



## Практическое занятие 1

### Первообразная, неопределенный интеграл.

#### Вычисление неопределенных интегралов на основе таблицы интегралов, свойства линейности интеграла.

**Определение 1.** Первообразной функции  $f(x)$  в данном интервале  $(a, b)$  называется функция  $F(x)$ , такая, что  $F'(x) = f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ .

Пример:  $f(x) = \cos x$ ,  $F(x) = \sin x$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

$(F(x) + C)' = f(x)$ ,  $F(x) + C$  – тоже первообразная функции  $f(x)$ .

Множество функций  $F(x) + C$  представляет собой совокупность всех первообразных функции  $f(x)$ .

**Определение 2.** Совокупность всех первообразных называется *неопределенным интегралом* функции  $f(x)$  и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

#### Основные свойства неопределенного интеграла

1)  $(\int f(x)dx)' = f(x)$

2)  $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

3)  $\int d(F(x)) = F(x) + C$

4) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k = \text{const.}$$

5) Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица основных неопределенных интегралов:

1.  $\int 0 \cdot dx = C = const$
2.  $\int C \cdot dx = Cx + \tilde{C}, \quad \int dx = x + \tilde{C}$
3.  $\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1); \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C; \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
4.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ a > 0, a \neq 1; \int e^x dx = e^x + C$
6.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7.  $\int \cos x dx = \sin x + C$
8.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10.  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \ (a \neq 0); \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$
11.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \ (a > 0)$
12.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \ (a > 0); \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
13.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C, \ a \neq 0$
14.  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$

$$15. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$17. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$18. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$19. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$20. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$21. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\begin{aligned} 1. \int (3x + 2)^2 dx &= \int (9x^2 + 12x + 4) dx = 9 \frac{x^3}{3} + 12 \frac{x^2}{2} + 4x + C = \\ &= 3x^3 + 6x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

$$2. \int (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) dx = \int (1 - x) dx = x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\begin{aligned} 3. \int \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 dx &= \int \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^2 dx = \int \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= x - 2 \ln |x| - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

$$4. \int \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left( 2x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = 2 \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{6}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$$

$$5. \int (3 \sin x - 2 \cos x) dx = -3 \cos x - 2 \sin x + C$$

$$6. \int (e^x + 5) dx = e^x + 5x + C$$

$$7. \int \frac{3^{x+2} - 2^{x+3}}{6^x} dx = \int \left( 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \right) dx = 9 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} - 8 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C =$$

$$= -\frac{9}{\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{8}{\ln 3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + C$$

$$8. \int \frac{x^2-2}{1-x^2} dx = \int \frac{x^2-1-1}{1-x^2} dx = \int \left( -1 - \frac{1}{1-x^2} \right) dx = -x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$9. \int \frac{2x^2+3}{x^2+1} dx = \int \frac{2x^2+2+1}{x^2+1} dx = \int \left( 2 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = 2x + \arctg x + C$$

$$10. \int th^2 x dx = \int \frac{sh^2 x}{ch^2 x} dx = \int \frac{ch^2 x - 1}{ch^2 x} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{ch^2 x} \right) dx =$$

$$= x - thx + C$$

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2+4}| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2-25} dx = - \int \frac{dx}{25-x^2} \cdot x dx = -\frac{1}{10} \ln \left| \frac{5+x}{5-x} \right| + C$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{3} + C$$

$$14. \int (\arctg x + \operatorname{arccotg} x) dx = \int \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2} x + C$$

$$15. \int \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$16. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}. F'(x) = f(x).$$

Вычислить  $F(4)$ , если  $F(0) = -\ln 3$ .

$$F(x) = \ln |x + \sqrt{x^2+9}| + C$$

$$F(0) = \ln 3 + C = -\ln 3 \Rightarrow C = -2\ln 3 = -\ln 9$$

$$F(4) = \ln |4 + 5| - \ln 9 = \ln 9 - \ln 9 = 0$$

Ответ:  $F(4) = 0$ .

Примеры для самостоятельного решения.

$$1. f(x) = 3x^2 + 4x, F(1) = 4, F(2) = ?$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}, F\left(\frac{1}{2}\right) = 0, F\left(\frac{1}{3}\right) = ?$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}, F(4) = 5, F(1) = ?$$

$$4. f(x) = \frac{7\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}}, F(1) = 0, F(64) = ?$$

$$5. f(x) = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x), F(1) = -0,6, F(4) = ?$$

$$6. f(x) = (1 - x^2)(1 + x^2 + x^4), F(-1) = \frac{2}{7}, F(1) = ?$$

$$7. f(x) = \frac{1}{1+x^2}, F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}, F(1) = ?$$

$$8. f(x) = \frac{1}{1-x^2}, F(0) = \ln\sqrt{3}, F\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

$$9. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, F(0) = 0, F\left(\frac{4}{3}\right) = ?$$

$$10. f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x}, F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, F\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$$

$$11. f(x) = 2\sin x + 3\cos x, F(\pi) = 3, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

$$12. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{12}, F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ?$$

$$13. f(x) = \frac{1}{4+x^2}, F(2) = \frac{5\pi}{24}, F(2\sqrt{3}) = ?$$

$$14. f(x) = \arcsin x + \arccos x, F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}, F\left(\frac{1}{4}\right) = ?$$

$$15. f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x}}, F(1) = 5, F(4) = ?$$

$$16. f(x) = \sin^2 3x + \cos^2 3x, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

$$17. f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+1}, F(0) = -1, F(1) = ?$$

$$18. f(x) = \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x}, F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, F(1) = ?$$

19.  $f(x) = tg^2x$ ,  $F(0) = -1$ ,  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

20.  $f(x) = ctg^2x$ ,  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

21.  $f(x) = \sqrt{\sin^4x + \cos^4x + \frac{1}{2}\sin^2 2x}$ ,  $F(\pi) = 0$ ,  $F(2\pi) = ?$

22.  $f(x) = e^x$ ,  $F(\ln 2) = 10$ ,  $F(\ln 5) = ?$

23.  $f(x) = \frac{5x+1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$ ,  $F(1) = 2$ ,  $F(16) = ?$

24.  $f(x) = \frac{(1-x)^3}{x^5}$ ,  $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ ,  $F(1) = ?$

25.  $f(x) = (1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x})$ ,  $F(1) = -\frac{2}{5}$ ,  $F(8) = ?$