Практическое занятие 14

Поток векторного поля

Пусть $\vec{a}(M)$ – векторное поле скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости, определенное в некоторой пространственной области. Предположим, что внутри этой области имеется проницаемая гладкая двусторонняя поверхность σ, сторону которой зафиксируем путем выбора направления нормали $\vec{n}$ к этой поверхности. Поставим задачу о вычислении объема жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени. Эта величина называется потоком векторного поля и обозначается Π.

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma.$$

Если поверхность σ, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, однозначно проектируется на плоскость xOy, единичный вектор нормали имеет координаты $\vec{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$, то

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left.\frac{(\vec{a} \cdot \vec{n})}{|cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)} dxdy,$$

$\gamma -$ угол между $\vec{n}$ и осью Oz.

Если поверхность σ однозначно проектируется на плоскость yOz, то

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} \left.\frac{(\vec{a} \cdot \vec{n})}{|cos\alpha|}\right|_{x=x(y,z)} dydz,$$

$\alpha -$ угол между $\vec{n}$ и осью Ox.

Если поверхность σ однозначно проектируется на плоскость xOz, то

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} \left.\frac{(\vec{a} \cdot \vec{n})}{|cos\beta|}\right|_{y=y(x,z)} dxdz,$$

$\beta -$ угол между $\vec{n}$ и осью Oy.

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\oiint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_{V} \mathrm{div}\vec{a}\, dV$$

Поток векторного поля через внешнюю сторону гладкой или кусочно-гладкой замкнутой поверхности равен тройному интегралу от дивергенции этого векторного поля по области, ограниченной этой замкнутой поверхностью.

Пример 1. Найти поток векторного поля

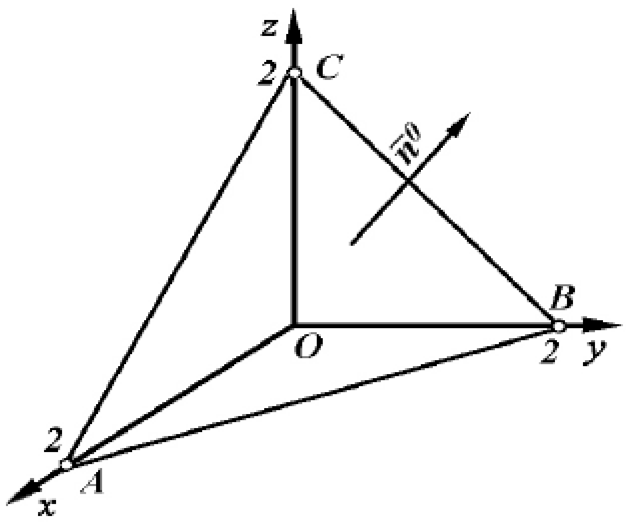
$\vec{a} = (x - 3z)\bar{\imath} + (x + 2y + z)\bar{\jmath} + (4x + y)\bar{k}$ через часть плоскости $x + y + z = 2$, лежащей в 1 октанте.

Поверхность $\sigma -$ треугольник ABC, стороны которого заданы уравнениями

$$AB: x + y = 2$$

$$BC: y + z = 2$$

$$AC: x + z = 2.$$



Запишем уравнение плоскости в неявном виде:

$$F(x, y, z) = x + y + z - 2 = 0$$

Вычислим вектор единичной нормали к плоскости:

$\bar{n} = \pm \frac{gradF}{|gradF|} = \pm \frac{\bar{\imath}+\bar{\jmath}+\bar{k}}{\sqrt{3}}$. Знак выберем «+», так как нормаль образует с осью *Oz* острый угол:

$\bar{n} = \frac{\bar{\imath}+\bar{\jmath}+\bar{k}}{\sqrt{3}},\ cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Вычислим

$$(\bar{a}, \bar{n}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 3z + x + 2y + z + 4x + y) = \frac{1}{\sqrt{3}}(6x + 3y - 2z).$$

Плоскость треугольника *ABC* проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в треугольник *AOB*.

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\bar{a},\bar{n})d\sigma = \iint_{Dxy} \frac{(\bar{a},\bar{n})}{|cos\gamma|}\bigg|_{z=z(x,y)} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Delta AOB} (6x+3y-2z)|_{z=2-x-y}\, dxdy = \iint\limits_{\Delta AOB} (8x+5y-4)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (8x+5y-4)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(8x(2-x) + 5\frac{(2-x)^2}{2} - 4(2-x)\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(10x + 2 - \frac{11}{2}x^2\right)dx = \left(5x^2 + 2x - \frac{11x^3}{2\cdot 3}\right)\bigg|_0^2 = 9\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\Pi = 9\frac{1}{3}$.

Пример 2. Найти поток векторного поля
$\vec{a} = x^3\bar{\imath} + 3yz^2\bar{\jmath} + 3y^2z\bar{k}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
Так как сфера является замкнутой поверхностью, воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского. Вычислим дивергенцию заданного поля:

$$div\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}x^3 + \frac{\partial}{\partial y}(3yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3y^2z) = 3x^2 + 3z^2 + 3y^2,$$

$$\Pi = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}\, dV = 3\iiint\limits_V (x^2+z^2+y^2)\, dxdydz$$

Перейдем к сферическим координатам:
$x = rsin\theta cos\varphi,\ y = rsin\theta sin\varphi,\ z = rcos\theta$
$dxdydz = r^2 sin\theta d\varphi dr d\theta\ ,\ x^2+z^2+y^2 = r^2.$

$$\Pi = 3\iiint\limits_V r^4\, sin\theta d\varphi dr d\theta = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} sin\theta\, d\theta \int\limits_0^R r^4 dr = \frac{12}{5}\pi R^5.$$

Ответ: $\Pi = \frac{12}{5}\pi R^5$.

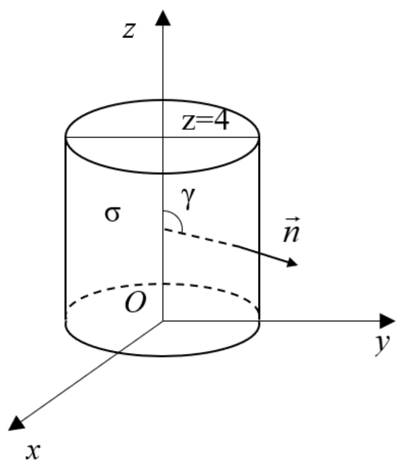
Пример 3. Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (x+y)\bar{\imath} - (x-y)\bar{\jmath} + xyz\bar{k}$$

через часть цилиндрической поверхности

σ: $x^2 + y^2 = 1$, вырезанную заданными плоскостями p_1: $z = 0$ и p_2: $z = 4$ (выбирается внешняя нормаль к поверхности σ).

При решении данной задачи нельзя воспользоваться формулой Остроградского-Гаусса, потому что поверхность σ, через которую требуется найти поток векторного поля, не является замкнутой. Поэтому найдем поток Π векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ, исходя из его определения:



$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma.$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\bar{n} = \pm \frac{gradF}{|gradF|} = \pm \frac{2x\bar{\imath} + 2y\bar{\jmath}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \pm \frac{x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Выбор знака обусловлен тем, что внешняя нормаль должна образовывать острый угол с осью Ox при $x > 0$, т.е. $\cos\alpha > 0$ при $x > 0$, и тупой угол с осью Ox при $x < 0$, т.е. $\cos\alpha < 0$ при $x < 0$. Поэтому выбираем в формуле знак "+".

$$\bar{n} = \frac{x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Найдем скалярное произведение $\vec{a} = (x+y)\bar{\imath} - (x-y)\bar{\jmath} + xyz\bar{k}$ и $\bar{n}$:

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}) = \frac{x(x+y) - y(x-y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{n})|_{\sigma} = 1$$

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n})\, d\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma = S(\sigma)$$

Площадь поверхности цилиндра вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi r h,$$

где r – радиус основания, h – высота цилиндра.

$$S(\sigma) = 2\pi \cdot 1 \cdot 4 = 8\pi.$$

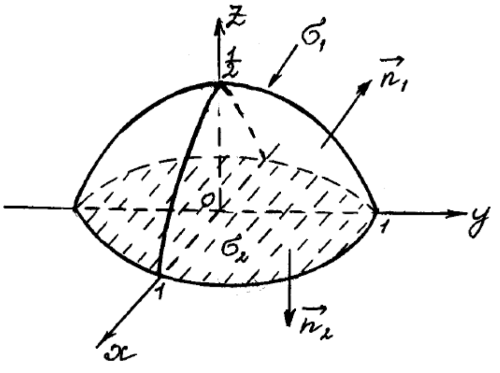
$$\Pi = 8\pi.$$

Пример 4. Вычислить поток векторного поля

$$\bar{a} = 2x\bar{\imath} + 3y\bar{\jmath} + (1 - 2z)\bar{k}$$

через замкнутую поверхность σ, образованную параболоидом $x^2 + y^2 = 1 - 2z,\ \ z \geq 0$, и плоскостью $z = 0$.

в направлении внешней нормали двумя способами: непосредственно и с помощью формулы Остроградского-Гаусса.



Нетрудно видеть, что поверхность σ состоит из двух частей: верхняя часть σ_1 представляет собой параболоид с вершиной на оси Oz при $z = 1/2$, «чашка» которого направлена вниз, а нижняя часть σ_2 при $z = 0$ представляет собой круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

Поскольку поверхность σ_1 задана уравнением вида $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z - 1$, то единичный вектор нормали $\vec{n}$ к ней находится по формуле

$$\vec{n} = \pm \frac{grad(x^2 + y^2 + 2z - 1)}{\left|grad(x^2 + y^2 + 2z - 1)\right|} = + \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$$

где знак + в правой части выбран потому, что нормаль $\vec{n}$ внешняя. При этом $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$.

Находим скалярное произведение $(\vec{a}\cdot\vec{n})$:

$$(\vec{a}\cdot\vec{n})=\frac{2x^2+3y^2+1-2z}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

Поскольку поверхность проектируется на плоскость xOy в круг σ_2, то по формуле для потока получаем

$$\Pi_{\sigma_1}=\iint_{\sigma_1}(\vec{a}\cdot\vec{n})d\sigma=\iint_{\sigma_2}\left.\frac{(\vec{a}\cdot\vec{n})}{|cos\gamma|}\right|_{z(x,y)}dxdy=$$

$$\iint\limits_{\sigma_2}\left.\frac{2x^2+3y^2+1-2z}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+y^2+1}\right|_{1-2z=x^2+y^2}dxdy=$$

$$=\iint_{\sigma_2}(3x^2+4y^2)dxdy=\iint_{\sigma_2}(3r^2cos^2\varphi+4r^2sin^2\varphi)rd\varphi dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(3+sin^2\varphi)d\varphi\int\limits_0^1 r^3\,dr=\frac{7\pi}{4}$$

Последний двойной интеграл вычислили в полярных координатах.

Найдем теперь поток по поверхности $\sigma_2=\{x^2+y^2\leq 1\}$. Очевидно, вектор внешней нормали $\vec{n}=\{0,0,-1\}$. Поэтому

$$\Pi_{\sigma_2}=\iint_{\sigma_2}(\vec{a}\cdot\vec{n})|_{z=0}d\sigma=\iint_{\sigma_2}(2z-1)|_{z=0}\,dxdy=-\pi.$$

Окончательно, искомый поток

$$\Pi_\sigma=\Pi_{\sigma_1}+\Pi_{\sigma_2}=\frac{7\pi}{4}-\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

Вычислим этот поток с помощью формулы Остроградского-Гаусса, для чего находим $div\bar{a}=2+3-2=3$. Тогда

$$\Pi_\sigma=\iiint\limits_V 3dxdydz.$$

Здесь пространственная область V ограничена сверху поверхностью, задаваемой уравнением $z = (1 - x^2 - y^2)/2$, снизу – плоскостью $z = 0$, и обе эти поверхности проектируются в круг $\{x^2 + y^2 < 1\}$. Поэтому

$$\iiint\limits_V 3dxdydz = 3 \iint\limits_{\{x^2+y^2<1\}} dxdy \int\limits_0^{(1-x^2-y^2)/2} dz = \frac{3}{2}\iint_{\{x^2+y^2<1\}} \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy.$$

Последний интеграл вычисляем в полярных координатах:

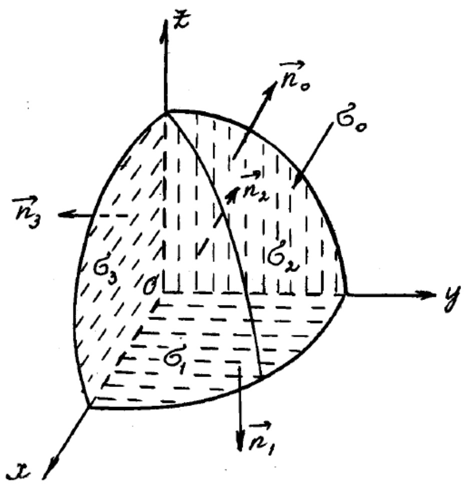
$$\frac{3}{2}\iint_{\{x^2+y^2<1\}} \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy = \frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1 - r^2\right) r dr = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Совпадение значения потока, вычисленного двумя независимыми способами, подтверждает правильность вычислений.

Ответ: $\Pi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Пример 5. Вычислить поток векторного поля

$$\bar{a} = x\bar{\imath} + (y + z)\bar{\jmath} + (z - y)\bar{k}$$



через замкнутую поверхность, состоящую из части сферы σ_0: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, лежащей в первом октанте $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ и замыкающими ее частями координатных плоскостей $x = 0, y = 0, z = 0$, в направлении внешней нормали двумя способами: непосредственно и с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

Непосредственное вычисление потока. С этой целью разобьем данную поверхность на четыре части: сферическая часть и три части координатных плоскостей. Найдем потоки по каждой из этих частей.

1). Рассмотрим поток Π_0 по сферической части.

Найдем для нее единичный вектор внешней нормали $\vec{n}_0$. Так как поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, то

$$\overline{n_0} = \pm\frac{2x\bar{\imath} + 2y\bar{\jmath} + 2z\bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Следовательно,

$$cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$(\bar{a} \cdot \overline{n_0}) = \frac{x^2 + y(y + z) + z(z - y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_0})|_{\sigma_0} = 3$$

$$\Pi_0 = \iint\limits_{\sigma_0} (\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_0}) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_0} 3 d\sigma = 3S(\sigma_0).$$

Площадь сферы вычисляется по формуле:

$$S = 4\pi R^2,$$

где R − радиус сферы.

$S(\sigma_0)$ равна 1/8 части площади сферы радиуса 3.

$$S(\sigma_0) = \frac{1}{8} \cdot 4\pi \cdot 9 = \frac{9\pi}{2}.$$

$$\Pi_0 = 3 \cdot \frac{9\pi}{2} = \frac{27\pi}{2}.$$

2). Рассмотрим поток Π_1 по части координатной плоскости D_{xOy}. Найдем для нее единичный вектор внешней нормали $\overline{n_1} = (0,0,-1)$, а затем скалярное произведение $(\bar{a}, \overline{n_1}) = y - z$.

$$\Pi_1 = \iint\limits_{D_{xOy}} (y - z)|_{z=0}\, dxdy = \iint\limits_{D_{xOy}} y\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^3 r^2 sin\varphi dr =$$

$$= -cos\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^3}{3}\bigg|_0^3 = 9$$

3). Рассмотрим поток Π_2 по части координатной плоскости D_{yOz}. Для нее $\overline{n_2} = (-1,0,0)$, и $(\bar{a}, \overline{n_2}) = -x = 0$ (поскольку $x = 0$ на плоскости yOz). Следовательно, $\Pi_2 = 0$.

4). Рассмотрим поток Π_3 по части координатной плоскости D_{xOz}. Найдем $\overline{n_3} = (0,-1,0)$, и $(\bar{a}, \overline{n_3}) = -(y+z) = -z$, поскольку $y = 0$ на D_{xOz}. Тогда

$$\Pi_3 = \iint\limits_{D_{xOz}} (-z)dxdz = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi d\varphi \int\limits_0^3 r^2 dr = -9$$

Искомый поток Π равен сумме рассмотренных потоков:

$$\Pi \quad = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = \frac{27\pi}{2} + 9 + 0 - 9 = \frac{27\pi}{2}.$$

Второй способ. Теперь вычислим поток Π с помощью формулы Остроградского-Гаусса. $div\bar{a} = 3$.

$$\Pi \quad = \iiint\limits_V 3dv = 3\iiint\limits_V dv = \frac{3}{8} \cdot V_{\text{шара}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi 3^3 = \frac{27\pi}{2}.$$

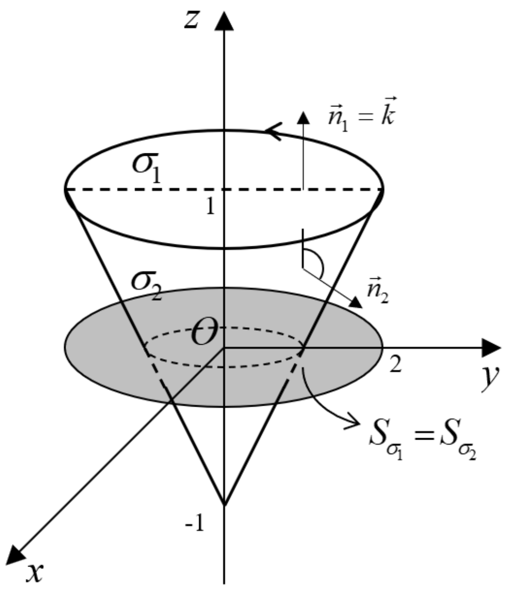
Совпадение значения потока, вычисленного двумя независимыми способами, подтверждает правильность вычислений.

Ответ: $\Pi = \dfrac{27\pi}{2}$.

Пример 6. Вычислить поток векторного поля

$$\bar{a} = (3y - 5x)\bar{\imath} + (6x + 5y)\bar{\jmath} + (4z - xy + 4)\bar{k}$$

через замкнутую поверхность $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_1\colon z = 1$, $\sigma_2\colon x^2 + y^2 = (z+1)^2$ непосредственно по определению (выбирается внешняя нормаль к σ). Проверить правильность вычислений с помощью формулы Остроградского-Гаусса. Дать заключение о наличии источников или стоков внутри области, ограниченной поверхностью σ.



Поверхность σ состоит из двух поверхностей: σ_1 – часть плоскости $z = 1$ и σ_2 – часть конуса $x^2 + y^2 = (z+1)^2$. Поэтому поток через поверхность σ равен сумме потоков векторного поля $\bar{a}$ через составляющие поверхности σ_1 и σ_2:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$

Для поверхности $z = 1$ единичный вектор нормали $\overline{n_1} = (0,0,1)$, $cos\gamma_1 = 1$, $(\bar{a}, \overline{n_1}) = 4z - xy + 4$. Поверхность $z = 1$ проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в область $S_{\sigma_1} : x^2 + y^2 \le 4$ – круг радиуса $R = 2$.

Тогда поток вектора $\bar{a}$ через поверхность σ_1 будет равен

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_1} (\bar{a} \cdot \overline{n_1}) d\sigma = \iint\limits_{S_{\sigma_1}} \left. \frac{(\bar{a} \cdot \overline{n_1})}{|cos\gamma_1|} \right|_{z=1} dxdy = \iint\limits_{S_{\sigma_1}} (4z - xy + 4)|_{z=1} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_{\sigma_1}} (8 - xy) dxdy = \iint\limits_{S_{\sigma_1}} (8 - r^2 cos\varphi sin\varphi) r d\varphi dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (8 - r^2 cos\varphi sin\varphi) r dr = 32\pi.$$

Вычислим поток через поверхность σ_2, уравнение которой перепишем в виде:

$$x^2 + y^2 - (z+1)^2 = 0.$$

Единичный вектор внешней нормали $\vec{n}_2$ будет равен

$$\overrightarrow{n_2} = \frac{grad(x^2 + y^2 - (z+1)^2)}{|grad(x^2 + y^2 - (z+1)^2)|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+1)^2}} \left(x\vec{i} + y\vec{j} - (z+1)\vec{k} \right).$$

Выбор знака соответствует направлению внешней нормали.

$$(\vec{a}\cdot\overrightarrow{n_2})=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+1)^2}}\cdot$$
$$\cdot\big((3y-5x)\cdot x+(6x+5y)\cdot y-(4(z+1)-xy)\cdot(z+1)\big)\Big|_{z+1=\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}\left(9xy-5x^2+5y^2-4(x^2+y^2)+xy\sqrt{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}\left(9xy-9x^2+y^2+xy\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$(\vec{a}\cdot\overrightarrow{n_2})d\sigma_2=\frac{(\vec{a}\cdot\overrightarrow{n_2})}{|cos\gamma_2|}dxdy=\frac{9xy-9x^2+y^2+xy\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$\Pi_2=\iint\limits_{S\sigma_1}(\bar{a}\cdot\overline{n_2})d\sigma_2$$

Полученный интеграл вычислим в полярных координатах:

$$\Pi_2=\iint\limits_{S_{\sigma_1}}(9r^2cos\varphi sin\varphi-9r^2cos^2\varphi+r^2sin^2\varphi+r^3cos\varphi sin\varphi)d\varphi dr=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(9r^2cos\varphi sin\varphi-9r^2cos^2\varphi+r^2sin^2\varphi+r^3cos\varphi sin\varphi\right)dr=-\frac{64}{3}\pi.$$

Таким образом, искомый поток векторного поля равен

$$\Pi\ =\Pi_1+\Pi_2=\frac{32}{3}\pi.$$

Теперь найдем решение этой задачи с помощью формулы Остроградского-Гаусса. Для этого вычислим дивергенцию вектора $\bar{a}$.

$$div\bar{a}=\frac{\partial(3y-5x)}{\partial x}+\frac{\partial(6x+5y)}{\partial y}+\frac{\partial(4z-xy+4)}{\partial z}=4$$

Следовательно, искомый поток будет равен

$$П \quad = \iiint\limits_V div\bar{a}\, dv = 4 \iiint\limits_V dv.$$

Здесь объем V ограничен частью плоскости $z=1$ и частью конуса $x^2+y^2=(z+1)^2$ ($z \ge -1$). Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам с пределами интегрирования

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, $r-1 \le z \le 1$ ($z = r-1$ – уравнение верхней части конуса $x^2+y^2=(z+1)^2$ в цилиндрических координатах). Найдем искомый поток

$$П \quad = 4 \iiint\limits_V dv = 4 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rdr \int\limits_{r-1}^1 dz = \frac{32}{3}\pi.$$

По формуле Остроградского-Гаусса получили тот же самый результат, что и при вычислении потока векторного поля непосредственно. Очевидно, что в последнем случае задача решается гораздо быстрее.

Замечание: При вычислении тройного интеграла в последней формуле можно воспользоваться его приложением: $\iiint_V dv = V$, V – объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Из рисунка видно, что это тело представляет собой круговой конус с высотой $h=2$ и основанием S, полученным в сечении конической поверхности $x^2+y^2=(z+1)^2$ плоскостью $z=1$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=(z+1)^2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=4.$$

Таким образом, основание S: $x^2+y^2=4$ – круг радиуса 2.

Объем конуса определяется известной формулой: $V_{конуса} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$. В данном случае $S_{осн} = \pi r^2 = 4\pi$. Следовательно, $V = \frac{8}{3}\pi$ и искомый поток векторного поля равен:

$$\Pi = 4 \cdot \frac{8}{3}\pi = \frac{32}{3}\pi.$$

Так как найденный в данном примере поток векторного поля через замкнутую поверхность $\Pi > 0$, то векторное поле $\bar{a} = (3y - 5x)\bar{\imath} + (6x + 5y)\bar{\jmath} + (4z - xy + 4)\bar{k}$ содержит источники внутри области, ограниченной поверхностью $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, где σ_1 – часть плоскости $z = 1$, σ_2 – часть конуса $x^2 + y^2 = (z+1)^2$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = -5x\vec{i} + 8y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = \vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $\sigma : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $\sigma_1 : x^2 + y^2 = 1$, $\sigma_2 : z = 0$, $\sigma_3 : z = 2$.

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 4x\vec{i} - 10y\vec{j} - 3z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $\sigma : \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_1 : x^2 + y^2 = z^2$, $\sigma_2 : z = 3$.