Центр дистанционного обучения
образование в стиле hi tech

Практическое занятие 3

Интегрирование дробно-рациональных функций.

Разложение правильной дроби на простейшие.

Определение. Дробно-рациональной функцией (рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов:

$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x) -$ многочлен степени m,

$Q_n(x) -$ многочлен степени n.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$, *неправильной*, если $m \geq n$.

Всякую неправильную рациональную дробь можно путем деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена $L(x)$ (целой части) и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Всякую правильную рациональную дробь можно представить единственным образом в виде суммы простейших дробей:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2, k \in N$;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, корни знаменателя комплексные;

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \geq 2$, корни знаменателя комплексные.

<u>Примеры</u>.

1) $\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$

2) $\frac{x^2+4}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

3) $\frac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}$

Коэффициенты разложения находятся методом неопределенных коэффициентов или методом частных значений.

<u>Интегрирование простейших дробей.</u>

1) $\int \frac{dx}{1+5x} = \frac{1}{5}\int \frac{d(1+5x)}{1+5x} = \frac{1}{5} ln|1+5x| + C$

2) $\int \frac{dx}{(4-5x)^3} = -\frac{1}{5}\int (4-5x)^{-3}\, d(4-5x) = -\frac{1}{5}\frac{(4-5x)^{-2}}{-2} + C =$
$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(4-5x)^2} + C$

3) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{3x-1}{(x-1)^2+4} dx = \begin{bmatrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{3t+2}{t^2+4} dt =$
$= \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + 2\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2}\ln(t^2+4) + arctg\,\frac{t}{2} + C =$
$= \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) + arctg\,\frac{x-1}{2} + C$

4) Интегрирование дробей IV типа рассматривается в курсе лекций.

Таким образом, интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию целой части (многочлена) и интегрированию простейших рациональных дробей.

Вычислить неопределенный интеграл.

1). $\int \frac{3x-4}{x^2-12x+20}dx =$

$$\begin{bmatrix} \frac{3x-4}{x^2-12x+20}=\frac{3x-4}{(x-2)(x-10)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-10} \\ 3x-4=A(x-10)+B(x-2) \\ x=2:\ 2=-8A,\ \ A=-\frac{1}{4} \\ x=10:\ 26=8B,\ \ B=\frac{13}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\frac{3x-4}{x^2-12x+20}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{x-10}\right]$$

$$= \int\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{x-10}\right)dx = -\frac{1}{4}ln|x-2|+\frac{13}{4}ln|x-10|+C =$$

$$= \frac{1}{4}ln\left|\frac{(x-10)^{13}}{x-2}\right|+C$$

2). $\int \frac{3x+7}{x^2+6x+5}dx =$

$$\begin{bmatrix} \frac{3x+7}{x^2+6x+5}=\frac{3x+7}{(x+1)(x+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+5} \\ 3x+7=A(x+5)+B(x+1) \\ x=-1:\ 4=4A,\ \ A=1 \\ x=-5:\ -8=-4B,\ \ B=2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\frac{3x+7}{x^2+6x+5}=\frac{1}{x+1}+2\cdot\frac{1}{x+5}\right]$$

$$= \int\left(\frac{1}{x+1}+2\cdot\frac{1}{x+5}\right)dx = ln|x+1|+2ln|x+5|+C =$$

$$= ln|(x+1)(x+5)^2|+C$$

3). $\int \frac{2x+7}{x^2+6x+11}dx = \int \frac{2x+6+1}{x^2+6x+11}dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx + \int \frac{1}{(x+3)^2+2}dx =$

$$= \int \frac{d(x^2+6x+11)}{x^2+6x+11}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+3}{\sqrt{2}} =$$

$$= ln(x^2+6x+11)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+3}{\sqrt{2}}+C$$

4). $\int \frac{3x-5}{x^2+8x+16}dx =$

$$\begin{bmatrix} \frac{3x-5}{x^2+8x+16}=\frac{3x-5}{(x+4)^2}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{(x+4)^2} \\ 3x-5=A(x+4)+B \\ x^1:\ 3=A \\ x^0:\ -5=4A+B,\ \ B=-17 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\frac{3x-5}{x^2+8x+16}=\frac{3}{x+4}-\frac{17}{(x+4)^2}\right]$$

$$= \int\left(\frac{3}{x+4}-\frac{17}{(x+4)^2}\right)dx = 3ln|x+4|+\frac{17}{x+4}+C$$

5). $\int \frac{3x^2+12x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx =$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{3x^2+12x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \\ 3x^2+12x+11 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x+2) \\ x=-1:\ 2=2A,\ \ A=1 \\ x=-2: -1=-B,\ \ B=1 \\ x=-3:\ 2=2C,\ \ C=1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\frac{3x^2+12x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right]$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) dx = ln|x+1| + ln|x+2| + ln|x+3| + C =$$

$$= ln|(x+1)(x+2)(x+3)| + C$$

6). $\int \frac{x^3-1}{x^2+4x+6} dx =$

$$\left[\begin{array}{l|l} -\ x^3-1 & x^2+4x+6 \\ \ \ \underline{x^3+4x^2+6x} & \overline{x-4} \\ \quad -\ -4x^2-6x-1 & \\ \quad\ \ \ \underline{-4x^2-16x-24} & \\ \qquad\qquad 10x+23 & \end{array}\right]$$

$$= \int \left(x - 4 + \frac{10x+23}{x^2+4x+6}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{(2x+4)\cdot 5+3}{x^2+4x+6} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 5ln(x^2+4x+6) + 3\int \frac{dx}{(x+2)^2+2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 5ln(x^2+4x+6) + \frac{3}{\sqrt{2}} arctg\, \frac{x+2}{\sqrt{2}} + C$$

7). $\int \frac{dx}{x^4+4}$

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 =$$

$$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$1 = (Ax+B)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x^2-2x+2)$$

$$\begin{cases} x^3: \quad A + C = 0 \\ x^2: \quad 2A + B - 2C + D = 0 \\ x^1: \quad 2A + 2B + 2C - 2D = 0 \\ x^0: \quad 2B + 2D = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C = -A \\ A - C = -\frac{1}{4} \\ B = D \\ B + D = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ C = \frac{1}{8} \\ B = D = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^4+4} = \int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \int \frac{(2x-2)\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{8}}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{(2x+2)\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{8}}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{16} ln \frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8} arctg(x-1) + \frac{1}{8} arctg(x+1) + C$$

8). $f(x) = \frac{x^3-5}{x^2+4}, \qquad F(2) = -\frac{5\pi}{4}, \quad F(-2) = ?$

$$\int \frac{x^3-5}{x^2+4}dx = \int \frac{x^3+4x-4x-5}{x^2+4}dx = \int \left(x - \frac{4x+5}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - 5\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{x^2}{2} - 2\ln(x^2+4) - \frac{5}{2} arctg \frac{x}{2} + C$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2\ln(x^2+4) - \frac{5}{2} arctg \frac{x}{2} + C$$

$$F(2) = 2 - 2ln8 - \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + C = -\frac{5\pi}{4}$$

$$F(-2) = 2 - 2ln8 + \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + C$$

$$F(2) - F(-2) = -\frac{5\pi}{4} \Rightarrow F(-2) = F(2) + \frac{5\pi}{4} = 0.$$

9). $f(x) = \frac{3x^2+3x+6}{x^3+8}, \ F(1) = ln\frac{9}{8}, \quad F(0) = ?$

$$\frac{3x^2+3x+6}{x^3+8} = \frac{3x^2+3x+6}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

$$A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2) = 3x^2 + 3x + 6$$

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 1$$

$$\int \frac{3x^2+3x+6}{x^3+8}dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{x^2-2x+4}\right)dx =$$

$$= ln|x^3+8| + \sqrt{3}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$F(x) = ln|x^3+8| + \sqrt{3}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$F(1) = ln9 + C \;\Rightarrow\; C = -ln8$$

$$F(0) = ln8 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

<u>*Домашнее задание:*</u> Типовой расчет, 2 семестр, задача 1.1, № 40-59.

<u>*Примеры для самостоятельного решения.*</u>

1. $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+4x+3},\ F(0) = 2ln3,\ \ F(1) = ?$
2. $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+4x+7},\ F(-2) = -\frac{3}{2}ln4,\ \ F(1) = ?$
3. $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+11x+28},\ F(-3) = ln8,\ \ F(-1) = ?$
4. $f(x) = \frac{2x}{x^2-4x+4},\ F(3) = -1-2ln2,\ \ F(4) = ?$
5. $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1},\ F\left(\frac{3}{2}\right) = -ln2,\ \ F(2) = ?$
6. $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)},\ F(1) = \frac{1}{2}ln\frac{5}{2},\ \ F(2) = ?$
7. $f(x) = \frac{x^3-3}{x^2+3},\ F(0) = \frac{3}{2}ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2},\ \ F(1) = ?$
8. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2x+4},\ F(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi,\ \ F(2) = ?$
9. $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+6x+12},\ F(0) = 12ln4 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},\ \ F(-3) = ?$
10. $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-5x+6},\ F(4) = ln6,\ \ F(3{,}5) = ?$