Математический анализ, 2 семестр

Лекция 8

Тройной интеграл

9. Тройной интеграл

9.1. Определение и свойства тройного интеграла

Пусть в некоторой области V трехмерного пространства $Oxyz$ задана функция $f(x,y,z)$. Введем понятие тройного интеграла функции $f(x,y,z)$ по области V. Для этого, также как и при определении двойного интеграла, выполним разбиение области. Разделим область V на n частей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Элементы разбиения Δ_i будут представлять собой прямоугольные параллелепипеды со сторонами $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, а объем i-го элемента будет равен $\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$. В пределах каждого элемента Δ_i произвольно выберем точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, вычислим значение функции в этой точке $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

За диаметр разбиения d примем наибольшую из всех диагоналей прямоугольных параллелепипедов Δ_i.

Определение 1. Тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ по области V называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ вычисленный при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения области. Обозначается

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Сформулируем без доказательства достаточные условия существования тройного интеграла: если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области V, а область V ограничена кусочно-гладкой поверхностью, то тройной интеграл функции $f(x, y, z)$ по области V существует, т.е. функция интегрируема в этой области.

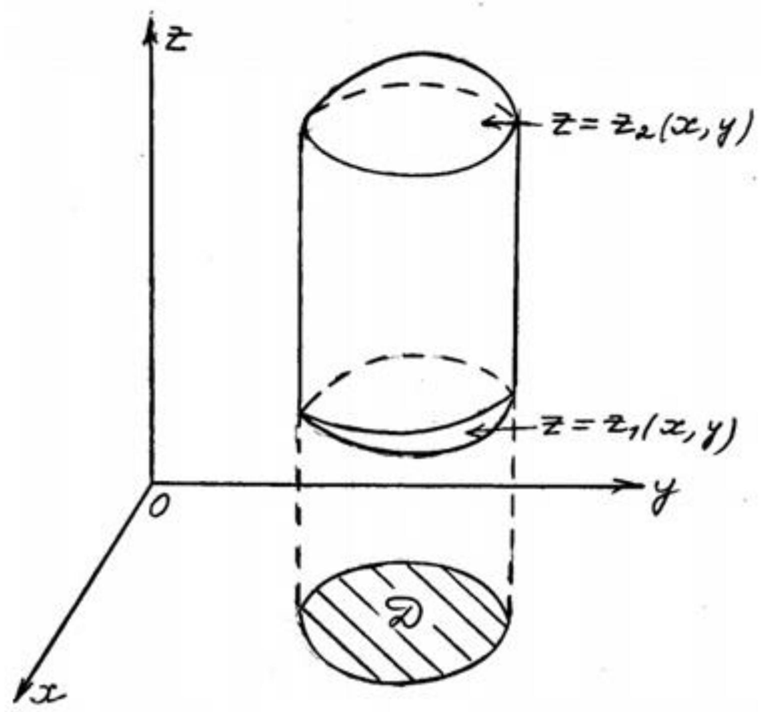
Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла. Сформулируем, например, теорему о среднем для тройного интеграла: если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области V, объем которой также обозначим V, то найдется точка $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ такая, что

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = f(x_0, y_0, z_0)V.$$

Если подынтегральная функция тождественно равна 1 в области V, то тройной интеграл по области равен объему области. Если подынтегральную функцию интерпретировать как плотность области, то тройной интеграл по области равен ее массе.

9.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Пусть тело V ограничено снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$, проекции которых на плоскость Oxy совпадают и представляют собой область D, а боковая поверхность является цилиндрической с образующей, параллельной оси Oz. Тогда тройной интеграл по области V сводится к повторному



$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$$

Если область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную графиками функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

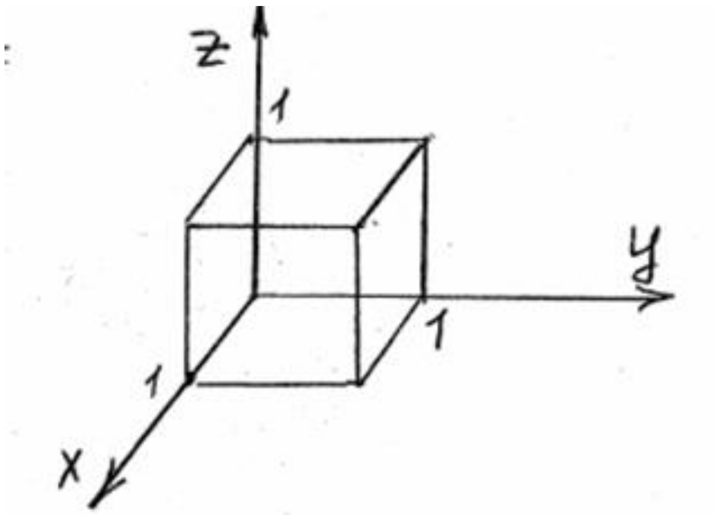
Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить

$\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz$

где область V ограничена плоскостями

$$\begin{cases} x = 0, y = 0, z = 0 \\ x = 1, y = 1, z = 1 \end{cases}$$



$$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy =$$

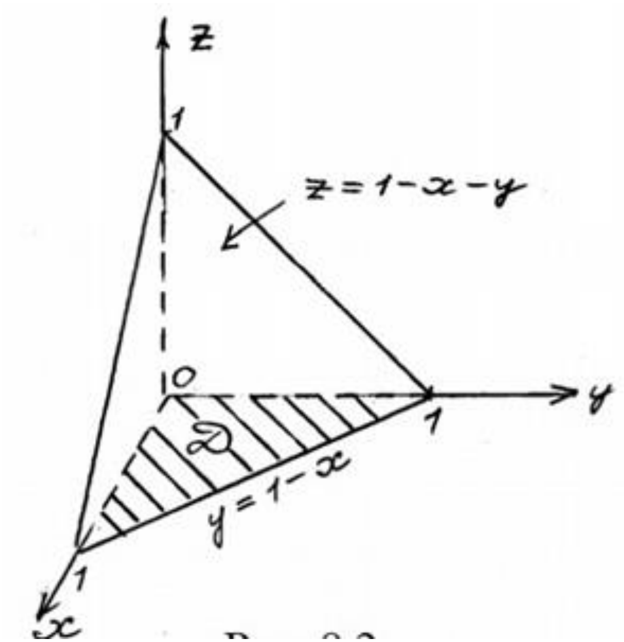
$$= \int_0^1 dx \, \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} y \right)\Bigg|_0^1 = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}$$

Пример 2. Вычислить

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4}$$

где область V ограничена плоскостями

$x+y+z=1, x=0, y=0, z=0.$



Представим тройной интеграл в виде повторного:

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^4} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{3(1+x+y+z)^3}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1+x+y)^3} - \frac{1}{8}\right) dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(-\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{y}{8}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

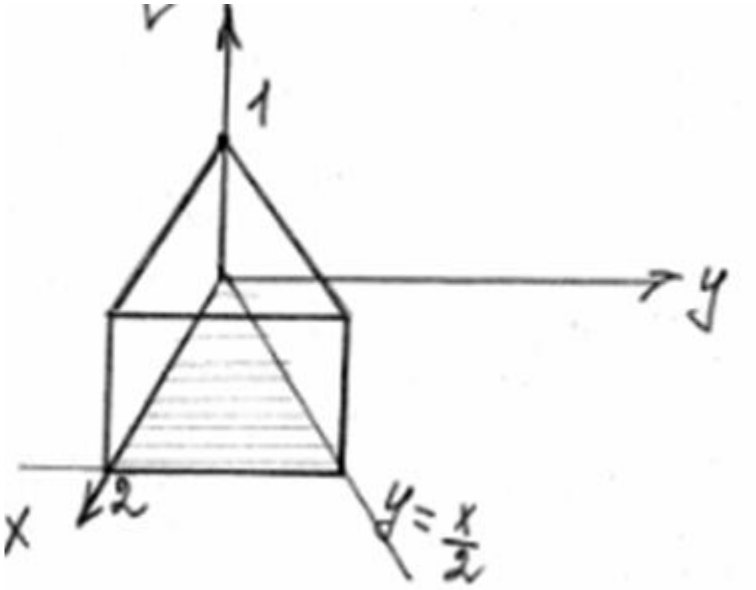
$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4} - \frac{1-x}{4}\right) dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{x-2}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{1+x} + \frac{(x-2)^2}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48}$$

Пример 3. Вычислить

$$\iiint\limits_V x^2\, sh(xy)dxdydz$$

где область V ограничена плоскостями $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0, \quad y = \frac{x}{2}. \\ z = 0, \quad z = 1 \end{cases}$



$$V: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \dfrac{x}{2} \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

$$\iiint\limits_V x^2\, sh(xy)dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} dy \int_0^1 x^2 sh(xy)\, dz =$$

$$= \int_0^2 x^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} sh(xy)dy \int_0^1 dz = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} sh(xy)dy =$$

$$= \int_0^2 x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} ch(xy) \Big|_0^{\frac{x}{2}} \right) dx = \int_0^2 x \cdot \left(ch\frac{x^2}{2} - ch0 \right) dx =$$

$$= \int_0^2 x \cdot ch\frac{x^2}{2} dx - \int_0^2 x dx = \int_0^2 ch\frac{x^2}{2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) - 2 = sh\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - 2 = sh2 - 2.$$

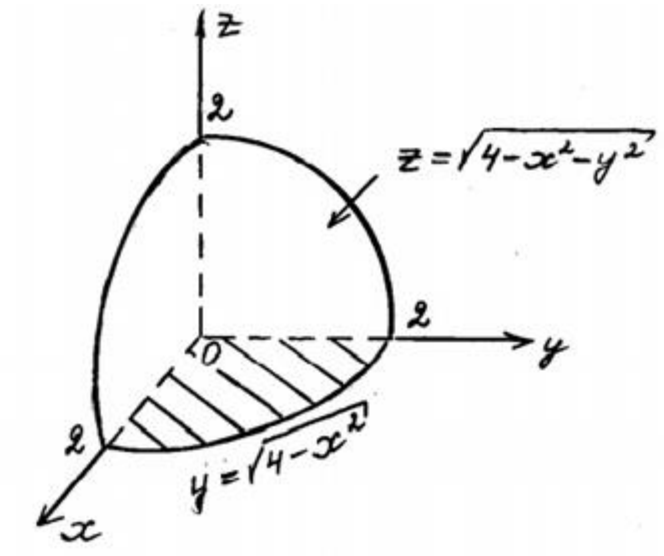
Пример 4. Вычислить

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz$$

где область V ограничена поверхностями

$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = 0, y = 0,$

$z = 0$ (первый октант).



Перейдем к повторному интегралу:

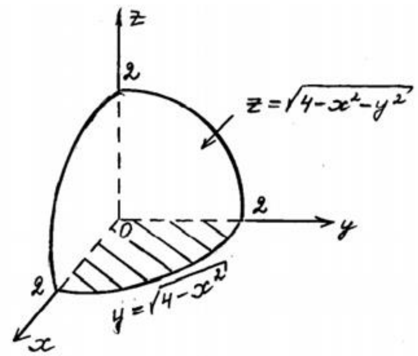
$$\iiint\limits_V xyzdxdydz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy(4-x^2-y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x\left((4-x^2)\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x\left((4-x^2)^2 - \frac{(4-x^2)^2}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 x(4-x^2)^2 dx = -\frac{1}{16}\int_0^2 (4-x^2)^2 d(4-x^2) = -\frac{1}{16}\left(\frac{(4-x^2)^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}$$



9.3. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

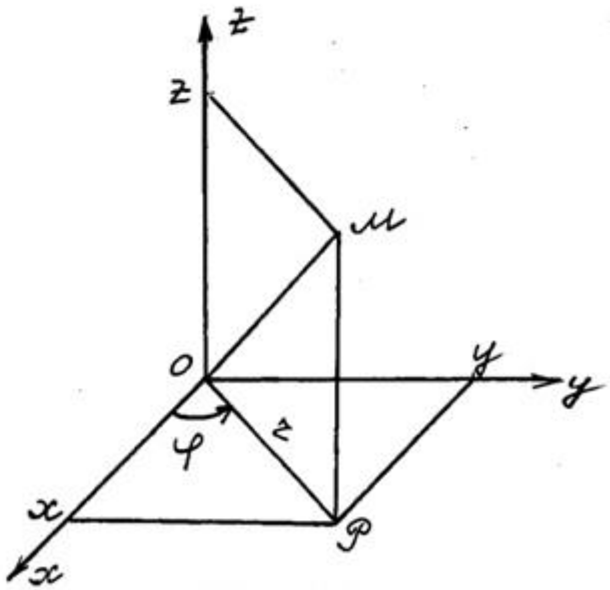
Рассмотрим вопрос о замене переменных в тройном интеграле. Пусть имеется область V в системе координат x, y, z и область V_1 в системе координат u, v, w. Функции $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ устанавливают взаимно-однозначное соответствие между точками этих областей. Кроме того, будем предполагать, что эти функции имеют в области V_1 непрерывные частные производные первого порядка, и якобиан

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль в области V_1. Тогда формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \cdot |I| \cdot dudvdw$$

Наиболее часто на практике используются цилиндрические и сферические координаты.



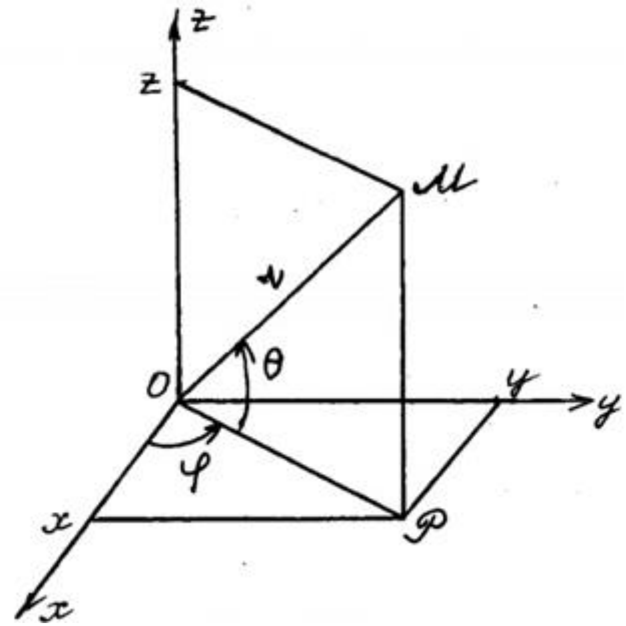
Цилиндрические координаты r, φ, z представляют собой соединение полярных координат r, φ на плоскости *Oxy* с обычной декартовой координатой z. Формулы, связывающие декартовы координаты с цилиндрическими, имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \,, \\ \quad z = z \end{cases} \qquad 0 \le r < +\infty, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < +\infty$$

Вычислим якобиан преобразования:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Сферические координаты r, φ, θ или полярные координаты в пространстве, связаны с декартовыми формулами:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

$$0 \leq r < +\infty;\ 0 \leq \varphi < 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Вычислим якобиан преобразования:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ \quad z = r\sin\theta \end{cases}$$

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

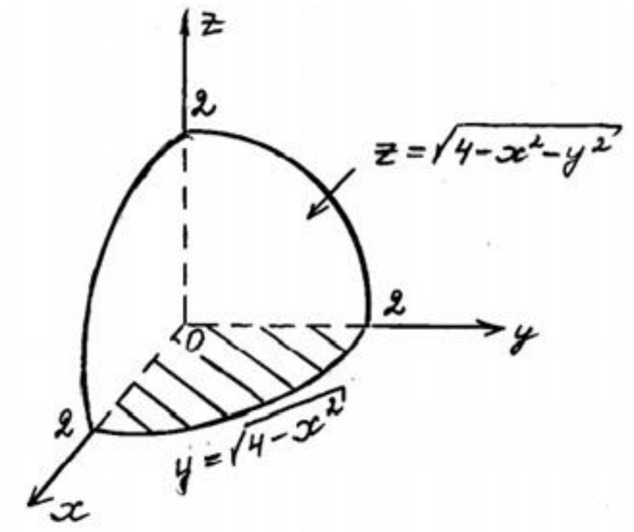
Раскладывая определитель по третьей строке, получим:

$$I = \sin\theta\,(r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi) +$$

$$+r\cos\theta\,(r\cos^2\theta\cos^2\varphi + r\cos^2\theta\sin^2\varphi) = r^2\cos\theta\sin^2\theta + r^2\cos^3\theta =$$

$$= r^2\cos\theta$$

Вернемся к *примеру 4* и вычислим искомый интеграл, используя цилиндрические координаты.



Вычислить $\iiint_V \; xyzdxdydz$

где область V ограничена поверхностями

$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = 0, y = 0,$

$z = 0$ (первый октант).

Перепишем уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в цилиндрических координатах: $r^2 + z^2 = 4$. Учитывая, что область V принадлежит I октанту, выразим z: $z = \sqrt{4 - r^2}$. Сделаем замену в тройном интеграле и перепишем в его виде повторного в цилиндрических координатах: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2, 0 \le z \le \sqrt{4 - r^2}$.

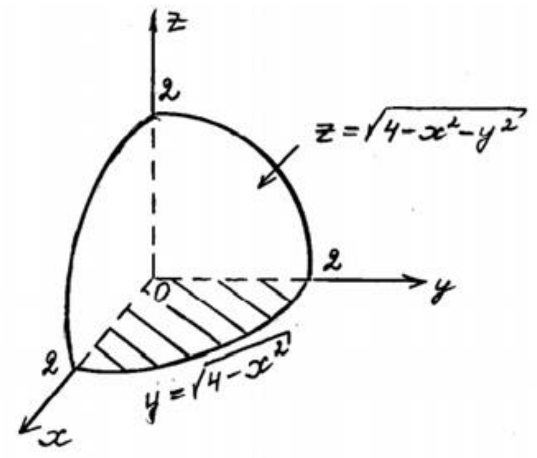
$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_0^{\sqrt{4-r^2}} r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, zrdz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^2 r^3 \left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{4-r^2}} dr = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^2 r^3(4-r^2)dr =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^2 (4r^3 - r^5)dr = \frac{1}{4}\left(r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\left(16 - \frac{32}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Еще проще вычислить этот интеграл, пользуясь сферическими координатами.

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в сферических координатах имеет вид: $r = 2$,



$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

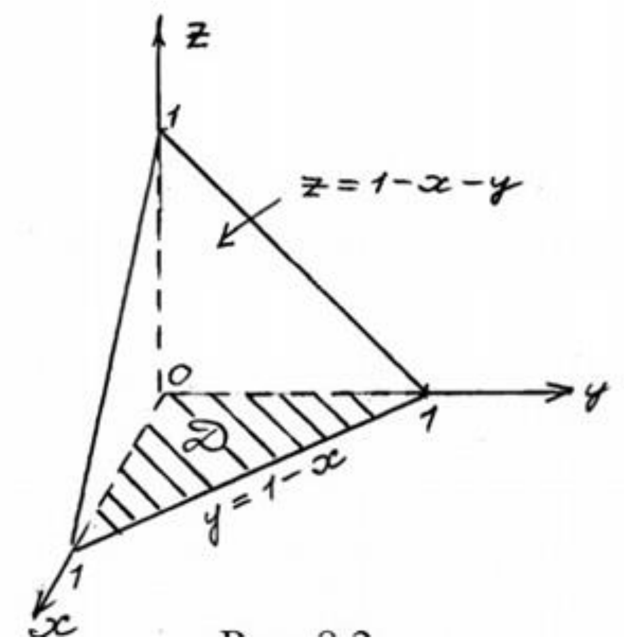
$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2} r\cos\theta\cos\varphi\, r\cos\theta\sin\varphi\, r\sin\theta\, r^2\cos\theta\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2} r^5 dr =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^6}{6}\Big|_0^{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{32}{3} = \frac{4}{3}$$

Пример 5. Вычислить

$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$



где область V ограничена плоскостями

$x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ (I октант).

Воспользуемся тем, что подынтегральная функция, а также область интегрирования симметричны относительно переменных x, y и z.

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\iiint\limits_V x^2dxdydz =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} x^2dz = 3\int\limits_0^1 x^2dx \int\limits_0^{1-x} z|_0^{1-x-y}dy =$$

$$= 3\int_0^1 x^2dx \int_0^{1-x} z|_0^{1-x-y} dy =$$

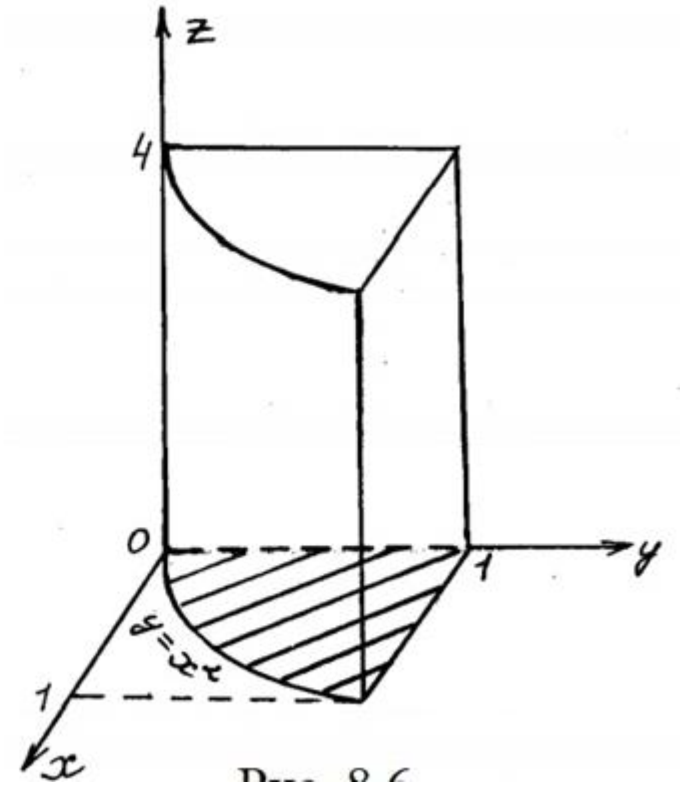
$$= 3\int_0^1 x^2dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = 3\int_0^1 x^2\left((1-x)y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= 3\int_0^1 x^2\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{20}$$

Пример 6. Вычислить

$$\iiint\limits_V (xy+z)dxdydz$$



где область V ограничена цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $x = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 4$ (I октант).

Представим данный интеграл в виде повторного в декартовых координатах, расставляя пределы интегрирования:

$$0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1, 0 \le z \le 4$$

$$\iiint\limits_V (xy+z)dxdydz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^4 (xy + z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \left(xyz + \frac{z^2}{2} \right) \bigg|_0^4 dy =$$

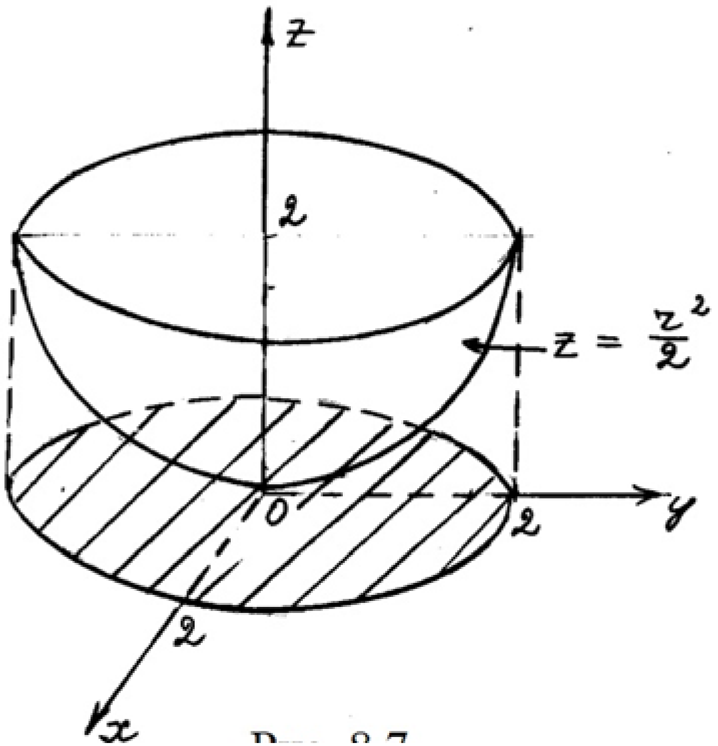
$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (4xy + 8)dy = \int_0^1 (2xy^2 + 8y)|_{x^2}^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x(1 - x^4) + 8(1 - x^2)\right)dx = \int_0^1 (2x - 2x^5 + 8 - 8x^2)dx =$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{3}x^6 + 8x - \frac{8}{3}x^3 \right) \bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 6$$

Пример 7. Вычислить

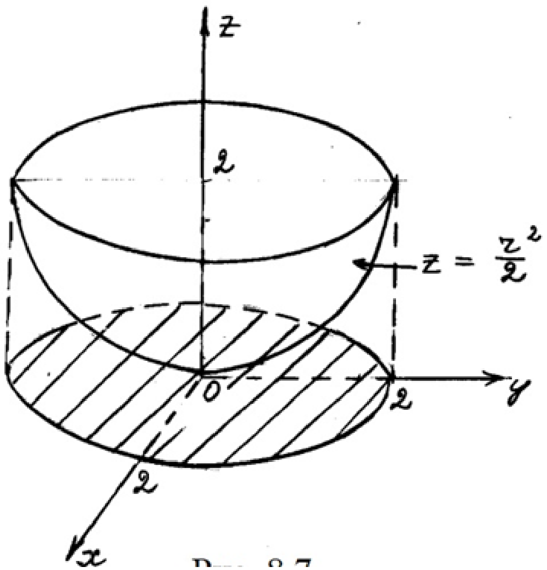
$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,dxdydz$$



где область V ограничена параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$ и плоскостью $z = 2$.

Воспользуемся цилиндрическими координатами:

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,dxdydz =$$



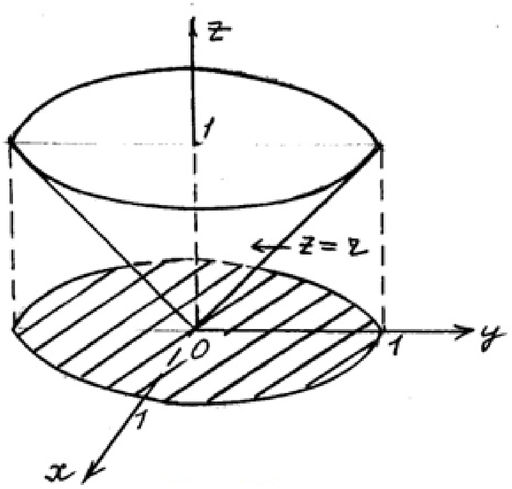
$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^2 \cdot r dz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^3 z\Big|_{\frac{r^2}{2}}^{2} dr = 2\pi \int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(2r^3 - \frac{r^5}{2}\right)dr = 2\pi\left(\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(8-\frac{16}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}$$

Пример 8. Вычислить



$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

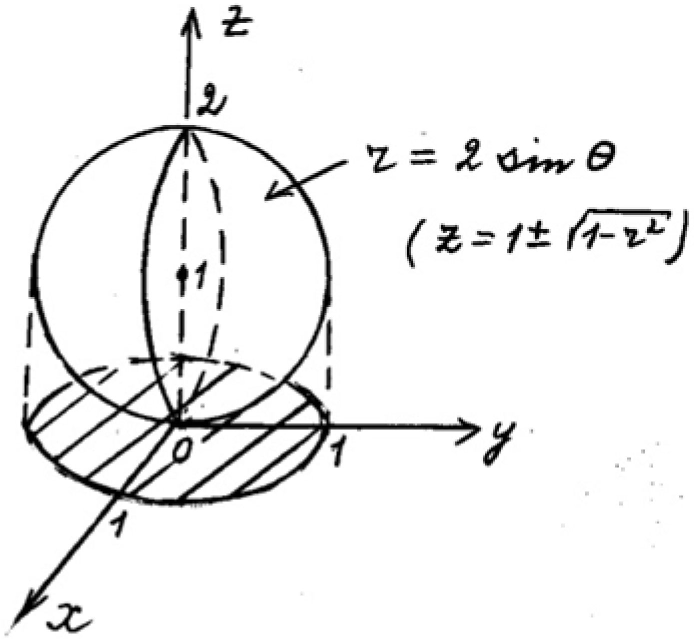
где область V ограничена конусом $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z=1$.

Для решения задачи воспользуемся цилиндрическими координатами:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_r^1 r\cdot r dz =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^1 r^2 z|_r^1 dr = 2\pi\int\limits_0^1 (r^2-r^3)dr = 2\pi\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

Пример 9. Вычислить двумя способами



$$\iiint\limits_V zdxdydz$$

где область V ограничена сферой

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\ .$$

1 способ (сферические координаты).

Перепишем уравнение сферы в сферических координатах:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$r^2 = 2r\sin\theta\,, \qquad r = 2\sin\theta\,, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

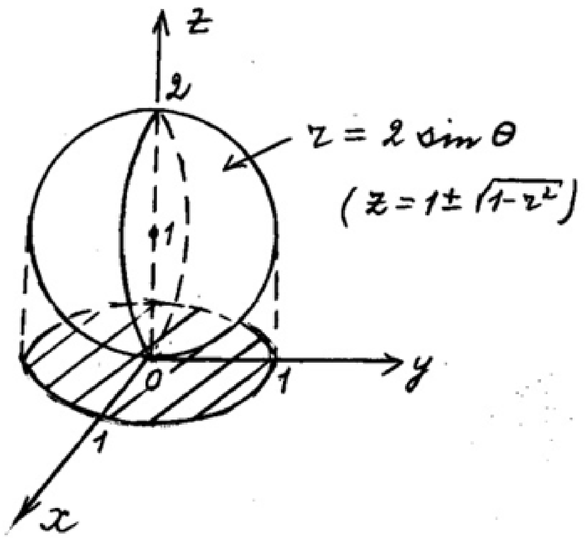
Тогда:

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta\, r^2\cos\theta\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \int_0^{2\sin\theta} r^3 dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2\sin\theta} d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \cdot 4\sin^4\theta d\theta = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta d(\sin\theta) = 8\pi \cdot \left.\frac{\sin^6\theta}{6}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3}$$

2 способ (цилиндрические координаты).



Перепишем уравнение сферы в цилиндрических координатах:

$$r^2 + (z-1)^2 = 1, \qquad z = 1 \pm \sqrt{1-r^2}$$

$z = 1 - \sqrt{1-r^2}$ – уравнение нижней полусферы

$z = 1 + \sqrt{1-r^2}$ – уравнение верхней полусферы

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} rz\,dz = 2\pi \int\limits_0^1 r\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} dr =$$

$$= \pi \int\limits_0^1 r\left(\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)^2 - \left(1-\sqrt{1-r^2}\right)^2\right) dr = 4\pi \int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr =$$

$$= 4\pi \int_{0}^{1} r\sqrt{1 - r^2}dr =$$

$$= -2\pi \int_{0}^{1} \sqrt{1 - r^2}d(1 - r^2) = -2\pi \cdot \frac{2}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$