

Ejercicio 12 (Lema de sustitución ★)

Demostrar que si valen $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$ entonces vale $\Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$.

Sugerencia: proceder por inducción en la estructura del término M .

Términos:

$M ::= x \mid \lambda y : \varepsilon. M \mid M N \mid \text{true} \mid \text{false} \mid \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q \mid \text{zero} \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M)$.

Voy a asumir que $x \in FV(M)$ para todos los casos salvo los marcados en rojo ya que no tiene sentido que $x \in FV(M)$ y por \forall ~~something~~ de $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$, $\Gamma \vdash N : \sigma$ y $x \notin FV(M) \rightarrow \Gamma \vdash M : \tau$.

• caso Base x .

Por Hi $\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$ ^{ax} y $\Gamma \vdash N : \sigma$. QVQ $\Gamma \vdash x\{x := N\} : \sigma$.

Como $x\{x := N\} = N$ y por la hipótesis $\Gamma \vdash N : \sigma$. Entonces $\Gamma\{x := N\} : \sigma$. Vale.

• caso $\lambda y : \varepsilon. M$

• Por Hi $\Gamma, x : \tau, y : \varepsilon \vdash M : \sigma$, $\Gamma \vdash N : \tau$ y $x \in FV(M)$.

• QVQ $\Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon. (M\{x := N\}) : \varepsilon \rightarrow \sigma$

$\frac{\Gamma, x : \tau, y : \varepsilon \vdash M : \sigma}{\Gamma, x : \tau \vdash \lambda y : \varepsilon. M : \varepsilon \rightarrow \sigma} \rightarrow_i$

$\frac{\text{vale xHi en el } \Gamma, y : \varepsilon \vdash M\{x := N\} : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon. M\{x := N\} : \varepsilon \rightarrow \sigma}$

Como $\Gamma, x : \tau, y : \varepsilon \vdash M : \sigma$, $x \in FV(M) \rightarrow \Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon. (M\{x := N\}) : \varepsilon \rightarrow \sigma$

Porque cuando falta probar el tipo de x en M contra ahora todas las apariciones de $x = N$ y se puede probar $\Gamma \vdash N : \tau$ sin que $(x : \tau) \in \Gamma$. Entonces se va a poder probar que $\Gamma, y : \varepsilon \vdash M\{x := N\} : \sigma$, por lo tanto probando también $\Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon. (M\{x := N\}) : \varepsilon \rightarrow \sigma$.

• caso PQ

• Por Hi: $\Gamma, x : \tau \vdash P : \sigma \rightarrow \varepsilon$, $\Gamma, x : \tau \vdash Q : \sigma$, $\Gamma \vdash$ y $x \in FV(P)$ y $x \in FV(Q)$.

• QVQ $\Gamma \vdash (MN)\{x := N\} :$