Математический анализ, 2 семестр

Лекция 2

Интегрирование рациональных функций

Примеры на повторение материала первой лекции (метод подстановки и метод интегрирования по частям).

$$1. \int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2\,d(x^2) = \frac{1}{2}\sin x^2 + \mathrm{C}$$

$$2. \int x\cos^2 x\,dx = \int x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (x + x\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int x\cdot\cos 2x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx, & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\cdot\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx\right) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+e^x} = t, & x = \ln(t^2-1) \\ 1+e^x = t^2, & dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,dt}{t(t^2-1)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C$$

$$4.\ \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx = \begin{bmatrix} u = \ln(\sin x)\,, \qquad du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x},\ \ v = -ctgx \end{bmatrix} =$$

$$= -\operatorname{ctg} x \ln(\sin x) + \int \operatorname{ctg} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}dx =$$

$$= -\operatorname{ctg} x \ln(\sin x) + \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}dx =$$

$$= -\operatorname{ctg} x \ln(\sin x) + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\operatorname{ctg} x \ln(\sin x) - \operatorname{ctg} x - x + C$$

$$5.\ I=\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\begin{bmatrix} u=\sqrt{1+x^2}, & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv=dx, & v=x \end{bmatrix}=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-I$$

$$I=\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)+C$$

$$6. \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t, & x = t^2 \\ & dx = 2tdt \end{bmatrix} = 2\int t \operatorname{arctg} t\,dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} t\,, du = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ dv = tdt, v = \dfrac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} = 2\left(\frac{1}{2}t^2 \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}dt\right) =$$

$$= t^2 \cdot \operatorname{arctg} t - \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = t^2 \operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

3. Интегрирование рациональных функций

Определение 1. Функция $R(x)$ называется *дробно-рациональной функцией*, или *рациональной дробью*, если она представляет собой отношение двух многочленов: $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x) -$ многочлен степени m, $Q_n(x) -$ многочлен степени n.

Если $m < n$, то дробь $R(x)$ называется правильной.

Если $m \geq n$, то дробь $R(x)$ называется неправильной.

Неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби: $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = N(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, где

$N(x) -$ многочлен, называемый целой частью рациональной дроби, получен при делении «столбиком» $P(x)$ на $Q(x)$;

$r(x) -$ остаток от деления, степень которого меньше n.

Пример: $R(x) = \frac{x^3+5x^2-2x+1}{x-2}$.

Данная рациональная функция является неправильной дробью. Разделим многочлен $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ на многочлен $Q(x) = x - 2$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +5x^2 & -\ 2x & +\ 1 & x-2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & & & x^2+7x+12. \\ \cline{1-2}
 & 7x^2 & -\ 2x & +\ 1 & \\
 & 7x^2 & -14x & & \\ \cline{2-3}
 & & 12x & +\ 1 & \\
 & & 12x & -24 & \\ \cline{3-4}
 & & & 25 &
\end{array}
$$

Следовательно, $N(x) = x^2 + 7x + 12$, $r(x) = 25$,

$R(x) = x^2 + 7x + 12 + \frac{25}{x-2}$.

Всякий многочлен $Q_n(x)$ степени n

$$Q_n(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$$

имеет ровно n корней, действительных и комплексных, с учетом их кратности.

Если многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $b = u + iv$ кратности k, то и сопряженное число $\bar{b} = u - iv$ является корнем кратности k.

Всякий приведенный многочлен $Q(x)$, имеющий действительные корни $a_1, a_2, \cdots a_k$ кратности $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ и комплексные корни $b_1, \overline{b_1}\ b_2, \overline{b_2} \cdots b_r, \overline{b_r}$ кратности $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r$, представляется в виде:

$Q(x) =$

$$= (x - a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots (x - a_k)^{\alpha_k} \cdot (x - b_1)^{\beta_1} \left(x - \overline{b_1}\right)^{\beta_1} \cdots (x - b_r)^{\beta_r} \left(x - \overline{b_r}\right)^{\beta_r}.$$

Так как $(x-b_1)\left(x-\overline{b_1}\right)=x^2+p_1x+q_1$ – многочлен второй степени с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом, то $Q(x)$ можно представить в виде:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\cdots(x-a_k)^{\alpha_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r},$$

где $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i+2\sum_{i=1}^{r}\beta_i=n$.

Простыми (простейшими) дробями называются дроби следующих четырех типов:

$$I.\ \frac{A}{x-a}\qquad II.\frac{A}{(x-a)^k}\qquad III.\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\qquad IV.\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

Теорема (*о разложении правильной рациональной дроби*). Любая правильная дробь может быть представлена, причем единственным образом, в виде суммы конечного числа простых дробей.

Эта сумма зависит от разложения знаменателя дроби на множители. Для простоты (но не теряя при этом общности) можно считать, что знаменатель является приведенным многочленом, т.е. его старший коэффициент равен 1. Тогда в его разложении могут присутствовать множители двух видов: $(x-a)^k$ и $(x^2+px+q)^k$, где $k=1,2,\ldots$, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. Множителям вида $(x-a)^k$ в разложении дроби будет соответствовать сумма простых дробей:

$$\frac{\mathrm{A}_1}{x-a}+\frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{\mathrm{A}_k}{(x-a)^k}$$

а множителям вида $(x^2+px+q)^k$ будет соответствовать сумма простых дробей:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$$

Следствие. Интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простых дробей.

Для иллюстрации теоремы приведем вид разложения для некоторых правильных дробей.

Примеры.

1. $$\frac{5x-1}{(x+3)(x+4)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4}$$

2. $$\frac{5x-1}{(x+3)(x+4)x(x-2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2}$$

3. $$\frac{5x^2-1}{(x+3)(x+4)^3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{(x+4)^2}+\frac{D}{(x+4)^3}$$

4. $$\frac{5x-1}{(x^2+x+1)x(x-2)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2}$$

5. $$\frac{5x-1}{(x^2+x+1)^2x(x-2)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2}$$

6. $$\frac{5x-1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Вычисление коэффициентов разложения правильной дроби на сумму простых дробей.

Пример. Найти разложение дроби

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-4)}$$

на сумму простых дробей.

Используя множители знаменателя, запишем разложение дроби на сумму простых дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4}$$

Для вычисления коэффициентов приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+2)}{(x+2)(x-4)}$$

И приравняем числители левой и правой частей:

$2x+1 = A(x-4)+B(x+2).$

Далее можем использовать 2 метода нахождения неопределенных коэффициентов.

I. *Метод частных значений*.

Полагая в тождестве $2x+1 = A(x-4)+B(x+2)$ $x=-2$, получим:

$$-3 = -6A, A = \frac{1}{2}.$$

Полагая в тождестве $2x + 1 = A(x - 4) + B(x + 2)$ $x = 4$, получим

$$9 = 6B, B = \frac{3}{2}.$$

Разложение дроби на сумму простых дробей получено:

$$\frac{2x + 1}{(x + 2)(x - 4)} = \frac{\frac{1}{2}}{x + 2} + \frac{\frac{3}{2}}{x - 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x - 4}.$$

Метод частных значений удобно применять, когда количество удобных значений переменной x совпадает с количеством неизвестных коэффициентов.

II. *Метод неопределенных коэффициентов*.

Равенство $2x + 1 = A(x - 4) + B(x + 2)$ перепишем в виде:

$2x + 1 = (A + B)x + (-4A + 2B)$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, для коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^1: \ 2 = A + B \\ x^0: \ 1 = -4A + 2B \end{cases}$$

откуда $A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}$.

$$\frac{2x + 1}{(x + 2)(x - 4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x - 4}$$

Иногда удобно комбинировать эти два метода нахождения неопределенных коэффициентов: сначала использовать удобные значения переменной x, а затем для нахождения оставшихся коэффициентов составлять систему уравнений.

Итак, задача интегрирования рациональной функции сводится к интегрированию целой части рациональной дроби (если дробь неправильная) и интегрированию правильной рациональной дроби, которая раскладывается на сумму простых (или простейших) дробей.

Рассмотрим интегрирование простейших дробей:

$$I.\ \frac{A}{x-a} \quad II. \frac{A}{(x-a)^k} \quad III. \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \qquad IV.\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, k=2,3,\ldots$$

Здесь предполагается, что квадратный трехчлен $P_2(x)=x^2+px+q$ не имеет действительных корней, т.е. $p^2-4q<0,$ или $q-\frac{p^2}{4}>0.$

Дроби типа I и II интегрируются следующим образом.

$$I. \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

$$II. \int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx =$$

$$= \frac{A}{-k+1}\cdot (x-a)^{-k+1} + C = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

При интегрировании дробей III и IV типов в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

Поскольку $q - \frac{p^2}{4} > 0$, то обозначим $q - \frac{p^2}{4} = h^2$. Замена $t = x + \frac{p}{2}$ сводит дробь типа III

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \text{ к виду } \frac{At + M}{t^2 + h^2}$$

А дробь типа IV

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} \text{ к виду } \frac{At + M}{(t^2 + h^2)^k}, \qquad \text{где } M = B - \frac{Ap}{2}.$$

Тогда для дроби III типа имеем:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \begin{bmatrix} t = x + \frac{p}{2} \\ x = t - \frac{p}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{At + M}{t^2 + h^2} dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2 + h^2)}{t^2 + h^2} + M\int \frac{dt}{t^2 + h^2} = \frac{A}{2}\ln(t^2 + h^2) + \frac{M}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{M}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$$

А для дроби IV типа:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}dx = \int \frac{At + M}{(t^2 + h^2)^k}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2 + h^2)}{(t^2 + h^2)^k} + M\int \frac{dt}{(t^2 + h^2)^k} = -\frac{A}{2(k-1)}\frac{1}{(t^2 + h^2)^{k-1}} + MI_k$$

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + h^2)^k} \quad ,k = 2,3, \ldots$$

Для вычисления интеграла

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + h^2)^k} \ , k = 2,3, \dots$$

воспользуемся методом интегрирования по частям и получим рекуррентную формулу:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + h^2)^k} = \frac{1}{h^2} \int \frac{t^2 + h^2 - t^2}{(t^2 + h^2)^k} dt =$$

$$= \frac{1}{h^2} \int \frac{dt}{(t^2 + h^2)^{k-1}} - \frac{1}{h^2} \int t \frac{tdt}{(t^2 + h^2)^k} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = t, \qquad du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(t^2 + h^2)^k}, \ \ v = -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{(t^2 + h^2)^{k-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{h^2} I_{k-1} - \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{2(k-1)} \frac{t}{(t^2 + h^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + h^2)^{k-1}} \right) =$$

$$=\frac{1}{h^2}I_{k-1}-\frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{2(k-1)}\frac{t}{(t^2+h^2)^{k-1}}+\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{h^2}\left(1-\frac{1}{2(k-1)}\right)I_{k-1}+\frac{1}{2(k-1)h^2}\frac{t}{(t^2+h^2)^{k-1}}$$

Пример интегрирования простой дроби III типа.

$$\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{3x+1}{(x+1)^2+9}dx=\begin{bmatrix}x+1=t\\x=t-1\\dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{3t-2}{t^2+9}dt=$$

$$=3\int\frac{t}{t^2+9}dt-2\int\frac{1}{t^2+9}dt=\frac{3}{2}ln(t^2+9)-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}ln(x^2+2x+10)-\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C$$

Пример интегрирования простой дроби IV типа.

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \begin{bmatrix} h=1 \\ k=3 \end{bmatrix} = I_3.$$

Напомним рекуррентную формулу:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right) I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)h^2} \frac{t}{(t^2+h^2)^{k-1}}$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \begin{bmatrix} h=1 \\ k=2 \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) I_1 + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2} arctgt + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} + C$$

$$I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \begin{bmatrix} h=1 \\ k=3 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{4} \frac{t}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}arctgt + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}\right) + \frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2} + C =$$

$$= \frac{3}{8}arctgt + \frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2} + C$$

<u>Схема интегрирования рациональной функции</u>.

1. Определить тип рациональной дроби (простая, правильная, неправильная).
2. Если дробь неправильная, необходимо выделить целую часть и представить подынтегральную функцию в виде суммы многочлена и правильной дроби.
3. Все правильные дроби разложить на простейшие.
4. Проинтегрировать полученные слагаемые.

Примеры. Вычислить интеграл.

1.

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} dx.$$

Подынтегральная функция – неправильная дробь. Выделим целую часть и остаток путем деления столбиком числителя на знаменатель:

$$\frac{x^4 + 3x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} = x^2 + 4 + \frac{-5x + 7}{(x-1)(x+1)}$$

Полученную правильную дробь разложим на сумму простых дробей:

$$\frac{-5x + 7}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Для вычисления коэффициентов приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители левой и правой частей:

$-5x + 7 = A(x+1) + B(x-1).$

Используем метод частных значений:

$$-5x + 7 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

$$x = 1:\ 2 = 2A, A = 1$$

$$x = -1:\ 12 = -2B, B = -6\ .$$

Таким образом,

$$\frac{-5x + 7}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{6}{x + 1}$$

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} dx = \int \left(x^2 + 4 + \frac{1}{x - 1} - \frac{6}{x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4x + ln|x - 1| - 6ln|x + 1| + C = \frac{x^3}{3} + 4x + ln\left|\frac{x - 1}{(x + 1)^6}\right| + C$$

2.

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx.$$

Разложим знаменатель правильной дроби

$$\frac{x+7}{x^2-x-2}$$

на множители:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

а дробь на сумму простых дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x+7}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

Для вычисления коэффициентов приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

И приравняем числители левой и правой частей:

$$x + 7 = A(x+1) + B(x-2)$$

Полагая в этом тождестве $x = 2$, получим $9 = 3A$, $A = 3$.
Полагая $x = -1$, получим $6 = -3B$, $B = -2$.
Разложение дроби на сумму простых дробей получено:

$$\frac{x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x+7}{x^2 - x - 2} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}\right) dx =$$

$$= 3\, ln\,|x-2| - 2\, ln\,|x+1| + C = ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}\right| + C$$

3.

$$\int \frac{7x-11}{(x-3)^2(x+2)}dx$$

Знаменатель дроби разложен на множители, запишем разложение дроби на сумму простых дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{7x-11}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Как и в предыдущем примере, для вычисления коэффициентов получим равенство

$$7x - 11 = A(x-3)(x+2) + B(x+2) + C(x-3)^2,$$

которое перепишем в виде

$$7x - 11 = (A + C)x^2 + (-A + B - 6C)x + (-6A + 2B + 9C)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, для коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$x^2\colon\ A + C = 0$$

$$x^1\colon\ -A + B - 6C = 7$$

$$x^0\colon\ -6A + 2B + 9C = -11$$

Из которой следует, что $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$. Вычисляем искомый интеграл:

$$\int \frac{7x - 11}{(x-3)^2(x+2)}dx = \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \ln|x - 3| - \frac{2}{x-3} - \ln|x + 2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| - \frac{2}{x-3} + C$$

4.

$$\int \frac{x^2 - 16x - 4}{x^4 - 16} dx$$

Разложим дробь на сумму простых дробей:

$$\frac{x^2 - 16x - 4}{x^4 - 16} = \frac{x^2 - 16x - 4}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Коэффициенты определим из равенства:

$$x^2 - 16x - 4 =$$

$$= A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4)$$

Скомбинируем приемы, примененные в предыдущих примерах:

$$x = 2: \quad 4 - 32 - 4 = A \cdot 4 \cdot 8 \Rightarrow A = -1$$

$$x = -2: \; 4 + 32 - 4 = B \cdot (-4) \cdot 8 \Rightarrow B = -1$$

$$x^3: \quad A + B + C = 0 \Rightarrow -1 - 1 + C = 0 \Rightarrow C = 2$$

$$x^0:\quad 8A - 8B - 4D = -4 \Rightarrow -4D = -4 \Rightarrow D = 1$$

Искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x^2 - 16x - 4}{x^4 - 16} = -\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

Вычислим интеграл:

$$\int \frac{x^2 - 16x - 4}{x^4 - 16} dx = \int \left(-\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right) dx =$$

$$= -\ln|x-2| - \ln|x+2| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x^2+4}{x^2-4}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

5.

$$\int \frac{x+1}{x^4+2x^3+4x^2}\,dx$$

Разложим дробь на сумму простых дробей:

$$\frac{x+1}{x^4+2x^3+4x^2}=\frac{x+1}{x^2(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+4}$$

$$Ax(x^2+2x+4)+B(x^2+2x+4)+(Cx+D)x^2=x+1$$

$$\begin{cases} x^3:\ \ A+C=0 \\ x^2:\ \ 2A+B+D=0 \\ x^1:\ \ 4A+2B=1 \\ x^0:\ \ 4B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-C \\ 2A+D=-\frac{1}{4} \\ 4A+\frac{1}{2}=1 \\ B=\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{8} \\ B=\frac{1}{4} \\ C=-\frac{1}{8} \\ D=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{x+1}{x^4+2x^3+4x^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{-\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}}{x^2+2x+4}\right)dx=$$

$$= \frac{1}{8} ln|x| - \frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \int \frac{x+4}{(x+1)^2+3} dx + C_1$$

Вычислим отдельно

$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2+3} dx = \begin{bmatrix} x+1=t \\ dx=dt \\ x=t-1 \end{bmatrix} = \int \frac{t+3}{t^2+3} dt =$$

$$= \frac{1}{2} ln(t^2+3) + \frac{3}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2} ln(x^2+2x+4) + \frac{3}{\sqrt{3}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C_2$$

Итак,

$$\int \frac{x+1}{x^4+2x^3+4x^2} dx =$$

$$=\frac{1}{8}ln|x|-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}ln(x^2+2x+4)+\sqrt{3}arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

В некоторых случаях при интегрировании рациональных дробей можно избежать разложения правильных дробей на простые. Рассмотрим примеры.

$$1.\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C$$

$$2. \int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \int \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x^2dx}{x^6+1} =$$

$$= \mathrm{arctg}x + \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^6+1} = \mathrm{arctg}x + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3) + C$$