Ejercicio 2 ★

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos ¬ (negación), ∧ (conjunción), ∨ (disyunción), ⇒ (implicación), ⇔ (equivalencia) puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos ¬ y ∨. **Sugerencia:** hacer inducción en la estructura de la fórmula.

los términos posibles son:

$t, \sigma ::= P \mid \neg t \mid t \wedge \sigma \mid t \vee \sigma \mid t \to \sigma \mid t \leftrightarrow \sigma$

La Hi es que dado un término t $\exists t' / t \equiv t'$ y t' solo usa $\neg$ y $\vee$.

- Caso $t = P$: vale trivialmente porque no hay ni $\wedge$, $\to$ o $\leftrightarrow$ acompañando a P y por Hi P es equivalente a P' / P' solo usa $\neg$ y $\vee$.

- Caso $t = \neg P$. Por Hi $\exists P' / P \equiv P'$ y P' solo usa $\neg$ y $\vee$. como "agregarle" un $\neg$ sigue siendo válido es un término válido $\neg P'$.

- Caso $t = \mu \vee \sigma$. Por Hi $\exists t'$ y σ' / μ' y σ' solo usan $\neg$ y $\vee$ y $\mu \equiv \mu'$ y $\sigma \equiv \sigma'$.

Como la valuación que hace verdadera a $\mu \vee \sigma$ es la misma que hace verdadera a $\mu' \vee \sigma'$, porque $\mu \equiv \mu'$ y $\sigma \equiv \sigma'$, podemos concluir que $\mu \vee \sigma \equiv \mu' \vee \sigma'$.

Sea v una valuación

$v \vDash \mu' \vee \sigma' \leftrightarrow (v \vDash \mu'$ ó $v \vDash \sigma')$

$\leftrightarrow (v \vDash \mu$ ó $v \vDash \sigma) \leftrightarrow v \vDash \mu \vee \sigma$

- Caso $t = \mu \wedge \sigma$. Por Hi $\exists \mu'$ y $\sigma' / \mu' \equiv \mu, \sigma' \equiv \sigma$ y μ', σ' solo usan $\neg$ y $\vee$.

Como sean α y β fórmulas $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$ probémoslo viendo que $\mu \wedge \sigma \equiv \neg(\neg \mu' \vee \neg \sigma')$:

Sea v una valuación

$v \vDash \neg(\neg \mu' \vee \neg \sigma') \leftrightarrow v \nvDash \neg \mu' \vee \neg \sigma'$

$\leftrightarrow v \nvDash \neg \mu'$ ó $v \nvDash \neg \sigma' \leftrightarrow$ no$(v \vDash \neg \mu'$ ó $v \vDash \neg \sigma')$

$\leftrightarrow v \vDash \mu'$ y $v \vDash \sigma' \leftrightarrow v \vDash \mu$ y $v \vDash \sigma$

$\leftrightarrow v \vDash \mu \wedge \sigma$

- Caso $t = \mu \to \sigma$. Por Hi $\exists \mu', \sigma' / \mu' \equiv \mu$, $\sigma' \equiv \sigma$ y μ', σ' solo usan $\neg$ y $\vee$. Hay que probar que $\mu \to \sigma \equiv (\neg \mu') \vee \sigma'$.

Sea v una valuación

$v \models \neg p \vee \theta \iff v \models \neg p$ ó $v \models \theta$

$\iff v \not\models p$ ó $v \models \theta \iff v \not\models p$ ó $v \models \theta$

$\iff v \models p \to \theta$

- Caso $t = p \leftrightarrow \theta$. Como $p \leftrightarrow \theta \equiv \underbrace{\underbrace{p \to \theta}_{\delta} \wedge \underbrace{\theta \to p}_{\varepsilon}}_{\delta \wedge \varepsilon}$

Como ya probamos que δ y ε se pueden reescribir usando solamente $\neg$ y $\vee$ y ya probamos que $\delta \wedge \varepsilon$ se puede reescribir usando solo $\neg$ y $\vee$ ya está probado.

Falta ver que $p \leftrightarrow \theta \equiv p \to \theta \wedge \theta \to p$

Sea v una valuación

$v \models p \leftrightarrow \theta \iff (v \models p$ y $v \models \theta)$ ó $(v \not\models p$ y $v \not\models \theta)$

$\iff (v \models p$ y $v \models \theta)$ ó $(v \models \neg p$ y $v \models \neg \theta)$

$\iff (v \models p$ ó $v \models \neg p)$ y $(v \models p$ ó $v \models \neg\theta)$ y $(v \models \theta$ ó $v \models \neg p)$ y $(v \models \theta$ ó $v \models \neg\theta)$

$\iff (v \models p$ ó $v \models \neg\theta)$ y $(v \models \theta$ ó $v \models \neg p)$

$\iff (v \models \theta \to p)$ y $(v \models p \to \theta) \iff v \models p \to \theta \wedge \theta \to p$ $\therefore$