Семинар 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Понятие определителя n-го порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Определитель n-го порядка. Разложение определителя по строке и столбцу. Вычисление определителей с помощью их свойств.

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ: Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами Лекции 2. Определители. Формулы Крамера.

Пример 1. Для $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 11 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти миноры элементов a_{12}, a_{21}, a_{32}.

Решение.

Для нахождения минора M_{12} элемента a_{12} вычеркнем в матрице первую строку и второй столбец. Получим новую матрицу 2×2. Ее определитель есть минор элемента a_{12}:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 77 - 0 = 77$$

Аналогично находим :$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 17$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 22 = -22$

Ответ. $M_{12} = 77$, $M_{21} = 17$,$M_{32} = -22$.

Пример 2. Для $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 11 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ из примера 1. Найти алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{21}, a_{32}.

Решение.

Алгебраическое дополнение элемента a_{12} получаем умножением минора M_{12} на значение $(-1)^{1+2} = -1$, так как в нашем случае i = 1 (номер строки), j = 2 (номер столбца): $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -77$.

Рассуждая аналогично, получаем: $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -17$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = 22$

Ответ. $A_{12} = -77$, $A_{21} = -17$,$A_{32} = 22$.

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, используя разложение по первому столбцу. Проверить результат, вычислив определитель, разложением по второй строке.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$5 \cdot (-8) - 1 \cdot 8 + 7 \cdot (-8) = -104$$

Теперь вычислим определитель, разложив его по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 8 + 0 - 4 \cdot 24 = -104$$

Ответ. -104.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, используя свойства определителей.

Решение.

Элементарными преобразованиями строк (см. материалы лекций) приведем определитель к ступенчатому виду.

На первом шаге прибавим ко второй строке определителя первую строку, умноженную на (-5), к третьей строке определителя прибавим первую строку, умноженную на (3).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -5R1 \\ +3R1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5-5 & 2+5 & 0-20 \\ -3+3 & 2-3 & 1+12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -20 \\ 0 & -1 & 13 \end{vmatrix} =$$

Поменяем местами вторую и третью строки, меняя знак определителя:

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 13 \\ 0 & 7 & -20 \end{vmatrix} =$$

К третьей троке определителя прибавим вторую, умноженную на 7

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & -20+91 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 71 \end{vmatrix} = 71.$$

Ответ. 71.

Пример 5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix}$, используя свойства определителей.

Решение.

На первом шаге вынесем за определитель множитель 2 из первой строки и множитель 3 из третьей строки.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Поменяем местами вторую и первую строки, меняя знак определителя.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3R1 \\ -2R2 \end{matrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

Прибавим ко второй строке третью, умноженную на (-2):

$$-6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (3):

$$= -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3R2 \end{matrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} = 114$$

Ответ. 114.

Замечание. Данный определитель, возможно, проще было бы вычислить, раскрыв по первому столбцу, после того, как мы получили в первом столбце все нули, кроме одного элемента:

$$-6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-19) = 114$$

Пример 6. Вычислить определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Используя свойства определителя, в какой-либо строке или в каком-либо столбце обратим в нуль все элементы, кроме одного. Выберем последний столбец. Прибавим к первой строке четвертую, умноженную на 2, и вычтем из третьей строки четвертую:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по четвертому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее добьемся максимального количества нулей во второй строке: к первому столбцу прибавим второй, умноженный на 5, к третьему столбцу прибавим второй, умноженный на 4, затем разложим определитель третьего порядка по второй строке, затем посчитаем получившийся определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 12 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} = -(-8 \cdot 11 - 1 \cdot 12) = 88 + 12 = 100.$$

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Пример 7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = -7 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$, матрица невырождена, а значит существует единственное решение.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 7 = 28.$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 28 = -42.$

$x_1 = \frac{28}{14} = 2$, $x_2 = \frac{-42}{14} = -3.$

Сделаем проверку, подставив найденные неизвестные в исходную систему.

Ответ: (2; -3).

Пример 8. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = 2 \end{cases}$$

Решение.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, матрица невырожденная, а значит, существует единственное решение.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 54$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 27$.

$x_1 = \frac{-54}{27} = -2$, $x_2 = \frac{54}{27} = 2$, $x_3 = \frac{27}{27} = 1$.

Сделаем проверку, подставив найденные неизвестные в исходную систему.

Ответ: (-2; 2;1).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Для $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Найти алгебраические дополнения каждого элемента.

Ответ. $A_{11} = 40$, $A_{12} = -18$, $A_{13} = -6$, $A_{21} = 10$, $A_{22} = 6$,$A_{23} = 2$, $A_{31} = 20$, $A_{32} = -23$, $A_{33} = 4$.

В заданиях 2-5 вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу.

2. $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$, **3.** $\begin{vmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$, **4.** $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$, **5.** $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$

Ответы. 2. 46, **3.** -52, **4.** -13, **5.** 18.

В заданиях 6-9 вычислить определители, используя свойства определителей.

6. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$, **7.** $\begin{vmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$, **8.** $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$, **9.** $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-7} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$

Ответы. 6. -30, **7.** -84, **8.** -82, **9.** 80.

В заданиях 10-15 решить системы линейных уравнений методом Крамера

10. $\begin{cases} \mathbf{3x_1 + 2x_2 = 1} \\ \mathbf{-4x_1 + x_2 = 6} \end{cases}$, **11.** $\begin{cases} \mathbf{x_1 + 5x_2 = 3} \\ \mathbf{2x_1 + x_2 = 6} \end{cases}$, **12.** $\begin{cases} \mathbf{7x_1 - 5x_2 = 31} \\ \mathbf{-2x_1 + 2x_2 = -10} \end{cases}$

13. $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 13} \\ \boldsymbol{2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7} \\ \boldsymbol{5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9} \end{cases}$**, 14.** $\begin{cases} \boldsymbol{3x_1 + 2x_2 - x_3 = -5} \\ \boldsymbol{-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2,} \\ \boldsymbol{4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8} \end{cases}$ **15.**$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 4} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13} \\ \boldsymbol{x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 25} \end{cases}$

Ответ: **10**. (-1; 2), **11**. (3;0), **12**. (3;-2), **13**.(1;-1;2), **14**.(1;-3;2), **15**.(-2;3;3).