Математический анализ, 2 семестр

Лекция 5

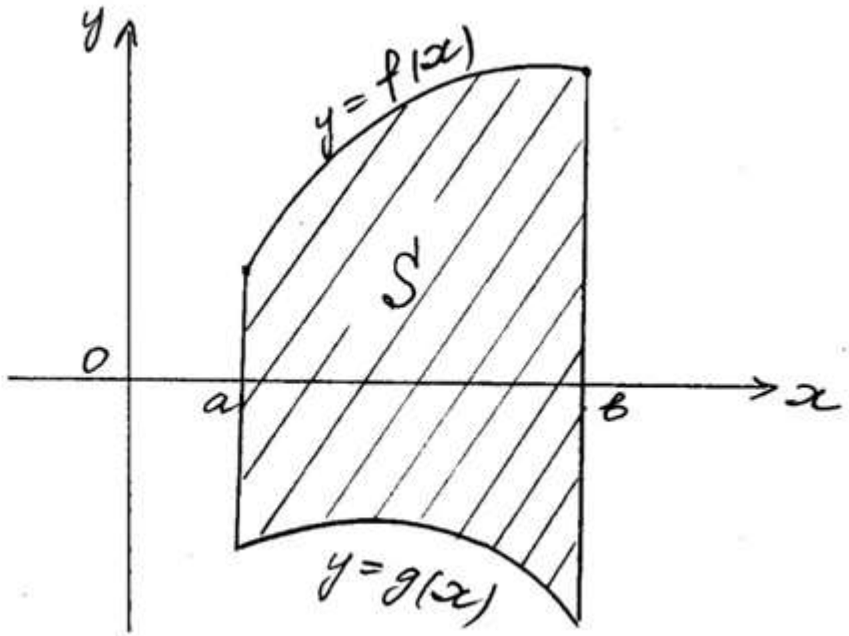
Приложения определенного интеграла

6. Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл применяется для вычисления площадей, длин и объемов различных геометрических фигур.

6.1. Площадь плоской фигуры

1. Площадь области на плоскости xOy, ограниченной графиками функций

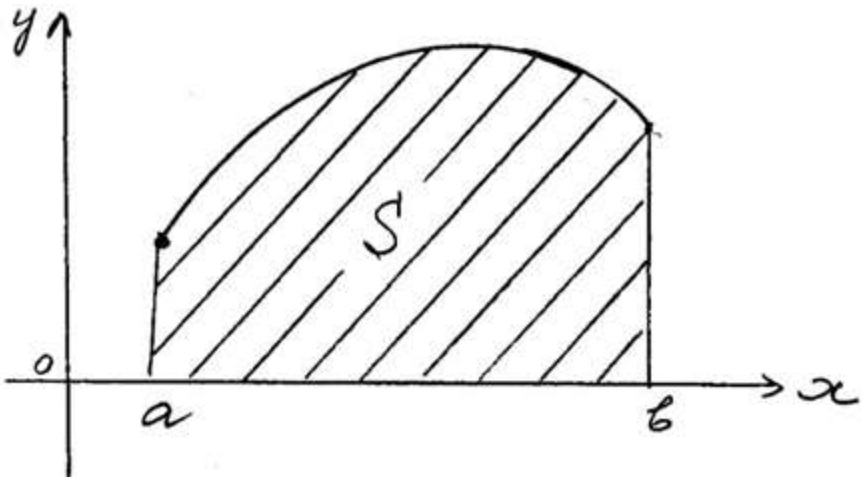


$y = f(x), y = g(x)\ (g(x) < f(x))$

и прямыми $x = a$ и $x = b$

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

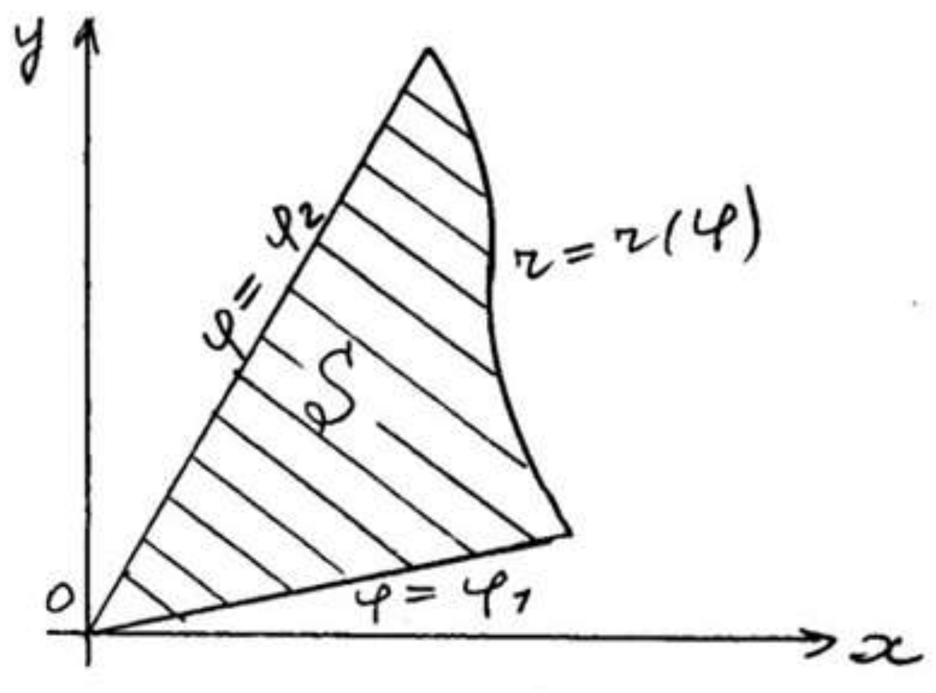
2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически, т.е. уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$, $x(t_1) = a, x(t_2) = b$



$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

3. Площадь сектора, ограниченного линией, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, и двумя лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 d\varphi$$



<u>Пример 1</u>. Вычислить площадь фигуры, ограниченной:

параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = x$.

Найдем точки пересечения графиков: $2 - x^2 = x$

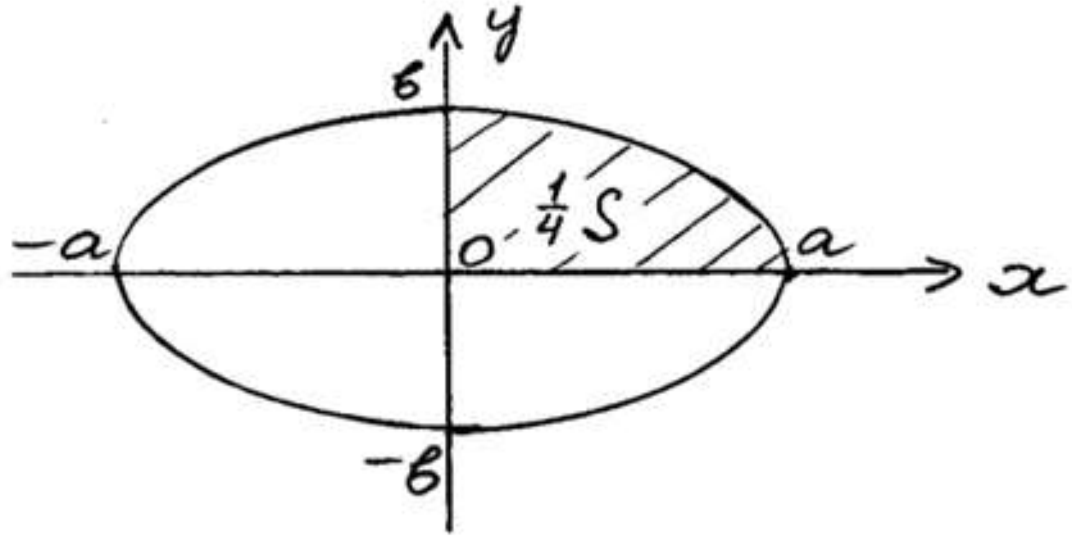
$x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = -2, x_2 = 1.$

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$

<u>*Пример 2*</u>. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0, b>0$$

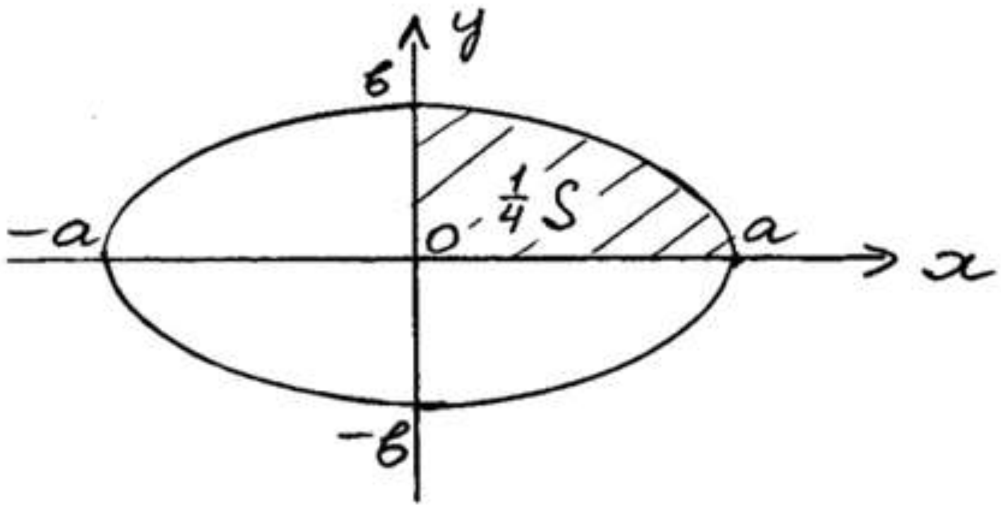


1 способ. Выразим из уравнения эллипса y:

$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ и воспользуемся симметрией области:

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a y(x)dx = b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = \left[\begin{array}{c} x = asint, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{1-sin^2t} = cost \\ dx = acostdt \end{array}\right] =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt = \frac{1}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2t)dt = \frac{1}{4}\pi ab$$



$$S = \pi ab.$$

2 способ. Используем параметрическое задание эллипса: $\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$.

В его верности можно убедиться, подставив x и y в уравнение эллипса: $\frac{(acost)^2}{a^2} + \frac{(bsint)^2}{b^2} = 1$ – верно.

$0 \le x \le a \ \Leftrightarrow$ t меняется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, т.к. $x = 0 \ \Leftrightarrow acost = 0 \ \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$,

$x = a \ \Leftrightarrow acost = a \ \Rightarrow t_2 = 0$.

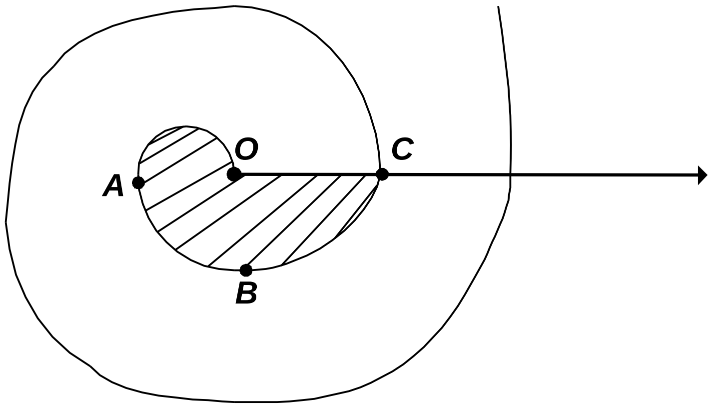
$$\frac{1}{4}S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} bsint\,(acost)'dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2t\,dt =$$

$$= -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2 t\, dt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos2t)\, dt = \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}$$

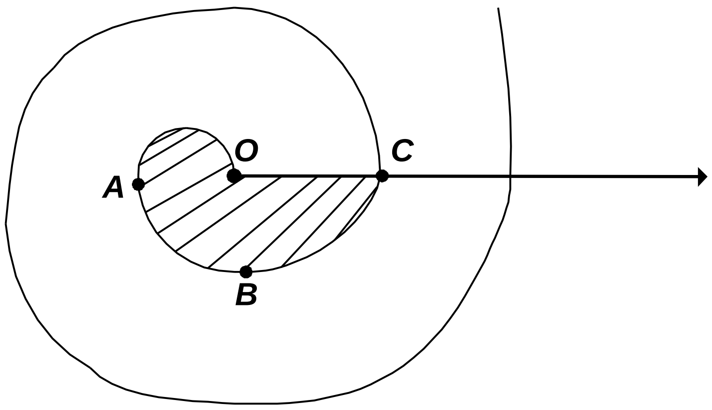
$$S = \pi ab.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда: $\rho = a\varphi$, где a – положительное число.



При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор *OABC* (см. рис.). Поэтому по формуле площади криволинейного сектора имеем

$$S_{OABC} = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$



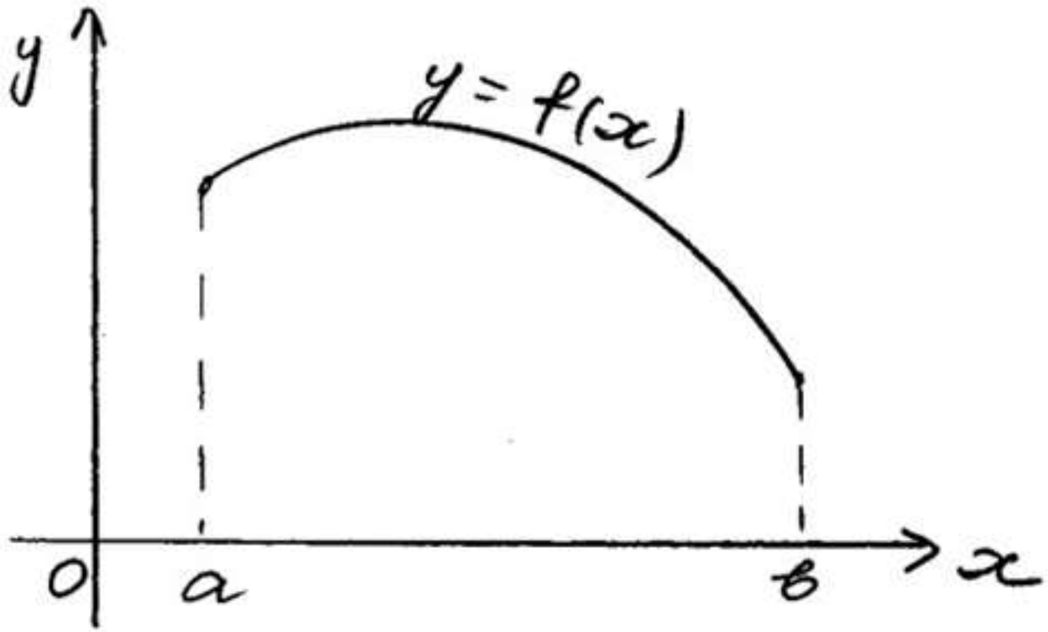
Замечание. Расстояние от точки C до полюса равно $\rho = 2\pi a$. Поэтому круг радиуса OC имеет площадь

$$\pi OC^2 = 4\pi^3 a^2 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi^3 a^2 = 3S_{OABC},$$

т.е. *площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна* $\frac{1}{3}$ *площади круга с радиусом, равным наибольшему из полярных радиусов витка.* К этому выводу пришел еще Архимед.

6.2. Вычисление дуги кривой

1. Длина дуги плокой кривой, заданной на координатной плоскости уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

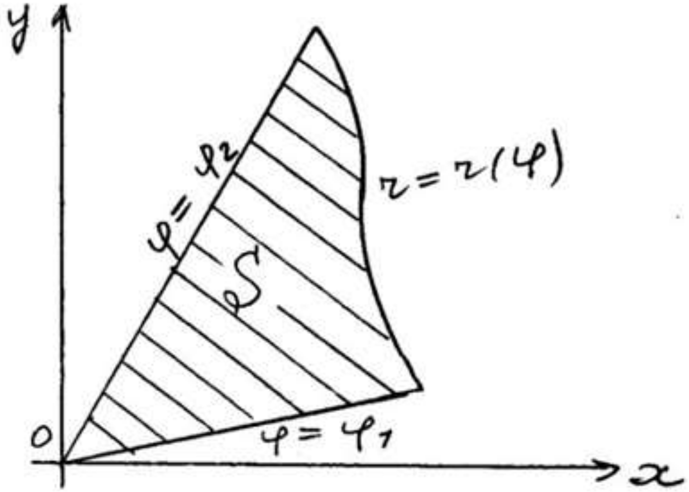
2. Длина дуги плоской кривой, заданной на координатной плоскости параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$, $x(t_1) = a, x(t_2) = b$.

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

3. Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [t_1, t_2] \\ z = z(t) \end{cases}$

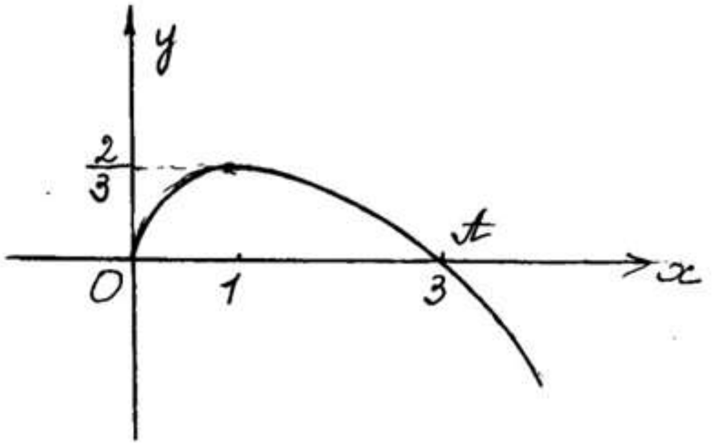
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

4. Длина дуги плоской кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$



$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

<u>*Пример 4*</u>. Вычислить длину дуги плоской кривой $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$, заключенной между точками $O(0; 0)$ и $A(3; 0)$



$$L = \int_{0}^{3} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$y'(x) = \left(\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{3}\left(-\sqrt{x} + \frac{3-x}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{3}\frac{-2x+3-x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

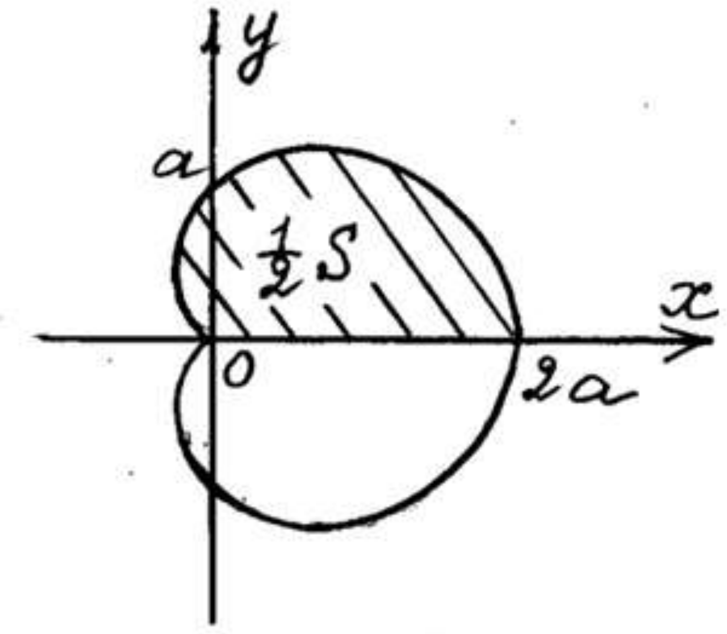
$$\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x+1-2x+x^2}{4x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}} =$$

$$= \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$L = \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

<u>Пример 5</u>. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + cos\varphi), a > 0$ и площадь области, ограниченной кардиоидой.



Для решения задачи воспользуемся симметрией линии относительно оси Ox.

$$r'(\varphi) = -asin\varphi,$$

$$\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2(1 + cos\varphi)^2 + a^2sin^2\varphi} =$$

$$= a\sqrt{2 + 2cos\varphi} = a\sqrt{4cos^2\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= 2acos\frac{\varphi}{2}, \varphi \in [0, \pi].$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi} cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8asin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(r(\varphi)\big)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1 + cos\varphi)^2 d\varphi =$$

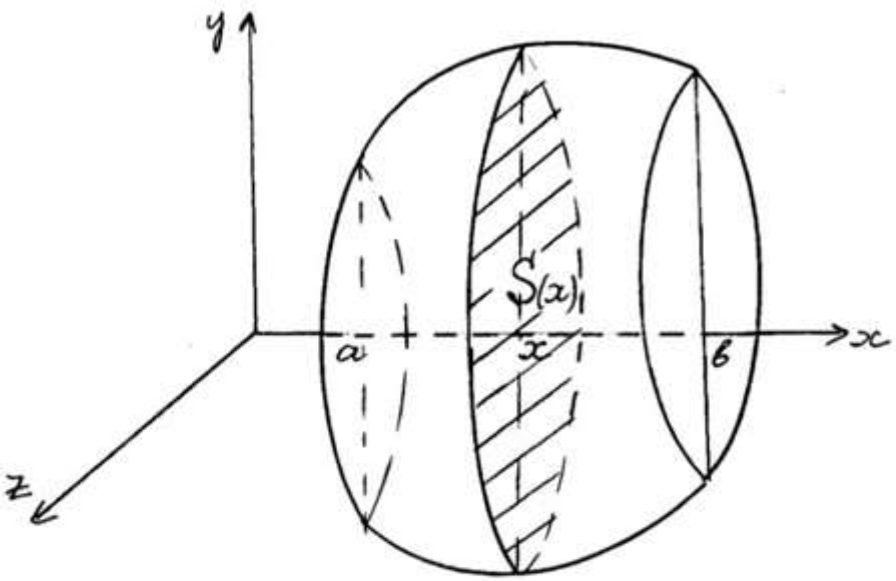
$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2cos\varphi + \frac{1 + cos2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2cos\varphi + \frac{1}{2}cos2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2sin\varphi + \frac{1}{4}sin2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

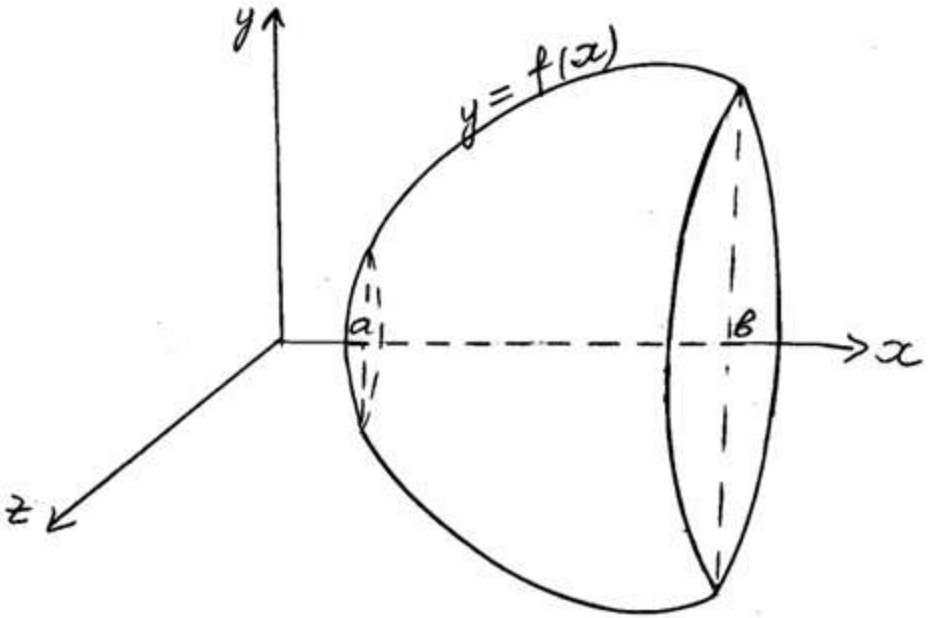
6.3. Вычисление объема тела

1. Объем тела, площадь S сечения которого плоскостью, перпендикулярной оси Ox, известна как функция $S = S(x)$ переменной x.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



2. Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox.



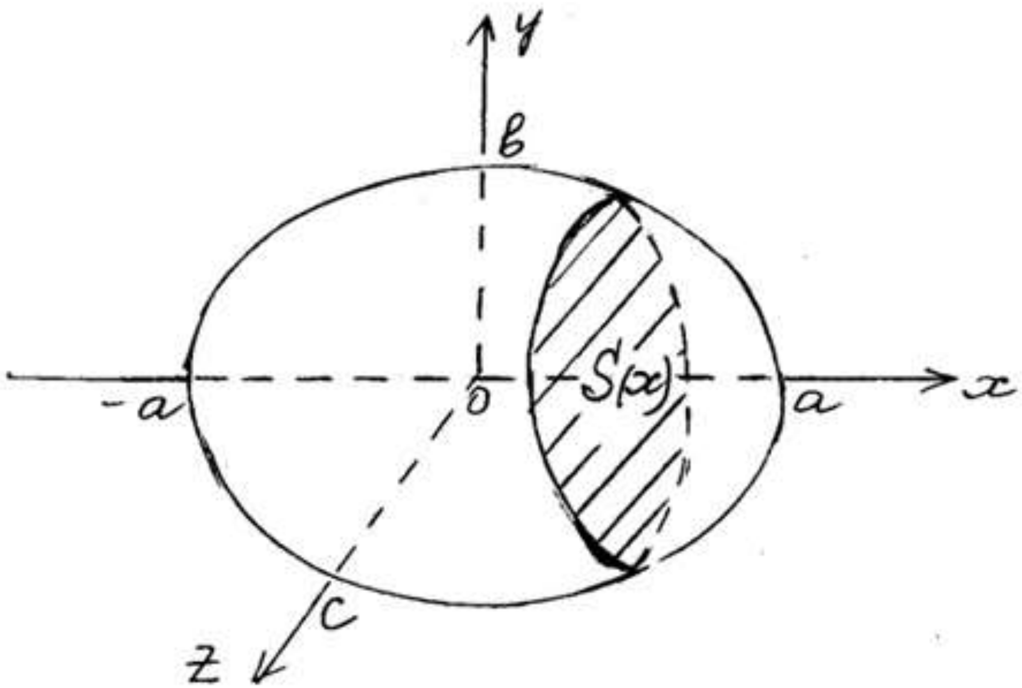
$$V = \pi \int_{a}^{b} (f(x))^2 dx$$

3. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 x'(t) dt$$

<u>*Пример 6*</u>. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>0, b>0, c>0$$



Сечением эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является эллипс, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

Поделив обе части уравнения на правую часть, получим:

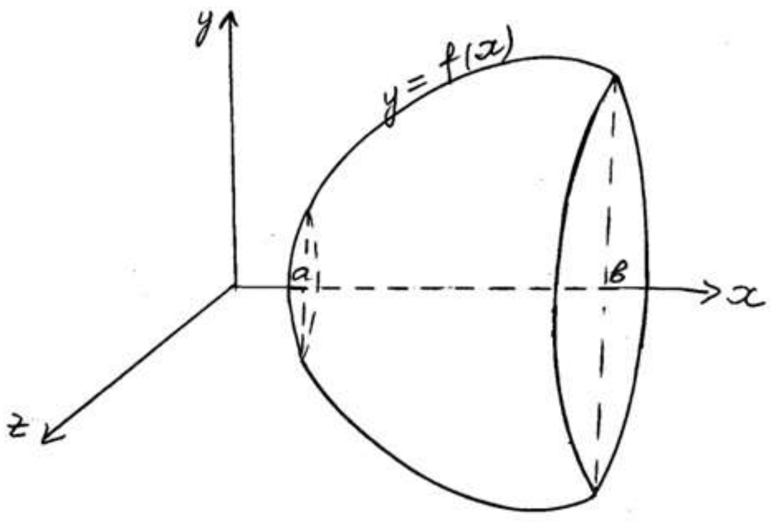
$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

а площадь $S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Искомый объем можно вычислить как объем тела с известной площадью сечения $S(x)$.

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

6.4. Вычисление площади поверхности вращения

1. Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Ox графика функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$

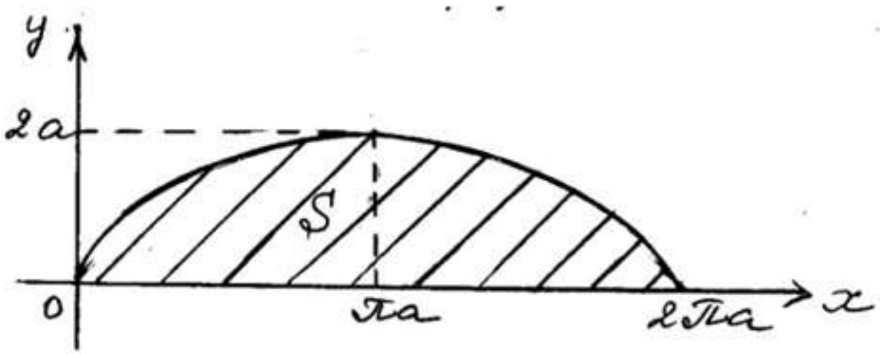


$$S_{\text{вр}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

2. Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

$$S_{\text{вр}} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

<u>*Пример 7*</u>. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды



$$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi], a > 0$$

Вычислить длину одной арки циклоиды, а также объем и площадь поверхности тела, образованного вращением одной арки циклоиды вокруг оси *Ox*.

$$x'(t) = a(1 - cost), \qquad y'(t) = asint$$

$$S = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1 - cost)a(1 - cost)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2cost + \frac{1 + cos2t}{2}\right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2cost + \frac{1}{2}cos2t\right) dt =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2sint + \frac{1}{4}sin2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Для вычисления длины дуги предварительно упростим выражение:

$$\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{a^2(1 - cost)^2 + a^2sin^2t} = a\sqrt{2 - 2cost} =$$

$$= a\sqrt{4sin^2\frac{t}{2}} = 2asin\frac{t}{2}, t \in [0,2\pi].$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = 2a\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt = -4acos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -4a(-1 - 1) = 8a.$$

Для вычисления объема и площади поверхности тела вращения применим соответствующие формулы:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} \big(y(t)\big)^2 x'(t)dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - cost)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3cost + 3cos^2 t - cos^3 t)dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3cost + \frac{3}{2}(1 + cos2t)\right)dt - \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - sin^2 t)d(sint) =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 3sint + \frac{3}{4}sin2t - sint + \frac{1}{3}sin^3 t\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi a^3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = 5\pi^2 a^3.$$

$$S_{\text{вр}} = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - cost)2asin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(2sin\frac{t}{2} - 2sin\frac{t}{2}cost\right)dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(2sin\frac{t}{2} - sin\frac{3t}{2} + sin\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(3sin\frac{t}{2} - sin\frac{3t}{2}\right)dt = 2\pi a^2 \left(-6cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}cos\frac{3t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 \cdot 2 \cdot \left(6 - \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

6.5. Приложения определенного интеграла для решения задач механики

Пусть плоская кривая задана уравнением $y = f(x), x \in [a, b]$ и $\rho(x)$ – линейная плотность кривой. Тогда масса кривой вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx$$

а статические моменты относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются соответственно по формулам:

$$m_x = \int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx\,, \qquad m_y = \int_a^b \rho(x)x\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx$$

Координаты точки С – центра масс кривой равны:

$$x_c = \frac{m_y}{m}, \qquad y_c = \frac{m_x}{m}$$

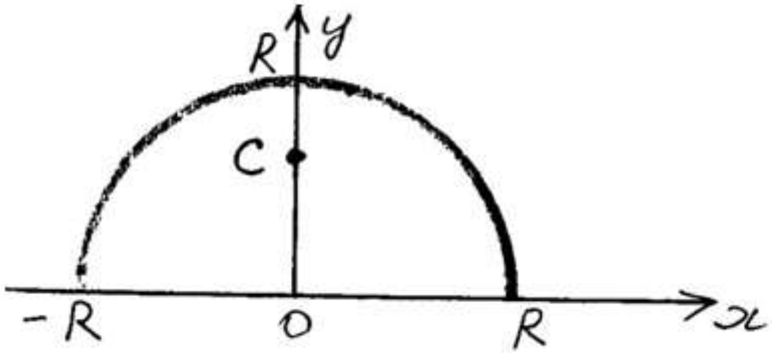
Моменты инерции плоской кривой относительно координатных осей Ox и Oy также вычисляются с помощью определенного интеграла:

$$I_x = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2\rho(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx$$

Если кривая однородна ($\rho(x) = const$), то формулы упрощаются.

<u>Пример 8</u>. Вычислить координаты центра масс и момент инерции относительно оси Ox однородной полуокружности $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$, полагая $\rho(x) = 1$.



$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$m = L = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + (y')^2} dx =$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R\arcsin \frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R} = R\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi R.$$

В силу симметрии относительно оси Oy и однородности кривой $x_c = 0$.

$$m_x = \int_{-R}^{R} y\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = Rx\rfloor_{-R}^{R} = 2R^2$$

$$y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}, \qquad C\left(0;\frac{2R}{\pi}\right).$$

$$I_x = \int_{-R}^{R} y^2\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$$
$$=$$

$$= \left[\begin{array}{c} x = Rsint, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \sqrt{R^2-x^2} = Rcost, dx = Rcostdt \end{array}\right] = R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2cos^2tdt =$$

$$= R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos2t}{2} dt = \frac{\pi R^3}{2}.$$

Если плоская кривая задана параметрическими уравнениями

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ и $\rho(t)$ – линейная плотность кривой, то справедливы следующие формулы:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) \sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt$$

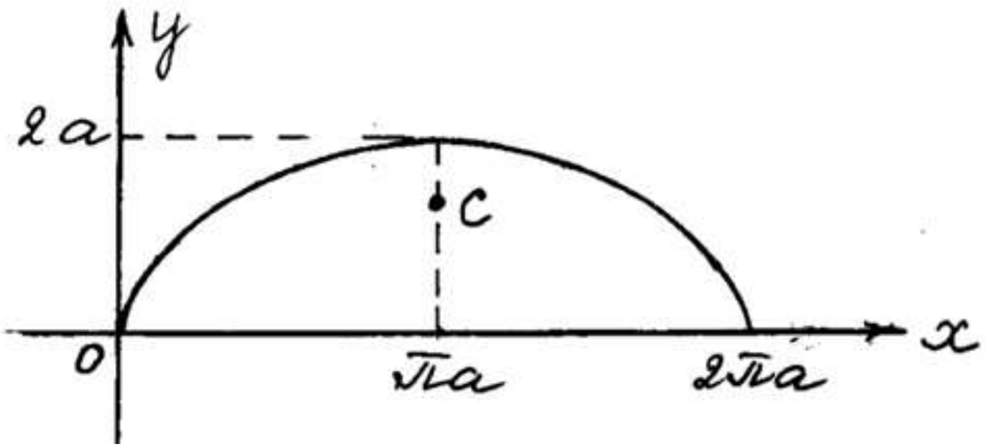
$$m_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

$$m_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

<u>Пример 9</u>. Вычислить координаты центра масс и момент инерции относительно оси *Ox* однородной арки циклоиды



$$x = a(t - sint),\ \ y = a(1 - cost),$$

$$t \in [0; 2\pi], \qquad a > 0, \qquad \rho = 1$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2} = 2asin\frac{t}{2}$$

$m = L = 8a$ (*пример 7*).

В силу симметрии относительно прямой $x = \pi a$ и однородности линии

$$x_c = \pi a.$$

$$m_x = \int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = \int_0^{2\pi} a(1 - cost)2asin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(2sin\frac{t}{2} - sin\frac{3t}{2} + sin\frac{t}{2}\right) dt = a^2 \left(-6cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}cos\frac{3t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2 \left(12 - \frac{4}{3}\right) = \frac{32}{3}a^2$$

$$y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{4}{3}a, \qquad C\left(\pi a; \frac{4}{3}a\right)$$

$$I_x = \int_0^{2\pi} y^2(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = \int_0^{2\pi} a^2(1 - cost)^2 \cdot 2asin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2cost + \frac{1 + cos2t}{2}\right) 2sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2cost + \frac{cos2t}{2}\right) 2sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \left(3sin\frac{t}{2} - 2sin\frac{3t}{2} + 2sin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}sin\frac{5t}{2} - \frac{1}{2}sin\frac{3t}{2}\right) dt =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \left(5sin\frac{t}{2} - \frac{5}{2}sin\frac{3t}{2} + \frac{1}{2}sin\frac{5t}{2}\right) dt =$$

$$= a^3 \left(-10cos\frac{t}{2} + \frac{5}{3}cos\frac{3t}{2} - \frac{1}{5}cos\frac{5t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^3 \left(20 - \frac{10}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{256}{15}a^3.$$