

Практическое занятие 16

Решение задач части 2 типового расчета.

Задачи по теме «Несобственный интеграл».

Задача 2.1. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + 6x^2 + 12}$$

Данный несобственный интеграл первого типа (бесконечный промежуток интегрирования) вычислим методом замены переменной:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + 6x^2 + 12} &= \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^4 + 6x^2 + 9) + 3} = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 3)^2 + 3} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2 + 3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{x^2 + 3}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} \sqrt{3}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$$

Задача 2.2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл (задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x}}$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x}}$$

и вычислим $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x}}{(x^2 + 4x) - (x^2 + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x}}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = +\infty\end{aligned}$$

Следовательно, данный интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции.

Заметим, что подынтегральная функция положительна на промежутке $(0,1]$, и применим предельный признак сравнения.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{3} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{3} (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}) \right) = \\ &= \frac{1}{3} (2 + 1) = 1\end{aligned}$$

Следовательно, $f(x) \sim g(x), x \rightarrow 0 + 0$ и

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 \text{ (сходится)}$$

Согласно предельному признаку сравнения $\int_0^1 f(x) dx$ сходится.

Ответ: сходится.

Задачи по теме «Двойной интеграл».

Задача 2.3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

$$a = 0, b = 1, \varphi(x) = x^2, \psi(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$$

Запишем данный повторный интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$$

Нарисуем область интегрирования. Она ограничена прямыми $x = 0$, $x = 1$, а также графиками функций $y = x^2$ и $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$.

Первое уравнение $y = x^2$ – это уравнение параболы. Преобразуем второе уравнение:

$$y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$$

$$y - 1 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(y - 1)^2 = 1 - x^2, y \geq 1$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1, y \geq 1$$

Мы получили уравнение окружности с центром в точке $(0,1)$, радиус которой равен 1.

Учитывая условие $y \geq 1$, делаем вывод, что уравнение $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ – это уравнение верхней полуокружности (рис. 15.1).

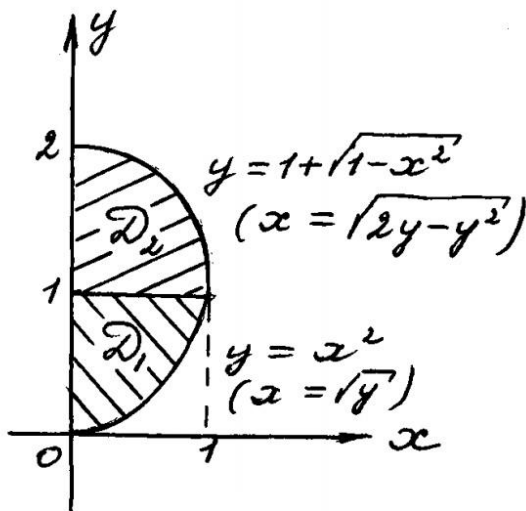


Рис. 15.1.

Выразим переменную x из уравнений границ области, учитывая, что область расположена в первой четверти ($x \geq 0$):

$$y = x^2, x = \sqrt{y}$$

$$y = 1 + \sqrt{1 - x^2}, x^2 + y^2 - 2y = 0,$$

$$x = \sqrt{2y - y^2}$$

Изменим порядок интегрирования. Для этого разделим область на две части D_1 и D_2 прямой $y = 1$ и запишем двойной интеграл в виде суммы двух повторных:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y) dx$$

Ответ:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx$$

Задача 2.4. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры D , ограниченной заданными линиями:

$$y = x^3, y = \sqrt{x}$$

Площадь S плоской области D вычисляется по формуле:

$$S = \iint_D dx dy$$

Для сведения двойного интеграла к повторному найдем точки пересечения графиков функций $y = x^3, y = \sqrt{x}$ и сделаем рисунок:

$$x^3 = \sqrt{x}, x \geq 0$$

$$x^6 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ или } x = 1$$

Вычислим площадь S фигуры D (рис. 15.2):

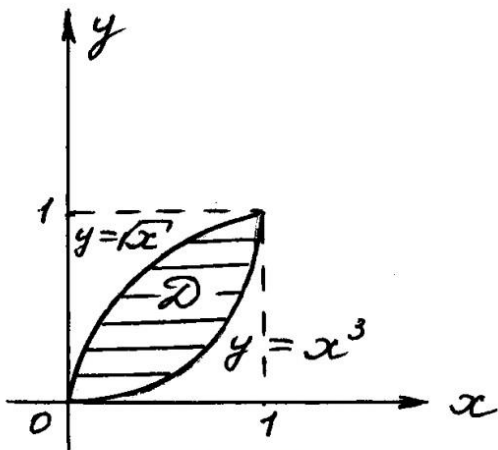


Рис. 15.2.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 y \Big|_{x^3}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5}{12}$

Задача 2.5. Вычислить двойной интеграл по области D (задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

$$\iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 4x \leq 4\sqrt{3}y$$

Запишем уравнения границ области D , которые заданы уравнениями:

$$x^2 + y^2 = 4x, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

Преобразуем первое уравнение:

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

Мы получили уравнение окружности с центром в точке (2;0), радиус которой равен 2. Координаты точек, лежащих на этой окружности и внутри нее, удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 4x$.

Второе уравнение $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ – это уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол $\frac{\pi}{6}$ с положительным направлением оси Ox . Координаты точек, лежащих на этой прямой, а также выше этой прямой, удовлетворяют неравенству $y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Нарисуем область D (рис. 15.3) и запишем

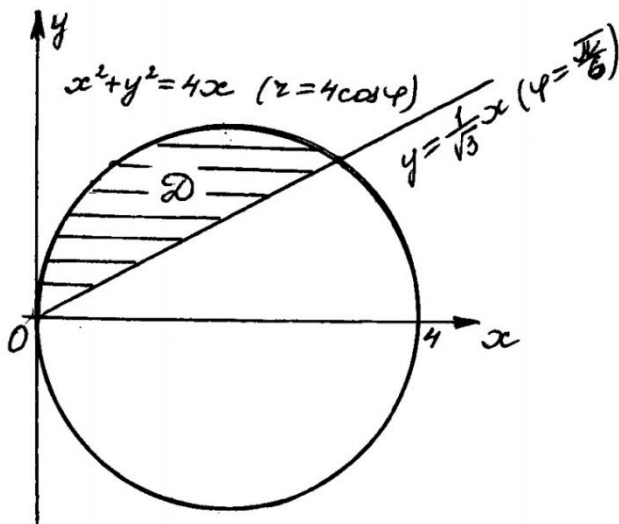


Рис. 15.3.

уравнения границ области в полярных координатах:

$$x^2 + y^2 = 4x, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, \quad x \geq 0$$

$$r^2 = 4r \cos \varphi,$$

$$r = 4 \cos \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Вычислим двойной интеграл, пользуясь полярными координатами:

$$\begin{aligned} \iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} r \sin \varphi \cdot r \cdot r dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} r^3 dr = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{4 \cos \varphi} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4^4 \cos^4 \varphi}{4} \sin \varphi d\varphi = -64 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d(\cos \varphi) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{64}{5} \cos^5 \varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = \frac{18\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{18\sqrt{3}}{5}$$

Задачи по теме «Тройной интеграл».

Задача 2.6. С помощью тройного интеграла вычислить объем пирамиды V , ограниченной плоскостью α и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Проверить ответ с помощью геометрической формулы нахождения объема пирамиды.

$$\alpha: x + 2y + 3z = 12$$

Найдем точки пересечения плоскости α с координатными осями Ox , Oy , Oz :

$$x = 0, y = 0, z = 4$$

$$y = 0, z = 0, x = 12$$

$$z = 0, x = 0, y = 6$$

и нарисуем пирамиду (рис. 15.4)

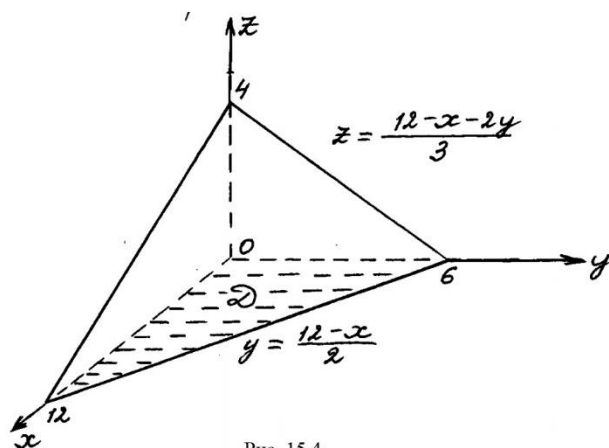


Рис. 15.4.

Для вычисления объема пирамиды воспользуемся декартовыми координатами:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dx dy dz = \\ &= \int_0^{12} dx \int_0^{\frac{12-x}{2}} dy \int_0^{\frac{12-x-2y}{3}} dz = \\ &= \int_0^{12} dx \int_0^{\frac{12-x}{2}} z \Big|_0^{\frac{12-x-2y}{3}} dy = \int_0^{12} dx \int_0^{\frac{12-x}{2}} \left(\frac{12-x}{3} - \frac{2}{3}y \right) dy = \\ &= \int_0^{12} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{12-x}{3} - \frac{2}{3}y \right)^2 \right) \Big|_0^{\frac{12-x}{2}} dx = \frac{3}{4} \int_0^{12} \left(\frac{12-x}{3} \right)^2 dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} \int_0^{12} (x-12)^2 dx = \frac{1}{12} \frac{(x-12)^3}{3} \Big|_0^{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12^3}{3} = \frac{12^2}{3} = 48$$

Проверим результат, пользуясь формулой для вычисления объема пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

За основание пирамиды примем прямоугольный треугольник с катетами $a = 12$ и $b = 6$, лежащий в координатной плоскости xOy , тогда высота пирамиды $h = 4$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 6 \cdot 4 = 48$$

что совпадает с результатом, полученным интегрированием.

Ответ: 48.

Задача 2.7. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела V , переходя к цилиндрическим или сферическим координатам (задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \leq 8z \end{cases}$$

Область V ограничена сферой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

с центром в начале координат, радиус которой равен 3, и параболоидом

$$x^2 + y^2 = 8z$$

Найдем линию пересечения этих поверхностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 8z - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -9 \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

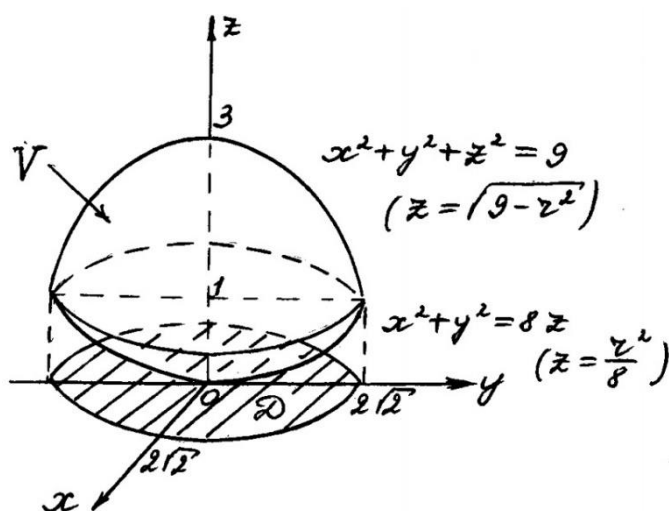


Рис. 15.5.

Поверхности пересекаются по окружности, расположенной в плоскости $z = 1$, радиус которой равен $2\sqrt{2}$. Изобразим область V (рис. 15.5). Проекция D области V на плоскость xOy представляет собой круг с центром в начале координат, радиус которого равен $2\sqrt{2}$. Для вычисления объема тела воспользуемся цилиндрическими координатами

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$$

и запишем уравнения границ области в этих координатах.

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ примет вид:

$$r^2 + z^2 = 9$$

Выразим переменную z , учитывая, что тело расположено выше координатной плоскости xOy ($z \geq 0$):

$$z = \sqrt{9 - r^2}$$

Уравнение параболоида $x^2 + y^2 = 8z$ также перепишем в цилиндрических координатах:

$$r^2 = 8z \text{ или } z = \frac{r^2}{8}$$

Вычислим объем тела, представив тройной интеграл по области V в виде повторного в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{r^2}{8}}^{\sqrt{9-r^2}} dz = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{9-r^2} - \frac{r^2}{8} \right) r dr = \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{9-r^2} d(9-r^2) - \frac{r^4}{32} \Big|_0^{2\sqrt{2}} \right) = 2\pi \left(-\frac{1}{3} (9-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\sqrt{2}} - 2 \right) = \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{3} (1-27) - 2 \right) = 2\pi \left(\frac{26}{3} - 2 \right) = 2\pi \cdot \frac{20}{3} = \frac{40\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{40\pi}{3}$$

Задачи по теме «Криволинейный и поверхностный интегралы».

Задача 2.8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

по замкнутому контуру L (обход контура против часовой стрелки) двумя способами: непосредственно и по формуле Грина.

$$L: y = x^2 - 3x + 2, y = x + 2$$

$$P(x, y) = x - y, \quad Q(x, y) = x$$

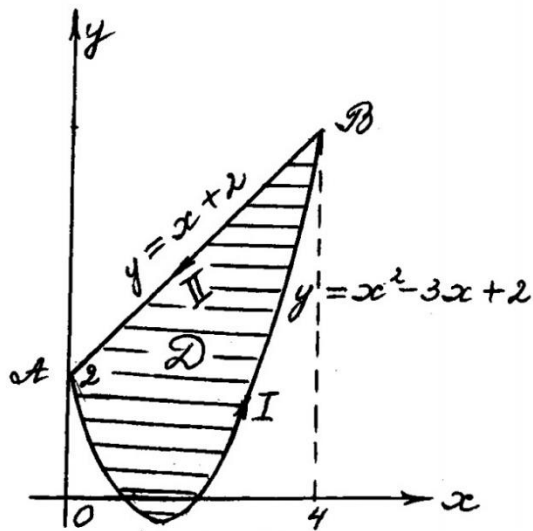


Рис. 15.6

Нарисуем замкнутый контур L , образованный дугой параболы $y = x^2 - 3x + 2$ и отрезком прямой $y = x + 2$ (рис. 15.6).

Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Точки пересечения $A(0;2)$ и $B(4;6)$.

1 способ: непосредственное вычисление криволинейного интеграла.

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_L (x - y)dx + xdy$$

Замкнутый контур L состоит из дуги параболы AIB и отрезка прямой $BIIA$:

$$\oint_L (x - y)dx + xdy = \int_{AIB} (x - y)dx + xdy + \int_{BIIA} (x - y)dx + xdy$$

AIB :

$$y = x^2 - 3x + 2, \quad dy = (2x - 3)dx, \quad x \in [0, 4]$$

$$\int_{AIB} (x - y)dx + xdy = \int_0^4 (x - (x^2 - 3x + 2) + x(2x - 3))dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^4 (x - x^2 + 3x - 2 + 2x^2 - 3x) dx = \int_0^4 (x^2 + x - 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^4 = \\
&= \frac{64}{3} + 8 - 8 = \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

ВИА:

$$y = x + 2, \quad dy = dx, \quad x \in [4, 0]$$

$$\begin{aligned}
\int_{BIIA} (x - y) dx + x dy &= \int_4^0 (x - (x + 2) + x) dx = \int_4^0 (x - 2) dx = \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_4^0 = -(8 - 8) = 0
\end{aligned}$$

$$\oint_L (x - y) dx + x dy = \frac{64}{3}$$

2 способ: применение формулы Грина:

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

Область D ограничена замкнутым контуром L .

$$P(x, y) = x - y, \quad Q(x, y) = x, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned}
\oint_L (x - y) dx + x dy &= \iint_D 2 dx dy = 2 \int_0^4 dx \int_{x^2 - 3x + 2}^{x+2} dy = \\
&= 2 \int_0^4 (x + 2 - x^2 + 3x - 2) dx = 2 \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = 2 \left(-\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \\
&= 2 \left(-\frac{64}{3} + 32 \right) = 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{64}{3}$$

Задача 2.9. Вычислить площадь части поверхности σ , заключенной внутри цилиндрической поверхности Π (задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

$$\sigma: z = 2xy, \quad \Pi: x^2 + y^2 = 12$$

Площадь S поверхности, заданной уравнением $z = z(x, y)$ вычисляется по формуле:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} dx dy$$

где D – проекция поверхности на плоскость xOy .

Поверхность σ , заданная уравнением $z = 2xy$ называется гиперболическим параболоидом или «седлом». Требуется вычислить площадь той части поверхности, которая заключена внутри круглого цилиндра, заданного уравнением $x^2 + y^2 = 12$.

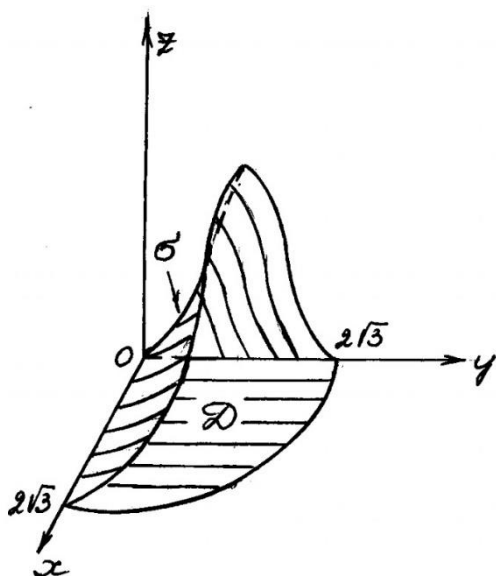


Рис. 15.7.

Рассмотрим ту часть гиперболического параболоида, которая вырезается цилиндром и расположена в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), и вычислим четвертую часть искомой площади (рис. 15.7). Проекция D этой части поверхности на координатную плоскость xOy представляет собой четверть круга с центром в начале координат, радиус которого равен $2\sqrt{3}$.

$$z = 2xy, \quad z'_x = 2y, \quad z'_y = 2x$$

$$\frac{1}{4}S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

Для вычисления двойного интеграла по области D воспользуемся полярными координатами.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{2\sqrt{3}} (1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + 4r^2) = \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{24} \left((1 + 48)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{\pi}{24} (7^3 - 1) = \\ &= \frac{\pi}{24} (7 - 1)(7^2 + 7 + 1) = \frac{\pi}{4} \cdot 57 = \frac{57\pi}{4} \end{aligned}$$

$$S = 57\pi$$

Ответ: 57π

Задачи по теме «Элементы теории поля».

Задача 2.10. Найти градиент скалярного поля $u(M)$. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}(M)$.

Градиент скалярного поля $u(M) = F(x, y, z)$ вычисляется по формуле:

$$\operatorname{grad} u(M) = \operatorname{grad} F(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \vec{k}$$

Дивергенция и ротор векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ вычисляются по формулам:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y, z) & Q(x, y, z) & R(x, y, z) \end{vmatrix}$$

$$u(M) = F(x, y, z) = x^y \arcsin \sqrt{z}$$

$$\vec{a}(M) = (xy \ln z)\vec{i} + (z \cos(xy))\vec{j} + e^{-xyz}\vec{k}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1} \arcsin \sqrt{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^y \ln x \arcsin \sqrt{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x^y \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{x^y}{2\sqrt{z-z^2}}$$

$$\operatorname{grad} u(M) = (yx^{y-1} \arcsin \sqrt{z})\vec{i} + (x^y \ln x \arcsin \sqrt{z})\vec{j} + \left(\frac{x^y}{2\sqrt{z-z^2}} \right) \vec{k}$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial(xy \ln z)}{\partial x} + \frac{\partial(z \cos(xy))}{\partial y} + \frac{\partial e^{-xyz}}{\partial z} =$$

$$= y \ln z - xz \sin(xy) - xy \cdot e^{-xyz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy \ln z & z \cos(xy) & e^{-xyz} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial e^{-xyz}}{\partial y} - \frac{\partial (z \cos(xy))}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial (xy \ln z)}{\partial z} - \frac{\partial e^{-xyz}}{\partial x} \right) \vec{j} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial (z \cos(xy))}{\partial x} - \frac{\partial (xy \ln z)}{\partial y} \right) \vec{k} = \\
&= (-xze^{-xyz} - \cos(xy))\vec{i} + \left(\frac{xy}{z} + yze^{-xyz} \right) \vec{j} + (-yz \sin(xy) - x \ln z) \vec{k}
\end{aligned}$$

Задача 2.11. Найти поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность σ двумя способами:

- 1) непосредственно, вычисляя потоки через все гладкие куски поверхности σ ;
- 2) по теореме Остроградского-Гаусса.

$$\vec{a}(M) = xy\vec{i} + y^2z\vec{j} + \vec{k}$$

$$\sigma : (z-1)^2 = x^2 + y^2, \quad y=0, \quad z=0$$

1 способ. Нарисуем замкнутую поверхность σ , которая образована частью конуса $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ и координатными плоскостями $y=0, z=0$ (рис. 15.8).

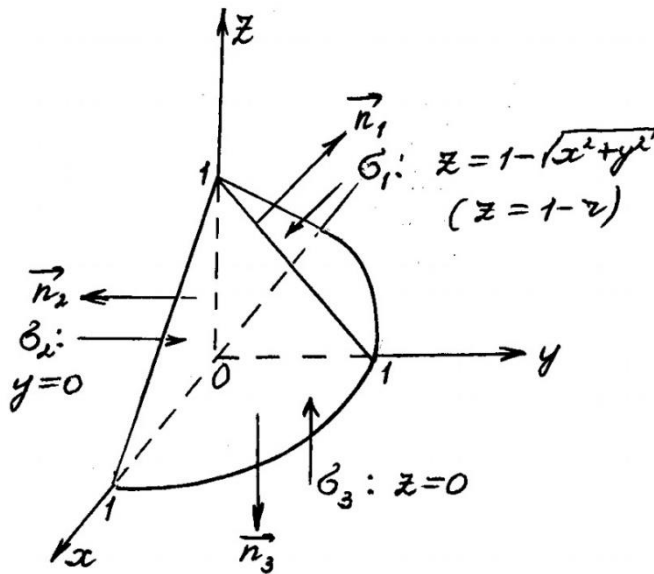


Рис. 15.8.

Поверхность состоит из трех частей: σ_1 – часть конуса, σ_2 – треугольник, расположенный в плоскости xOz и σ_3 – полукруг, расположенный в плоскости xOy . Поток через замкнутую поверхность σ

$$\Pi = \oint_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

представим в виде суммы трех слагаемых: Π_1 – поток через σ_1 , Π_2 – поток через σ_2 , Π_3 – поток через σ_3 .

$$\sigma_1: (z-1)^2 = x^2 + y^2, z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Для вычисления вектора нормали к поверхности представим поверхность как поверхность уровня скалярной функции $F = x^2 + y^2 - (z-1)^2$.

$$\text{grad} F = (2x, 2y, -2(z-1)) \parallel (x, y, 1-z)$$

Так как на поверхности σ_1 переменная $z \leq 1$, то аппликата полученного вектора неотрицательна, что соответствует направлению внешней нормали к данной

поверхности. Вычислим модуль полученного вектора, а затем координаты единичной нормали \vec{n}_1 к σ_1 :

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}, \frac{1-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}} \right)$$

$$(\vec{a}, \vec{n}_1) = \frac{x^2 y + y^3 z + (1-z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}$$

При вычислении интеграла по поверхности σ_1 будем проектировать σ_1 на координатную плоскость xOy . Проекция σ_1 – это область σ_3 на плоскости xOy .

$$d\sigma_1 = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}{1-z} dxdy$$

$$(\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma_1 = \frac{x^2 y + y^3 z + (1-z)}{1-z} dxdy$$

Исключим переменную z из полученного выражения, пользуясь уравнением поверхности σ_1 :

$$1-z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и перейдем к полярным координатам

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 1-z = r, z = 1-r$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma_3} \frac{x^2 y + y^3 z + (1-z)}{1-z} dxdy = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot r \sin \varphi + r^3 \sin^3 \varphi \cdot (1-r) + r}{r} \cdot r dr = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 (r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + r^3 \sin^3 \varphi - r^4 \sin^3 \varphi + r) dr = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 (r^3 \sin \varphi - r^4 \sin^3 \varphi + r) dr = \int_0^\pi \left(\frac{r^4}{4} \sin \varphi - \frac{r^5}{5} \sin^3 \varphi + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} \sin \varphi - \frac{1}{5} \sin^3 \varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi = \left(-\frac{1}{4} \cos \varphi + \frac{1}{5} \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) + \frac{1}{2} \varphi \right) \Big|_0^\pi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{15} + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{30} + \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma_2: y = 0, \vec{n}_2 = (0, -1, 0)$$

$$(\vec{a}, \vec{n}_2) = -y^2 z = 0 \Rightarrow \Pi_2 = 0$$

$$\sigma_3: z = 0, \vec{n}_3 = (0, 0, -1)$$

$$(\vec{a}, \vec{n}_3) = -1 \Rightarrow \Pi_3 = \iint_{\sigma_3} (-1) dx dy = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Pi = \frac{7}{30} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{30}$$

2 способ. По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\Pi = \oiint_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz$$

где область V ограничена замкнутой поверхностью σ .

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2 z)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial z} = y + 2yz = y(1 + 2z)$$

Для вычисления тройного интеграла воспользуемся цилиндрическими координатами:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V y(1 + 2z) dx dy dz = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} r \sin \varphi (1 + 2z) dz = \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 (z + z^2) \Big|_0^{1-r} dr = -\cos \varphi \Big|_0^\pi \cdot \int_0^1 r^2 (1 - r + (1 - r)^2) dr = \\ &= 2 \int_0^1 r^2 (r^2 - 3r + 2) dr = 2 \int_0^1 (r^4 - 3r^3 + 2r^2) dr = 2 \left(\frac{1}{5} r^5 - \frac{3}{4} r^4 + \frac{2}{3} r^3 \right) \Big|_0^1 = \\ &= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{12 - 45 + 40}{30} = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{30}$$

Задача 2.12. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру Γ двумя способами:

- 1) непосредственно, вычисляя криволинейный интеграл по контуру Γ .
- 2) по теореме Стокса.

$$\vec{a}(M) = y \vec{i} + xz \vec{j} + \vec{k}$$

$$\Gamma: (z-1)^2 = x^2 + y^2, y=0, z=0$$

1 способ. Замкнутый контур Γ образован пересечением конуса $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ с координатными плоскостями $y=0, z=0$ (рис. 15.9) и состоит из трех частей $AIB, BIIС, CIIIA$.

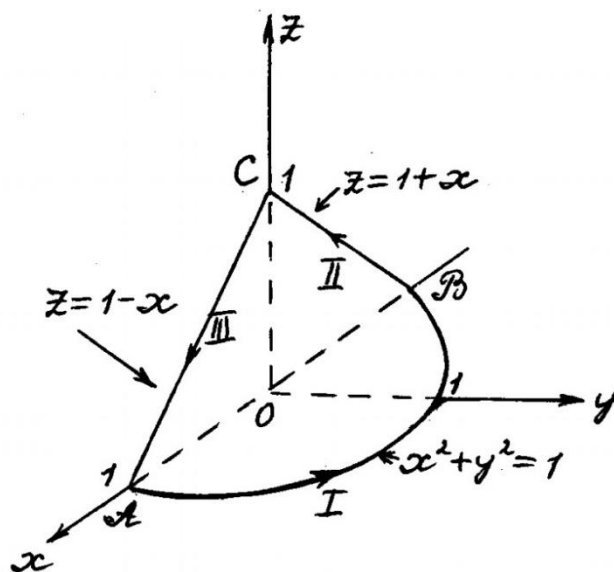


Рис. 15.9.

Циркуляцию

$$\Pi = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{l})$$

представим в виде суммы трех слагаемых:

$$\Pi = \int_{AIB} (\vec{a}, d\vec{l}) + \int_{BIIС} (\vec{a}, d\vec{l}) + \int_{CIIIA} (\vec{a}, d\vec{l})$$

$$AIB: x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

Введем параметрические уравнения дуги AIB : $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t \in [0, \pi]$.

$$\vec{a} = (y, xz, 1) = (\sin t, 0, 1)$$

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz) = (-\sin t, \cos t, 0)dt$$

$$(\vec{a}, d\vec{l}) = -\sin^2 t dt$$

$$\int_{AIB} (\vec{a}, d\vec{l}) = \int_0^{\pi} (-\sin^2 t) dt = - \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -\frac{\pi}{2}$$

$$BIIС: x = x, y = 0, z = 1 + x, x \in [-1, 0]$$

$$\vec{a} = (0, x(1+x), 1)$$

$$d\vec{l} = (1, 0, 1)dx$$

$$(\vec{a}, d\vec{l}) = dx$$

$$\int_{\text{ВНС}} (\vec{a}, d\vec{l}) = \int_{-1}^0 dx = 1$$

США: $x = x, y = 0, z = 1 - x, x \in [0, 1]$

$$\vec{a} = (0, x(1 - x), 1)$$

$$d\vec{l} = (1, 0, -1)dx$$

$$(\vec{a}, d\vec{l}) = -dx$$

$$\int_{\text{США}} (\vec{a}, d\vec{l}) = - \int_0^1 dx = -1$$

$$\Pi = -\frac{\pi}{2} + 1 - 1 = -\frac{\pi}{2}$$

2 способ. Вычислим циркуляцию по замкнутому контуру Γ по формуле Стокса:

$$\Pi = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{l}) = \iint_{\sigma} (\text{rot} \vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

где σ – поверхность, ограниченная контуром Γ (направление обхода контура и сторона поверхности согласованы).

Вычислим $\text{rot} \vec{a}$:

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & xz & 1 \end{vmatrix} = -x\vec{i} + (z - 1)\vec{k}$$

В качестве поверхности, ограниченной замкнутым контуром Γ , возьмем часть конуса σ_1 из задачи 2.11. Единичная нормаль \vec{n}_1 к поверхности σ_1 и элемент площади поверхности были вычислены в задаче 2.11:

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1 - z)^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1 - z)^2}}, \frac{1 - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1 - z)^2}} \right)$$

$$d\sigma_1 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (1 - z)^2}}{1 - z} dx dy$$

Вычислим скалярное произведение $(\text{rot} \vec{a}, \vec{n}_1)$:

$$(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}_1) = \frac{-x^2 - (1-z)^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}$$

и подынтегральное выражение:

$$(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) d\sigma_1 = \frac{-x^2 - (1-z)^2}{1-z} dx dy$$

Исключим переменную z из полученного выражения, пользуясь уравнением поверхности:

$$1-z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и перейдем к полярным координатам:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 1-z = r, z = 1-r$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\sigma} (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma_1 = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{-r^2 \cos^2 \varphi - r^2}{r} r dr = \\ &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (-r^2 (\cos^2 \varphi + 1)) dr = - \int_0^{\pi} (\cos^2 \varphi + 1) \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 d\varphi = \\ &= - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + 1 \right) d\varphi = - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \\ &= - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}$$