Ejercicio 12 *(Lema de sustitución ★)*

Demostrar que si valen $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$ entonces vale $\Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$.
Sugerencia: proceder por inducción en la estructura del término M.

Términos:

$M ::= x \mid \lambda y : \varepsilon . M \mid PQ \mid true \mid false \mid if\ M\ then\ P\ else\ Q \mid zero \mid$
$succ(M) \mid pred(M) \mid isZero(M)$.

Voy a asumir que $x \in FV(M)$ para todos los casos sobre los marcados en rojo ya que no tiene sentido que $x \in FV(M)$ y por weakening si $\Gamma, x:\sigma \vdash M : \tau$, $\Gamma \vdash N : \sigma$ y $x \notin FV(M) \to \Gamma \vdash M : t$.

- Caso Base x.
- Por Hi $\dfrac{}{\Gamma, x:\sigma \vdash x : \sigma}$ ax y $\Gamma \vdash N : \sigma$. QVQ $\Gamma \vdash x\{x := N\} : \sigma$.

Como $x\{x := N\} = N$ y por la hipotesis $\Gamma \vdash N : \sigma$. Entonces vale porque probar $\Gamma \vdash x\{x := N\} : \sigma$ es equivalente a probar $\Gamma \vdash N : \sigma$. y por Hipotesis se puede probar $\Gamma \vdash N : \sigma$.

- Caso Base y.
- Por Hi $\Gamma, x:\sigma \vdash y : t$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$. QVQ: $\Gamma \vdash y\{x := N\} : t$.

Como $y\{x := N\} = y$ (ya que $y \neq x$) y podemos probar $\Gamma, x:\sigma \vdash y : t$. Tambien podemos probar $\Gamma \vdash y : t$ por Weakening. Por lo que $\Gamma \vdash y\{x := N\} : t$.

- Caso $\lambda y : \varepsilon . M$
- Por Hi $\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M : \sigma$, $\Gamma \vdash N : t$ y $x \in FV(M)$.
- QVQ $\Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon . (M\{x := N\}) : \varepsilon \to \sigma$

$$\dfrac{\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M : \sigma}\right\}\ d}{\Gamma, x:t \vdash \lambda y : \varepsilon . M : \varepsilon \to \sigma} \to_i \qquad \dfrac{\dfrac{\text{vale x Hi en } d}{\Gamma, y:\varepsilon \vdash M\{x := N\} : \sigma}}{\Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon . M\{x := N\} : \varepsilon \to \sigma}$$

Como $\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M : \sigma$, $x \in FV(M) \longrightarrow \Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon . (M\{x := N\}) : \varepsilon \to \sigma$

Porque cuando se necesita probar el tipo de x en M como ahora todas las apariciones de $x = N$ y se puede probar $\Gamma \vdash N : t$ sin que $(x:t) \in \Gamma$. Entonces se va a poder probar que $\Gamma, y:\varepsilon \vdash M\{x := N\} : \sigma$, por lo tanto probando tambien $\Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon . (M\{x := N\}) : \varepsilon \to \sigma$.

- caso PQ
- Por Hi: $\Gamma, x:t \vdash P : \sigma \to \varepsilon$, $\Gamma, x:t \vdash Q : \sigma$, $\Gamma \vdash N : t$ y $x \in FV(P)$ y $x \in FV(Q)$
- QVQ $\Gamma \vdash (PQ)\{x := N\} : \varepsilon$

$$d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t \vdash P:\sigma\to\varepsilon}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t \vdash Q:\sigma}\right\} d_2$$
$$\dfrac{\Gamma, x:t \vdash P:\sigma\to\varepsilon \quad \Gamma, x:t \vdash Q:\sigma}{\Gamma, x:t \vdash PQ:\varepsilon}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{Vale x HI en } d_1}{\Gamma \vdash P\{x:=N\}:\sigma\to\varepsilon} \quad \dfrac{\text{Vale x HI en } d_2}{\Gamma \vdash Q\{x:=N\}:\sigma}}{\Gamma \vdash (PQ)\{x:=N\}}$$