Семинар 16. МНОГОЧЛЕНЫ

Многочлены. Действия над многочленами. Теорема Безу. Корни многочлена и их кратность. Основная теорема алгебры. Разложение многочленов на множители. Многочлены с действительными коэффициентами, свойство их комплексных корней и разложение на множители.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ: Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами Лекции 15. Многочлены.

Операции над многочленами. Корни многочленов

Определение. *Многочленом* n-ой степени называется функция вида

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0, a_n \neq 0,$ a_i– действительные или комплексные коэффициенты.

$P_n(z) = 0$ – уравнение n-ой степени.

Если $P_n(z_0) = 0 \Longrightarrow z_0$ – корень многочлена или уравнения.

Терема Гаусса. Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень.

Или иначе **Терема Гаусса.** Многочлен n-ой степени имеет ровно n корней (с учетом кратности).

Теорема Безу. z_0 – корень многочлена тогда и только тогда, когда многочлен $P_n(z)$ делится на двучлен $(z - z_0)$ без остатка. Т.е. $P_n(z) = (z - z_0) q_{n-1}(z)$.

Если $P_n(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)^k$, $k \geq 1$, но не делится $(z - z_0)^{k+1}$, то z_0 – корень кратности k. Т.е. $P_n(z) = (z - z_0)^k q_{n-k}(z)$.

Если $z_0 = x + iy$ – корень многочлена $P_n(z)$, то $z_1 = x - iy$– тоже корень, z_0 и z_1 – корни одинаковой кратности.

Кратность корня.

Определение. Число z_0 называется корнем кратности k многочлена $P_n(z)$, если $P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$, причём $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Если кратность корня равна единице ($k = 1$), то корень называется простым корнем.

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен $P_n(z)$; n$\in N$,n ≥ 1; в комплексной области имеет по крайней мере один комплексный корень.

Действия над многочленами

1) *Равенство многочленов*.
   Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их степени и равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной.
$$P_n(z) = Q_m(z) \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ a_k = b_k, k = n, n-1, \dots 1,0. \end{cases}$$
2) *Сложение.*
   Многочлены можно складывать почленно, приводя подобные слагаемые, при этом коэффициенты при одинаковых степенях z складываются.
$$P_n(z) + Q_n(z) =$$
$$= (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0) + (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0)$$
$$= (a_n + b_n) z^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) z^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) z + (a_0 + b_0).$$
3) *Умножение многочленов* осуществляется с помощью раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

Пример:
$$p(z) \cdot q(z) = (3z^3 - 5z^2 + 1) \cdot (2z^2 + z - 7) =$$
$$= 6z^5 + 3z^4 - 21z^3 - 10z^4 - 5z^3 + 35z^2 + 2z^2 + z - 7 =$$
$$= 6z^5 - 7z^4 - 26z^3 + 37z^2 + z - 7.$$
4) *Деление многочленов*.

Если даны два многочлена $P_n(z)$и $Q_m(z)$ такие, что их степени $m \leq n$, то можно подобрать многочлены $T_{n-m}(z)$и $r_s(z)$, s<m,что
$$P_n(z) = Q_m(z) T_{n-m}(z) + r_s(z)$$
При этом многочлен $T_{n-m}(z)$ - частное от деления, а многочлен $r_s(z) -$ остаток. Степень остатка меньше степени многочлена-делителя.

Способы деления: «столбиком» («уголком») и по схеме Горнера.

Пример: деление многочленов «уголком»:
$$\begin{array}{r|l} -\, z^5 - 1 & \underline{z - 1 \qquad\qquad} \\ \underline{z^5 - z^4} & z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\_\, z^4 - 1 \\
\quad \underline{z^4 - z^3} \\
\qquad \_\, z^3 - 1 \\
\qquad\quad \underline{z^3 - z^2} \\
\qquad\qquad \_\, z^2 - 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{z^2 - z} \\
\qquad\qquad\qquad \_\, z - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{z - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Способ «уголок» («столбик») применяется для деления многочлена n-ой степени на многочлен m-ой степени, где $m \leq n$.

Схема Горнера.

При делении многочлена на $(z - z_0)$ удобно использовать схему Горнера.

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r(z)$$

Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(z)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n,$$
$$b_{n-2} = z_0 \cdot b_{n-1} + a_{n-1},$$
$$b_{n-3} = z_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \ldots$$
$$b_{k-1} = z_0 b_k + a_k, \ldots$$
$$\ldots b_1 = z_0 b_2 + a_2, b_0 = z_0 b_1 + a_1, r(z) = z_0 b_0 + a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(z)$ удобно записывать в специальную таблицу, называемую *схемой Горнера*:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_{i+1}	a_i	…	a_2	a_1	a_0
z_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_i	b_{i-1}	…	b_1	b_0	$r(z)$

Пример: $(z^3 - 4z^2 + 7z - 3)$:(z-1)

	1	-4	7	-3
1	1	-4+1= -3	7-3=4	-3+4=1

Получили коэффициенты частного и остаток. Место для уравнения.

(z^3-4z^2+7z-3):(z-1) = $(z^2-3z+4)(z-1)$+1

5) *Разложение на множители.*

Разложить многочлен $P_n(z)$ на линейные множители означает привести его к виду $P_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\dots(z-z_m)^{k_m}$, где z_1– корень кратности k_1, … z_m– корень кратности k_m, $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$.

Комплексные корни многочленов с вещественными (действительными) коэффициентами

Теорема Гаусса. Всякий многочлен *n-степени* имеет в комплексной области ровно *n* корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Теорема. Если комплексное число z является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то корнем этого многочлена обязательно будет и число $\bar{z}$, т. е. комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами всегда попарно сопряженные.

Отсюда вытекает, что многочлен с вещественными (действительными) коэффициентами всегда имеет чётное число комплексных (невещественных) корней.

Если комплексное число z является корнем кратности k, то и сопряжённый корень $\bar{z}$ тоже имеет кратность k.

Следствие. Любой многочлен **нечётной** степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Теорема. Если многочлен $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $z_0=x_0+iy_0$,
то он делится без остатка на квадратный трёхчлен z^2+pz+q, где $p=-2Rez_0=-2x_0\in\mathbb{R}$, $q=|z_0|^2=({x_0}^2+{y_0}^2)\in\mathbb{R}$.

Таким образом, каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители с действительными следующим образом:

$P_n(z) =$

$= a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}(z^2 + p_1 z + q_1)^{n1} \dots (z^2 + p_l z + q_l)^{n_l}$

Пример 1. Разложить многочлен на

1) линейные множители,
2) множители линейные и квадратичные с действительными коэффициентами, если известен один его комплексный корень.

$P(z) = z^4 + 3z^3 + 7z^2 - 21z - 26,\ z_0 = -2 - 3i.$

Решение. Комплексный корень $z_0 = -2 - 3i \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow Rez_0 = -2, \qquad Imz_0 = -3 \ \Longrightarrow |z_0|^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 13$$

Тогда данный многочлен $P(z) \vdots (z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2(-2)z + 13 = z^2 + 4z + 13.$

Делим «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
_\,z^4 + 3z^3 + 7z^2 - 21z - 26 & \underline{z^2 + 4z + 13} \\
\quad \underline{z^4 + 4z^3 + 13z^2} & z^2 - z - 2 \\
\qquad _\,-z^3 - 6z^2 - 21z - 26 & \\
\qquad\quad -z^3 - 4z^2 - 13z & \\
\qquad\qquad _\,-2z^2 - 8z - 26 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2z^2 - 8z - 26} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Найдём корни полученного частного:

$z^2 - z - 2 \Longrightarrow$ дискриминант $D = 9 > 0 \Longrightarrow$ корни действительные:

$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array}\right.$.

Разложим на множители соответственно требованиям задачи:

1) линейные множители: $P(z) = (z + 1)(z - 2)\big(z - (-2 - 3i)\big)\big(z - (-2 + 3i)\big),$

2) линейные и квадратичные с действительными коэффициентами:

$$P(z) = (z+1)(z-2)(z^2+4z+13).$$

Теорема о рациональном корне. Если многочлен с целыми коэффициентами

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_k \in \mathbb{Z}$$

имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то числитель p является делителем свободного коэффициента a_0, а знаменатель q - делителем старшего коэффициента a_n.

Пример 2. Разложить на множители, подобрав вещественный корень, $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Решение. Выпишем делители свободного члена: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6.

P(1)=-10; P(-1)= -4; P(2)= -10; P(-2)= -10;

P(3)=0, следовательно $z_0 = 3$ – корень уравнения.

$$\begin{array}{l|l} -\,z^3 - z^2 - 4z - 6 & \underline{z-3} \\ \quad \underline{z^3 - 3z^2} & z^2 + 2z + 2 \\ \qquad -\,2z^2 - 4z & \\ \qquad \quad \underline{2z^2 - 6z} & \\ \qquad \qquad -\,2z - 6 & \\ \qquad \qquad \quad \underline{2z - 6} & \\ \qquad \qquad \qquad 0 & \end{array}$$

Таким образом получаем разложение: $z^3 - z^2 - 4z - 6 = (z^2 + 2z + 2)$(z-3)=(z-3)(z-(-1-i))(z-(-1+i)).

Пример 3. Разложить многочлен $z^3 + 1 = 0$ на линейные множители.

Решение. $z^3 + 1 = 0 \Longrightarrow z^3 = -1 \Longrightarrow z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos\pi + i\sin\pi} =$
$\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} +$

$$+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}, k = 0,1,2.$$

Рассмотрим три отдельных случая:

$k = 0$: $z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$k = 1$: $z_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\pi = -1$;

$k = 2$: $z_2 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдя корни исходного многочлена, можно разложить его на множители следующим образом: $z^3 + 1 = (z+1)(z - \frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Пример 4. Найти все корни многочлена $P_4(z) = z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$ и разложить на линейные множители, если известен один корень $z_1 = -1 + i$.

Решение. Из того, что $z_1 = -1 + i$ – корень, следует, что второй корень будет комплексно-сопряженный $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i$. Тогда $P_4(z) = (z - z_1)(z - z_2)P_2(z) = (z + 1 - i)(z + 1 + i)P_2(z) = (z^2 + z - iz + z + 1 - i + iz + i - i^2)P_2(z) = (z^2 + 2z + 2)P_2(z)$.

Делим $P_4(z)$ на $z^2 + 2z + 2$ столбиком:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 & \underline{z^2 + 2z + 2} \\
\ \ \underline{z^4 + 2z^3 + 2z^2} & z^2 + 2z + 5 \\
\qquad -\,2z^3 + 9z^2 + 14z & \\
\qquad\ \ \underline{2z^3 + 4z^2 + 4z} & \\
\qquad\qquad -\,5z^2 + 10z + 10 & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{5z^2 + 10z + 10} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Получили разложение многочлена $P_4(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$ на квадратичные множители. Чтобы разложить на линейные множители, решим уравнения:

$z^2 + 2z + 5 = 0$, отсюда находим корни: $z_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} \Longrightarrow$

$z_3 = -1 + 2i, z_4 = -1 - 2i$.

Итак получили разложение: $P_4(z) = (z + 1 - i)(z + 1 + i)(-1 + 2i)(-1 - 2i)$.

Ответ. $P_4(z) = (z + 1 - i)(z + 1 + i)(-1 + 2i)(-1 - 2i)$.

Краткий алгоритм (*Разложения многочлена на множители*).

Требуется разложить многочлен $P_n(z) = az^n + bz^{n-1} + \dots + ez^0$:

а) на линейные множители;

б) на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

1) Если известен один комплексный корень z_0, тогда второй корень будет комплексно-сопряженным $z_1 = \overline{z_0}$, следовательно, разложение многочлена будет $P_n(z) = (z - z_0)(z - z_1)P_{n-2}(z)$. Далее, чтобы найти $P_{n-2}(z)$, делим столбиком: $P_{n-2}(z) = P_n(z)/(z - z_0)(z - z_1)$. И ищем корни многочлена $P_{n-2}(z)$.

2) Если не известен ни один корень заранее:

- выпишем делители свободного члена e (начиная с $-1, 1, \dots, \pm e$);
- выпишем делители коэффициента a при старшей степени ($\pm 1, \dots, \pm a$).

Если корень есть, то он находится среди дробей вида: $\frac{\text{делитель свободного члена } e}{\text{делитель старшего коэфф. } a}$.

- По очереди подставляем полученные значения в $P_n(z)$ и проверяем, являются ли они корнями, начиная с ± 1 (e и a).
- Нашли вещественный корень z_1, следовательно, существует еще по крайней мере один вещественный корень (т.к. комплексные корни будут парами) (если n-четная степень).
- Делим $P_n(z)$ на $(z - z_1)$, получим $P_{n-1}(z)$.
- Далее аналогично проверяем все возможные корни вида $\frac{\text{делитель свободного члена } e}{\text{делитель старшего коэфф. } a}$, включая z_1 (вдруг у него кратность >1).
- Находим z_2, делим $P_{n-1}(z)$ на $(z - z_2)$, получаем $P_{n-2}(z)$, далее ищем корни полученного многочлена.

Пример 5. Найти все корни многочлена $P_4(z) = 3z^4 - z^3 - 7z^2 - 5z - 2$ и разложить на линейные множители.

Решение. Выпишем делители свободного члена -2: $1, -1, 2, -2$. Выпишем делители коэффициента при старшей степени 3: $1, -1, 3, -3$. Найдем подходящий вещественный корень: $z_1 = -1$ – подходит $(3 + 1 - 7 + 5 - 2 = 0)$.

Делим столбиком $P_4(z)$ на $z + 1$:

$$
\begin{array}{l}
\_\,3z^4 - z^3 - 7z^2 - 5z - 2\,\underline{|z + 1} \\
\underline{3z^4 + 3z^3} \qquad\qquad\qquad 3z^3 - 4z^2 - 3z - 2 \\
\qquad \_\,-4z^3 - 7z^2 \\
\qquad \underline{-4z^3 - 4z^2} \\
\qquad\qquad \_-3z^2 - 5z \\
\qquad\qquad \underline{-3z^2 - 3z} \\
\qquad\qquad\qquad \_2z - 2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2z - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Далее ищем делители полученного многочлена $3z^3 - 4z^2 - 3z - 2$:

делители свободного члена -2: $-1, 1, 2, -2$;

делители коэффициента при старшей степени 3: $-1, 1, 3, -3$.

Найдем подходящий вещественный корень: $z_2 = 2$. Разделим столбиком $P_3(z)$ на $z - 2$:

$$
\begin{array}{l}
\_3z^3 - 4z^2 - 3z - 2\,\underline{|z - 2} \\
\underline{3z^3 - 6z^2} \qquad\qquad 3z^2 + 2z + 1 \\
\qquad \_\,2z^2 - 3z \\
\qquad \underline{2z^2 - 4z} \\
\qquad\qquad \_z - 2 \\
\qquad\qquad \underline{z - 2}
\end{array}
$$

0

Таким образом получаем разложение многочлена на линейные и квадратичные множители: $P_4(z) = 3z^4 - z^3 - 7z^2 - 5z - 2 = (z+1)(z-2)(3z^2 + 2z + 1)$.

Найдем корни $3z^2 + 2z + 1 = 0 \implies z_{3,4} = \frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{6} = \frac{-1\pm i\sqrt{2}}{3}$.

Тогда итоговое разложение будет: $P_4(z) = (z+1)(z-2)(z + \frac{1}{3} - \frac{i\sqrt{2}}{3})(z + \frac{1}{3} + \frac{i\sqrt{2}}{3})$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Разложить многочлен на линейные множители.

1) $P(z) = z^3 - 4z^2 + 14z - 20$.
2) $P(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$.
3) $P(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 12$.
4) $P(z) = z^3 + 2z^2 + 9z + 18$.
5) $P(z) = z^3 - 7z^2 + 17z - 15$.

Разложить многочлен на линейные множители, если известен один корень z_0.

1) $P(z) = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 72z + 135, z_0 = 3i$.
2) $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10, z_0 = 1 - 2i$.
3) $P(z) = z^4 - 3 + 2z^2 - 100z + 200, z_0 = -2 - 4i$.
4) $P(z) = z^4 - 15z^2 + 30z + 104, z_0 = 3 + 2i$.
5) $P(z) = z^4 - 2z^3 + 21z^2 - 98z + 78, z_0 = -1 + 5i$.