Практическое занятие 4

Интегрирование тригонометрических функций и иррациональностей

1. Интегрирование тригонометрических функций

I. Универсальная тригонометрическая подстановка

$R(sinx, cosx) -$ рациональная функция от $sinx, cosx$.

Подстановка: $tg\frac{x}{2}=t, \frac{x}{2}=arctgt, dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \; cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}, sinx=\frac{2t}{1+t^2}$

сводит $\int R(sinx, cosx)\,dx$ к интегралу от рациональной дроби.

Примеры.

1) $\int\frac{dx}{5-13sinx}=\left[tg\frac{x}{2}=t\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{26t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{5t^2-26t+5}=$

$=\left[\begin{matrix}\frac{2}{5t^2-26t+5}=\frac{A}{t-5}+\frac{B}{5t-1}\\ A(5t-1)+B(t-5)=2,\;\; A=\frac{1}{12},\;\; B=-\frac{5}{12}\end{matrix}\right]=\int\left(\frac{\frac{1}{12}}{t-5}-\frac{\frac{5}{12}}{5t-1}\right)dt=$

$=\frac{1}{12}ln|t-5|-\frac{1}{12}ln|5t-1|+C=\frac{1}{12}ln\left|\frac{t-5}{5t-1}\right|+C=\frac{1}{12}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{5tg\frac{x}{2}-1}\right|+C$.

2) $\int\frac{dx}{5+3cosx}=\left[tg\frac{x}{2}=t\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{2t^2+8}=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=$

$=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}\right)+C$.

3) $\int\frac{dx}{5+4sinx-3cosx}=\left[tg\frac{x}{2}=t\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{8t}{1+t^2}-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{8t^2+8t+2}=\int\frac{dt}{4t^2+4t+1}=$

$=\int\frac{dt}{(2t+1)^2}=-\frac{1}{2(2t+1)}+C=-\frac{1}{2\left(2tg\frac{x}{2}+1\right)}+C$.

II. Частные подстановки.

1). $R(sinx, cosx)$ – нечетная относительно $sinx$: $R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$

Подстановка $cosx = t$.

2). $R(sinx, cosx)$ – нечетная относительно $cosx$: $R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$

Подстановка $sinx = t$.

3). $R(sinx, cosx)$ – четная относительно $sinx, cosx$: $R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx)$

Подстановка $tgx = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $cos^2x = \frac{1}{1+t^2}$, $sin^2x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Примеры.

1. $$\int \frac{cos^3x}{sin^4x}dx = \begin{bmatrix} sinx=t \\ x=arcsint \\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ cosx=\sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^4} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$
$$= -\frac{1}{3sin^3x} + \frac{1}{sinx} + C$$

Можно подойти к замене по-другому:

$$\int \frac{cos^3x}{sin^4x}dx = \int \frac{cos^2x \cdot cosx}{sin^4x}dx = \int \frac{1-sin^2x}{sin^4x}dsinx = [sinx = t] = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \cdots$$

2. $$\int sin^3 2xdx = -\frac{1}{2}\int(1 - cos^2 2x)\, d(cos2x) = -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{6}cos^3 2x + C$$

3. $$\int \frac{sin^3x}{cosx-3}dx = \begin{bmatrix} cosx=t \\ x=arccost \\ dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ sinx=\sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} = -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t-3} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2-1}{t-3}dt = \int \frac{t^2-9+8}{t-3}dt =$$
$$= \int(t+3)dt + 8\int \frac{dt}{t-3} = \frac{t^2}{2} + 3t + 8ln|t-3| + C =$$
$$= \frac{cos^2x}{2} + 3cosx + 8ln|cosx - 3| + C.$$

4. $$\int \sqrt[3]{sin^2x} \cdot cos^3xdx = \begin{bmatrix} sinx=t \\ x=arcsint \\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ cosx=\sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} = \int t^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^{\frac{2}{3}}(1-t^2)dt =$$
$$= \int t^{\frac{2}{3}}dt - \int t^{\frac{8}{3}}dt = \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{sin^5x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{sin^{11}x} + C.$$

5. $\int \frac{dx}{sin^2x-4sinx\cdot cosx+5cos^2x}=\begin{bmatrix} tgx=t \\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \\ cos^2x=\frac{1}{1+t^2} \\ sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}-4\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+5\frac{1}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t^2-4t+5}=$

$=\int \frac{dt}{(t-2)^2+1}=arctg(t-2)+C=arctg(tgx-2)+C.$

III. <u>Интегрирование произведений</u> $sin\alpha\cdot cos\beta,\ cos\alpha\cdot cos\beta,\ sin\alpha\cdot sin\beta.$

Применяем формулы:

$cos\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

$sin\alpha\cdot sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

$sin\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$

<u>Пример.</u> $\int sin4x\cdot sin6xdx=\frac{1}{2}\int cos2xdx-\frac{1}{2}\int cos10xdx=\frac{1}{4}sin2x-\frac{1}{20}sin10x+C$

IV. $\int sin^mx\cdot cos^nxdx,\ \ m,n-$ натуральные четные числа.

Используем формулы понижения степени:

$sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2x,\ cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2x,\ sinx\cdot cosx=\frac{1}{2}sin2x.$

<u>Примеры.</u>

1. $\int sin^2x\cdot cos^2xdx=\frac{1}{4}\int sin^22xdx=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int cos4xdx=$

$=\frac{x}{8}-\frac{1}{32}sin4x+C$

2. $\int sin^23xdx=\frac{1}{2}\int(1-cos6x)\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}sin6x+C$

V. $\int sin^mx\cdot cos^nxdx,\ \ (m+n)-$ четное, целое, отрицательное, подстановка $tgx=t.$

<u>Примеры.</u>

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{cos^7 x \cdot sinx}} = \left[\begin{matrix} m+n=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=-4<0 \\ tgx=t \end{matrix} \right] = \cdots = \int \frac{1+t^2}{\sqrt{t}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int t^{\frac{3}{2}} dt =$

$= 2\sqrt{tgx} + \frac{2}{5}\sqrt{tg^5 x} + C$

2. $\int \frac{dx}{sin^4 x} = \int \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^4 x} dx = \int \frac{dx}{sin^2 x} dx + \int cosx \frac{cosx}{sin^4 x} dx = \left[\begin{matrix} u=cosx, & dv=\frac{cosx}{sin^4 x}dx \\ du=-sinxdx, & v=-\frac{1}{3sin^3 x} \end{matrix} \right] =$

$= -ctgx - \frac{cosx}{3sin^3 x} + \frac{1}{3} ctgx + C = -\frac{2}{3} ctgx - \frac{cosx}{3sin^3 x} + C$

VI. <u>Интегрирование $tgx, ctgx$.</u>

Используем формулы: $tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x} - 1$.

<u>Примеры.</u>

1. $\int tg^3 x dx = \int tgx \left(\frac{1}{cos^2 x} - 1 \right) dx = \int tgx dtgx + \int \frac{dcosx}{cosx} = \frac{tg^2 x}{2} + ln|cosx| + C$

2. $\int ctg^4 x dx = \int ctg^2 x \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1 \right) dx = -\int ctg^2 x dctgx - \int \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1 \right) dx =$

$= -\frac{ctg^3 x}{3} + ctgx + x + C$

VII. При интегрировании гиперболических функций используют тождества:

$ch^2 x - sh^2 x = 1$

$ch2x = ch^2 x + sh^2 x$

$sh2x = 2shx \cdot chx$

$ch2x = 2ch^2 x - 1$

$ch2x = 2sh^2 x + 1$

<u>Примеры.</u>

1. $\int sh^2 x chx\, dx = \int sh^2 x\, d(shx) = \frac{1}{3} sh^3 x + C$

2. $\int ch^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int (ch2x + 1))\, dx = \frac{1}{4} sh2x + \frac{1}{2} x + C$

3. $\int sh^3 x\, dx = \int (ch^2 x - 1)\, d(chx) = \frac{1}{3} ch^3 x - chx + C$

<u>Домашнее задание</u>: Типовой расчет, задача 1.1, № 60-79.

2. Интегрирование иррациональностей

I. $\int R\left(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}\right)dx, k, m -$ натуральные числа.

Подстановка: $\sqrt[n]{x} = t, n -$ наименьшее кратное показателей всех радикалов (корней), входящих в подынтегральную функцию.

$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$. Подстановка: $\sqrt[n]{ax+b} = t.$

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$. Подстановка: $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t.$

Примеры.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt[6]{x}=t \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{bmatrix} =$

$= \int \frac{t^3 6t^5}{t^6-t^4}dt = 6\int \frac{t^4}{t^2-1}dt = 6\int \frac{t^4-1+1}{t^2-1}dt =$

$= 6\int (t^2+1)\,dt + 6\int \frac{1}{t^2-1}dt = 6\frac{t^3}{3} + 6t + 6\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$

$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+2} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+3}=t \\ x=t^2-3 \\ dx=2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t+2} = \int \left(2 - \frac{4}{t+2}\right)dt = 2t - 4ln|t+2| + C =$

$= 2\sqrt{x+3} - 4ln\left(\sqrt{x+3}+2\right) + C$

3. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}=t,\ \ \frac{x-2}{x+1}=t^2 \\ x-2=t^2x+t^2,\ \ x(t^2-1)=-(t^2+2) \\ x=-\frac{t^2+2}{t^2-1},\ \ dx=\frac{6tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \\ \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}dx=-\frac{t^2-1}{t^2+2}\cdot t\cdot\frac{6t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-\frac{6t^2}{(t^2+2)(t^2-1)}dt \end{bmatrix} =$

$= -\int \frac{6t^2}{(t^2+2)(t^2-1)}dt = -\int\left(\frac{4}{t^2+2} + \frac{2}{t^2-1}\right)dt =$

$= -2\sqrt{2}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C, t = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

II. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Выделение полного квадрата в знаменателе под корнем.

Сведение к интегралам вида: $\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}, \ a > 0 \\ \int \frac{dx}{\sqrt{A-x^2}}, \ a < 0 \end{cases}.$

Примеры.

1. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+6x+18}} dx = \int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2\cdot 3\cdot x+9+9}} dx = \int \frac{x-2}{\sqrt{(x+3)^2+9}} dx = \begin{bmatrix} x+3=t \\ dx=dt \end{bmatrix} =$

$= \int \frac{t-5}{\sqrt{t^2+9}} dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+9}} dt - \int \frac{5}{\sqrt{t^2+9}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{\sqrt{t^2+9}} - 5ln\left(t + \sqrt{t^2+9}\right) =$

$= \sqrt{t^2+9} - 5ln\left(t + \sqrt{t^2+9}\right) + C =$

$= \sqrt{x^2+6x+18} - 5ln\left(x + 3 + \sqrt{x^2+6x+18}\right) + C$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{-(x^2-2\cdot x+1-4)}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx = \begin{bmatrix} x-1=t \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{t+1}{\sqrt{4-t^2}} dt =$

$= \int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} dt + \int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{d(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} + arcsin\frac{t}{2} =$

$= -\sqrt{4-t^2} + arcsin\frac{t}{2} + C = -\sqrt{3+2x-x^2} + arcsin\frac{x-1}{2} + C$

3. При интегрировании выражений, содержащих квадратные корни из квадратных двучленов, полезными оказываются тригонометрические и гиперболические подстановки:

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ замена $x = asint$ или $x = acost$

$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$ замена $x = \frac{a}{sint}$ или $x = \frac{a}{cost}$

$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$ замена $x = atgt$ или $x = actgt$.

Замены приводят к вычислению интегралов вида: $\int R(cosx, sinx)dx$.

Примеры.

1. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, $F(0) = 0$, $F(3) = ?$

$$\int \sqrt{9-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} x=3sint \\ dx=3costdt \\ t=arcsin\frac{x}{3} \end{bmatrix} = \int \sqrt{9-9sin^2t} \cdot 3costdt = 9\int cos^2tdt =$$

$= \frac{9}{2}\int(1+cos2t)dt = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}sin2t + C = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}2sintcost + C =$

$= \frac{9}{2}arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + C = \frac{9}{2}arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{9-x^2} + C$

$F(0) = C = 0$, $F(3) = \frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{4}$.

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx = \begin{bmatrix} x=\frac{3}{cost} \\ dx=\frac{3sint}{cos^2t}dt \\ cost=\frac{3}{x} \end{bmatrix} = \cdots = \frac{1}{9}\int sin^2t \cdot costdt = \frac{1}{9}\int sin^2tdsint = \frac{1}{9}\frac{sin^3t}{3} + C =$

$= \left(sint = \sqrt{1-cos^2t} = \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right) = \frac{1}{27}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right)^3 + C$

3. $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}} = \begin{bmatrix} x=5tgt \\ dx=\frac{5dt}{cos^2t} \\ \sqrt{25+x^2}=\frac{5}{cost} \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\int costdt = \frac{1}{25}sint + C = \begin{bmatrix} ctgt=\frac{5}{x} \\ \sqrt{\frac{1}{sin^2t}-1}=\frac{5}{x} \\ \frac{1}{sin^2t}=\frac{25+x^2}{x^2} \\ sint=\frac{x}{\sqrt{25+x^2}} \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{25}\frac{x}{\sqrt{25+x^2}} + C$

Домашнее задание: Типовой расчет, задача 1.1, № 80-95.

Примеры для самостоятельного решения.

1). $f(x) = sinx \cdot cos2x, \quad F(0) = -\frac{1}{3}, \ F(\pi) = ?$

2). $f(x) = sin^3x \cdot cos^2x, \quad F(0) = \frac{11}{5}, \ F(\pi) = ?$

3). $f(x) = sin3x \cdot cos7x, \quad F(0) = 0{,}9, \ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

4). $f(x) = sin^4x, \quad F(0) = \frac{\pi}{16}, \ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

5). $f(x) = \frac{1}{3sinx+4cosx}, \quad F(0) = 0, \ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

6). $f(x) = \frac{cos^3x}{sin^2x}, \quad F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{2}, \ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

7). $f(x) = \frac{1}{cos^4x}, \quad F(0) = \frac{2}{3}, \ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

8). $f(x) = \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}, \quad F(1) = 6 + \frac{\pi}{2}, \ F(27) = ?$

9). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}+3}, \quad F(-2) = 6ln\frac{5}{3}, \ F(2) = ?$

10). $f(x) = \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+6x+14}}, \quad F(-1) = -15ln5, \ F(-5) = ?$

11). $f(x) = \frac{1+2x}{\sqrt{3+2x-x^2}}, \quad F(3) = \frac{3\pi}{2}, \ F(1) = ?$

12). $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}, \quad F\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{3}, \ F\left(\frac{4}{3}\right) = ?$

13). $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad F(0) = 0, \ F(2) = ?$

14). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2-x^2)^3}}, \quad F(0) = \frac{1}{2}, \ F(1) = ?$

15). $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+6}}, \quad F(-1) = -6, \ F(3) = ?$