Практическое занятие 7

Несобственные интегралы

I. <u>Несобственный интеграл I рода (с бесконечными пределами).</u>

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда несобственные интегралы I рода определяются следующим образом:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx,$

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)dx.$

Если предел в правой части существует (равен конечному числу), то интеграл называется *сходящимся*. Если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется *расходящимся*.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^C f(x)dx + \lim_{A\to+\infty} \int_C^A f(x)dx$, С – любое число.

Если оба интеграла в правой части сходятся, то исходный интеграл сходится.

Если один интеграл сходится, а другой расходится, то исходный интеграл расходится.

Если оба интеграла в правой части расходятся, то про исходный интеграл нельзя сказать определенно о его сходимости или расходимости.

<u>Примеры.</u> Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1). $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{xlnx} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{dx}{xlnx} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{dlnx}{lnx} = \lim\limits_{A\to+\infty} ln(lnx)|_2^A =$
$= \lim\limits_{A\to+\infty} (\ln(lnA) - \ln(ln2)) = \infty$. Интеграл расходится.

2). $\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2} dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A arctgxd(arctgx) = \lim\limits_{A\to+\infty} \frac{arctg^2x}{2}\Big|_1^A =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{3}{32}\pi^2$. Интеграл сходится.

3). $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=$

$=\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}+\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=$

$$=\lim_{B\to-\infty} arctg(x+2)|_B^0+\lim_{A\to+\infty} arctg(x+2)|_0^A=$$

$=arctg2+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-arctg2=\pi$. Интеграл сходится.

Вычислить самостоятельно или установить расходимость интегралов:

4). $\int_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-x^2}\,dx=\cdots=\frac{1}{2}$. Интеграл сходится.

5). $\int_{1}^{+\infty}x\cdot e^{-x}\,dx=\cdots=\frac{2}{e}$. Интеграл сходится.

Указания к примеру 5):

а) интегрирование провести по частям;

б) при вычислении предела при подстановке бесконечного предела интегрирования воспользоваться правилом Лопиталя.

6). $\int_{0}^{+\infty}x\cdot cosxdx$. Интеграл расходится.

Домашнее задание.

Вычислить несобственные интегралы I рода или установить их расходимость:

1). $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\cdots=\ln(2+\sqrt{5})$

2). $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\cdots=\frac{\pi}{2}$

3). $\int_{0}^{+\infty}2xsinxdx$. Интеграл расходится.

4). $\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx=\cdots=-1$

5). $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12}=\cdots=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

6). $\int_{0}^{+\infty}2e^{-\sqrt{x}}\,dx=\cdots=4$

II. <u>Несобственный интеграл II рода (от неограниченной функции).</u>

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b)$ и имеет в точке $x = b$ разрыв II рода, то несобственный интеграл II рода (от неограниченной функции) определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел в правой части существует, то интеграл называется *сходящимся*. Если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично, если функция имеет разрыв II рода в точке $x = a$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если функция имеет разрыв II рода во внутренней точке $x = c, c \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Интеграл называется *сходящимся*, если оба несобственных интеграла в правой части сходятся.

<u>Примеры.</u> Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1). $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = (x = 0) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2$. Интеграл сходится.

2). $\int_1^e \frac{dx}{x\cdot ln^3x} = (x = 1) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dlnx}{ln^3x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} -\frac{1}{2ln^2x}\Big|_{1+\varepsilon}^e =$

$= -\frac{1}{2}(1-\infty) = \infty$. Интеграл расходится.

3). $\int_0^1 lnxdx = (x = 0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 lnxdx = \begin{bmatrix} U=lnx, dV=dx \\ dU=\frac{dx}{x}, V=x \end{bmatrix} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(xlnx|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 dx \right) = 1\cdot ln1 - \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\cdot ln\varepsilon - 1 = -\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{ln\varepsilon}{1/\varepsilon} - 1 =$$

$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$ (правило Лопиталя) $= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} - 1 = -1.$

Интеграл сходится.

Вычислить самостоятельно или установить расходимость интегралов:

4). $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = (x = 0) = \cdots$ Интеграл расходится.

5). $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}} = (x = 3) = \cdots = 2\sqrt{2}$

6). $\int_{2}^{5}\frac{dx}{(x-4)^2} = (x = 4) = \cdots$ Интеграл расходится.

7). $\int_{0}^{2}\frac{x^2}{\sqrt{64-x^6}}dx = (x = 2) = \cdots\frac{\pi}{6}$

8). $\int_{0}^{ln^2 5}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = (x = 0) = \cdots = 8$

9). $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x}} = (x = 0) = \cdots = \frac{3\pi}{8}$

Домашнее задание.

Вычислить несобственные интегралы II рода или установить их расходимость:

1). $\int_{\pi/6}^{\pi/2} tgxdx$. Интеграл расходится.

2). $\int_{-1}^{2,5}\frac{dx}{x^2-5x+6}$. Интеграл расходится. 3). $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2-1}$. Интеграл расходится.

4). $\int_{(-1/ln2)}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx = \cdots = -\frac{1}{2}ln2e$

Типовой расчет, задача 2.1 в отдельной тетради, свой вариант.

Задача 2.2* для выполнения является необязательной, ее решение возможно для желающих после проработки лекционного материала 6 недели.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\int_{4}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-5x+6}$	2. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\, cos2xdx$	3. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{27-x^6}}$
4. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x^3}+4\sqrt{x}}$	5. $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$	6. $\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+2x^2+4}$

7. $\int_0^{1/2} x \ln 2x dx$	8. $\int_{1/3}^{+\infty} \frac{\ln 3x}{x^2} dx$	9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5} + 3\sqrt[3]{x}}$
10. $\int_0^{1/5} \ln^2(5x) dx$	11. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4-3x^2+4} dx$	12. $\int_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\frac{3}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{81-16x^4}}$
13. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	14. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln 2x}}$	15. $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3} dx$
16. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$	17. $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{x \cdot \ln 2x}{(1+x^2)^2} dx$	18. $\int_{\frac{2}{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-1}}$