Ejercicio 8

Probar las siguientes propiedades:

I. **Debilitamiento.** Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

Tip: utilizar inducción sobre el tamaño de la derivación.

II. **Regla de corte.** Si $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido y $\Gamma \vdash \tau$ es válido, entonces $\Gamma \vdash \sigma$ es válido.

i) vamos a probar que es válido para todas las reglas de derivación.

La HI es que $\Gamma \vdash \theta \ \forall \theta$ y queremos ver si $\Gamma, t \vdash \theta$.

- caso ax:

$\dfrac{}{\Gamma \vdash \theta}\, ax \Leftrightarrow \theta \in \Gamma$. Por lo que si tenemos $\dfrac{}{\Gamma, t \vdash \theta}\, ax$ sigue siendo ax $\forall t$ posible porque $\theta \in \Gamma, t$.

- caso $\wedge_i$:

Por HI $\Gamma \vdash \mu$ y $\Gamma \vdash \theta$, QVQ $\Gamma, t \vdash \mu \wedge \theta$.

$$d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \mu}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \theta}\right\} d_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por HI } d_1}{\Gamma, t \vdash \mu} \quad \dfrac{\text{Por HI } d_2}{\Gamma, t \vdash \theta}}{\Gamma, t \vdash \mu \wedge \theta}\, \wedge_i$$

$$\text{con conclusión } \Gamma \vdash \mu \wedge \theta \ \wedge_i$$

Por HI si $\Gamma \vdash \mu \to \Gamma, t \vdash \mu$ } son el caso que probé recién.
Por HI si $\Gamma \vdash \theta \to \Gamma, t \vdash \theta$ }

- caso $\wedge e_1$:

Por HI $\Gamma \vdash \mu \wedge \theta$

$$\dfrac{\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \mu \wedge \theta}\right\} d}{\Gamma \vdash \mu}\, \wedge e_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d}{\Gamma, t \vdash \mu \wedge \theta}}{\Gamma, t \vdash \mu}\, \wedge e_1$$

Por HI si $\Gamma \vdash \mu \wedge \theta \to \Gamma, t \vdash \mu \wedge \theta$

- Caso $\to i$

Por HI $\Gamma, \theta \vdash \mu$

$$\dfrac{\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, \theta \vdash \mu}\right\} d}{\Gamma \vdash \theta \to \mu}\, \to i \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d}{\Gamma, t, \theta \vdash \mu}}{\Gamma, t \vdash \theta \to \mu}\, \to i$$

Por HI si $\Gamma, \theta \vdash \mu \to \Gamma, \theta, t \vdash \mu$.

- caso $\to e$

Por HI $\Gamma \vdash P \to \theta$ y $\Gamma \vdash P$

$$d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash P \to \theta}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash P}\right\} d_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d_1}{\Gamma, t \vdash P \to \theta} \quad \dfrac{\text{Por HI en } d_2}{\Gamma, t \vdash \theta}}{\Gamma, t \vdash \theta}\, \to e$$

$$\text{con conclusión } \Gamma \vdash \theta \ \to e$$

Por HI si $\Gamma \vdash P \to Q \to \Gamma, t \vdash P \to Q$

Por HI si $\Gamma \vdash P \to \Gamma, t \vdash P$

- Caso $\vee_{i1}$

Por HI $\Gamma \vdash P$

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma \vdash P\end{array}}{\Gamma \vdash P \vee Q}\right\} d \quad \vee_{i1} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\text{vale x HI en } d}{\Gamma, t \vdash P}}{\Gamma, t \vdash P \vee Q}\ \vee_{i1}$$

Por HI si $\Gamma \vdash P \to \Gamma, t \vdash P$

Caso $\vee e$

- Por HI $\Gamma \vdash P \vee Q$, $\Gamma, P \vdash E$ y $\Gamma, Q \vdash E$

$$\dfrac{\underbrace{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma \vdash P \vee Q\end{array}}_{d_1} \quad \underbrace{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma, P \vdash E\end{array}}_{d_2} \quad \underbrace{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma, Q \vdash E\end{array}}_{d_3}}{\Gamma \vdash E}\ \vee e \qquad \dfrac{\dfrac{\text{vale x HI en } d_1}{\Gamma, t \vdash P \vee Q} \quad \dfrac{\text{vale x HI en } d_2}{\Gamma, t, P \vdash E} \quad \dfrac{\text{vale x HI en } d_3}{\Gamma, t, Q \vdash E}}{\Gamma, t \vdash E}\ \vee e$$

Por HI $\Gamma \vdash P \vee Q \to \Gamma, t \vdash P \vee Q$

Por HI $\Gamma, P \vdash E \to \Gamma, P \vdash E$

Por HI $\Gamma, Q \vdash E \to \Gamma, Q \vdash E$

ii) Lo probamos de nuevo x inducción en las reglas de derivación.

La HI es que $\forall Q, T \ \Gamma, T \vdash Q$ y $\Gamma \vdash T$

- Caso Ax:

$\overline{\Gamma, t \vdash Q}\ ax \iff Q \in \Gamma$. Por lo que por weakening también vale que $\overline{\Gamma \vdash Q}\ ax$. Sin importar que por HI $\Gamma \vdash t$.

- Caso $\wedge i$:

- Por HI $\Gamma, t \vdash E$, $\Gamma, t \vdash Q$ y $\Gamma \vdash t$
- QVQ $\Gamma, t \vdash E \wedge Q$ y $\Gamma \vdash t \to \Gamma \vdash E \wedge Q$

$$\dfrac{\underbrace{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma, t \vdash E\end{array}}_{d_1} \quad \underbrace{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma, t \vdash Q\end{array}}_{d_2}}{\Gamma, t \vdash E \wedge Q}\ \wedge i \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\text{vale x HI en } d_1}{\Gamma \vdash E} \quad \dfrac{\text{vale x HI en } d_2}{\Gamma \vdash Q}}{\Gamma \vdash E \wedge Q}\ \wedge i$$

- Por HI $\Gamma, t \vdash E$ y $\Gamma \vdash t \to \Gamma \vdash E$.
- Por HI $\Gamma, t \vdash Q$ y $\Gamma \vdash Q \to \Gamma \vdash Q$.