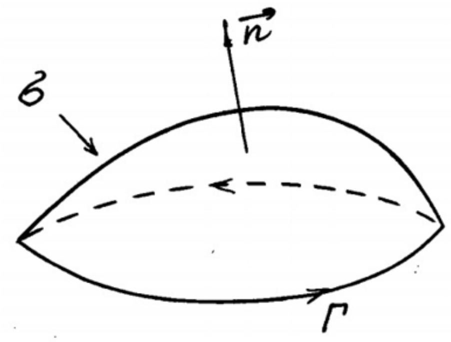
Практическое занятие 15

Циркуляция векторного поля.

Формула Стокса.

Пусть в некоторой пространственной области задано векторное поле $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$. Функции P, Q, R непрерывны и имеют непрерывные частные производные в этой области. Гладкая или кусочно-гладкая двусторонняя



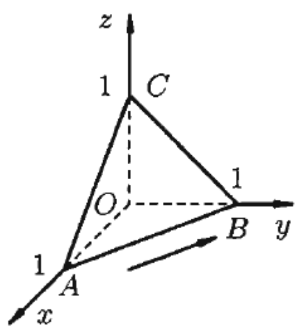
поверхность σ, принадлежащая области, ограничена гладким или кусочно-гладким замкнутым контуром Г. Направление обхода контура и сторона поверхности выбираются так, что с конца вектора нормали к поверхности обход контура виден происходящим против хода часовой стрелки.

При обходе контура поверхность остается слева от наблюдателя. Тогда имеет место формула Стокса:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \iint_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

Криволинейный интеграл 2 рода по замкнутому контуру называют циркуляцией и обозначают Ц.

Пример 1. Вычислить непосредственно и по формуле Стокса циркуляцию векторного поля
$\bar{a} = (x - 2z)\bar{\imath} + (x + 3y + z)\bar{\jmath} + (5x + y)\bar{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1).



а). *Непосредственное вычисление*.

Согласно определению и формуле вычисления, циркуляция векторного поля по контуру L равна

$$Ц = \int_L (x - 2z)dx + (x + 3y + z)dy + (5x + y)dz$$

Контуром интегрирования L в данном случае является граница треугольника ABC, лежащего в плоскости $x+y+z=1$. При этом направление обхода контура выбирается таким образом, чтобы область (в нашем случае треугольник *ABC*), ограниченная данным контуром, оставалась слева. Найдем теперь значение циркуляции, вычисляя криволинейные интегралы по ребрам AB, BC и CA:

На отрезке *AB*: $x+y=1, z=0, dz=0, y=1-x, dy=-dx.$

$$Ц_1=\int_1^0 (x-0)dx+(x+3(1-x)+0)(-dx)+0=\frac{3}{2}$$

На отрезке *BC*: $y+z=1, x=0, dx=0, z=1-y, dz=-dy.$

$$Ц_2=\int_1^0 (0-2(1-y))\cdot 0+(0+3y+1-y)dy+(0+y)(-dy)=-\frac{3}{2}$$

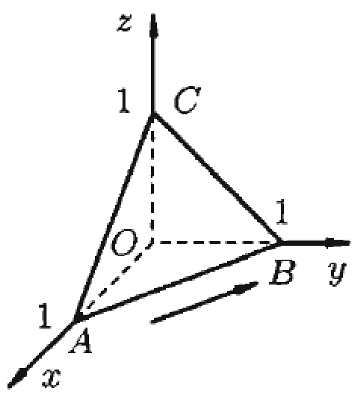
На отрезке *CA*: $x+z=1, y=0, dy=0, z=1-x, dz=-dx.$

$$Ц_3=\int_0^1 (x-2(1-x))dx+0+(5x+0)(-dx)=-3$$

В итоге искомая циркуляция будет равна

$Ц=Ц_1+Ц_2+Ц_3=-3.$

б). *Вычисление по формуле Стокса.*



Найдем ротор векторного поля

$\bar{a}=(x-2z)\bar{\imath}+(x+3y+z)\bar{\jmath}+(5x+y)\bar{k}$

$$rot\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix}=0\bar{\imath}-7\bar{\jmath}+\bar{k}$$

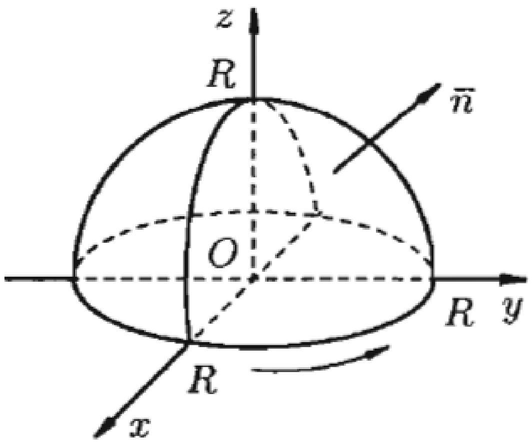
Вектор нормали к поверхности, натянутой на контур – это вектор нормали к плоскости $x+y+z=1$, $\bar{n}=\frac{\bar{\imath}+\bar{\jmath}+\bar{k}}{\sqrt{3}}$, $cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Вычислим скалярное произведение $(rot\bar{a},\bar{n})=\frac{-6}{\sqrt{3}}$.

$$Ц = \iint\limits_{Dxy} \frac{(rot\bar{a},\bar{n})}{|cos\gamma|} dxdy = -6 \iint\limits_{\Delta AOB} dxdy = -6\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy =$$

$$= -6\int_0^1 (1-x)dx = -6\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -3.$$

Пример 2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = x^2y^3\bar{\imath} + \bar{\jmath} + z\bar{k}$ по контуру С – окружности $x^2 + y^2 = 4, z = 0$



а) непосредственно,

б) используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (см. рисунок, R=2).

а) Запишем уравнение окружности в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2cost \\ y = 2sint \\ z = 0 \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi.$$

$$Ц = \int\limits_C x^2y^3dx + dy + zdz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} ((2cost)^2(2sint)^3(-2sint) + 2cost)\,dt =$$

$$= -64\int\limits_0^{2\pi} cos^2t\,sin^4tdt = -\frac{64}{4}\int\limits_0^{2\pi} sin^2 2t \cdot \frac{1}{2}(1 - cos2t)dt =$$

$$= -\frac{64}{8}\int\limits_0^{2\pi} sin^2 2tdt + \frac{64}{8}\int\limits_0^{2\pi} sin^2 2tcos2tdt =$$

$$= -\frac{64}{16}\int\limits_0^{2\pi} (1 - cos4t)dt = -\frac{64}{16}2\pi = -8\pi.$$

б) По формуле Стокса:

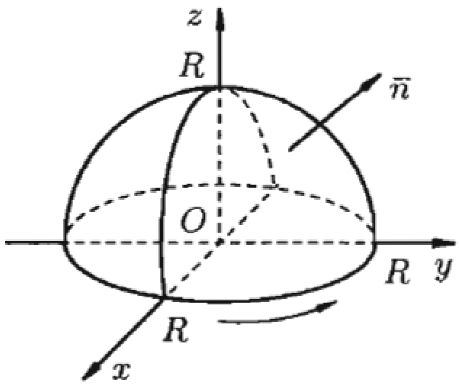
$$Ц = \iint\limits_{\sigma} (rot\bar{a}, \bar{n}) d\sigma$$

Найдем вектор единичной нормали к сфере: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$:

$$\bar{n} = \pm \frac{gradu}{|gradu|} = \pm \frac{2x\bar{\imath} + 2y\bar{\jmath} + 2z\bar{k}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} =$$

$$= \frac{x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} - 3x^2y^2\bar{k}$$

$$(rot\bar{a}, \bar{n}) = \frac{-3x^2y^2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$Ц = \iint\limits_{Dxy} \frac{(rot\bar{a}, \bar{n})}{|cos\gamma|} dxdy = -3 \iint\limits_{Dxy} x^2y^2 dxdy = \begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases} =$$

$$= -3 \int\limits_0^{2\pi} cos^2\varphi sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^2 r^5 dr = -3 \cdot \frac{2^6}{6} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} sin^2 2\varphi d\varphi =$$

$$-\frac{2^5}{4} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos4\varphi\right) d\varphi = -\frac{2^5}{8} 2\pi = -8\pi.$$

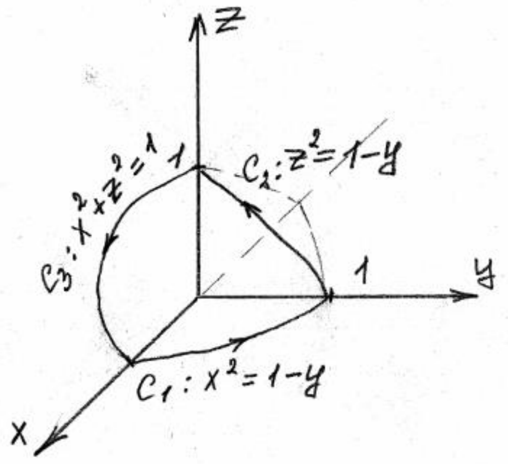
Замечание. Можно взять в качестве поверхности, натянутой на контур, круг радиуса 2 с центром в начале координат в плоскости *Oxy*.

$rot\bar{a} = 0\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} - 3x^2y^2\bar{k}$, $\bar{n} = \bar{k}$, $(rot\bar{a}, \bar{n}) = -3x^2y^2$.

$Ц = \iint_{\sigma} (rot\bar{a}, \bar{n}) d\sigma = \iint_{Dxy} \frac{-3x^2y^2}{1} dxdy = \cdots = -8\pi.$

Пример 3. Найти циркуляцию поля:

$\overline{a}=y^2\overline{i}\ -x^2\overline{j}+z^2\overline{k}$ по контуру С, образующемуся при пересечении параболоида



$x^2+z^2=1-y$ с координатными плоскостями

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0. \\ z=0 \end{cases}$$

1. *Непосредственное вычисление*.

$$C=C1+C2+C3$$

1) На С1:

$z=0, \quad y=1-x^2, dy=-2xdx$

$$Ц1=\int_{c1} y^2dx - x^2dy+z^2dz=\int_{c1}((1-x^2)^2-x^2(-2x))dx=$$

$$=\int_1^0(1-2x^2+x^4+2x^3)dx=(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+2\frac{x^4}{4})|_1^0=$$

$$=-\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{31}{30}.$$

2) На С2: $x=0 \qquad y=1-z^2$

$\qquad dx=0 \qquad dy=-2zdz$

$$Ц2=\int_{c2} y^2dx - x^2dy+z^2dz=$$

$$=\int_{c2}((1-z^2)^2\cdot 0+(-x^2)(-2z)+z^2)dz=\int_0^1 z^2\,dz=\frac{z^3}{3}|_0^1=\frac{1}{3}$$

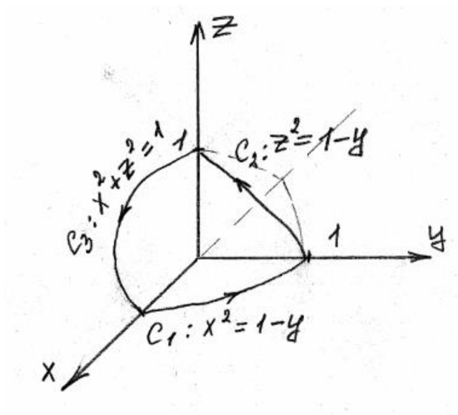
3) На С3: $y=0 \qquad x^2+y^2=1$

$\qquad dy=0$

$$Ц3=\int_{c3} y^2dx - x^2dy+z^2dz=\int_{c3}(0+0+z^2)dz=\int_1^0 z^2dz=-\frac{1}{3}$$

$$Ц=Ц1+Ц2+Ц3=\ -\frac{31}{30}.$$

2. *По теореме Стокса*:



$$\mathrm{rot}\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = \overline{0i} - 0\bar{j} + \bar{k}(-2x-2y)$$

$rot\,\overline{a} = (0,0,-2(x+y))$

Найдем вектор единичной внешней нормали к поверхности параболоида:

$F = x^2 + z^2 - 1 + y = 0$

$\overline{n} = \pm\frac{grad\,F}{|grad\,F|} = \frac{2x\bar{\imath}+1\bar{\jmath}+2z\bar{k}}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}, cos\gamma = \frac{2z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}.$

$$(rot\overline{a}, \overline{n}) = \frac{-4(x+y)z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}$$

$$\text{Ц} = \iint_{D_{xoy}} \frac{-4(x+y)z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}} \frac{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}{2z}\Big|_{z=\sqrt{1-x^2-y}} dxdy =$$

$$= -2\iint_{D_{xoy}} (x+y)\,dxdy =$$

$$= -2\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x+y)dy =$$

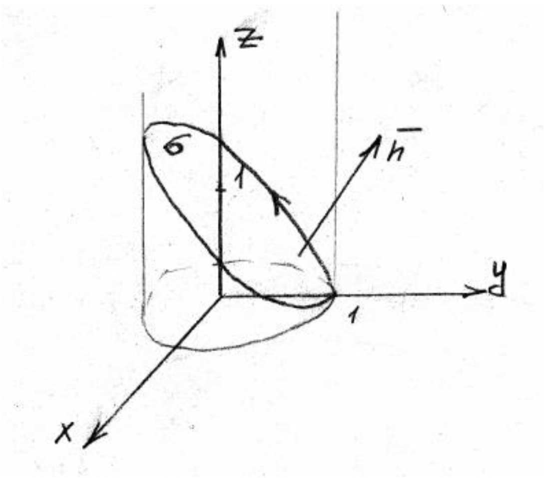
$$= -2\int_0^1 (x(1-x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)^2)dx =$$

$$= -2\int_0^1 (x - x^3 + \frac{1}{2}(1-2x^2+x^4))dx =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{5}\right) = -\frac{31}{30}$$

Пример 4. Найти циркуляцию поля: $\bar{a} = y\bar{\imath} - x\bar{\jmath} + xz\bar{k}$

по контуру L, образующемуся при пересечении цилиндра и плоскости, параллельной оси Ox, и отсекающей по 1 по осям *Oz* и *Oy*:



$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z + y = 1 \end{cases}$$

1. *Непосредственное вычисление*.

Ц= $\oint_L \bar{a}\,d\bar{r} = \oint_L ydx - xdy + xzdz =$

на контуре:

$$\begin{cases} x = 1cost \\ y = 1sint \\ z = 1 - sint \end{cases}, \begin{cases} dx = -sintdt \\ dy = costdt \\ dz = -costdt \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$$

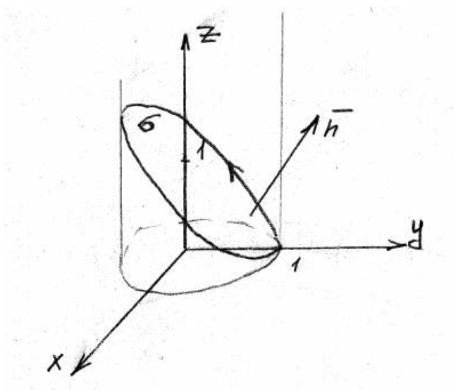
$$= \int_0^{2\pi} (-sin^2 t - cos^2 t + cost(1 - sint)(-cost))dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-sin^2 t - cos^2 t - cos^2 t + cos^2 t sint)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1 - cos^2 t)dt - \int_0^{2\pi} cos^2 t\, d(cost) =$$

$$= -t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + cos2t)dt = -2\pi - \frac{1}{2}2\pi = -3\pi.$$

2. *По формуле Стокса*:



σ: плоскость $z + y = 1$

$$Ц = \iint_\sigma (rot\bar{a}, \bar{n})d\sigma$$

$$\mathrm{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & xz \end{vmatrix} = 0\bar{\imath} - z\bar{\jmath} - 2\bar{k} = (0, -z, -2)$$

$$\bar{n} = \pm\frac{0\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

$$(rot\overline{a}, \overline{n}) = \frac{-z-2}{\sqrt{2}}$$

$$Ц = \iint_{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2}}(-z-2)d\sigma = -\iint_{D_{xy}} \frac{z+2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{1} dxdy|_{z=1-y} =$$

$$= -\iint_{Dxy}(3-y)dxdy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3 - rsin\varphi)rdr =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} - \frac{1}{3}sin\varphi)d\varphi = -\frac{3}{2}2\pi = -3\pi.$$

Домашнее задание: типовой расчет, задача 2.12.