Ejercicio 16 ★

Un conjunto Γ se dice *completo* si para toda fórmula σ, $\Gamma \vdash \sigma$ o $\Gamma \vdash \neg\sigma$. No confundir esta noción con el lema de completitud visto en clase. ¿El conjunto $\emptyset$ es completo?

Como $\emptyset \vdash \sigma \Leftrightarrow \sigma$ es tauto (demo abajo) vale que $\emptyset \vdash \sigma$ $\forall \sigma$ tautología.

Ahora, que pasa con las contradicciones y contingencias?

Claramente no vamos a poder mostrar que es verdadera una contradicción con un sistema deductivo. Pero lo que sí podemos probar que su negación es una tautología.

Por lo que $\forall \sigma$ $\Gamma \vdash \neg\sigma$ con σ una contradicciones.

Por lo tanto vale $\forall \sigma$ $\emptyset \vdash \sigma$ o $\emptyset \vdash \neg\sigma$ mientras que σ sea o una tauto o una contradicción.

Pero que pasa con las contingencias?

Ya que en las contingencias hay valuaciones que hacen verdadera a la fórmula y otras que la hacen falsa al negarla se van a invertir las cosas, por lo que nunca va a ser una tautología. Por lo cual el conjunto vacío de premisas no puede probar ni una contingencia ni su negación.

Veamos un ejemplo: $\sigma = P \wedge Q$, $\neg\sigma = \neg P \vee \neg Q$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Por lo que no vale que $\emptyset \vdash P \wedge Q$ y que $\emptyset \vdash \neg P \vee \neg Q$.

$$\frac{\overbrace{\vdash P \qquad \vdash Q}^{\text{No se puede probar}}}{\vdash P \wedge Q}\ \wedge i \qquad\qquad \frac{\overbrace{\vdash \neg P}^{\text{No se puede probar}}}{\vdash \neg P \vee \neg Q}\ \vee i_1$$

Por lo que $\emptyset$ no es completo porque existen fórmulas σ / $\Gamma \nvdash \sigma$ y $\Gamma \nvdash \neg\sigma$.

Demo conjunto vacío de premisas solo puede probar tautologías:

Por completitud sabemos que $\emptyset \models \sigma \rightarrow \emptyset \vdash \sigma$.

Así que vamos con valuaciones porque $\emptyset \models \sigma \Leftrightarrow \sigma$ es una tautología.

Sabemos que σ es una tautología $\Leftrightarrow v \models t$ $\forall$ valuación v

Entonces $\emptyset \models \sigma$ con σ tauto porque toda valuación $\models \emptyset$ y por consecuencia semántica $T_1, T_2, \ldots, T_n \models \sigma$ cuando toda valuación que satisface las premisas también satisface la conclusión.

Como σ es una tauto porque $\forall v$ $v \models \sigma$. Todas esas valuaciones también hacen valer el vacío. Por lo que $\emptyset \models \sigma$.

En los casos donde θ no es una tautología $\phi \not\models \theta$ porque $\exists v / v \not\models \theta$. entonces no se cumple la consecuencia semántica ya que no vale que toda valuación que cumple las premisas también cumple la conclusión. Por lo que $\phi \not\models \theta$ si θ no es tauto.