I. Modificar la semántica denotacional incluyendo el elemento error en todo conjunto, con el fin de detectar la división por cero.

II. Extender la semántica denotacional con error, para el Cálculo Lambda con pares (y naturales).

III. Demostrar que para toda valuación v válida en $FV(M) \cup FV(N)$ se tiene $[\![M\{x := N\}]\!]_v = [\![M]\!]_{v,x=[\![N]\!]_v}$ (lema de sustitución).

IV. Demostrar el teorema de corrección.

i) y ii) Solo pongo la semántica que se tiene que modificar:

- $[\![M \div N]\!]_v = \begin{cases} \text{error si } [\![N]\!]_v = 0 \\ [\![M]\!]_v \div [\![N]\!]_v \text{ sino} \end{cases}$

- $[\![M + N]\!]_v = \begin{cases} \text{error si } [\![M]\!]_v = \text{error o } [\![N]\!]_v = \text{error} \\ [\![M]\!]_v + [\![N]\!]_v \text{ sino} \end{cases}$

- $[\![M - N]\!]_v = \begin{cases} \text{error si } [\![M]\!]_v = \text{error o } [\![N]\!]_v = \text{error} \\ 0 \text{ si } [\![N]\!]_v > [\![M]\!]_v \text{ y ninguno es error} \\ [\![M]\!]_v - [\![N]\!]_v \text{ sino} \end{cases}$

- $[\![succ(M)]\!]_v = \begin{cases} \text{error si } [\![M]\!]_v = \text{error} \\ [\![M]\!]_v + 1 \text{ sino} \end{cases}$

- $[\![pred(M)]\!]_v = \begin{cases} 0 \text{ si } [\![M]\!]_v = 0 \\ \text{error si } [\![M]\!]_v = \text{error} \\ [\![M]\!]_v - 1 \text{ sino} \end{cases}$

- $[\![isZero(M)]\!]_v = \begin{cases} \text{error si } [\![M]\!]_v = \text{error} \\ \text{true si } [\![M]\!]_v = 0 \\ \text{false sino} \end{cases}$

- $[\![\text{if } M \text{ then } N \text{ else } O]\!]_v = \begin{cases} \text{error si } [\![M]\!]_v = \text{error} \\ [\![N]\!]_v \text{ si } [\![M]\!]_v = \text{true} \\ [\![O]\!]_v \text{ si } [\![O]\!]_v = \text{False} \end{cases}$

iii) Lo hago por inducción sobre los terminos.

- Caso Base $M = x$.
- QVQ $[\![x\{x := N\}]\!]_v = [\![x]\!]_{v,x=[\![N]\!]}$

$[\![x\{x := N\}]\!]_v = [\![x]\!]_{v,x=[\![N]\!]} \longleftrightarrow [\![N]\!]_v = [\![N]\!]_v$.

- Caso Base $M = z$.
- QVQ $[\![z\{x := N\}]\!]_v = [\![z]\!]_{v,x=[\![N]\!]}$

$[\![z\{x := N\}]\!]_v = [\![z]\!]_{v,x=[\![N]\!]} \longleftrightarrow [\![z]\!]_v = [\![z]\!]_{\underbrace{v,x=[\![N]\!]}_{v'}}$ Como $z \neq x$ no se puede hacer la sust x lo que $v = v'$.

$Hi: P(M) = \llbracket M\{x:=N\} \rrbracket_v = \llbracket M \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v}$

- Caso $M = \lambda y{:}T.\, M$. Por Hi vale $P(M)$
- QVQ $\llbracket (\lambda y{:}T.\, M)\{x:=N\} \rrbracket_v = \llbracket (\lambda y{:}T.\, M) \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v}$

$$\llbracket (\lambda y{:}T.\, M)\{x:=N\} \rrbracket_v = \llbracket (\lambda y{:}T.\, M) \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v} \longleftrightarrow$$

$$\llbracket \lambda y{:}T.\, M\{x:=N\} \rrbracket_v = y^{\llbracket T \rrbracket} \mapsto \llbracket M \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v,\, y=y} \longleftrightarrow$$

$$y^{\llbracket T \rrbracket} \mapsto \llbracket M\{x:=N\} \rrbracket_{\underbrace{v,\, y=y}_{v'}} = y^{\llbracket T \rrbracket} \mapsto \llbracket M \rrbracket_{\underbrace{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v,\, y=y}_{v'}}$$

Vale xHi.

- Caso $M = PQ$. Por Hi vale $P(Q)$ y $P(P)$.
- QVQ: $\llbracket (PQ)\{x:=N\} \rrbracket_v = \llbracket PQ \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v}$

$$\llbracket (PQ)\{x:=N\} \rrbracket_v = \llbracket PQ \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v} \longleftrightarrow \llbracket P\{x:=N\}\, Q\{x:=N\} \rrbracket_v = \llbracket P \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v} \llbracket Q \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v}$$

=xHi

$$\longleftrightarrow \llbracket P\{x:=N\} \rrbracket_v \llbracket Q\{x:=N\} \rrbracket_v = \llbracket P \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v} \llbracket Q \rrbracket_{v,\, x=\llbracket N \rrbracket_v}$$

=xHi