

Ejercicio 4

Probar que cualquier proposición que sea una tautología contiene un \neg o una \Rightarrow .

Voy a probar el contrareloj: Si una proposición no tiene ni \neg ni \Rightarrow entonces no es una tautología.

O sea que para todo término que no contiene ni \neg ni \Rightarrow $\exists v / v \neq t$. Hago inducción en la estructura de la fórmula.

$$t ::= P \mid \neg P \mid T \wedge O \mid T \vee O \mid T \rightarrow O \mid T \leftrightarrow O$$

$H_i: \mathcal{T}(t) = t$ no contiene ni \neg ni \Rightarrow .

- $t = P$. P no es tauto porque existe la valoración $v \neq P$. Por lo que P no es tauto porque para ser tauto tiene que ser satisficible para toda valoración. y encuentro una valoración para la que no es satisficible.
- $t = P \wedge O$. Por H_i se que P y O no contienen ni \neg ni \Rightarrow por lo que no son tautologías. Por lo tanto existen valores que hacen a P y O falsos. Por lo que existe una valoración $v / v \neq P$ y $v \neq O$. Lo que implica $v \neq P \wedge O$. entonces $P \wedge O$ no es una tautología.
- $t = P \vee O$. Por H_i P y O no son tautologías. Por lo que existe $v / v \neq P$ y $v \neq O$, lo que implica que $v \neq P \vee O$. Lo que hace que $P \vee O$ no sea una tautología.