Ejercicio 11 *(Debilitamiento y fortalecimiento)*

Demostrar las siguientes propiedades, procediendo por inducción en la derivación del juicio correspondiente:

1. Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ es un juicio de tipado derivable y x es una variable que no aparece en Γ, entonces $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ es derivable para todo tipo τ. Esta regla se conoce como *debilitamiento* o *weakening*.
2. Si $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ es un juicio de tipado derivable tal que x no aparece libre en M, entonces $\Gamma \vdash M : \sigma$ es derivable para todo tipo τ. Esta regla se conoce como *fortalecimiento* o *strengthening*.
3. Dar un contraejemplo para fortalecimiento en el caso en el que x aparece libre en M.

1) Vamos a hacer inducción sobre las reglas de derivación

La HI va a ser que $\Gamma \vdash M:\sigma \ \forall M$. La HI va ser que podemos demostrar "la parte de arriba" de las reglas de derivación y vamos a querer ver que $\Gamma, x:t$ prueba "lo de abajo".

- Caso ax:

$\dfrac{}{\Gamma \vdash M:\sigma}\,ax \iff (M:\sigma) \in \Gamma$. Por lo que $\dfrac{}{\Gamma, x:t \vdash M:\sigma}\,ax$ sigue siendo válido $\forall$ término x y $\forall$ tipo t porque $(M:\sigma) \in \Gamma$.

Caso axTrue (y axFalse):

- $\dfrac{}{\Gamma \vdash True : Bool}\,axTrue$ $\forall \Gamma$, por lo que también vale para:

$\dfrac{}{\Gamma, x:t \vdash True : Bool}\,axTrue$.

- Caso $\to_i$:

Por HI $\Gamma, y:\varepsilon \vdash M:\sigma$

$$\left.\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varepsilon:y \vdash M:\sigma}}{\Gamma \vdash \lambda y:\varepsilon.\,M : \varepsilon \to \sigma}\,\to_i\right\} d \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d}{\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M:\sigma}}{\Gamma, x:t \vdash \lambda y:\varepsilon.\,M : \varepsilon \to \sigma}\,\to_i$$

Por HI si $\Gamma, \varepsilon:y \vdash M:\sigma \to \Gamma, y:\varepsilon, x:t \vdash M:\sigma$.

- Caso $\to_\varepsilon$:

Por HI $\Gamma \vdash M:\sigma \to \varepsilon$ y $\Gamma \vdash N:\sigma$

$$d_1\left\{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M:\sigma \to \varepsilon} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N:\sigma}}{\Gamma \vdash MN:\varepsilon}\,\to_\varepsilon\right\} d_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d_1}{\Gamma, x:t \vdash M:\sigma \to \varepsilon} \quad \dfrac{\text{Por HI en } d_2}{\Gamma, x:t \vdash N:\sigma}}{\Gamma, x:t \vdash MN:\varepsilon}\,\to_\varepsilon$$

Por HI si $\Gamma \vdash M:\sigma \to \varepsilon \to \Gamma, x:t \vdash M:\sigma \to \varepsilon$

Por HI si $\Gamma \vdash N:\sigma \to \Gamma, x:t \vdash N:\sigma$

- Caso if

Por HI $\Gamma \vdash M:Bool$, $\Gamma \vdash P:\sigma$ y $\Gamma \vdash Q:\sigma$

$$d_1\left\{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M:Bool} \quad d_2\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash P:\sigma}\right. \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash Q:\sigma}}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q:\sigma}\,if\right\} d_3 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d_1}{\Gamma, x:t \vdash M:Bool} \quad \dfrac{\text{Por HI en } d_2}{\Gamma, x:t \vdash P:\sigma} \quad \dfrac{\text{Por HI en } D_3}{\Gamma, x:t \vdash Q:\sigma}}{\Gamma, x:t \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q:\sigma}\,if$$

Por Hi si $\Gamma \vdash M : Bool \rightarrow \Gamma, x:t \vdash M : Bool$

Por Hi si $\Gamma \vdash P : \sigma \rightarrow \Gamma, x:t \vdash P : \sigma$

Por Hi si $\Gamma \vdash Q : \sigma \rightarrow \Gamma, x:t \vdash Q : \sigma$

2) Para probar fortalecimiento lo hacemos igual que weakening.