5. Подготовка к контрольной работе по матрицам.

Примерный вариант.

1. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений тремя методами:
1) методом Крамера;
2) методом обратной матрицы (проверить выполнимость равенства $A \cdot A^{-1} = E$);
3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

4. Найти общее решение линейной однородной системы методом Гаусса (указать ранг матрицы системы). Сделать проверку.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти общее решение линейной неоднородной системы методом Гаусса (указать ранг матрицы системы). Выделить общее решение соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 = -2. \end{cases}$$

Решение примерного варианта.

1. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

►Применяем свойство определителей: если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины.

Прибавим к первой строке четвертую умноженную на 2. Затем к четвертой строке добавим третью умноженную на 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Раскладываем определитель по третьему столбцу, и в полученном определителе третьего порядка, к третьей строке добавим вторую.

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = 0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix} - 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 9 & 0 & 13 \end{vmatrix} = -0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} - 0 = 3 \cdot (65 + 9) = 222. \blacktriangleleft$$

2. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

►Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Запишем матричное уравнения в виде $XA = B$. Здесь X — искомая матрица размерностью $[3 \times 2]$.

Умножаем обе части матричного уравнения справа на матрицу A^{-1}, обратную матрице A :

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

Находим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.
$|A| = 5 \cdot (-2) - (-4) \cdot 3 = 2;$
$A_{11} = M_{11} = -2;$
$A_{21} = -M_{21} = 4;\ A_{12} = -M_{12} = -3;\ A_{22} = M_{22} = 5.$

$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) & -2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \\ 7 \cdot (-2) + 6 \cdot (-3) & 7 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -18 & 32 \\ -32 & 58 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 16 \\ -16 & 29 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $X \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 16 \\ -16 & 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3 & 4-2 \\ -45+48 & 36-32 \\ -80+87 & 64-58 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = B.$ ◀

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 16 \\ -16 & 29 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему уравнений тремя методами:
1) методом Крамера;
2) методом обратной матрицы (проверить выполнимость равенства $A \cdot A^{-1} = E$);
3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 & = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 & = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 16. \end{cases}$$

1) Метод Крамера.

►Найдём определитель основной матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 2) - (1 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3) =$$
$$= 12 - 2 + 10 - 1 + 20 - 12 = 27.$$

При вычислении $|A|$ использовано правило треугольника. Так как $|A| \neq 0$, получаем, $r(A) = r(A|B) = 3$. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли система совместна и определённа, т.е. имеет единственное решение.

Вычислим определители неизвестных:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -11 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 16 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0.$$

К первой строке определителя добавили вторую и из третьей строки вычли вторую, умноженную на 2.

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 16 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} + 11 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} =$$
$$= 0 + 198 + 72 = 270.$$

Разложили определитель по первой строке.

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -11 \\ 5 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -11 \\ 8 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -48 + 21 = -27.$$

Ко второй строке определителя добавили первую и к третьей строке добавили первую, умноженную на 2.

Получили:

$|A| = 27;\quad \Delta_{x_1} = 0;\quad \Delta_{x_2} = 270;\quad \Delta_{x_3} = -27.$

Используя формулы Крамера, найдем решение заданной системы:

$x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{|A|} = \dfrac{0}{27} = 0; x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{|A|} = \dfrac{270}{27} = 10; x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{|A|} = \dfrac{-27}{27} = -1.$

Проверка. Подставим полученное решение в заданную систему.

$$\begin{cases} 3 \cdot 0 - 10 - 1 & = -11, \\ 5 \cdot 0 + 10 + 2 \cdot (-1) & = 8, \\ 0 + 2 \cdot 10 - 4 & = 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11 & = -11, \\ 8 & = 8, \\ 16 & = 16. \end{cases}$$

Получили тождество. ◄

Ответ: $x_1 = 0;\ x_2 = 10;\ x_3 = -1.$

2) Метод обратной матрицы.

►В матричной форме эта система запишется в виде $AX = B$. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решение ищем в виде

$$X = A^{-1}B.$$

Обратная матрица A^{-1}, вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}. \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы найден при решении данной системы методом Крамера $|A| = 27$.

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6,\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-18,\ A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=11,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-1,$

$A_{13}=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=9,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=8.$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}0 & 6 & -3\\ -18 & 11 & -1\\ 9 & -7 & 8\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что условие $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ выполняется.

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}0 & 6 & -3\\ -18 & 11 & -1\\ 9 & -7 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение системы записываем в виде

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}0 & 6 & -3\\ -18 & 11 & -1\\ 9 & -7 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-11\\ 8\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 10\\ -1\end{pmatrix}.\ ◄$$

Ответ: $x_1=0$, $x_2=10$, $x_3=1$.

3) Метод Гаусса.

►Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

(1). К 3-ей строке прибавим 1-ую, умноженную на 2, а затем ко 2-ой строке прибавим первую.

(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 1 & -11\\ 5 & 1 & 2 & 8\\ 1 & 2 & 4 & 16\end{array}\right)\overset{(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 1 & -11\\ 8 & 0 & 3 & -3\\ 7 & 0 & 6 & -6\end{array}\right)\overset{(2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 1 & -11\\ 1 & 0 & -3 & 3\\ 7 & 0 & 6 & -6\end{array}\right).$$

(3). Из 3-ей строки вычтем 2-ую, умноженную на 7.

(4). Из 1-ой вычтем 2-ую умноженную на 3 и 3-ью строку разделим на 27.

(5). К 1-ой строке добавим 2-ую, умноженную на -10 и ко второй строке прибавим третью, умноженную на 3.

(6). Первую строку умножим на -1 и поменяем её со второй.

$$\overset{(3)}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \end{array}\right) \overset{(4)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 10 & -20 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\overset{(5)}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{(6)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Мы выполнили прямой и обратный ход метода Гаусса. Запишем полученную систему, которая равносильна исходной, в стандартном виде:

$$\begin{cases} x_1 & = 0, \\ x_2 & = 10, \\ x_3 & = -1. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Ответ: $x_1 = 0,\ x_2 = 10,\ x_3 = -1.$

4. Найти общее решение линейной однородной системы методом Гаусса (указать ранг матрицы системы). Сделать проверку.

$$\begin{cases} 4x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = 0, \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & +2x_5 & = 0, \\ 6x_1 & +9x_2 & +x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = 0, \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +x_4 & & = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

►Выпишем матрицу системы и при помощи элементарных преобразований приведём её к равносильной. Все элементарные преобразования правую часть не изменяют.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Из 3-ей строки вычтем 1-ую, а затем из 1-ой вычтем 2-ую.
(2) Вычтем первую строку из 2-ой, 3-ей и 4-ой.
(3) 2-ую строку прибавим к 3-ей и 4-ой.
(4) Убираем нулевую строку и к 2-ей строке прибавляем 3-ью.
(5) Из 1-ой строки вычтем 2-ую и к 3-ей прибавим вторую, умноженную на 2.

(6) К 1-ой строке прибавим 3-ью и 3-ью умножим на -1.

$$A \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $rA) = r(A|B) = 3$, количество неизвестных равно 5. Следовательно, система совместна, не неопределённа, т.е. имеет бесконечное число решений. Запишем полученную систему, которая равносильна исходной, в стандартном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных выбираем переменные x_1, x_3 и x_5, тогда свободными неизвестными будут x_2 и x_4. Выразим базисные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = -1{,}5x_2 - 0{,}5x_4, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Свободные неизвестные x_2 и x_4 могут принимать произвольные значения, обозначим их c_1 и c_2, соответственно. Общее решение исследуемой системы уравнений можно представить в виде линейной комбинации

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Фундаментальной системой решений (ФСР) исследуемой однородной системы (5.1) являются линейно независимые матрицы-столбцы $\{X_1^0, X_2^0\}$:

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^0 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрицы-столбцы X_1^0 и X_2^0 образуют фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих матриц-столбцов $c_1X_1^0 + c_2X_2^0$ равна нулевой матрице только при $c_1 = c_2 = 0$.

$$c_1X_1^0 + c_2X_2^0 = \begin{pmatrix} -1{,}5c_1 - 0{,}5c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем эти матрицы-столбцы в ОСЛАУ $AX = 0$.

$$A \cdot X_1^0 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+6 \\ -3+3 \\ -9+9 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X_2^0 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -1+1 \\ -3+3 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решения системы (5.1) представляет собой сумму линейной комбинации матриц-строк, образующих фундаментальную систему решений ОСЛАУ.

$$X = c_1 \cdot X_1^0 + c_2 \cdot X_2^0,$$

где c_1, и c_2 — произвольные действительные числа. ◄

Ответ:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1{,}5\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-0{,}5\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

5. Найти общее решение линейной неоднородной системы методом Гаусса (указать ранг матрицы системы). Выделить общее решение соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной системы. Сделать проверку.

$$\left\{\begin{array}{lllll}-x_1 & +x_2 & +2x_3 & -4x_4 & =3,\\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & =11,\\ 2x_1 & -x_2 & -6x_3 & +9x_4 & =-2.\end{array}\right. \qquad (5.2)$$

►Выпишем расширенную матрицу $A|B$ и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

$$A|B=\left(\begin{array}{rrrr|r}-1 & 1 & 2 & -4 & 3\\ -1 & 3 & -2 & -2 & 11\\ 2 & -1 & -6 & 9 & -2\end{array}\right).$$

(1). Из 2-ей строки вычтем 1-ую, а затем к 3-ей строке прибавим 2-ую, умноженную на 2.
(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью, умноженную на 2 и ещё первую строку умножим на -1.
(3) К первой строке прибавляем 3-ю строку и убираем нулевую строку.

$$(A|B)=\overset{(1)}{\sim}\left(\begin{array}{rrrr|r}-1 & 1 & 2 & -4 & 3\\ 0 & 2 & -4 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4\end{array}\right)\overset{(2)}{\sim}\left(\begin{array}{rrrr|r}1 & -1 & -2 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4\end{array}\right)\sim$$
$$\overset{(3)}{\sim}\left(\begin{array}{rrrr|r}1 & 0 & -4 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4\end{array}\right).$$

$r(A)=r(A|B)=2$. Следовательно, заданная система совместна, но неопределённа.

Запишем полученную систему, которая равносильна исходной, в стандартном виде:

$$\left\{\begin{array}{lllll}x_1 & & -4x_3 & +5x_4 & =1,\\ & x_2 & -2x_3 & +x_4 & =4.\end{array}\right.$$

В качестве базисных неизвестных выбираем переменные x_1 и x_2, тогда свободными неизвестными будут x_3 и x_4. Выразим базисные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - 5x_4 + 1, \\ x_2 = 2x_3 - x_4 + 4. \end{cases}$$

Свободные неизвестные x_3 и x_4 могут принимать произвольные значения, обозначим их c_1 и c_2, соответственно. Общее решение исследуемой системы уравнений можно представить в виде линейной комбинации

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

При этом сумма первых двух матриц-столбцов является общим решением однородной системы с основной матрицей A — X_{OO}, а последнее слагаемое является частным решением заданной неоднородной системы (5.2) — $X_{\text{ч}}$.

$$X_{OO} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \ X_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальной системой решений (ФСР) исследуемой однородной системы являются линейно независимые матрицы-столбцы $\{X_1^0, X_2^0\}$:

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2^0 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрицы-столбцы X_1^0 и X_2^0 образуют фундаментальную систему решений. Эти матрицы-столбцы являются линейно независимые так как их линейная комбинация равна нулевой матрице, тогда и только тогда, когда $c_1 = c_2 = 0$.

$$c_1X_1^0 + c_2X_2^0 = \begin{pmatrix} 4c_1 - 5c_2 \\ 2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляем эти матрицы-столбцы в ОСЛАУ $AX = 0$.

$$A \cdot X_1^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2+2 \\ -4+6-2 \\ 8-2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X_2^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1-4 \\ 5-3-2 \\ -10+1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяем частное решение НСЛАУ (5.2).

$$AX_{ч} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ -1+12 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Получили правую часть системы.

Общее решения системы (5.2) представляет собой сумму линейной комбинации матриц-строк, образующих фундаментальную систему решений ОСЛАУ и произвольное частное решение НСЛАУ.

$$X = c_1 \cdot X_1^0 + c_2 \cdot X_2^0 + X_{ч},$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные числа. ◀

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$