Математический анализ, 2 семестр

Лекция 3

Интегрирование тригонометрических, гиперболических и иррациональных функций

Примеры на повторение материала второй лекции (интегрирование рациональных функций).

1.

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \int \frac{x^9dx}{x^{10}(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10})}{x^{10}(x^{10}+1)^2} = [x^{10}=t] =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t(t+1)^2} = \left[\begin{aligned} &\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{1+t-t}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2} = \\ &= \frac{1+t-t}{t(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \end{aligned}\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt = \frac{1}{10}\left(\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{1}{10}\frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\right) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C$$

2.

$$\int \frac{2x^2 - 5x - 23}{(x-2)(x+3)^2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{2x^2 - 5x - 23}{(x-2)(x+3)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{(x+3)^2} \\ 2x^2 - 5x - 23 = A(x+3)^2 + B(x-2)(x+3) + C(x-2) \\ x = 2: \;\; 8 - 10 - 23 = 25A => A = -1 \\ x = -3: \;\; 18 + 15 - 23 = -5C => C = -2 \\ x^2: \;\; 2 = A + B => B = 3 \end{array}\right] =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2}\right) dx =$$

$$= -\ln|x-2| + 3\ln|x+3| + \frac{2}{x+3} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{(x+3)^3}{x-2}\right| + \frac{2}{x+3} + C$$

3.

$$\int \frac{x^3-4x^2-2x-8}{x^2+x+1}dx = \left[\frac{x^3-4x^2-2x-8}{x^2+x+1} = x-5+\frac{2x-3}{x^2+x+1}\right] =$$

$$= \int \left(x-5+\frac{2x-3}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2-5x+\int \frac{2x+1-4}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2-5x+\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-4\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2-5x+\ln(x^2+x+1)-\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

4.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int x \frac{xdx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{xdx}{(x^2+1)^2}, & v = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{array} \right] =$$

$$= \mathrm{arctg}x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

4. Интегрирование тригонометрических функций.

1. <u>Универсальная тригонометрическая подстановка.</u>

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(sinx, cosx)dx$$

где подынтегральная функция $R(sinx, cosx)$ является рациональной функцией, зависящей от двух аргументов $sinx$ и $cosx$. Замена $t = tg\frac{x}{2}$, которая называется *универсальной тригонометрической подстановкой*, сводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби. Пользуясь тригонометрическими формулами, выразим $sinx$ и $cosx$ через переменную t:

$$sinx = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$cosx = \frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Выразим x через переменную t:

$$x = 2\mathrm{arctg}t,\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Итак, $tg\frac{x}{2} = t, \frac{x}{2} = arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \ cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, sinx = \frac{2t}{1+t^2}.$

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{2-cosx} = \begin{bmatrix} t = tg\,\dfrac{x}{2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ cosx = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{1+3t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{3}\right) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}tg\,\frac{x}{2}\right) + C$$

<u>Пример 2</u>.

$$\int \frac{dx}{3+5sinx} = \left[\begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ sinx = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{10t}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3t^2+10t+3} = \int \frac{2dt}{(3t+1)(t+3)} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{3t+1} - \frac{1}{t+3}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}(\ln|3t+1| - \ln|t+3|) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}+3}\right| + C$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{8-4sinx+7cosx} = \begin{bmatrix} tg\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ sinx = \frac{2t}{1+t^2} \\ cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{8-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+7\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2-8t+15} = 2\int \frac{dt}{(t-3)(t-5)} =$$

$$= 2\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-5} - \frac{\frac{1}{2}}{t-3}\right)dt = ln|t-5| - ln|t-3| + C =$$

$$= ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C$$

Интеграл от рациональной дроби можно было вычислить по-другому, с помощью выделения полного квадрата в знаменателе:

$$2\int\frac{dt}{t^2-8t+15}=2\int\frac{d(t-4)}{(t-4)^2-1}=\frac{2}{2}ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|=ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким выражениям, поэтому в некоторых случаях применяются другие тригонометрические подстановки.

2. Частные подстановки.

1). $R(sinx, cosx) -$ нечетная относительно $sinx$:

$$R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$$

Подстановка $cosx = t$.

2). $R(sinx, cosx) -$ нечетная относительно $cosx$:

$$R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$$

Подстановка $sinx = t$.

3). $R(sinx, cosx) -$ четная относительно $sinx, cosx$: $R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx)$

Подстановка $tgx = t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $cos^2x = \frac{1}{1+t^2}, sin^2x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Пример 4.

$$\int \frac{sin2xdx}{1+sin^2x} = \int \frac{2sinxcosxdx}{1+sin^2x}.$$

Подынтегральная функция является нечетной относительно $cosx$.

$$\int \frac{sin2xdx}{1+sin^2x} = \begin{bmatrix} t = sinx \\ dt = cosxdx \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(1+t^2) + C = \ln(1+sin^2x) + C$$

Пример 5.

$$\int sin^4xcos^3xdx = \int sin^4x(1-sin^2x)cosxdx = \begin{bmatrix} t = sinx \\ dt = cosxdx \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^4(1-t^2)dt = \int (t^4 - t^6)dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C =$$

$$= \frac{1}{5}sin^5x - \frac{1}{7}sin^7x + C$$

3. <u>Интегрирование произведений</u> $sin\alpha \cdot cos\beta,\ cos\alpha \cdot cos\beta,\ sin\alpha \cdot sin\beta.$

Применяем формулы:

$$cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

$$sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

$$sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta)$$

<u>Пример 6</u>.

$$\int sin5xcos7xdx = \frac{1}{2}\int (sin12x - sin2x)dx = -\frac{1}{24}cos12x + \frac{1}{4}cos2x + C$$

4. $\int sin^m x \cdot cos^n x dx,\ \ m, n -$ натуральные четные числа.

Используем формулы понижения степени:

$sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x,\ cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x,\ sinx \cdot cosx = \frac{1}{2}sin2x.$

Пример 7.

$$\int cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2cos2x + cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2cos2x + \frac{1 + cos4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2cos2x + \frac{1}{2}cos4x\right) dx =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x + C$$

Пример 8.

$$\int sin^2 x \cdot cos^2 x dx = \int \frac{1}{4}sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (1 - cos4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sin4x + C$$

5. $\int sin^m x \cdot cos^n x dx,\ (m+n)$ – четное, целое, отрицательное,

подстановка $tgx = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Пример 9.

$$\int \frac{1}{sin^4 x}dx = \begin{bmatrix} t = tgx \\ sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2} = \int \frac{1+t^2}{t^4}dt =$$

$$= \int t^{-4}\,dt + \int t^{-2}\,dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3tg^3 x} - \frac{1}{tgx} + C$$

6. <u>Интегрирование $tgx, ctgx$:</u>

$\int R(tgx)dx,\ t = tgx;$

$\int R(ctgx)dx,\ t = ctgx\ .$

Используем также формулы: $tg^2x = \frac{1}{cos^2x} - 1, ctg^2x = \frac{1}{sin^2x} - 1.$

<u>Пример 10</u>.

$$\int tg^3xdx = \begin{bmatrix} t = tgx \\ x = \mathrm{arctg}t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t^3dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3+t-t}{1+t^2}dt =$$

$$= \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$

$$= \frac{1}{2}tg^2x - \frac{1}{2}\ln(1+tg^2x) + C = \frac{1}{2}tg^2x + \ln|cosx| + C$$

Пример 11.

$$\int ctg^4 x dx = \int ctg^2 x\left(\frac{1}{sin^2 x}-1\right)dx = \int ctg^2 x\cdot\frac{1}{sin^2 x}dx - \int ctg^2 x\, dx =$$

$$= -\int ctg^2 x\, d(ctgx) - \int\left(\frac{1}{sin^2 x}-1\right)dx = -\frac{ctg^3 x}{3} + ctgx + x + C$$

7. Интегрирование гиперболических функций.

При интегрировании гиперболических функций применяют следующие определения и тождества:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad thx = \frac{shx}{chx}$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1, \qquad sh2x = 2shxchx, \qquad ch2x = ch^2 x + sh^2 x$$

$$ch^2 x = \frac{ch2x + 1}{2}, \qquad sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2}$$

Рассмотрим примеры:

Пример 12.

$$\int ch^3x dx = \int ch^2x\, chx\, dx = \int (1 + sh^2x) chx\, dx = \begin{bmatrix} t = shx \\ dt = chxdx \end{bmatrix} =$$

$$= \int (1 + t^2) dt = t + \frac{1}{3} t^3 + C = shx + \frac{1}{3} sh^3x + C$$

Пример 13.

$$\int sh^2x dx = \int \frac{ch2x - 1}{2}\, dx = \frac{1}{4} sh2x - \frac{1}{2} x + C$$

Пример 14.

$$\int \frac{dx}{sh^2x - 4\mathrm{ch}^2x} = \int \frac{1}{th^2x - 4} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2x} = \begin{bmatrix} t = thx \\ dt = \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2x} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2 - 4} dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t - 2}{t + 2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{thx - 2}{thx + 2} \right| + C$$

5. Интегрирование иррациональностей

1. $\int R\left(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}\right)dx, k, m -$ натуральные числа.

Подстановка: $\sqrt[n]{x} = t, n -$ наименьшее кратное показателей всех радикалов (корней), входящих в подынтегральную функцию.

$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$. Подстановка: $\sqrt[n]{ax+b} = t.$

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$. Подстановка: $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t.$

Перейдем к примерам:

<u>Пример 1</u>.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{x-1} \\ x=t^2+1 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right] = \int \frac{2tdt}{t^2+1+t} = \int \frac{2t+1-1}{t^2+1+t}dt =$$

$$= \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \ln(t^2+t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x-1}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C$$

Пример 2.

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\ \ t^2=\frac{x-1}{x+1} \\ x=\frac{t^2+1}{1-t^2} \\ dx=\frac{4tdt}{(1-t^2)^2} \end{matrix}\right] = \int \frac{1-t^2}{t^2+1}t\frac{4tdt}{(1-t^2)^2} =$$

$$= \int \frac{4t^2dt}{(t^2+1)(1-t^2)} = 2\int \frac{(t^2+1)-(1-t^2)}{(t^2+1)(1-t^2)}dt =$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\mathrm{arctg}t + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| - 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Выделение полного квадрата в знаменателе под корнем.

Сведение к интегралам вида: $\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}, & a>0 \\ \int \frac{dx}{\sqrt{A-x^2}}, & a<0 \end{cases}$.

<u>Пример 3</u>.

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-8x+20}}dx = \int \frac{x+2}{\sqrt{(x-4)^2+4}}dx = \begin{bmatrix} x-4=t \\ x=t+4 \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{t+6}{\sqrt{t^2+4}}dt$$

$$=$$

$$= \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}} + 6\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{2}\int (t^2+4)^{-\frac{1}{2}}dt^2 + 6ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C =$$

$$= \sqrt{t^2+4} + 6ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2-8x+20} + 6ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+20}\right| + C$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2x-5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-((x+1)^2-6)}} =$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{6-(x+1)^2}} = arcsin\frac{x+1}{\sqrt{6}} + C$$

Иногда можно выделить в числителе производную трехчлена, находящегося под корнем, и занести ее под знак дифференциала:

Пример 5.

$$\int \frac{4x+7}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = \int \frac{2(2x+4)-1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = 2\int \frac{d(x^2+4x+6)}{\sqrt{x^2+4x+6}} -$$

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}} = 4\sqrt{x^2+4x+6} - \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$$

<u>Пример 6</u>.

$$\int \frac{6x+11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{(-3)(-2x-2)+5}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -3\int \frac{d(3-2x-x^2)}{\sqrt{3-2x-x^2}} +$$

$$+5\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = -6\sqrt{3-2x-x^2} + 5\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

3. При интегрировании выражений, содержащих квадратные корни из квадратных двучленов, полезными оказываются тригонометрические и гиперболические подстановки:

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ замена $x = asint$ или $x = acost$

$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$ замена $x = \frac{a}{sint}$ или $x = \frac{a}{cost}$

$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$ замена $x = atgt$ или $x = actgt$.

Замены приводят к вычислению интегралов вида: $\int R(cosx, sinx)dx$.

Пример 7.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left[\begin{array}{c} x = 3sint, \qquad t = \arcsin\frac{x}{3} \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9sin^2t} = 3cost \\ dx = 3costdt \end{array}\right] = \int \frac{9sin^2t}{3cost}3costdt =$$

$$= \frac{9}{2}\int (1-cos2t)dt = \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}sin2t + C = \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}sintcost + C =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

Пример 8.

$$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = \left[\begin{matrix} x = 2sht, \qquad x = e^t - e^{-t}, \qquad e^{2t} - xe^t - 1 = 0 \\ e^t = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{4+x^2}\right), t = \ln\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2} \\ \sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4sh^2t} = 2cht \\ dx = 2chtdt \end{matrix}\right] =$$

$$= \int 2cht2chtdt = 2\int (ch2t+1)dt = sh2t + 2t + C = 2sht \cdot cht + 2t + C$$

$$=$$

$$= 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + 2\ln\left|x + \sqrt{4+x^2}\right| + C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + 2\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right| + C$$