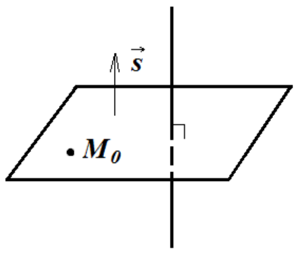
$x = 2 \cdot 2 - 1 = 3,\ y = 2 + 1 = 3,\ z = -2 + 1 = -1 \Rightarrow$

$P(3; 3; 1)$ – точка пересечения.

Ответ: $P(3; 3; 1)$.

Пример 11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4; 3; 1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{7}$.

Решение. За нормальный вектор $\vec{n}$ искомой плоскости примем направляющий вектор данной прямой $\vec{s} = (2; -5; 7)$. Используем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4; 3; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$: $2(x + 4) - 5(y - 3) + 7(z - 1) = 0 \ \Rightarrow$

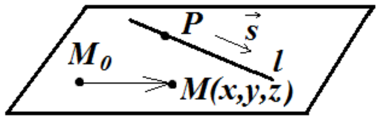


$2x - 5y + 7z + 16 = 0 -$ уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4; 3; 1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{7}$.

Ответ: $2x - 5y + 7z + 16 = 0$.

Пример 12. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ и точку $M_0(2; 0; 1)$.

Решение. Прямая $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ проходит через точку $P(1; -1; -1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s} = (1; 2; -1)$.



Проверим, что точка $M_0(2; 0; 1)$ не лежит на прямой:

$$\frac{2-1}{1} \neq \frac{0+1}{2} \neq \frac{1+1}{-1}$$

В этом случае, действительно, существует единственная плоскость, проходящая через заданные прямую и точку.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка искомой плоскости, тогда векторы $\overrightarrow{M_0 M} = (x-2; y; z-1)$, $\overrightarrow{M_0 P} = (1-2;\ -1-0; -1-1) = (-1; -1; -2)$ и $\vec{s} = (1; 2; -1)$ компланарны. Следовательно:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff (x-2)(1+4) - y(1+2) + (z-1)(-2+1) = 0 \Rightarrow$$

$5(x-2) - 3y - (z-1) = 0 \Rightarrow 5x - 3y - z - 9 = 0.$

Ответ: $5x - 3y - z - 9 = 0$.

Пример 13. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:

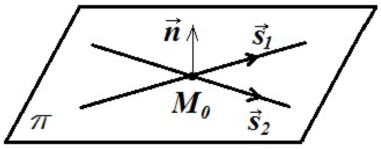
$$\begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = 2t - 4 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{-5} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{2}$$

Решение. Первая прямая задана параметрическими уравнениями, что позволяет указать точку $(-7; -4; 3)$, лежащую на этой прямой, и направляющий вектор $\vec{s}_1 = \{4; 2; -1\}$.

Вторая прямая задана каноническими уравнениями, что позволяет также указать точку $(-7; -4; 3)$, лежащую на второй прямой и её направляющий вектор $\vec{s}_2 = \{-5; 1; 2\}$.

Данные прямые имеют общую точку $M_0(-7; -4; 3)$. При этом, вектора $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ не коллинеарны, поскольку их соответствующие координаты не пропорциональны между собой.

Следовательно, заданные прямые не параллельны и пересекаются ровно в одной точке. В этом случае, действительно, существует единственная плоскость, проходящая через эти прямые.



Известна точка $M_0(-7; -4; 3)$, принадлежащая искомой плоскости, найдем вектор нормали $\vec{n}$ этой плоскости:

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 14\vec{k} \Rightarrow \vec{n} = \{5; -3;\ 14\}$$

Составим уравнение искомой плоскости:

$$5(x+7) - 3(y+4) + 14(z-3) = 0 \Rightarrow$$

$5x - 3y + 14z - 19 = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через заданные прямые.

Ответ: $5x - 3y + 14z - 19 = 0$

Пример 14. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+5}{2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t+3 \\ y = -t+2 \\ z = 2t+4 \end{cases}$$

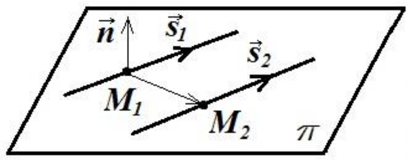
Решение. Первая прямая задана каноническими уравнениями, из которых видно, что прямая проходит через точку $\mathrm{M}_1(-1; 7; -5)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s}_1 = \{1; -1; 2\}$.

Вторая прямая задана параметрическими уравнениями, из которых видно, что эта прямая проходит через точку $\mathrm{M}_2(3; 2; 4)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s}_2 = \{1; -1; 2\}$.

Векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ совпадают, следовательно, прямые параллельны и не совпадают, так как векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{s}_1$ неколлинеарные:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{3+1; 2-7; 4+5\} = \{4; -5; 9\} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{-5}{-1} \neq \frac{9}{2}$$

В этом случае существует единственная проходящая через эти прямые плоскость.



Для составления уравнения плоскости: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ возьмём в качестве точки M_0 любую из точек M_1 или M_2. Пусть, например, $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1(-1; 7; -5)$.

Вектор нормали $\vec{n}$ перпендикулярен векторам $\vec{s}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$, лежащим в плоскости. Тогда в качестве вектора нормали искомой плоскости возьмем вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{s}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix} = (-9+10)\vec{i} - (9-8)\vec{j} + (-5+4)\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{n} = \{1; -1; -1\}$$

Запишем уравнение плоскости:

$$(x+1) - (y-7) - (z+5) = 0 \ \Rightarrow$$

$x - y - z + 3 = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через заданные прямые.

Ответ: $x - y - z + 3 = 0$.

Пример 15. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $(-4; -1; -4)$, перпендикулярно прямым $\frac{x-2}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+4}{-3}$ и $\begin{cases} x = 5t-2 \\ y = -t-7 \\ z = t+2 \end{cases}$.

Решение. В данном случае, направляющий вектор искомой прямой ортогонален направляющим векторам заданных прямых.

Из канонических и параметрических уравнений прямых найдем их направляющие векторы: $\vec{s}_1 = \{4; 2; -3\}$ и $\vec{s}_2 = \{5; -1; 1\}$.

Направляющим вектором искомой прямой является вектор $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \Rightarrow$

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} - 19\vec{\jmath} - 14\vec{k} \Rightarrow \vec{s} = \{-1; -19; -14\}$$

Так как искомая прямая проходит через точку $M_0(-4; -1; -4)$, то можно записать ее параметрические, а затем и канонические уравнения:

$\begin{cases} x = -t - 4 \\ y = -19t - 1 \\ z = -14t - 4 \end{cases}$ - параметрические уравнения искомой прямой

$\frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{19} = \frac{z+4}{14}$ – канонические уравнения

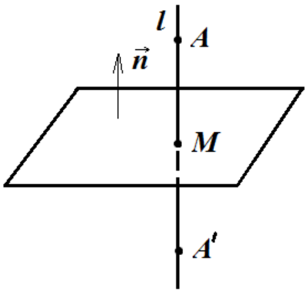
Пример 16. Найти:

а) проекцию точки $A(-2; 3; 1)$ на плоскость $x - y + 2z - 3 = 0$;

б) точку симметричную точке A относительно плоскости.

Решение.

а) Вектор $\vec{n} = (1; -1; 2)$ перпендикулярен данной плоскости, будет направляющим вектором прямой l, проходящей через точку А, перпендикулярно плоскости.



Канонические уравнения этого перпендикуляра:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Параметрические уравнения прямой AM: $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t + 3 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

Подставим значения x, y, z в уравнение плоскости:

$t - 2 - (-t + 3) + 2(2t + 1) - 3 = 0 \Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow t = 1$

Координаты точки М: $\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = -1 + 3 = 2 \\ z = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 2; 3)$ – проекция точки $A(-2; 3; 1)$.

б) Точка М – середина отрезка AA', следовательно:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A = -2 + 2 = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A = 4 - 3 = 1$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \Rightarrow z_{A'} = 2z_M - z_A = 6 - 1 = 5$$

$A'(0; 1; 5)$ – точка симметричная точке A.

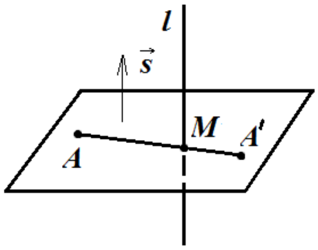
Ответ: а) $M(-1; 2; 3)$, б) $A'(0; 1; 5)$.

Пример 17. Найти точку, симметричную точке $A(3; -2; -1)$ относительно прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Решение. Найдем сначала проекцию точки А на данную прямую l.

Точка M – проекция точки A на прямую есть точка пересечения данной прямой с



перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку A. Тогда направляющий вектор $\vec{s} = (1; -1; 2)$ прямой является вектором нормали этой плоскости и ее уравнение имеет вид:

$$1 \cdot (x-3) - 1 \cdot (y+2) + 2 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow$$
$$x - y + 2z - 3 = 0$$

Найдем точку пересечения прямой l с построенной плоскостью, используя параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-2 \\ z = 2t-1 \end{cases}$

Подставим значения x, y, z в уравнение плоскости:

$$t + 1 - (-t-2) + 2(2t-1) - 3 = 0 \ \Rightarrow 6t = 2 \ \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$x_M = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, y_M = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}, z_M = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \ \Rightarrow$$

$M\left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ – проекция точки А на прямую l.

Точку A' симметричную точке А относительно прямой l, найдем из условий:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \ \Rightarrow \ x_{A'} = 2x_M - x_A = 2 \cdot \frac{4}{3} - 3 = -\frac{1}{3}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \ \Rightarrow \ y_{A'} = 2y_M - y_A = 2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 2 = -\frac{8}{3}$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \ \Rightarrow \ z_{A'} = 2z_M - z_A = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3}$$

$A'\left(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$ - точка симметричная точке $A(3; -2; -1)$ относительно прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Ответ: $A'\left(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2; 1; 0)$ параллельно прямой $\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{0}$.
2. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(4; -1; 1)$ и $B(3; 3; -1)$.
3. Даны вершины треугольника $A(3; -1; 5), B(4; 2; -5), C(-4; 0; 3)$. Составить канонические и параметрические уравнения медианы, проведённой из вершины A.
4. Даны вершины треугольника $A(1; -1; 3), B(3; -3; 9), C(-5; 11; 7)$. Составить канонические и параметрические уравнения средней линии, параллельной стороне BC.

5. Доказать, что точки $A(-3;-7;-5), B(0;-1;-2), C(2;3;0)$ лежат на одной прямой, причём точка B расположена между A и C. Составить канонические уравнения этой прямой.
6. Составить канонические и параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$.
7. Найти угол между прямыми $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ и $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$.
8. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{1}$ и точку $A(1;-3;2)$.
9. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые: $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{5}$ и $\begin{cases} x=4t-1 \\ y=-6t+1 \\ z=4t-2 \end{cases}$
10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-7;5;3)$ перпендикулярно прямым $\frac{x-5}{6}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{2}$ и $\begin{cases} x=t+5 \\ y=t+2 \\ z=-2t+5 \end{cases}$
11. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$ и плоскости $x-3y+z-8=0$.
12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-3;5)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0 \\ x+y+z-5=0 \end{cases}$.
13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;1;-1)$ и перпендикулярной к плоскостям $2x-y+5z+3=0$ и $x+3y-z-7=0$.
14. Найти точку симметричную точке $A(4;-3;1)$ относительно плоскости $x+2y-z-3=0$.
15. Найти проекцию точки $A(4;3;10)$ на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.
16. Найти расстояние от точки $M(3;1;2)$ до прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$.
17. Найти точку, симметричную точке $M(3;1;2)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$.