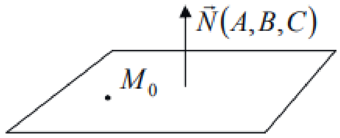
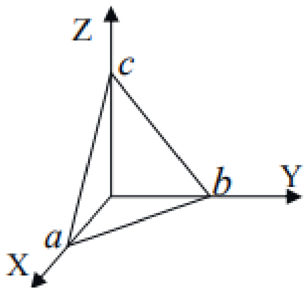
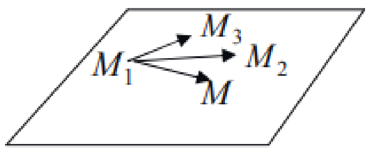
Семинар 10. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, параллельно двум неколлинеарным векторам. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ. Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами Лекции 10 Плоскость в пространстве. Выписать основные определения и формулы.

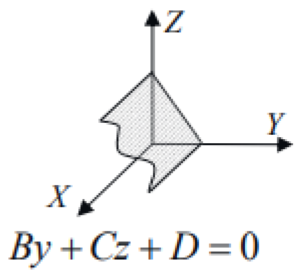
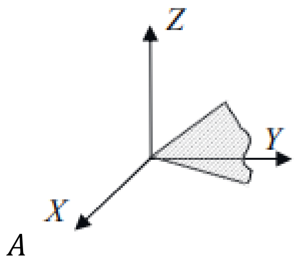
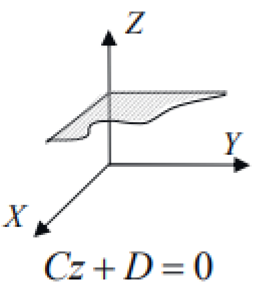
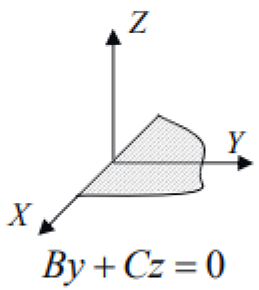
Для наглядности представим основной теоретический материал по теме в виде двух таблиц.

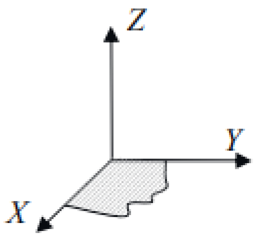
Уравнения плоскости

№	Способ задания	Вид уравнения
1.	Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\ (x_0\,, y_0\,, z_0\,)$, перпендикулярно вектору $\vec{N}\ = \{A, B, C\}$. Вектор $\overrightarrow{N}\ = \{A, B, C\}$ − нормальный вектор плоскости	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 
2.	Общее уравнение плоскости	$Ax\ +\ By\ +\ Cz\ +\ D\ =\ 0$, где $A^2\ +\ B^2\ +\ C^2\ \neq 0$
3.	Уравнение плоскости «в отрезках»	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, где $a, b, c \neq 0$ 
4.	Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1\ (x_1\,, y_1\,, z_1\,)$, $M_2\ (x_2\,, y_2\,, z_2\,)$, $M_3\ (x_3\,, y_3\,, z_3\,)$,	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ 

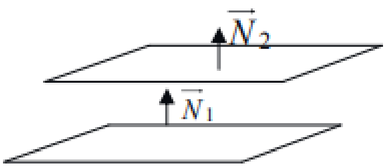
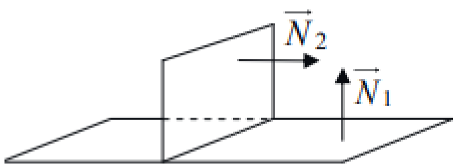
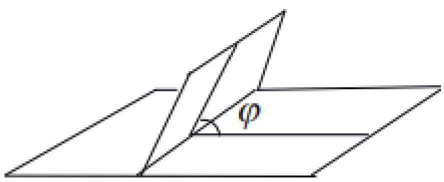
5.	Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\ (x_1\ , y_1\ , z_1\ )$, $M_2\ (x_2\ , y_2\ , z_2\ )$, параллельно вектору $\vec{a}\ =\ \{a_x, a_y, a_z\}$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0$

Частные случаи положения плоскости в пространстве

№	**Положение плоскости и вид общего уравнения**	**Поясняющий рисунок**
1.	Плоскость параллельна координатной оси $OX:\ By + Cz + D = 0\ (A = 0)$ $OY:\ Ax + Cz + D = 0\ (B = 0)$ $OZ: Ax + By + D = 0\ (C = 0)$	
2.	Плоскость проходит через начало координат $Ax + By + Cz = 0\ (D = 0\ )$	
3.	Плоскость параллельна координатным осям OX и OY: $Cz + D = 0\ (A = B = 0)$ OX и OZ: $By + D = 0\ (A = C = 0)$ OY и OZ: $Ax + D = 0\ (B = C = 0)$	
4.	Плоскость проходит через ось $OX: By + Cz = 0\ (A = D = 0\ )$ $OY: Ax + Cz = 0\ (B = D = 0\ )$ $OZ: Ax + By = 0\ (C = D = 0)$	

5.	Уравнения координатных плоскостей $XOY: z = 0\ (A = B = D = 0)$ $XOZ: y = 0\ (A = C = D = 0)$ $YOZ: x = 0\ (B = C = D = 0)$	 $z = 0$

Взаимное расположение плоскостей

№	**Расположение плоскостей**	Условия расположения плоскостей $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$
1.	Параллельность 	$\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ $\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. В частности, если плоскости совпадают, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
2.	Перпендикулярность 	$\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
3.	Пересечение под углом φ 	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \neq 0$ $\cos\varphi = \pm\frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{\lvert\overline{N_1}\rvert \cdot \lvert\overline{N_2}\rvert} =$ $\pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Расстояние от точки x_0, y_0, z_0 до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\boldsymbol{d} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

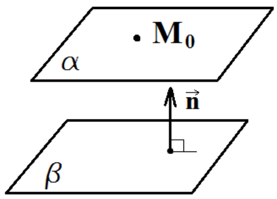
Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\ (2,-3,-7)$ параллельно плоскости $2x-6y-3z+5=0$.

Решение.

I способ. Так как искомая плоскость параллельна плоскости $2x-6y-3z+5$, то в качестве нормального вектора можно взять вектор $\vec{n}=\{2,-6,-3\}$, перпендикулярный данной плоскости. Следовательно, искомая плоскость проходит через точку $M_0\ (2,-3,-7)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{2,-6,-3\}$.

Искомое уравнение найдем по формуле $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, т.е. $2(x-2)-6(y+3)-3(z+7)=0 \Rightarrow 2x-6y-3z-43=0$.

$$\left[\left.\begin{matrix} M_0\in\alpha \\ \alpha \parallel \beta \\ \vec{n}\perp\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}\perp\alpha\right]$$

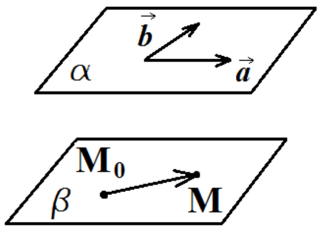


II способ. Вектор $\vec{n}=\{2,-6,-3\}$ перпендикулярен любо плоскости, параллельной данной плоскости. Общее уравнение искомой плоскости: $2x-6y-3z+D=0$. D найдем из условия, что точка $M_0\ (2,-3,-7)$ принадлежит данной плоскости: $2\cdot 2-6\cdot(-3)-3\cdot(-7)+D=0 \Rightarrow D=-43$. Уравнение искомой плоскости: $2x-6y-3z-43=0$.

Ответ: $2x-6y-3z-43=0$.

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\ (2,1,-3)$ параллельно векторам $\vec{a}=(1;-3;4)$ и $\vec{b}=(1;-2;0)$.

Решение.



Возьмем произвольную точку искомой плоскости $M(x,y,z)$. Векторы $\overrightarrow{M_0M}=\{x-2,y-1,z+3\}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – компланарны, т.к. расположены в параллельных плоскостях. Следовательно, их смешанное произведение $<\overrightarrow{M_0M},\vec{a},\vec{b}>=0$. Запишем это условие в координатах, получим уравнение искомой плоскости в виде: $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$.

Вычислить этот определитель удобнее разложением по первой строке:

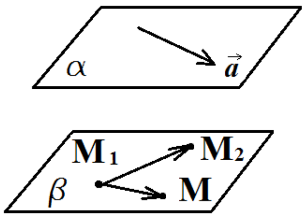
$(x-2)\cdot(0+8)-(y-1)\cdot(0-4)+(z+3)\cdot(-2+3)=0 \Rightarrow 8x+4y+z-17=0$.

Замечание. Можно было найти вектор $\vec{n}$: $\left.\begin{matrix}\vec{n}\perp\vec{a} \\ \vec{n}\perp\vec{b}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}=[\vec{a},\vec{b}] \Rightarrow \vec{n}$ – вектор нормали искомой плоскости. Найти искомое уравнение по формуле: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где $\vec{n}=\{A,B,C\}$, $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$, $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow (\vec{n},\overrightarrow{M_0M})=0$.

Ответ: $8x+4y+z-17=0$.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\,(1,-2{,}3)$ и $M_2\,(3,-1{,}4)$ параллельно вектору $\vec{a} = (4;-2;3)$.

Решение. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка искомой плоскости. Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x-1; y+2; z-3\}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = \{3-1; -1+2; 4-3\} = \{2;1;1\}$ и $\vec{a} = \{4;-2;3\}$ располагаются в параллельных плоскостях и, следовательно, компланарны. Их смешанное произведение $<\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}>$ равно 0:



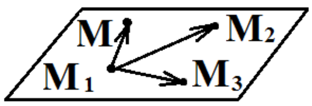
$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель раскрываем разложением по первой строке: $(x-1)(3+2) - (y+2)(6-4) + (z-3)(-4+4) = 0 \ \rightarrow 5x - 2y - 8z + 15 = 0$.

Ответ. $5x - 2y - 8z + 15 = 0$.

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1\,(1,-3{,}4)$, $M_2\,(0,-2,-1)$ и $M_3\,(1{,}1,-1)$.

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ плоскости. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарны, поэтому их смешанное произведение равно нулю.



$\overrightarrow{M_1M} = (x-1; y+3; z-4)$;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1;1;-5)$;

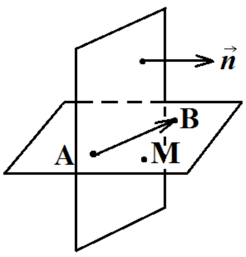
$\overrightarrow{M_1M_3} = (0;4;-5)$. Отсюда $\begin{vmatrix} x-7 & y+3 & z-4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0 \ \leftrightarrow (x-1)(-5+20) - (y+3)(5-0) + (z-4)(-4-0) = 0 \ \leftrightarrow 15(x-1) - 5(y+3) - 4(z-4) = 0 \ \leftrightarrow 15x - 5y - 4z - 14 = 0$.

Ответ. $15x - 5y - 4z - 14 = 0$.

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;4;-5)$ и B$(4;2;-3)$, перпендикулярно плоскости $3x + 5y - 6z - 8 = 0$.

Решение.

I способ. Нормальный вектор данной плоскости $\vec{n} = (3{,}5,-6)$, вектор $\overrightarrow{AB} = (3,-2{,}2)$ и вектор $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-4, z+5)$ компланарны. Следовательно, смешанное произведение этих векторов равно нулю.



$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z+5 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \leftrightarrow \ -2(x-1) - 24(y-4) - 21(z+5) = 0 \ \leftrightarrow$$

$2x + 24y + 21z + 7 = 0$.

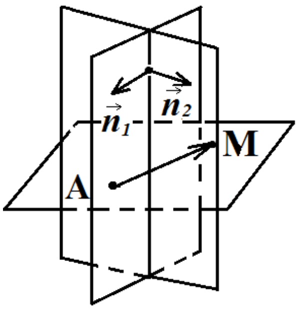
II способ. Вектор нормали искомой плоскости $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}] \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 24\vec{j} + 21\vec{k}$. Используем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(1; 4; -5)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n_1} = (2,24,21)$: $2(x-1) + 24(y-4) + 21(z+5) = 0$, отсюда получаем $2x + 24y + 21z + 7 = 0$.

Ответ: $2x + 24y + 21z + 7 = 0$.

Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1; -1; 2)$, перпендикулярно плоскостям $3x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Решение.

I способ. Нормальные векторы плоскости $\overrightarrow{n_1} = (1, -2,1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (1,2, -2)$ перпендикулярны каждый своей плоскости, перпендикулярны линии их пересечения и, следовательно, искомой плоскости. Искомая плоскость проходит через точку A параллельно двум векторам $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ (аналогичную задачу уже решали – Пример 2).



Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости, тогда векторы $\overrightarrow{AM} = (x+1, y+1, z-2)$; $\overrightarrow{n_1} = (1, -2,1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (1,2, -2)$ компланарны, поэтому их смешанное произведение равно нулю: $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (x+1)(4-2) - (y+1)(-2-1) + (z-2)(2+2) = 0 \leftrightarrow 2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

II способ. В качестве нормального вектора $\vec{n}$ искомой плоскости возьмем векторное произведение нормальных векторов $\overrightarrow{n_1} = (1, -2,1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (1,2, -2)$ данных плоскостей:

$\vec{n} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Теперь воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку $A(-1; -1; 2)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2,3,4)$:

$$2(x+1) + 3(y+1) + 4(z-2) = 0 \leftrightarrow 2x + 3y + 4z - 3 = 0.$$

Ответ: $2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

Пример 7. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $x + 2y - 2z + 2 = 0$ и $3x + 6y - 6z - 4 = 0$.

Решение. На одной из плоскостей возьмем какую-либо точку $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$. Полагая в первом из данных уравнений $x = 0, y = 0$, найдем $-2z + 2 = 0 \implies z = 1$, т.е. точка $M_0(0,0,1)$ лежит в первой плоскости. Используя второе уравнение, по формуле $\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, находим $\rho(M_0, \alpha) = \frac{|3\cdot0 + 6\cdot0 - 6\cdot1 - 4|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2}} = \frac{10}{\sqrt{81}} = \frac{10}{9}$.

Ответ: $\frac{10}{9}$.

Пример 8. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z-7=0$ и отстоящей от нее на расстоянии, равном 5.

Решение. Запишем уравнение искомой плоскости в виде $x-2y+2z+D=0$. Найдем расстояние между плоскостями. Для этого возьмем произвольную точку данной плоскости и определим ее расстояние до искомой плоскости. Полагая $y=0, z=0$, найдем $x=7$, т.е. $M(7,0,0)$. Используя теперь формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости, имеем:

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot7-2\cdot0+2\cdot0+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|7+D|}{3}.$$

Так как по условию $\rho=5$, то получаем уравнение: $\frac{|7+D|}{3}=5\ \rightarrow\ |7+D|=15\ \rightarrow 7+D=\pm15;$

$D_1=8;\ D_1=-22$. Подставляя в уравнение плоскости найденные значения D, получим две плоскости: $x-2y+2z+8=0$ и $x-2y+2z-22=0$.

Ответ: $x-2y+2z+8=0$ и $x-2y+2z-22=0$.

Пример 9. Найти острый угол φ между плоскостями $7x-11y+8z+19=0$ и $x+4y-10z-5=0$.

Решение. Координаты перпендикулярных к данным плоскостям векторов $\overrightarrow{n_1}=(7,-11,8)$ и $\overrightarrow{n_2}=(1,4,-10)$. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{|(\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2})|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|7-44-80|}{\sqrt{7^2+(-11)^2+8^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2+(-10)^2}}=\frac{117}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}}=\frac{117}{\sqrt{2\cdot117^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Пример 10. Плоскость проходит через ось Oz и составляет с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z=0$ угол $\frac{\pi}{3}$. Найти ее уравнение.

Решение. Уравнение любой плоскости, проходящей через ось Oz, имеет вид $Ax+By=0$. Разделив на B и обозначив $m=\frac{A}{B}$, получим $mx+y=0$. Перпендикуляр к этой плоскости $\vec{n}=(m,1,0)$, по условию составляет с вектором $\overrightarrow{n_1}=(2,1,-\sqrt{5})$, (нормаль плоскости $2x+y-\sqrt{5}z=0$), угол $\frac{\pi}{3}$. Следовательно,

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|(\vec{n},\ \overrightarrow{n_1})|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{n_1}|};\ \frac{1}{2}=\frac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{4+1+5}};$$

$$\sqrt{10(m^2+1)} = 4m + 2; 10m^2 + 10 = 16m^2 + 16m + 4;$$

$$6m^2 + 16m - 6 = 0; m_1 = \frac{1}{3}, m_2 = -3.$$

Условию задачи удовлетворяют две плоскости: $\frac{1}{3}x + y = 0$ и $-3x + y = 0$.

Ответ: $\frac{1}{3}x + y = 0$ и $-3x + y = 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-3; 1; 4)$ параллельно плоскости $-7x + 2y + z - 2 = 0$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -3; -1)$ параллельно векторам $\vec{a} = (2; -4; -1)$ и $\vec{b} = (1; 2; 3)$.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 1)$ и $B(2; 3; -1)$ параллельно вектору $\vec{a} = (0; -1; 2)$.
4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$ и $C(2; 0; 2)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 1; -1)$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -15; 1)$ и $B(3; 1; 2)$ перпендикулярно плоскости $3x - y - 5z = 0$.
7. Найти угол между плоскостям $x - 7y + 2z = 0$ и $5x + 3y - 2 = 0$.
8. Найти расстояние между плоскостям $-x + 2y - z + 1 = 0$ и $2x - 4y + 2z + 3 = 0$.
9. Найти расстояние от точки $A(-1; 2; 4)$ до плоскости $6x - 2y - 3z - 6 = 0$.
10. * Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, можно записать в виде: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$