Математический анализ, 2 семестр

Лекция 6

Несобственные интегралы

7. Несобственный интеграл

Понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ было введено в предположении, что промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен, и подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на нем. Отказ от этих предположений приводит к понятию несобственного интеграла с бесконечными пределами или несобственного интеграла от неограниченной функции.

7.1. Несобственный интеграл с бесконечными пределами (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ для любого $b > a$.

Определение 1. Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом называется $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$. Обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx\,.$$

Если этот предел существует и конечен, несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если этот предел не существует или равен бесконечности, несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Если $f(x) > 0$ при $x \geq a$, то несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом можно интерпретировать как площадь под бесконечной кривой, а сходимость интеграла означает конечность этой площади (рис. 6.1).

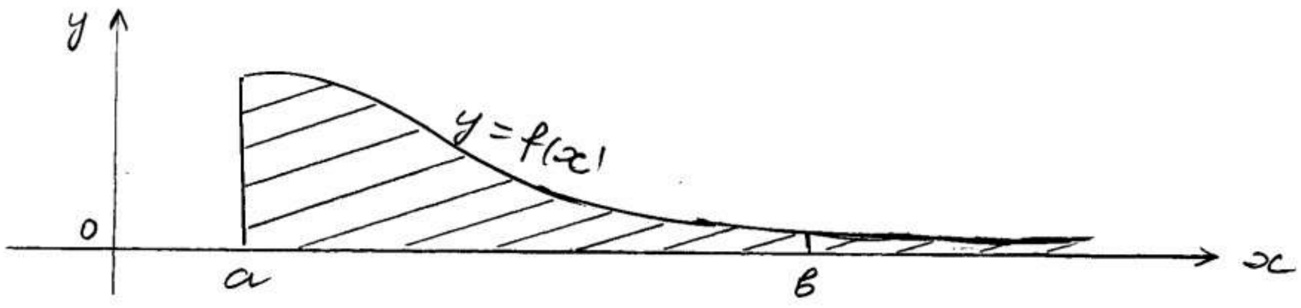


Рис. 6.1.

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ при $x \geq a$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

где $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и с обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty - \text{интеграл расходится.}$$

Пример 3.

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{+\infty}$$

Т.к. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ не существует, то данный интеграл также расходится.

Пример 4.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Bigg|_{1}^{+\infty} =$$

$$= 0 - \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$$

В последнем примере воспользовались следующим пределом:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+{}^{1}/_{x}}{1+{}^{2}/_{x}}\right) = \ln 1 = 0$$

При вычислении несобственных интегралов можно применять метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Пример 5.

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x, t \in [1; +\infty] \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{1}^{+\infty} = 1$$

Пример 6.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{lnx dx}{x^2} = \begin{bmatrix} u = lnx, \;\; dv = \dfrac{dx}{x^2} \\ du = \dfrac{dx}{x}, \;\; v = -\dfrac{1}{x} \end{bmatrix} = -\frac{1}{x} lnx\Big|_{1}^{+\infty} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty} = 1$$

В последнем примере применено правило Лопиталя для вычисления предела:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{{}^{1}/_{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} {}^{1}/_{x} = 0$$

Пример 7.

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} cosxdx = \left[\begin{matrix} u = cosx, & dv = e^{-2x}dx \\ du = -sinxdx, & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}cosx\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}sinxdx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = sinx, & dv = e^{-2x}dx \\ du = cosxdx, & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}sinx\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}cosxdx \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-2x}cosxdx$$

Использованы пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{-2x}sinx) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}(e^{-2x}cosx) = 0$$

Относительно искомого интеграла получено уравнение:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}cosxdx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-2x}cosxdx$$

Решение этого уравнения дает следующий результат:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}cosxdx = \frac{2}{5}.$$

В некоторых случаях исследовать несобственный интеграл на сходимость можно не вычисляя первообразную, а пользуясь *признаками сходимости*. Сформулируем эти признаки.

I. Признак сравнения. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для любого $x \ge a$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Геометрически это означает: если конечна площадь под графиком большей функции $g(x)$, то конечна площадь под графиком меньшей функции. Аналогично можно геометрически интерпретировать и второе утверждение.

II. Предельный признак сравнения. Если $f(x) \ge 0$ и $g(x) > 0$ для любого $x \ge a$ и существует конечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся.

Сформулированные признаки позволяют при исследовании на сходимость несобственных интегралов заменять подынтегральные функции на более простые. Например, для исследования на сходимость часто используют $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$. Исследуем его на сходимость:

При $\alpha \neq 1$: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^{+\infty} =$

$$= \begin{cases} 0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \end{cases}.$$

При $\alpha = 1$, как показано в *примере* 2: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln x|_1^{+\infty} = +\infty$.

Итак, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Рассмотрим примеры.

Пример 8.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{3x+1}{5x^3+2} dx$$

Интеграл сходится, т.к.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{5x^3+2}:\frac{1}{x^2}\right)=\frac{3}{5}$, а $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится.

Пример 9.

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ сходится, т. к.}$$

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ для любого } x \geq 1, \text{а} \int_{1}^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e} \text{ сходится.}$$

Определение 2. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Определение 3. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если сам интеграл сходится, а интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ расходится.}$$

Верно следующее *утверждение*: если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится, т.е. из абсолютной сходимости следует сходимость.

Рассмотрим примеры.

Пример 10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{cosxdx}{x^2} \text{ сходится абсолютно, т. к. } \left|\frac{cosx}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ для любого } x \geq 1, \text{а}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ сходится.}$$

Пример 11.

$$\int_1^{+\infty} \frac{sinxdx}{x} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x}, \ \ dv = sinxdx \\ du = -\frac{1}{x^2}dx, \ \ v = -cosx \end{bmatrix} = \frac{-cosx}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{cosxdx}{x^2}$$

Оба слагаемых в правой части конечны, следовательно, $\int_1^{+\infty} \frac{sinxdx}{x}$ сходится. Исследуем данный интеграл на абсолютную сходимость. Для этого воспользуемся неравенством $|sinx| \geq sin^2x$ для любого x.

$$\int_{1}^{+\infty}\left|\frac{sinx}{x}\right|dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{|sinx|}{x}dx\geq\int_{1}^{+\infty}\frac{sin^2x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1-cos2x}{x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{cos2x}{x}dx$$

Первый из двух интегралов в правой части расходится, а второй сходится, в чем можно убедиться, применяя для его вычисления формулу интегрирования по частям. Разность двух интегралов, один из которых равен бесконечности, а другой имеет конечное значение, равна бесконечности, следовательно, $\int_{1}^{+\infty}\frac{|sinx|}{x}dx$ расходится, а $\int_{1}^{+\infty}\frac{sinxdx}{x}$ сходится условно.

Перейдем к интегралам от неограниченных функций.

7.2. Несобственный интеграл от неограниченной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$ и $\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (рис. 6.2)

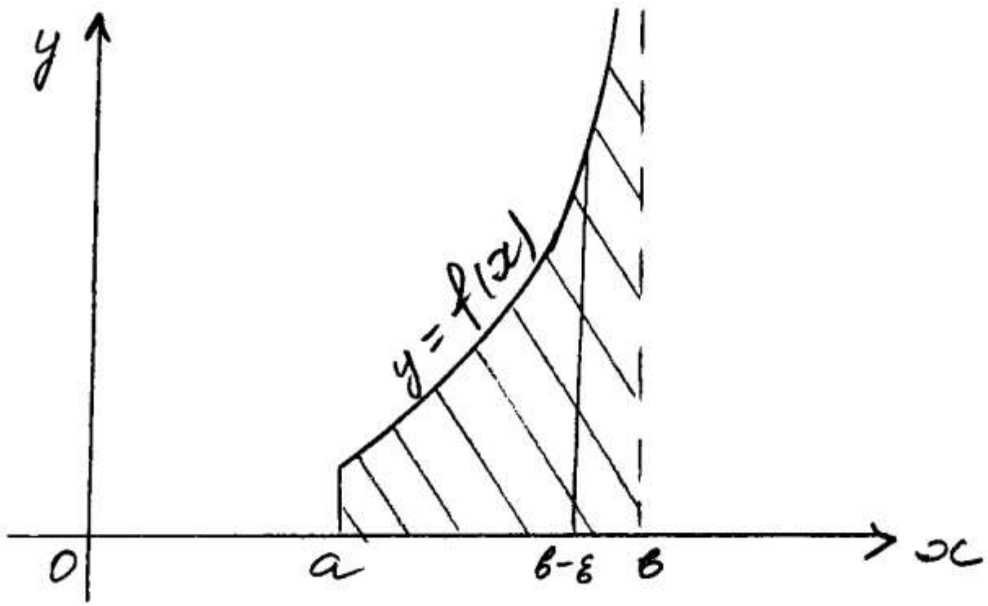


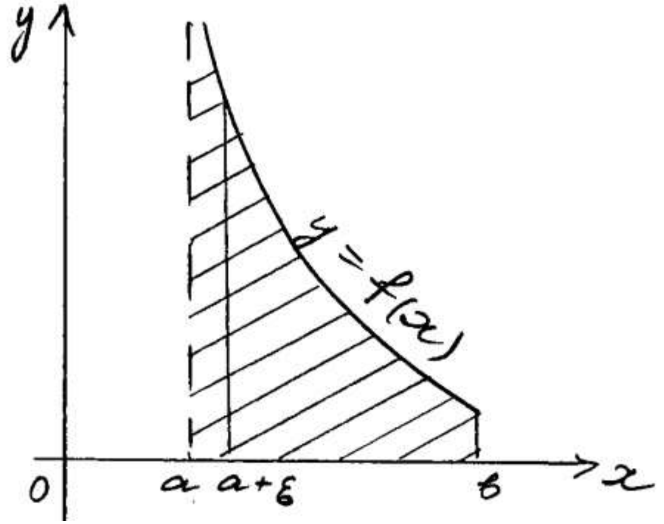
Рис. 6.2.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

называется *несобственным интегралом от неограниченной функции*. Если предел конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если предел не существует или равен бесконечности, то интеграл *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл, когда точкой разрыва является левый конец отрезка интегрирования или внутренняя точка $c \in (a, b)$ (рис. 6.3 и 6.4 соответственно).



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

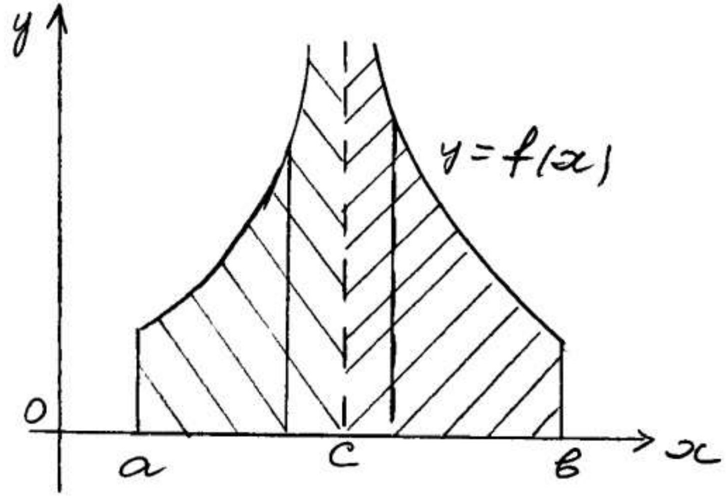


Рис. 6.4.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

В последнем случае *сходимость интеграла предполагает сходимость обоих интегралов в правой части равенства*.

При вычислении несобственных интегралов от неограниченных функций можно применять те же приемы, что и при вычислении определенных интегралов. Рассмотрим примеры.

Пример 12.

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}\Big|_1^5 = 4$$

Пример 13.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} u = ln x, & dv = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = 2\sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -4\sqrt{x}\Big|_0^1 = -4$$

Использован следующий предел, вычисленный по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/\left(2x\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 0+0}\left(-2\sqrt{x}\right) = 0$$

Пример 14.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} = \left[\begin{array}{c} t = \arcsin x, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

При исследовании на сходимость интегралов от неограниченных функций применяются признаки сравнения, которые формулируются так же, как и для несобственных интегралов с бесконечными пределами.

Для сравнения используют следующие интегралы:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \text{ и } \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

которые сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$.

Исследуем на сходимость первый из этих интегралов, при $a = 0$ для упрощения:

$$\alpha \neq 1: \int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_0^b x^{-\alpha}\, dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_0^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{x\to 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1, \text{расходится} \\ \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \text{сходится} \end{cases}$$

$$\alpha = 1: \int_0^b \frac{dx}{x} = lnx|_0^b = lnb - ln0 = +\infty, \text{расходится.}$$

Итак, $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Рассмотрим примеры.

Пример 15.

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx \text{ сходится, т. к.} \lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}, \text{а } \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \text{ сходится.}$$

Пример 16.

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} \text{ расходится, т. к. подынтегральная функция}$$

терпит разрыв во внутренней точке $x = 1$ отрезка интегрирования и, согласно определению,

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} = \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} + \int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$$

Оба интеграла в правой части являются расходящимися. Действительно, сравним подынтегральную функцию с функцией $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ при условии $x \to 1$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{(x^2-1)^2} : \frac{1}{(x-1)^2}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{1}{4}$$

и учтем, что $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ и $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ расходятся. Кроме того, в расходимости интегралов $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$ и $\int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$ можно убедиться непосредственно. Например,

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x^2-1)}\bigg|_0^1 = +\infty$$

Ошибочным является следующее решение:

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x^2-1)}\bigg|_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) = -\frac{2}{3}$$

т.к. при таком решении не учитывается, что подынтегральная функция терпит разрыв во внутренней точке отрезка [0,2].

Рассмотрим еще несколько интересных примеров на исследование и вычисление несобственных интегралов.

Пример 17. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+7x^2+1}dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+7x^2+1}dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1+{}^1/_{x^2}}{x^2+7+{}^1/_{x^2}}dx =$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+9} = \left[\begin{array}{c} x-\frac{1}{x}=t \\ x\to 0+0, t\to -\infty \\ x\to +\infty, t\to +\infty \end{array}\right] = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= \frac{2}{3} arctg\,\frac{t}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Пример 18. Вычислить

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left[\begin{array}{c} arctgx = t, x = 0, t = 0, x \to +\infty, t \to \frac{\pi}{2} \\ x = tgt, dx = \frac{dt}{cos^2 t} \\ (1+x^2)^{\frac{3}{2}} = (1+tg^2 t)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{(cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{cos^3 t} \end{array} \right] =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\frac{1}{cos^3 t}} \cdot \frac{dt}{cos^2 t} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} tcostdt = tsint\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sintdt = \frac{\pi}{2} + cost\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Пример 19. Вычислить

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{xlnx}{(1+x^2)^2} dx$$

Обозначим

$$I_1 = \int_{0}^{1} \frac{xlnx}{(1+x^2)^2} dx\,, I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{xlnx}{(1+x^2)^2} dx$$

$$I = I_1 + I_2$$

Исследуем подынтегральную функцию при условии $x \to 0+0$.

$$\lim_{x\to 0+0}(x\ln x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}=0$$

Подынтегральная функция имеет конечный предел при $x\to 0+0$, интеграл I_1 является «собственным», значит, имеет конечное значение.

$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\left[\begin{array}{c} x=\frac{1}{t}, x=1, t=1, x\to+\infty, t\to 0+0 \\ \ln x=\ln\frac{1}{t}=-\ln t, dx=-\frac{dt}{t^2}\end{array}\right]=$$

$$=\int_1^0\frac{\frac{1}{t}(-\ln t)}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=\int_1^0\frac{\ln t}{\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\cdot t\cdot t^2}dt=\int_1^0\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=-\int_0^1\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt=-I_1$$

$$I=I_1+I_2=I_1-I_1=0$$

Вычислим дополнительно I_2.

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x, \qquad du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx, v = -\dfrac{1}{2(1+x^2)} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\Bigg|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}(\ln x^2 - \ln(1+x^2))\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{4}$$

*Пример 20**. Доказать, что интегралы

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sinx)\, dx \text{ и } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(cosx)\, dx$$

сходятся и $I_1 = I_2$. Вычислить $I = I_1 = I_2$.

Указание: рассмотреть сумму $I_1 + I_2 = 2I$ и воспользоваться линейностью интеграла, а также свойствами логарифма.

Ответ: $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

Для несобственных интегралов II рода также вводятся определения абсолютной и условной сходимости.

Определение 4. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx.$$

Определение 5. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

называется *условно сходящимся*, если сам интеграл сходится, а интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

расходится.

Пример 21. Исследовать на абсолютную сходимость

$$\int_0^1 \frac{sin2x}{x^3+\sqrt{x}}dx$$

Рассмотрим

$$\int_0^1 \left|\frac{sin2x}{x^3+\sqrt{x}}\right| dx$$

Так как $\left|\frac{sin2x}{x^3+\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ – сходится $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$, следовательно,

$$\int_0^1 \left|\frac{sin2x}{x^3+\sqrt{x}}\right| dx \text{ сходится,}$$

а, значит, $\int_0^1 \frac{sin2x}{x^3+\sqrt{x}}dx$ сходится абсолютно.