Математический анализ, 2 семестр

Лекция 7

Двойной интеграл

8. Двойной интеграл

8.1. Определение двойного интеграла

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к понятию определенного интеграла. Аналогично задача о вычислении объема цилиндрического тела приводит к понятию двойного интеграла.

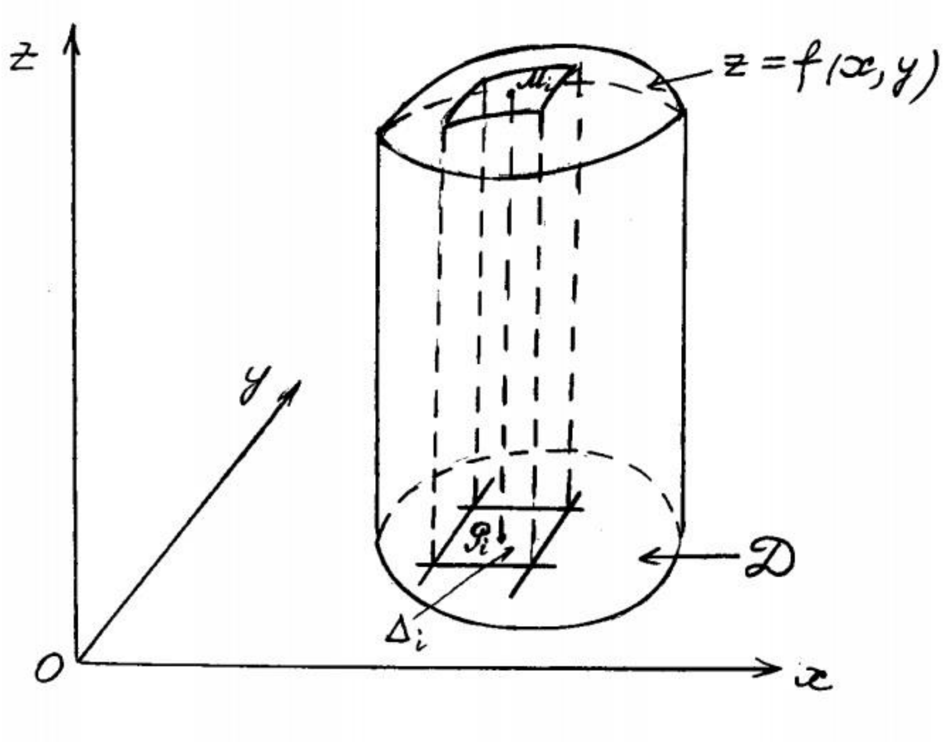


Рис. 7.1.

Рассмотрим тело, которое ограничено сверху поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, снизу областью D координатной плоскости xOy, а боковая поверхность тела является цилиндрической с образующей, параллельной оси Oz (рис. 7.1).

Для вычисления объема этого тела разделим его на элементарные части, просуммируем объемы этих частей и перейдем к пределу.

1). Область D плоскости xOy разделим на n частей прямыми, параллельными координатным осям Ox и Oy. Каждый элемент разбиения области D будет представлять собой прямоугольник Δ_i со сторонами Δx_i и Δy_i $(i = 1,2, \dots, n)$, а его площадь будет равна $\Delta x_i \Delta y_i$.

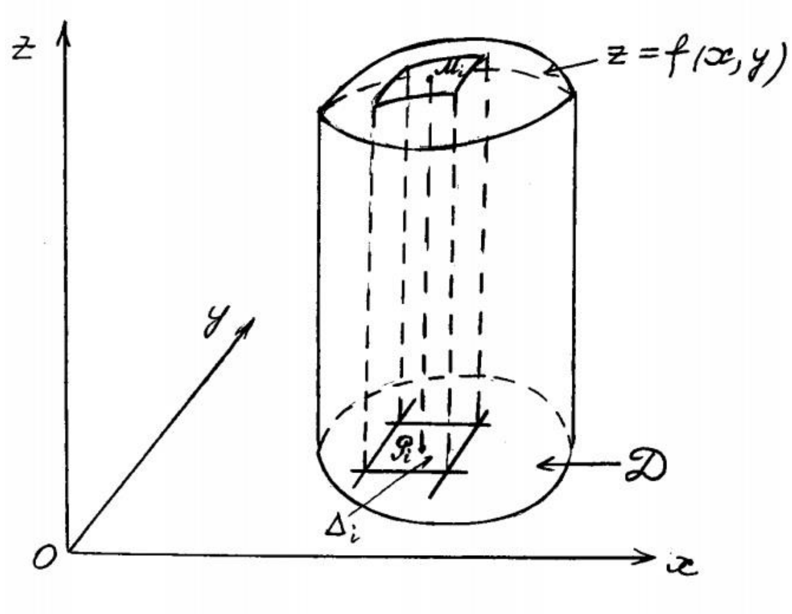


Рис. 7.1.

2). В каждом прямоугольнике произвольно выберем точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим значение функции $z = f(x, y)$ в этой точке: $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$ – аппликата точки M_i на поверхности $z = f(x, y)$.

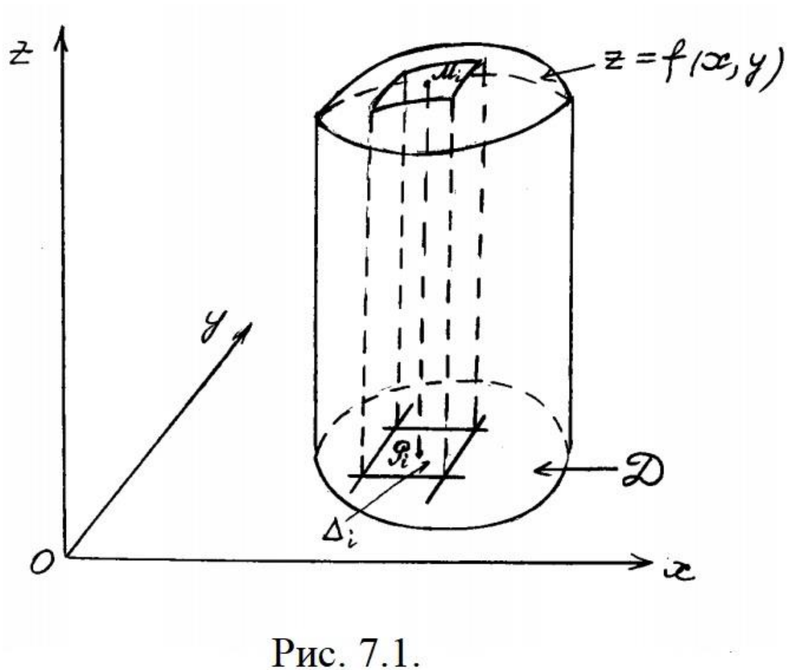


Рис. 7.1.

3). Через стороны каждого прямоугольника Δ_i проведем плоскости, параллельные оси *Oz*. Тело при этом разобьется на элементарные части, каждую из которых можно приближенно принять за прямоугольный параллелепипед с основанием Δ_i и высотой z_i, объем которого ΔV_i равен

$$\Delta V_i = f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i,$$

а объем всего тела приближенно выразится формулой

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

4). Диаметром разбиения d будем считать наибольшую из диагоналей всех прямоугольников Δ_i.

5). За объем естественно принять предел полученного приближенного значения при условии $d \to 0$:

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

Правая часть этого равенства по определению и есть двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D. Этот интеграл обозначается

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Таким образом, объем V цилиндрического тела равен:

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

При вычислении объема цилиндрического тела естественно предполагалось, что функция $z = f(x, y)$ принимает в области D положительные значения, т.к. поверхность $z = f(x, y)$ ограничивает тело сверху. В общем случае для определения двойного интеграла произвольной (по знаку) функции $f(x, y)$ область D делится на n частей, в каждой из которых произвольно выбирается точка $P_i(\xi_i, \eta_i)$, вычисляется значение $f(\xi_i, \eta_i)$ функции в этой точке и вычисляется интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

Определение 1. Двойным интегралом функции $f(x,y)$ по области *D* называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$ при условии, что диаметр *d* разбиения стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения области.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

Функция, имеющая интеграл по области, называется *интегрируемой* в этой области. Без доказательства сформулируем следующее утверждение:

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области *D*, а область *D* ограничена кусочно-гладкой кривой, то функция $f(x,y)$ *интегрируема* в области *D*.

Если подынтегральная функция больше нуля, то двойной интеграл равен объему цилиндрического тела.

8.2. Основные свойства двойного интеграла

Двойной интеграл, также как и определенный интеграл, равен пределу интегральной суммы и, следовательно, обладает всеми свойствами определенного интеграла. Перечислим эти свойства:

1. **Линейность.**

$$\iint_D (c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y))dxdy = c_1 \iint_D f_1(x,y)dxdy + c_2 \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

2. **Аддитивность.**

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

если $D = D_1 \cup D_2,\;\; D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

3.

$$\iint_D dxdy = S_D$$

Т.к. $f(x,y) = 1$, следовательно, интегральная сумма есть сумма площадей элементов разбиения области D:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i \Delta y_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S.$$

4. **Интегрирование неравенств.**

Если $f(x,y) \leq g(x,y)$ в области D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

5. **Оценка двойного интеграла.**

Если $m = \min_D f(x,y)$, $M = \max_D f(x,y)$, S – площадь области D, то

$$mS \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq MS$$

6. **Теорема о среднем.**

Если $f(x,y)$ непрерывна в области D, то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0) \in D$, что

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S$$

8.3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Перейдем к вопросу о вычислении двойного интеграла. Будем предполагать, что область D ограничена графиками функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 7.2).

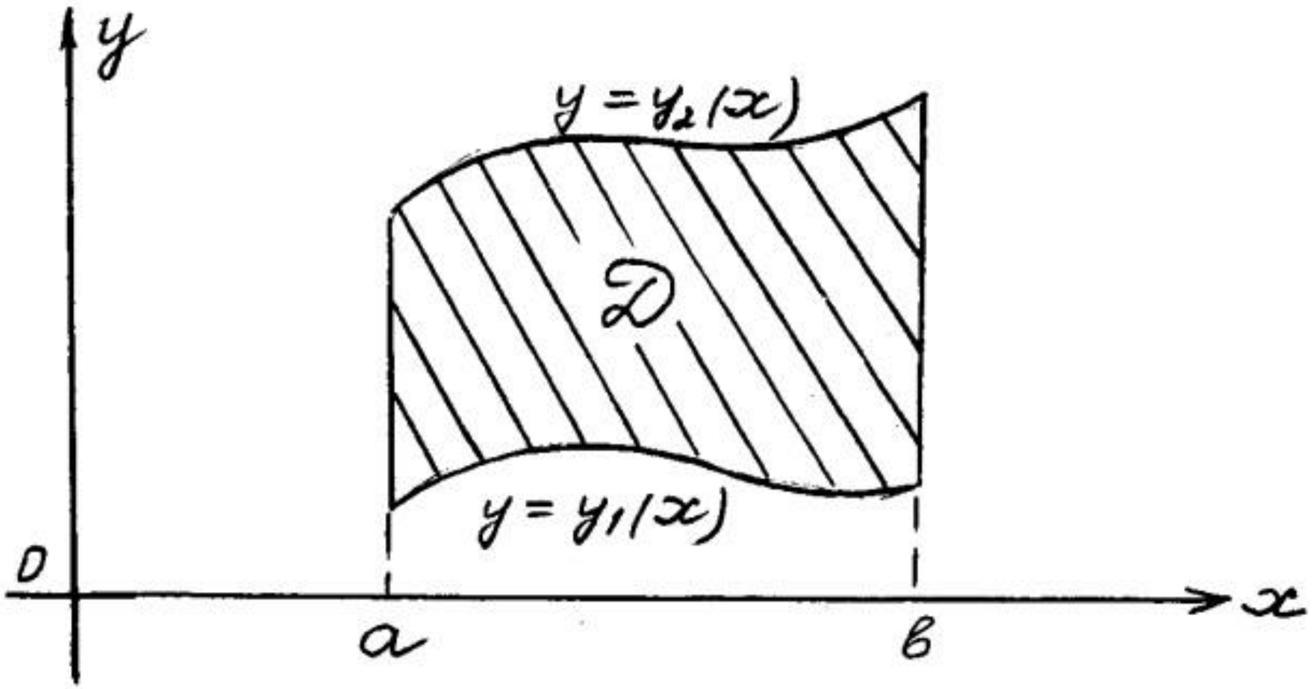


Рис. 7.2.

Если область D имеет более сложную форму, ее следует делить на части и пользоваться аддитивностью двойного интеграла. Двойной интеграл функции $f(x, y)$ по области D равен объему тела, сечения которого плоскостями, параллельными плоскости yOz, представляют собой криволинейные трапеции (рис. 7.3), площади которых вычисляются по формулам:

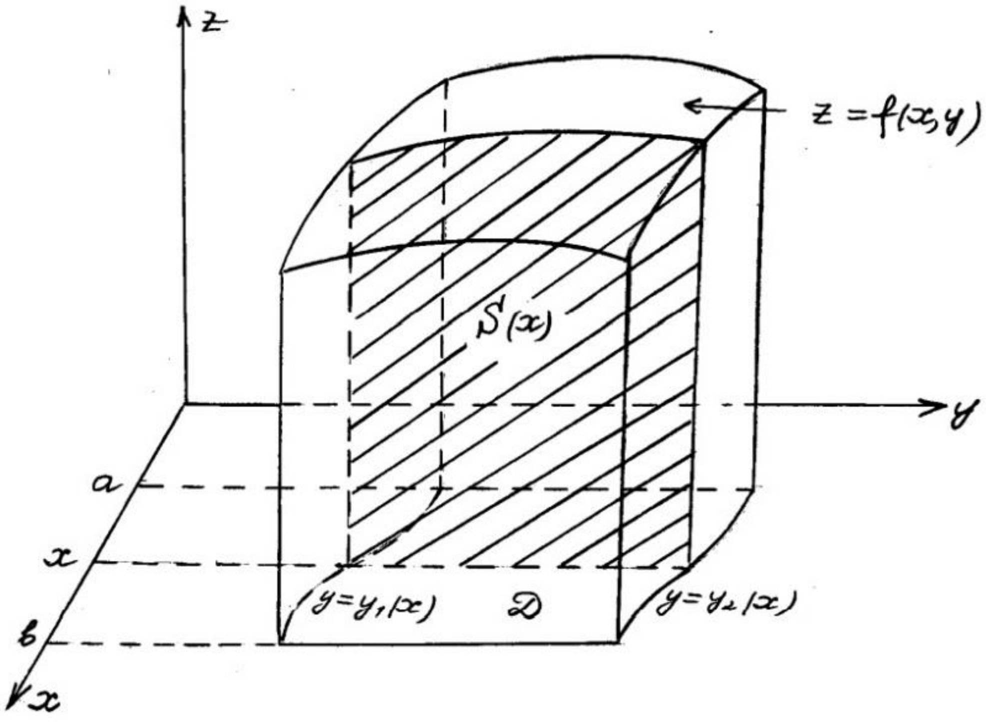


Рис. 7.3.

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

Теперь воспользуемся формулой для вычисления объема тела с известными поперечными сечениями:

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Т.к. двойной интеграл функции $f(x,y)$ по области D равен объему цилиндрического тела, то для двойного интеграла получена формула:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Правую часть формулы называют повторным интегралом и обычно записывают в виде:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Итак, пользуясь геометрическим смыслом двойного интеграла, мы нашли способ его вычисления, состоящий в представлении двойного интеграла в виде повторного:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Если область D ограничена графиками функций $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$ (рис. 7.4), то двойной интеграл можно представить в виде повторного другим способом:

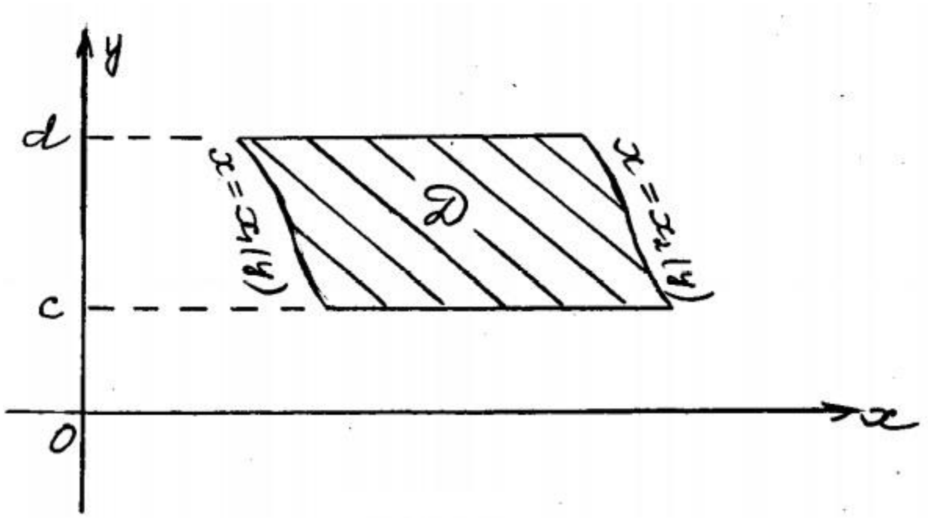


Рис. 7.4.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

где область D ограничена $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.

Область интегрирования – прямоугольник.

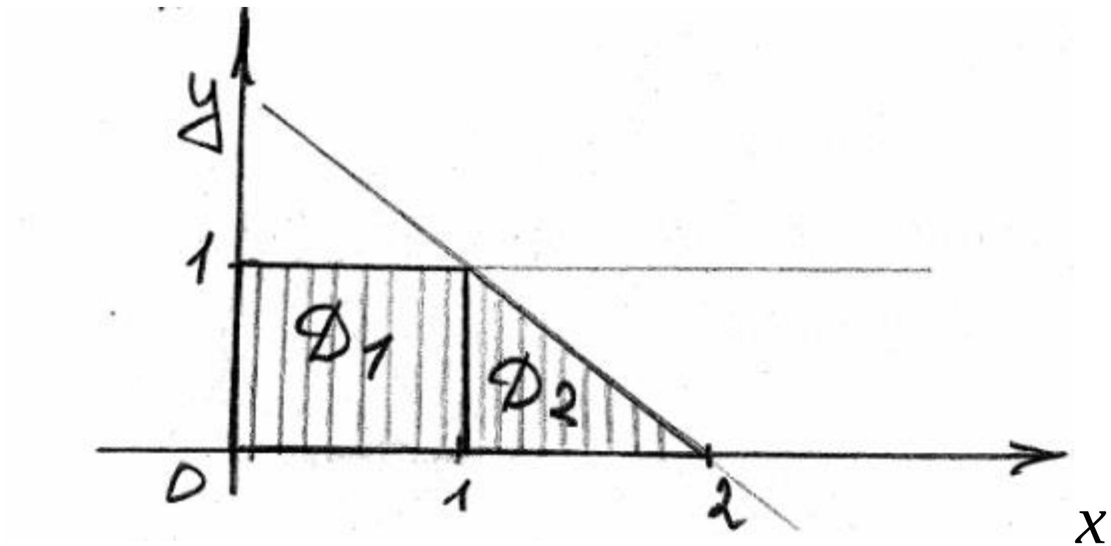
$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)\, dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 dx =$$

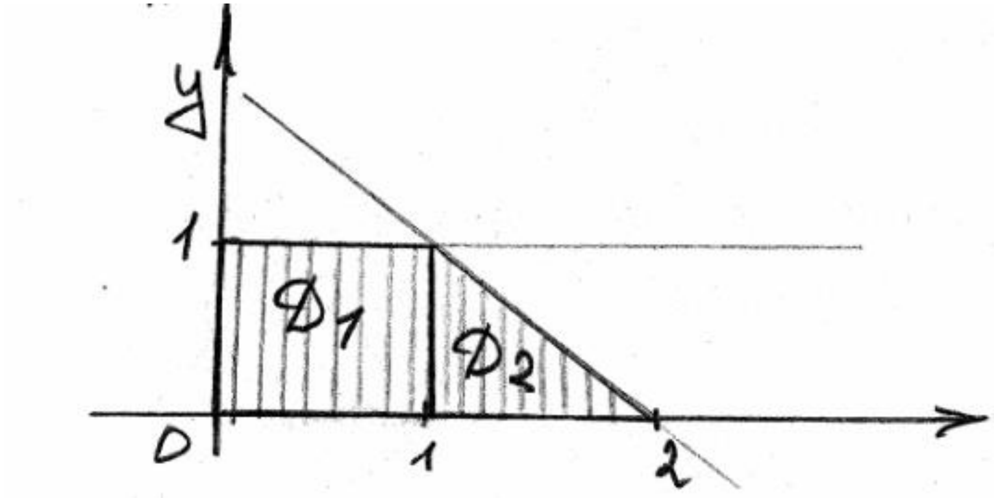
$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Пример 2. В двойном интеграле расставить пределы интегрирования двумя способами

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

где область *D* ограничена графиками функций $\begin{cases} x = 0, \ y = 0 \\ y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$.





Проектируем область интегрирования на ось Oy:

$0 \le y \le 1$.

$0 \le x \le 2 - y$.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx$$

Проектируем область интегрирования на ось Oy: $0 \le x \le 2$.

В этом интервале изменения переменной x переменная y изменяется по-разному:

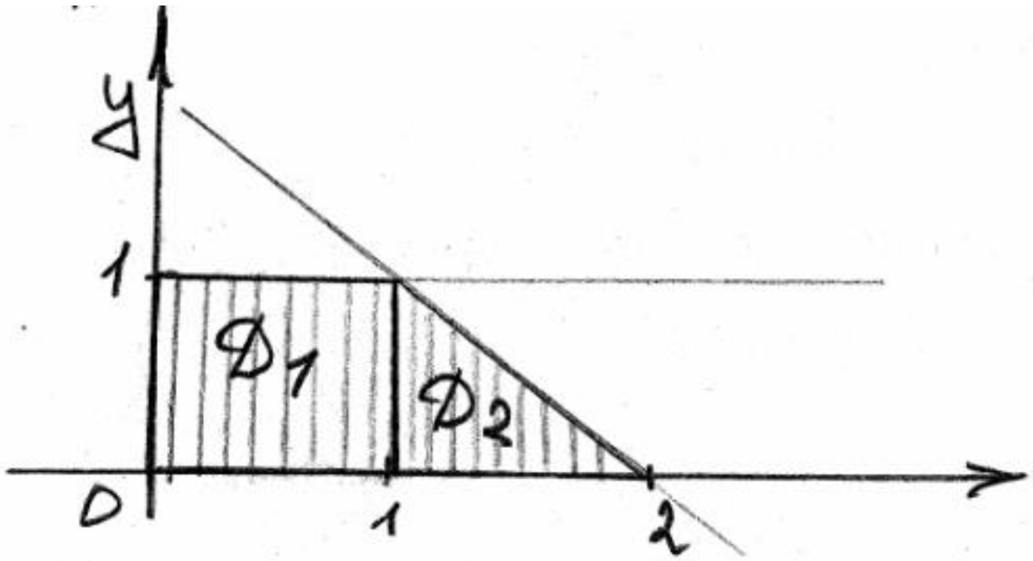
$0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le y \le 1$

$1 \le x \le 2 \;\Rightarrow 0 \le y \le 2 - x$.

Область интегрирования D делим на 2 области $D = D_1 \cup D_2$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$



Пример 3. Вычислить двумя способами

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy$$

где область *D* ограничена графиками функций $y = x$ и $y = x^2$ (рис. 7.5).

1 способ.

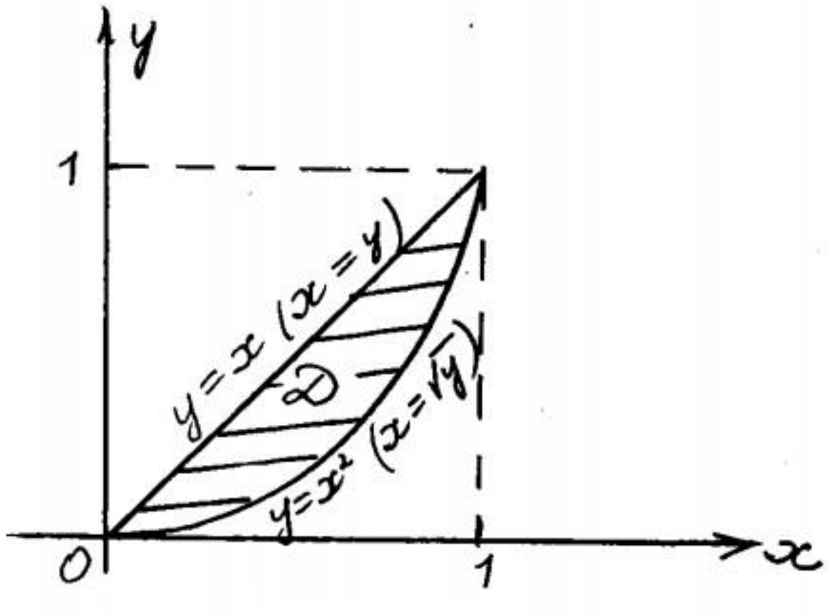


Рис. 7.5.

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x \frac{y^3}{3} \bigg|_{x^2}^{x} \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x(x^3 - x^6) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{40}$$

2 способ.

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx = \int\limits_0^1 \left(y^2 \frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{\sqrt{y}}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^2(y - y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{40}$$

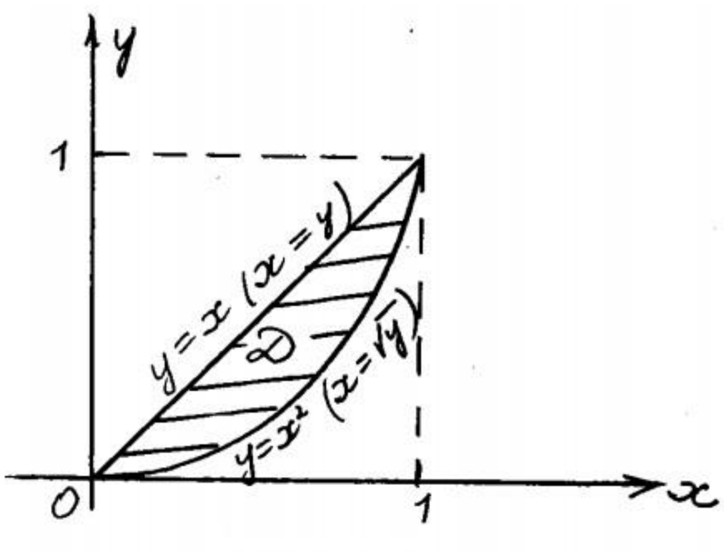


Рис. 7.5.

Пример 4. Изменить порядок интегрирования

$$\int_2^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy$$

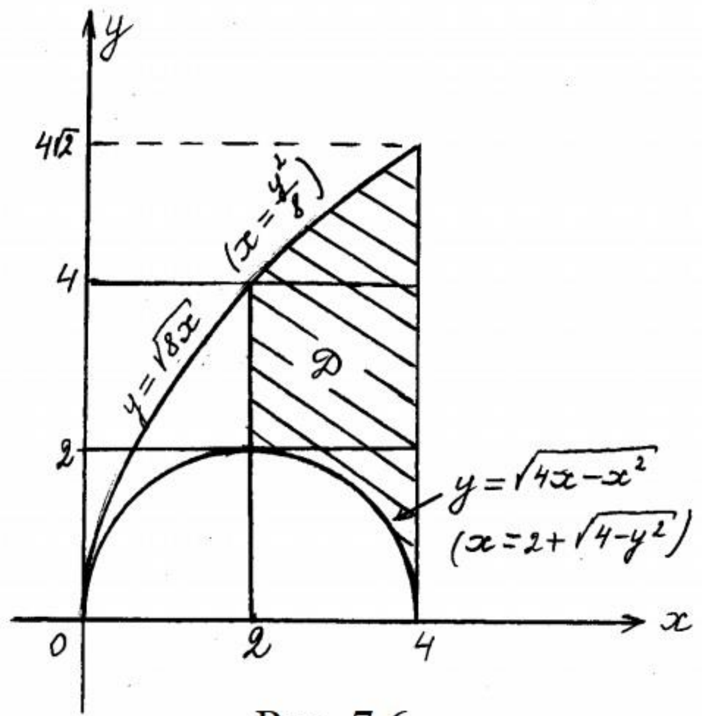


Рис. 7.6.

Построим область интегрирования.

Она ограничена графиками функций

$y = \sqrt{4x - x^2}$, $y = \sqrt{8x}$ и прямыми

$x = 2$, $x = 4$ (рис. 7.6).

Обе части равенства $y = \sqrt{4x - x^2}$ возведем в квадрат, учитывая, что $y \geq 0$:

$$y^2 = 4x - x^2,$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4,$$

$$(x-2)^2+y^2=4, y\geq 0$$

Мы получили уравнение верхней полуокружности с центром в точке $(2;0)$, радиус которой равен 2. Выразим x из полученного уравнения: $x = 2\pm\sqrt{4-y^2}$. Для правой полуокружности выберем знак «+».

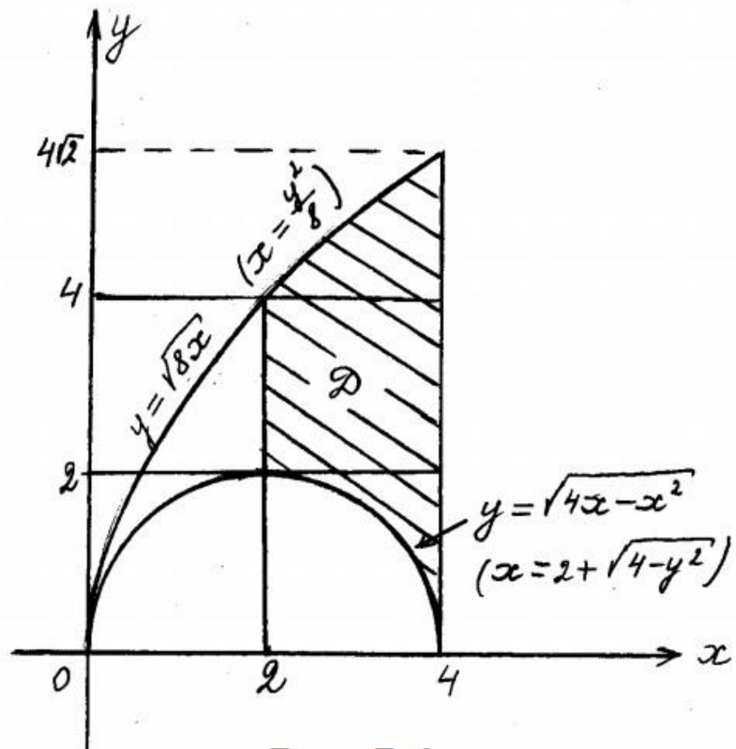


Рис. 7.6.

Аналогично обе части уравнения $y=\sqrt{8x}$ возведем в квадрат, учитывая, что $y\geq 0$. Получим $x=\frac{y^2}{8}, y\geq 0$. Это уравнение дуги параболы, расположенной в первой четверти.

Разбивая область D на три части, перепишем данный интеграл в виде:

$$\int_{2}^{4} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy = \int_{0}^{2} dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)dx + \int_{2}^{4} dy \int_{2}^{4} f(x,y)dx +$$

$$+ \int_{4}^{4\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{4} f(x,y)dx$$

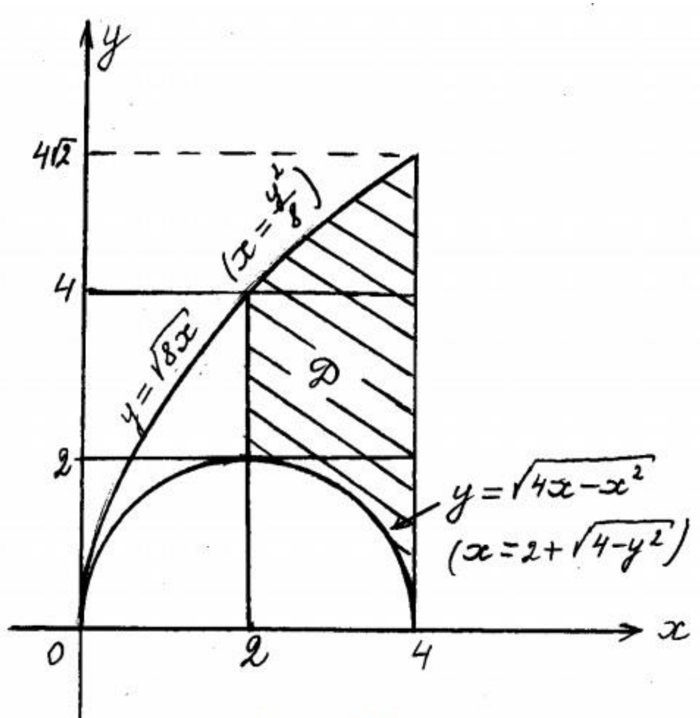


Рис. 7.6.

8.4. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Пусть на координатной плоскости переменных x, y задана некоторая область D, а на плоскости переменных u, v – область G. Функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками этих областей. Предположим, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области G. Матрица, элементами которой являются первые частные производные функций x и y по переменным u и v, называется матрицей Якоби. Определитель этой матрицы:

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ называется якобианом.

Карл Якоби (1804 – 1851) – немецкий математик и механик.

Формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\cdot|I|\cdot dudv$$

Якобиан играет для отображения, заданного функциями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ такую же роль, что и производная для функции одной переменной. Выражение $|I|dudv$ представляет собой элемент площади в криволинейных координатах u, v.

Вычислим якобиан в случае перехода от декартовых координат x, y к полярным координатам r,φ, связь между которыми устанавливается равенствами:

$$x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$$

$$x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

Формула замены переменных в этом случае имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi$$

Поясним геометрический смысл выражения $rdrd\varphi$. Если на плоскости переменных r, φ рассмотреть элементарный прямоугольник со сторонами dr и $d\varphi$, то на плоскости x, y ему будет соответствовать фигура, ограниченная дугами окружностей радиусов r и $r + dr$ и двумя лучами, исходящими из начала координат под углами φ и $\varphi + d\varphi$ (рис. 7.7).

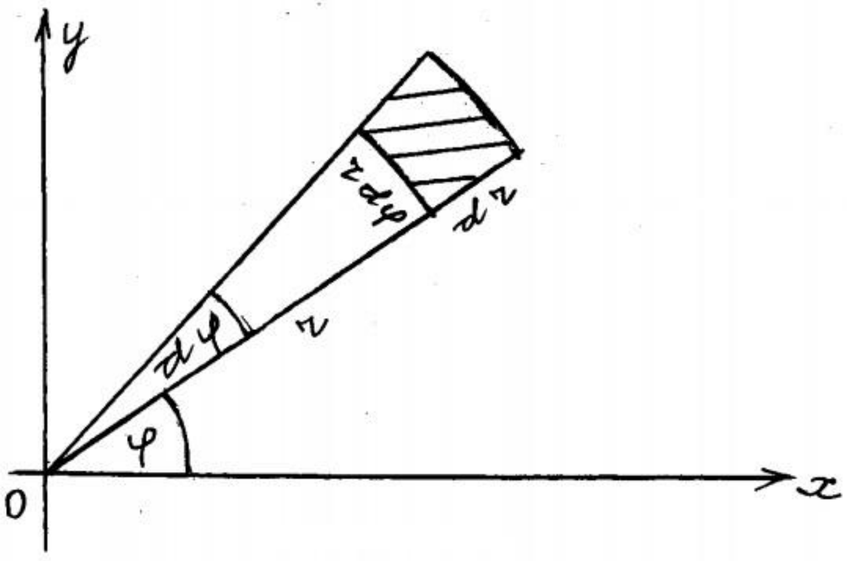


Рис. 7.7.

Площадь этой фигуры приближенно равна $rdrd\varphi$. Таким образом, при вычислении двойного интеграла в криволинейных координатах область интегрирования делится не на прямоугольные элементы, а на криволинейные с помощью сетки координатных линий.

Если область D на плоскости xOy ограничена полярными лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и линиями $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, заданными в полярных координатах (рис. 7.8), то двойной интеграл по области D сводится к повторному по формуле:

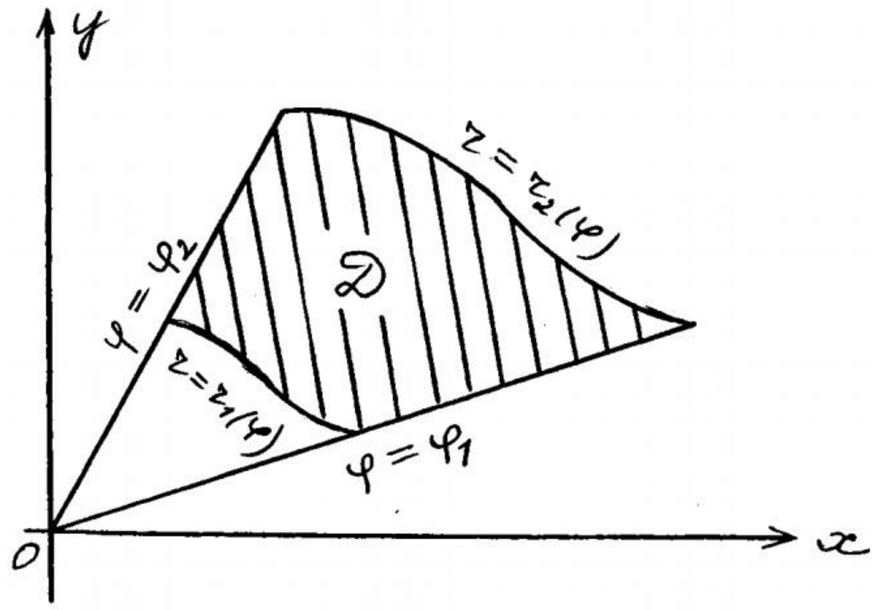


Рис. 7.8.

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi) r dr$$

Рассмотрим примеры.

Пример 5. Вычислить

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

где область D ограничена окружностью (рис. 7.9) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

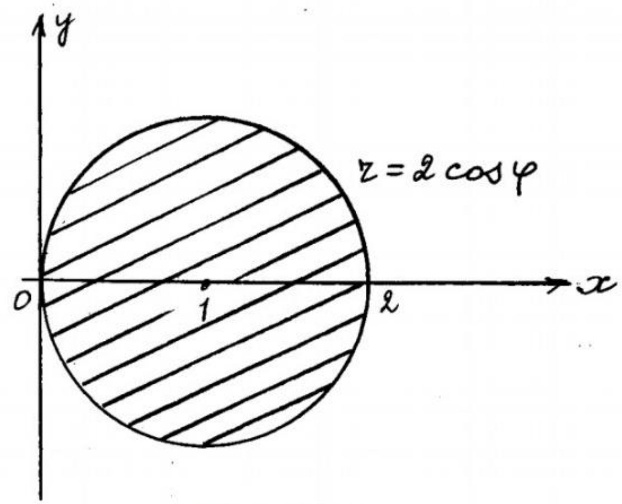


Рис. 7.9.

Перепишем уравнение окружности в виде $x^2 + y^2 = 2x$ и перейдем к полярным координатам:

$$r^2 = 2rcos\varphi,\ \ r = 2\cos\varphi\,,\ \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos4\varphi}{2}\right) d\varphi = \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}$$

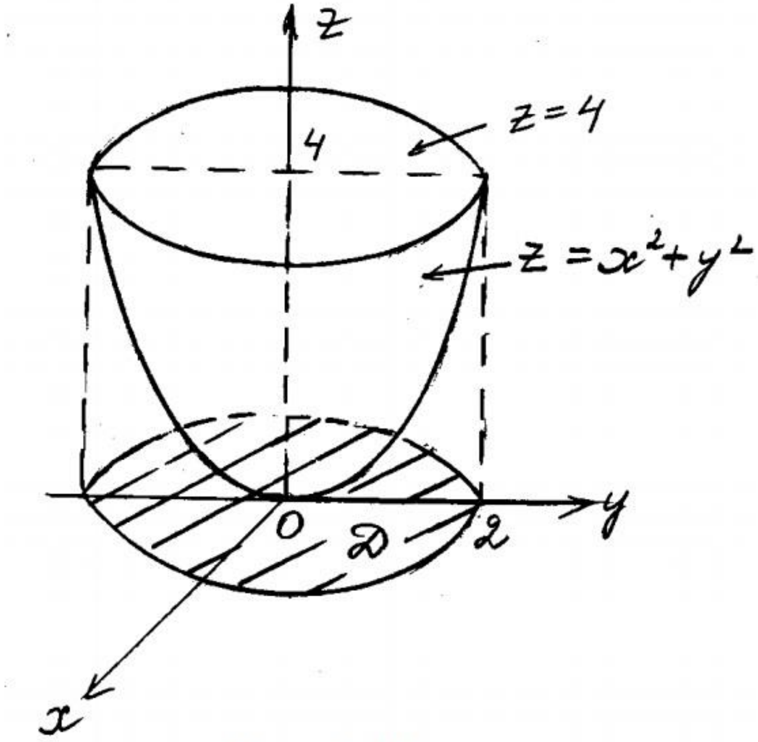


Рис. 7.10.

Пример 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 4$ (рис. 7.10).

Т.к. тело заключено между двумя поверхностями, его объем равен

$$V = \iint\limits_D (4 - (x^2 + y^2))dxdy$$

где D – проекция тела на плоскость xOy, представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом 2. Уравнение границы этого круга в полярных координатах имеет вид: $r = 2$, $\varphi \in [0,2\pi]$

Воспользуемся полярными координатами:

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r(4-r^2)dr=2\pi\int_0^2(4r-r^3)dr=2\pi\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8\pi$$

Если область интегрирования ограничена дугой эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$

то наиболее удобными для интегрирования в этом случае являются *обобщенные полярные координаты* r,φ связь которых с декартовыми определяется по формулам:

$$\begin{cases}x=ar\cos\varphi\\ y=br\sin\varphi\end{cases}$$

Уравнение эллипса в этих координатах имеет наиболее простой вид:

$$r=1,\ \ \varphi\in[0,2\pi],$$

а якобиан $I=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -ar\sin\varphi\\ b\sin\varphi & br\cos\varphi\end{vmatrix}=abr\cos^2\varphi+abr\sin^2\varphi=abr.$

Пример 7. Вычислить

$$\iint\limits_D y^2 dxdy$$

где область *D* ограничена эллипсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Воспользуемся обобщенными полярными координатами

$$x = 3r\cos\varphi\,, \qquad y = 2r\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in [0{,}2\pi], \qquad I = 6r$$

$$\iint\limits_D y^2 dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 4r^2 \sin^2\varphi \cdot 6rdr = 24 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr =$$

$$= 24 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 3\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi.$$