ЛЕКЦИЯ 14. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа.

2. Действия над комплексными числами.

3. Сопряжение комплексных чисел. Свойства операции сопряжения.

4. Представление комплексных чисел на плоскости.

14.1. Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 1. ***Комплексным числом*** z называется выражение вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма записи комплексного числа), где $x, y \in \mathbf{R}$.

Множество комплексных чисел принято обозначать $\mathbf{C}$.

Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$.

Число y называется ***мнимой частью*** комплексного числа z и обозначается $y = \operatorname{Im} z$.

Символ i называется ***мнимой единицей*** и обладает свойством $i^2 = -1$.

Если x=0, то комплексное число $z = iy$ называется чисто мнимым.

Если y=0, то комплексное число $z = x$ является действительным числом. Это означает, что множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbf{C}$.

14. 2. Действия над комплексными числами

Определение 2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными,*** если равны их действительная и мнимая части, т.е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

Определение 3. ***Суммой*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, такое что $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$, т.е.

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \qquad \mathbf{(2)}$$

Задача 1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 + 4i$ и $z_2 = -3 + 5i$.

Решение.

$z = (2-3) + i(4+5) = -1 + 9i$.

Ответ. $-1 + 9i$.

Введенная ранее операция сложения комплексных чисел, позволяет ввести *операцию вычитания* комплексных чисел.

Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 существует такое число z, что, $z_1 = z + z_2$.

Определение 4. ***Разностью*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, такое что $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2$, т.е.

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad \textbf{(3)}$$

Определение 5. ***Произведением*** комплексного числа $z = x + iy$ ***на*** некоторое действительное ***число*** $\lambda \in \mathbf{R}$ называется комплексное число λz, такое что $\operatorname{Re} \lambda z = \lambda \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} \lambda z = \lambda \operatorname{Im} z$, т.е.

$$\lambda z = \lambda x + i\lambda y \qquad \textbf{(4)}$$

Определение 6. ***Произведением*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, такое что $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2$, $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Im} z_2 \operatorname{Re} z_1$, т.е.

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) \qquad \textbf{(5)}$$

Рассмотрим умножение $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_2 x_1 + iy_1 x_2 + i^2 y_2 y_1$, учитывая, что $i^2 = -1$ и сгруппировав вместе слагаемые с мнимой единицей и без нее, получим формулу (5).

Задача 2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 + 4i$ и $z_2 = -3 + 5i$.

Решение.

$z = (2 + 4i)(-3 + 5i) = (-6 - 20) + (10 - 12)i = -26 - 2i$.

Ответ. $-26 - 2i$

Задача 3. Найти действительные решения уравнения $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$

Решение. Преобразуем выражение в левой части, раскрыв скобки и собрав действительную и мнимую части.

$(4+2i)x+(5-3i)y=4x+2ix+5y-3iy=(4x+5y)+(2x-3y)i$

По условию $(4x+5y)+(2x-3y)i=13+i$.

Воспользуемся определением 2: $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=13 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$. Решая систему, получаем $x=2, y=1$

Ответ. $x=2, y=1$.

Основные законы сложения и умножения комплексных чисел

I. **Переместительный закон** (***коммутативность по сложению***):

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

Доказательство.

Пусть даны два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1+z_2 \overset{\text{формула(2)}}{=} (x_1+x_2)+(y_1+y_2)i \overset{\substack{\text{коммутативность}\\ \text{действительных}\\ \text{чисел}}}{=} (x_2+x_1)+(y_2+y_1)i=z_2+z_1$$

Что и требовалось доказать.

II. **Сочетательный закон** (***ассоциативность по сложению***):

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

III. Для любого z существует ***противоположное*** ему число $z'=-z$ такое что $z+z'=z-z=0$

IV. Для любого z существует ***обратное*** ему число z^{-1} такое что $z\cdot z^{-1}=1$

V. **Переместительный закон** (***коммутативность по умножению***):

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$$

Доказательство.

Пусть даны два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1\cdot z_2 \overset{\text{формула(4)}}{=} (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$$

$$z_2\cdot z_1 \overset{\text{формула(4)}}{=} (x_2x_1-y_2y_1)+(x_2y_1+x_1y_2)i$$

Так как в множестве действительных чисел $(x_1x_2-y_1y_2)=(x_2x_1-y_2y_1)$ и $(x_1y_2+x_2y_1)=(x_2y_1+x_1y_2)$, то правые части равенств одинаковы, значит и левые части совпадают, т.е. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$. Что и требовалось доказать.

VI. **Сочетательный закон** (***ассоциативность по умножению***)**:**

$(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

V. **Распределительный закон** (***Дистрибутивность умножения относительно сложения***)**:**

$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

Введенная ранее операция умножения комплексных чисел, позволяет ввести *операцию деления* комплексных чисел.

Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 существует такое число z, что, $z_1 = z_2 \cdot z$.

Определение 7. ***Частным*** от деления комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на число $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, такое что

$$\operatorname{Re} z = \frac{\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}{(\operatorname{Re} z_2)^2 + (\operatorname{Im} z_2)^2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{\operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2}{(\operatorname{Re} z_2)^2 + (\operatorname{Im} z_2)^2},$$

т.е.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad \textbf{(6)}$$

14.3. Сопряжение комплексных чисел. Свойства операции сопряжения

Определение 8. ***Сопряженным*** комплексному числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z}$, такое что $\operatorname{Re}\bar{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im}\bar{z} = -\operatorname{Im} z$, т.е. $\bar{z} = x - iy$.

Например, для числа $z = 3 + 6i$ сопряженным будет число $\bar{z} = 3 - 6i$, для числа $z = 1 - 4i$ сопряженным будет $\bar{z} = 1 + 4i$.

Используя понятие сопряжения, докажем формулу (6).

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ и требуется найти частное от деления z_1 на z_2: $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$. Домножим и числитель, и знаменатель этой дроби на число, <u>сопряженное</u> числу, стоящему <u>в</u> <u>знаменателе</u>:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + iy_1 x_2 - i^2 y_1 y_2}{(x_2)^2 - (iy_2)^2} =$$

$$\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2-x_1y_2)}{(x_2)^2-(iy_2)^2}=\underbrace{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}_{\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}}+i\underbrace{\frac{(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}}_{\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}}$$

Задача 4. Найти частное комплексных чисел $z_1=2-5i$ и $z_2=1+2i$.

Решение.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-5i}{1+2i}=\frac{(2-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{(2-10)-i(5+4)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{-8-9i}{5}=\frac{-8}{5}-i\frac{9}{5}=-1\frac{3}{5}-1\frac{4}{5}i.$$

Ответ. $-1\frac{3}{5}-1\frac{4}{5}i$.

Свойства операции сопряжения

1°. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

Доказательство.

Пусть $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$

$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$, тогда

$$\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=\underbrace{x_1-iy_1}_{\overline{z_1}}+\underbrace{x_2-iy_2}_{\overline{z_2}}=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

Что и требовалось доказать.

2°. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

Доказательство.

Пусть $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$.

Сопряженные к ним – $\overline{z_1}=x_1-iy_1$ и $\overline{z_2}=x_2-iy_2$.

$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$, тогда

$\overline{z_1z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_2y_1+x_1y_2)$.

Рассмотрим теперь

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=x_1x_2-ix_1y_2-iy_1x_2+i^2y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+y_1x_2)$$

Поскольку правые части равенств совпадают, то совпадают и левые части, т.е. $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$. Что и требовалось доказать.

3°. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Доказательство свойства **3°** предлагается провести самостоятельно.

4°. $\overline{\overline{z_1}+\overline{z_2}} = z_1 + z_2$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

Сопряженные к ним $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ и $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$.

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$

$\overline{\overline{z_1}+\overline{z_2}} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = z_1 + z_2$. Что и требовалось доказать.

5°. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z \in \mathbf{R}$.

6°. $z - \overline{z} = 2\operatorname{Im} z \in \mathbf{C}$.

7°. $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

Доказательство свойства **7°** очевидно и вытекает из определения произведения комплексных чисел.

Задача 5. Найти частное комплексных чисел $2z_1 - z_2$ и $z_1 + 3z_2$, если $z_1 = -2i$ и $z_2 = 4 + i$.

Решение.

$2z_1 - z_2 = -4i - 4 - i = -4 - 5i$.

$z_1 + 3z_2 = -2i + 12 + 3i = 12 + i$.

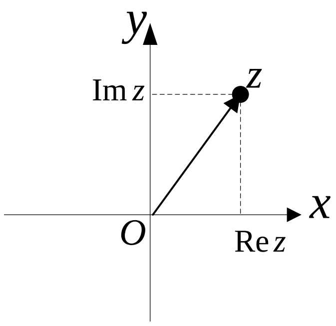
$$z = \frac{-4-5i}{12-i} = \frac{(-4-5i)(12+i)}{(12-i)(12+i)} = \frac{-53-56i}{145} = -\frac{53}{145} - \frac{56}{145}i.$$

Ответ. $-\frac{53}{145} - \frac{56}{145}i$.

14.4. Представление комплексных чисел на плоскости

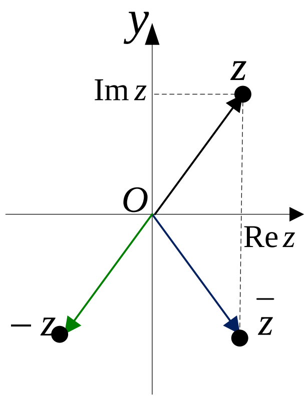
Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно представить на плоскости *Oxy* точкой с координатами (*x*; *y*). Поскольку $x = \operatorname{Re} z$, а $y = \operatorname{Im} z$, то ось *Ox* принято называть *действительной осью*, а ось *Oy* – *мнимой осью*. Плоскость *Oxy* называется *комплексной плоскостью*.

Если для некоторого числа z $\operatorname{Re} z = 0$ (чисто мнимое число), то оно лежит на оси *Oy*. Если для некоторого числа z $\operatorname{Im} z = 0$ (действительное число), то оно лежит на оси *Ox*.



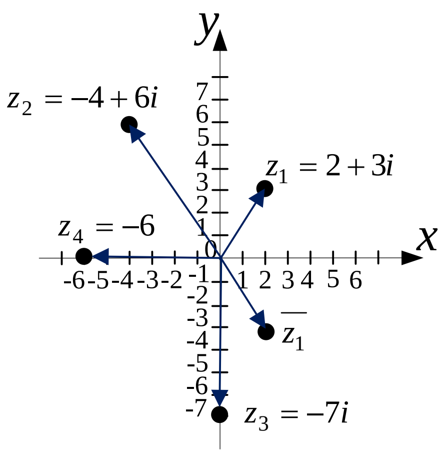
Число z можно также представить с помощью радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = (x; y)$, выходящего из начала координат O(0;0) в точку *M*, определяющую число z на плоскости. Числа z и $-z$ симметричны относительно начала координат.

Числа z и $\bar{z}$ симметричны относительно оси *Ox*.



Задача 6. Изобразить на комплексной плоскости числа $z_1 = 2 + 3i$, $\overline{z_1}$, $z_2 = -4 + 6i$, $z_3 = -7i$, $z_4 = -6$.

Решение представлено на рисунке.



Установленное соответствие между комплексными числами и векторами на плоскости позволяет легко обосновать геометрически операции сложения и вычитания комплексных чисел.

Пусть точки M_1 и M_2 изображают на комплексной плоскости числа z_1 и z_2.

Вектор $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ изображает комплексное число $z_1 + z_2$, а вектор $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ - комплексное число $z_1 - z_2$. Обратите внимание, вектор $\overrightarrow{OL}$ выходит из начала координат, как радиус-вектор, изображающий комплексное число $z = z_1 - z_2$.