ЛЕКЦИЯ 7. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Определение скалярного произведения векторов.

2. Геометрические свойства скалярного произведения.

3. Алгебраические свойства скалярного произведения.

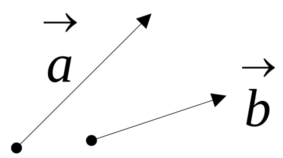
4. Скалярное произведение векторов, заданных координатами.

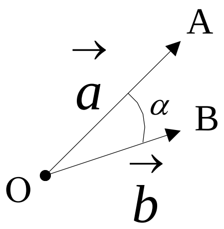
5. Направляющие косинусы вектора.

7.1. Определение скалярного произведения векторов

Пусть заданы не нулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Отложим их от некоторой точки *O*:





Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют некоторый угол (возможно равный 0° если векторы сонаправлены или 180°, если векторы противоположно направлены).

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ЧИСЛО (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы одни из векторов нулевой, то угол между векторами не определен, скалярное произведение по определению, равно нулю.

Обозначение: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$ **(1)**

7.2. Геометрические свойства скалярного произведения

1°. $(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ или один из векторов есть нулевой вектор.

Доказательство:

Пусть векторы перпендикулярны $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \angle(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$.

$\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$ Если одни из векторов есть нулевой вектор, то его модуль равен нулю и, очевидно, $(\vec{a}, \vec{b})$=0.

Пусть теперь $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 0$. Это означает, что либо $\vec{a} = \vec{0}$, либо $\vec{b} = \vec{0}$, либо $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

2°. Не равные нулю векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют острый угол, если $(\vec{a}, \vec{b}) > 0$ и тупой угол, если $(\vec{a}, \vec{b}) < 0$.

7.3. Алгебраические свойства скалярного произведения

1°. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

Доказательство. $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(-\alpha) = (\vec{b}, \vec{a})$, так как функция $\cos x$ – четная.

2°. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$.

3°. $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Доказательство проведем для случая $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$.

Пусть $\lambda > 0$.

$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}}) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$, так как $(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, то $\cos(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Случай для $\lambda < 0$ предлагается доказать самостоятельно.

4°. $(\vec{a}, \vec{a}) = \left(\vec{a}\right)^2 \geq 0$ – ***скалярный квадрат***. Причем, равенство нулю возможно только в случае, когда $\vec{a} = \vec{0}$.

7.4. Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Пусть векторы $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ и $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ заданы своим разложением по базису, тогда координаты этих векторов - $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Теорема 1. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданных своими координатами, вычисляется по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \textbf{(2)}$$

Доказательство.

Запишем скалярное произведение векторов в их разложении по базису:

$(\vec{a}\,\vec{b}) = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$, воспользуемся свойством **2°:**

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 \vec{i}, b_1 \vec{i}) + (a_1 \vec{i}, b_2 \vec{j}) + (a_1 \vec{i}, b_3 \vec{k}) +$$

$$+ (a_2 \vec{j}, b_1 \vec{i}) + (a_2 \vec{j}, b_2 \vec{j}) + (a_2 \vec{j}, b_3 \vec{k}) + (a_3 \vec{k}, b_1 \vec{i}) + (a_3 \vec{k}, b_2 \vec{j}) + (a_3 \vec{k}, b_3 \vec{k}) =$$

$$= a_1 b_1 (\vec{i}, \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i}, \vec{j}) + a_1 b_3 (\vec{i}, \vec{k}) + a_2 b_1 (\vec{j}, \vec{i}) + a_2 b_2 (\vec{j}, \vec{j}) + a_2 b_3 (\vec{j}, \vec{k}) +$$

$$+ a_3 b_1 (\vec{k}, \vec{i}) + a_3 b_2 (\vec{k}, \vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k}, \vec{k}).$$

Так как базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ попарно взаимно перпендикулярны, то их попарные скалярные произведения равны нулю:

$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0$.

$(\vec{i}, \vec{i}) = \underbrace{|\vec{i}|}_{1} \cdot \underbrace{|\vec{i}|}_{1} \cdot \underbrace{\cos \underbrace{\angle(\vec{i}, \vec{i})}_{0^\circ}}_{1} = 1$, аналогично $(\vec{j}, \vec{j}) = 1, (\vec{k}, \vec{k}) = 1$.

Получаем, $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, что и требовалось доказать.

Докажем рассмотренную ранее формулу для вычисления длины вектора, заданного своими координатами.

Пусть задан некоторый вектор $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$.

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = |\vec{a}|^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

Следствие 1. Косинус угла между ненулевыми векторами может быть найден по формуле: $cos\alpha = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ **(3)**

Задача 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$.

Решение. $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 1$.

Ответ. $(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Задача 2. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$.

Решение. Скалярное произведение векторов было найдено при решении предыдущей задачи: $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 1$.

Найдем модули этих векторов:

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\ .$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1} = \sqrt{14}$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{28}},\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\sqrt{28}}{28}\right).$$

Ответ. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{28}}{28}\right)$.

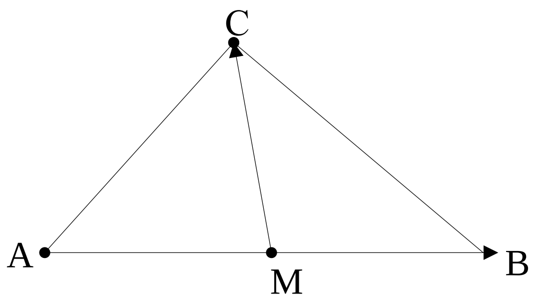
Задача 3. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(1;1;0)$, $B(-1;-5;2)$, $C(-1;2;3)$. Найти угол между медианой CM и стороной AB.

Решение.

Точка M делит сторону AB пополам, т.е. в отношении 1:1, $\lambda = 1$.

$$x_M = \frac{1-1}{2} = 0 \quad y_M = \frac{1-5}{2} = -2 \quad z_M = \frac{0+2}{2} = 1$$

$M(0;\,-2;\,1)$. $\vec{MC} = (-1,4,2)$,



$$\left|\vec{MC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{21} \quad \vec{MB} = (-1,-3,1), \quad \left|\vec{MB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}.$$

$$cos\angle(\vec{MB}, \vec{MC}) = \frac{1-12+2}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{11}} = \frac{-9}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{11}} = \frac{-9}{\sqrt{231}} = \frac{-3\sqrt{231}}{77}.$$

Ответ. $\angle(\vec{MB}, \vec{MC}) = \pi - \arccos\left(\frac{3\sqrt{231}}{77}\right)$.

7.5. Направляющие косинусы вектора

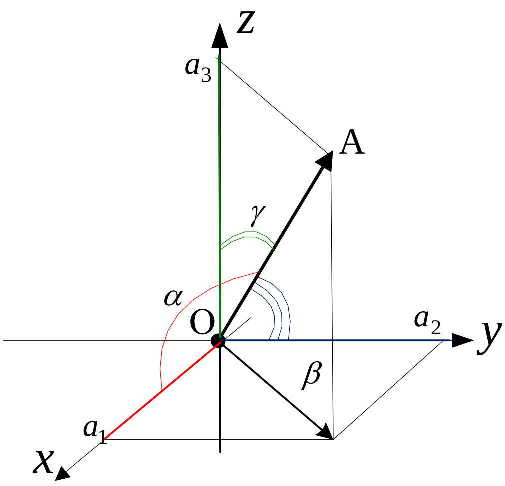
Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортонормированный базис и задан вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz* углы α, β, γ соответственно, тогда

$$a_1 = \left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|},$$

$$a_2 = \left|\vec{a}\right|\cdot\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a_2}{\left|\vec{a}\right|},$$

$$a_3 = \left|\vec{a}\right|\cdot\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a_3}{\left|\vec{a}\right|}.$$



$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\vec{a}$. Для них выполняется соотношение $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Задача 4. Какие углы образует с осями координат вектор $\vec{a} = (-3;0;\sqrt{3})$.

Решение.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{9+0+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$cos\alpha = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150^\circ.$$

$$cos\beta = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ.$$

$$cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 60^\circ.$$

Ответ. $150^\circ; 90^\circ; 60^\circ$.