ЛЕКЦИЯ 15. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа.

2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Возведение в степень. Формула Муавра.

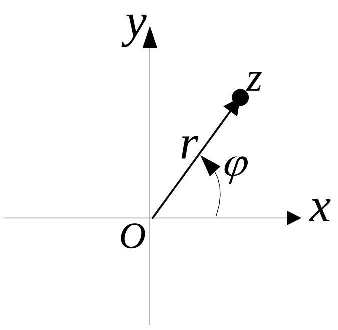
3. Показательная форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в показательной форме.

4. Извлечение корня из комплексного числа.

15.1. Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа

Изображение комплексного числа $z = x + iy$ на плоскости позволяет задавать его не только с помощью пары чисел (x; y) – координат точки, но и с помощью радиус-вектора r и угла φ. r – расстояние от начала координат до точки z, φ – угол между положительным направлением оси Ox и радиус вектором точки z. Поворот против часовой стрелки определяет положительный угол, а поворот по часовой стрелке – отрицательный.

Пара r, φ называется ***полярными координатами*** точки z.



r называется модулем комплексного числа z, обозначается $|z|$ и однозначно определяется равенством $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **(1)**

φ – называется аргументом комплексного числа z, обозначается $\operatorname{Arg} z$. Для числа $z = 0$ понятие аргумента смысла не имеет, при $z \neq 0$ $\operatorname{Arg} z$ есть величина многозначная, определенная с точностью до слагаемого, кратного 2π, тогда определить аргумент логично в виде $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, $\arg z = \varphi$ – главное значение аргумента, определяемое условиями $-\pi < \arg z \leq \pi$ (или $0 \leq \arg z < 2\pi$). Мы будем придерживаться первого условия для границ главного значения аргумента. $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

Заметим, что $|\bar{z}| = |z|$, $\arg \bar{z} = -\arg z$

Связь между декартовыми координатами и полярными легко устанавливается следующим образом $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$, заданное алгебраически, можно переписать в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **(2)** - ***тригонометрическая форма*** записи комплексного числа z.

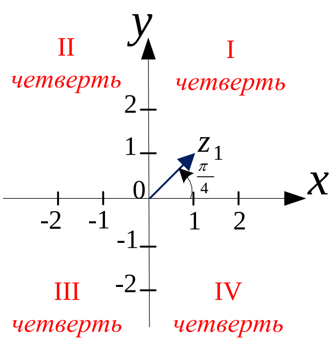
Для определения $\arg z = \varphi$ удобно воспользоваться следующей формулой

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, z \in I \text{ или } IV \text{ четверти} \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, z \in II \text{ четверти} \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, z \in III \text{ четверти} \\ \dfrac{\pi}{2}, z \in Oy \text{ и } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, z \in Oy \text{ и } y < 0 \\ \pi, z \in Ox \text{ и } x < 0 \\ 0, z \in Ox \text{ и } x > 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

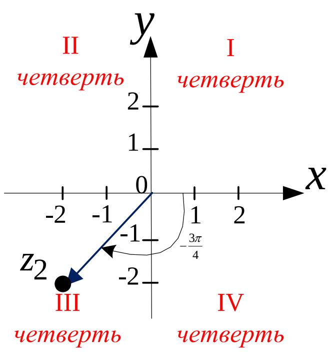
Задача 1. Записать комплексные числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = -3i$.

Решение. Приведем алгоритм, по которому удобно решать подобные задачи.

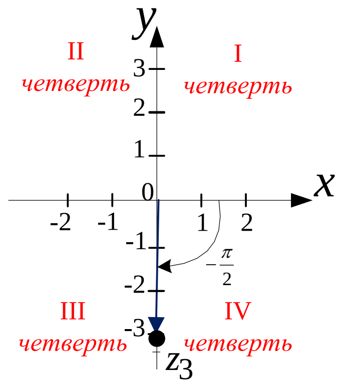
Модуль z	$\lvert z_1 \rvert = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$
Четверть	I
Аргумент z $\arg z$	$\arg z_1 = arctg\left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$
Тригонометрическая форма z	$z_1 = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$



Модуль z	$\lvert z_2\rvert=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$
Четверть	III, $x<0, y<0$
Аргумент z $\arg z$	$\arg z_2=-\pi+arctg\left(\dfrac{-2}{-2}\right)=$ $=\dfrac{-3\pi}{4}$
Тригонометрическая форма z	$z_2=\sqrt{8}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$



Модуль $\arg z$	$\lvert z_3\rvert=\sqrt{(0)^2+(-3)^2}=3$
	Принадлежит оси Oy
Аргумент z $\arg z$	$\arg z_3=\dfrac{-\pi}{2}$
Тригонометрическая форма z	$z_3=3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$



15.2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Возведение в степень. Формула Муавра.

Действия умножения, деления, возведения в степень над любыми комплексными числами удобнее выполнять, если они записаны в тригонометрической форме.

Пусть комплексные числа заданы в тригонометрической форме $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Правило умножения. При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$\lvert z_1\cdot z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert,\ \arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \qquad \textbf{(4)}$$

Доказательство.

$$z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\sin\varphi_1)=$$
$$=r_1r_2(\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\sin\varphi_1}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}+i\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)})=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

После перемножения чисел, аргумент произведения может не удовлетворять условиям $-\pi<\arg z_1z_2\le\pi$. В этом случае, вычитая или прибавляя необходимое количество периодов 2π необходимо представить аргумент произведения через главный аргумент, удовлетворяющий условиям $-\pi < \arg z_1 z_2 \le \pi$.

Задача 2. Перемножить комплексные числа $z_1 = 1+i$ и $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Решение. Каждое из чисел запишем в тригонометрической форме.

Модуль z	$\lvert z_1\rvert = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$
Четверть	I (т.к. $x > 0, y > 0$)
Аргумент z $\arg z$	$\arg z_1 = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$
Тригонометрическая форма z	$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
Модуль z	$\lvert z_2\rvert = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$
Четверть	IV (т.к. $x > 0, y < 0$)
Аргумент z $\arg z$	$\arg z_2 = arctg\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$
Тригонометрическая форма z	$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

Ответ. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

Правило деления. Модуль частного комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, равен частному от деления модуля делимого на модуль делителя, а аргумент равен разности аргументов делимого и делителя.

$$\lvert z_1 : z_2\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert},\ \arg(z_1 : z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 \quad \textbf{(5)}$$

Доказательство.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}\cdot=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\sin\varphi_1)}{\underbrace{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}_{1}}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\sin\varphi_1}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}+i(\underbrace{\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2}_{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}))=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

После деления чисел, аргумент частного может не удовлетворять условиям $-\pi<\arg z_1z_2\le\pi$. В этом случае, вычитая или прибавляя необходимо количество периодов 2π необходимо представить аргумент частного через главный аргумент, удовлетворяющий условиям $-\pi<\arg z_1z_2\le\pi$.

Задача 3. Найти частное комплексных чисел $z_1=1+i$ и $z_2=\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме.

Решение. Тригонометрическая форма записи чисел была получена в задаче 2.

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

Правило возведения в степень. При возведении в степень $n\in\mathbf{N}$ комплексного числа z, модуль комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. $|z^n|=|z|^n$, $\arg(z^n)=n\cdot\arg z$.

Тогда $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ **(6)**

Эта формула была открыта английским математиком Абрахамом де Муавром для случая $r=1$. В его честь формула $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ называется ***формулой Муавра***.

Доказательство формулы $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ проведем методом математической индукции. Этот метод заключается в следующем:

На первом шаге проверяем справедливость некоторого утверждения, зависящего от *n*, для *n*=1.

На втором шаге предполагаем справедливость утверждения для некоторого *n* = *k* и доказываем справедливость этого утверждения для *n* = *k*+1.

Если шаги 1 и 2 успешны, то делаем вывод, что утверждение справедливо для любого натурального *n*.

Доказательство.

1. Для $n=1$ справедлива формула $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

2. Пусть для $n=k$ верно $z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$.

Пусть теперь $n = k+1$: $z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Перемножим эти два комплексных числа по правилу умножения комплексных чисел заданных в тригонометрической форме

$$r^k \cdot r(\cos(k\varphi+\varphi) + i\sin(k\varphi+\varphi)) = r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi).$$

Получаем, что формула верна и для $n = k+1$.

Из пунктов 1 и 2 делаем вывод, что формула справедлива для любого $n \in \mathbf{N}$. Что и требовалось доказать.

Задача 4. Найти $(1-i)^{19}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

Решение.

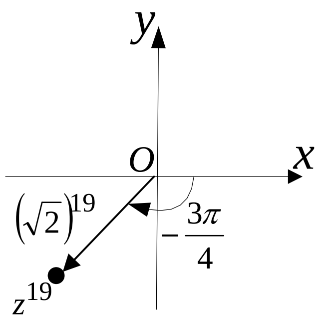
Пусть $z = 1-i$.

Представим число *z* в тригонометрической форме.

Модуль z	$\lvert z\rvert = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
Четверть	IV (т.к. $x > 0, y < 0$)
Аргумент z $\arg z$	$\arg z = arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$
Тригонометрическая форма z	$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$z^{19} = \left(\sqrt{2}\right)^{19}\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{19\pi}{4}\right)\right)$$

$-\frac{19\pi}{4} \notin (-\pi;\pi]$. Поскольку $-\frac{19\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - 4\pi$, то отбросив полный период, получим выражение для главного аргумента $\arg z^{19} = -\frac{3\pi}{4}$, удовлетворяющего условиям $-\pi < \arg z \le \pi$.



Окончательно $z^{19} = \left(\sqrt{2}\right)^{19}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

В алгебраической форме $z^{19} = \left(\sqrt{2}\right)^{19}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(\sqrt{2}\right)^{18} - i\left(\sqrt{2}\right)^{18}$.

Ответ. $z^{19} = \left(\sqrt{2}\right)^{19}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, $z^{19} = -\left(\sqrt{2}\right)^{18} - i\left(\sqrt{2}\right)^{18}$.

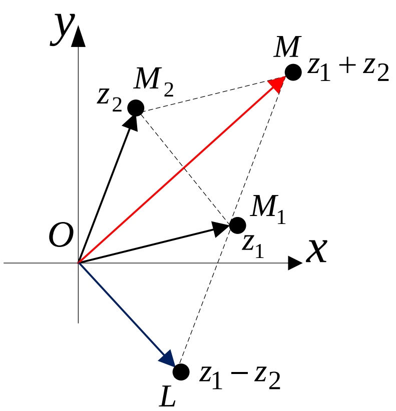
Свойства модуля комплексных чисел

1°. $|\bar{z}| = |z|$.

2°. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

3°. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

4°. $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$.



Доказательство свойств **1°** и **2°** предлагается провести самостоятельно.

Обоснование свойств **3°**, **4°** очевидно и вытекает из соответствия между векторами и комплексными числами.

15. 3. Показательная форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в показательной форме

Леонардом Эйлером была предложена формула, связывающая показательную функцию e^{φ} и тригонометрические функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ **(*)** - формула Эйлера

Благодаря этому можно комплексное число представить в показательной форме:

$$z = r\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{e^{\varphi}} = re^{i\varphi}.$$

Поскольку $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$ **(**)**, то можно легко доказать справедливость следующих формул

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Действительно, сложим левые и правые части равенств (*) и (**)

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Доказательство справедливости формулы для $\sin\varphi$ предлагается провести самостоятельно.

Для функции $e^{i\varphi}$ справедливы все обычными свойствами показательной функции действительного аргумента.

Например, $e^{i\varphi_1} : e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Это позволяет выполнять операции умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$.

Задача 5. Найти $\left(-\sqrt{3} + i\right)^9 (1 + i)^5$ в показательной, тригонометрической и алгебраической форме.

Решение.

Пусть $z_1 = \left(-\sqrt{3} + i\right)$.

Представим число z_1 в тригонометрической форме.

Модуль z	$\lvert z_1 \rvert = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$
Четверть	II (т.к. $x < 0, y > 0$)
Аргумент z $\arg z$	$\arg z_1 = \pi + arctg\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Тригонометрическая форма z	$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
Показательная форма z	$z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

$$z^9 = 2^9\left(\cos\left(\frac{9\cdot 5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\cdot 5\pi}{6}\right)\right) = 2^9\left(\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right)\right).$$

$\frac{15\pi}{2} \notin (-\pi;\pi]$. $\frac{15\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 8\pi \Rightarrow \arg z_1^9 = -\frac{\pi}{2}$.

$$z_1^9 = 2^9 e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Пусть $z_2 = (1+i)$.

Представим число z_2 в тригонометрической форме.

Модуль z	$\lvert z_2\rvert = \sqrt{2}$
Четверть	I (т.к. $x > 0, y > 0$)
Аргумент z $\arg z$	$\arg z_2 = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
Тригонометрическая форма z	$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
Показательная форма z	$z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$$z_2^5 = \sqrt{2}^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$

$\frac{5\pi}{4} \notin (-\pi;\pi]$. $\frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow \arg z_2^5 = -\frac{3\pi}{4}$.

$$z_2^5 = \sqrt{2}^5 e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^9 (1+i)^5 = 2^9 e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot 2^2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 2^{11}\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i-\frac{3\pi}{4}i} = 2^{11}\sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{4}i} = 2^{11}\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Запишем результат в алгебраической форме $2^{11} - 2^{11}i$.

Ответ. $2^{11}\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$, $2^{11}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, $2^{11} - 2^{11}i$.

15.4. Извлечение корня из комплексного числа

Благодаря возможности сопоставлять комплексным числам радиус-векторы на комплексной плоскости, получаем важное для нас правило равенства комплексных чисел в показательной форме, которое понадобится в дальнейшем.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ **(7)**

Определение 1. Комплексное число u называется ***корнем n-ой степени*** из комплексного числа z, если $u^n = z$. Обозначается $u = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbf{N}$.

Запишем каждое из комплексных чисел u и z в показательной форме: $z = re^{i\varphi}, u = r'e^{i\psi}$. Тогда из $u^n = z \Rightarrow (r')^n e^{in\psi} = re^{i\varphi}$. Из формулы (7)

$$u^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} (r')^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow r' = \sqrt[n]{r}, \psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \Rightarrow u_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$u_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}, k \in \mathbf{Z}.$$

Покажем, что среди всевозможных значений корней $u_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}, k \in \mathbf{Z}$ имеется ровно n различных значений: $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$. Поскольку модули всех корней n-ой степени $u_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}, k \in \mathbf{Z}$ одинаковы, а аргументы отличаются друг от друга на угол $\frac{2\pi}{n} < 2\pi$, то числа $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$ – различны. Действительно,

$$k = 0 \Rightarrow \psi_0 = \frac{\varphi}{n},$$

$$k = 1 \Rightarrow \psi_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n},$$

$$k = 2 \Rightarrow \psi_2 = \frac{\varphi + 4\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

…

$$k = n-1 \Rightarrow \psi_{n-1} = \frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$$

При $k = n \Rightarrow \psi_n = \frac{\varphi + 2\pi n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \psi_0 + 2\pi$, т.е. $u_n = u_0$

Аналогично, $k = n+1 \Rightarrow \psi_{n+1} = \dfrac{\varphi + 2\pi(n+1)}{n} = \psi_1 + 2\pi$, т.е. $u_{n+1} = u_1$ и так далее.

Таким образом, уравнение $u^n = z$ имеет ровно n различных корней, которые могут быть найдены по формуле $u_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i}, k = 0,1,2,..., n-1$. На комплексной плоскости эти точки располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Заметим, что корни могут быть найдены по формуле

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,..., n-1.$$

Задача 6. Найти $\sqrt[4]{2+2i}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

Решение.

Пусть $z = 2+2i$.

Представим число z в тригонометрической и показательной форме.

Модуль z	$\|z\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Четверть	I (т.к. $x > 0, y > 0$)
Аргумент z $\arg z$	$\arg z = arctg\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
Тригонометрическая форма z	$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
Показательная форма z	$z = 2\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}$

$$u_k = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} i}, k = 0,1,2,3.$$

$$u_k = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3.$$

$$k = 0 \Rightarrow u_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{16} i} \text{ или } u_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right).$$

$$k=1 \Rightarrow u_1=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}e^{\frac{9\pi}{16}i} \text{ или } u_1=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right).$$

$$k=2 \Rightarrow u_2=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}e^{\frac{17\pi}{16}i}=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}e^{\frac{-15\pi}{16}i} \text{ или } u_2=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-15\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{-15\pi}{16}\right)\right).$$

$$k=3 \Rightarrow u_3=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}e^{\frac{25\pi}{16}i}=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}e^{\frac{-7\pi}{16}i} \text{ или } u_3=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{16}\right)\right).$$