МИРЭА
Российский технологический университет

Математический анализ, 2 семестр

Лекция 11

Поверхностные интегралы

Примеры на повторение материала лекции 10.

Пример 1. Вычислить двумя способами.

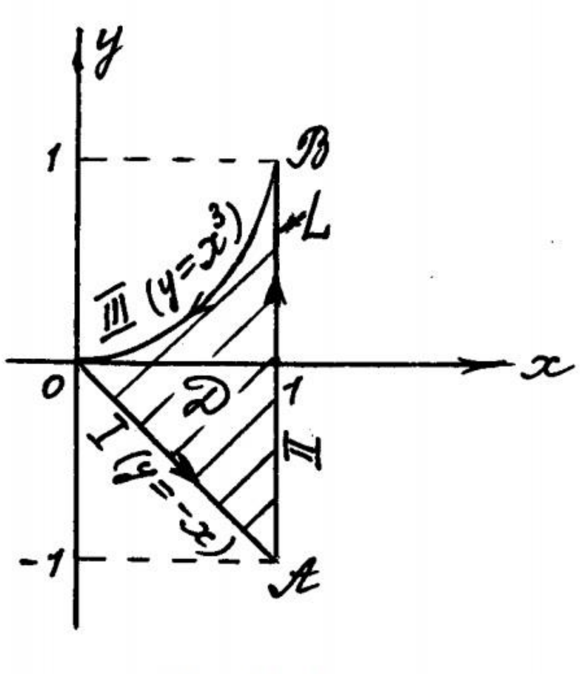


Рис. 11.1.

$$\oint_L ydx - xdy$$

где замкнутый контур L образован отрезками прямых $y = -x, x = 1,$ и дугой кубической параболы $y = x^3$ (рис. 11.1).

1 способ.

$$\oint_L = \int_{OIA} + \int_{AIIB} + \int_{BIIIO}$$

$$OIA: y = -x, dy = -dx, x \in [0,1]$$

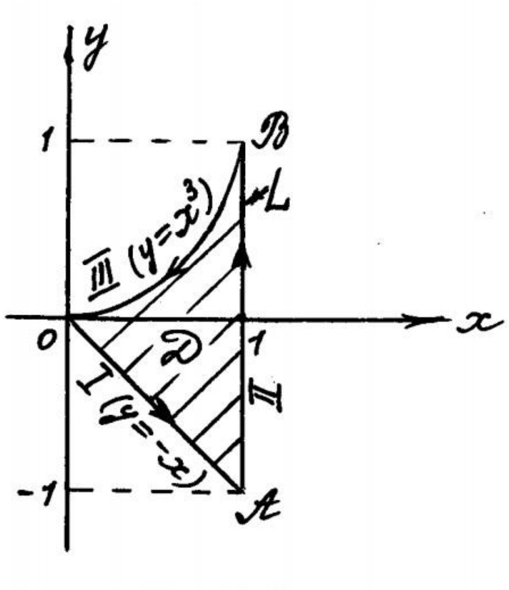


Рис. 11.1.

$$\int\limits_{OIA} ydx - xdy = \int\limits_{0}^{1} (-x + x)dx = 0$$

$$AIIB: x = 1, dx = 0, y \in [-1,1]$$

$$\int\limits_{AIIB} ydx - xdy = \int\limits_{-1}^{1} (-1)dy = -2$$

$$BIIIO: y = x^3, dy = 3x^2dx, x \in [1,0]$$

$$\int\limits_{BIIIO} ydx - xdy = \int\limits_{1}^{0} (x^3 - x \cdot 3x^2)dx = \int\limits_{1}^{0} (-2x^3)dx = -\frac{x^4}{2}\Bigg|_{1}^{0} = \frac{1}{2}$$

$$\oint\limits_{L} ydx - xdy = 0 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

2 способ. Применим формулу Грина:

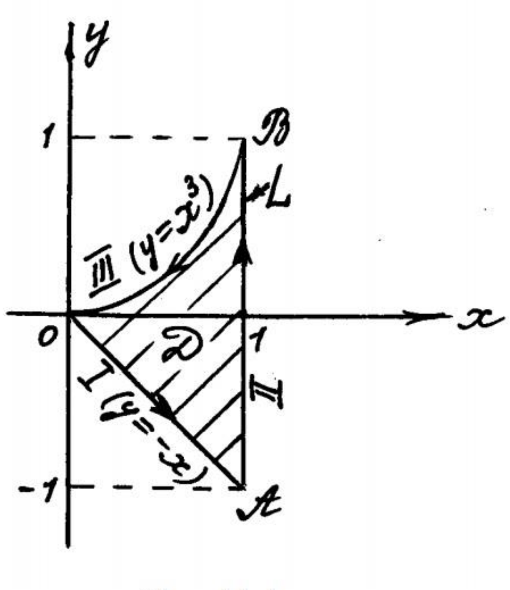


Рис. 11.1.

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\oint\limits_L ydx - xdy = \iint\limits_D (-2)dxdy = -2\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x^3} dy$$

$$= -2\int\limits_0^1 (x^3 + x)dx =$$

$$= -2\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

Пример 2. Вычислить двумя способами.

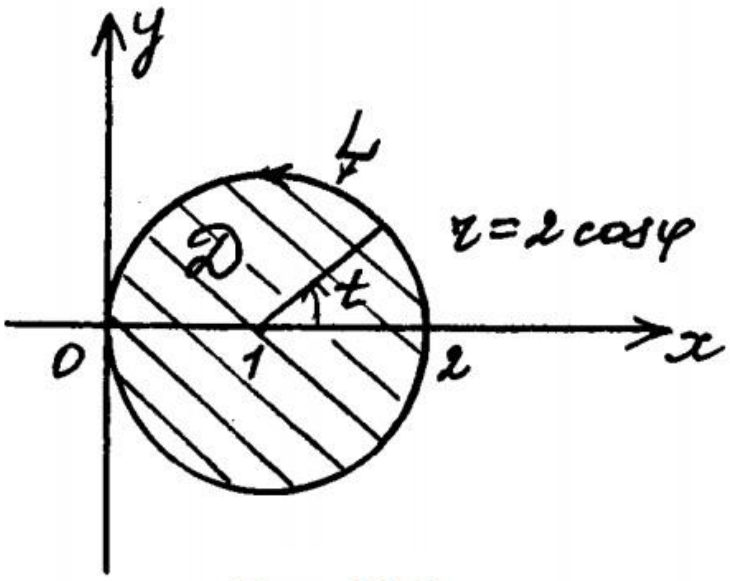


Рис. 11.2.

$$\oint_L xydx + ydy$$

где замкнутый контур L – окружность, заданная уравнением

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рис. 11.2).

1 способ.

Введем параметрические уравнения окружности:

$$x = 1 + \cos t\,, y = \sin t\,, t \in [0,2\pi]$$

$$dx = -\sin t\,dt, dy = \cos t\,dt$$

$$\oint_L xydx + ydy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big((1+\cos t)\sin t\,(-\sin t) + \sin t\cos t\big)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \sin^2 t\cos t + \sin t\cos t)dt = -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}dt +$$

$$+\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \sin t)d(\sin t) = \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\pi$$

2 способ.

Применим формулу Грина и воспользуемся полярными координатами:

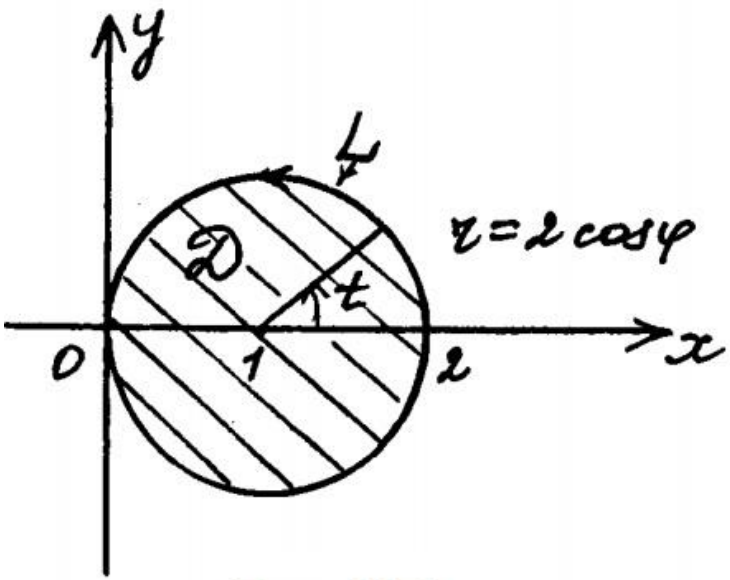


Рис. 11.2.

$$\oint_L xydx + ydy = \iint_D (-x)dxdy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (-r\cos\varphi)rdr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\varphi)d\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\bigg|_0^{2\cos\varphi} = -\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi = -\pi.$$

11. Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл 1 рода

Криволинейный интеграл по длине дуги является естественным обобщением определенного интеграла. Аналогично поверхностный интеграл 1 рода является естественным обобщением двойного интеграла.

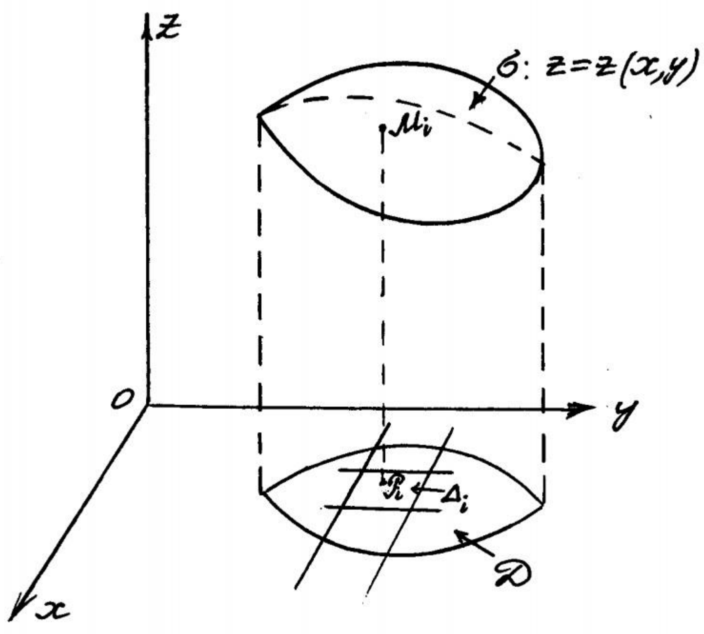


Рис. 11.3.

Пусть гладкая поверхность σ задана в трехмерном пространстве уравнением $z = z(x, y)$, а область D является проекцией поверхности на координатную плоскость xOy (рис. 11.3).

Предположим, что функция $z(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные в области D, а в точках М поверхности σ определена функция $f(M) = f(x, y, z)$.

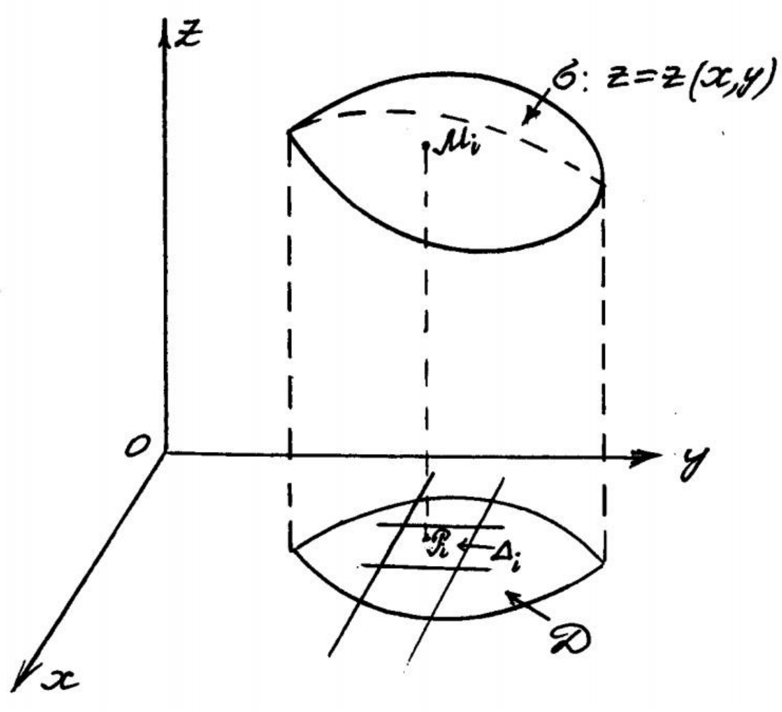


Рис. 11.3.

Введем понятие интеграла функции $f(M)$ по поверхности σ. Для этого разделим область D прямыми, параллельными координатным осям Ox и Oy, на прямоугольники Δ_i со сторонами Δx_i, $\Delta y_i, i = 1, \ldots, n$. За диаметр разбиения d примем наибольшую диагональ этих прямоугольников. Площадь Δ_i равна $\Delta x_i \Delta y_i$. В каждом прямоугольнике Δ_i произвольно выберем точку $P_i(x_i, y_i)$ и поставим этой точке в соответствие точку $M_i(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$ на поверхности σ. Вычислим значение функции $f(M_i) = f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$ в этой точке.

Через точку M_i проведем к поверхности σ касательную плоскость. Если $z'_x(x_i, y_i), z'_y(x_i, y_i)$ – значения частных производных функции $z(x, y)$ в точке $P_i(x_i, y_i)$, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z - z(x_i, y_i) = z'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + z'_y(x_i, y_i)(y - y_i)$$

а вектор нормали к этой плоскости $\overrightarrow{n_i} = \left(-z'_x(x_i, y_i), -z'_y(x_i, y_i), 1\right)$.

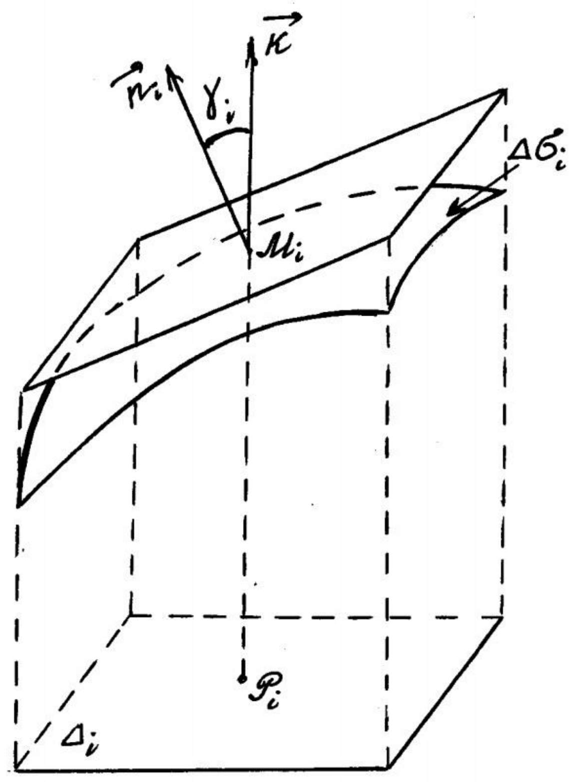


Рис. 11.4.

Через стороны прямоугольника Δ_i проведем плоскости, параллельные оси *Oz*. Площадь $\Delta\sigma_i$ той части поверхности σ, которая вырезается из поверхности этими плоскостями, приближенно равна площади параллелограмма, который вырезается этими же плоскостями из касательной плоскости (рис. 11.4).

Как известно, отношение площади проекции любой плоской фигуры к площади самой фигуры равно косинусу угла между плоскостью фигуры и плоскостью ее проекции. Следовательно, площадь параллелограмма, который вместе с элементом поверхности проектируется в Δ_i, равна

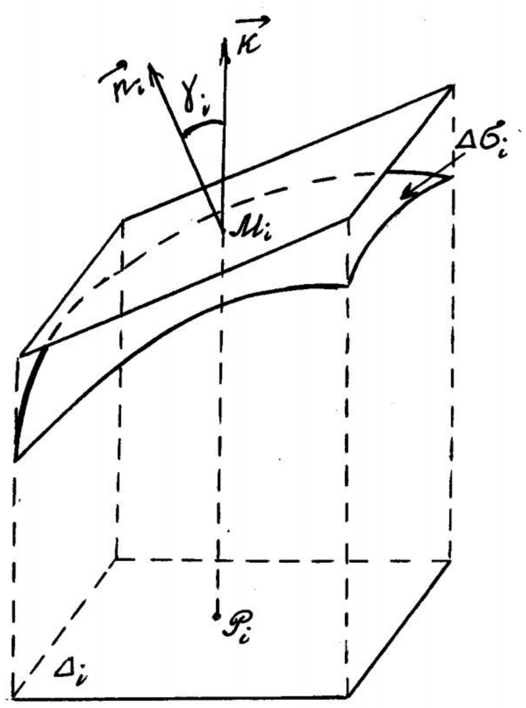


Рис. 11.4.

$$\Delta\sigma_i \approx \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos\gamma_i}$$

где γ_i – угол между касательной плоскостью и плоскостью xOy. Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям. Таким образом, γ_i – это угол между вектором $\vec{n_\iota}$ и единичным вектором $\vec{k} = (0,0,1)$ оси Oz.

$$\vec{n_\iota} = \left(-z'_x(x_i, y_i), -z'_y(x_i, y_i), 1\right)$$

$$\cos\gamma_i = \frac{\vec{n_\iota} \cdot \vec{k}}{|\vec{n_\iota}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(z'_x(x_i, y_i)\right)^2 + \left(z'_y(x_i, y_i)\right)^2}}$$

Итак, для элемента площади поверхности имеем следующее выражение:

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + \left(z'_x(x_i, y_i)\right)^2 + \left(z'_y(x_i, y_i)\right)^2}\,\Delta x_i \Delta y_i$$

Умножая это выражение на значение функции в точке M_i и суммируя полученные произведения, составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\sqrt{1 + \left(z'_x(x_i, y_i)\right)^2 + \left(z'_y(x_i, y_i)\right)^2}\,\Delta x_i \Delta y_i$$

Определение. Поверхностным интегралом 1 рода функции $f(M)$ по поверхности σ называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$ вычисленный при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения.

Обозначается

$$\iint\limits_{\sigma} f(M)d\sigma = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$$

Без доказательства сформулируем достаточные условия существования поверхностного интеграла: если $f(M)$ непрерывна на кусочно-гладкой поверхности σ, то $\iint_{\sigma} f(M)d\sigma$ существует.

Определение. Поверхность σ называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость, непрерывно меняющаяся вдоль поверхности (т.е. при движении по поверхности точки M).

Если поверхность σ задана уравнением $z = f(x, y)$ (точка (x,y)) принадлежит области D), то она будет гладкой тогда и только тогда, когда функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в области D.

Определение. Поверхность σ называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких частей, примыкающих друг к другу по гладким или кусочно-гладким линиям.

Гладкими поверхностями являются, например, плоскость, сфера, эллипсоид. Кусочно-гладкими – куб, конус.

Введенный как предел интегральных сумм, поверхностный интеграл 1 рода обладает всеми свойствами определенного интеграла. Особенностью этого интеграла является его независимость от стороны поверхности, т.е. от выбора направления вектора нормали к этой поверхности.

Способ вычисления поверхностного интеграла 1 рода состоит в сведении его к двойному интегралу по плоской области:

$$\iint\limits_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(z'_x(x,y)\right)^2+\left(z'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy$$

где D_{xy} – проекция σ на координатную плоскость xOy.

Аналогично, если поверхность задана уравнением

$y = y(x, z)$, Dxz – проекция σ на Oxz, то

$$\iint_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2 + \left(y'_z\right)^2} dxdz.$$

Или: если поверхность задана уравнением

$x = x(y, z)$, Dyz – проекция σ на Oyz, то

$$\iint_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2 + (x'_z)^2} dydz.$$

Если подынтегральная функция $f(M) = 1$, то $\iint_\sigma \; d\sigma$ равен площади S поверхности σ:

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(z'_x(x,y)\right)^2 + \left(z'_y(x,y)\right)^2}\, dxdy$$

Если подынтегральную функцию интерпретировать как плотность ρ материальной поверхности, то $\iint_\sigma \; \rho(M)d\sigma$ равен массе этой поверхности.

С помощью поверхностного интеграла первого рода можно вычислять координаты центра масс, моменты инерции материальных поверхностей, а также другие физические величины. Например, координаты центра масс вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{m_{yz}}{m}, y_c = \frac{m_{xz}}{m}, z_c = \frac{m_{xy}}{m}$$

где

$$m = \iint\limits_{\sigma} \rho(M) d\sigma$$

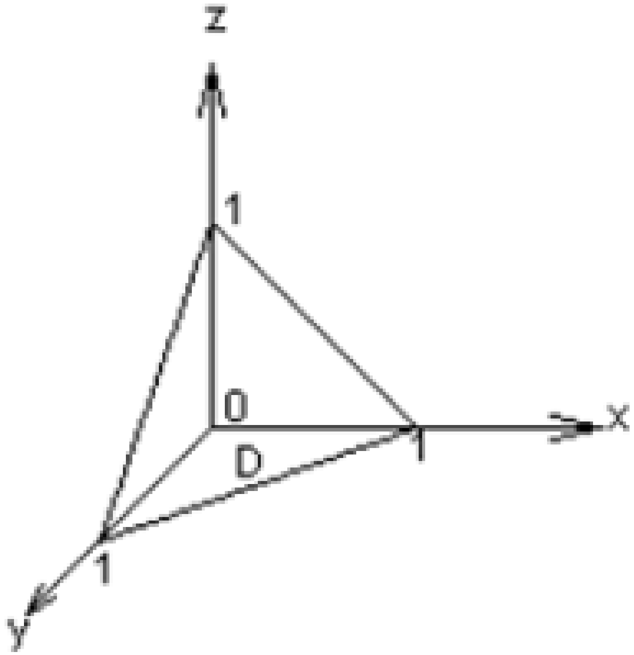
– масса поверхности σ с плотностью $\rho(M)$, а

$$m_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x\rho(M) d\sigma, m_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y\rho(M) d\sigma, m_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\rho(M) d\sigma$$

– статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить $\iint_\sigma (1+x+z)d\sigma$, если σ - плоскость треугольника $x+y+z=1, x>0, y>0, z>0.$



Выразим z из уравнения плоскости:

$z=1-x-y.$

Вычислим частные производные:

$z'_x=-1, z'_y=-1,$

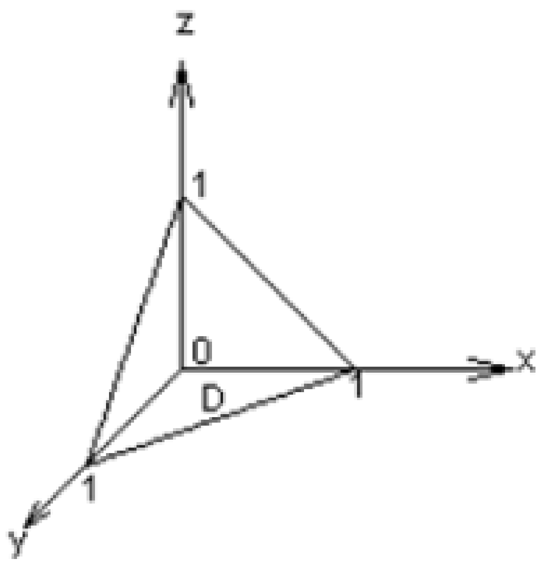
$d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy,$

$$\iint\limits_\sigma (1+x+z)d\sigma=\sqrt{3}\iint\limits_{Dxy}(1+x+1-x-y)dxdy=$$

$$= \sqrt{3} \iint\limits_{Dxy} (1 + x + 1 - x - y)dxdy =$$

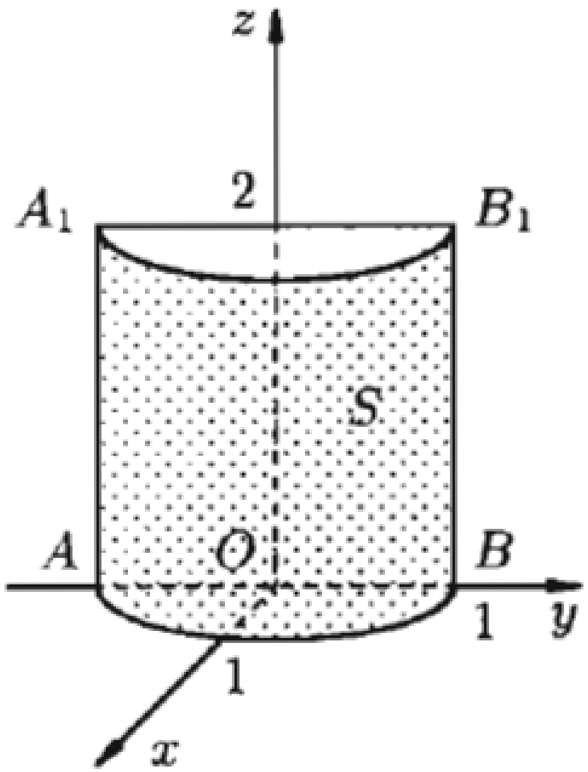
$$= \sqrt{3} \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} (2 - y)dy = \sqrt{3} \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{1-y} (2 - y)dx =$$

$$= \sqrt{3} \int\limits_{0}^{1} (2 - y)(1 - y)dy = \sqrt{3} \int\limits_{0}^{1} (2 - 3y + y^2)dy =$$



$$= \sqrt{3}\left(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Пример 2. Вычислить $\iint_\sigma x(y+z)d\sigma$, если σ - часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0, z=2$.



Поверхность однозначно проектируется на плоскость *Oyz*.

$x'_y = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \quad x'_z = 0.$

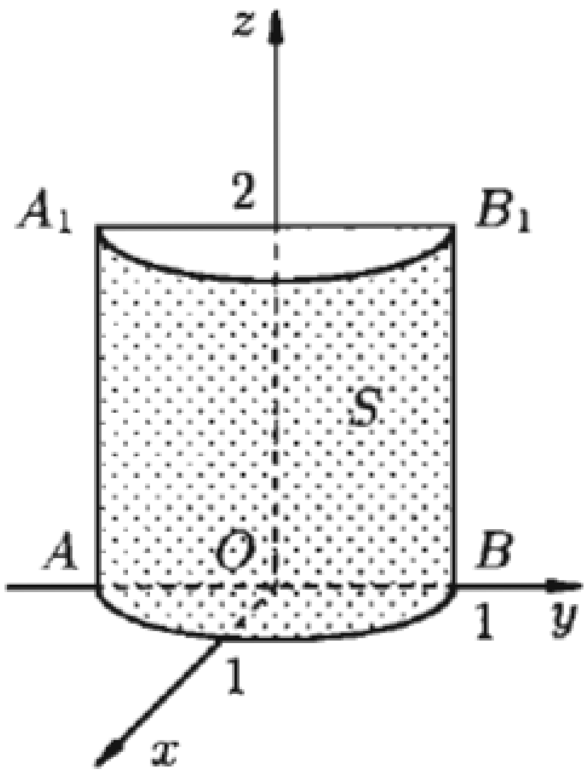
$$d\sigma = \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+(x'_z)^2}dydz =$$

$$= \sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}dydz = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz$$

$$\iint\limits_\sigma x(y+z)d\sigma = \iint\limits_{AA_1B_1B} \sqrt{1-y^2}\cdot(y+z)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz =$$

$$= \iint\limits_{AA_1B_1B} (y+z)\,dydz = \int_{-1}^{1} dy \int_{0}^{2} (y+z)dz = \int_{-1}^{1} \left(yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2y+2)dy = 4$$



Пример 3. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = 4$, которая вырезается из нее цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

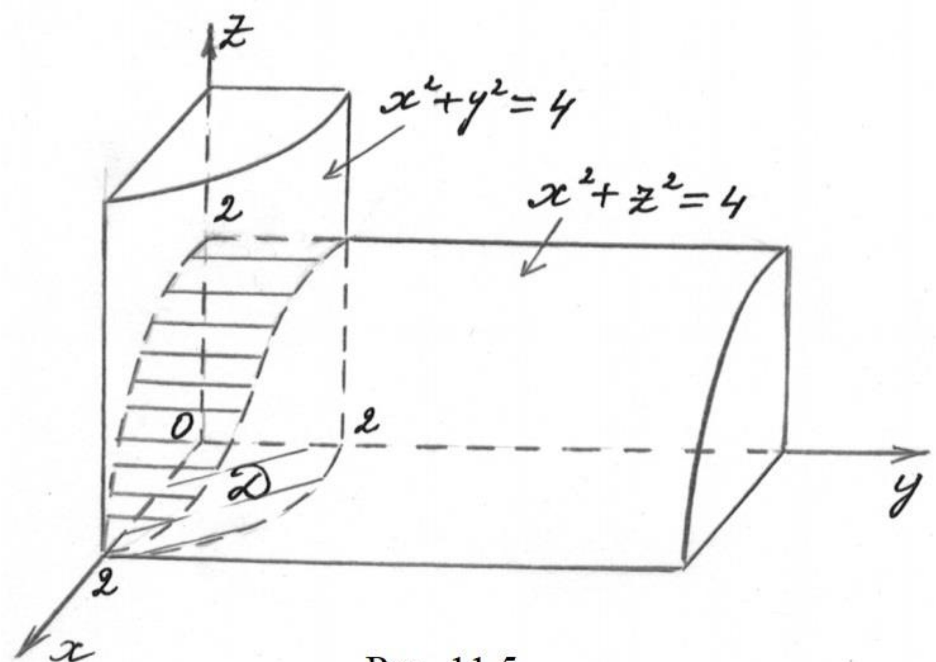


Рис. 11.5.

Вычислим площадь ${}^1/_8$ части поверхности, которая расположена в первом октанте (рис. 11.5). Для этого выразим z из уравнения цилиндра $x^2 + z^2 = 4$, учитывая, что $z \geq 0$:

$z = \sqrt{4 - x^2}$ и вычислим

$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, z'_y = 0,$

$$\sqrt{1 + \left(z'_x(x, y)\right)^2 + \left(z'_y(x, y)\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Проекция D рассматриваемой части поверхности на плоскость xOy – это четверть круга с центром в начале координат и радиуса 2.

$$\frac{1}{8}S = \iint\limits_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2dy}{\sqrt{4-x^2}} = 2\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} y\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}dx =$$

$$= 2\int\limits_0^2 dx = 4, \qquad S = 32$$

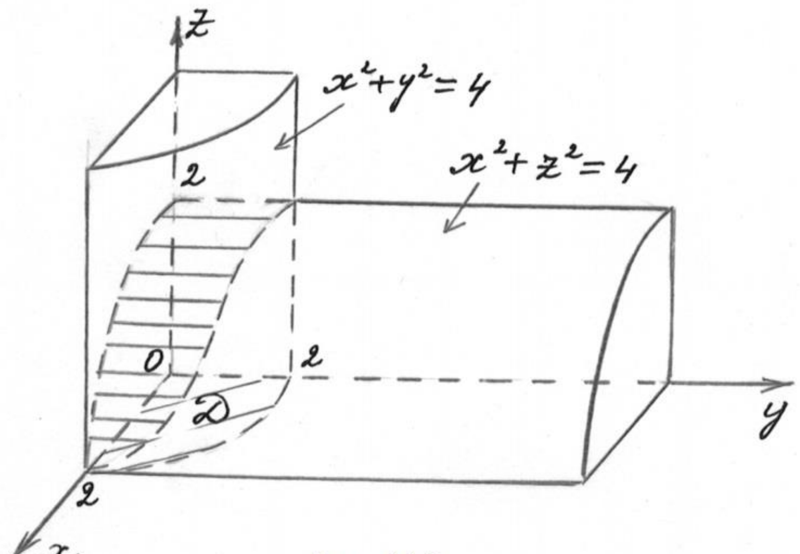


Рис. 11.5.

При решении данного примера несмотря на то, что область интегрирования представляет собой часть круга, удобными оказываются декартовы координаты.

Пример 4. Вычислить площадь части полусферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, которая вырезается из нее цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ (рис. 11.6).

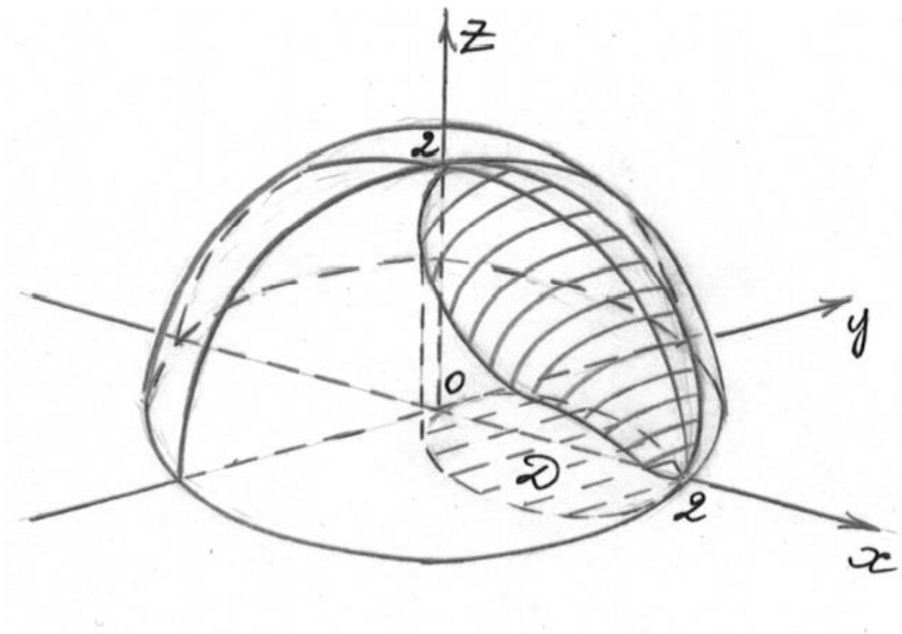


Рис. 11.6.

Проекция поверхности на плоскость *xOy* – это круг, уравнение границы которого запишем в полярных координатах:

$$r = 2\cos\varphi\,, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Предварительно вычислим

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(z'_x(x,y)\right)^2+\left(z'_y(x,y)\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}=$$

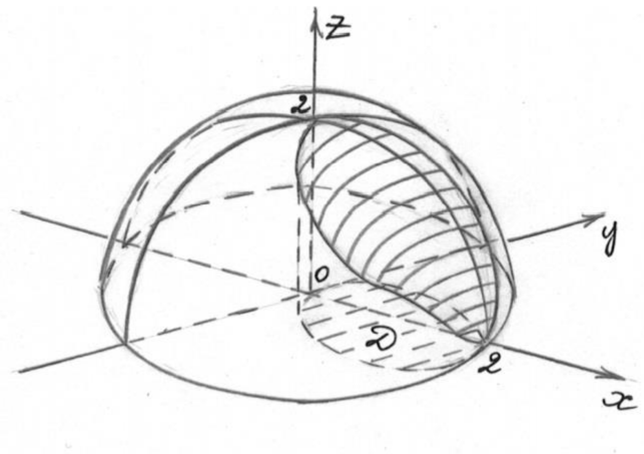


Рис. 11.6.

$$=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

Для вычисления площади воспользуемся симметрией поверхности и применим полярные координаты:

$$S=\iint\limits_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{2rdr}{\sqrt{4-r^2}}=$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \frac{2rdr}{\sqrt{4-r^2}} =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{4-r^2}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(2-\sqrt{4-4\cos^2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= 8\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi) d\varphi = 8(\varphi+\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 4\pi - 8$$

Замечание. Тело, которое вырезается из шара, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=1$, цилиндром $x^2+y^2=2x$, называется телом Вивиани по имени итальянского математика XVII века.

Пример 5. Вычислить координаты центра масс однородного конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченного плоскостью $z = 1$ (рис. 11.7).

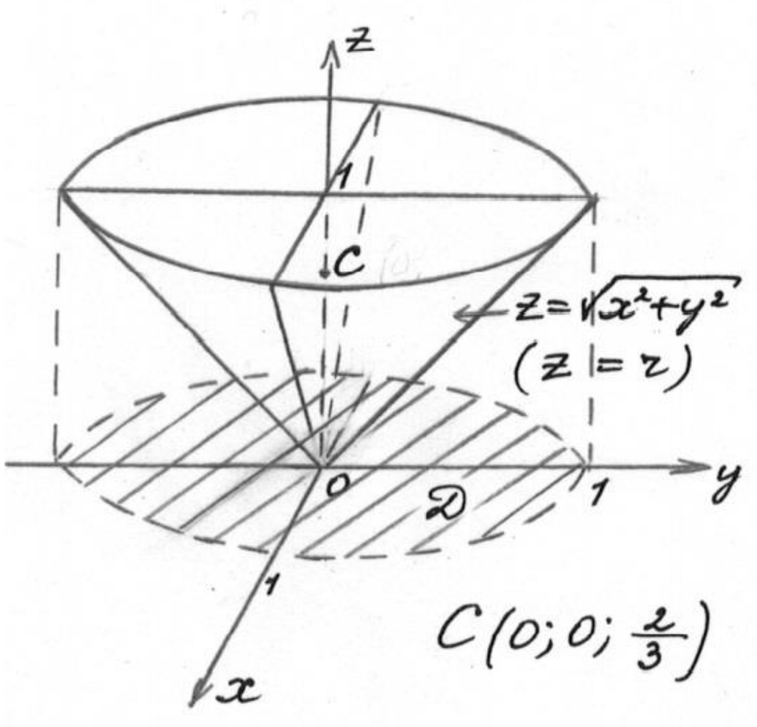


Рис. 11.7.

Вычислим

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{1 + \left(z'_x(x, y)\right)^2 + \left(z'_y(x, y)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Полагая, что плотность поверхности $\rho = 1$ и учитывая, что проекция ее на плоскость *xOy* – это круг D с центром в начале координат и радиуса 1, вычислим массу поверхности:

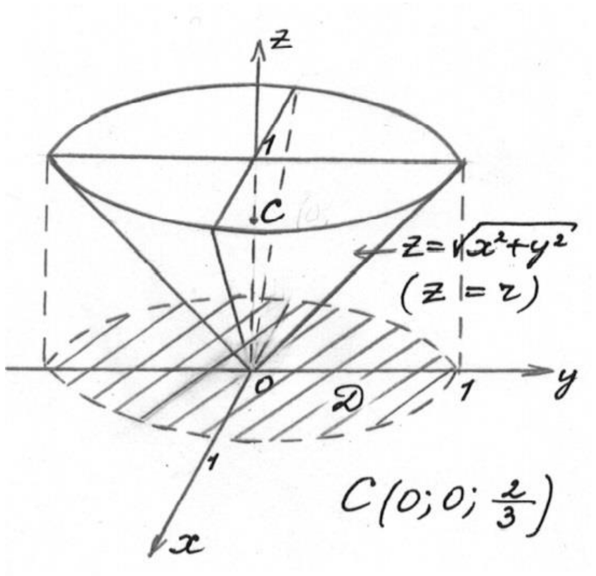


Рис. 11.7.

$$m = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\pi$$

В силу симметрии и однородности центр масс поверхности находится на оси Oz: $x_c = y_c = 0$. Вычислим статический момент относительно плоскости xOy, пользуясь полярными координатами: $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$$m_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\rho(M)d\sigma = \iint\limits_{D} z\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r^2dr = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

$$z_c = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi : \left(\pi\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}, \;\; C\left(0{,}0{,}\frac{2}{3}\right).$$

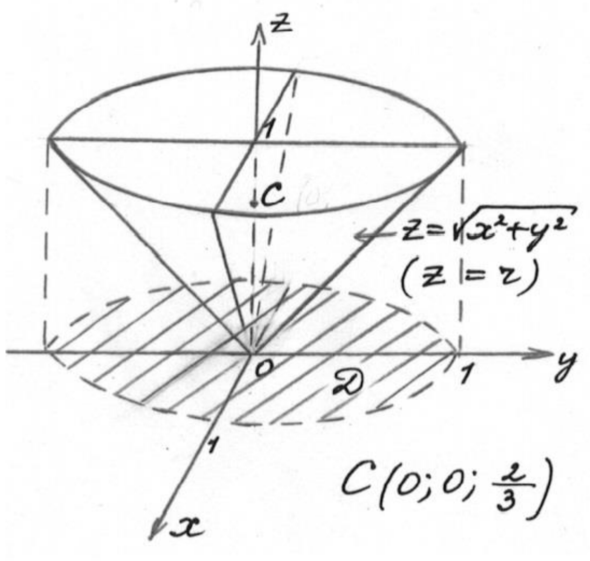


Рис. 11.7.

Для сравнения вычислим координаты центра масс однородного тела, ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z = 1$, полагая, что плотность тела $\rho = 1$.

Для вычисления тройного интеграла воспользуемся цилиндрическими координатами. Уравнение конуса в этих координатах имеет вид

$z = r.$

$$m = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 rdz = 2\pi \int_0^1 rz|_r^1 dr = 2\pi \int_0^1 r(1-r)dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r - r^2)dr = 2\,\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

$$m_{xy} = \iiint\limits_V z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 rz dz = 2\pi \int_0^1 r \left(\frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_r^1 dr =$$

$$= \pi \int_0^1 r(1 - r^2) dr = \pi \int_0^1 (r - r^3) dr = \pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_c = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$$

$$C\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$$

Пример 6. Вычислить координаты центра масс однородной поверхности параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, ограниченной плоскостью $z = \frac{3}{2}$ (рис. 11.8).

Предварительно вычислим

$$z'_x = x, z'_y = y, \sqrt{1 + \left(z'_x(x,y)\right)^2 + \left(z'_y(x,y)\right)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

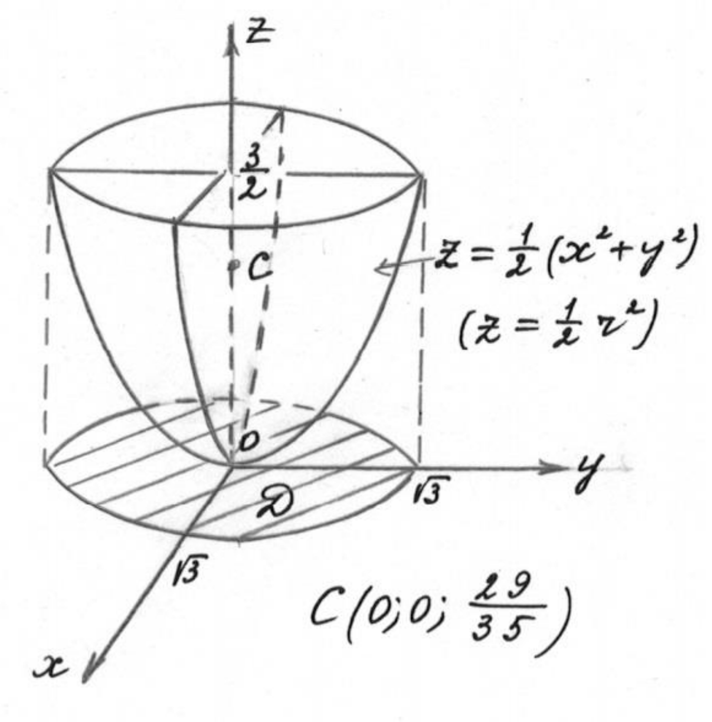


Рис. 11.8.

Полагая $\rho = 1$ и учитывая, что проекция поверхности на плоскость xOy представляет собой круг D, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 3$, вычислим массу поверхности, пользуясь полярными координатами:

$$m = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy =$$

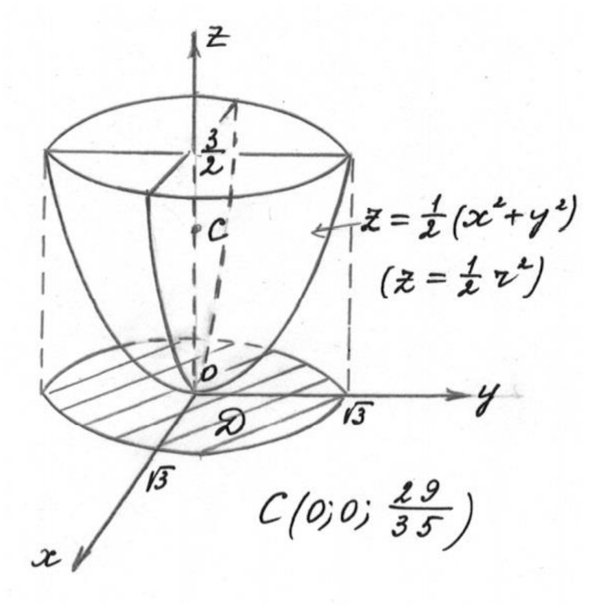


Рис. 11.8.

$$= \iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+r^2}\,rdr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}(8-1) = \frac{14\pi}{3}$$

Центр масс параболоида расположен на его оси симметрии: $x_c = y_c = 0$. Вычислим статический момент относительно плоскости *xOy*:

$$m_{xy} = \iint\limits_\sigma z d\sigma = \iint\limits_D z\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} r^2 \sqrt{1+r^2}\,rdr =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{1+r^2} = t, t \in [1,2] \\ r^2 = t^2 - 1, rdr = tdt \end{bmatrix} = \pi \int\limits_1^2 (t^2-1)\cdot t \cdot tdt = \pi \int\limits_1^2 (t^4 - t^2)dt =$$

$$= \pi \int_1^2 (t^4 - t^2)dt = \pi\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^2 = \pi\left(\left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{58\pi}{15}$$

$$z_c = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{58\pi}{15} : \frac{14\pi}{3} = \frac{29}{35}$$

$$C\left(0{,}0, \frac{29}{35}\right)$$

Для сравнения вычислим координаты центра масс однородного тела, ограниченного параболоидом $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ и плоскостью $z = \frac{3}{2}$, полагая, что плотность тела $\rho = 1$.

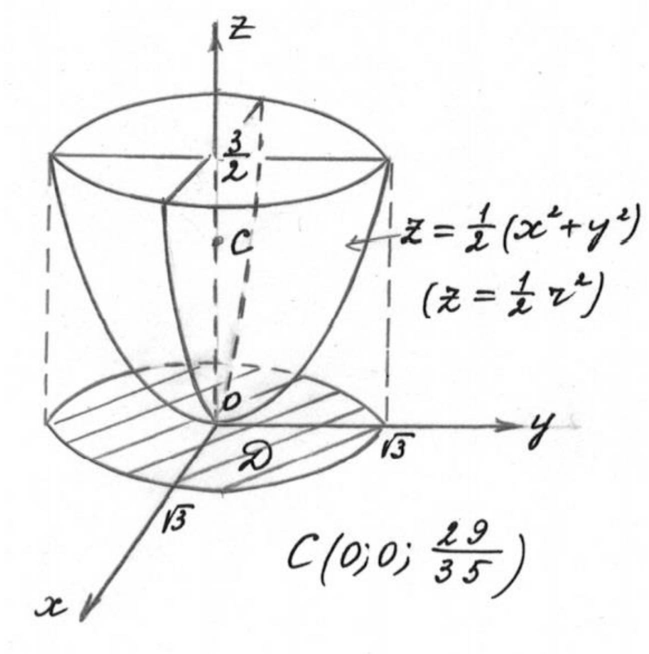


Рис. 11.8.

Для вычисления тройного интеграла воспользуемся цилиндрическими координатами. Уравнение параболоида в этих координатах имеет вид $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}r^2$.

$$m = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^{\frac{3}{2}} rdz$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} rz\Big|_{\frac{1}{2}r^2}^{\frac{3}{2}} dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}r^2\right)dr =$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (3r - r^3)dr = \pi\left(\frac{3}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right) = \frac{9\pi}{4}$$

$$m_{xy}=\iiint\limits_V zdxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}dr\int\limits_{\frac{1}{2}r^2}^{\frac{3}{2}}rzdz=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}r^2}^{\frac{3}{2}}dr=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}r^4\right)dr=\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\sqrt{3}}(9r-r^5)dr=\frac{\pi}{4}\left(\frac{9}{2}r^2-\frac{1}{6}r^6\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{27}{2}-\frac{27}{6}\right)=\frac{9\pi}{4}$$

$$z_c=\frac{m_{xy}}{m}=\frac{9\pi}{4}:\frac{9\pi}{4}=1$$

$$C(0,0,1)$$

Пример 7. Вычислить координаты центра масс однородной полусферы $x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0$ (рис. 11.9).

Выразим z из уравнения полусферы $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ и вычислим

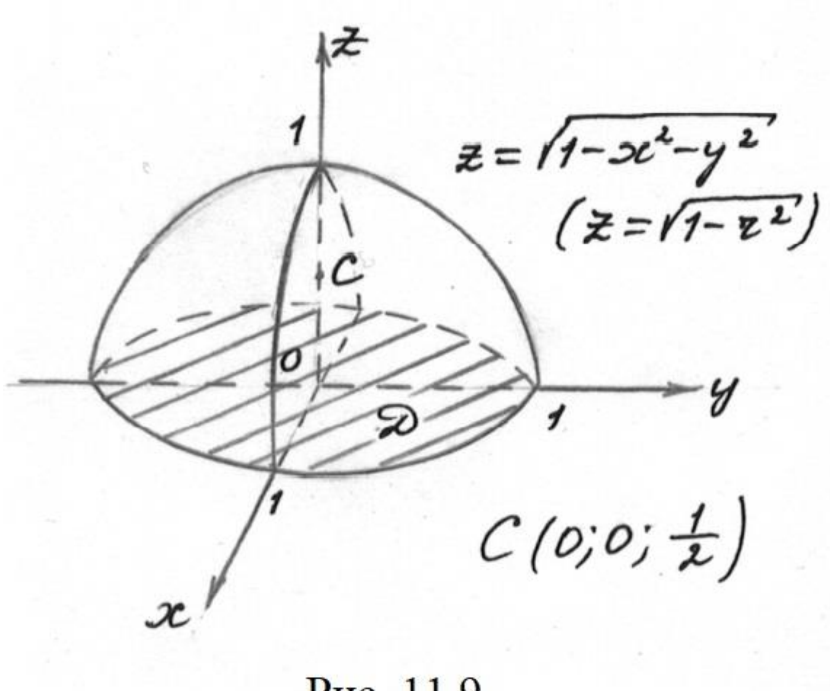


Рис. 11.9.

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$z'_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(z'_x(x,y)\right)^2+\left(z'_y(x,y)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Полагая, что поверхностная плотность $\rho = 1$ и учитывая, что проекция D полусферы на плоскость xOy представляет собой круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$, вычислим массу полусферы пользуясь полярными координатами:

$$m = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} =$$

$$= 2\pi \left(-\sqrt{1 - r^2}\right)\Big|_0^1 = 2\pi$$

Вычислим статический момент полусферы относительно плоскости xOy:

$$m_{xy} = \iint\limits_{\sigma} zd\sigma = \iint\limits_{D} \frac{zdxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \iint\limits_{D} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} =$$

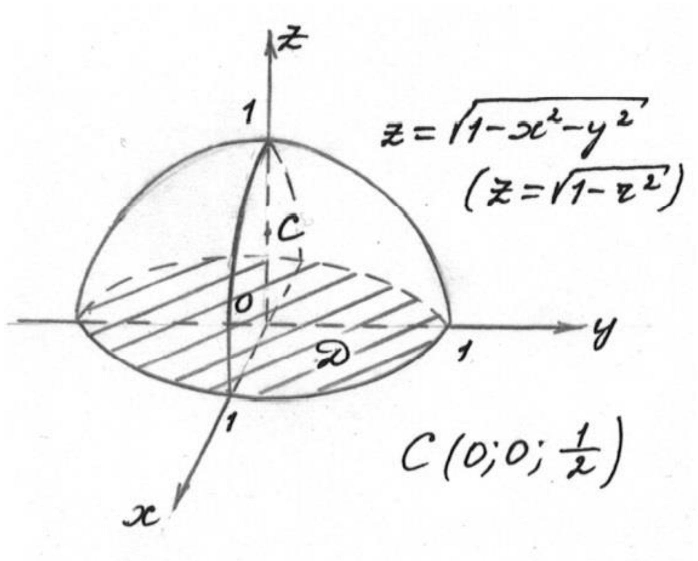


Рис. 11.9.

$$= \iint_D dxdy = \pi$$

$$z_C = \frac{m_{xy}}{m} = \pi : 2\pi = \frac{1}{2}$$

$$C\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$$

Задача о вычислении координат центра масс однородного полушара, заданного системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

была решена в лекции 9, и был получен результат

$$C\left(0,0,\frac{3}{8}\right).$$