**Ejercicio 3**

Sean $\tau$, $\sigma$, $\rho$ y $\zeta$ proposiciones tales que $\tau \Rightarrow \sigma$ es tautología y $\rho \Rightarrow \zeta$ es contradicción. Determinar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias y demostrarlo:

I. $(\tau \Rightarrow \sigma) \vee (\rho \Rightarrow \zeta)$

II. $(\tau \Rightarrow \rho) \vee (\sigma \Rightarrow \zeta)$

III. $(\rho \Rightarrow \sigma) \vee (\zeta \Rightarrow \sigma)$

Sea $v$ una valuación: $\begin{bmatrix} \tau \to \sigma \text{ es tautología} \leftrightarrow v \not\models \tau \text{ ó } v \models \sigma \\ \rho \to \zeta \text{ es contradicción} \leftrightarrow v \models \rho \text{ y } v \not\models \zeta \end{bmatrix}$

i) $(\tau \to \sigma) \vee (\rho \to \zeta)$: como $\tau \to \sigma$ es una tautología aunque $\rho \to \zeta$ sea una contradicción $T \vee F \equiv T$.

ii) $(\tau \to \rho) \vee (\sigma \to \zeta)$: como sabemos que $\tau \to \sigma$ es tauto y $\rho \to \zeta$ es contradicción sabemos que la valuación puede tener dos formas:

- $v \not\models \tau$ y $v \models \rho$ y $v \not\models \zeta$:

En este caso sabemos que $v \models \tau \to \rho$. Por lo que sin importar si $v \models \sigma$ ó $v \not\models \sigma$ $v \models (\tau \to \rho) \vee (\sigma \to \zeta)$ porque $v \models (\tau \to \rho)$.

- $v \models \sigma$ y $v \models \rho$ y $v \not\models \zeta$:

Como $v \models \sigma$ pero $v \not\models \zeta$: $v \not\models (\sigma \to \zeta)$.

Pero como $v \models \rho$: $\left.\begin{array}{l} \text{Si } v \models \tau \to v \models (\tau \to \rho) \\ \text{Si } v \not\models \tau \to v \models (\tau \to \rho) \end{array}\right\}$ $(\tau \to \rho)$ vale $\forall v$ sea $T$.

Por lo que $v \models (\tau \to \rho)$ implica que $v \models (\tau \to \rho) \vee (\sigma \to \zeta)$

Así que $(\tau \to \rho) \vee (\sigma \to \zeta)$ es una tautología.

iii) $(\rho \to \sigma) \vee (\zeta \to \sigma)$: Separo en casos:

- $v \not\models \tau$ y $v \models \rho$ y $v \not\models \zeta$:

Como $v \not\models \zeta$ $v \models \zeta \to \sigma$ sin importar si $v \models \sigma$ ó $v \not\models \sigma$. Por lo tanto $v \models (\rho \to \sigma) \vee (\zeta \to \sigma)$ sin importar si $v \models \rho \to \sigma$ o $v \not\models \rho \to \sigma$.

- $v \models \sigma$ y $v \models \rho$ y $v \not\models \zeta$:

Como $v \not\models \zeta$ $v \models (\zeta \to \sigma)$. También como $v \models \sigma$ y $v \models \rho$ $v \models (\rho \to \sigma)$ por lo que $v \models (\rho \to \sigma) \vee (\zeta \to \sigma)$.

Por lo que $(\rho \to \sigma) \vee (\zeta \to \sigma)$ es una tautología.