Ejercicio 8

Probar las siguientes propiedades:

I. **Debilitamiento.** Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

Tip: utilizar inducción sobre el tamaño de la derivación.

II. **Regla de corte.** Si $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido y $\Gamma \vdash \tau$ es válido, entonces $\Gamma \vdash \sigma$ es válido.

Vamos a probar que es válido para todas las reglas de derivación.

La Hi es que $\Gamma \vdash \theta \ \forall \theta$ y queremos ver si $\Gamma, t \vdash \theta$.

- Caso ax:

$\dfrac{}{\Gamma \vdash \theta}\,ax \iff \theta \in \Gamma$. Por lo que si tenemos $\dfrac{}{\Gamma, t \vdash \theta}\,ax$ sigue siendo ax $\forall t$ posible porque $\theta \in \Gamma, t$.

- Caso $\wedge_i$:

Por Hi $\Gamma \vdash \mu$ y $\Gamma \vdash \theta$, QVQ $\Gamma, t \vdash \mu \wedge \theta$.

$$d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \mu}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \theta}\right\}d_2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\Gamma \vdash \mu \quad \Gamma \vdash \theta}{\Gamma \vdash \mu \wedge \theta}\,\wedge_i \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por Hi } d_1}{\Gamma, t \vdash \mu} \quad \dfrac{\text{Por Hi } d_2}{\Gamma, t \vdash \theta}}{\Gamma, t \vdash \mu \wedge \theta}\,\wedge_i$$

Por Hi si $\Gamma \vdash \mu \to \Gamma, t \vdash \mu$
Por Hi si $\Gamma \vdash \theta \to \Gamma, t \vdash \theta$ } son el caso que probé recién.

- Caso $\wedge e_1$:

Por Hi $\Gamma \vdash \mu \wedge \theta$

$$\dfrac{\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \mu \wedge \theta}\right\}d}{\Gamma \vdash \mu}\,\wedge e_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por Hi en } d}{\Gamma, t \vdash \mu \wedge \theta}}{\Gamma, t \vdash \mu}\,\wedge e_1$$

Por Hi si $\Gamma \vdash \mu \wedge \theta \to \Gamma, t \vdash \mu \wedge \theta$

- Caso $\to_i$

Por Hi $\Gamma, \theta \vdash \mu$

$$\dfrac{\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, \theta \vdash \mu}\right\}d}{\Gamma \vdash \theta \to \mu}\,\to_i \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por Hi en } d}{\Gamma, t, \theta \vdash \mu}}{\Gamma, t \vdash \theta \to \mu}\,\to_i$$

Por Hi si $\Gamma, \theta \vdash \mu \to \Gamma, \theta, t \vdash \mu$.

- Caso $\to_e$

Por Hi $\Gamma \vdash P \to \theta$ y $\Gamma \vdash P$

$$\dfrac{d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash P \to \theta}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash P}\right\}d_2}{\Gamma \vdash \theta}\,\to_e \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por Hi en } d_1}{\Gamma, t \vdash P \to \theta} \quad \dfrac{\text{Por Hi en } d_2}{\Gamma, t \vdash \theta}}{\Gamma, t \vdash \theta}\,\to_e$$

Por Hi si $\Gamma \vdash P \to Q \longrightarrow \Gamma, t \vdash P \to Q$

Por Hi si $\Gamma \vdash P \to \Gamma, t \vdash P$

- Caso $\lor i_1$

Por Hi $\Gamma \vdash P$

$$\dfrac{\left.\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \vdash P\end{matrix}\right\} d}{\Gamma \vdash P \lor Q}\,\lor i_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{vale x Hi en } d}{\Gamma, t \vdash P}}{\Gamma, t \vdash P \lor Q}\,\lor i_1$$

Por Hi si $\Gamma \vdash P \to \Gamma, t \vdash P$

Caso $\lor e$

- Por Hi $\Gamma \vdash P \lor Q$, $\Gamma, P \vdash E$ y $\Gamma, Q \vdash E$

$$\dfrac{d_1\left\{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \vdash P \lor Q\end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, P \vdash E\end{matrix}\right\} d_2 \quad \left.\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, Q \vdash E\end{matrix}\right\} d_3}{\Gamma \vdash E}\,\lor e \qquad \dfrac{\dfrac{\text{vale x Hi en } d_1}{\Gamma, t \vdash P \lor Q} \quad \dfrac{\text{vale x Hi en } d_2}{\Gamma, t, P \vdash E} \quad \dfrac{\text{vale x Hi en } d_3}{\Gamma, t, Q \vdash E}}{\Gamma, t \vdash E}\,\lor e$$

Por Hi $\Gamma \vdash P \lor Q \to \Gamma, t \vdash P \lor Q$

Por Hi $\Gamma, P \vdash E \to \Gamma, P \vdash E$

Por Hi $\Gamma, Q \vdash E \to \Gamma, Q \vdash E$