ЛЕКЦИЯ 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Линейная независимость. Понятие базиса.

2. Ранг матрицы.

3. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

4. Сохранение ранга матрицы при элементарных преобразованиях. Вычисление ранга матрицы приведением ее к ступенчатому виду.

5. Основные понятия теории систем линейных уравнений.

4. 1. Линейная независимость. Понятие базиса. Ранг матрицы

Рассмотрим $A_1, A_2, \ldots A_m$ – элементарные вектор-строки (столбцы). Вектор-строка (вектор-столбец) *B*, представленная в виде $B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_m A_m$ называется ***линейной комбинацией*** строк $A_1, A_2, \ldots A_m$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $1 \le i \le m$.

Определение 1. Строки (столбцы) $A_1, A_2, \ldots A_m$ называются ***линейно зависимыми***, если существует такая их линейная комбинация $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_m A_m$ равная нулевой строке (столбцу), в которой не все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ равны нулю одновременно.

Строки (столбцы) $A_1, A_2, \ldots A_m$ называются ***линейно независимыми***, если равенство нулевой строке (столбцу) их линейной комбинации возможно только в случае, когда $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_m = 0$.

Теорема 1. Для того чтобы строки (столбцы) были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна (один) из них являлась (являлся) линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Пусть строки $A_1, A_2, \ldots A_m$ линейно зависимы. Это означает, что в линейной комбинации $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{m-1} A_{m-1} + \lambda_m A_m = 0$ среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ не все равны нулю. Не нарушая общности, будем полагать, что $\lambda_m \ne 0$. Из равенства нулю линейной комбинации выразим

$\lambda_m A_m = -\lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2 - \ldots - \lambda_{m-1} A_{m-1}$, тогда

$A_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}A_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}A_2 - \ldots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}A_{m-1}$ – строка A_m является линейной комбинацией остальных строк.

Пусть теперь одна из строк, например, A_m является линейной комбинацией остальных строк $A_1, A_2, \ldots A_{m-1}$: $A_m = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_{m-1}A_{m-1}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $1 \le i \le m$. Получается, что существует линейная комбинация $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_{m-1}A_{m-1} + (-1)A_m = 0$, в которой не все коэффициенты равны нулю одновременно, равная нулевой строке. Значит, по определению, эти строки линейно зависимы. Что и требовалось доказать.

Проводя аналогичные рассуждения, можем доказать это же утверждение для столбцов матрицы.

4.2. Ранг матрицы

Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ размера $m \times n$.

Выберем в ней произвольные *k* строк и *k* столбцов. Очевидно, что $k \le \min(m,n)$. Элементы, располагающиеся одновременно и в отобранных строках, и в отобранных столбцах составляют квадратную матрицу *k*-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором *k*-го порядка матрицы *A*.

Пусть дана матрица размера 5×6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 11 & 6 & -7 & 10 & 0 \\ -1 & 4 & 7 & 5 & 8 & -5 \\ 11 & 12 & 6 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем в ней, например, 1,3,4 строки и 2,4,6 столбцы. Элементы, общие для выбранных строк и столбцов, образуют матрицу 3×3. Ее определитель есть минор третьего порядка исходной матрицы *A*.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 9 & 2 & 3 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 2 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 11 & 6 & -7 & 10 & 0\\ -1 & 4 & 7 & 5 & 8 & -5\\ 11 & 12 & 6 & -6 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$M_3=\begin{vmatrix}9 & 3 & -1\\ 11 & -7 & 0\\ 4 & 5 & -5\end{vmatrix}$$

Задача 1. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 5 & 7 & 8\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$ найти все миноры второго порядка, содержащие элемент a_{11}.

Решение.

Выбираем 2 строки и 2 столбца	Получаем матрицу 2×2	Вычисляем минор 2го порядка найденной матрицы
$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 5 & 7 & 8\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 7\end{pmatrix}$	$M_2^1=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 7\end{vmatrix}=17$
$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 5 & 7 & 8\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 9\end{pmatrix}$	$M_2^2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 9\end{vmatrix}=9$
$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 5 & 7 & 8\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 8\end{pmatrix}$	$M_2^3=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & 8\end{vmatrix}=23$
$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 5 & 7 & 8\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	$M_2^4=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4$

Ответ. $M_2^1=17$, $M_2^2=9$, $M_2^3=23$, $M_2^4=4$.

Определение 2. **Рангом** матрицы A называется наибольший порядок ее ненулевого минора.

Замечание. Если все миноры k-го порядка матрицы A равны нулю, то равны нулю и все миноры более высоких порядков.

Справедливость этого утверждения следует из правила вычисления минора разложением по строке (столбцу). Рассмотрим минор $\Delta_{(k+1)}$-го порядка и его разложение, например, по какой-либо $(k+1)$ ой строке.

$\Delta_{(k+1)} = \sum\limits_{j=1}^{k+1} (-1)^{(k+1)+j} a_{k+1,j}\Delta_{k,j}$, но все $\Delta_{k,j} = 0,\ j = 1,2,...,k+1$, следовательно и $\Delta_{k+1} = 0$

Ранг матрицы *A*, как правило, обозначают **r**(*A*), **rang**(*A*).

Ранг нулевой матрицы считается равным нулю. Для любой матрицы *A* размера $m \times n$ верно утверждение $0 \le \text{rang}(A) \le \min(m,n)$.

Определение 3. Отличный от нуля минор M_k, порядок которого равен рангу матрицы *A*, называется ***базисным минором*** матрицы *A*.

Строки и столбцы матрицы *A*, которые содержат элементы базисного минора, называются ***базисными***. Матрица может иметь несколько базисных миноров. После того, как выбран какой-то конкретный базисный минор, можно говорить о базисных строках или столбцах.

Теорема 2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.

Доказательство. Предположим, что базисный минор Δ_k матрицы *A* имеет порядок *k*. Не нарушая общности, можем полагать, что он расположен в верхнем левом углу.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{k+1,1} & a_{k+1,1} & & a_{k+1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{k+1,k+1} & & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Это означает, что первые *k* строк матрицы *A* являются базисными строками. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что строки $A_1, A_2, ...A_k$ линейно зависимы. Тогда, из теоремы 1 следует, что какая-либо строка будет линейной комбинацией остальных строк. Пусть $A_k = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_{k-1} A_{k-1}$. Тогда в базисном миноре Δ_k одна из строк является линейной комбинацией остальных. Согласно свойству **10°**, такой определитель равен нулю, что противоречит определению 3 базисного минора. Значит, наше предположение было неверным и строки базисного минора линейно независимы.

Аналогично можно доказать это утверждение для столбцов.

Теорема 3. (***о базисном миноре***). Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, предположим, что базисный минор Δ_k матрицы A имеет порядок k и можем полагать, что он расположен в верхнем левом углу.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{k+1,1} & a_{k+1,1} & & a_{k+1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{k+1,k+1} & & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Это означает, что первые k строк матрицы A являются базисными строками.

Зафиксируем некоторые $k < i \le m$ и $k < j \le n$.

Рассмотрим определитель

$$\Delta_{k+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix}$$ и разложим его по последнему столбцу.

$$\Delta_{k+1} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}\underbrace{A_{ij}}_{\Delta k}.$$

$\Delta_{k+1} = 0$, так как иначе ранг был бы равен $k+1=0$. Тогда

$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}\underbrace{A_{ij}}_{\Delta k} = 0$. Выразим из этого равенства a_{ij}

$$a_{ij} = -a_{1j}\frac{A_{1j}}{\Delta_k} - a_{2j}\frac{A_{2j}}{\Delta_k} - \dots - a_{kj}\frac{A_{kj}}{\Delta_k}$$

Пусть $-\frac{A_{1j}}{\Delta_k} = \beta_1$, $-\frac{A_{2j}}{\Delta_k} = \beta_2$, …, $-\frac{A_{kj}}{\Delta_k} = \beta_k$, тогда

$a_{ij} = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \dots + a_{kj}\beta_k$, $j = 1, 2, \dots, n$.

То есть для каждого элемента a_{ij}, в строке i выполнено равенство

$a_{i1} = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + ... + a_{k1}\beta_k$, $j = 1$,

$a_{i2} = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + ... + a_{k2}\beta_k$, $j = 2$,

…

$a_{in} = a_{1n}\beta_1 + a_{2n}\beta_2 + ... + a_{kn}\beta_k$, $j = n$.

Как видим, элементы в левой части равенств есть строка i – A_i, слагаемые во второй части, рассмотренные по столбцам представляют собой базисные строки и $A_i = A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + ... + A_k\beta_k$ – линейная комбинация базисных строк. Поскольку i было выбрано произвольно, то это утверждение справедливо для любой строки. Теорема доказана.

Определение ранга матрицы и базисных миноров является очень важной задачей.

4.3. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров

Будем говорить, что ***минор*** (k+1)-го порядка ***окаймляет*** минор k-го порядка, если матрица, соответствующая минору (k+1)-го порядка целиком содержит «окаймляемую» матрицу k-го порядка.

При вычислении ранга матрицы методом окаймляющих миноров следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков.

Если уже найден минор k-го порядка, не равный нулю ($M_k \neq 0$), то требуют вычисления лишь миноры (k+1)-го порядка, которые окаймляют (содержат) найденный ненулевой минор.

Если все миноры (k+1)-го порядка окажутся равными нулю, то ранг матрицы равен k. Если хотя бы один из миноров (k+1)-го порядка не равен нулю, то переходим к минорам более высокого порядка.

Задача 2. Найти ранги матриц A и B методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Для матрицы A выберем минор первого порядка $M_1 \neq 0$. Здесь 6 возможных вариантов выбора. Пусть $M_1 = 1 \neq 0$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

еще это можно показать так $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\\ 5 & 10\end{pmatrix}$

Рассмотрим миноры его окаймляющие - их два. Первый получается, если выбрать первую и вторую строки исходной матрицы, второй – если выбрать первую и третью строки матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

еще это можно показать так

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

$$M_2^1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{vmatrix}=0$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

Еще это можно показать так

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \cancel{-2} & \cancel{-4}\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

$$M_2^2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 10\end{vmatrix}=0$$

Все миноры вторых порядков, окаймляющие найденный вначале минор первого порядка равны нулю. Значит, ранг матрицы равен 1. Первая строка называется базисной строкой. Первый столбец называется базисным столбцом.

Для матрицы B выберем минор первого порядка $M_1\neq 0$. Здесь 20 возможных вариантов выбора. Пусть $M_1=2\neq 0$.

$$B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

Или

$$B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

Рассмотрим миноры окаймляющие минор $M_1=2$.

$$B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

$$M_2^1=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=0$$

Выберем другой минор второго порядка, окаймляющий минор $M_1=2$.

$$B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad M_2^2=\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=-1$$

Найден не равный нулю минор второго порядка. Выберем теперь к нему минор третьего порядка, его окаймляющий. Таких миноров несколько, рассмотрим минор, содержащий второй столбец.

$$B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad M_3^1=\begin{vmatrix}2&-4&3\\1&-2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=1$$

Обратите внимание, что можно было рассмотреть окаймляющий минор, не включая второй столбец.

$$B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad M_3^2=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&1&-4\\0&-1&3\end{vmatrix}=-12$$

Нам важно, что найден не равный нулю минор третьего порядка. Выберем теперь к нему минор четвертого порядка, его окаймляющий.

$$B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad M_4^1=\begin{vmatrix}2&3&1&0\\1&1&-4&2\\0&-1&3&1\\4&4&-4&5\end{vmatrix}=0$$

Выберем другой минор четвертого порядка.

$$B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\qquad M_4^2=\begin{vmatrix}2&-4&3&1\\1&-2&1&-4\\0&1&-1&3\\4&-7&4&-4\end{vmatrix}=0$$

Все миноры четвертых порядков равны нулю. Значит, ранг матрицы равен трем. Заметим, что и минор M_3^1, и минор M_3^2 могут быть выбраны как базисные миноры. При этом 1,2,3 строки – базисные или 1,2,4 строки – базисные.

4.4. Сохранение ранга матрицы при элементарных преобразованиях. Вычисление ранга матрицы приведением ее к ступенчатому виду

Определение 4. **Элементарными преобразованиями** матрицы A называется

1) перемена местами двух строк или двух столбцов;

2) умножение строки или столбца на произвольное отличное от нуля число;

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число;

4) вычеркивание нулевой строки.

Теорема 4. Элементарные преобразования над строками или столбцами матрицы не изменяют ее ранга.

Действительно, так как при элементарных преобразованиях ненулевой определитель переходит в ненулевой определитель, то ненулевой минор переходит в ненулевой минор, а значит и ранг матрицы не изменится.

Матрица вида
$$\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & a_{1\,j-1} & & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1n} \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\ a_{2r} & a_{2r+1} & \ldots & a_{2s} & \ldots & a_{2n} \\
 & \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & & \ldots & 0 & & a_{ks} & \ldots & a_{kn} \\
0 & \ldots & 0 & 0 & & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & & & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & 0
\end{pmatrix}$$
называется матрицей ***ступенчатого*** вида. При этом все элементы $a_{1\,j-1} \neq 0$, $a_{2\,j} \neq 0$, $\ldots, a_{kr} \neq 0$, $2 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$.

Теорема 5. С помощью элементарных преобразований всякую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство.

Пусть задана ненулевая матрица $A = (a_{ij})$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Так как матрица ненулевая, то в ней есть ненулевые строки. Выберем среди таких строк ту, ненулевой элемент в которой расположен в столбце с наименьшим номером. Переставим эту строку на место первой строки. Получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j} & a'_{1j+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & a_{1j+1} & \dots & a_{mj} \end{pmatrix}, \; a'_{1j} \neq 0 .$$

Получим в каждой строке, начиная со второй, под элементом a'_{1j} число ноль. Для этого к каждой строке $i = 2,\dots,m$, в которой $a_{ij} \neq 0$ будем прибавлять первую строку, умноженную на $-\dfrac{a_{ij}}{a'_{1j}}$. В результате получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j} & a'_{1j+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j+1} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{mj} \end{pmatrix}$$

Далее первая строка НЕ УЧАСТСВУЕТ в преобразованиях.

Если все строки полученной матрицы, кроме первой, нулевые, то мы заканчиваем преобразования, получив матрицу ступенчатого вида.

Если среди оставшихся m–1 строк есть ненулевые, то выбираем ту из них, ненулевой элемент в которой расположен в столбце с наименьшим номером. Меняем местами эту строку со второй, получаем матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a'_{2r} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{1r} & \dots & a_{mj} \end{pmatrix}.$$

К каждой строке, начиная с третьей, прибавляем вторую строку, умноженную на $-\dfrac{a_{ir}}{a'_{2r}}$, $i = 3,\dots,m$, добиваясь того, чтобы в столбце r под элементом a'_{2r} все элементы были равны нулю.

Далее с оставшимися строками проводим, описанные выше преобразования. Поскольку общее число таких преобразований конечно, то в какой-то момент процесс завершится, и мы получим матрицу ступенчатого вида. Теорема доказана.

Матрицы, получаемые друг из друга элементарными преобразованиями, называются ***эквивалентными***. Переход от матрицы к эквивалентной ей матрице принято обозначать знаком ~.

Число ненулевых строк ступенчатой матрицы равно ее **рангу**.

Строки матрицы при преобразованиях будем обозначать R с индексом – номером строки (от англ. *Row* - строка), например $R1$ – первая строка, $R2$ – вторая строка. Производимые над строками действия будем записывать справа от матрицы

Задача 3. Найти ранги матриц A, B и C приведением их к ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -5 & 0\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 0\\ 7 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -5 & 0\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -2R1\\ +3R1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & -5 & 5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +5R2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -15\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A совпадает с рангом последней эквивалентной ей матрицы и равен трем.

Рассмотрим матрицу B. Ранее мы видели, что удобно работать, если удается в верхнем левом углу матрицы получить 1 (или –1). В нашем примере для этого достаточно поменять местами первую и вторую строки.

$$B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ +2R1\\ \\ +R1\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -R2\\ -R2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы B совпадает с рангом последней эквивалентной ей матрицы и равен двум.

Рассмотрим матрицу C. Получим в верхнем левом углу единицу, прибавив к первой строки вторую, умноженную (–1) .

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} -R2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +3R1 \\ -7R1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -15 \\ 0 & -10 & 34 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ :2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -15 \\ 0 & -5 & 17 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \times 5 \\ \times 7 \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 35 & -75 \\ 0 & -35 & 119 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +R2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 35 & -75 \\ 0 & 0 & 44 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы C совпадает с рангом последней эквивалентной ей матрицы и равен трем.

4.5. Основные понятия теории систем линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными величинами $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Напомним несколько используемых ранее определений и дадим новые.

Определение 5. ***Решением системы*** (1) называется совокупность n <u>значений</u> $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ <u>неизвестных</u> $(x_1, x_2, ..., x_n)$: $\begin{matrix} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ ... \\ x_n = \alpha_n \end{matrix}$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные тождества.

Определение 6. Система называется ***несовместной***, если она не имеет решений.

Определение 7. Система называется ***совместной***, если она имеет <u>хотя бы одно</u> решение.

Определение 8. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет <u>единственное</u> решение.

Совместная система называется ***неопределенной***, если она имеет <u>бесконечно много</u> решений.

Матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов в системе (1) называется ***основной матрицей*** системы.

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных членов

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных.

Определение 9. Если в системе (1) столбец B свободных членов равен нулевому вектору $b_i=0, i=1,\dots,n$, то система называется ***однородной***, в противном случае $(B\neq 0)$ – ***неоднородной***

Неоднородная система

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-4x_4=9 \\ -x_1 \qquad +x_3+7x_4=-2 \\ 3x_1-x_2+2x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

Однородная система

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-4x_4=0 \\ -x_1 \qquad +x_3+7x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

Матрица $A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$, называется ***расширенной матрицей*** системы (1).

Систему (1) можно записать в виде матричного уравнения $A\cdot X=B$. Ранее было показано, что:

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}=B$$

Если $m=n$ и матрица A невырожденная, то решение может быть записано в матричном виде $X=A^{-1}\cdot B$.