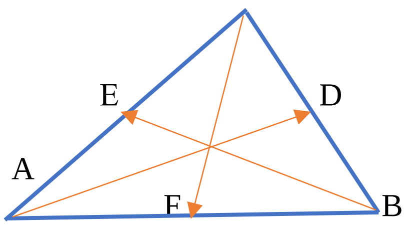
Семинар 7. Векторы. Линейные операции над векторами. Условие коллинеарности и перпендикулярности векторов. Разложение по базису. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ: Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами Лекции 6 и 7. Выписать основные определения и свойства.

Пример 1. Дан треугольник ABC. $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{CF}$- медианы;

Доказать, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

Решение.

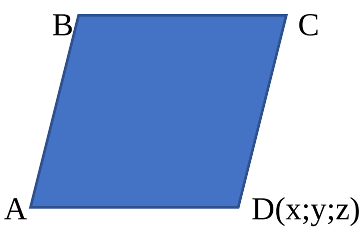


$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$
$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$
$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ - $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Пример 2. Даны три вершины параллелограмма ADCD,
A(1;1;4); B(2;3;-1); C(-2;2;0). Найти координаты вершины D.

Решение.



$\overrightarrow{AB}$= $\overrightarrow{DC}$ => (1;2;-5) = (-2-x; 2-y;-z) => x= -3; y=0; z=5.
Ответ: D (-3;0;5)

Пример 3. Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, и $\vec{d} = \vec{b} - 2\vec{a}$, построенные на векторах $\vec{a}(1; -2; 5)$ и $\vec{b}(3; -1; 0)$

Решение: $\vec{c} = 4((1; -2; 5) - 2(3; -1; 0) = (-2; -6; 20)$;
$\vec{d} = (3; -1; 0) - 2(1; -2; 5)=(1; 3; -10)$

$\frac{-2}{1} = \frac{-6}{3} = \frac{20}{-10}$ => Векторы коллинеарны и $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{c}$

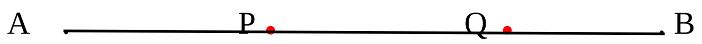
Пример 4. В треугольнике АВС известны координаты вершин А(1;0;-1); В(2;2;1) и дана точка пересечения медиан Е(-1;2;1). Найти координаты точки С.

Решение. Пусть координаты точки С(x;y;z). Воспользуемся формулой нахождения координат точки пересечения медиан:

(1+2+x)/3 = -1; (0+2+y)/3 = 2; (-1+1+z)/3 = 1; Находим x= -6; y=4; z=3;

Ответ: С(-6;4;3)

Пример 5. Отрезок АВ, А(3;-2) и В(6;4) разделили на три равные части. Найти координаты точек деления.



Решение.

1) Найдем координаты точки P. λ_1 =AP/PB=1/2=0.5;
   $x_1 = (3 + \frac{1}{2}\cdot 6)/(1+0.5)=4$; $y_1 = (-2 + \frac{1}{2}\cdot 4)/(1+0.5)=0$
   $\boldsymbol{P(4;0)}$
2) Найдем координаты точки Q. λ_2 =AQ/QB=2;
   $x_1 = (3 + 2\cdot 6)/(1+2)=5$; $y_1 = (-2 + 2\cdot 4)/(1+2)=2$
   $\boldsymbol{Q(5;2)}$

   Ответ: $P(4;0);Q(5;2)$

Пример 6.

Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис в пространстве геометрических векторов. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$\vec{a} = (1,2,1)$; $\vec{b} = (0,-1,1)$; $\vec{c} = (2,0,1)$; $\vec{d} = (5,8,2)$

<u>Решение:</u> Любые три линейно независимые вектора в пространстве образуют базис. Проверим на линейную независимость векторы $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$. Составим определитель из координат векторов, записав их по столбцам.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$= -1+0+4+2-0-0=5$\neq 0$ => $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$- линейно независимые, => они образуют базис => вектор $\vec{d}$ можно разложить по этому базису, т.е. существуют числа x,y,z, такие что:

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Запишем в координатах:

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, получаем систему: $\begin{cases} x \quad + 2z = 5 \\ 2x - y \quad = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$;

Данную систему можно решить любым способом. Решим ее по формулам Крамера.
Δ= 5; (уже найден);

Δ_1= $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$= -5+0+16+4-0-0=15; Δ_2= $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$= 8+0+8-16-10-0= -10;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = -2+0+10+5-0-8 = 5;

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5}$=3; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{5}$ = -2; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5}$ = 1; т.е.
$\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

Проверка: $3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, верно!

Пример 7. Пусть $|\overline{a}| = 3$; $|\overline{b}| = 5$; $\overline{c} = \overline{a} + \alpha\overline{b}$; $\overline{d} = \overline{a} - \alpha\overline{b}$; При каком α; $\overline{c}$ перпендикулярен $\overline{d}$?

Решение.

$\overline{c} \perp \overline{d} \Leftrightarrow (\overline{c}; \overline{d})$=0; $(\overline{a} + \alpha\overline{b}, \overline{a} - \alpha\overline{b})$ = $(\overline{a}, \overline{a}) - \alpha^2(\overline{b}, \overline{b})$=0; 9-25$\alpha^2 = 0$;

$$\alpha^2 = \frac{9}{25};\ \alpha = \pm 3/5$$

Пример 8. Найти внутренний угол при вершине А треугольника А;В;С.

$$A(2;3;1) \qquad B(4;1;-2) \qquad C(6;3;7)$$

Внутренний угол A треугольника ABC: $\angle BAC$ – это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдём косинус угла $\angle BAC$ с помощью скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Вычислим координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$; $\overrightarrow{AC} = (4;0;6)$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Найдём скалярное произведение и длины векторов:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 6 = -10$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{-10}{\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{-5}{\sqrt{221}} \Longrightarrow$ внутренний угол тупой

$\angle BAC = \pi - \arccos\left(\frac{5 \cdot \sqrt{221}}{221}\right)$;Тогда внешний угол будет равен $\arccos\left(\frac{5 \cdot \sqrt{221}}{221}\right)$.

Пример 9. Пользуясь свойствами скалярного и векторного произведений, вычислить угол между векторами $\overline{a}$ =$\overline{p} - 2\overline{q}$ и $\boldsymbol{\overline{b}} = \overline{p} + \overline{q}$ если $|\overline{p}| = 3$, a $|\overline{q}| = 2$. Угол между векторами $\overline{p}$ и $\overline{q}$ равен $\alpha = 2\pi/3$.

Решение:

В условии задачи не указаны координаты векторов, значит, будем пользоваться определением и свойствами скалярного и векторного произведений, а не их координатными формами.

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ найдем с помощью скалярного произведения $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$, используя свойства скалярного произведения:

1. $(\overline{p}, \overline{q}) = (\overline{q}, \overline{p})$;
2. $(\overline{p}, \overline{p}) = |\overline{p}|^2$;

$(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{p} - 2\overline{q}) \cdot (\overline{p} + \overline{q}) = (\overline{p}, \overline{p}) + (\overline{p}, \overline{q}) - 2(\overline{q}, \overline{p}) - 2(\overline{q}, \overline{q})$=

$$= |\bar{p}|^2 - |\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cdot cos(\bar{p}, \bar{q}) - 2|\bar{q}|^2 = 3^2 - 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - 2 \cdot 2^2 = 9 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 8 = 4$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{(\bar{p} - 2\bar{q}) \cdot (\bar{p} - 2\bar{q})} = \sqrt{\bar{p}^2 - 2\bar{p} \cdot 2\bar{q} + 4\bar{q}^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + 4 \cdot 2^2} = \sqrt{9 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 16} = \sqrt{37}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(\bar{b}, \bar{b})} = \sqrt{(\bar{p} + \bar{q}) \cdot (\bar{p} + \bar{q})} = \sqrt{\bar{p}^2 + 2\bar{p} \cdot \bar{q} + \bar{q}^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + 2^2} = \sqrt{9 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4} = \sqrt{7}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{4}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{259}}{259} \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \arccos\frac{4\sqrt{259}}{259} \approx 76°.$$

Пример 10. Вычислить проекцию $пр_{\vec{a}+\vec{b}}^{2\vec{a}-\vec{b}}$, если длины векторов $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а угол между векторами $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 120^0$.

Решение. $Пр_{\vec{a}+\vec{b}}^{2\vec{a}-\vec{b}} = \frac{(2\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|}$;

$(2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{b} = 2\,|\vec{a}|^2 + |\vec{a}||\vec{b}|cos120^0 - |\vec{b}|^2 = 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$;

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{(\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2)} = \sqrt{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1} = 1 \Rightarrow Пр_{\vec{a}+\vec{b}}^{2\vec{a}-\vec{b}} = 1/2.$

Ответ: ½.

Задачи для самостоятельного решения.

1) При каких α и β векторы $\vec{a} = 2\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и $\vec{b} = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + \beta\boldsymbol{k}$ коллинеарны?
Ответ: $\alpha = -4$; $\beta = 1.5$

2) Найти отношение, в котором плоскость XOY делит отрезок AB, A(2;-1;7); B(4;5;-2) и определить координаты точки M- точки пересечения отрезка с плоскостью.
Ответ: (32/9; 33/9; 0). $\lambda = 7/2$.

3) Разложить вектор $\vec{x}$=-2$\vec{a}$ по двум неколлинеарным векторам: $\vec{p}$ = 3$\vec{a}$+$\vec{b}$ и $\vec{q}$= - $\vec{a}$+2$\vec{b}$.
Ответ: $\vec{x} = -\frac{4}{7}\vec{p} + \frac{2}{7}\vec{q}$

4) В треугольнике ABC $\overrightarrow{AB}$=3$\overrightarrow{e_1}$ -4$\overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{BC}$=3$\overrightarrow{e_1}$ +5$\overrightarrow{e_2}$.Вычислить длину высоты $\overrightarrow{CH}$, если известно, что $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ – взаимно перпендикулярные орты.
Ответ: 19/5

5) Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2,1,0)$ и $\vec{b}(0,1,-1)$.
Указание: одна диагональ является суммой $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая – разностью.
Ответ: arccos(1/$\sqrt{5}$)