МИРЭА
Российский технологический университет

Математический анализ, 2 семестр

Лекция 14

Циркуляция векторного поля

14. Циркуляция векторного поля

Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между криволинейным и поверхностным интегралами.

Сэр Джордж Габриэль Стокс (1819-1903) британский физик и математик. Его научные труды посвящены многим разделам математики, механики и физики. В области математики Стоксу принадлежат работы по векторному анализу, теории рядов и определенных интегралов.

Пусть в некоторой пространственной области задано векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Функции P, Q, R непрерывны и имеют непрерывные частные производные в этой области. Гладкая или кусочно-гладкая двусторонняя поверхность σ, принадлежащая области, ограничена гладким или кусочно-гладким замкнутым контуром Г.

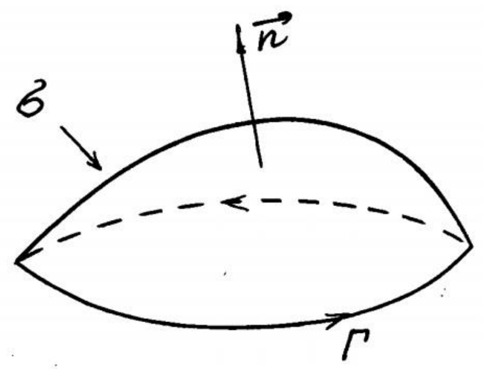


Рис. 14.1.

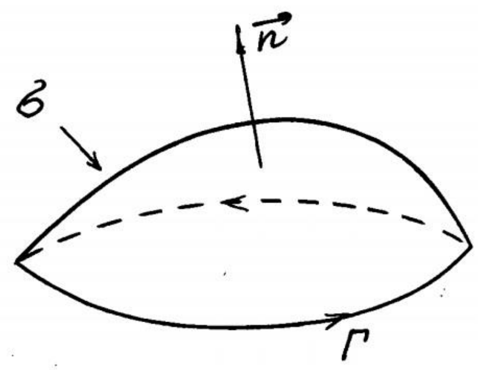


Рис. 14.1.

Направление обхода контура и сторона поверхности выбираются так, что с конца вектора нормали к поверхности обход контура виден происходящим против хода часовой стрелки. При обходе контура поверхность остается слева от наблюдателя. Тогда имеет место формула Стокса:

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{a} \cdot d\vec{l}\right) = \iint_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

Криволинейный интеграл 2 рода по замкнутому контуру называют *циркуляцией* и обозначают Ц. Согласно формуле Стокса, циркуляция векторного поля по границе поверхности равна потоку ротора этого векторного поля через эту поверхность.

Запишем формулу Стокса в координатной форме:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

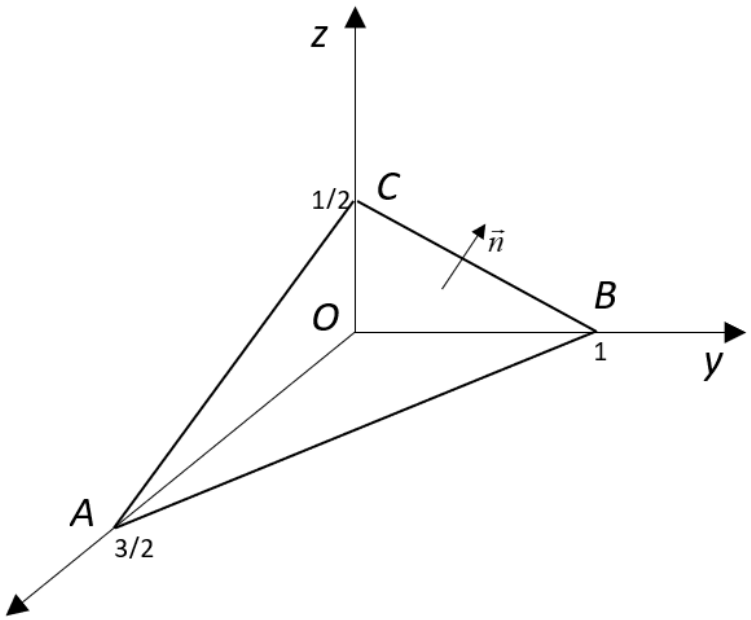
$$= \iint_{\sigma} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) d\sigma$$

Заметим, что формула Грина является частным случаем формулы Стокса. Действительно, пусть векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ параллельно плоскости *xOy*, Г – замкнутый контур, расположенный в плоскости *xOy* и ограничивающий область *D*. Вектор (0,0,1) перпендикулярен плоскости *xOy*, а обход контура совершается против хода часовой стрелки. Формула Стокса в таком случае совпадает с формулой Грина:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (x - y + 3z)\vec{i} + (y - 3x + z)\vec{j} + (x - 3y + z)\vec{k}$ по указанному контуру Г непосредственно и по формуле Стокса, если контур Г задается как пересечение поверхностей:

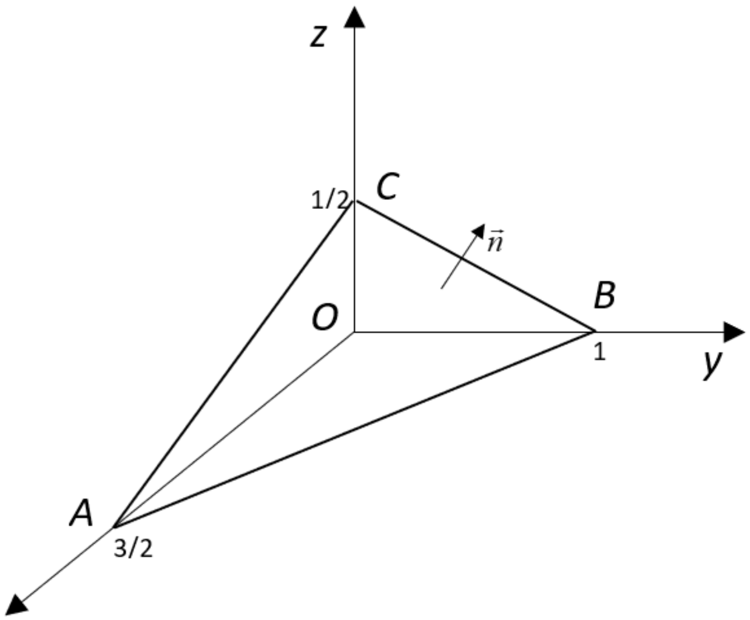


$$Г: \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 3 = 0 \\ x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \end{cases}.$$

а). *Непосредственное вычисление*.

Согласно определению и формуле вычисления, циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру Г равна

$$Ц = \oint_{\Gamma} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} (x - y + 3z)dx + (y - 3x + z)dy + (x - 3y + z)dz$$



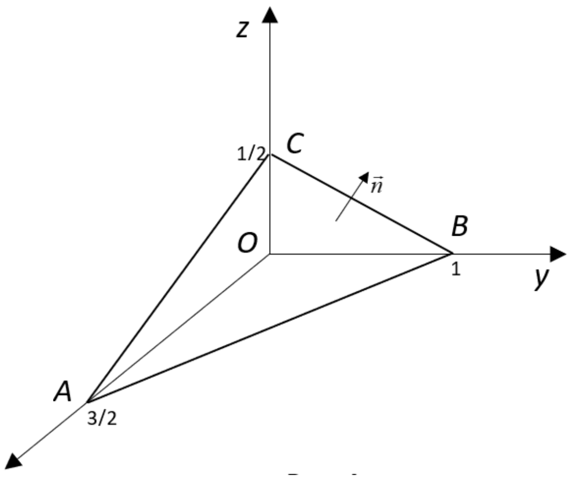
Контуром интегрирования в данном случае является граница треугольника ABC, лежащего в плоскости $2x + 3y + 6z - 3 = 0$. При этом направление обхода контура выбирается таким образом, чтобы область (в нашем случае треугольник ABC), ограниченная данным контуром, оставалась слева. Найдем значение циркуляции, вычисляя криволинейные интегралы по ребрам AB, BC, CA:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \oint_{ABCA} (x - y + 3z)dx + (y - 3x + z)dy + (x - 3y + z)dz =$$

$$= \int\limits_{AB} (x-y+3z)dx + (y-3x+z)dy + (x-3y+z)dz +$$

$$+ \int\limits_{BC} (x-y+3z)dx + (y-3x+z)dy + (x-3y+z)dz +$$

$$+ \int\limits_{CA} (x-y+3z)dx + (y-3x+z)dy + (x-3y+z)dz \, .$$



На ребре AB: $y = \frac{3-2x}{3}, z = 0,$

откуда $dy = -\frac{2}{3}dy, dz = 0.$

Таким образом,

$$\int\limits_{AB} (x-y+3z)dx + (y-3x+z)dy + (x-3y+z)dz = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{0} \left(\frac{37}{9}x - \frac{5}{3} \right) dx = -\frac{17}{8} \, .$$

На ребре BC: $x = 0,\ z = \frac{1-y}{2}$, откуда $dx = 0,\ dz = -\frac{1}{2}dz$.

Таким образом,

$$\int\limits_{BC}(x - y + 3z)dx + (y - 3x + z)dy + (x - 3y + z)dz = \int\limits_{1}^{0}\left(\frac{9}{4}y + \frac{1}{4}\right)dy = -\frac{11}{8}.$$

На ребре CA: $y = 0,\ x = \frac{3-6z}{2}$, откуда $dy = 0,\ dx = -3dz$.

Таким образом,

$$\int\limits_{CA}(x - y + 3z)dx + (y - 3x + z)dy + (x - 3y + z)dz = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{0}(-2z - 3)dz = \frac{7}{4}.$$

В итоге искомая циркуляция будет равна $Ц = -\frac{17}{8} - \frac{11}{8} + \frac{7}{4} = -\frac{7}{4}$.

б). *Вычисление по формуле Стокса*.

Найдем ротор векторного поля

$$\vec{a} = (x - y + 3z)\vec{i} + (y - 3x + z)\vec{j} + (x - 3y + z)\vec{k}$$

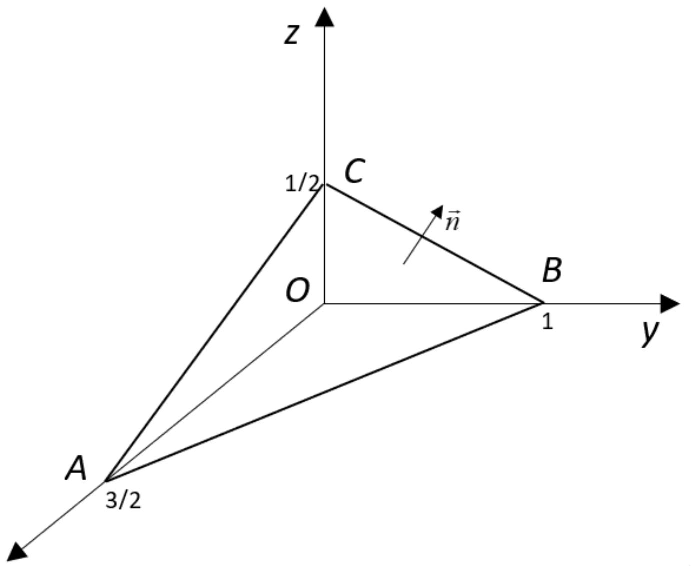
$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - y + 3z & y - 3x + z & x - 3y + z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x - 3y + z) - \frac{\partial}{\partial z}(y - 3x + z)\right)\vec{i} +$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial}{\partial z}(x - y + 3z) - \frac{\partial}{\partial x}(x - 3y + z)\right)\vec{j}\right) +$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}(y - 3x + z) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y + 3z)\right)\vec{k}\right) = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Согласно формуле Стокса, циркуляция векторного поля по контуру Г равна потоку ротора этого поля через поверхность σ



$$\oint\limits_{\Gamma} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \iint\limits_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

где σ – любая поверхность, натянутая на контур Г.

Так как в данном случае контур Г: $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 3 = 0 \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \end{cases}$,

то поверхностью σ является часть плоскости $2x + 3y + 6z - 3 = 0$, ограниченная треугольником ABC.

Найдем единичный вектор нормали к плоскости:

$$\vec{n} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

Направление полученного вектора нормали соответствует направлению обхода контура.

Следовательно, $cos\gamma = \frac{6}{7}$. $\qquad rot\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

Вычислим скалярное произведение $(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) = -2$.

Тогда циркуляция по контуру $ABCA$ будет равна

$$Ц = \iint\limits_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = -2 \iint\limits_{\sigma} d\sigma = -2 \iint\limits_{Dxy} \frac{dxdy}{|cos\gamma|} = -\frac{7}{3} \iint\limits_{\Delta AOB} dxdy =$$

$$= -\frac{7}{3} \int_0^{\frac{3}{2}} dx \int_0^{\frac{3-2x}{3}} dy = -\frac{7}{4}.$$

Получили тот же результат, что и в пункте а), но гораздо быстрее.

Пример 2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$ по замкнутому контуру Г, образованному пересечением поверхности $z^2 = 1 - x - y$ с координатными плоскостями (I октант, рис. 14.2).

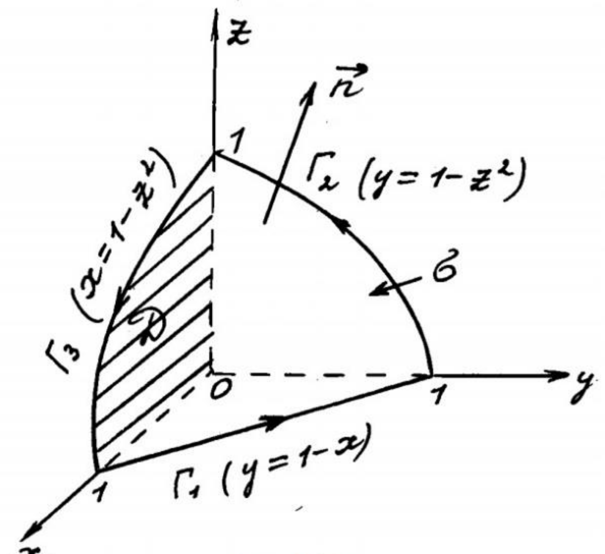


Рис. 14.2.

Вычислим циркуляцию непосредственно. Замкнутый контур состоит из трех частей Γ_1, Γ_2, Γ_3, и циркуляцию представим в виде суммы трех слагаемых:

$$Ц = \int_{\Gamma_1} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) + \int_{\Gamma_2} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) + \int_{\Gamma_3} (\vec{a} \cdot d\vec{l})$$

На отрезке Г$_1$ выбираем *x* за независимую переменную:

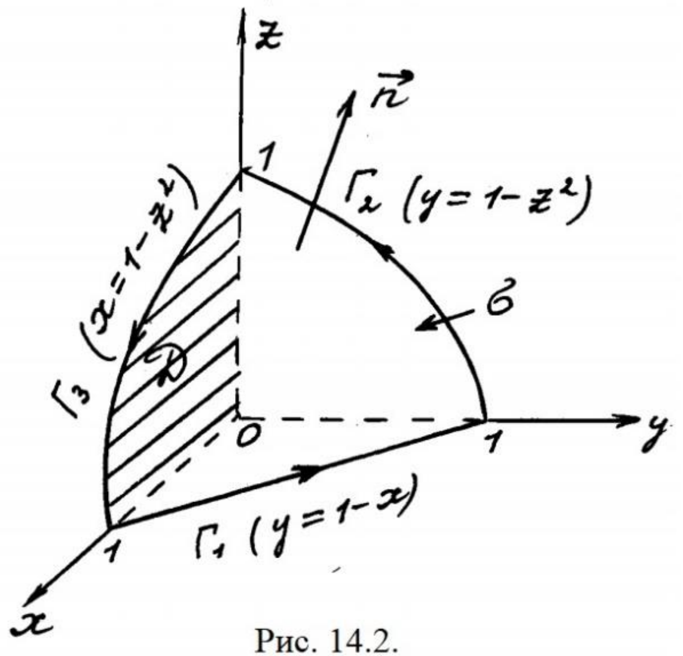


Рис. 14.2.

$$\begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dx = dx \\ dy = -dx \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\left(\vec{a} \cdot d\vec{l}\right) = (1 - x^2)dx$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} \left(\vec{a} \cdot d\vec{l}\right) = \int\limits_{1}^{0} (1 - x^2)dx = -\frac{2}{3}$$

На дуге Γ$_2$ выбираем *z* за независимую переменную:

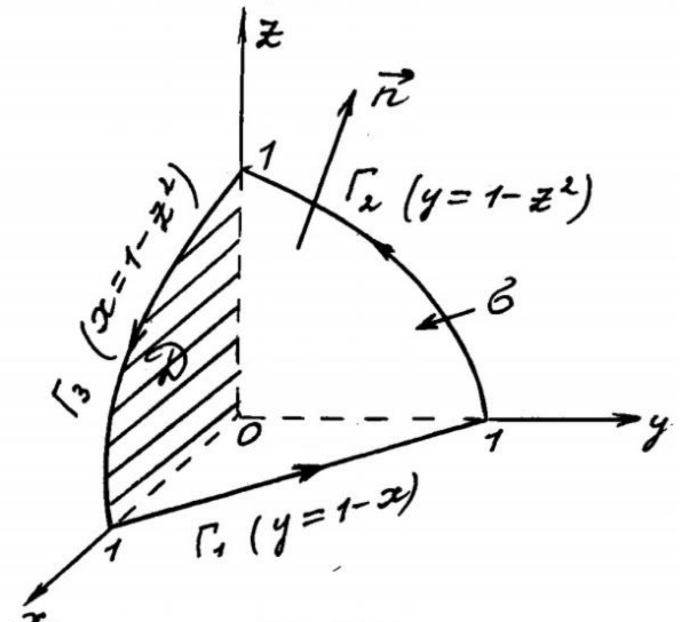


Рис. 14.2.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - z^2 \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} dx = 0 \\ dy = -2zdz \\ dz = dz \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\left(\vec{a} \cdot d\vec{l}\right) = zdz$$

$$\int\limits_{\Gamma_2} \left(\vec{a} \cdot d\vec{l}\right) = \int\limits_0^1 zdz = \frac{1}{2}$$

На дуге $Г_3$ также выбираем z за независимую переменную:

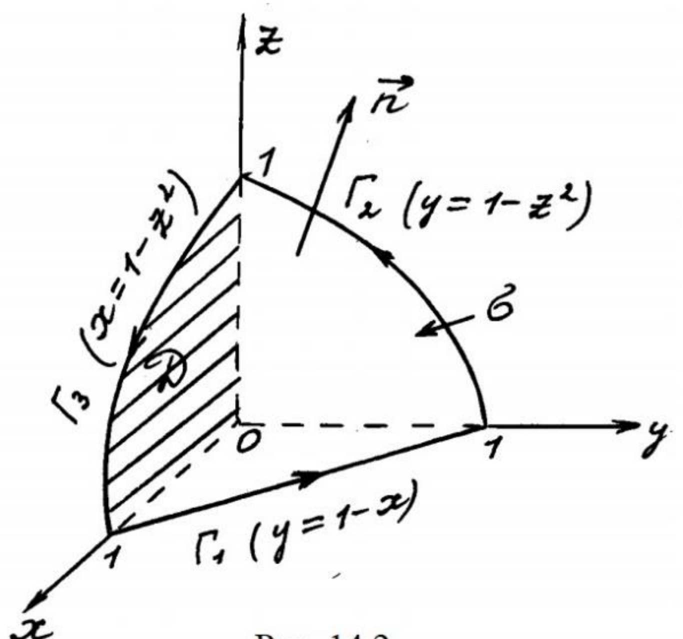


Рис. 14.2.

$$\begin{cases} x = 1 - z^2 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} dx = -2zdz \\ dy = 0 \\ dz = dz \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{\imath} + x^2\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\left(\vec{a} \cdot d\vec{l}\right) = -zdz$$

$$\int\limits_{Г_3} \left(\vec{a} \cdot d\vec{l}\right) = \int\limits_1^0 (-z)dz = \frac{1}{2}$$

$$Ц = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Теперь воспользуемся формулой Стокса.

Вычислим $\text{rot}\vec{a}$: $\vec{a} = \vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$

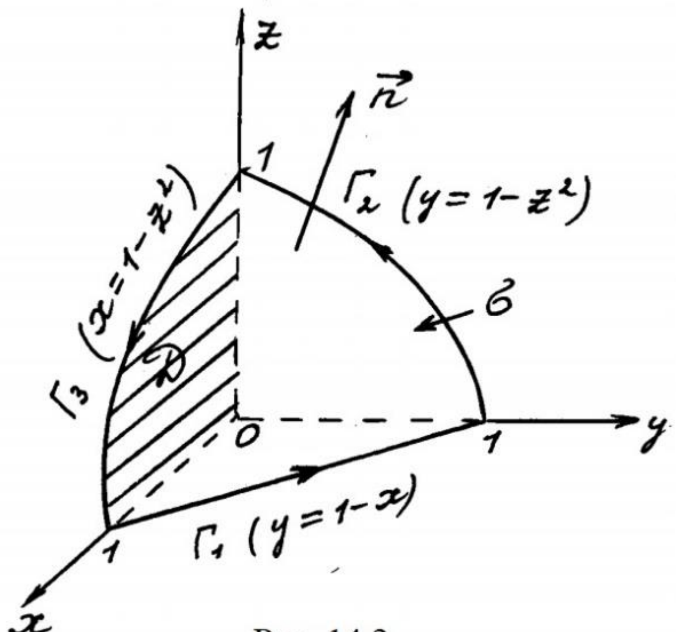


Рис. 14.2.

$$\text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x^2 & z \end{vmatrix} = 2x\vec{k}$$

В качестве поверхности σ, ограниченной контуром Г, возьмем ту часть цилиндра $z^2 = 1 - x - y$, которая расположена в первом октанте. Для вычисления нормали к поверхности, запишем уравнение поверхности в виде:

$$x + y + z^2 = 1$$

Обозначим $F = x + y + z^2$ и вычислим $\text{grad}F$:

$$\text{grad}F = (1,1,2z)$$

Направление полученного вектора соответствует направлению обхода контура. Вычислим единичную нормаль:

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2+4z^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+4z^2}}, \frac{2z}{\sqrt{2+4z^2}}\right)$$

и скалярное произведение $(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n})$, где $\mathrm{rot}\vec{a} = 2x\vec{k}$:

$$(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) = \frac{4xz}{\sqrt{2+4z^2}}$$

Поверхностный интеграл по σ вычислим путем проектирования σ на плоскость xOz:

$$d\sigma = \frac{dxdz}{|\cos\beta|} = \sqrt{2+4z^2}dxdz$$

$$(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n})d\sigma = 4xzdxdz$$

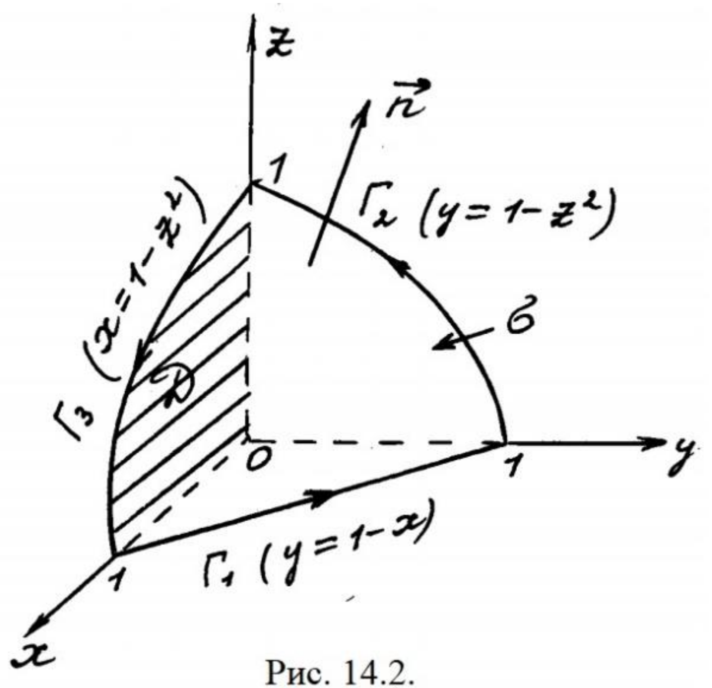


Рис. 14.2.

$$Ц = \iint_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_{D} 4xzdxdz =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z^2} 4xzdx =$$

$$= \int_0^1 2\left(x^2\Big|_0^{1-z^2}\right) zdz = \int_0^1 2z(1-z^2)^2 dz$$

$$= \int_0^1 (2z - 4z^3 + 2z^5) dz = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + xz\vec{j} + x\vec{k}$ по замкнутому контуру, образованному пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ с плоскостью $z = y + 2$.

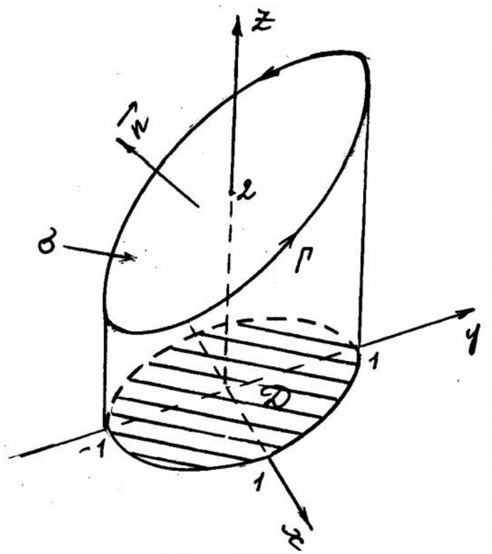


Рис. 14.3.

Вычислим циркуляцию непосредственно. Контур интегрирования Г представляет собой эллипс. Запишем параметрические уравнения этого эллипса:

$$x = \cos t\,, y = \sin t\,, z = \sin t + 2$$

При указанном на рисунке направлении обхода контура t меняется от 0 до 2π.

Выразим координаты вектора $\vec{a} = y\vec{i} + xz\vec{j} + x\vec{k}$ и вектора $d\vec{l}$ через переменную t:

$$\vec{a} = (\sin t\,, \cos t\,(\sin t + 2), \cos t)$$

$$d\vec{l} = (-\sin t\,, \cos t\,, \cos t)dt$$

и найдем скалярное произведение $(\vec{a}\cdot d\vec{l})$:

$$\left(\vec{a}\cdot d\vec{l}\right) = (-\sin^2 t + \cos^2 t\,(\sin t + 2) + \cos^2 t)dt =$$

$$= (\cos 2t + 1 + \cos 2t + \cos^2 t \sin t)dt = (1 + 2\cos 2t + \cos^2 t \sin t)dt$$

Искомая циркуляция равна:

$$\text{Ц} = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos 2t + \cos^2 t \sin t)dt = \left(t + \sin 2t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Вычислим циркуляцию по формуле Стокса. Для этого найдем $\mathrm{rot}\vec{a}$:

$$\vec{a} = y\vec{i} + xz\vec{j} + x\vec{k}$$

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & xz & x \end{vmatrix} = -x\vec{i} - \vec{j} + (z-1)\vec{k}$$

В качестве поверхности σ, ограниченной контуром Г, возьмем эллипс, вырезанный из плоскости $z = y + 2$ цилиндром. Запишем уравнение плоскости в виде:

$$z - y = 2$$

Обозначим $F = z - y$ и найдем $\mathrm{grad}F$:

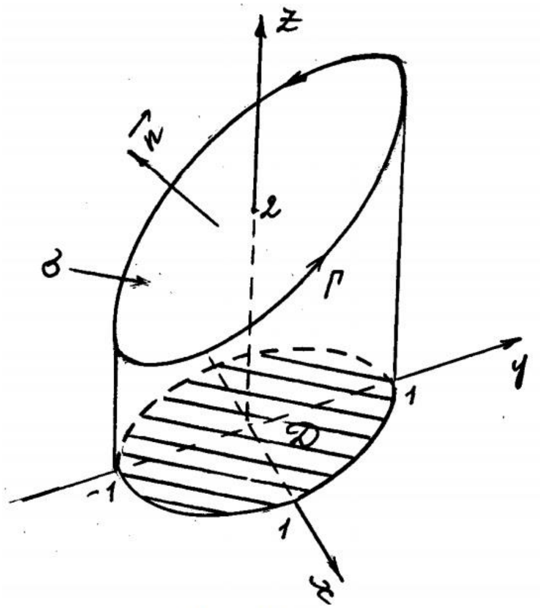


Рис. 14.3.

$$\mathrm{grad}F = (0, -1, 1)$$

Направление полученного вектора соответствует направлению обхода контура. Вычислим единичную нормаль к плоскости:

$$\vec{n} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

и скалярное произведение $(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n})$:

$$\mathrm{rot}\vec{a} = -x\vec{i} - \vec{j} + (z-1)\vec{k},$$

$$\vec{n} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) = \frac{1 + z - 1}{\sqrt{2}} = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

Поверхностный интеграл по σ вычислим путем проектирования σ на плоскость xOy:

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \sqrt{2}dxdy$$

$$(\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n})d\sigma = zdxdy = (y+2)dxdy$$

Проекция σ на плоскость xOy – это круг D с центром в начале координат и радиуса 1. При вычислении двойного интеграла воспользуемся полярными координатами:

$$
\text{Ц} = \iint\limits_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint\limits_{D} (y + 2) dx dy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} (r \sin\varphi + 2) r dr =
$$

$$
= \int\limits_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{3} r^3 \sin\varphi + r^2 \right) \Big|_{0}^{1} d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \sin\varphi + 1 \right) d\varphi = \left(-\frac{1}{3} \cos\varphi + \varphi \right) \Big|_{0}^{2\pi} = 2\pi
$$

Определение ротора векторного поля связано с координатной системой. Пользуясь формулой Стокса, выясним физический смысл ротора и покажем его инвариантность относительно выбора системы координат.

Пусть в некоторой пространственной области задано векторное поле. Зафиксируем току M в этой области и зафиксируем направление с помощью единичного вектора $\vec{n}$. Через точку M проведем произвольную поверхность σ, перпендикулярную $\vec{n}$ и ограниченную контуром Г (рис. 14.4). По формуле Стокса:

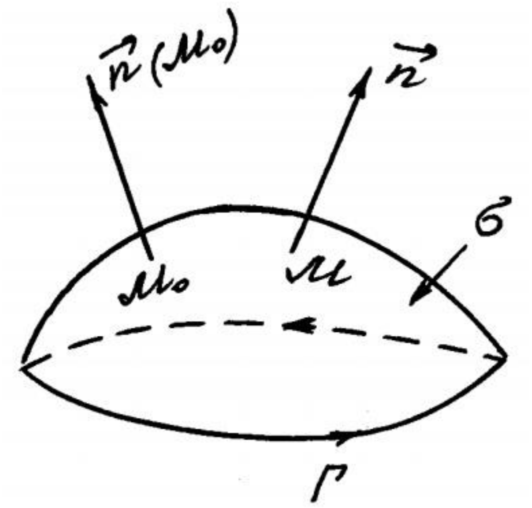


Рис. 14.4.

$$\oint_{\Gamma} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \iint_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

Применим к поверхностному интегралу теорему о среднем, согласно которой, на поверхности σ найдется точка M_0 такая, что

$$\iint_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = (\mathrm{rot}\vec{a}(M_0) \cdot \vec{n}(M_0))\sigma$$

Заменим правую часть формулы Стокса и разделим обе части полученного равенства на площадь σ:

$$(\mathrm{rot}\vec{a}(M_0)\cdot\vec{n}(M_0)) = \frac{1}{\sigma}\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a}\cdot d\vec{l})$$

Переходя к пределу при условии, что поверхность σ стягивается к точке M, получим:

$$(\mathrm{rot}\vec{a}(M)\cdot\vec{n}) = \lim_{\sigma\longrightarrow M}\left(\frac{1}{\sigma}\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a}\cdot d\vec{l})\right)$$

Левая часть этого равенства равна проекции $\mathrm{rot}\vec{a}(M)$ на направление $\vec{n}$, а правую часть можно интерпретировать как плотность циркуляции векторного поля в точке M вокруг заданного направления $\vec{n}$.

$$(\mathrm{rot}\vec{a}(M)\cdot\vec{n}) = \lim_{\sigma\longrightarrow M}\left(\frac{1}{\sigma}\oint_{\Gamma}(\vec{a}\cdot d\vec{l})\right)$$

Следовательно, направление ротора – это направление, циркуляция вокруг которого имеет наибольшую плотность, а значение наибольшей плотности циркуляции равно модулю ротора. Таким образом ротор является инвариантной характеристикой векторного поля.

Рассмотрим некоторые специальные векторные поля.

Определение. Векторное поле $\vec{a}$ называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция $u(x, y, z)$, что

$$\vec{a} = \mathrm{grad}u$$

Функция u называется *потенциальной функцией* векторного поля $\vec{a}$.

Определение. Векторное поле $\vec{a}$ называется безвихревым, если

$$\operatorname{rot}\vec{a} = 0$$

Если функция $u(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то потенциальное поле $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ является безвихревым. Действительно, нетрудно в этом случае проверить, что

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Согласно формуле Стокса, циркуляция векторного поля равна потоку его ротора. Значит, циркуляция потенциального векторного поля равна нулю, а криволинейный интеграл 2 рода не зависит от формы пути интегрирования. Действительно, рассмотрим два пути интегрирования *AIB* и *AIIB*, соединяющие точки *A* и *B* пространственной области (рис. 14.5).

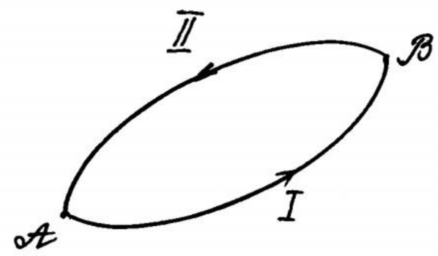


Рис. 14.5.

Для потенциального поля $\vec{a}$ криволинейный интеграл по замкнутому контуру *A I B II A* равен нулю:

$$\int\limits_{AIBIIA} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \int\limits_{AIB} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) + \int\limits_{BIIA} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) =$$

$$= \int\limits_{AIB} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) - \int\limits_{AIIB} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = 0$$

Значит,

$$\int\limits_{AIB} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \int\limits_{AIIB} (\vec{a} \cdot d\vec{l})$$

Определение. Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным*, если $\mathrm{div}\vec{a} = 0$.

Векторное поле $\vec{b}$, которое является вихрем другого векторного поля $\vec{a}$ ($\vec{b} = \mathrm{rot}\vec{a}$) соленоидально. Действительно, пусть

$$\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

Тогда

$$\vec{b} = \mathrm{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\mathrm{div}\vec{b} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

По теореме Гаусса-Остроградского поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции по области, ограниченной этой замкнутой поверхностью. Значит, поток соленоидального векторного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Рассматривая специальные векторные поля, мы использовали дифференциальные операции второго порядка и установили, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0, \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$$

Эти дифференциальные операции можно записать с помощью символического вектора:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla \times \nabla u], \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = (\nabla, [\nabla \times \vec{a}])$$

В следующих разделах математического анализа вы познакомитесь с еще одной дифференциальной операцией второго порядка:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u = (\nabla, \nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Эта дифференциальная операция обозначается

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и называется оператором Лапласа.

Пьер-Симон де Лаплас (1749-1827) французский математик, физик и астроном. Имя Лапласа внесено в список величайших ученых Франции.

Уравнение $\Delta u = 0$ называется уравнением Лапласа, а функции, являющиеся решением этого уравнения, называются гармоническими. Гармонические функции вы будете изучать в следующих разделах математического анализа, а также в курсе дифференциальных уравнений.