ЛЕКЦИЯ 11. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Прямая в пространстве: прямая как пересечение двух плоскостей; канонические и параметрические уравнения прямой.

2. Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве.

3. Угол между прямыми, между прямой и плоскостью.

4. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

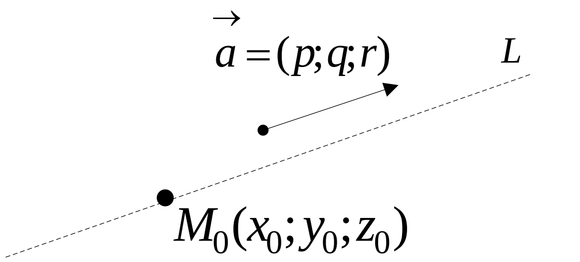
11.1. Прямая в пространстве: прямая как пересечение двух плоскостей; канонические и параметрические уравнения прямой

Рассмотрим различные способы задания прямой линии в пространстве. Линию в пространстве будем обозначать в дальнейшем L.

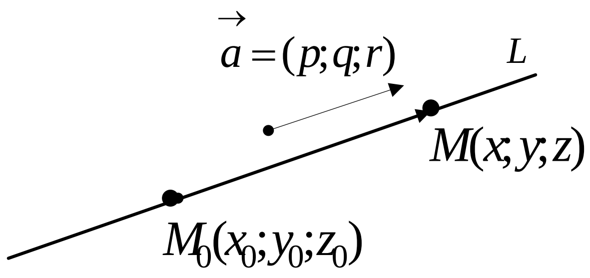
Как и на плоскости, положение прямой в пространстве будет однозначно определено, если заданы координаты некоторой точки $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$ и координаты направляющего вектора этой прямой $\vec{a} = (p; q; r)$

11. 1.1. Задание прямой точкой и направляющим вектором

Пусть необходимо задать прямую L, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, параллельно вектору $\vec{a} = (p; q; r) || L$



Пусть $M(x; y; z) \in L$ – произвольная, текущая точка прямой. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектор $\vec{a}$ коллинеарны. Условие коллинеарности этих векторов можно записать в виде



$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \qquad \textbf{(1)}$$

канонические уравнения прямой

11.1. 2. Параметрические уравнения прямой

Поскольку векторы $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ и вектор $\vec{a}$ коллинеарны, то существует некоторое число $t\in\mathbf{R}$, такое, что выполняется условие $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{a}$, где $t\in\mathbf{R}$ - это некоторый параметр, каждому значению t соответствует определенная точка на прямой L.

Перепишем условие коллинеарности в координатной форме $(x-x_0;y-y_0;z-z_0)=(tp;tq;tr)\Rightarrow$

$$\begin{cases} x-x_0=tp \\ y-y_0=tq \\ z-z_0=tr \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=tp+x_0 \\ y=tq+y_0 \\ z=tr+z_0 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

параметрические уравнения прямой

ВАЖНО! В параметрических уравнениях прямой коэффициенты при параметре t есть координаты направляющего вектора.

Задача 1. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-2;1;0)$, параллельно вектору $\vec{a}=(-5;3;2)$

Решение.

Подставим координаты точки A и вектора $\vec{a}$, в уравнение (1):

$\frac{x+2}{-5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ - канонические уравнения прямой в пространстве

Пусть теперь $\frac{x+2}{-5}=t;\ \frac{y-1}{3}=t;\ \frac{z}{2}=t$, тогда

$\begin{cases} x+2=-5t \\ y-1=3t \\ z=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5t-2 \\ y=3t+1 \\ z=2t \end{cases}$ - параметрические уравнения прямой в пространстве

Ответ. $L:\frac{x+2}{-5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$, $L:\begin{cases} x=-5t-2 \\ y=3t+1 \\ z=2t \end{cases}$

Задача 2. Составить канонические и параметрические уравнения прямой L, проходящей через точку $M(2;3;-4)$, параллельно прямой $L_1:\begin{cases} x=5t+1 \\ y=-4t-3 \\ z=-t+2 \end{cases}$

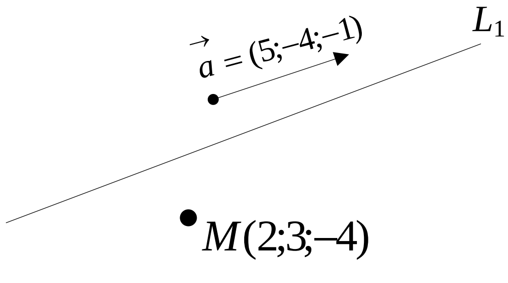
Решение.

Так как прямые L и L_1 параллельны, то направляющий вектор $\vec{a}$ прямой L_1 параллелен прямой L, т.е. может быть выбран в качестве направляющего вектора для искомой прямой L (рис.а)

Из параметрических уравнений прямой L_1 следует, что $\vec{a}=(5;-4;-1)$

Составим каноническое уравнение прямой L, используя формулу (1)

$$L:\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+4}{-1}$$

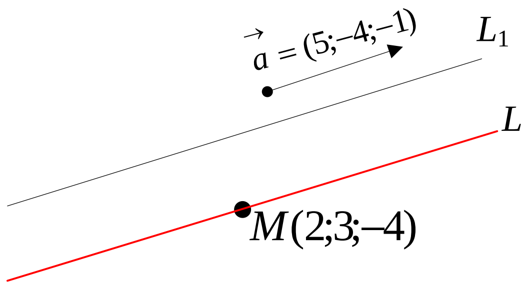


а)

Пусть теперь

$$\frac{x-2}{5}=t;\ \frac{y-3}{-4}=t;\ \frac{z+4}{-1}=t\ ,$$

тогда $L:\begin{cases} x-2=5t \\ y-3=-4t \\ z+4=-t \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=5t+2 \\ y=-4t+3 \\ z=-t-4 \end{cases}$



б)

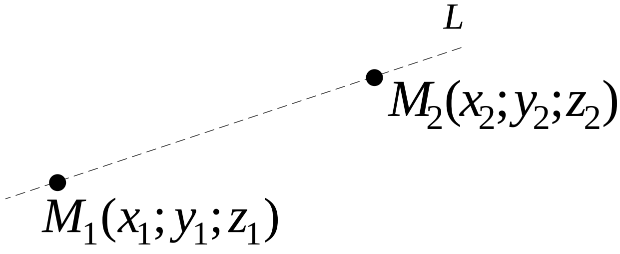
(рис.б)

Ответ. $L:\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+4}{-1}$, $L:\begin{cases} x=5t+2 \\ y=-4t+3 \\ z=-t-4 \end{cases}$

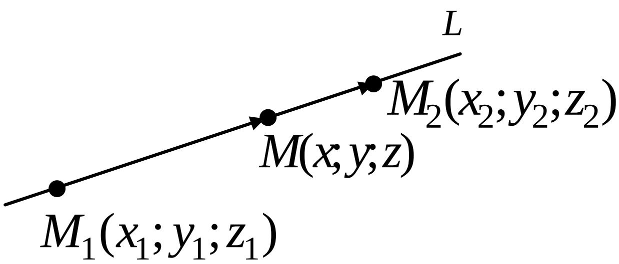
11.1.3. Уравнения прямой, заданной двумя точками

Пусть необходимо задать прямую L, проходящую через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)\in L$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)\in L$.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ можно рассматривать как направляющий вектор данной прямой.



Пусть $M(x;y;z)\in L$ - произвольная, точка задаваемой прямой. Векторы $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ коллинеарны



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}==\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \textbf{(3)}$$

уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

Задача 3. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;5;-2)$ и $B(-1;0;4)$.

Решение.

Подставим координаты точек A и B в уравнение (3):

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\Rightarrow\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-5}{0-5}=\frac{z+2}{4+2}\Rightarrow\frac{x-4}{-5}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+2}{6}\Rightarrow$$

Ответ. $\frac{x-4}{-5}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+2}{6}$

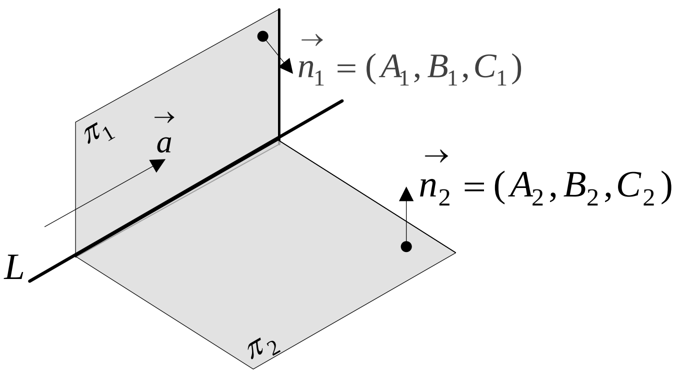
11.1. 4. Прямая как пересечение двух плоскостей

Любые две несовпадающие и непараллельные плоскости при пересечении образуют прямую. Таким образом, прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения этих плоскостей.

Пусть плоскости заданы уравнениями

$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и

$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ и пересекаются по прямой L.



$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

общее уравнение прямой

Вектор $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, где $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ - нормальные векторы этих плоскостей, может быть выбран в качестве направляющего вектора прямой L.

Итак, чтобы задать прямую в пространстве необходимо знать точку и направляющий вектор этой прямой, либо найти две плоскости, определяющие своим пересечением эту прямую.

При решении задач важно уметь переходить от (4) к формулам (1) или (2). Как было сказано выше, направляющий вектор $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ прямой можем получить, как векторной произведение векторов нормалей $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Какую-либо точку прямой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ можем получить, задав одну из координат произвольно, и выразив две другие из системы вида (4)

Задача 4. Составить каноническое уравнение прямой L

$$L\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Решение.

$\vec{n}_1 = (1;2;-1)$, $\vec{n}_2 = (1;-3;1)$ - векторы нормалей пересекающихся плоскостей

$$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$$ - направляющий вектор прямой

Найдем какую-нибудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую этой прямой. Для этого положим, например, $z_0 = 0$. Система перепишется в виде

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 + 1 = 0 \\ x_0 - 3y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 = -1 \\ x_0 - 3y_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow 5y_0 = -5 \Rightarrow y_0 = -1 \text{ и } x_0 = 1$$

Таким образом, $M_0(1;-1;0) \in L$

Составим канонические уравнения прямой, воспользовавшись формулой (1):

$$L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-5}$$

Ответ. $L: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-5}$

11.2. Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве

11.2.1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

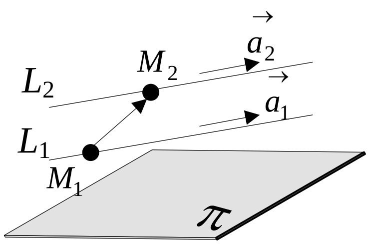
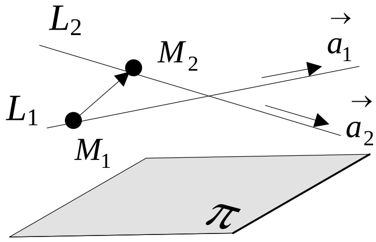
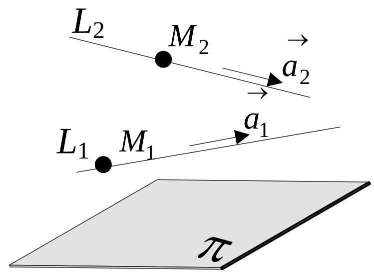
Пусть в пространстве прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$L_1 : \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1} \text{ и } L_2 : \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}.$$

Векторы $\vec{a}_1 = (p_1; q_1; r_1)$ и $\vec{a}_2 = (p_2; q_2; r_2)$ - направляющие векторы этих прямых

Точки $M_1(x_1; y_1; z_1) \in L_1$ и $M_2(x_2; y_2; z_2) \in L_2$.

Прямые в пространстве могут

1. быть параллельными	**2. пересекаться**	**3. скрещиваться**
		

Две прямые L_1 и L_2 являются параллельными, когда их направляющие векторы коллинеарны: $L_1 || L_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$

В случаях 1 и 2 прямые задают плоскость и тогда векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ лежат в этой плоскости, т.е. компланарны. Перепишем условие компланарности в координатной форме:

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \textbf{(*)}$$

Верно и обратное утверждение: если выполняется условие (*), то векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны, а значит, прямые задают плоскость и либо параллельны, либо пересекаются. Таким образом, нами сформулировано необходимое и достаточное условие принадлежности прямых L_1 и L_2 одной плоскости.

Если условие (*) не выполняется, то прямые L_1 и L_2 скрещиваются.

Задача 5. Исследовать взаимное расположение прямых L_1 и L_2

а) $L_1: \frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$ и $L_2: \frac{x+5}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+4}{4}$

б) $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-3}$ и $L_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1}$

Решение.

а) Векторы $\vec{a}_1 = (3;-2;1)$ и $\vec{a}_2 = (2;-3;4)$ - направляющие векторы прямых

Точки $M_1(-4;1;3) \in L_1$ и $M_2(-5;5;-4) \in L_2$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1;4;-7)$

Рассмотрим смешанное произведение $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, значит векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны и прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости (или параллельны или пересекаются). Поскольку координаты направляющих векторов не пропорциональны: $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{1}{4}$, то прямые пересекаются.

б) Векторы $\vec{a}_1 = (1;3;-3)$ и $\vec{a}_2 = (2;-3;1)$ - направляющие векторы прямых

Точки $M_1(1;2;0) \in L_1$ и $M_2(-3;1;-2) \in L_2$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-4;-1;-2)$

Рассмотрим смешанное произведение $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 7$.

Так как $(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0$ значит векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны и прямые L_1 и L_2 не могут задавать плоскость, т.е. L_1 и L_2 скрещиваются.

11.2.2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

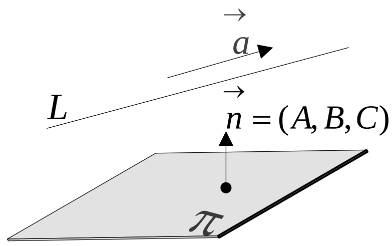
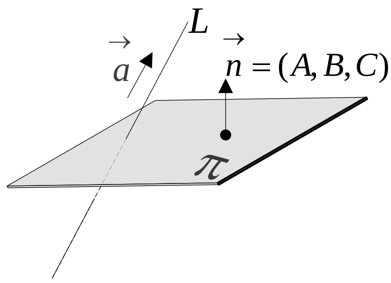
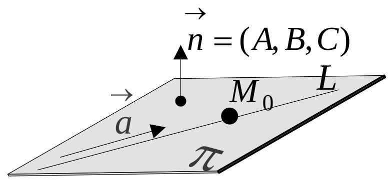
Пусть в пространстве заданы прямая L и плоскость π:

$$L: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \text{ и } \pi: Ax+By+Cz+D=0$$

Вектор $\vec{a} = (p;q;r)$ - направляющий вектор прямой, точка $M_0(x_0;y_0;z_0) \in L$

Вектор и $\vec{n} = (A;B;C)$ - вектор нормали к плоскости π

Прямая и плоскость в пространстве могут

<table>
<tr><th>1. быть параллельными</th><th>2. пересекаться
(в частности прямая перпендикулярна плоскости)</th><th>3. прямая лежит в плоскости</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

1. Если прямая $L \,||\, \pi$, $L \not\subset \pi$, то это означает выполнимость двух условий:

$$\begin{cases} Ap+Bq+Cr=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases}.$$

В декартовой прямоугольной системе координат первое условие имеет простой геометрический смысл: скалярное произведение векторов $(\vec{a},\vec{n})=0$, т.е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ взаимно перпендикулярны. Второе условие системы есть запись условия, что $M_0(x_0;y_0;z_0)\notin\pi$

2. Прямая $L\cap\pi \Leftrightarrow\ Ap+Bq+Cr\neq 0$. В декартовой прямоугольной системе координат это условие имеет простой геометрический смысл: $(\vec{a},\vec{n})\neq 0$, то есть $\vec{a}\not\perp\vec{n}$ - направляющий вектор прямой и вектор нормали не перпендикулярны. В частности, если $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$, то $\vec{a}\,||\,\vec{n}$ и прямая $L\perp\pi$

3. Если $\begin{cases} Ap+Bq+Cr=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$, то прямая $L\subset\pi$

Задача 6. Определить взаимное положение прямой L и плоскости π

а) $L:\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$ и $\pi: 2x+3y-2=0$

б) $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{-3}$ и $\pi: -x+4y-7z+1=0$

Решение.

а) Векторы $\vec{a}=(3;-2;1)$ и $\vec{n}=(2;3;0)$ - есть направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости соответственно

Точка $M_0(-4;1;3)\in L$

Рассмотрим $(\vec{a},\vec{n})=3\cdot 2-2\cdot 3+0=0$. Значит, прямая либо параллельна плоскости, либо принадлежит ей. Если прямая принадлежит плоскости, то и любая точка этой прямой принадлежит этой плоскости. Проверим условие, подставив координаты точки в уравнение плоскости: $2x_0+3y_0-2=2\cdot(-4)+3\cdot 1-2=-7\neq 0$. Вывод: прямая L параллельна плоскости π

б) Векторы $\vec{a}=(1;3;-3)$ и $\vec{n}=(-1;4;-7)$ - есть направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости соответственно

Точка $M_0(1;2;0)\in L$

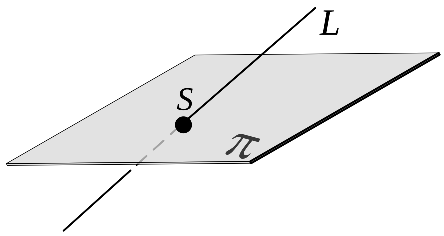
Рассмотрим $(\vec{a},\vec{n})=1\cdot(-1)-3\cdot 4+3\cdot 7=8\neq 0$. Значит, прямая пересекает плоскость π. Так как координаты векторов не пропорциональны, то прямая не перпендикулярна плоскости.

Рассмотрим вопрос, связанный с нахождением координат точки пересечения прямой и плоскости.

Пусть заданы прямая L и плоскость π

$L:\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ и

$\pi: Ax+By+Cz+D=0$



Пусть $L\cap\pi=S(x_s;y_s;z_s)$

Координаты точки S должны одновременно удовлетворять и уравнению прямой, и уравнению плоскости. То есть необходимо рассмотреть эти условия совместно.

$$\frac{x_S-x_0}{p}=\frac{y_S-y_0}{q}=\frac{z_S-z_0}{r} \text{ и } Ax_S+By_S+Cz_S+D=0$$

Перейдем от канонических уравнений прямой к параметрическим уравнениям.

$\begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \\ z = rt + z_0 \end{cases}$, точке S отвечает некоторый параметр t_S, и параметрические уравнения конкретно для точки S будут выглядеть следующим образом $\begin{cases} x_S = pt_S + x_0 \\ y_S = qt_S + y_0 \\ z_S = rt_S + z_0 \end{cases}$

Подставляя теперь $(x_s; y_s; z_s)$ в уравнение плоскости, выразим параметр t_S

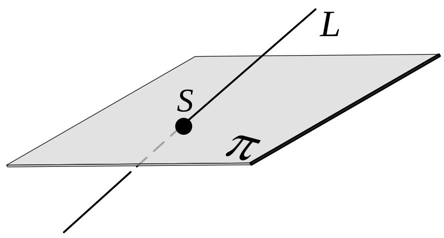
$$Ax_S + By_S + Cz_S + D = 0$$
$$A(pt_S + x_0) + B(qt_S + y_0) + C(rt_S + z_0) + D = 0$$
$$Apt_S + Bqt_S + Crt_S + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$
$$t_S(Ap + Bq + Cr) + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Rightarrow$$
$$t_S = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{(Ap + Bq + Cr)}, \quad Ap + Bq + Cr \neq 0$$

Задача 7. Определить точку пересечения прямой и плоскости L и плоскости π

$L: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$ и $\pi: x + 5y - 2z + 19 = 0$

Решение.

Пусть $L \cap \pi = S(x_s; y_s; z_s)$. Координаты точки S должны одновременно удовлетворять и уравнению прямой, и уравнению плоскости:



$$\frac{x_S + 2}{3} = \frac{y_S - 3}{1} = \frac{z_S - 4}{-2}, \quad x_S + 5y_S - 2z_S + 19 = 0$$

Перейдем от канонических уравнений прямой к параметрическим уравнениям, точке S отвечает некоторый параметр t_S и параметрические уравнения конкретно для точки S будут выглядеть следующим образом $\begin{cases} x_S = 3t_S - 2 \\ y_S = t_S + 3 \\ z_S = -2t_S + 4 \end{cases}$

Подставляя теперь $(x_s; y_s; z_s)$ в уравнение плоскости, выразим параметр t_S

$$(3t_S - 2) + 5(t_S + 3) - 2(-2t_S + 4) + 19 = 0$$
$$3t_S + 5t_S + 4t_S - 2 + 15 - 8 + 19 =$$
$$12t_S + 24 = 0 \Rightarrow t_S = -\frac{24}{12} = -2,$$

Откуда $\begin{cases} x_S = 3\cdot(-2)-2=-8 \\ y_S = (-2)+3=1 \\ z_S = -2\cdot(-2)+4=8 \end{cases}$

Ответ: $S(-8;1;8)$

11.3. Угол между прямыми, между прямой и плоскостью

11.3.1. Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$L_1 : \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1} \text{ и } L_2 : \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}.$$

Векторы $\vec{a}_1 = (p_1; q_1; r_1)$ и $\vec{a}_2 = (p_2; q_2; r_2)$ - направляющие векторы этих прямых

Точки $M_1(x_1; y_1; z_1) \in L_1$ и $M_2(x_2; y_2; z_2) \in L_2$.

Угол φ между ними равен углу между направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ этих прямых. Как известно, угол между векторами можно найти из выражения

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|} = \frac{p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Задача 7. Найти величину угла между прямыми

а) $L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-3}$ и $L_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$

б) $L_1 : \frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}$ и $L_2 \begin{cases} x-y+2z-8=0 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$

Решение.

а) Векторы $\vec{a}_1 = (1;3;-3)$ и $\vec{a}_2 = (1;-2;1)$ - есть направляющие векторы прямых

$$\cos\angle(L_1, L_2) = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|} = \frac{1-6-3}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-8}{\sqrt{114}}$$

$$\angle(L_1, L_2) = \pi - \arccos\frac{8}{\sqrt{114}}$$

Ответ. $\angle(L_1, L_2) = \pi - \arccos\frac{8}{\sqrt{114}}$

б) Для начала найдем направляющий вектор прямой $L_2:\begin{cases} x-y+2z-8=0 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$

$\vec{n}_1=(1;-1;2)$, $\vec{n}_2=(2;1;-1)$ - векторы нормалей пересекающихся плоскостей, задающих прямую L_2

$$\vec{a}_2=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$$ - направляющий вектор прямой L_2

Вектор $\vec{a}_1=(-3;1;-2)$ - направляющий вектор прямой L_1

$$\cos\angle(L_1,L_2)=\frac{(\vec{a}_1,\vec{a}_2)}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{3+5-6}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{14}}=\frac{2}{7\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{35}$$

Ответ. $\angle(L_1,L_2)=\arccos\frac{\sqrt{10}}{35}$

11.3.2. Угол между прямой и плоскостью

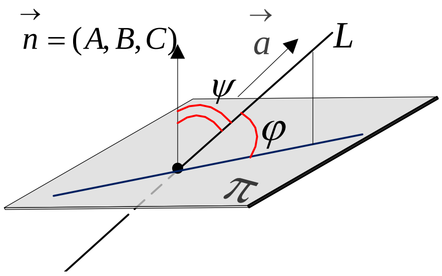
Пусть в пространстве заданы прямая L и плоскость π:

$$L:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \text{ и } \pi: Ax+By+Cz=0$$

Вектор $\vec{a}=(p;q;r)$ - направляющий вектор прямой, точка $M_0(x_0;y_0;z_0)\in L$

Вектор и $\vec{n}=(A;B;C)$ - вектор нормали к плоскости π

Определение 1. ***Угол*** φ между прямой L и плоскостью π называется острый угол между этой прямой и ее проекцией L' на эту плоскость.



Пусть φ - искомый угол, $\varphi+\psi=\frac{\pi}{2}$, где ψ - угол между вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости и направляющим вектором $\vec{a}$ прямой.

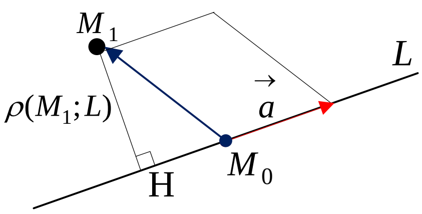
$$\cos\psi = \frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi$$

$$\sin\angle(L,\pi) = \frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \textbf{(6)}$$

11. 4. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть прямая L задана каноническим уравнением $L: \dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} = \dfrac{z-z_0}{r}$, пусть точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ не принадлежит этой прямой (см. рисунок)

Определение 2. ***Расстоянием от точки*** $M_1(x_1;y_1;z_1)$ ***до прямой*** L называется длина перпендикуляра M_1H , опущенного из точки M_1 на прямую L.



Построим параллелограмм на векторах $\vec{a} = (p;q;r)$ - направляющий для L и $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$.

$\rho(M_1;L) = HM_1$, где HM_1 - высота параллелограмма

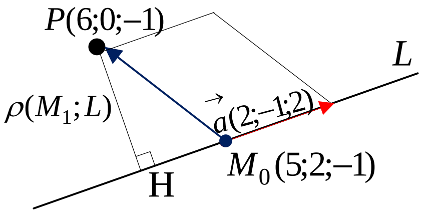
$S_{\text{паралл}} = |\overrightarrow{HM_1}|\cdot|\vec{a}|$, с другой стороны $S_{\text{паралл}} = |[\overrightarrow{M_0M_1};\vec{a}]|$, откуда получаем

$$|\overrightarrow{HM_1}| = \frac{|[\overrightarrow{M_0M_1};\vec{a}]|}{|\vec{a}|} = \rho(M_1;L) \qquad \textbf{(7)}$$

Задача 8. Найдите расстояние от точки $P(6;0;-1)$ до прямой L, заданной уравнениями $\begin{cases} x = 2t+5 \\ y = -t+2 \\ z = 2t-1 \end{cases}$

Решение.

Построим параллелограмм на векторах $\vec{a} = (2;-1;2)$ - направляющий для L и $\overrightarrow{M_0P} = (1;-2;0)$. $\rho(P;L) = HP$



$$S_{\text{паралл}} = \left|\overrightarrow{HP}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{HP}\right|\sqrt{9} = 3 \cdot \left|\overrightarrow{HP}\right|,$$

с другой стороны $S_{\text{паралл}} = \left|[\overrightarrow{M_0P}; \vec{a}]\right|$

$$[\overrightarrow{M_0P}; \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow S_{\text{паралл}} = \left|[\overrightarrow{M_0P}; \vec{a}]\right| = \sqrt{29}$$

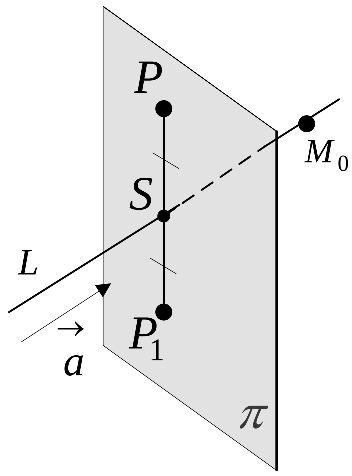
$$\left|\overrightarrow{HP}\right| = \frac{\sqrt{29}}{3}$$

Ответ. $\left|\overrightarrow{HP}\right| = \dfrac{\sqrt{29}}{3}$

Задача 9. Найдите точку *S*, являющуюся проекцией точки $P(0;3;-4)$ на прямую *L*, заданную общим уравнением $L: \begin{cases} x - 2y + z + 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 8 = 0 \end{cases}$. Найдите точку P_1 симметричную точке *P* относительно прямой *L*.

Решение.

Искомая точка $S = L \cap \pi$, где плоскость π содержит точку *P* и проходит перпендикулярно *L*.



Составим уравнение плоскости π, именно в плоскости π мы в дальнейшем будем работать и искать точку симметричную данной, и проекцию точки.

Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой L есть вектор нормали для искомой плоскости π.

Найдем $\vec{a}$.

$\vec{n}_1 = (1;-2;1)$, $\vec{n}_2 = (2;3;-1)$ - векторы нормалей пересекающихся плоскостей, задающих прямую L.

$$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$$ - направляющий вектор прямой L

Составим уравнение плоскости π, заданной точкой P и нормальным вектором $\vec{a}$:

$$-(x-0) + 3(y-3) + 7(z+4) = 0 \Rightarrow -x + 3y + 7z + 19 = 0$$

Перейдем к параметрическому уравнению прямой L. Направляющий вектор получен. Найдем какую-нибудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую этой прямой. Для этого положим, например, $x_0 = 0$. Система перепишется в виде

$$L: \begin{cases} -2y_0 + z_0 + 4 = 0 \\ 3y_0 - z_0 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_0 - 4 = 0 \ \ y_0 = 4$$, тогда $z_0 = 4$

Таким образом, $M_0(0;4;4) \in L$

Составим параметрические уравнения прямой, воспользовавшись формулой (2):

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3t + 4 \\ z = 7t + 4 \end{cases}$$

Пусть $L \cap \pi = S(x_S; y_S; z_S)$.

$$S(x_S; y_S; z_S) \in L \Rightarrow \begin{cases} x_S = -t_S \\ y_S = 3t_S + 4 \\ z_S = 7t_S + 4 \end{cases}, \ S(x_S; y_S; z_S) \in \pi \Rightarrow -x_S + 3y_S + 7z_S + 19 = 0$$

$$-x_S + 3y_S + 7z_S + 16 = -(-t_S) + 3(3t_S + 4) + 7(7t_S + 4) + 19 = 59t_S + 59 = 0$$

$$t_S = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_S = 1 \\ y_S = 1 \\ z_S = -3 \end{cases} \quad S(1;1;-3)$$ - проекция точки P на прямую L.

Найдем точку P_1, симметричную точке P относительно прямой L. Так как P и P_1 симметричны, то S – середина отрезка PP_1

$$x_S = \frac{x_P + x_{P1}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{0 + x_{P1}}{2} \Rightarrow x_{P1} = 2$$

$$y_S = \frac{y_P + y_{P1}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3 + y_{P1}}{2} \Rightarrow y_{P1} = -1$$

$$z_S = \frac{z_P + z_{P1}}{2} \Rightarrow -3 = \frac{-4 + z_{P1}}{2} \Rightarrow z_{P1} = -2$$

$P_1(2;-1;-2)$ - точка P_1, симметричная точке P относительно прямой L.

Ответ. $S(1;1;-3)$, $P_1(2;-1;-2)$