Практическое занятие 6

Контрольная работа № 1.

Методы интегрирования.

Определенный интеграл.

Приложения определенного интеграла.

<u>Примерный вариант контрольной работы №1</u>

1) Вычислить интегралы:

$$\int\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx;\quad \int\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx;\quad \int\frac{\sqrt{\ln x}+3+\sqrt{x}}{x}dx;\quad \int arctgx\,dx$$

$$\int\frac{(7x+5)dx}{x^2+5x+6};\quad \int\frac{(6x^2+5x+2)dx}{x+4};\quad \int(\sin^2 5x-\cos^2 x)\,dx.$$

2) Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 xe^{3x}\,dx$.

3) Вычислить с помощью определенного интеграла площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$ и $y=e^{-x}, x=1$.

Разберём предложенные примеры.

1). Вычислить неопределённые интегралы:

- $\int\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left[t=\arcsin x; dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right]=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=$
  $=\frac{1}{4}(arcsinx)^4+C;$

- $\int\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx=[t=1+x^2; dt=2xdx]=\int\frac{3}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{3\cdot 2}{2}\sqrt{t}+C=3\sqrt{t}+C=$
  $=3\sqrt{1+x^2}+C;$

- $\int \frac{\sqrt{\ln x}+3+\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx + \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx$

  рассмотрим каждый из интегралов отдельно:

  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \left[t = \ln x; dt = \frac{1}{x}dx\right] = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C_1;$

  $\int \frac{3}{x}dx = 3\ln x + C_2;$

  $\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x} + C_3;$

  собираем вместе ответы и подставляем в исходный интеграл:

  $\int \frac{\sqrt{\ln x}+3+\sqrt{x}}{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + 3\ln x + 2\sqrt{x} + \mathrm{C};$

- $\int \mathrm{arctg}x dx = \begin{bmatrix} u = \mathrm{arctg}x; du = \frac{1}{1+x^2}dx; \\ dv = dx; v = \int dx = x \end{bmatrix} = x\mathrm{arctg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$

  $= [t = 1 + x^2; dt = 2xdx] = x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(t) + C =$

  $= x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C;$

- $\int \frac{(7x+5)dx}{x^2+5x+6} = \int \frac{7x+5}{(x+2)(x+3)}dx$

т.к. дробь правильная, разложили знаменатель на множители, а подынтегральную функцию разложим на сумму простейших дробей:

$\frac{7x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$

Найдём коэффициенты A и B:

приведём правую часть к общему знаменателю и приравняем числители:

$A(x + 3) + B(x + 2) = 7x + 5;$

раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, выпишем систему из коэффициентов при x и свободном члене:

$\begin{cases} A + B = 7 \\ 3A + 2B = 5 \end{cases} \to \begin{cases} A = 7 - B \\ 3(7 - B) + 2B = 5 \end{cases} \to \begin{cases} A = 7 - B \\ -B = 5 - 21 \end{cases} \to \begin{cases} A = -9 \\ B = 16 \end{cases};$

$\int \frac{7x+5}{(x+2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{-9}{x+2} + \frac{16}{x+3}\right)dx =$

$= -\int \frac{9}{x+2}dx + \int \frac{16}{x+3}dx = -9\ln|x + 2| + 16\ln|x + 3| + C;$

- $\int \frac{(6x^2+5x+2)dx}{x+4}$

Так как дробь неправильная, разделим числитель на знаменатель столбиком, выделим целую часть и правильную дробь:

$\int\left(6x-19+\frac{78}{x+4}\right)dx = \int 6xdx - \int 19dx + \int \frac{78}{x+4}dx =$
$= 3x^2 - 19x + 78\ln|x+4| + C$

- $\int(\sin^2 5x - \cos^2 x)dx = \int \sin^2 5xdx - \int \cos^2 x\, dx =$

$$= \int \frac{1-\cos 10x}{2}dx - \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos 10xdx - \int \frac{1}{2}dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{20}\sin 10x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

2). Вычислить определенный интеграл (вычисляем по частям)

$$\int_0^1 xe^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = x; du = dx; \\ dv = e^{3x}dx; v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}xe^{3x}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^{3x}\Bigg|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.$$

3). Вычислить с помощью определенного интеграла площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$ и $y = e^{-x}, x = 1$.

Сначала необходимо определить границы интегрирования, это можно сделать, приравняв две функции (найти точки пересечения): $e^x = e^{-x}$, получаем $x = 0$. Тогда

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\, dx = e^x\Bigg|_0^1 + e^{-x}\Bigg|_0^1 = e - 1 + e^{-1} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2$$
$$= \frac{(e-1)^2}{e}.$$

Приведем еще один *примерный вариант контрольной работы № 1*.

1. $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$, $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 0$.

   Вычислить $F(1)$.

2. $f(x) = \frac{2x+arcctgx}{1+x^2}$, $F'(x) = f(x)$, $F(0) = -\frac{\pi^2}{18}$.

   Вычислить $F(\sqrt{3})$.

3. $f(x) = x \cdot sin3x$, $F'(x) = f(x)$, $F(0) = \frac{8}{9}$.

   Вычислить $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

   В заданиях 4-8 вычислить определенный интеграл.

4. $\int_{-2}^{1} \frac{x-7}{x^2+x-6} dx$

5. $\int_{-6}^{0} \frac{4x+3}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx$

6. $\int_{1}^{64} \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}+2\right)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

7. $\int_{0}^{\pi/2} sin2x \cdot sin5x\, dx$

8. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{sinx}{\sqrt{-cos2x}} dx$

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

   $\begin{cases} y = x^2 + 6x \\ y = x - 4 \end{cases}$

10. Вычислить объем тела, образованного вращением графика функции $y = \sqrt{1-|x|} \cdot e^{-\frac{|x|}{2}}$ вокруг оси Ox.

<u>Ответы</u> к примерному варианту:

1. $\frac{ln2}{6}$
2. $ln4$
3. 1
4. $ln64$
5. -6π
6. $\frac{5}{24}$
7. $-\frac{2}{21}$
8. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$
9. $\frac{9}{2}$
10. $\frac{2\pi}{e}$