Ejercicio 14 ★

Probar que si Γ es consistente maximal entonces para cada fórmula σ se tiene que $\Gamma \vdash \sigma$ implica $\sigma \in \Gamma$ (i.e. Γ es cerrada respecto a derivabilidad). *Ayuda:* razonar por el absurdo.

Si Γ es consistente maximal entonces:

- Γ es consistente ($\Gamma \nvdash \bot$)
- $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' consistente $\rightarrow \Gamma' = \Gamma$.

supongamos que Γ es consistente maximal y $\exists \sigma / \Gamma \vdash \sigma$ y $\sigma \notin \Gamma$.

Luego existe $\Gamma' / \Gamma' = \Gamma \cup \{\sigma\}$ (Γ es consistente) y $\Gamma' \vdash \bot$.

veamos que Γ' no es consistente:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\sigma}\,\neg i \qquad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \bot}\,\bot i$$

vale x Hi

$\rightarrow$ es abs pq dijimos que Γ es consistente max.

La idea es mostrar que no puede $\exists \sigma \;/\; \Gamma \vdash \sigma$ y $\sigma \notin \Gamma$ es porque si Γ es consistente max/ su opuesto $\in$ a Γ. Por lo que formaría una contradicción y dejaría de ser consistente. Porque podríamos probar $\Gamma \vdash \sigma$ y $\Gamma \vdash \neg\sigma$.