Семинар 13. Алгебраические кривые второго порядка.

Определение Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = 0, \tag{1}$$

где не все коэффициенты A, B одновременно равны нулю.

Рассмотрим три типа невырожденных кривых. Для невырожденной кривой второго порядка найдется такая декартова прямоугольная система координат, называемая канонической, в которой уравнение кривой имеет один из следующих трех видов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0; \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0; \tag{3}$$

$$y^2 = 2px, p > 0. \tag{4}$$

Эллипс

Определение

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0 \tag{5}$$

В случае a=b уравнение принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$, которое описывает окружность радиуса a с центром в начале координат. Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно). Точки $A_1(-a; 0), A_2(a, 0), B_1(0; -b), B_2(0, b)$— вершины эллипса. Прямые A_1A_2, B_1B_2 — главные оси, O— точка пересечения осей — центр эллипса. Точки $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ называются фокусами эллипса. Для любой точки M, лежащей на кривой числа $r_1 = |F_1M|$ и $r_2 = |F_2M\ |$ — фокальные радиусы.

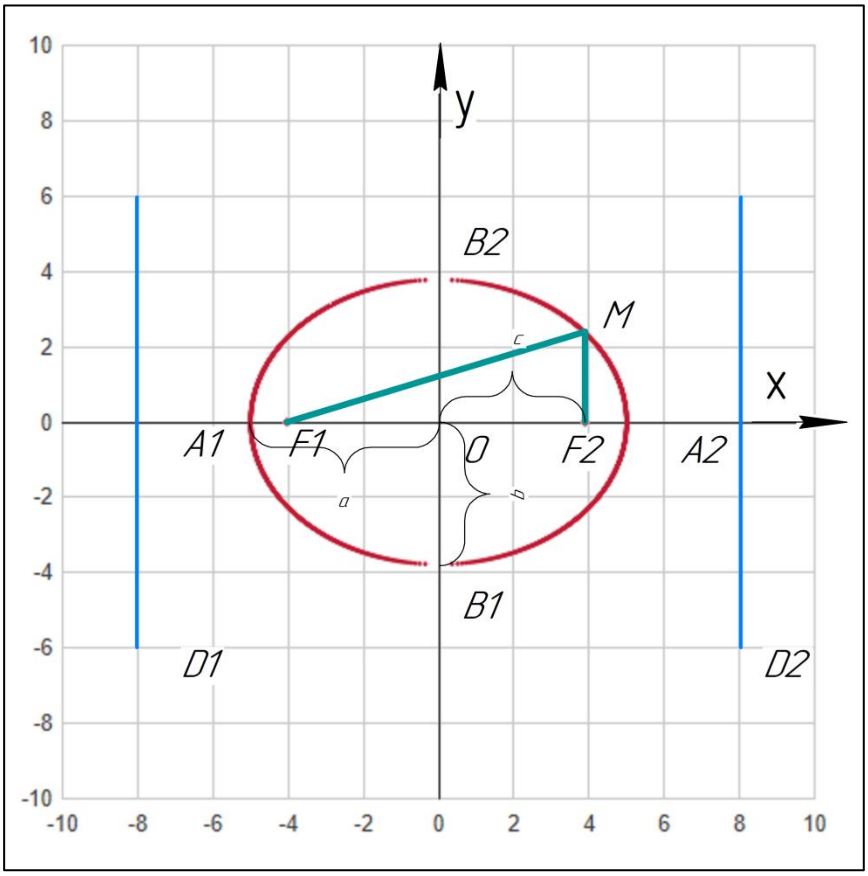


Рис.1

Число $e = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и является мерой его «сплюснутости».

Прямые $D_1 \colon x = -\frac{a}{e}$ и $D_2 \colon x = \frac{a}{e}$ называются директрисами.

Расстояние от точки M эллипса до директрисы D_1 обозначим $\rho(M; D_1)$, а до D_2 — $\rho(M; D_2)$, а расстояние от точки M до фокусов F_1 иF_2–r_1(M) и r_2 (M) соответственно.

Для параметров эллипса справедливы соотношения (6) и (7):

$$r_1(M) + r_2(M) = 2a; \tag{6}$$

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M; D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M; D_2)} = e. \tag{7}$$

Если центр эллипса смещен в точку O'с координатами $(x_0;y_0)$, а его главные оси параллельны координатным осям, то уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

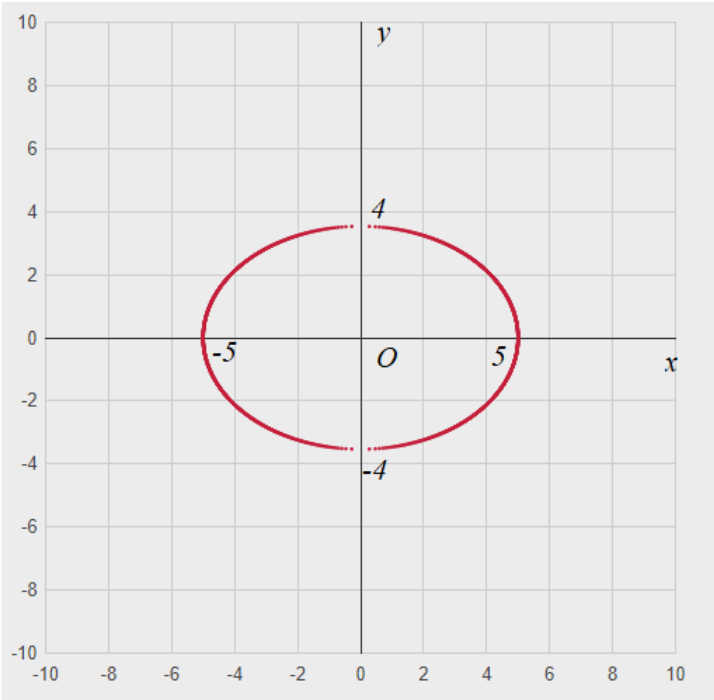
Задача№1.

Составить каноническое уравнение эллипса и сделать чертеж, найти координаты фокусов, если известно, что его центр находится в начале координат, большая полуось равна 5, малая полуось равна 4.

<u>Решение</u>.

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$



Найдем фокальное расстояние:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3, \text{тогда } F_1(-3;0); F_2(3;0).$$

Задача №2.

Составить каноническое уравнение эллипса и сделать чертеж, если F_1 (2; -3); F_2 (2;5), а меньшая полуось b=3.

<u>Решение</u>.

$|F_1F_2|=8$, в то же время $|F_1F_2|=2c$ — удвоенное фокальное расстояние. Следовательно, c = 4.

$$a^2=b^2+c^2=9+16=25 => a=5.$$

Середина отрезка F_1F_2 точка $O'(2;1)$ — центр эллипса.

С учетом того, что фокусы эллипса лежат на бо**л**ьших полуосях, напишем уравнение:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

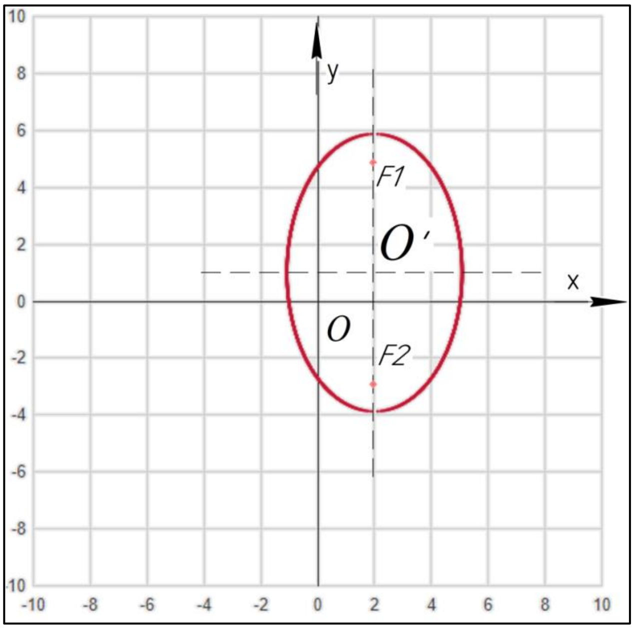


Рис.2

Задача №3.

Написать каноническое уравнение кривой. Определить её тип. Найти полуоси, координаты центра, фокусов и эксцентриситет.

$$4x^2+25y^2+24x-50x=39.$$

<u>Решение</u>.

$$4(x^2+6x+9)-36+25(y^2-2y+1)-25=39;$$

$$4(x+3)^2+25(y-1)^2=100;$$

$$\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{4}=1-\text{уравнение эллипса};$$

Полуоси a = 5, b = 2, центр O (-3, 1)

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{21};$$

$$\text{Координаты фокусов } F_{1,2}(-3\pm\sqrt{21};1)$$

$$\text{Экцентриситет: } \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Гипербола

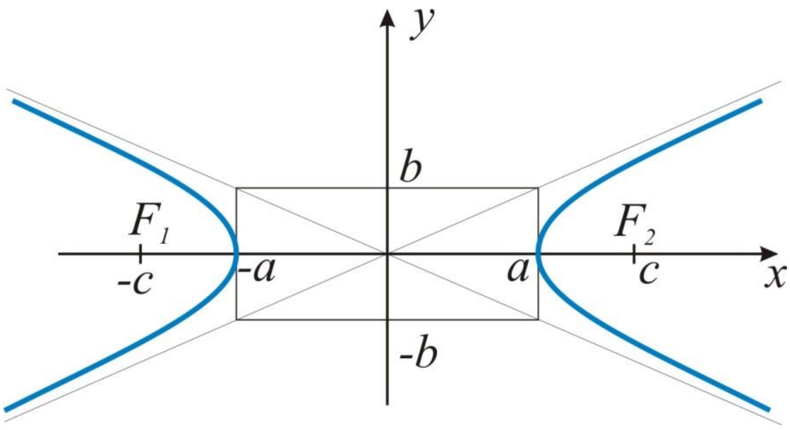
Определение

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0 \tag{9}$$

Параметры a и b— полуоси гиперболы; точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ — её вершины.



Середина отрезка A_1A_2 точка O называется центром гиперболы, она является центром симметрии кривой. Ось симметрии, проходящая через точки A_1и A_2 — действительная ось. Перпендикулярно действительной оси через точку O проходит мнимая ось гиперболы. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы. Точки $F_1(-c;0), F_2(c;0),$ где $\text{c} = \sqrt{a^2+b^2}$, называются фокусами. Для любой точки гиперболы M числа $r_1(M) = |F_1M|$и $r_2(M) = |F_2M|$ — фокальные радиусы. Число $e = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет.

Прямые $D_1: x = -\frac{a}{e}$ и $D_2: x = \frac{a}{e}$— директрисы, а расстояние от точки M гиперболы до директрисы D_1 обозначим $\rho(M; D_1)$, а до D_2 — $\rho(M; D_2)$.

Для параметров гиперболы справедливы соотношения (10) и (11):

$$|r_1(M) - r_2(M)| = 2a \tag{10}$$

$$\frac{r_1(M)}{\rho_1(M; D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho_2(M; D_2)} = e \tag{11}$$

При параллельном переносе на вектор $\bar{d} = \{x_0, y_0\}$ центр кривой смещается в точку $O'(x_0;y_0)$, а уравнение гиперболы принимает вид :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{12}$$

Гипербола, удовлетворяющая уравнению (13) называется сопряженной к гиперболе, задаваемой уравнением (9).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (13)$$

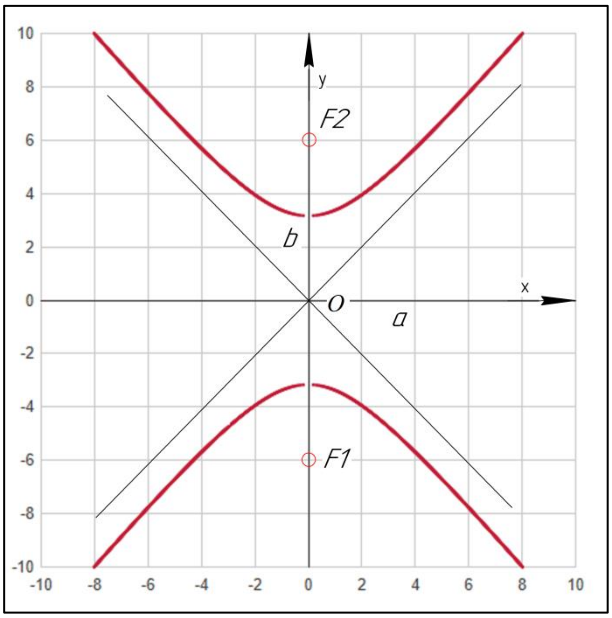


Рис.3 (чертеж сопряженной гиперболы)

Асимптоты сопряженной гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$; фокусы имеют координаты: $F_1(0; -c), F_2(0; \text{c})$, где $\text{c} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Задача №4.

Составить каноническое у равнение гиперболы, если заданы её фокусы F_1 (-1;-3) и F_2 (7;-3), а мнимая полуось b=3. Сделать чертёж.

<u>Решение</u>.

$|F_1F_2| = 8 \ => c = \frac{1}{2}|F_1F_2|, c = 4.$

Из равенства $c^2 = a^2 + b^2$ следует, что $a^2 = 4^2 - 3^2 = 7$. Середина отрезкаF_1F_2 точка O' (3;-3) — центр гиперболы. Тогда уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x-3)^2}{7} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

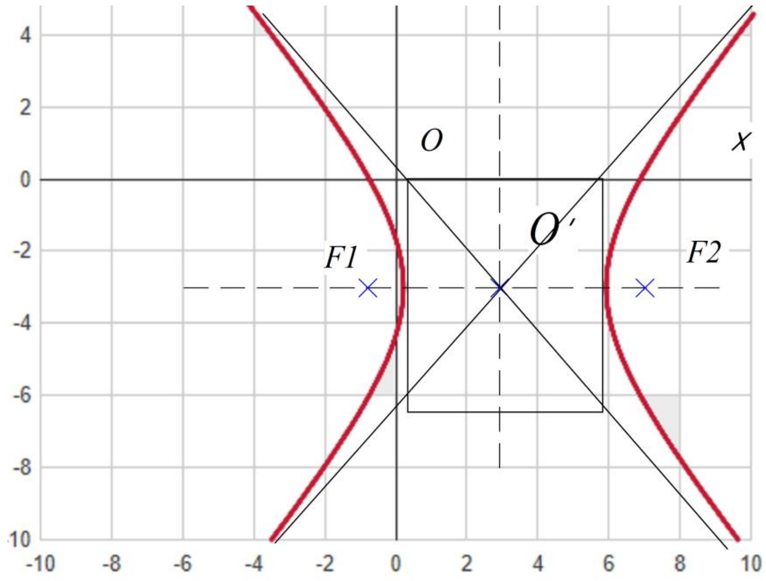


Рис.4

Задача №5.

Написать каноническое уравнение кривой. Определить её тип. Найти полуоси, координаты центра, фокусов и эксцентриситет.

$$49x^2 + 196x - 4y^2 + 32y + 328 = 0.$$

<u>Решение</u>.

$$49(x^2 + 4x + 4) - 196 - 4(y^2 - 8y + 16) + 64 + 328 = 0;$$

$$49(x + 2)^2 - 4(y - 4)^2 = -196;$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{49} = -1 - \text{уравнение сопряженной гиперболы;}$$

Полуоси a = 2, b = 7, координаты центра O (-2, 4);

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53};$$

Координаты фокусов $F_{1,2}(-2; 4 \pm \sqrt{53})$

Экцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{53}}{2}$.

Парабола

Определение

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px, p > 0 \tag{14}$$

Число p– расстояние от фокуса до директрисы, называется параметром параболы, O (0;0) — её вершина, точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ — фокус; $r(M)=|F;M|$— фокальный радиус точки M параболы; прямая $D: x=-\frac{p}{2}$— директриса.

$$\frac{r(M)}{\rho(M;D)}=1, \tag{15}$$

где $\rho(M,D)$— расстояние от точки M до директрисы.

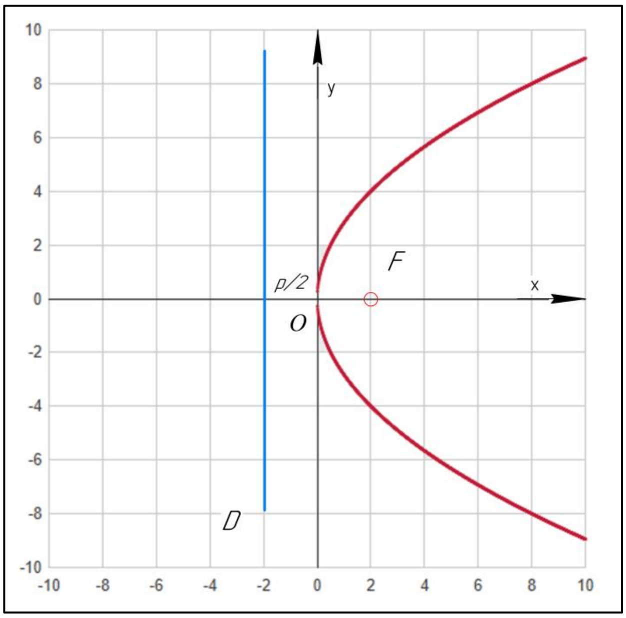


Рис.5

Задача №6.

Составить уравнение параболы, если ее центр O' (-1;2), а директриса D: x=1.

Решение

Расстояние от точки O' до директрисы равно $\frac{p}{2}=2$, следовательно параметрp= 4. Тогда координаты фокуса F (-3;2), а ветви параболы направлены влево. С учетом смещения центра в точку $O'(x_0y_0)$ уравнение примет вид:

$$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$$

Тогда $(y-2)^2=-8(x+1)$— искомое уравнение.

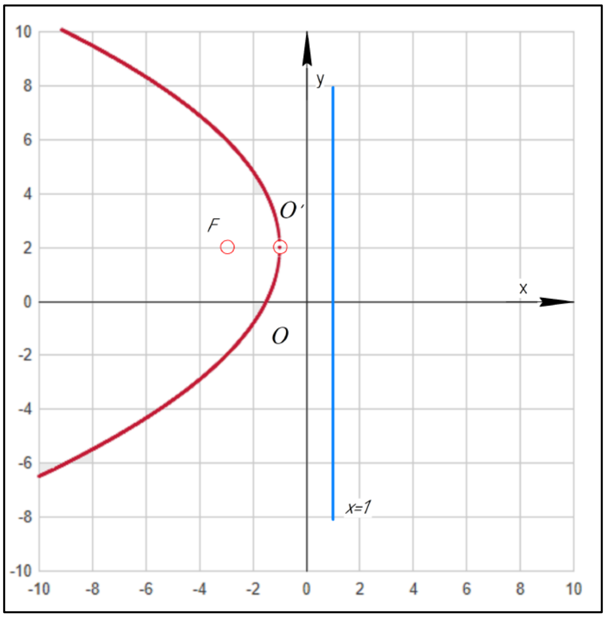


Рис.6

Замечание.

Если парабола задана уравнением $x^2 = 2py$, то ветви параболы направлены вверх, а если уравнением $x^2 = -2py$, то, соответственно, вниз.

Задача №7.

Установить, что следующее уравнение определяет параболу. Найти координаты её вершины и величину параметра p:

$$y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7.$$

Решение.

$$-6y = x^2 - 12x + 42;$$
$$-6y = (x-6)^2 - 36 + 42;$$
$$(x-6)^2 = -6y - 6;$$
$$(x-6)^2 = -6(y+1).$$

Координаты вершины O (6; -1), параметр p = 3.

Парабола расположена вервями вниз.

Задачи для самостоятельной работы:

1) Задано уравнение кривой: $25x^2 - 144y^2 = 3600$. Указать вид кривой , найти ее эксцентриситет, асимптоты и сделать чертеж.
2) Задано уравнение кривой: $25x^2 - 144y^2 + 3600 = 0$. Указать вид кривой, найти ее эксцентриситет, асимптоты и сделать чертеж.
3) Задано уравнение кривой: $25x^2 + 144y^2 = 3600$ Указать вид кривой, найти ее эксцентриситет, сделать чертеж.

4) Задано уравнение кривой: $y^2+4x+4=0$. Определить вид кривой и найти расстояние от фокуса до директрисы. Сделать чертеж.

5) Написать уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до двух заданных точек $F_1(-6;1)$ и $F_2(4;1)$ равен 8. Определить тип кривой. Сделать чертеж.
6) Написать уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до двух заданных точек $F_1(-2;3)$ и $F_2(4;3)$ равна 10. Определить тип кривой. Сделать чертеж.
7) Написать уравнение кривой, каждая точка которой равноудалена от заданной прямой $x=3$ и точки $F(-5,3)$. Определить тип кривой. Сделать чертеж.