Практическое занятие 10

Приложения двойного и тройного интегралов

Приложения двойного интеграла

Необходимый теоретический материал

Площадь S плоской области D в прямоугольной системе координат вычисляется по формуле

$$S=\iint_D dxdy.$$

Площадь S плоской области D в полярных координатах:

$$S=\iint_D rd\varphi dr$$

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, а снизу – областью D плоскости xOy, находится по формуле

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Если D – плоская пластинка, лежащая в плоскости xOy, имеет поверхностную плотность массы $\mu(x,y)$, то:

а) массу m пластинки находят по формуле

$$m=\iint_D \mu(x,y)dxdy;$$

б) статические моменты m_x и m_y пластинки относительно координатных осей Ox и Oy находят по формулам

$$m_x=\iint_D y\mu(x,y)dxdy \quad \text{и} \quad m_y=\iint_D x\mu(x,y)dxdy;$$

в) координаты центра тяжести x_c и y_c пластинки находят по формулам

$$x_c=\frac{m_y}{m} \qquad \text{и} \qquad y_c=\frac{m_x}{m};$$

г) моменты инерции I_x, I_y и I_0 пластинки соответственно относительно координатных осей Ox, Oy и начала координат находят по формулам

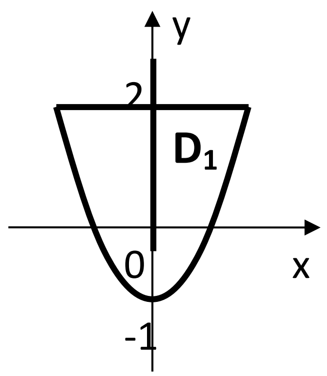
$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)dxdy, \qquad I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)dxdy,$$

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\mu(x, y)dxdy\,.$$

Для однородных пластинок $\mu(x, y) = \mu = Const$ и для простоты в этом случае считают $\mu = 1$.

Образцы решений типовых заданий

Пример 1. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной прямой $y = 2$ и параболой $y = x^2 - 1$.



Решение. Область D можно проектировать и на ось Ox и на ось Oy; спроектируем ее на ось Oy. Область D симметрична относительно оси Oy, поэтому достаточно вычислить площадь правой половины (D_1) области D и результат удвоить. Правая половина области D проектируется на ось Oy в отрезок $[-1;2]$ и имеет левой границей прямую $x = 0$, а правой – линию $y = x^2 - 1$, или $x = \sqrt{y+1}$.

В результате

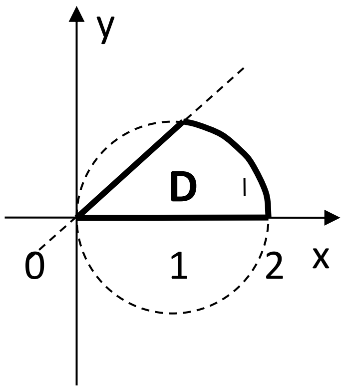
$$\frac{S}{2} = \iint\limits_{D_1} dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y+1}} dx = \int\limits_{-1}^{2} dy \cdot x \Bigg|_{0}^{\sqrt{y+1}} = \int\limits_{-1}^{2} \left(\sqrt{y+1} - 0\right) dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \sqrt{y+1}\, d(y+1) = \frac{2(y+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} - 0 = 2\sqrt{3}.$$

Но тогда $S = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Пример 2. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной прямыми $y=0$, $y=x$ и окружностью $x^2+y^2=2x$.



Решение. Преобразуем уравнение окружности

$$x^2+y^2=2x \iff (x-1)^2+y^2=1$$

и изобразим область D.

Введем полярные координаты. Уравнение окружности, ограничивающей область D, имеет вид $r^2=2r\cos\varphi$, или $r=2\cos\varphi$. Угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{4}$ и r меняется от 0 до $2\cos\varphi$. Тогда получаем

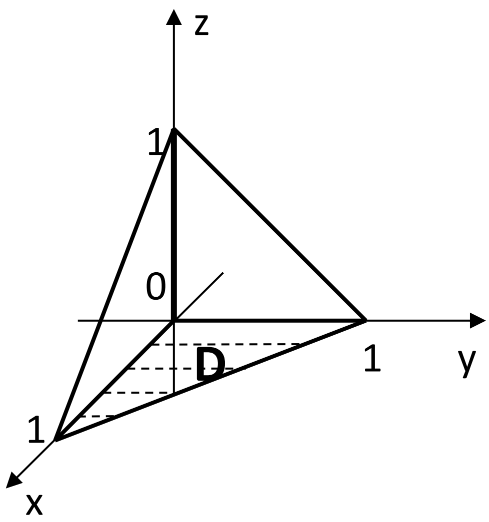
$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r dr=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left((2\cos\varphi)^2-0\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1-0-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi+2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi+2}{4}$.

Пример 3. Вычислить объем треугольной пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$.



Решение. Пирамида сверху ограничена плоскостью $x+y+z=1$ или $z=1-x-y$, поэтому ее объем

$$V=\iint_D (1-x-y)dxdy.$$

Область D (показана штриховкой) есть расположенный в плоскости xOy треугольник с границами $x=0$, $y=0$ и $x+y=1$ (получено подстановкой $z=0$ в уравнение $x+y+z=1$).

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1\left(1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}-0\right)dx=\int_0^1\left(1-x-x+x^2-\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=\frac{1}{6}.$$

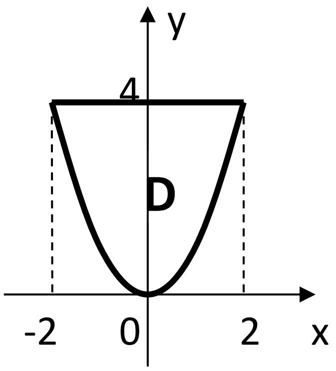
Заметим, что объем заданной пирамиды можно было найти и по известной из курса элементарной стереометрии формуле

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_0\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пример 4. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$.

Решение. Изобразим схематично заданную в условии пластинку.



Для нахождения координат центра тяжести пластинки x_c и y_c найдем статические моменты m_x, m_y и массу пластинки m.

$$m_x = \iint\limits_D y\,dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} ydy = \int_{-2}^{2} dx \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{4} =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(8 - \frac{x^4}{2}\right)dx = \left.\left(8x - \frac{x^5}{2\cdot 5}\right)\right|_{-2}^{2} == \left(8\cdot 2 - \frac{2^5}{10}\right) - \left(8\cdot(-2) - \frac{(-2)^5}{10}\right) =$$

$$= 16 - 3{,}2 + 16 - 3{,}2 = 25{,}6.$$

$$m_y = \iint\limits_D x\,dxdy = \int_{-2}^{2} xdx \int_{x^2}^{4} dy = \int_{-2}^{2} xdx \cdot y|_{x^2}^{4} = \int_{-2}^{2} x(4 - x^2)dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(4x - x^3\right)dx = \left.\left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_{-2}^{2} = \left(2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - \left(2\cdot(-2)^2 - \frac{(-2)^4}{4}\right) =$$

$$= 8 - 4 - 8 + 4 = 0.$$

$$m = \iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy = \int_{-2}^{2} dx \cdot y\Bigg|_{x^2}^{4} = \int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx =$$

$$= \left.\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{2} = \left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

Откуда:

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{0\cdot 3}{32} = 0 \quad \text{и} \quad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{25{,}6\cdot 3}{32} = 2{,}4.$$

Заметим, что симметрия пластинки относительно оси Oy позволяет сразу сделать вывод о том, что абсцисса центра тяжести $x_c = 0$.

Ответ: $x_c = 0$, $y_c = 2{,}4$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. Выберите правильный ответ (см. пример 4)
   Площадь и координаты центра тяжести однородного треугольника ABC, где $A(0;0)$, $B(-3;0)$, $C(0;1)$, равны:

1) $S = 1, x_C = -\frac{3}{4}, y_C = \frac{1}{6}$; 2) $S = \frac{3}{2}, x_C = -1, y_C = \frac{1}{3}$;

3) $S = 1, x_C = -\frac{3}{2}, y_C = \frac{1}{2}$; 4) $S = \frac{3}{2}, x_C = -\frac{1}{3}, y_C = \frac{1}{3}$.

2. Найти площадь, ограниченную линиями:
   $x^2 + y^2 = 1$; $x + y = 1$; $y = \frac{1}{2}$ $(x \geq 0;\ y \geq \frac{1}{2})$
   Ответ: $S = \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3})$.
3. Найти момент инерции квадрата, заданного системой неравенств $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$, поверхностная плотность которого пропорциональна z, относительно начала координат. Момент инерции относительно начала координат равен:
   $$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + z^2\right)\mu(x, z)\,dxdz$$
   $\mu(x,z) = kz$, т.к. квадрат лежит в плоскости xOz.
   Ответ: $40k/3$ – момент инерции.

Приложения тройного интеграла

Геометрические приложения

Основное геометрическое приложение тройных интегралов – вычисление объемов тел. Если в интеграле положить $f(x, y, z) = 1$, то интеграл будет равен объему тела. В декартовой системе координат объем будет равен интегралу по области трехмерного тела

$$V = \iiint dxdydz.$$

Если область такова, что удобнее использовать цилиндрические координаты, то объем определяется при помощи интеграла:

$$V = \iiint rdrd\varphi dz.$$

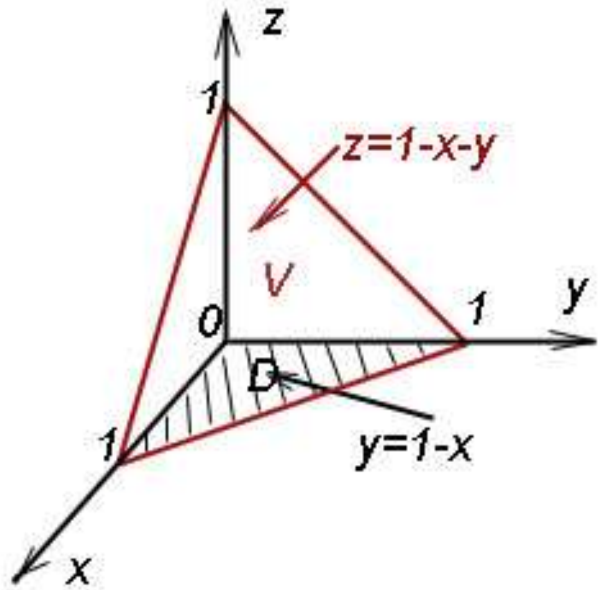
В сферических координатах объем имеет вид:

$$V = \iiint r^2 \sin\theta drd\varphi d\theta.$$

Примеры

Пример 1. Вычислить объем пирамиды, изображенной на рисунке.

Пирамида ограничена координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и плоскостью $x + y + z = 1$.



Область V проецируется на плоскость xOy в область D. Расставим сначала пределы интегрирования. Для интеграла по переменной z нижний предел интегрирования задан однозначно: $z = 0$. Чтобы получить верхний предел, выразим z из уравнения плоскости $x + y + z = 1$. Получаем $z = 1 - x - y$. Для интеграла по переменной y нижний предел интегрирования задан однозначно: $y = 0$. Для получения верхнего предела выразим y из уравнения плоскости $x + y + z = 1$, считая при этом, что $z = 0$ (так как линия расположена в плоскости xOy). Получаем $y = 1 - x$. Сведем тройной интеграл к последовательности трех определенных интегралов.

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(1 - x - x(1 - x) - \frac{(1 - x)^2}{2} \right) dx =$$

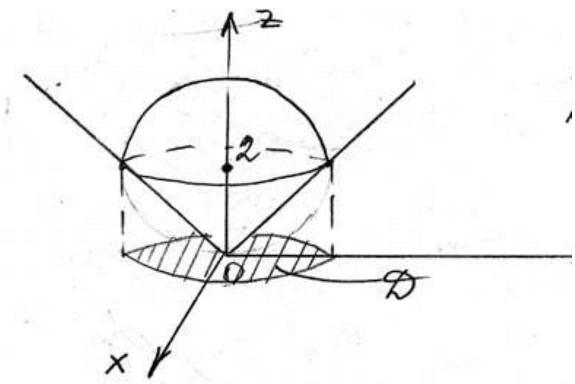
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. Вычислить объем области, ограниченной поверхностями:

$$V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4z \\ x^2+y^2=z^2 \\ z\geq 0 \end{cases}.$$

Решение. Определим вид поверхностей.

$x^2+y^2+z^2-4z=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2+(z-2)^2=4$ – сфера с центром в точке (0,0,2) и радиусом, равным 2.



$x^2+y^2=z^2, z\geq 0$ – верхняя часть конуса.

Область V проецируется на плоскость xOy в область D, ограниченную окружностью $x^2+y^2=4$.

Введем цилиндрические координаты: $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$.

В области D $\begin{cases} 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 2 \end{cases}$.

Z меняется от поверхности конуса, уравнение которой в цилиндрических координатах: $r^2=z^2 \;\Leftrightarrow z=r$ до поверхности сферы: $r^2+(z-2)^2=4 \;\Leftrightarrow\; (z-2)^2=4-r^2 \;\Leftrightarrow\; z-2=\sqrt{4-r^2}$ (для верхней части сферы).

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 rdr\int_r^{2+\sqrt{4-r^2}}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r\left(2+\sqrt{4-r^2}-r\right)dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(2r+r\sqrt{4-r^2}-r^2\right)dr=$$

$$=2\pi\left(r^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=8\pi$$

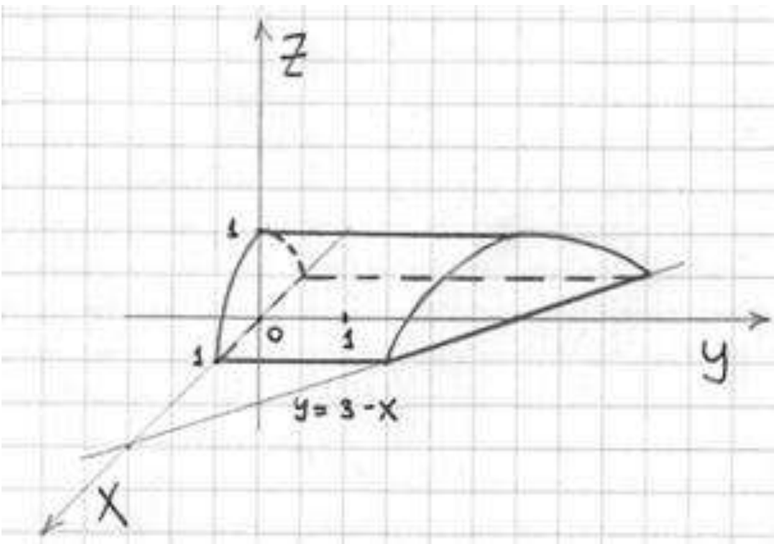
Пример 3. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

$z = 0; z = 1 - x^2; y = 0; y = 3 - x.$

– уравнение $y = 0$ задаёт координатную плоскость *xOz*, проходящую через ось *Ox* (которая на плоскости *xOy* определяется «одноимённым» уравнением $y = 0$);
– уравнение $y = 3 - x$ задаёт *плоскость*, проходящую через «одноимённую» *«плоскую» прямую* параллельно оси *Oz*.

Но две *прямые* $y = 0; y = 3 - x$ не задают ограниченную проекцию, и, очевидно, её должны «прорисовать» линии, по которым параболический цилиндр $z = 1 - x^2$ пересекает плоскость xOy $(z = 0)$. Чтобы найти уравнения этих линий, нужно решить простейшую систему:

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$



Искомое тело ограниченно плоскостью $z = 0$ снизу и параболическим цилиндром $z = 1 - x^2$ сверху:

$$\begin{cases} 0 \le z \le 1 - x^2 \\ 0 \le y \le 3 - x \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{3-x} dy \int_{0}^{1-x^2} dz = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx \int_{0}^{3-x} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)(3 - x)dx = \int_{-1}^{1} (3 - 3x^2 - x + x^3)\, dx =$$

$$= \left(3x - x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 3 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left(-3 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 6 - 2 = 4.$$

Ответ: объем заданного тела равен 4.

Физические приложения

Масса тела с переменной плотностью $\rho(x,y,z)$, занимающего область V, определяется интегралом:

m =$\iiint \rho(x,y,z)dxdydz$ интеграл берется по области V.

Координаты центра масс находятся по формулам:

$x_0 = \frac{m_{yz}}{m}$; $y_0 = \frac{m_{xz}}{m}$; $z_0 = \frac{m_{yx}}{m}$; где $m_{yz,}$ m_{xz}, m_{xy} – статические моменты относительно координатных плоскостей, которые определяются формулами:

$$m_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$m_{yz} = \iiint x\,\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$m_{xz} = \iiint y\,\rho(x,y,z)dxdydz$$

Интегрирование проводится по V.

Моменты инерции тела относительно осей.

$$I_x = \iiint (z^2 + y^2)\,\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_y = \iiint (z^2 + x^2)\,\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\rho(x,y,z)dxdydz$$

Если тело однородно, то плотность равна константе. Интегралы считаются по области V.

<u>*Примеры*</u>

1. Найти массу тела с плотностью $\rho(x, y, z) = 2(x + y + z)$.
   Тело ограничено плоскостями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$, $z = 1$. Это куб со стороной равной 1.
$$m = 2\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z)dz.$$
   Взяв последовательно интегралы, получим ответ 3.
2. Найти момент инерции однородного ($\rho = 1$) цилиндра с высотой h и радиусом a относительно оси цилиндра, считая, что ось цилиндра направлена по оси x.
   Уравнение цилиндра имеет вид: $y^2 + z^2 = a^2$.
   Момент инерции относительно оси цилиндра определяется выражением:
$$I_x = \iiint (z^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)dxdydz$$

Введем цилиндрические координаты: $\begin{cases} x = x \\ \mathrm{y} = r\cos\varphi, \\ \mathrm{z} = r\sin\varphi \end{cases}$

учитывая, что плотность равна 1, получим:
$$I_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\, dr \int_0^h dx = \int_0^{2\pi} d\varphi h\frac{r^4}{4} = \frac{\pi h a^4}{2}.$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Найти объем тетраэдра, ограниченного плоскостями, проходящими через точки A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3), и координатными плоскостями *xOy*, xOz, yOz .
   Ответ: 1.
2. Найти объем тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 5, x = 0, y = 0, z = 0$.
   Ответ: $\frac{125}{6}$.
3. Найти центр тяжести однородного полушара радиусом *R*. Центр полушара поместим в начало координат. Центр тяжести будет располагаться на оси z, $x_0 = y_0 = 0$, надо найти координату z_0.
   Ответ: $z_0 = \frac{3R}{8}$ (необходимо использовать сферические координаты).

Домашнее задание. Типовой расчет, задачи 2.6, 2.7*.