Ejercicio 12 *(Lema de sustitución ★)*

Demostrar que si valen $\Gamma, x:\sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$ entonces vale $\Gamma \vdash M\{\boldsymbol{x := \mathrm{N}}\} : \tau$.
Sugerencia: proceder por inducción en la estructura del término M.

Términos:

$M ::= x \mid \lambda y:\varepsilon.M \mid M\,N \mid true \mid false \mid \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q \mid zero \mid$
$succ(M) \mid pred(M) \mid isZero(M).$

Voy a asumir que $x \in FV(M)$ para todos los casos sobre los marcados en rojo ya que no tiene sentido que $x \in FV(M)$ y por weakening si $\Gamma, x:\Theta \vdash M:\tau$, $\Gamma \vdash N:\Theta$ y $x \notin FV(M) \rightarrow \Gamma \vdash M:t$.

- Caso Base x.

Por Hi $\dfrac{}{\Gamma, x:\Theta \vdash x:\Theta}\,ax$ y $\Gamma \vdash N:\Theta$. QVQ $\Gamma \vdash x\{x:=N\}:\Theta$.

como $x\{x:=N\} = N$ y por la hipotesis $\Gamma \vdash N:\Theta$. Entonces $\Gamma\{x:=N\}:\Theta$.
Vale.

- Caso $\lambda y:\varepsilon.M$

Por Hi $\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M:\Theta$, $\Gamma \vdash N:\Theta$ y $x \in FV(M)$.

QVQ $\Gamma \vdash \lambda y:\varepsilon.(M\{x:=N\}): \varepsilon \to \Theta$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M:\Theta}\Big\}\,d}{\Gamma, x:t \vdash \lambda y:\varepsilon.M:\varepsilon\to\Theta}\to_i \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Vale x Hi en } d}{\Gamma, y:\varepsilon \vdash M\{x:=N\}:\Theta}}{\Gamma \vdash \lambda y:\varepsilon.M\{x:=N\}:\varepsilon\to\Theta}$$

Como $\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M:\Theta$, $x \in FV(M)$ y $x \in FV(M) \longrightarrow$

$\Gamma \vdash \lambda y:\varepsilon.(M\{x:=N\}): \varepsilon \to \Theta$ Porque cuando hace falta probar el tipo de x en M como ahora todas las apariciones de $x = N$ y se puede probar $\Gamma \vdash N:\Theta$ sin que $(x:\Theta) \in \Gamma$. Entonces se va a poder probar que $\Gamma \vdash M\{x:=N\}$