Практическое занятие 8

Вычисление двойного интеграла

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

1.1. Сведение двойного интеграла к повторному интегрированию.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S \left(x+y^3\right)dxdy$ по прямоугольной области D, ограниченной прямыми $x=1$, $x=2$, $y=0$ и $y=2$.

Решение. Представить область интегрирования довольно легко, поэтому, не изображая область D, сразу составляем повторный интеграл и вычисляем его:

$$\iint\limits_S \left(x+y^3\right)dxdy = \int\limits_1^2 dx\int\limits_0^2 \left(x+y^3\right)dy = \int\limits_1^2 dx\left(xy+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(2x+\frac{2^4}{4}-0\right)dx = \left(2\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_1^2 =$$

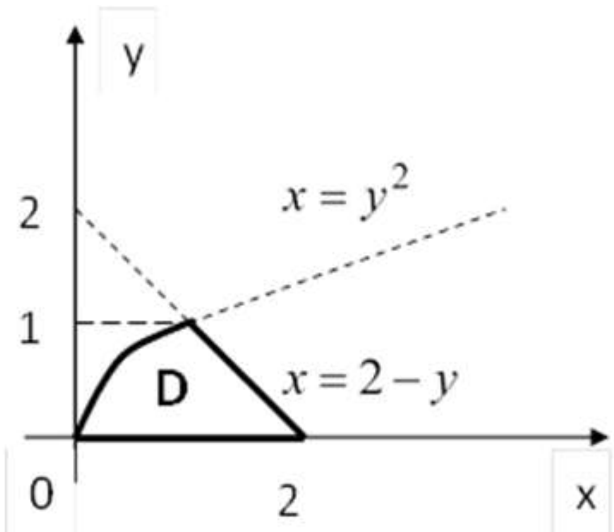
$$= 2^2+4\cdot 2-\left(1^2+4\cdot 1\right) = 4+8-1-4 = 7.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D 2ydxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=0$ и $x+y=2$. Вычислить интеграл, изменив порядок интегрирования.

Решение. Построим графики заданных функций и выделим область интегрирования D.

Найдем координаты точки пересечения графиков функций $y=\sqrt{x}$ и $y=2-x$. Для нахождения абсциссы точки пересечения решим уравнение $\sqrt{x}=2-x$. Обозначив $\sqrt{x}=t\geq 0$, получим:

$$t=2-t^2 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=-2<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1.$$



Найдем ординату точки пересечения: $y=2-1=1$.

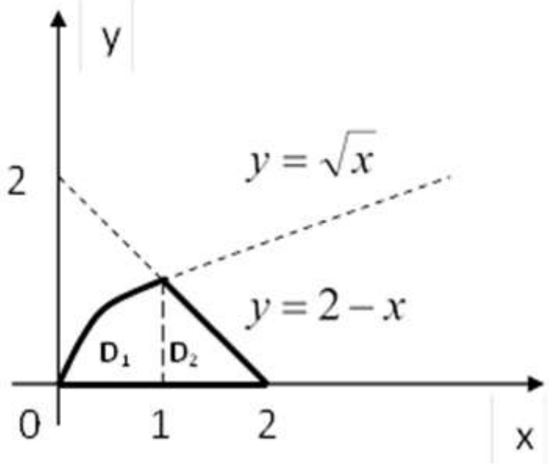
Область D заключена в полосе между горизонтальными прямыми $y=0$ и $y=1$, ее левой границей является линия $y=\sqrt{x}$ или $x=y^2$, правой границей – линия $x+y=2$ или $x=2-y$. Составим повторный интеграл и вычислим его:

$$\iint\limits_D 2y\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{2-y}2y\,dx=2\int\limits_0^1 y\,dy\int\limits_{y^2}^{2-y}dx=2\int\limits_0^1 y\,dy\cdot x\Bigg|_{y^2}^{2-y}=$$

$$=2\int\limits_0^1 y\left(2-y-y^2\right)dy=2\int\limits_0^1\left(2y-y^2-y^3\right)dy=2\left(2\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-0\right)=2\cdot\frac{12-4-3}{12}=\frac{5}{6}.$$

В направлении оси Oy: верхняя граница задана двумя различными функциями $y=\sqrt{x}$ и $y=2-x$. Разбиваем область D на две части D_1 и D_2, а заданный интеграл вычисляем как сумму интегралов по этим частям:



$$\iint\limits_D 2y\,dxdy = \iint\limits_{D_1} 2y\,dxdy + \iint\limits_{D_2} 2y\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} 2y\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} 2y\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \cdot y^2 \Big|_0^{\sqrt{x}} + \int\limits_1^2 dx \cdot y^2 \Big|_0^{2-x} = \int\limits_0^1 dx \cdot (x-0) + \int\limits_1^2 dx \cdot \left((2-x)^2 - 0\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - 0 + 0 - \frac{(-1)^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

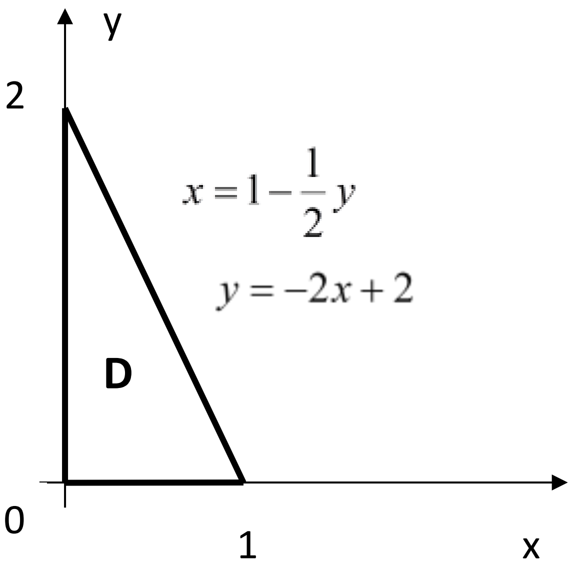
Ответ: $\frac{5}{6}$.

1.2. Изменение порядка интегрирования.

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{1-\frac{1}{2}y} f(x,y)dx.$$

*Решение***.** Восстановим по пределам интегрирования область интегрирования D. В нашем случае область D расположена между горизонтальными прямыми $y=0$ (ось Ox) и $y=2$ и ограничена слева прямой $x=0$ (ось Oy) и справа прямой $x=1-\frac{1}{2}y$.



Разрешим последнее уравнение прямой относительно y:

$$x=1-\frac{1}{2}y \Leftrightarrow 2x=2-y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=-2x+2.$$

Построив все перечисленные прямые, видим, что область интегрирования D представляет собой треугольник: D расположена между вертикальными прямыми $x=0$ (ось Oy) и $x=1$, и ограничена снизу прямой $y=0$ (ось Ox) и сверху прямой $y=-2x+2$.

Получаем, что

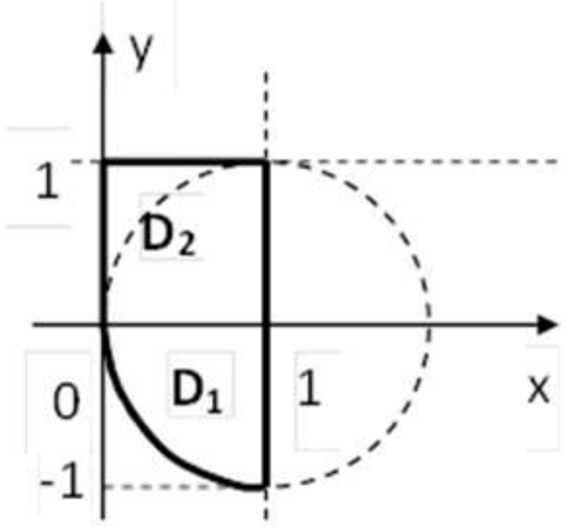
$$\int_0^2 dy \int_0^{1-\frac{1}{2}y} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} f(x,y)dy.$$

Пример 4. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования двумя способами по области D, ограниченной прямыми $x=0$, $x=1$, $y=1$ и кривой $y=-\sqrt{2x-x^2}$.

Решение. Преобразуем уравнение заданной кривой:

$$y=-\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y^2=2x-x^2 \Leftrightarrow y^2+x^2-2x+1=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1.$$

Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке $P(1;0)$ и радиусом $R=1$, а заданное уравнение $y=-\sqrt{2x-x^2}$ – её нижнюю полуокружность.



Область D находится в полосе между прямыми $x=0$ и $x=1$, её нижняя граница – дуга окружности $y=-\sqrt{2x-x^2}$, верхняя – прямая $y=1$.

Нижняя и верхняя границы D одинаковы во всех области, поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)dy.$$

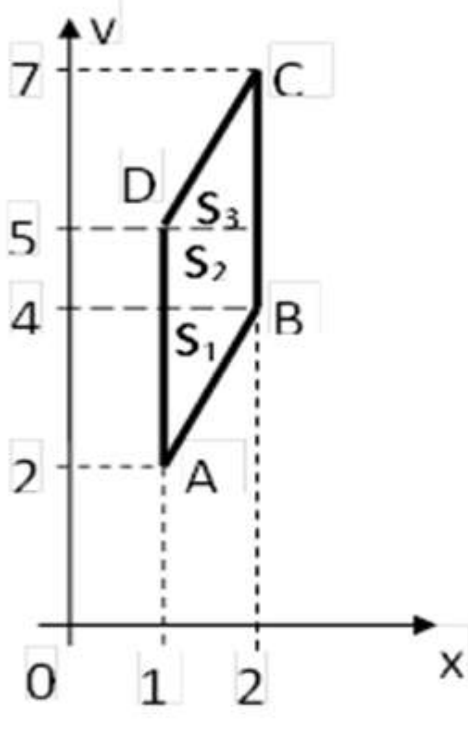
В направлении оси Ox: левая граница области D образована линиями, заданными различными уравнениями: дуга окружности $y=-\sqrt{2x-x^2}$ при $-1\le y\le 0$ и ось Oy (x=0) при $0\le y\le 1$.

Найдем уравнение левой части полуокружности, выразим x через y:

$$(x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=1-y^2 \Leftrightarrow x=1-\sqrt{1-y^2},\ x\le 1.$$

Разбивая область D на две части D_1 и D_2, а интеграл – на сумму двух интегралов, получим

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,y)dx+\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)dx.$$



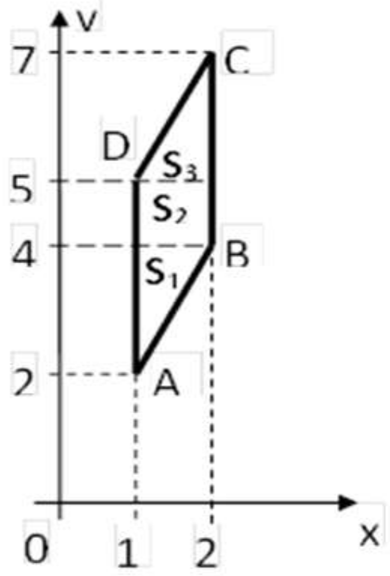
Пример 5. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования двумя способами по области D, которая является параллелограммом с вершинами в точках $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(2;7)$ и $D(1;5)$.

Решение. Найдем уравнения границ области D (для AB $y=2x$ ($\overrightarrow{AB}=(1,2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}$, выразим $y=2x$); для BC $x=2$; для CD $y=2x+3$ (аналогично $\overrightarrow{CD}=(-1,-2)$, $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-7}{-2}$, выразим y); для DA $x=1$.

Область D лежит в полосе между прямыми $x=1$ и $x=2$ и ограничена снизу прямой $y=2x$, а сверху прямой $y=2x+3$, поэтому

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x,y)\,dy.$$

Для того чтобы расставить пределы интегрирования в другом порядке, разбиваем область D на три части:



$$S_1\left\{2\le y\le 4; 1\le x\le \frac{y}{2}\right\},\ S_2\{4\le y\le 5; 1\le x\le 2\},$$

$$S_3\left\{5\le y\le 7; \frac{y-3}{2}\le x\le 2\right\}.$$

Представим заданный интеграл в виде суммы трех интегралов:

$$\int_D f(x,y)\,dxdy =$$

$$=\int_2^4 dy\int_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx+\int_4^5 dy\int_1^2 f(x,y)dx+\int_5^7 dy\int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)dx.$$

Пример 6. Вычислить $\int_0^1 dx\int_0^{2x}(xy(x+2y)+1)dy$.

Решение. $\int_0^1 dx\int_0^{2x}(xy(x+2y)+1)dy=\int_0^1 dx\int_0^{2x}\left(x^2y+2xy^2+1\right)dy=$

$$=\int_0^1 dx\left(x^2\cdot\frac{y^2}{2}+2x\cdot\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^{2x}=\int_0^1\left(x^2\cdot\frac{4x^2}{2}+2x\cdot\frac{8x^3}{3}+2x-0\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{22}{3}x^4+2x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{22}{3}\cdot\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{22}{15}\cdot 1^5+1^2=\frac{37}{15}.\quad \textit{Ответ: } \frac{37}{15}.$$

Пример 7. Вычислить $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y (x(3x-y)+2)dx$.

Решение. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y (x(3x-y)+2)dx = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y (3x^2 - xy + 2)dx =$

$$= \int\limits_0^2 dy \left(3 \cdot \frac{x^3}{3} - y \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right)\Bigg|_0^y =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(y^3 - y \cdot \frac{y^2}{2} + 2y - 0 \right) dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{y^3}{2} + 2y \right) dy = \left(\frac{y^4}{8} + y^2 \right)\Bigg|_0^2 = 2 + 4$$

$$= 6.$$

Ответ: 6.

Задачи для самостоятельного решения:

№1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + y^3)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=2$. Вычислить интеграл двумя способами, изменяя порядок интегрирования.

Коментарии:

а) D – прямоугольник

б) в повторном интегрировании расставить пределы для x и y

в) проинтегрировать последовательно справа налево по каждой переменной

Ответ: 7.

№2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x=y^2$, $y=x^2$.

Комментарии:

а) сделать рисунок

б) найти точки пересечения линий-границ

в) выбрать ось, например Ox, определить границы переменной x: а= ,в= (проектируем D на Ox)

г) определить функции y(x), задающие верхнюю и нижнюю границу, y= , y=

д) проинтегрировать по dy
е) проинтегрировать по dx.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

№3. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \frac{x}{2} dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x = 2 + \sin y$, $x = 0$, $y = 0, y = 2\pi$.

Ответ: $\frac{9\pi}{4}$.

№4. Расставить пределы интегрирования в разном порядке:

$\iint_D f(x,y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = x$, $y > 0$, $y^2 = 2 - x^2$.

Комментарии:
а) сделать рисунок
б) найти точки пересечения границ
в) *область D в направлении оси Oy надо разбить на 2 части.*

2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Необходимый теоретический материал

При вычислении двойных интегралов иногда бывает полезно перейти в полярную систему координат. Система

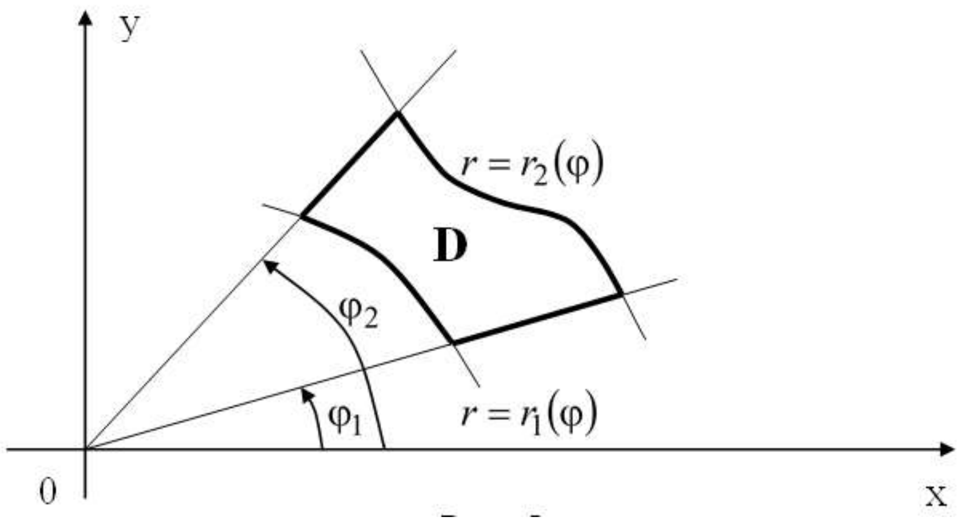
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

осуществляет переход от прямоугольных координат x и y к полярным координатам φ и r при условии, что полюс помещен в начало координат и полярная ось направлена вдоль оси Ox.

Формула перехода к полярным координатам имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi dr.$$

Если область интегрирования D ограничена лучами, образующими с полярной осью углы φ_1 и φ_2 $(\varphi_1 < \varphi_2)$, и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$,



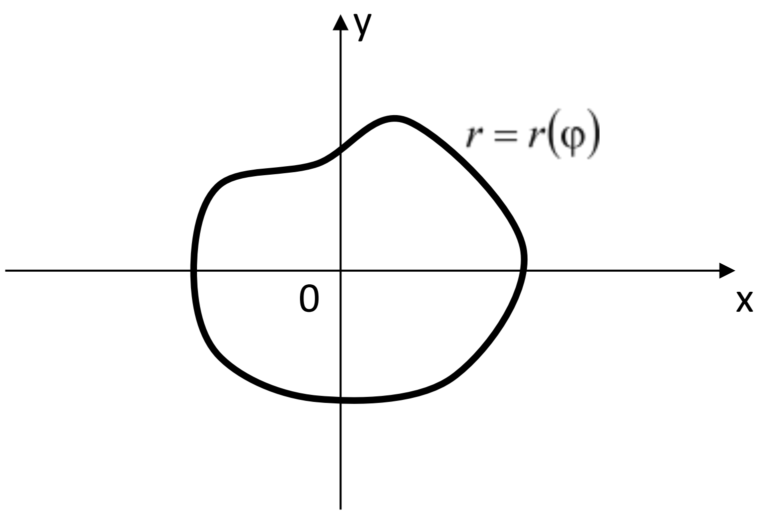
то соответствующие этой области полярные координаты изменяются в пределах $D' = \{(\varphi; r) : \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2; r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$, и тогда

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

Если область интегрирования D охватывает начало координат, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr,$$

где $r = r(\varphi)$ – полярное уравнение кривой, ограничивающей область D.



Переход к полярным координатам очень удобно использовать при решении задач, когда область интегрирования D есть круг или сектор круга: в этих случаях объем работы, связанной непосредственно с интегрированием, значительно уменьшается.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}dxdy,$$

если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=1$.

Решение. Область D есть круг радиуса $R=1$ с центром в начале координат. Введем полярные координаты. В полярных координатах $x^2+y^2=(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r^2$, и уравнение окружности принимает вид $r=1$. Тогда, учитывая то, что область интегрирования D охватывает начало координат: $D=\{(\varphi;r): 0\le\varphi\le 2\pi; 0\le r\le 1\}$, получаем:

$$\iint_D \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}d\left(-r^2+1\right)=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\left(1-1^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1-0^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)d\varphi=-\frac{1}{3}\cdot(0-1)\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(2\pi-0)=\frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

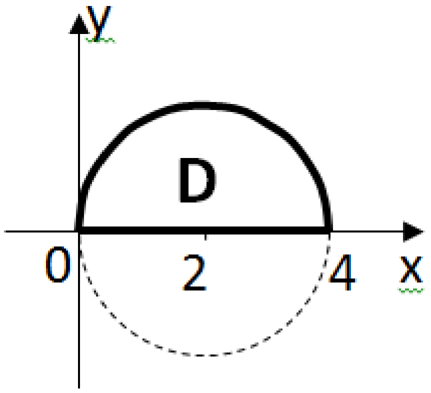
Пример 2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D ydxdy,$$

если область D ограничена верхней половиной дуги окружности $x^2+y^2=4x$ и отрезком оси Ox от точки с абсциссой равной 0 до точки с абсциссой равной 4.

Решение.

$x^2+y^2=4x \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=4 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4$.



Область D – полукруг. Введем полярные координаты. Уравнение заданной окружности в полярных координатах принимает вид $r^2=4r\cos\varphi$, или $r=4\cos\varphi$. Подынтегральная функция имеет вид $y=r\sin\varphi$. Угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (полукруг находится в I четверти). При каждом фиксированном значении угла φ полярный радиус r меняется от 0 (в начале координат) до $r=4\cos\varphi$ (на окружности).

Тогда получаем

$$\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}r\sin\varphi rdr=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}r^2dr=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{4\cos\varphi}=\frac{1}{3}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\left((4\cos\varphi)^3-0\right)d\varphi=$$

$$=\frac{64}{3}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=-\frac{64}{3}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d(\cos\varphi)=-\frac{64}{3}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{16}{3}\cdot\left(\cos^4\frac{\pi}{2}-\cos^4 0\right)=-\frac{16}{3}\cdot(0-1)=\frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения.

№1. Вычислить интеграл $\iint_{\mathrm{D}}\frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, если область D задана системой неравенств: $4x\le x^2+y^2\le 8x,\ \ 0\le y\le\frac{x}{\sqrt{3}}$

Комментарии:

а) из первого неравенства найти уравнения окружностей, ограничивающих область интегрирования;
б) из второго неравенства найти угол наклона прямой как отношение $\frac{y}{x}$*;*
в) сделать рисунок, выделить область D;
г) перейти к полярным координатам, выразить функцию и границы интегрирования через полярные координаты. Угол φ *меняется в границах, заданных числами. Границы радиуса* r *из 1 неравенства выражаются через* φ*;*

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Домашнее задание:</u> Типовой расчет, задача 2.3 свой вариант в тетради для типового расчета.

<u>Дополнительные задачи для самостоятельного решения.</u>

Вычислить двойной интеграл:

1). $\iint_D \ y^2\, dxdy,$ где область D ограничена окружностями: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}.$

2). $\iint_D \frac{y}{x^2+y^2} dxdy,$ где область D ограничена окружностью $x^2 + (y-2)^2 = 4.$

3). $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy,$ где область D ограничена окружностью $(x-3)^2 + y^2 = 9.$

4). $\iint_D \ x\, dxdy,$ где область D ограничена окружностями: $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$ и осью Oy $(x \geq 0)$.

5). $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy,$ где область D ограничена кардиоидой $r = 1 + cos\varphi,\ \ 0 \leq \varphi \leq \pi,$ и полярной осью.