ЛЕКЦИЯ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

1. Понятие определителя n-го порядка.

2. Миноры и алгебраические дополнения.

3. Определитель *n*-го порядка. Разложение определителя по строке и столбцу.

4.Основные свойства определителей.

5. Вычисление определителей с помощью их свойств.

6. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

2.1. Понятие определителя n-го порядка

Выше нами были даны понятия определителей первого, второго и третьего порядков. Дадим теперь рекурсивное определение определителя квадратной матрицы *n*-го порядка.

Для удобства определитель часто будем обозначать символом Δ.

Определение 1. Определителем квадратной матрицы *n*-го порядка называется число, вычисленное по рекуррентной формуле:

1) Определителем квадратной матрицы порядка 1 называется единственный элемент этой матрицы.

2) Определителем квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ порядка $n>1$ называется число Δ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\dots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j} \quad \mathbf{(1)}$$

где M_{1j} – определитель квадратной матрицы порядка (*n*-1), полученной из матрицы $A=(a_{ij})$ вычеркиванием *j*-го столбца и первой строки.

Формула (1) называется *разложением определителя по <u>первой строке</u>*.

2.1.Миноры и алгебраические дополнения

Пусть задана квадратная матрица *A* размера $n\times n$. Если взять произвольный элемент матрицы a_{ij} и вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых он стоит (строка *i*, столбец *j*), то останется квадратная матрица *A’* размера $(n-1)\times(n-1)$. Для этой матрицы можно вычислить <u>определитель</u>, который называется ***минором*** элемента a_{ij} и обозначается M_{ij}.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \quad \dots & \dots & & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & .. & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \quad \dots & \dots & & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & .. & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Задача 1. Для $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. Найти миноры элементов a_{11}, a_{22}, a_{23}.

Решение.

Для нахождения минора M_{11} элемента a_{11} вычеркнем в матрице первую строку и первый столбец. Получим новую матрицу 2×2. Ее определитель есть минор элемент a_{11}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \qquad M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}=-21-24=-45$$

Для нахождения минора M_{22} элемента a_{22} вычеркнем в матрице вторую строку и второй столбец. Получим новую матрицу 2×2. Ее определитель есть минор элемента a_{22}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 10 = -17$$

Для нахождения минора M_{23} элемента a_{23} вычеркнем в матрице вторую строку и третий столбец. Получим новую матрицу 2×2. Ее определитель есть минор элемента a_{23}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 15 = 21$$

Ответ. $M_{11} = -45$, $M_{22} = -17$, $M_{23} = 21$.

Определение 2. ***Алгебраическим дополнением*** элемента a_{ij} определителя матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где i и j - номера строки и столбца, на пересечении которых расположен a_{ij}.

Задача 2. Для $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ из задания 1. Найти алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{22}, a_{23}.

Решение.

Алгебраическое дополнение элемента a_{11} получаем умножением минора M_{11} на значение $(-1)^{1+1} = 1$, так как в нашем случае i = 1 (номер строки), j = 1 (номер столбца).

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 24 = -45 \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-45) = -45$$

Аналогично рассуждая, находим A_{22} и A_{23}.

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ | $\to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ | $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 10 = -17$ | $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-17) = -17$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ | $\to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ | $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 15 = 21$ | $A_{23} = \underbrace{(-1)^{2+3}}_{(-1)} \cdot 21 = -21$

Ответ. $A_{11} = -45$, $A_{22} = -17$, $A_{23} = -21$.

2.3. Определитель *n*-го порядка.
Разложение определителя по строке и столбцу

По аналогии с формулой (1) рассмотрим числа $\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, 1 \le i \le n$ – разложим определитель по каждой из n строк.

Докажем, что все Δ_i, $1 \le i \le n$ равны между собой. Доказательство проведем для случая определителя третьего порядка, обобщив потом на случай определителя *n*-го порядка.

Определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ разложим по первой строке, по второй строке и третьей. Получим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$\Delta_1 = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$.

$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$.

$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$.

Тогда $\Delta_1 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$.

$\Delta_2 = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$.

$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}$, $M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}$,

$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}$.

Тогда $\Delta_2=-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})-a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12})=$

$=-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{22}a_{31}a_{13}-a_{23}a_{11}a_{32}+a_{23}a_{31}a_{12}$.

Сравнивая правые части Δ_1 и Δ_2, видим, что $\Delta_1=\Delta_2$.

$\Delta_3=a_{31}M_{31}-a_{32}M_{32}+a_{33}M_{33}$

$M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}$, $M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}$

$M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

Тогда $\Delta_3=a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})+a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=$

$=a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{11}a_{23}+a_{32}a_{21}a_{13}+a_{33}a_{11}a_{22}-a_{33}a_{21}a_{12}$.

Сравнивая правые части Δ_1 и Δ_3, видим, что $\Delta_1=\Delta_3$.

Таким образом, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3$.

Для определителя порядка n подобные равенства доказываются путем сведения к вычислению определителей меньшего порядка – (n-1)-го, (n-2)-го и т.д.

Таким образом, нами доказана формула $\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$, i = 1,2,…, n, называемая *разложением определителя по i-ой строке*.

Используя понятие введенного выше алгебраического дополнения, сформулируем полученное правило вычисления определителя в виде теоремы.

Теорема 1. Определитель квадратной матрицы A порядка n равен сумме произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения $\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$, где i = 1,2,…, n.

Аналогично полученным разложениям определителя по строкам, можно ввести разложения определителя по столбцам.

Повторив логику введения понятий, т.е. рассмотрев сначала разложение определителя по первому столбцу:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i1}M_{i1}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+...+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1},$$

и обобщив формулу для произвольного <u>j-го столбца</u>, получим теорему.

Теорема 2. Определитель квадратной матрицы A порядка n равен сумме произведений элементов произвольного столбца на их алгебраические дополнения $\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$, где $j=1,2,\ldots,n$.

Задача 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}4&3&-2\\2&0&4\\5&1&-1\end{vmatrix}$, используя разложение по первому столбцу. Проверить результат, вычислив определитель, разложением по второй строке.

Решение.

$$\begin{vmatrix}4&3&-2\\2&0&4\\5&1&-1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}0&4\\1&-1\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\0&4\end{vmatrix}=4\cdot(-4)-2\cdot(-1)+5\cdot 12=46$$

Стр 1 $\begin{vmatrix}4&3&-2\\2&0&4\\5&1&-1\end{vmatrix}$ **Стр 2** $\begin{vmatrix}4&3&-2\\2&0&4\\5&1&-1\end{vmatrix}$ **Стр 3** $\begin{vmatrix}4&3&-2\\2&0&4\\5&1&-1\end{vmatrix}$

Столбец 1 **Столбец 1** **Столбец 1**

Теперь вычислим определитель, разложив его по второй строке:

$$\begin{vmatrix}4&3&-2\\2&0&4\\5&1&-1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}4&-2\\5&-1\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}4&3\\5&1\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)+0-4\cdot(-11)=46$$

Ответ. 46.

Теорема 3. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали.

Доказательство.

Пусть дана треугольная матрица $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\ldots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\ldots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\ldots&a_{33}\\\ldots&\ldots&\ldots&&\ldots\\0&0&\ldots&&a_{nn}\end{pmatrix}$. Вычислим ее определитель, раскладывая по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Остальные слагаемые в разложении равны 0. На следующем шаге вычислим определитель $(n-1)$-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Продолжая этот процесс, получим $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots \cdot a_{nn}$.

Что и требовалось доказать.

2.4.Основные свойства определителей

1°. Общий множитель в строке (столбце) определителя можно выносить за знак определителя.

Доказательство.

Пусть каждый элемент i-ой строки определителя Δ пропорционален некоторому числу λ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ рассмотрим определитель } \Delta^* = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Используя теорему 1, разложим определитель Δ по i-ой строке.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda a_{i1}A_{i1}+\lambda a_{i2}A_{i2}+\dots+\lambda a_{in}A_{in}=\lambda\underbrace{\left(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}\right)}_{\Delta^*}=\lambda\Delta^*$$

$$\Delta=\lambda\Delta^*=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ Что и требовалось доказать.

2°. (***Свойство линейности***). Пусть в определителе Δ матрицы A некоторая i-ая строка есть сумма двух строк, взятых с некоторыми коэффициентами:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a'_{i1}+\beta a''_{i1} & \dots & \alpha a'_{in}+\beta a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ **Строка *i***

Тогда определитель Δ можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a'_{i1}+\beta a''_{i1} & \dots & \alpha a'_{in}+\beta a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\beta\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$ где

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta''=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

Представим исходный определитель Δ, разложив его по i-ой строке.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a'_{i1}+\beta a''_{i1} & \dots & \alpha a'_{in}+\beta a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\left(\alpha a'_{i1}+\beta a''_{i1}\right)A_{i1}+\left(\alpha a'_{i2}+\beta a''_{i2}\right)A_{i2}+\dots+\left(\alpha a'_{in}+\beta a''_{in}\right)A_{in}=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha a'_{ij}+\beta a''_{ij}\right)A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\alpha a'_{ij}A_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\beta a''_{ij}A_{ij}=\alpha\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}A_{ij}+\beta\sum_{j=1}^{n}a''_{ij}A_{ij}=\alpha\Delta'+\beta\Delta''$$

Таким образом, $\Delta=\alpha\Delta'+\beta\Delta''$. Что и требовалось доказать.

3°. Если две строки (столбца) в определителе поменять местами, то определитель поменяет знак.

Доказательство.

Пусть определитель Δ^* получен из определителя Δ переменой местами, например, первой и второй строк.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta^*=\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Разложим определитель Δ по первой строке, а определитель Δ^* по второй строке.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}+\dots(-1)^{1+n}M_{1n},$$

$$\Delta^*=\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=-a_{11}M_{11}+\dots(-1)^{2+n}M_{1n}.$$

Как видим из разложения, $\Delta=-\Delta^*$. Что и требовалось доказать.

Используя описанную идею, доказательство для случая перестановки произвольных двух строк i и k предлагается провести самостоятельно, рассмотрев определители вида:

$$\Delta = \begin{array}{|ccc|l} a_{11} & \dots & a_{1n} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & \textbf{Строка } \boldsymbol{i} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & \textbf{Строка } \boldsymbol{k} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \end{array} \qquad \Delta^* = \begin{array}{|ccc|l} a_{11} & \dots & a_{1n} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & \textbf{Строка } \boldsymbol{i} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & \textbf{Строка } \boldsymbol{k} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \end{array}$$

4°. При транспонировании квадратной матрицы ее определитель не меняется: $\det A = \det A^T$.

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из равенства разложения определителя по первой строке разложению определителя по первому столбцу.

5°. Если квадратная матрица A порядка n умножена на некоторое число $\alpha \neq 0$, то $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

Доказательство следует из свойства **1°**, примененного к каждой из n строк (к каждому из n столбцов).

6°. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство.

Рассмотрим определитель Δ, в котором, например i-я строка и k-я строка равны между собой.

$$\Delta = \begin{array}{|ccc|l} a_{11} & \dots & a_{1n} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \textbf{Строка } \boldsymbol{i} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \textbf{Строка } \boldsymbol{k} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \end{array}$$

Поменяем местами строки i и k. Получим определитель Δ^*. Согласно свойству **3°**, определитель меняет знак, т.е. $\Delta^* = -\Delta$. Поскольку строки одинаковы, то определитель не меняется $\Delta^* = \Delta$. Из двух последних равенств $\Delta = -\Delta$. Это возможно только в случае, если $\Delta = 0$. Что и требовалось доказать.

7°. Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство. Согласно свойству **1°** общий множитель (коэффициент пропорциональности) можно выносить за знак определителя, после чего остается определитель с двумя одинаковыми строками. По свойству **6°,** он равен нулю. Что и требовалось доказать.

8°. Определитель матрицы со строкой (столбцом), все элементы которой (которого) нулевые, равен нулю.

Доказательство очевидно – достаточно записать определитель, разложив его по строке, состоящей из одних нулевых элементов. Каждое слагаемое в разложении будет равно нулю, а значит, и сам определитель будет равен нулю.

9°. Если к строке (столбцу) определителя прибавить другую его строку (столбец), умноженную на некоторое число, то полученный определитель будет равен исходному.

10°. Если A и B квадратные матрицы порядка n, то $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

2.5. Вычисление определителей с помощью их свойств

Используя свойство **9°**, можно привести исходный определитель к виду, содержащему строку или столбец, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю. Таким образом, вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению определителя (n-1)-го порядка.

Задача 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 8 & -5 \\ 2 & 8 & 11 \end{vmatrix}$, используя свойства определителей.

Решение.

На первом шаге прибавим ко второй строке определителя первую строку, умноженную на (-3), к третьей строке определителя прибавим первую строку, умноженную на (-2). Пользуемся свойством 9. В дальнейшем строки будем обозначать R, столбцы Clm.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 8 & -5 \\ 2 & 8 & 11 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -3R1 \\ -2R1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3-3 & 8-6 & -5-(-12) \\ 2-2 & 8-4 & 11-(-8) \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 19 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -2R2 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4-4 & 19-14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

Ответ. 10.

Задача 5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 15 & 18 \end{vmatrix}$, используя свойства определителей.

Решение.

На первом шаге вынесем за определитель множитель 2 из первой строки и множитель 3 из третьей строки, пользуясь свойством **1°**.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 15 & 18 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Поменяем местами вторую и первую строки, меняя знак определителя – свойство **3°**.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 15 & 18 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -2R1 \\ -3R1 \end{matrix} =$$

$$= -6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{выносим (-1) в обеих строках} \\ \text{меняем местами R2 и R3} \end{bmatrix} =$$

$$= 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -4R2 \end{matrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 6\cdot(-7) = -42$$

Ответ. -42.

Задача 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, используя свойства определителей.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{3^\circ}{\overbrace{=}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -2R1 \\ +R1 \\ -3R1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ -R2 \end{matrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +3R2 \\ +3R2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & -17 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ -9R3 \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ -9R3 \end{matrix} = 64$$

Ответ. 64.

2.6. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Рассмотрим n линейных уравнений (n условий) с n неизвестными величинами, которые принято обозначать $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Все n уравнений должны выполняться одновременно:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Определение 3. Совокупность уравнений вида (2) с n неизвестными величинами, которые необходимо найти, называется ***системой*** n ***линейных уравнений*** с n неизвестными или ***линейной системой***.

Числа a_{ij} называются ***коэффициентами линейной системы***,

Числа b_i – ее ***свободными членами***.

Систему n линейных уравнений с n неизвестными называют ***квадратной системой***.

Определение 4. ***Решением системы*** (2) называется совокупность n значений $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ неизвестных $(x_1, x_2, ..., x_n)$: $\begin{matrix} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ ... \\ x_n = \alpha_n \end{matrix}$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные тождества.

Результат подстановки

$$\begin{matrix} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ ... \\ x_n = \alpha_n \end{matrix} \qquad \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n \equiv b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n \equiv b_2 \\ ... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n \equiv b_n \end{cases}$$

Неизвестные **Значения неизвестных**

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица, составленная из коэффициентов в системе (2)

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных членов $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных.

Определение 5. Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен 0 $(\det A \neq 0)$. В противном случае $(\det A = 0)$, матрица называется ***вырожденной***.

Теорема 4. Квадратная система n линейных уравнений (2) с невырожденной матрицей A имеет единственное решение. Это решение можно записать в общем виде:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},\ k = 1,2,\ldots,n, \qquad \textbf{(3)}$$

Δ – определитель основной матрицы системы,

Δ_k – определитель матрицы, которая получается, если в основной матрице A заменить k-ый столбец на столбец свободных членов.

Формулы (3) называются ***формулами Крамера***.

1. Для системы $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21}$$

Если $\Delta \neq 0$ (матрица невырождена), то $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

2. Для системы $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Если $\Delta \neq 0$ (матрица невырождена), то $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Задача 2. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 = 8 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0$, матрица невырождена и по теореме 4 существует единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 24 = -4.$$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 8 = 8$.

$x_1 = \frac{-4}{4} = -1$, $x_2 = \frac{8}{4} = 2$.

Ответ: (-1; 2).

Задача 3. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, матрица невырождена и по теореме 4 существует единственное решение.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 14$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 14$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -14$.

$x_1 = \frac{14}{-14} = -1$, $x_2 = \frac{14}{-14} = -1$, $x_3 = \frac{-14}{-14} = 1$.

Ответ: (-1; -1;1).