Семинар 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Линейная независимость. Понятие базиса. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров. Сохранение ранга матрицы при элементарных преобразованиях. Вычисление ранга матрицы приведением ее к ступенчатому виду.

Основные понятия теории СЛАУ. Эквивалентные линейные системы. Метод Гаусса решения линейных систем, свободные и базисные неизвестные. Однородные линейные системы. Структура общего решения неоднородной системы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ: Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами Лекции 4. Системы линейных уравнений и Лекции 5. Системы линейных алгебраических уравнений.

Ранг матрицы

Пример 1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ -6 & 5 & 0 & -13 \end{pmatrix}$ найти все миноры второго порядка, содержащие элемент a_{11}.

Решение.

Выбираем 2 строки и 2 столбца, <u>содержащие элемент a_{11}</u>	Получаем матрицу 2×2	Вычисляем минор 2го порядка найденной матрицы
$A = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{-2} & 3 & 11 \\ \boxed{7} & \boxed{8} & 9 & 10 \\ -6 & 5 & 0 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$	$M_2^1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 46$
$A = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{-2} & 3 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ \boxed{-6} & \boxed{5} & 0 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$	$M_2^2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 8$

$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ -6 & 5 & 0 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	$M_2^3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 15$
$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ -6 & 5 & 0 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$	$M_2^4 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -37$
$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ -6 & 5 & 0 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$	$M_2^5 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 18$
$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ -6 & 5 & 0 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$	$M_2^6 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ -6 & -13 \end{vmatrix} = 14$

Ответ. $M_2^1 = 46$, $M_2^2 = 8$, $M_2^3 = 15$, $M_2^4 = -37$, $M_2^5 = 18$, $M_2^6 = 14$.

Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров

Пример 2. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$.

Решение.

Так как матрица содержит ненулевые элементы, то ее ранг не меньше единицы. Пусть $M_1 = 2 \neq 0$.

Рассмотрим миноры второго порядка, содержащие минор $M_1 = 2$.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$	$M_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 26 \neq 0$

Минор второго порядка, окаймляющий найденный вначале минор первого порядка не равен нулю, а, значит, ранг матрицы не меньше двух.

Вычислим окаймляющие $M_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}$ миноры третьего порядка.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$	$M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 0$
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cancel{4} & -3 & 7 \\ 4 & 15 & \cancel{8} & 7 & 1 \\ 2 & 17 & \cancel{4} & 13 & -9 \end{pmatrix}$	$M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \\ 2 & 17 & 13 \end{vmatrix} = 0$
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cancel{4} & \cancel{-3} & 7 \\ 4 & 15 & \cancel{8} & \cancel{7} & 1 \\ 2 & 17 & \cancel{4} & \cancel{13} & -9 \end{pmatrix}$	$M_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 15 & 1 \\ 2 & 17 & -9 \end{vmatrix} = 0$

Все миноры третьего порядка равны нулю. Значит, ранг матрицы равен двум. Заметим, что любой ненулевой минор второго порядка может быть выбран как базисный минор. При этом его строки или столбцы – базисные.

Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований

Пример 3. Найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Напомним, что ранг матрицы равен числу ненулевых строк в ее ступенчатом виде.

Приведем матрицу к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк.

Поменяем местами первую и третью строки, чтобы элемент 1 оказался в верхнем левом углу. Заметим, что получить (–1) в верхнем левом углу можно по-другому, например, прибавив к первой строке две четвертые строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -2 & -6 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3R1 \\ -5R1 \\ +3R1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -7 & -11 & -23 \\ 0 & -14 & -22 & -46 \\ 0 & 7 & 11 & 23 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2R2 \\ +R2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -7 & -11 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A совпадает с рангом последней эквивалентной ей трапециевидной матрицы и равен двум.

Рассмотрим матрицу B. Ранее мы видели, что удобно работать, если удается в верхнем левом углу матрицы получить 1 (или –1). В нашем примере для этого достаточно поменять местами первую и вторую строки.

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ +2R1 \\ \\ +R1 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -R2 \\ -R2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Основные понятия теории СЛАУ

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

ИМЕЕТ РЕШЕНИЯ
совместная

НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЯ
НЕсовместная

решений

ОДНО
определенная

БЕСКОНЕЧНО МНОГО
НЕопределенная

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Пример 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-3x_4=6 \\ 2x_1-5x_2-3x_3+x_4=-11 \\ 5x_1-8x_2+6x_3-4x_4=24 \\ 3x_1-x_2+x_3+12x_4=-4 \end{cases}$$

Решение.

Прямой ход. Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду.

$$A|B=\begin{pmatrix}1&-2&1&-3&6\\2&-5&-3&1&-11\\5&-8&6&-4&24\\3&-1&1&12&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2R1\\-5R1\\-3R1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-3&6\\0&-1&-5&7&-23\\0&2&1&11&-6\\0&5&-2&21&-22\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\+2R2\\+5R2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-3&6\\0&-1&-5&7&-23\\0&0&-9&25&-52\\0&0&-27&56&-137\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\-3R3\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-3&6\\0&-1&-5&7&-23\\0&0&-9&25&-52\\0&0&0&-19&19\end{pmatrix}$$

$rang(A|B)=4=rang(A)=4$, ранги равны, следовательно, система совместна. Так как $rang(A|B)=4=n$, где n – число переменных, то система имеет единственное решение.

Обратный ход.

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&-3&6\\0&-1&-5&7&-23\\0&0&-9&25&-52\\0&0&0&-19&19\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-3x_4=6\\ \quad -x_2-5x_3+7x_4=-23\\ \quad\quad -9x_3+25x_4=-52\\ \quad\quad\quad -19x_4=19\end{cases}$$

Сначала находим x_4 из последнего уравнения системы:

$$x_4=-1$$

Поднимаемся на строку выше ↑

$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-3x_4=6\\ -x_2-5x_3+7x_4=-23\\ -9x_3+25x_4=-52\\ -19x_4=19\end{cases}$	$-9x_3=-52+25\Rightarrow x_3=3$ ↑ $x_4=-1$ ↑
$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-3x_4=6\\ -x_2-5x_3+7x_4=-23\\ -9x_3+25x_4=-52\\ -19x_4=19\end{cases}$	$-x_2=-23+5x_3-7x_4=-1\Rightarrow x_2=1$ ↑ $x_3=3$ ↑ $x_4=-1$ ↑
$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-3x_4=6\\ -x_2-5x_3+7x_4=-23\\ -9x_3+25x_4=-52\\ -19x_4=19\end{cases}$	$x_1=6+2x_2-x_3+3x_4\Rightarrow x_1=2$ $x_2=1$ ↑ $x_3=3$ ↑ $x_4=-1$ ↑

Таким образом, решением системы является вектор столбец значений неизвестных $X=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}$ или в виде $(2;1;3;-1)$.

Сделаем проверку, подставив в систему найденные значения неизвестных и убедимся, что ответ верный.

Ответ: $(2; 1; 3; -1)$

Пример 5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 21 \end{cases}$$

Решение.

Прямой ход. Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & -7 & 11 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R1 \\ -3R1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +R2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$rang(A|B) = 3 \neq rang(A) = 2$, так как ранг расширенной матрицы больше ранга основной, то система несовместна.

Ответ: нет решений.

Пример 6. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 3 \\ -3x_1 + 10x_2 - 10x_3 - 7x_4 = -2 \end{cases}$$

Решение.

Прямой ход. Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 6 & 5 & 3 \\ -3 & 10 & -10 & -7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R1 \\ +3R1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2R2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rang(A|B) = 2 = rang(A) = 2$, так как ранги равны, то система совместна. Так как $rang(A|B) = 2 < n$, где n=4 – число переменных, то система имеет бесконечно много решений.

В этой задаче подробно остановимся на выборе базисного минора.

Столбцы 1 и 2	$\left(\begin{array}{cc\|cc\|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{matrix}} & & 2 & 3 & 4 \\ & & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ переменные x_1, x_2 могут быть выбраны на роль базисных переменных.

Столбцы 1 и 3	$\left(\begin{array}{ccccc\|c} \boxed{1} & -2 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ \boxed{0} & -2 & \boxed{2} & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, переменные x_1, x_3 могут быть выбраны на роль базисных переменных.
Столбцы 1 и 4	$\left(\begin{array}{cccc\|c} \boxed{1} & -2 & 2 & \boxed{3} & 4 \\ \boxed{0} & -2 & 2 & \boxed{-1} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, переменные x_1, x_4 могут быть выбраны на роль базисных переменных.
Столбцы 2 и 3	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & \boxed{-2} & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{-2} & \boxed{2} & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, переменные x_2, x_3 НЕ могут быть выбраны на роль базисных переменных.
Столбцы 2 и 4	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & \boxed{-2} & 2 & \boxed{3} & 4 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 & \boxed{-1} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, переменные x_2, x_4 могут быть выбраны на роль базисных переменных.
Столбцы 3 и 4	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & -2 & \boxed{2} & \boxed{3} & 4 \\ 0 & -2 & \boxed{2} & \boxed{-1} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, переменные x_3, x_4 могут быть выбраны на роль базисных переменных.

Выберем первый и второй столбцы. Переменные x_1, x_2– базисные переменные, x_3, x_4 –свободные переменные.

Пусть $x_3 = C_1, x_4 = C_2$, $C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$

Преобразованная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ \quad - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -5 \end{cases}$$

Обратный ход: из последнего уравнения выразим x_2:

$$-2x_2 = -5 - 2x_3 + x_4 = -5 - 2C_1 + C_2 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2} + C_1 - \frac{1}{2}C_2$$

Поднимаемся выше к первому уравнению. Подставляем $x_3 = C_1, x_4 = C_2$ и, найденное ранее, $x_2 = \frac{5}{2} + C_1 - \frac{1}{2}C_2$:

$$x_1 = 4 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 + 2\left(\frac{5}{2} + C_1 - \frac{1}{2}C_2\right) - 2C_1 - 3C_2$$

$$= 4 + 5 + 2C_1 - C_2 - 2C_1 - 3C_2$$

$$x_1 = 9 - 4C_2$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-4C_2\\\frac{5}{2}+C_1-\frac{1}{2}C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\\frac{5}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\C_1\\C_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4C_2\\-\frac{1}{2}C_2\\0\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\\frac{5}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+$$

$$C_2\begin{pmatrix}-4\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$ **Ответ**: $X=\begin{pmatrix}9\\\frac{5}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-4\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$, $C_1, C_2\in\boldsymbol{R}$.

Однородные системы линейных уравнений

Пример 7. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений, выписать ФСР.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=0\\3x_1+x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&2&1&1\\3&1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-3R1\\-3R1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&-2&-4&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-2R2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Так как $rang(A)=2<n$, где n=4 – число переменных, то система имеет бесконечно много решений.

Выберем базисный минор

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&1\\0&-1\end{matrix}}&\begin{matrix}1&1\\-2&-2\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

Пусть x_1, x_2– базисные переменные, а x_3, x_4 – свободные переменные.

Пусть $x_3=C_1, x_4=C_2$, $C_1, C_2\in\boldsymbol{R}$

Полученная матрица соответствует системе двух уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\\quad -x_2-2x_3-2x_4=0\end{cases}$$

Обратный ход.

Из последнего уравнения выразим $-x_2=2x_3+2x_4=2C_1+2C_2$, тогда $x_2=-2C_1-2C_2$

Поднимаемся выше к первому уравнению. Подставляем полученные значения переменных x_2, x_3, x_4и выражаем x_1:

$$x_1=-x_2-x_3-x_4=-(-2C_1-2C_2)-C_1-C_2=C_1+C_2$$

Общее решение

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1+C_2\\-2C_1-2C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1,C_2\in\boldsymbol{R}.$$

$$\text{ФСР}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Выполним проверку, подставив найденные значения переменных в исходную систему:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=0\\3x_1+x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+1\cdot(-2)+1+0=0\\3\cdot(1)+2\cdot(-2)+1+0=0\\3\cdot(1)+(-2)-1-0=0\end{cases}\text{– верные тождества}$$

$$\begin{cases}1+1\cdot(-2)+0+1=0\\3\cdot1+2\cdot(-2)+0+1=0\\3\cdot1+1\cdot(-2)-0-1=0\end{cases}\text{– верные тождества}$$

Ответ: Общее решение: $X=C_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $C_1,C_2\in\boldsymbol{R}$, ФСР$=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Структура общего решения неоднородной системы

Пример 8. Для системы линейных уравнений из примера 6, выписать частное решение, указать ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3+3x_4=4\\2x_1-6x_2+6x_3+5x_4=3\\-3x_1+10x_2-10x_3-7x_4=-2\end{cases}$$

Решение.

Общее решение, полученное нами ранее:

$$X_{\text{о.н.}}=\underbrace{\begin{pmatrix}9\\\frac{5}{2}\\0\\0\end{pmatrix}}_{X_{\text{ч.н.}}}+\underbrace{C_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-4\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}_{X_{\text{о.о.}}},\ C\in\boldsymbol{R}.$$

Частное решение $X_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Выполним проверку, подставив найденные значения переменных в исходную систему:

$$\begin{cases} 9 - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 4 \\ 2 \cdot 9 - 6 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 3 \\ -3 \cdot 9 + 10 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) - 1 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = -2 \end{cases} \quad \text{– верные тождества}$$

Однородная система, соответствующая исходной неоднородной системе имеет вид: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 10x_2 - 10x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$.

Вектор $X_{\text{о.о.}} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ будет являться ее решением. Проверка выполняется аналогично.

Ответ: $X_{\text{о.н.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_{\text{ч.н.}}} + \underbrace{C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{C}_2 \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_{\text{о.о.}}}$, $\mathrm{C} \in \boldsymbol{R}$, $X_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В заданиях 1-6 для заданных матриц найти ранги.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5\\ -13 & -26 & 39 & -65\end{pmatrix}$. **Ответ**: $r(A)=2$.

2. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 1 & 7\\ 8 & 7 & -2 & -1 & 15\\ 2 & -1 & 8 & -3 & 1\end{pmatrix}$. **Ответ**: $r(A)=2$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$. **Ответ**: $r(A)=4$.

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4 & 1\\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2\\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12\\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. **Ответ**: $r(A)=3$.

5. $A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 6 & -2 & -10 & -4 & 1\\ 7 & 1 & 5 & 2 & -8\end{pmatrix}$. **Ответ**: $r(A)=2$.

6. $A=\begin{pmatrix}10 & 24 & 20 & -44 & -10\\ 2 & 3 & 6 & 12 & 17\\ 5 & 10 & -10 & 10 & 25\end{pmatrix}$. **Ответ**: $r(A)=3$.

В примерах 7-11 найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений. Сделать проверку.

7. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ 4x_1+5x_2+6x_3=0\\ 7x_1+8x_2+9x_3=0\end{cases}$. **Ответ:** $X=C\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $C\in\boldsymbol{R}$, ФСР=$\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

8. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=0\\ 2x_1+5x_2+3x_3=0\\ 3x_1+4x_2+2x_3=0\end{cases}$. **Ответ:** $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, ФСР отсутствует.

9. $\begin{cases}x_1-2x_2-3x_3=0\\ 2x_1+3x_2+x_3=0\\ 5x_1-3x_2-8x_3=0\end{cases}$. **Ответ:** $X=C\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C\in\boldsymbol{R}$, ФСР=$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

10. $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0\end{cases}$.

Ответ: $X=C_1\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}$, $C_1,C_2\in\boldsymbol{R}$, ФСР=$\left\{\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

11. $\begin{cases}5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=0\\ 2x_1-x_2+3x_3+5x_4=0\\ 4x_1-3x_2-5x_3-7x_4=0\end{cases}$.

Ответ: $X = C_1\begin{pmatrix}-7\\-11\\1\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}-11\\-17\\0\\1\end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$, ФСР=$\left\{\begin{pmatrix}-7\\-11\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-11\\-17\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

В примерах 12-16 решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Если система несовместна, то указать общее решение, частное решение и ФСР соответствующей однородной системы линейных уравнений.

12. $\begin{cases}2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 2\\4x_1 - 7x_2 - x_3 - 8x_4 = -5\\10x_1 - 18x_2 + 2x_3 - 23x_4 = 3\\2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\end{cases}$. **Ответ:** $X = (1; 2; 3; -1)$.

13. $\begin{cases}3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4\\2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1\\3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2\end{cases}$. **Ответ:** $X = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$.

14. $\begin{cases}x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3\\2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3\\x_1 - x_2 + x_3 \qquad = -2\\2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4\end{cases}$. **Ответ:** Система несовместна.

16. $\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8\\2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1\\4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13\\3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9\end{cases}$. **Ответ:** $X = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

$C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$, $X_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$.

17*. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от параметра λ.

$\begin{cases}2x_1 + \lambda x_2 = 6\\\lambda x_1 + 8x_2 = 12\end{cases}$.

Ответ. При $\lambda = -4$ система несовместна, при $\lambda = 4$ система совместна и неопределена, при $\lambda \neq -4, \lambda \neq 4$ система совместна и определена.