ЛЕКЦИЯ 13. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Сфера.

2. Эллипсоид.

3. Гиперболоиды.

4. Параболоиды.

5. Конус второго порядка.

6. Цилиндры.

Поверхность в пространстве можно рассматривать, как геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому условию. Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел (x, y, z) – их координатами. Однозначное условие (свойство) общее для всех точек поверхности можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности. Эта возможность позволяет применять аппарат линейной алгебры для изучения поверхностей.

Определение 1. ***Уравнением поверхности***, в прямоугольной системе координат называется такое уравнение $F(x; y; z) = 0$ с тремя переменными (x, y, z), которому удовлетворяют координаты каждой точки лежащей на поверхности и только они.

$F(x; y; z)$ - многочлен степени не выше двух относительно переменных (x, y, z).

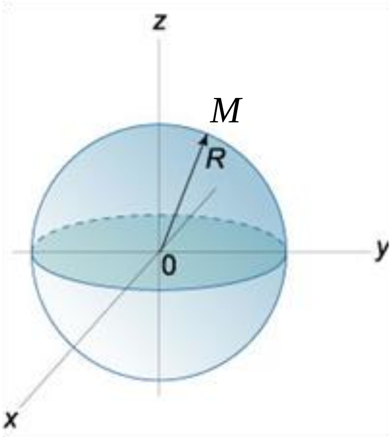
$$F(x; y; z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Hx + 2Jy + 2Kz + L = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Коэффициенты $A, B, C, D, E, F, J, H, K, L \in \mathbf{R}$ и $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Далее в нашем курсе мы рассмотрим такие поверхности второго порядка, как сфера, эллипсоид, гиперболоид, параболоид, конические и цилиндрические поверхности. Получим уравнения, задающие эти поверхности, проведем исследования формы поверхностей путем изучения линий пересечения данной поверхности с координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям – методом сечений. Изучим характеристики (будем говорить – ***параметры***) поверхностей и их графики.

13.1. Сфера

Определение 2. ***Сферой*****,** радиуса R с центром в точке $O(x_0; y_0; z_0)$ называется множество всех точек M пространства, удовлетворяющих условию $OM = R$.



Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка сферы. Тогда,

$$OM = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

Условие $OM = R$ можно записать в виде $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 \quad \textbf{(2)}$$

уравнение сферы

Ему удовлетворяют координаты точек лежащих на сфере и только они.

Если $x_0=0; y_0=0; z_0=0$ (центр сферы лежит в начале координат), то уравнение (2) принимает вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad \textbf{(3)}$$

каноническое уравнение сферы

Система координат, в которой уравнение сферы имеет вид (2) называется ***канонической*** (для данной сферы).

Задача 1. Найти координаты центра и радиус сферической поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-2x+6z-6=0$.

Решение.

Выделим полные квадраты:

$$\left(x^2-2x+1\right)-1+y^2+\left(z^2+6z+9\right)-9-6=0$$
$$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=16$$

$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=16$ – сфера с центром O(1;0;-3), радиуса 4.

Ответ. O(1;0;-3), R = 4.

Задача 2. Установить взаимное расположение точек A(-1;5;7), B(-3;4;0), C(0;0;-6) и сферы $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z-11=0$.

Решение.

Приведем уравнение к виду (2), выделив полные квадраты по переменным x, y, z.

$$(x^2+2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4+(z^2-6z+9)-9-11=0.$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25.$$

Если точка принадлежит сфере, то ее координаты обращают уравнение сферы в верное тождество.

Если точка лежит внутри сферы, то расстояние от центра сферы до этой точки будет меньше радиуса, т.е. выполняется неравенство $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2<25$.

Если точка лежит вне сферы, то расстояние от центра сферы до этой точки будет больше радиуса, т.е. выполняется неравенство $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2>25$.

Подставим координаты каждой точки в уравнение сферы:

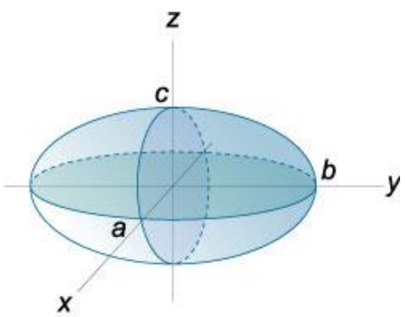
A(-1;5;7): $(-1+1)^2+(5-2)^2+(7-3)^2=25$, значит A лежит на сфере.

B(-3;4;0): $(-3+1)^2+(4-2)^2+(0-3)^2<25$, значит B лежит внутри сферы.

C(0;0;-6): $(0+1)^2+(0-2)^2+(-6-3)^2>25$, значит A лежит вне сферы.

13.2. Эллипсоид

Определение 3. ***Эллипсоидом*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **(4)**



Исследуем эллипсоид путем изучения линий пересечения его с координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям – методом сечений.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью $z=h$ параллельной плоскости *Oxy*.

Преобразуем уравнение эллипсоида к виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$.

1. Если $h=0$, то в плоскости *Oxy* получаем эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. Пусть теперь $|h| > 0$.

2.1. Если $|h| > c$, то $\frac{h^2}{c^2} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} < 0$ и плоскость $z = h$ не пересекает эллипсоид.

2.2. Если $|h| = c$, то $\frac{h^2}{c^2} = 1 \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} = 0$ и плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид в точках $S(0;\ 0;\ \pm c)$.

2.3. Если $|h| < c$, то $\frac{h^2}{c^2} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$ и плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2 \cdot \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$ – эллипс с полуосями $a^* = a \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)}$ и $b^* = b \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)}$.

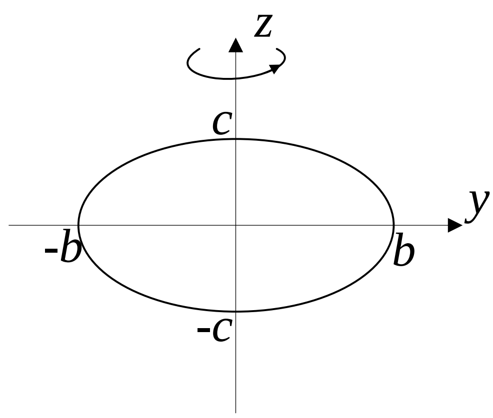
$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса.

Сечения эллипсоида плоскостями $x = h$, $y = h$ предлагается провести самостоятельно.

Замечание. К пониманию структуры эллипсоида можно прийти, если рассматривать эллипсоид, как результат вращения кривой второго порядка.

Пусть эллипс, например $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, вращается вокруг оси Oz.

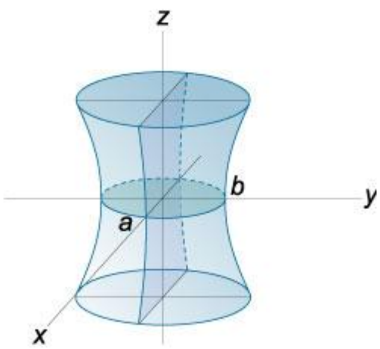
Получится поверхность $\frac{y^2 + x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид вращения.



13.3. Гиперболоиды

13.3.1. Однополостный гиперболоид

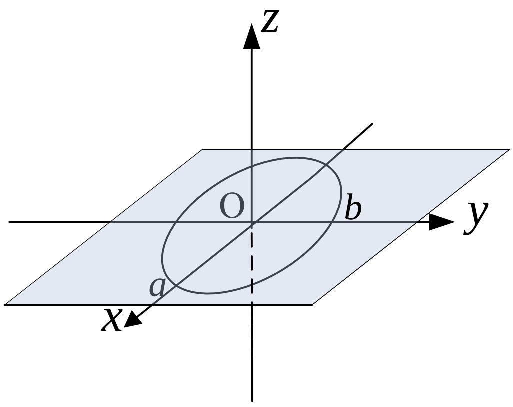
Определение 4. ***Однополостным гиперболоидом*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. **(5)**



Рассмотрим сечение гиперболоида плоскостью $z=h$ параллельной плоскости Oxy.

Преобразуем уравнение гиперболоида к виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}$.

1. Если $h=0$, то в плоскости Oxy получаем эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



2. Пусть теперь $h\neq 0$.

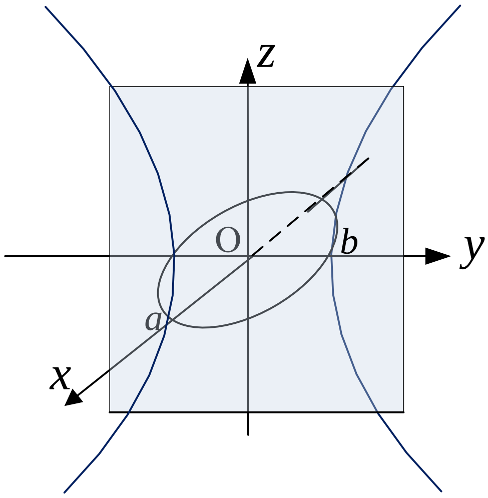
$1+\frac{h^2}{c^2}>0$, причем $\lim\limits_{h\to\infty}\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)=+\infty$ и плоскость $z=h$ пересекает гиперболоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2\cdot\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\cdot\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$ – эллипс с полуосями. $a^*=a\cdot\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}$ и $b^*=b\cdot\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}$.

$\frac{x^2}{(a^*)^2}+\frac{y^2}{(b^*)^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса.

$\lim\limits_{h\to\infty} a\cdot\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=+\infty$, $\lim\limits_{h\to\infty} b\cdot\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=+\infty$

Рассмотрим теперь сечение гиперболоида плоскостью $x=h$ параллельной плоскости Oyz.

1. Если $h=0$, то в плоскости Oyz получаем гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Действительная ось находится на оси Oy, а мнимая на оси Oz.



2. Пусть теперь $h \neq 0$. Преобразуем уравнение гиперболоида к виду $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$.

2.1. Если $|h|>a$, то $\frac{h^2}{a^2}>1 \Rightarrow 1-\frac{h^2}{a^2}<0$ и плоскость $x=h$ пересекает гиперболоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{z^2}{c^2\cdot\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}-\frac{y^2}{b^2\cdot\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}=1$ – гипербола с полуосями $b^*=b\cdot\sqrt{\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}$ – мнимая полуось и $c^*=c\cdot\sqrt{\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}$ – действительная полуось.

$\frac{z^2}{(c^*)^2}-\frac{y^2}{(b^*)^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы.

2.2. Если $|h|=a$, то $\frac{h^2}{a^2}=1 \Rightarrow 1-\frac{h^2}{a^2}=0$, то $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ – пара пересекающихся прямых.

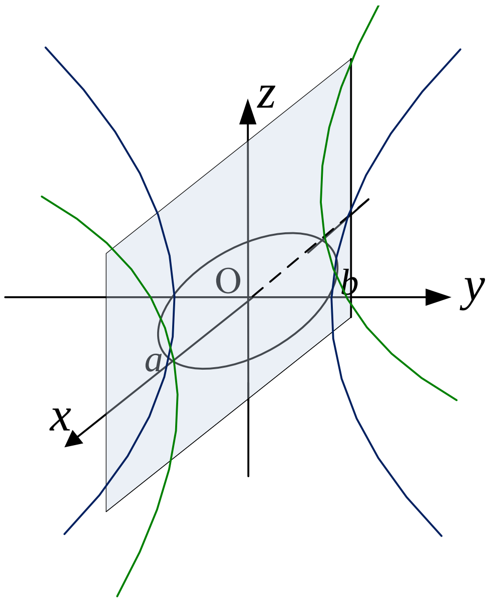
2.3. Если $|h| < a$, то $\frac{h^2}{a^2} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{a^2} > 0$ и плоскость $x = h$ пересекает гиперболоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{y^2}{b^2 \cdot \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \cdot \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} = 1$ – гипербола с полуосями $b^* = b \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)}$ и $c^* = c \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)}$.

$\frac{y^2}{(b^*)^2} - \frac{z^2}{(c^*)^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы.

Рассмотрим теперь сечение гиперболоида плоскостью $y = h$ параллельной плоскости Oxz.

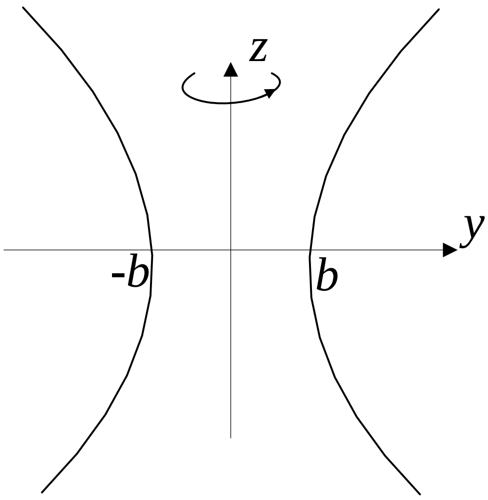
1. Если $h = 0$, то в плоскости Oxz получаем гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Действительная ось находится на оси Ox, а мнимая на оси Oz.

Дальнейшие рассуждения предлагается провести самостоятельно.



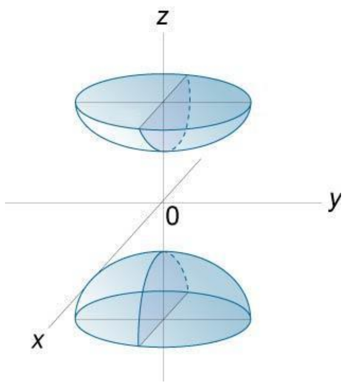
Замечание.

Вращая гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси Oz получим поверхность, задаваемую уравнением $\frac{y^2 + x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный гиперболоид вращения.



13.3.2. Двуполостный гиперболоид

Определение 5. ***Двуполостным гиперболоидом*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. **(6)**



Рассмотрим сечение гиперболоида плоскостью $z=h$ параллельной плоскости Oxy. Преобразуем гиперболоид к виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z^2}{c^2}$.

1. Если $|h|<c$, то $\frac{h^2}{c^2}<1\Rightarrow -1+\frac{h^2}{c^2}<0$ и плоскость $z=h$ не пересекает гиперболоид.

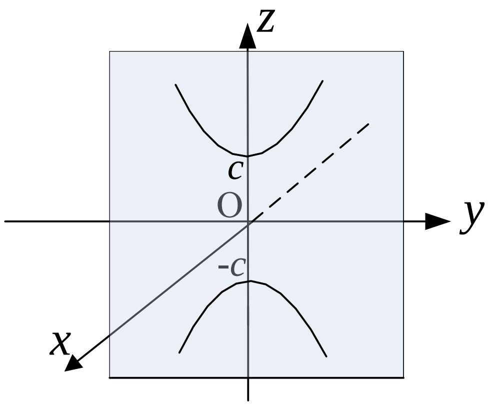
2. Если $|h|=c$, то $\frac{h^2}{c^2}=1\Rightarrow 1-\frac{h^2}{c^2}=0$ и плоскость $z=h$ пересекает гиперболоид в точках $S(0;\,0;\,\pm c)$.

3. Если $|h|>c$, то $\frac{h^2}{c^2}>1\Rightarrow -1+\frac{h^2}{c^2}>0$ и плоскость $z=h$ пересекает гиперболоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2\cdot\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\cdot\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1$ – эллипс с полуосями $a^*=a\cdot\sqrt{\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}$ и $b^*=b\cdot\sqrt{\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}$.

$\frac{x^2}{(a^*)^2}+\frac{y^2}{(b^*)^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса, причем $\lim\limits_{h\to\infty} a\cdot\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=+\infty$, $\lim\limits_{h\to\infty} b\cdot\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=+\infty$.

Рассмотрим теперь сечение гиперболоида плоскостью $x = h$ параллельной плоскости *Oyz*. Преобразуем гиперболоид к виду $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{x^2}{a^2}$ или $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2}$.

1. Если $h = 0$, то в плоскости *Oyz* получаем гиперболу $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Действительная ось находится на оси *Oz*, а мнимая на оси *Oy*.



2. Если $h \neq 0$, то $\frac{h^2}{a^2} + 1 > 0$ и плоскость $x = h$ пересекает гиперболоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{z^2}{c^2 \cdot \left(\frac{h^2}{a^2} + 1\right)} - \frac{y^2}{b^2 \cdot \left(\frac{h^2}{a^2} + 1\right)} = 1$ – гипербола с полуосями

$c^* = c \cdot \sqrt{\left(\frac{h^2}{a^2} + 1\right)}$ – действительная полусов и $b^* = b \cdot \sqrt{\left(\frac{h^2}{a^2} + 1\right)}$ – мнимая полуось.

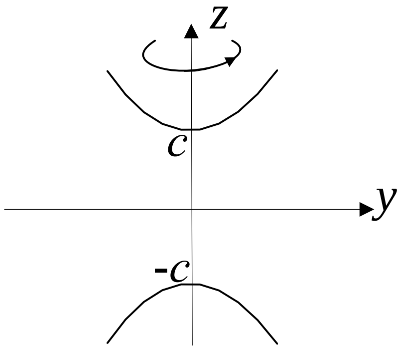
$\frac{z^2}{(c^*)^2} - \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы, причем

$\lim\limits_{h \to \infty} c \cdot \sqrt{\left(\frac{h^2}{a^2} + 1\right)} = +\infty$, $\lim\limits_{h \to \infty} b \cdot \sqrt{\left(\frac{h^2}{a^2} + 1\right)} = +\infty$

Сечения гиперболоида плоскостями $y = h$ предлагается провести самостоятельно.

Замечание.

Вращая гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ вокруг оси *Oz* получим поверхность, задаваемую уравнением $\frac{y^2 + x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – двуполостный гиперболоид вращения.

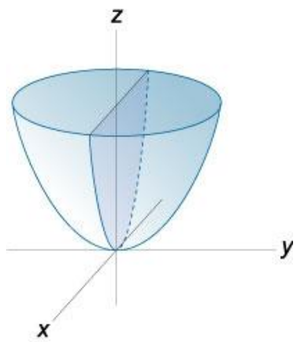


13.4. Параболоиды

13.4.1. Эллиптический параболоид

Определение 6. ***Эллиптическим параболоидом*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz,\ p>0 \quad \textbf{(7)}$$



Рассмотрим сечение параболоида плоскостью $z=h$ параллельной плоскости Oxy.

1. Если $h=0$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ и плоскость $z=h$ пересекает параболоид в единственной точке O(0;0;0).

2. Если $h<0$, то плоскость $z=h$ не имеет точек пересечения с параболоидом.

3. Если $h>0$, то плоскость $z=h$ пересекает параболоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2\cdot 2ph}+\frac{y^2}{b^2\cdot 2ph}=1$ – эллипс с полуосями $a^*=a\cdot\sqrt{2ph}$ и $b^*=b\cdot\sqrt{2ph}$.

$\frac{x^2}{(a^*)^2}+\frac{y^2}{(b^*)^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса, причем $\lim\limits_{h\to\infty} a\cdot\sqrt{2ph}=+\infty$, $\lim\limits_{h\to\infty} b\cdot\sqrt{2ph}=+\infty$.

Рассмотрим сечение параболоида плоскостью $x=h$ параллельной плоскости Oyz. Преобразуем уравнение параболоида к виду $\frac{y^2}{b^2}=2pz-\frac{x^2}{a^2}$.

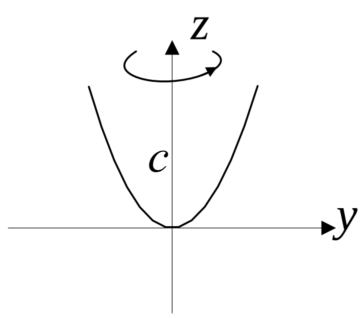
1. Если $h=0$, то $y^2=2pzb^2$ - парабола, с параметром $p^*=pb^2$, т.е. $y^2=2p^*z$.

2. Если $h\neq 0$, то $\frac{y^2}{b^2}=2p\left(z-\frac{h^2}{2pa^2}\right)$ – парабола, вершина которой лежит в точке $\left(0;0;\frac{h^2}{2pa^2}\right)$.

Сечения параболоида плоскостью $y=h$ предлагается провести самостоятельно.

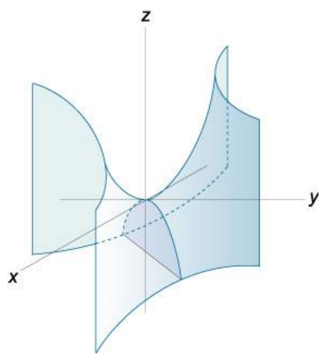
Замечание.

Вращая параболу $y^2 = 2pz$ вокруг оси Oz получим уравнение поверхность эллиптического параболоида вращения.



13.4.2. Гиперболический параболоид

Определение 7. ***Гиперболическим параболоидом*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$, $p > 0$ **(8)**



Рассмотрим сечение параболоида плоскостью $z = h$ параллельной плоскости Oxy.

1. Если $h = 0$, то $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ и пересечением плоскости $z = h$ и параболоида является пара пересекающихся прямых.

2. Если $h > 0$, то плоскость $z = h$ пересекает параболоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2 \cdot 2ph} - \frac{y^2}{b^2 \cdot 2ph} = 1$ – гипербола с полуосями $a^* = a \cdot \sqrt{2ph}$ – действительная полуось и $b^* = b \cdot \sqrt{2ph}$ – мнимая полуось.

$\frac{x^2}{(a^*)^2} - \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы, причем $\lim\limits_{h \to \infty} a \cdot \sqrt{2ph} = +\infty$, $\lim\limits_{h \to \infty} b \cdot \sqrt{2ph} = +\infty$.

3. Если $h < 0$, то плоскость $z = h$ пересекает параболоид по кривой, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2 \cdot (-2ph)} - \frac{y^2}{b^2 \cdot (-2ph)} = -1$ – гипербола с полуосями $a^* = a \cdot \sqrt{-2ph}$ – мнимая полуось и $b^* = b \cdot \sqrt{-2ph}$ – действительная полуось.

$\frac{y^2}{(b^*)^2} - \frac{x^2}{(a^*)^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы, причем $\lim\limits_{h\to\infty} a\cdot\sqrt{-2ph} = +\infty$, $\lim\limits_{h\to\infty} b\cdot\sqrt{-2ph} = +\infty$.

Рассмотрим сечение параболоида плоскостью $y = h$. Преобразуем уравнение параболоида к виду $\frac{x^2}{a^2} = 2pz + \frac{y^2}{b^2}$.

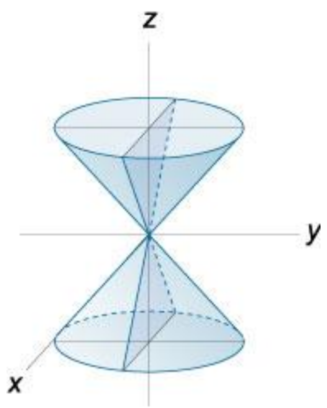
1. Если $h = 0$, то $x^2 = 2pza^2$ – парабола, с параметром $p^* = pa^2$, т.е. $x^2 = 2p^*z$.

2. Если $h \neq 0$, то $\frac{x^2}{a^2} = 2p\left(z + \frac{h^2}{2pb^2}\right)$ – парабола.

Сечения параболоида плоскостью $x = h$ предлагается провести самостоятельно.

Замечание. Гиперболический параболоид можно рассматривать, как результат движения параболы $y^2 = -2pzb^2$ вдоль параболы $x^2 = 2pza^2$.

13.5. Конус второго порядка



Определение 8. ***Конусом второго порядка*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. **(9)**

Рассмотрим сечение конуса плоскостью $z = h$ параллельной плоскости Oxy.

1. Если $h = 0$, то в плоскости Oxy точку O(0;0;0).

2. Пусть теперь $h \neq 0$. Перепишем уравнение в виде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$. Плоскость $z = h$ пересекает конус по кривой, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2\cdot\frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2\cdot\frac{h^2}{c^2}} = 1$ – эллипс с полуосями $a^* = a\cdot\frac{h}{c}$ и $b^* = b\cdot\frac{h}{c}$.

$\frac{x^2}{(a^*)^2}+\frac{y^2}{(b^*)^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса.

$\lim\limits_{h\to\infty} a\cdot\frac{h}{c}=+\infty$, $\lim\limits_{h\to\infty} b\cdot\frac{h}{c}=+\infty$.

Рассмотрим теперь сечение конуса плоскостью $x=h$ параллельной плоскости Oyz. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{x^2}{a^2}$ или $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}$.

1. Если $h=0$, то в плоскости Oyz получаем пару пересекающихся прямых $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

2. Если $h\neq 0$ то плоскость $x=h$ пересекает конус по кривой, задаваемой уравнением $\frac{z^2}{c^2\cdot\frac{h^2}{a^2}}-\frac{y^2}{b^2\cdot\frac{h^2}{a^2}}=1$ – гипербола с действительной полуосью $c^*=c\cdot\frac{h}{a}$ и мнимой полуосью $b^*=b\cdot\frac{h}{a}$.

$\frac{z^2}{(c^*)^2}-\frac{y^2}{(b^*)^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы.

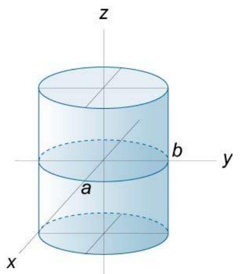
Сечения конуса плоскостью $y=h$, параллельной плоскости Oxz, предлагается рассмотреть самостоятельно.

Замечание. Конус второго порядка можно рассматривать, как результат вращения пары пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ вокруг оси Oz.

13.6. Цилиндры

13.6.1. Эллиптический

Определение 9. ***Эллиптическим цилиндром*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **(10)**



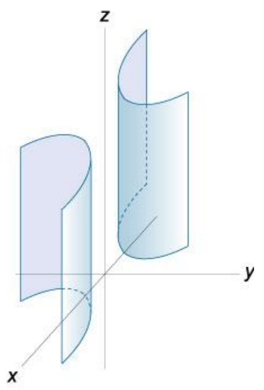
Очевидно, что в сечении плоскостью $z=h$, $h\in\mathbf{R}$ всегда будет получаться эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

В сечении плоскостями $x=h$ или $y=h$ $h\in\mathbf{R}$ всегда будут получаться пары параллельных прямых $\frac{y}{b}=\pm\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$ и $\frac{x}{a}=\pm\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$ соответственно.

Замечание. Эллиптический цилиндр, очевидно, образуется при перемещении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вдоль оси Oz.

13.6.2. Гиперболический цилиндр

Определение 10. ***Гиперболическим цилиндром*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **(11)**



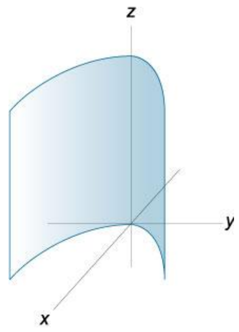
Очевидно, что в сечении плоскостью $z=h$, $h\in\mathbf{R}$ всегда будет получаться гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

В сечении плоскостями $x=h$ или $y=h$ $h\in\mathbf{R}$ всегда будут получаться пары параллельных прямых $\frac{y}{b}=\pm\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$ и $\frac{x}{a}=\pm\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$ соответственно.

Замечание. Гиперболический цилиндр, очевидно, образуется при перемещении гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ вдоль оси Oz.

13.6.3. Параболический цилиндр

Определение 11. ***Параболическим цилиндром*** называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $y^2 = 2px$. **(12)**



Замечание. Параболический цилиндр, очевидно, образуется при перемещении параболы $y^2 = 2px$ вдоль оси *Oz*.

Задача 3. Установить тип поверхности, задаваемой уравнением $x^2 - 16y^2 - 4z^2 - 6x + 40z - 107 = 0$. Установить тип кривых, образующихся при пересечении поверхности и координатных плоскостей.

Решение.

Приведем уравнение поверхности к каноническому виду, выделив полные квадраты по переменным *x*, *y*, *z*. Перегруппируем для начала слагаемые.

$$x^2 - 6x - 16y^2 - 4z^2 + 40z - 107 = 0.$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 - 16y^2 - 4(z^2 - 10z + 25) + 100 - 107 = 0.$$

$(x-3)^2 - 16y^2 - 4(z-5)^2 = 16$ поделим обе части на 16.

$\dfrac{(x-3)^2}{16} - y^2 - \dfrac{(z-5)^2}{4} = 1$ – двуполостный гиперболоид.

Рассмотрим сечение плоскостью *x* = 0. Кривая в плоскости *Oyz* имеет вид $-y^2 - \dfrac{(z-5)^2}{4} = 1 - \dfrac{9}{16}$.

$y^2 + \dfrac{(z-5)^2}{4} = -\dfrac{7}{16}$ – пустое множество решений.

Рассмотрим сечение плоскостью *y* = 0. Кривая в плоскости *Oxz* имеет вид $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(z-5)^2}{4} = 1$ – гипербола, центр в точке (3;5). Действительная полуось лежит на прямой параллельной оси *Ox* и равна 4, мнимая полуось лежит на прямой параллельной оси *Oz* и равна 2.

Рассмотрим сечение плоскостью z = 0. Кривая в плоскости Oxy имеет вид $\frac{(x-3)^2}{16}-y^2=\frac{29}{4}\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{116}-\frac{y^2}{29/4}=1$ – гипербола, центр в точке (3;0). Действительная полуось лежит на прямой параллельной оси Ox и равна $2\sqrt{29}$, мнимая полуось лежит на оси Oy и равна $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Задача 4. Найти точку (точки) пересечения поверхности, задаваемой уравнением $9x^2+4y^2-36z^2-18x+16y+216z-335=0$ и прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$.

Решение.

Приведем уравнение поверхности к каноническому виду, выделив полные квадраты по переменным x, y, z. Перегруппируем для начала слагаемые. Коэффициенты при квадратах переменных x, y, z необходимо выносить за скобку.

$9x^2-18x+4y^2+16y-36z^2+216z-335=0$.

$9(x^2-2x+1)-9+4(y^2+4y+4)-16-36(z^2-6z+9)+324-335=0$.

$9(x-1)^2+4(y+2)^2-36(z-3)^2=36$ поделим обе части на 36.

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}-(z-3)^2=1$ – однополостный гиперболоид.

Зададим прямую параметрически:

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=t+3 \end{cases}$$

Точкам пересечения соответствует некоторый параметр t. Найдем его, подставив параметрические уравнения в уравнение поверхности.

$\frac{(2t+1-1)^2}{4}+\frac{(3t-2+2)^2}{9}-(t+3-3)^2=1$.

$\frac{4t^2}{4}+\frac{9t^2}{9}-t^2=1$.

$t^2=1\Rightarrow t_1=1, t_2=-1$ – значит имеется две точки пересечения прямой с поверхностью.

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -5 \\ z_2 = 2 \end{cases} \quad M_1 = (3;1;4); M_2(-1;-5;-6).$$

Ответ. $M_1 = (3;1;4); M_2(-1;-5;-6)$ – точки пересечения прямой с поверхностью.

Задача 5. Установить, по какой кривой однополостный гиперболоид, задаваемый уравнением $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ пересекает плоскость $z + 1 = 0$.

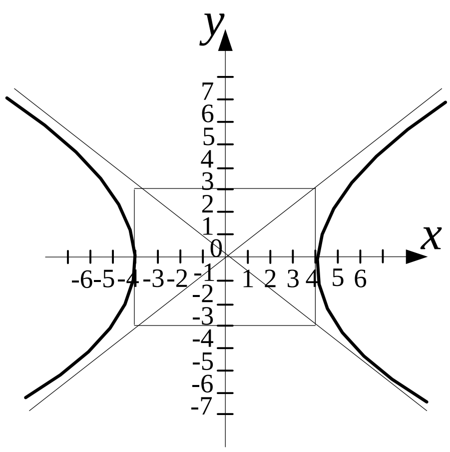
Решение.

Кривая пересечения есть множество точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения переменную z и подставим в первое уравнение системы.

$$z = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{(-1)^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$



$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ – гипербола в плоскости Oxy. Действительная полуось $a = 4$ и лежит на оси Ox, мнимая полуось $b = 3$ и лежит на оси Oy. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$.

Фокусы находятся в точках $F_1(-5;0;-1)$ и $F_2(5;0;-1)$.

Ответ. Гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, фокусы $F_1(-5;0;-1)$ и $F_2(5;0;-1)$.