ЛЕКЦИЯ 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

1. Обратная матрица: определение; алгоритм вычисления.

2. Критерий обратимости матрицы.

3. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы

4. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

3.1. Обратная матрица: определение; алгоритм вычисления

Обратным к элементу a называется такое число b, для которого выполняется условие $a \cdot b = 1$. Обозначается элемент b: $b = a^{-1}$. То есть $a \cdot a^{-1} = 1$.

Такого же подхода введения обратной матрицы придерживаются и в матричной алгебре. Напомним, что роль единицы в умножении матриц играет единичная матрица *E*.

Определение 1. Матрица *B* называется обратной к матрице *A*, если

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

Строго говоря, ввиду некоммутативности произведения матриц, необходимо вести речь о правой обратной матрице: $A \cdot B' = E$ и левой обратной матрице $B'' \cdot A = E$. Но, как будет показано далее $B' = B''$.

Пусть дана невырожденная матрица *A*. Рассмотрим матрицу A^*, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы *A*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & .. & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Если теперь мы транспонируем матрицу A^*, то получим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1j} & A_{2j} & .. & A_{ij} & \cdots & A_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

которая называется ***присоединенной*** матрицей.

Теорема 1. Присоединенная матрица обладает следующим важным свойством: $A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = |A| \cdot E$.

3.2. Критерий обратимости матрицы

Теорема 2. ***Критерий обратимости матрицы.*** Пусть A – квадратная матрица. Матрица обратная к A существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен 0. В этом случае матрица обратная к A единственна и может быть вычислена по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$.

ВАЖНО: **Если** матрица **<u>A вырожденная</u>** (определитель матрицы A равен 0), то у нее **<u>не существует обратной</u>** матрицы.

Из рассмотренного выше, в частности, следует, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Докажем, что для заданной невырожденной квадратной матрицы A A^{-1} единственна.

Предположим, что существует другая матрица C, обладающая свойством:

$$A \cdot C = C \cdot A = E$$

Рассмотрим каждое из равенств отдельно $A \cdot C = E$ и $C \cdot A = E$

Домножим <u>обе части</u> обоих равенств на A^{-1}. <u>Первое</u> равенство домножим <u>слева</u> на A^{-1}, а <u>второе</u> равенство домножим <u>справа</u> на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot C) = A^{-1} \cdot E \text{ и } (C \cdot A) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1}$$

Воспользуемся свойствами операции умножения матриц и преобразуем равенства $A^{-1} \cdot (A \cdot C) = (\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E}) \cdot C = A^{-1} \cdot E$ и $(C \cdot A) \cdot A^{-1} = C \cdot (\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{E}) = E \cdot A^{-1}$.

Равенства перепишутся в виде $\underbrace{E \cdot C}_{C} = \underbrace{A^{-1} \cdot E}_{A^{-1}}$ и $\underbrace{C \cdot E}_{C} = \underbrace{E \cdot A^{-1}}_{A^{-1}}$.

То есть $C = A^{-1}$. Матрица С совпадает с матрицей A^{-1}. Матрица A^{-1} – единственна.

Свойства обратной матрицы

1°. $(A^{-1})^{-1} = A$.

2°. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

3°. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

4°. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

5°. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы A^{-1}:

1. Вычислить определитель матрицы А. Если $|A| = 0$, то матрица А – вырожденная и A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то переходим к п.2.

2. Составить матрицу A^* из алгебраических дополнений.

3. Транспонировать матрицу из алгебраических дополнений – получить присоединенную матрицу $\left(A^{*}\right)^{T} = \tilde{A}$.

4. Вычислить A^{-1} по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$.

Дана матрица A

↓

Вычислить $|A|$

$|A| \neq 0$

↓

Составить матрицу из алгебраических дополнений A^*

↓

Транспонировать матрицу из алгебраических дополнений $\left(A^{*}\right)^{T} = \tilde{A}$

↓

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$

$|A| = 0$

Матрица A ВЫРОЖДЕННАЯ

A^{-1} НЕ СУЩЕСТВУЕТ

Задача 1. Для $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

Решение.

Воспользуемся алгоритмом.

1. Вычислим определитель матрицы A: $|A| = 1 \neq 0$, значит матрица A – не вырожденная и существует A^{-1}.

2. Найдем алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы A и составим из них матрицу A^*

$a_{11} = 2 \rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3$, $\quad a_{12} = 5 \rightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$,

$a_{21} = 1 \rightarrow A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5$, $\quad a_{22} = 3 \rightarrow A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $\tilde{A} = \left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \dfrac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Проверка $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ – A^{-1} найдена верно.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Для $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

Решение.

Воспользуемся алгоритмом.

1. Вычислим определитель матрицы A: $|A| = 0$, значит матрица A – вырожденная и A^{-1} не существует.

Задача 3. Для $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

Решение.

1. Найдем $|A|$. Для нахождения определителя воспользуемся элементарными преобразованиями строк. На первом шаге поменяем местами первую и третью строки, вынося за знак определителя «минус». Затем из второй и третьей строки вычитаем

первую, умноженную на соответствующий коэффициент. И, наконец, вычисляем определитель, раскладывая его по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -2R1 \\ -3R1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2-2 & -1-10 & 1-0 \\ 3-3 & 2-15 & 1-0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -11 & 1 \\ 0 & -13 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -2R2 \end{matrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -11 & 1 \\ -13 & 1 \end{vmatrix} = -1(-11+13) = -2$$

$|A| = -2 \neq 0$, значит матрица A – не вырожденная и существует A^{-1}.

2. Найдем алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы A и составим из них матрицу A^*

$a_{11} = 3 \to A_{11} = (-1)^{1+1}(-5) = -5$, $\quad a_{12} = 2 \to A_{12} = (-1)^{1+2}(-1) = 1$,

$a_{13} = 1 \to A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot 11 = 11$, $\quad a_{21} = 2 \to A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot(-5) = 5$,

$a_{22} = -1 \to A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot(-1) = -1$, $\quad a_{23} = 1 \to A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot 13 = -13$,

$a_{31} = 1 \to A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot 3 = 3$, $\quad a_{32} = 5 \to A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot 1 = -1$,

$a_{33} = 0 \to A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot(-7) = -7$.

$$A^* = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 11 \\ 5 & -1 & -13 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

3. $$\tilde{A} = \left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 11 \\ 5 & -1 & -13 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A^{-1}A = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \Rightarrow$$

A^{-1} найдена верно.

Ответ: $A^{-1}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 5 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 11 & -13 & -7\end{pmatrix}$.

3.3. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы

Рассмотрим матричные уравнения вида $A\cdot X=B$ и $Y\cdot A=B$, где A квадратная невырожденная матрица.

$$A\cdot X=B$$

Домножим СПРАВА <u>обе</u> части равенства на A^{-1}: $\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot X=A^{-1}\cdot B$.

$$X=A^{-1}\cdot B$$

$$Y\cdot A=B$$

Домножим СЛЕВА <u>обе</u> части равенства на A^{-1}: $Y\cdot\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}=B\cdot A^{-1}$.

$$Y=B\cdot A^{-1}$$

Заметим, что ввиду некоммутативности матриц эти два решения буду различными.

Задача 4. Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 6\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Сделать проверку.

Решение.

Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 6\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

$X=B\cdot A^{-1}$.

Найдем A^{-1}.

1. $|A|=-1\neq 0$, значит A^{-1} существует.

2. $A^{*}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$.

3. $\tilde{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

4. $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

Проверка $AA^{-1}=\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&5\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$ - A^{-1} найдена верно.

$$X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\5&6\\4&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&5\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\-4&13\\-11&26\end{pmatrix}.$$

Проверка $\underbrace{\begin{pmatrix}2&-5\\-4&13\\-11&26\end{pmatrix}}_{X}\cdot\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\5&6\\4&-3\end{pmatrix}$ - верно.

Ответ: $X=\begin{pmatrix}2&-5\\-4&13\\-11&26\end{pmatrix}$.

Задача 5. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&4&6\end{pmatrix}$. Сделать проверку.

Решение.

Пусть $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&4&6\end{pmatrix}$.

$X=A^{-1}\cdot B$.

Найдем A^{-1}

1. $|A|=-4\neq 0$, значит A^{-1} существует.

2. $A^{*}=\begin{pmatrix}2&-2\\-3&1\end{pmatrix}$.

3. $\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&-2\\-3&1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&1\end{pmatrix}$.

4. $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-2&1\end{pmatrix}$.

Проверка $A^{-1}A=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$ - A^{-1} найдена верно.

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&4&6\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-2&-6&-18\\2&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5&1{,}5&4{,}5\\-0{,}5&0{,}5&-1{,}5\end{pmatrix}.$$

Проверка $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-2 & -6 & -18\\ 2 & -2 & 6\end{pmatrix}}_{X}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}4 & -12 & 0\\ 0 & -16 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 6\end{pmatrix}$ - верно.

Ответ: $X=\begin{pmatrix}0{,}5 & 1{,}5 & 4{,}5\\ -0{,}5 & 0{,}5 & -1{,}5\end{pmatrix}$.

Задача 6. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}$. Сделать проверку.

Решение.

Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}$.

Наше матричное уравнение перепишется в виде: $B\cdot X\cdot A=C$. Домножим обе части слева на B^{-1}, а справа на A^{-1}. Получим:

$$\underbrace{B^{-1}\cdot B}_{E}\cdot X\cdot\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{E}=B^{-1}\cdot C\cdot A^{-1}\Rightarrow X=B^{-1}\cdot C\cdot A^{-1}$$

Найдем A^{-1} и B^{-1}.

1. $|A|=1\neq 0$, значит A^{-1} существует.

2. $A^{*}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$ 3. $\tilde{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$ 4. $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Проверка $A^{-1}A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$ – A^{-1} найдена верно.

1. $|B|=3\neq 0$, значит B^{-1} существует.

2. $B^{*}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$ 3. $\tilde{B}=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

4. $B^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

Проверка $B^{-1}B=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\Rightarrow$

B^{-1} найдена верно.

$$X = B^{-1}\cdot C\cdot A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -6 & 21 \\ 7 & -14 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -33 & 60 \\ 28 & -49 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -33 & 60 \\ 28 & -49 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 30 & -48 \\ 18 & -27 \\ 21 & -39 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -16 \\ 6 & -9 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

- верно.

Ответ: $X = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -33 & 60 \\ 28 & -49 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$.

3.4. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными величинами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица, составленная из коэффициентов в системе (1),

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец неизвестных.

Систему можно записать в виде матричного уравнения $A\cdot X = B$. Действительно:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = B.$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Задача 7. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, значит A^{-1} существует .

2. $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 3. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $A^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Проверка $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \Rightarrow A^{-1}$ найдена верно.

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ - верно.

Ответ: $(0;-3;1)$.