Математический анализ, 2 семестр

Лекция 1

Неопределенный интеграл.

Методы интегрирования функций

1. Неопределенный интеграл

1.1. Первообразная, неопределенный интеграл

Задачей дифференциального исчисления являлось нахождение производной или дифференциала данной функции. В интегральном исчислении решается обратная задача: по данной функции $f(x)$ ищется такая функция $F(x)$, чтобы $F'(x) = f(x)$, или $dF = f(x)dx$. То есть *по данной производной или дифференциалу требуется восстановить функцию*.

Пример: $f(x) = cosx$. Это производная от $F(x) = sinx$. Но верно и следующее: $F(x) = sinx + 3,\ F'(x) = cosx$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x) = f(x)$, или $dF = f(x)dx$.

Замечание 1. Аналогично можно определить первообразную для функции, определенной на всей числовой оси или на полупрямой.

Замечание 2. Существование первообразной у данной функции не означает, что эта первообразная выражается в конечном виде через элементарные функции.

Например, для $f(x) = e^{-x^2}$, непрерывной на всей числовой оси, существует $F(x): F'(x) = e^{-x^2}$, однако $F(x)$ не может быть выражена как комбинация конечного числа элементарных функций. Другие аналогичные примеры:

$$f(x) = \frac{sinx}{x}, f(x) = \frac{cosx}{x}, f(x) = \frac{e^x}{x}, f(x) = sinx^2, \ldots$$

Для сравнения вспомним, что у элементарной функции производная (в отличие от первообразной) всегда является элементарной функцией.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет в данном промежутке первообразную $F(x)$, то ***все*** первообразные данной функции заключаются в выражении $F(x) + C$, то есть любые две первообразные данной функции отличаются друг от друга на константу.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для данной функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Предположим, что существует другая первообразная $F_1(x)$ для $f(x)$, т.е. ${F_1}'(x) = f(x)$. Тогда ${F_1}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$,

$$\big(F_1(x) - F(x)\big)' = 0.$$

$$F_1(x) - F(x) = C.$$

Или $F_1(x) = F(x) + C$.

Определение 2. Пусть $f(x)$ имеет в данном промежутке (a, b) первообразную $F(x)$. Тогда выражение $F(x) + C$ является общим выражением для всех первообразных и называется *неопределенным интегралом* от заданной функции $f(x)$, и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Замечание. Так как действие интегрирование (нахождение первообразной) является обратным по отношению к дифференцированию, то правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Теорема 2 (о существовании неопределенного интеграла).

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b), то на (a, b) существует первообразная $F(x)$ для данной функции и неопределенный интеграл.

1.2.Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

3. $\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int d(F(x)) = F(x) + C$. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции с точностью до константы.

4. $\int \big(af(x) + bg(x)\big)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$, где a и b – произвольные постоянные. Свойство линейности.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$, где a и b – произвольные постоянные и $a \neq 0$.

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, $u = \varphi(x)$, $\varphi(x) -$ любая дифференцируемая функция. Это свойство инвариантности формулы интегрирования.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Воспользуемся таблицей производных основных элементарных функций и составим таблицу неопределенных интегралов:

1. $\int 0dx = C$	11. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
2. $\int 1dx = x + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C, a \neq 0$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C, x \neq 0$	14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C, a \neq 0$
5. $\int cosxdx = sinx + C$	15. $\int shxdx = chx + C$
6. $\int sinxdx = -cosx + C$	16. $\int chxdx = shx + C$

7. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$	17. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C$
8. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$	18. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$
9. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + C,$ $a > 0, a \neq 1$	19. $\int \frac{dx}{sinx} = ln\left\|tg\,\frac{x}{2}\right\| + C$
10. $\int e^x dx = e^x + C$	20. $\int \frac{dx}{cosx} = ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

В справедливости формул можно убедиться, продифференцировав правую часть.

Обоснуем формулу 4: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0$

Если $x > 0$, то согласно таблице производных $(lnx)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$. Значит, формула 4 верна на любом промежутке, не содержащем нуля.

Правая часть формулы 13:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, a \neq 0$$

называется «длинный» логарифм, а правая часть формулы 14:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$$

– «высокий» логарифм.

Формулы 11-14, а также 19 и 20 могут быть проверены непосредственным дифференцированием.

Формула 11:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\right)'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a^2+x^2}$$

2. Методы интегрирования

Как и всякая обратная задача, отыскание первообразной (неопределенного интеграла) сложнее, чем производной (дифференциала).

Если для отыскания производной существует четкий алгоритм, то для отыскания первообразных элементарных функций такого алгоритма не существует. Так, например, не существует правил нахождения интеграла от произведения двух функций, даже если известны интегралы от сомножителей. Методы интегрирования функций сводятся к указанию ряда приемов, выполнение которых приводит к цели в некоторых частных случаях.

2.1. Непосредственное интегрирование

Примеры на применение таблицы и свойств неопределенного интеграла.

1. $\int (5+2x)^2\,dx = \int (25+20x+4x^2)\,dx = 25x + 20\cdot\frac{x^2}{2} + 4\cdot\frac{x^3}{3} + C =$

$= 25x + 10x^2 + \frac{4}{3}x^3 + C$

2. $\int (5cosx - 3sinx)dx = 5\int cosxdx - 3\int sinxdx = 5sinx + 3cosx + C$

3. $\int \frac{2x^2+7}{x}dx = \int \left(2x + \frac{7}{x}\right)dx = x^2 + 7\ln|x| + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}}} = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+\frac{9}{4}}\right| + C$

5. $\int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{12}\cdot ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right| + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-x^2}} = \frac{1}{4} arcsin\frac{4x}{5} + C$

7. $\int 3^x \cdot e^x\, dx = \int (3e)^x\, dx = \frac{(3e)^x}{\ln{(3e)}} + C = \frac{(3e)^x}{\ln 3+1} + C$

8. $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\ln|4x+3| + C$. Свойство 5: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \int (5x-2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot (5x-2)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$

10. $\int \frac{6}{x^2+7}\, dx = 6\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{7})^2} = \frac{6}{\sqrt{7}} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$

2.2. Метод замены переменной

Метод замены переменной основан на применении формулы для производной сложной функции. Пусть $F(t)$ – первообразная для функции $f(t)$, тогда $F\big(\varphi(x)\big)$ – первообразная для функции $f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$, таким образом,

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = \begin{bmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(t)dt = F(t) + C =$$

$$= F\big(\varphi(x)\big) + C$$

В другой форме:

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = \int f\big(\varphi(x)\big)\,d\big(\varphi(x)\big) = F\big(\varphi(x)\big) + C$$

этот прием называется подведением под знак дифференциала.

Примеры.

$$1. \int xe^{-3x^2}\,dx = \begin{bmatrix} -3x^2 = t \\ -6xdx = dt \\ xdx = -\dfrac{1}{6}dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\int e^t dt = -\frac{1}{6}e^t + C =$$

$$= -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$$

Или:

$$\int xe^{-3x^2}\,dx = \int e^{-3x^2}\,d\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{6}\int e^{-3x^2}\,d(-3x^2) = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$$

$$2. \int \frac{lnx}{x}dx = \begin{bmatrix} lnx = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}ln^2x + C$$

Или: $\displaystyle\int \frac{lnx}{x}dx = \int lnx\,d(lnx) = \frac{1}{2}ln^2x + C$

$$3.\ \int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{dx}{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \frac{dx}{2cos^2\frac{x}{2}} = \begin{bmatrix} tg\frac{x}{2} = t \\ \dfrac{dx}{2cos^2\frac{x}{2}} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

$$4.\ \int x(x+2)^{100}\,dx = \begin{bmatrix} x+2=t \\ x = t-2 \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int (t-2)\,t^{100}dt =$$

$$= \int (t^{101} - 2t^{100})\,dt = \frac{t^{102}}{102} - 2\frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - 2\frac{(x+2)^{101}}{101} + C$$

$$5.\ \int 9x^2\sqrt[3]{x^3+10}\,dx=\begin{bmatrix}x^3+10=t\\3x^2dx=dt\end{bmatrix}=3\int t^{\frac{1}{3}}\,dt=3\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=$$

$$=\frac{9}{4}(x^3+10)\sqrt[3]{x^3+10}+C$$

$$6.\ \int\frac{4xdx}{\sqrt[5]{8-x^2}}=\begin{bmatrix}8-x^2=t\\-2xdx=dt\end{bmatrix}=-2\int t^{-\frac{1}{5}}\,dt=-2\,\frac{t^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1}+C=$$

$$=-\frac{5}{2}t^{\frac{4}{5}}+C=-\frac{5}{2}(8-x^2)^{\frac{4}{5}}+C$$

Рассмотрим подробнее применение метода подведения под знак дифференциала. Справедливы формулы:

$dx = d(x+b), b = const$	$dx = \frac{1}{a}d(ax), a = const$
$xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$	$x^k dx = \frac{1}{k+1}d\left(x^{k+1}\right)$
$cosxdx = d(sinx)$	$sinxdx = -d(cosx)$
$\frac{1}{x}dx = d(lnx)$	$\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$
$e^x dx = d(e^x)$	$\frac{1}{cos^2x}dx = d(tgx)$
И т.д.	$\boldsymbol{\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))}$

Примеры.

$$1.\ \int (1+x^2)^{201}\,xdx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{201}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{202}}{202} + C$$

$$2.\ \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(\sqrt{3}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{d\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}x\right)^2}} = \left[\sqrt{3}x = t\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C$$

$$3.\ \int \frac{dx}{ctg^5x\cdot sin^2x} = \left[\frac{dx}{sin^2x} = -d(ctgx)\right] = -\int \frac{d(ctgx)}{ctg^5x} = [ctgx = u] =$$

$$= -\int u^{-5}\,du = -\frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4ctg^4x} + C$$

$$4. \int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{sinxdx}{sin^2x} = -\int \frac{d(cosx)}{1 - cos^2x} = \int \frac{d(cosx)}{cos^2x - 1} = \int \frac{du}{u^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ln\left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| + C = \frac{1}{2} \cdot ln\left|\frac{cosx - 1}{cosx + 1}\right| + C$$

$$5. \int sin^3x \cdot cosxdx = \int sin^3x\, d(sinx) = \frac{sin^4x}{4} + C$$

$$6. \int tgxdx = \int \frac{sinx}{cosx} dx = -\int \frac{dcosx}{cosx} = -ln|cosx| + C$$

$$7. \int ctgxdx = \int \frac{cosx}{sinx} dx = \int \frac{dsinx}{sinx} = ln|sinx| + C$$

$$8. \int \frac{dx}{xlnx} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{lnx} = \int \frac{dln|x|}{lnx} = ln\big|ln|x|\big| + C$$

$$9. \int e^x cos(e^x)\, dx = \int cos(e^x)\, d(e^x) = sin(e^x) + C$$

$$10. \int \frac{x^3 dx}{5 - x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - (x^4)^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{(x^4)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{8\sqrt{5}} ln\left|\frac{x^4 - \sqrt{5}}{x^4 + \sqrt{5}}\right| + C$$

$$11. \int \frac{2cosx}{4 + sinx} dx = 2\int \frac{d(sinx + 4)}{4 + sinx} = 2\ln(4 + sinx) + C$$

Замечание. $4 + sinx > 0$, поэтому знак модуля опущен.

12. $\int e^x (e^x + 2)^2 dx = \int (e^x + 2)^2 \, d(e^x + 2) = \frac{(e^x + 2)^3}{3} + C$

13. $\int \frac{e^x + sinx}{e^x - cosx} dx = \int \frac{d(e^x - cosx)}{e^x - cosx} = ln|e^x - cosx| + C$

14. $\int \frac{x^4}{1 + x^{10}} dx = \frac{1}{5} \int \frac{dx^5}{1 + (x^5)^2} = \frac{1}{5} arctgx^5 + C$

2.3.Метод интегрирования по частям

Этот метод основан на применении формулы производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Следовательно

$$uv = \int udv + \int vdu.$$

Выражая из этого равенства одно из слагаемых правой части, получим формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула сводит вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$. При правильном обозначении функций u и v последний интеграл вычисляется проще.

Метод интегрирования по частям целесообразно применять в случаях:

Вид интеграла	Обозначение u	Обозначение dv
$\int P(x)\cdot\begin{bmatrix} e^{kx},\ a^{kx} \\ sinkx, coskx \end{bmatrix}dx$ $P(x)$ – многочлен от переменной x	$u = P(x)$	$dv = \begin{bmatrix} e^{kx},\ a^{kx} \\ sinkx, coskx \end{bmatrix}dx$
$\int P(x^k)\cdot\begin{bmatrix} lnx \\ arcsinx \\ arccosx \\ arctgx \\ arcctgx \end{bmatrix}dx,$ Наличие функции $P(x^k)$ не обязательно	$u = \begin{bmatrix} lnx \\ arcsinx \\ arccosx \\ arctgx \\ arcctgx \end{bmatrix}$	$dv = P(x^k)dx$
$\int e^{ax}\cdot\begin{bmatrix} cosbx \\ sinbx \end{bmatrix}dx$	$u = e^{ax}$	$dv = \begin{bmatrix} cosbx \\ sinbx \end{bmatrix}dx$

В очевидных случаях		

Примеры.

1. $\int x\, sinxdx = \begin{bmatrix} u = x, \;\; du = dx \\ dv = sinxdx, \;\; v = -cosx \end{bmatrix} = -xcosx + \int cosxdx =$
$= -xcosx + sinx + C$

2. $\int lnxdx = \begin{bmatrix} u = lnx, \;\; du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, \;\; v = x \end{bmatrix} = xlnx - \int x \cdot \dfrac{1}{x} dx = xlnx - x + C$

3. $\int x\, lnxdx = \begin{bmatrix} u = lnx, \;\; du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx, \;\; v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}x^2 lnx - \dfrac{1}{2}\int x^2 \cdot \dfrac{1}{x} dx =$

$$= \frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4}x^2 + C$$

4. $$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1, & du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} =$$

$$= (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2dx = \frac{1}{3}(2x+1)\cdot e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C$$

5. $$\int x^2 \cdot\ sinxdx = \begin{bmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = sinxdx, & v = -cosx \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2 cosx + 2\int x\cdot cosx\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2 cosx + 2\left(x\cdot sinx - \int sinx\,dx\right) = -x^2 cosx + 2xsinx + 2cosx + C$$

Однократное применение формулы интегрирования по частям в интегралах вида

$$\int P(x)\cdot\begin{bmatrix} e^{kx},\ a^{kx} \\ sinkx, coskx \end{bmatrix} dx$$

понижает степень многочлена $P(x)$ на 1.

6. Вычислить

$$\int e^{-2x} cos3xdx.$$

Обозначим искомый интеграл через I и применим формулу интегрирования по частям:

$$I=\int e^{-2x} cos3xdx=\begin{bmatrix} u=e^{-2x}, & du=-2e^{-2x}dx \\ dv=cos3xdx, & v=\frac{1}{3}sin3x \end{bmatrix}=$$

$$= \frac{1}{3} e^{-2x} sin3x + \frac{2}{3} \int e^{-2x} sin3x dx$$

К интегралу в правой части равенства снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\frac{2}{3} \int e^{-2x} sin3x dx = \begin{bmatrix} u = e^{-2x}, \;\; du = -2e^{-2x} dx \\ dv = sin3x dx, \;\; v = -\frac{1}{3} cos3x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-2x} cos3x - \frac{2}{3} \int e^{-2x} cos3x dx \right)$$

В правой части полученного равенства присутствует искомый интеграл *I*. Таким образом, мы приходим к равенству:

$$I = \frac{1}{3} e^{-2x} sin3x + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-2x} cos3x - \frac{2}{3} I \right)$$

Выражая отсюда *I*, находим:

$$I = \int e^{-2x} cos3xdx = \frac{1}{13} e^{-2x}(3sin3x - 2cos3x) + C$$

Приемы интегрирования можно комбинировать.

Пример 1.

$$\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2+1-1) arctgx}{1+x^2} dx = \int arctgxdx - \int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$$

$$\int arctgxdx = \left[\begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right] = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot arctgx - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1$$

$$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} t = arctgx \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{bmatrix} = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + C_2 = \frac{1}{2}arctg^2x + C_2$$

Поскольку *C₁* и *C₂* – произвольные постоянные, то их сумма $C = C_1 + C_2$ тоже произвольная постоянная. Таким образом, получаем:

$$\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}arctg^2x + \mathrm{C}$$

Пример 2.

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2tdt = dx \end{bmatrix} = \int e^t 2tdt = \begin{bmatrix} u = t, & du = dt \\ dv = e^t dt, & v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = 2(te^t - e^t) + C = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C$$

Пример 3.

$$\int \frac{arcsinx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \begin{bmatrix} arcsinx = t \\ x = sint \\ dx = costdt \\ \sqrt{1-x^2} = cost \\ (1-x^2)^{\frac{3}{2}} = cos^3t \end{bmatrix} = \int \frac{tcostdt}{cos^3t} = \int \frac{tdt}{cos^2t} = \int td(tgt)$$

$$=$$

$$= \begin{bmatrix} u = t, & du = dt \\ dv = d(tgt), & v = tgt \end{bmatrix} = t \cdot tgt - \int tgtdt = t \cdot tgt - \int \frac{sint}{cost}dt =$$

$$= t \cdot tgt + \int \frac{d(cost)}{cost} = t \cdot tgt + \ln|cost| + C =$$

$$= arcsinx \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2} + C$$

Итак, $\displaystyle\int \frac{arcsinx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}arcsinx + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$