Практическое занятие 12

Криволинейные интегралы

1. Криволинейный интеграл I рода (по длине дуги)

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая L. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x,y)$, определенную в точках этой кривой. Тогда существует $\int_L f(x,y)dl$. Он обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла, но есть отличие: если A – начальная и B – конечная точки дуги, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl,$$

то есть криволинейный интеграл I рода не зависит от направления интегрирования.

Вычисление криволинейного интеграла I рода сводится к вычислению определенного интеграл:

1. Если кривая интегрирования задана в явном виде: $\begin{cases} y = y(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$$

выражение $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}dx$ называется дифференциалом длины дуги.

2. Если кривая интегрирования задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$, то:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{(x'_t)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt,$$

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt$$

В случае пространственной кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \alpha \le t \le \beta \\ z = z(t) \end{cases}$

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt$$

3. Если плоская кривая L задана в полярных координатах: $\begin{cases} r = r(\varphi) \\ \alpha \le \varphi \le \beta \end{cases}$, то:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(rcos\varphi, rsin\varphi)\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi,$$

$$dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Во всех формулах нижний предел интегрирования должен быть меньше верхнего.

Примеры.

Вычислить криволинейный интеграл.

Пример 1. $\int_L xy^2 dl$, L – отрезок прямой между точками $O(0;0)$ и $A(4;3)$.

Составим уравнение прямой OA: направляющий вектор $\overrightarrow{OA} = (4;3)$ $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow$ $3x = 4y \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x, y' = \frac{3}{4}$. Прямая интегрирования задана явно, поэтому:

$$\int_L xy^2 dl = \int_0^4 x \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\, dx = \frac{9}{16} \cdot \frac{5}{4} \cdot \int_0^4 x^3\, dx =$$

$$= \frac{45}{64} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^4 = 45.$$

Пример 2. $\int_L (x+y)dl$, L: $\begin{cases} r = \sqrt{sin2\varphi} \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Кривая интегрирования задана в полярных координатах. Вычислим dl:

$r^2 = sin2\varphi$, $r' = \frac{2cos2\varphi}{2\sqrt{sin2\varphi}}$, $r'^2 = \frac{cos^2 2\varphi}{sin2\varphi}$,

$dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \sqrt{sin2\varphi + \frac{cos^2 2\varphi}{sin2\varphi}}\, d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{sin2\varphi}}$.

$$\int_L (x+y)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{sin2\varphi}cos\varphi + \sqrt{sin2\varphi}sin\varphi\right) \frac{d\varphi}{\sqrt{sin2\varphi}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\varphi + sin\varphi) d\varphi = (sin\varphi - cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 - (0 - 1) = 2.$$

<u>*Пример 3*</u>. $\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl,\ L: \begin{cases} x = cost \\ y = sint, 0 \le t \le 2\pi. \\ z = t \end{cases}$

Пространственная кривая интегрирования задана параметрически.

$$dl = \sqrt{(-sint)^2 + (cost)^2 + 1}dt = \sqrt{2}dt,$$

$$\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl = \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{cos^2t + sin^2t}\sqrt{2}dt = \sqrt{2} \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить криволинейный интеграл:

1. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L – окружность $x^2 + y^2 = 4x$

   Указание: (окружность задать в полярных координатах). *Ответ*: 32.

2. $\int_L \sqrt{y}\,dl$, L – часть параболы $y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до $B(2;4)$. *Ответ*: $\frac{1}{12}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

3. $\int_L xdl$, L – отрезок прямой от точки $A(1;0)$ до $B(0;2)$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. $\int_L y^2\,dl,\ L: \begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - cost \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi.$ *Ответ*: $\frac{256}{15}$.

2. Криволинейный интеграл II рода (по координатам)

Пусть L – ориентированная кусочно-гладкая кривая с началом в точке A и концом в точке B.

На L задана вектор-функция:

$\bar{F}(M) = P(M)\bar{\imath} + Q(M)\bar{\jmath} + R(M)\bar{k} = P(x,y,z)\bar{\imath} + Q(x,y,z)\bar{\jmath} + R(x,y,z)\bar{k}.$

Криволинейным интегралом II рода от вектор-функции $\bar{F}(M)$ по кривой L называется

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Если кривая L – плоская, то криволинейный интеграл II рода имеет вид: $\int_L Pdx + Qdy$.

При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный.

Вычисление криволинейного интеграла II рода (по координатам)

1. Если кривая L задана параметрически: $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$, тогда

$$\int_L (\bar{F}, d\bar{l}) = \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_{t_1}^{t_2} (Px'_t + Qy'_t + Rz'_t)dt,$$

где $P = P\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $Q = Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $R = R\big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

2. Если плоская кривая задана параметрически:

$x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$, тогда

$$\int_L (\bar{F}, d\bar{l}) = \int_L Pdx + Qdy = \int_{t_1}^{t_2} (Px'_t + Qy'_t)dt,$$

где $P = P\big(x(t), y(t)\big)$, $Q = Q\big(x(t), y(t)\big)$.

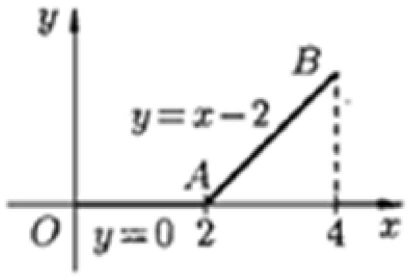
3. Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x), x \in [a, b]$, то

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)y'(x)\Big)dx.$$

Примеры.

Пример 1. Вычислить $\int_L (x-y)^2\,dx+(x+y)^2 dy$,

L – ломаная OAB, $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4,2)$.



Так как $OAB=OA+AB$, то $\int_L \quad = \int_{OA} \quad + \int_{AB} \quad$.

OA: $y=0, dy=0, 0\le x\le 2$,

$$\int_{OA}(x-y)^2\,dx+(x+y)^2 dy=\int_0^2(x-0)^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$$

AB: $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}\Rightarrow y=x-2.\ dy=dx, 2\le x\le 4$

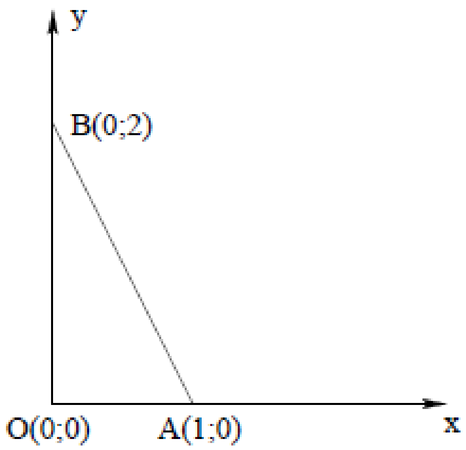
$$\int_{AB}(x-y)^2\,dx+(x+y)^2 dy=\int_2^4((x-x+2)^2+(x+x-2)^2)dx=$$

$$=\int_2^4(4+4x^2-8x+4)dx=\left(8x+4\frac{x^3}{3}-4x^2\right)\Big|_2^4=$$

$$=32+\frac{256}{3}-64-\left(16+\frac{32}{3}-16\right)=\frac{224}{3}-32=\frac{128}{3}$$

$$\int_L (x-y)^2\,dx+(x+y)^2 dy=\frac{8}{3}+\frac{128}{3}=\frac{136}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_L ydx-xdy$ вдоль границ прямоугольного треугольника $OABO$: $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;2)$.



Так как $OABO = OA + AB + BO$, то $\int_L \quad = \int_{OA} \quad + \int_{AB} \quad + \int_{BO} \quad$.

OA: $y = 0, dy = 0$.

$$\int_L ydx - xdy = 0$$

AB: $y = -2x + 2, \qquad dy = -2dx, \qquad x \in [1,0]$

$$\int_L ydx - xdy = \int_1^0 (-2x + 2 + 2x)\, dx = -2$$

BO: $x = 0, dx = 0$

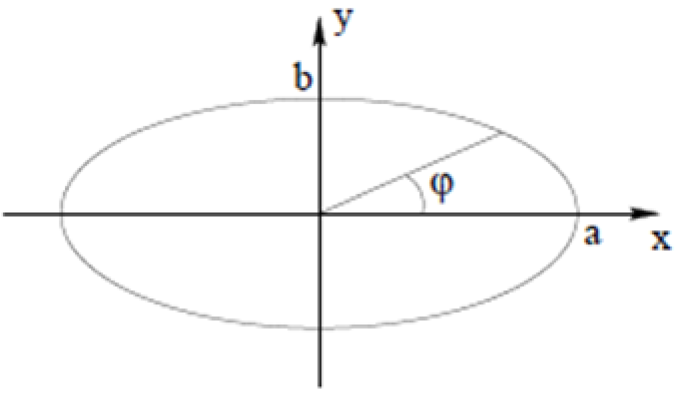
$$\int_L ydx - xdy = 0$$

Итак,

$$\int_L ydx - xdy = 0 - 2 + 0 = -2.$$

Пример 3. Вычислить $\int_L \; ydx - xdy$ вдоль границ эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

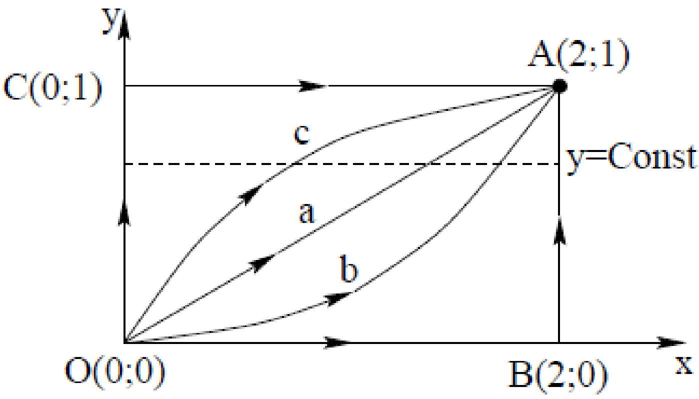


Уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$\int_L ydx - xdy = \int_0^{2\pi} (bsint(-asint) - acostbcost)dt = -ab\int_0^{2\pi} dt = -2\pi ab$$

Пример 4. Вычислить $\int_{OA} 2xydx - x^2dy$, где $O(0;0)$, $A(2;1)$ вдоль различных линий, соединяющих точки O и A.



Вдоль прямой OA: $y = \frac{1}{2}x,\ dy = \frac{1}{2}dx$

$$\int_{OaA} 2xydx - x^2dy = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Вдоль параболы ObA: $y = \frac{x^2}{4},\ \ dy = \frac{x}{2}dx$

$$\int_{ObA} 2xydx - x^2dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2}\right)dx = 0$$

Вдоль параболы OcA: $y = \sqrt{\frac{x}{2}},\ \ dy = \frac{1}{2\sqrt{2x}}dx$

$$\int_{OcA} 2xydx - x^2dy = \int_0^2 \left(x\sqrt{2x} - \frac{1}{4}x\sqrt{2x}\right)dx = \frac{3\sqrt{2}}{4}\int_0^2 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 = \frac{12}{5}$$

Вдоль ломаной OBA:

$$\int_{OBA} 2xydx - x^2dy = \int_{OB} 2x\cdot 0\cdot dx - x^2\cdot 0 + \int_{BA} 2\cdot 2y\cdot 0 - 2^2dy = \int_0^1 (-4)dy = -4$$

Вдоль ломаной OCA:

$$\int_{OCA} 2xydx - x^2dy = \int_{OC} 0 + \int_{CA} 2x\cdot 1\cdot dx - 0 = 4.$$

Формула Грина

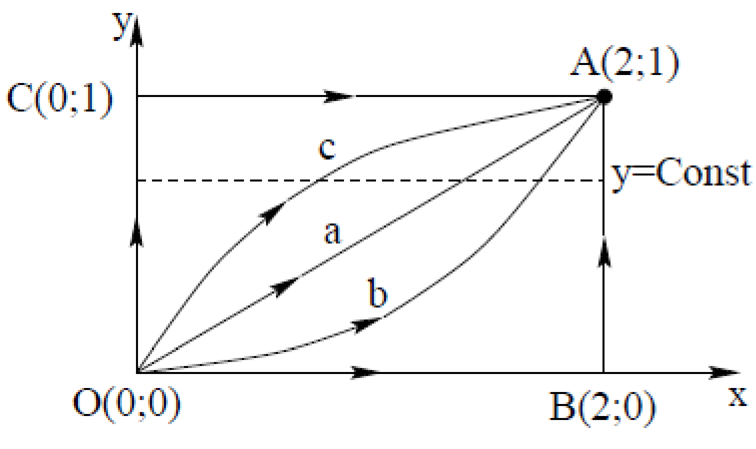
Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом II рода по границе L некоторой плоской области D с двойным интегралом по этой области.

Теорема. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладким контуром L, то справедлива формула:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Символ $\oint_L$ обозначает интегрирование по замкнутому контуру L – границе области D. Ориентация на L выбирается таким образом, что при интегрировании по L область D остается слева (положительная ориентация).

<u>*Пример 5*</u>. Вычислить $\int_L 2xydx - x^2dy$ по замкнутому контуру L:$OBAaO$ с помощью теоремы Грина и непосредственно.



Из примера 4 при непосредственном вычислении криволинейного интеграла:

$$\int_L 2xydx - x^2dy = \int_{OBA} 2xydx - x^2dy + \int_{AaO} 2xydx - x^2dy =$$

$$\int_{OBA} 2xydx - x^2dy - \int_{OaA} 2xydx - x^2dy = -4 - \frac{4}{3} = -\frac{16}{3}$$

Вычисление по формуле Грина: $P = 2xy, Q = -x^2$, $\quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2x = -4x$

$$\int\limits_L 2xydx - x^2dy = -4 \iint\limits_{\Delta OBA} xdxdy = -4\int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{\frac{1}{2}x} dy = -2\int\limits_0^2 x^2dx = -2\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = -\frac{16}{3}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить криволинейный интеграл:

1. $\int_{AB}(x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, где AB – дуга параболы $y = x^2$ от точки A(1;1) до точки B(2;4). *Ответ:* $\frac{1219}{30} = 40\frac{19}{30}$.
2. $\int_L \ (2a - y)dx + xdy$, где L: $\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$. Ответ: $-2\pi a^2$.
3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина: $\int_L \ 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$, где L – контур треугольника с вершинами A(1;1), B(2;2), C(1;3), пробегаемый против часовой стрелки. Ответ: $-\frac{4}{3}$.

Типовой расчет, задача 2.8.

Поверхностный интеграл

Пусть поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, область D – ее проекция на плоскость xOy. На поверхности определена функция $f(x, y, z)$.

Интеграл функции $f(x, y, z)$ по поверхности вычисляется по формуле

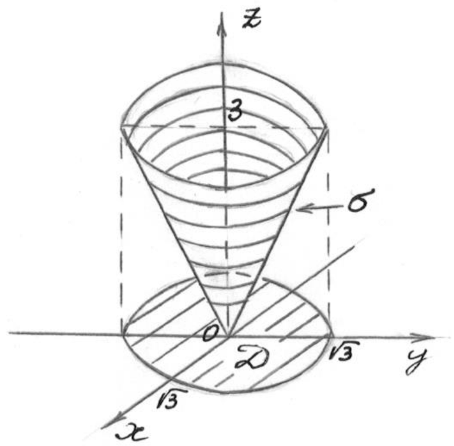
$$\iint\limits_\sigma f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(z'_x(x, y)\right)^2 + \left(z'_y(x, y)\right)^2}\,dxdy.$$

Если подынтегральная функция $f(M) = 1$, то интеграл по поверхности равен площади S поверхности σ:

$$S(\sigma) = \iint\limits_\sigma d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(z'_x(x, y)\right)^2 + \left(z'_y(x, y)\right)^2}\,dxdy$$

Если подынтегральную функцию интерпретировать как плотность ρ материальной поверхности, то $\iint_\sigma \rho(M)d\sigma$ равен массе этой поверхности.

Пример 1. Вычислить площадь части конической поверхности $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$, отсекаемой от нее плоскостью $z=3$.



$$z'_x=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+3y^2}},$$

$$z'_y=\frac{3y}{\sqrt{3x^2+3y^2}},$$

$$d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{9x^2}{3x^2+3y^2}+\frac{9y^2}{3x^2+3y^2}}dxdy=2dxdy$$

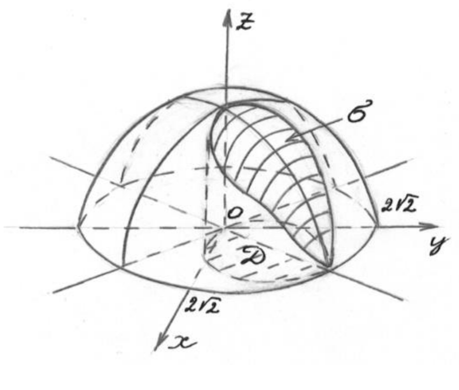
Найдем линию пересечения поверхности и плоскости $z=3$:

$$\sqrt{3x^2+3y^2}=3 \quad \text{или} \quad x^2+y^2=3.$$

Значит, плоскость $z=3$ пересекает конус по окружности, а проекция D поверхности на плоскость xOy – это круг с центром в начале координат и радиуса $\sqrt{3}$, площадь которого равна 3π.

$$S(\sigma)=\iint\limits_{\sigma} d\sigma=\iint\limits_{D} 2dxdy=2\cdot 3\pi=6\pi.$$

Пример 2. Вычислить площадь части полусферы $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$, заключенной внутри цилиндрической поверхности $x^2+y^2=2x+2y$.



$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{8-x^2-y^2}},$$

$$z'_y=-\frac{y}{\sqrt{8-x^2-y^2}},$$

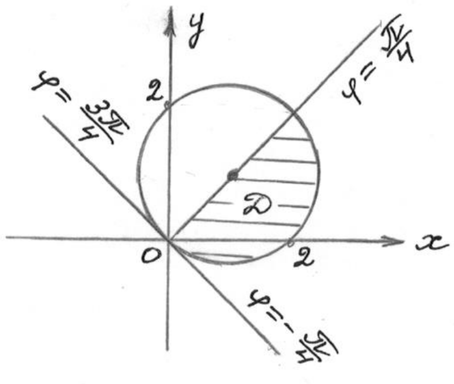
$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{8 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{8 - x^2 - y^2}}dxdy =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}dxdy.$$

Перепишем уравнение цилиндра:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$ или $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Значит, проекция D поверхности σ на плоскость xOy – это круг с центром в точке (1;1), радиус которого равен $\sqrt{2}$.



$$S(\sigma) = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}dxdy.$$

Для вычисления двойного интеграла воспользуемся полярными координатами. Для этого перепишем уравнение границы области $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ в полярных координатах:

$r^2 = 2rcos\varphi + 2rsin\varphi$ или $r =$

$$= 2(cos\varphi + sin\varphi),\ \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Воспользуемся симметрией поверхности относительно плоскости $x = y$ и вычислим половину искомой площади:

$$\frac{1}{2}S(\sigma) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{2(cos\varphi + sin\varphi)} \frac{2\sqrt{2}rdr}{\sqrt{8 - r^2}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2\sqrt{8 - r^2}\Big|_0^{2(cos\varphi + sin\varphi)} d\varphi =$$

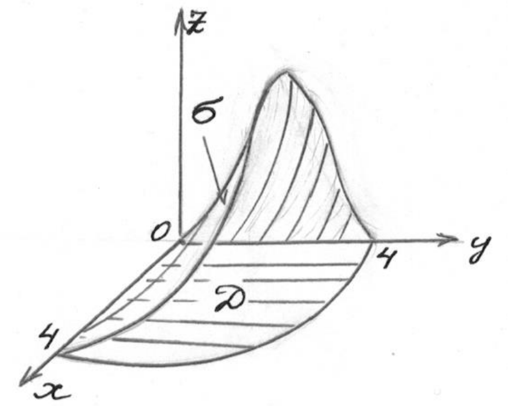
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{2} - \sqrt{8 - 4(cos\varphi + sin\varphi)^2}\right) d\varphi = 4\pi - 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(cos\varphi - sin\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= 4\pi - 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (cos\varphi - sin\varphi) d\varphi = 4\pi - 4\sqrt{2}\,(sin\varphi + cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 4\pi - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4\pi - 8.$$

$$S(\sigma) = 8\pi - 16.$$

Пример 3. Вычислить $\iint_\sigma \frac{z}{x^2+y^2} d\sigma$ по поверхности σ, которая отсекается от гиперболического параболоида $3z = xy$ цилиндром $x^2 + y^2 = 16$ и координатными плоскостями $x = 0, y = 0$.



$$z = \frac{xy}{3}, \qquad z'_x = \frac{y}{3}, \qquad z'_y = \frac{x}{3}$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{9}} dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{9 + x^2 + y^2}}{3} dxdy$$

Проекция D поверхности σ на плоскость xOy представляет собой четверть круга с центром в начале координат и радиусом 4.

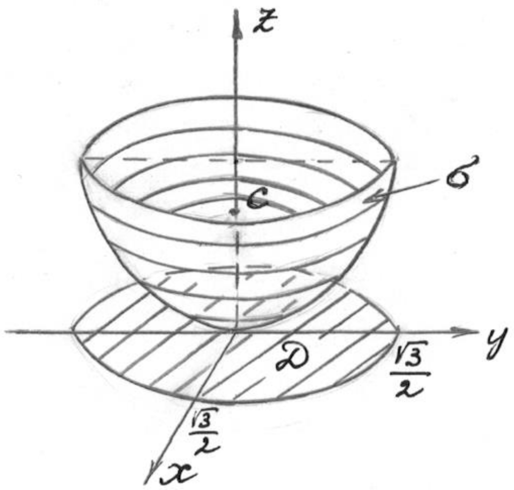
$$\iint_\sigma \frac{z}{x^2 + y^2} d\sigma = \iint_D \frac{xy}{3(x^2 + y^2)} \cdot \frac{\sqrt{9 + x^2 + y^2}}{3} dxdy$$

Для вычисления двойного интеграла воспользуемся полярными координатами.

$$\iint_\sigma \frac{z}{x^2 + y^2} d\sigma = \frac{1}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 \frac{rcos\varphi \cdot rsin\varphi}{r^2} \sqrt{9 + r^2} \cdot rdr =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{sin^2\varphi}{2} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(9 + r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (125 - 27) = \frac{49}{27}.$$

Пример 4. Вычислить координаты центра масс части однородного круглого параболоида $z = x^2 + y^2$, которая заключена внутри цилиндра $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$.



$$z'_x = 2x, \qquad z'_y = 2y,$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy =$$
$$= \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$$

Проекция D поверхности σ на плоскость xOy представляет собой круг с центром в начале координат, радиус которого равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Полагая, что поверхностная плотность $\rho = 1$, вычислим массу поверхности:

$$m = \iint\limits_{\sigma} \rho d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy.$$

Для вычисления двойного интеграла воспользуемся полярными координатами.

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, rdr = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{6}(8 - 1) = \frac{7\pi}{6}.$$

Поверхность однородна и симметрична относительно оси Oz. Значит, ее центр масс C расположен на оси Oz ($x_c = y_c = 0$).

Аппликата центра масс вычисляется по формуле: $z_c = \frac{m_{xy}}{m}$,

$$m_{xy} = \iint\limits_{\sigma} \rho z d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cdot \sqrt{1 + 4r^2}\, rdr = \begin{bmatrix} 1 + 4r^2 = t \\ r^2 = \dfrac{t-1}{4} \\ rdr = \dfrac{1}{8}dt \\ t_1 = 1, \ \ t_2 = 4 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\pi \int\limits_1^4 \frac{t-1}{4} \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{8}dt = \frac{\pi}{16}\int\limits_1^4 \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{\pi}{16}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{58}{15} = \frac{29\pi}{60}$$

$$z_c = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{29\pi}{60} \div \frac{7\pi}{6} = \frac{29}{70}$$

$$C\left(0; 0; \frac{29}{70}\right).$$

Типовой расчет, задача 2.9.