

Ejercicio 13 ★

Probar que $\{P, Q \Rightarrow P\}$ es consistente. Ayuda: Usar el contrarecíproco del lema de corrección.

Por lo que vimos en la lección:

Si un conjunto de fórmulas tiene modelo ($\exists v / v \models \varphi \forall \varphi \in \Gamma$) entonces Γ es consistente.

Por lo que un modelo posible es $v / v \models P$ y $v \models Q$.

El cual cumple para ser un modelo porque $v \models P$ y como $v \models P$ y $v \models Q$ por consecuencia semántica $v \models (Q \rightarrow P)$

1) como conjunto de fórmulas tiene modelo \rightarrow es consistente

• Prueba de contrarecíproco:

Si un conjunto de fórmulas Γ es inconsistente \rightarrow Γ no tiene modelo.

Si Γ es inconsistente \exists una fórmula $\phi / \phi \in \Gamma$ y $\neg \phi \in \Gamma$.
Para que $\Gamma \vdash \perp$.

Por el teorema de corrección: Si $\Gamma \vdash \perp$, porque $\phi \in \Gamma$ y $\neg \phi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \models \phi$ y $\Gamma \models \neg \phi$.

Pero esta es una contradicción, porque no puede existir una evaluación $v / v \models \phi$ y $v \models \neg \phi$ a la vez.
Por lo que Γ no tiene modelo. ...