**Ejercicio 11** *(Debilitamiento y fortalecimiento)*

Demostrar las siguientes propiedades, procediendo por inducción en la derivación del juicio correspondiente:

1. Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ es un juicio de tipado derivable y $x$ es una variable que no aparece en $\Gamma$, entonces $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ es derivable para todo tipo $\tau$. Esta regla se conoce como *debilitamiento* o *weakening*.
2. Si $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ es un juicio de tipado derivable tal que $x$ no aparece libre en $M$, entonces $\Gamma \vdash M : \sigma$ es derivable para todo tipo $\tau$. Esta regla se conoce como *fortalecimiento* o *strengthening*.
3. Dar un contraejemplo para fortalecimiento en el caso en el que $x$ aparece libre en $M$.

1) Vamos a hacer inducción sobre las reglas de derivación.

La HI va a ser que $\Gamma \vdash M : \sigma \ \forall M$. La HI va ser que podemos demostrar "la parte de arriba" de las reglas de derivación y vamos a querer ver que $\Gamma, x : t$ prueba "lo de abajo".

- Caso ax:

$\dfrac{}{\Gamma \vdash M : \sigma}\,ax \longleftrightarrow (M:\sigma) \in \Gamma$. Por lo que $\dfrac{}{\Gamma, x : t \vdash M : \sigma}\,ax$ sigue siendo válido $\forall$ término $x$ y $\forall$ tipo $t$ porque $(M:\sigma) \in \Gamma$.

Caso axTrue (y axFalse):

- $\dfrac{}{\Gamma \vdash True : Bool}\,axTrue$ $\forall \Gamma$, por lo que también vale para:

$\dfrac{}{\Gamma, x : t \vdash True : Bool}\,axTrue$.

- Caso $\to_i$:
- Por HI $\Gamma, y : \varepsilon \vdash M : \sigma$

$$\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varepsilon : y \vdash M : \sigma}\right\} d \qquad \dfrac{\Gamma, \varepsilon : y \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda y : \varepsilon . M : \varepsilon \to \sigma}\,\to_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d}{\Gamma, x : t, y : \varepsilon \vdash M : \sigma}}{\Gamma, x : t \vdash \lambda y : \varepsilon . M : \varepsilon \to \sigma}\,\to_i$$

- Por HI si $\Gamma, \varepsilon : y \vdash M : \sigma \to \Gamma, y : \varepsilon, x : t \vdash M : \sigma$.
- Caso $\to_\varepsilon$:
- Por HI $\Gamma \vdash M : \sigma \to \varepsilon$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$

$$d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma \to \varepsilon}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \sigma}\right\} d_2 \qquad \dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \varepsilon \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \varepsilon}\,\to_\varepsilon$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d_1}{\Gamma, x : t \vdash M : \sigma \to \varepsilon} \quad \dfrac{\text{Por HI en } d_2}{\Gamma, x : t \vdash N : \sigma}}{\Gamma, x : t \vdash M N : \varepsilon}\,\to_\varepsilon$$

- Por HI si $\Gamma \vdash M : \sigma \to \varepsilon \to \Gamma, x : t \vdash M : \sigma \to \varepsilon$
- Por HI si $\Gamma \vdash N : \sigma \to \Gamma, x : t \vdash N : \sigma$
- Caso if
- Por HI $\Gamma \vdash M : Bool$, $\Gamma \vdash P : \sigma$ y $\Gamma \vdash Q : \sigma$

$$d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : Bool}\right. \quad d_2\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash P : \sigma}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash Q : \sigma}\right\} d_3 \qquad \dfrac{\Gamma \vdash M : Bool \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma}\,if$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{Por HI en } d_1}{\Gamma, x : t \vdash M : Bool} \quad \dfrac{\text{Por HI en } d_2}{\Gamma, x : t \vdash P : \sigma} \quad \dfrac{\text{Por HI en } d_3}{\Gamma, x : t \vdash Q : \sigma}}{\Gamma, x : t \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma}\,if$$

• Por Hi si $\Gamma \vdash M: Bool \to \Gamma, x:t \vdash M: Bool$

• Por Hi si $\Gamma \vdash P:\sigma \to \Gamma, x:t \vdash P:\sigma$

• Por Hi si $\Gamma \vdash Q:\sigma \to \Gamma, x:t \vdash Q:\sigma$

2) Para probar fortalecimiento lo hacemos igual que weakening.

• Caso ax:

$\dfrac{}{\Gamma, x:\tau \vdash M:\sigma}\,ax$ con $x \notin FV(M) \longleftrightarrow M:\sigma \in \Gamma$ por lo que $\dfrac{}{\Gamma \vdash M:\sigma}\,ax$ sin importar que $x:\tau \notin \Gamma$ ya que no cambia nada si $x:\tau$ está o no en $\Gamma$ ya que no aporta nada para concluir que $\Gamma \vdash M:\sigma$.

• Caso axTrue (y axFalse)

$\dfrac{}{\Gamma, x:\tau \vdash True:Bool}\,axT$ como vale $\dfrac{}{\Gamma \vdash True:Bool}\,ax$ $\forall$ contexto $\Gamma$, entonces vale también $\forall$ contexto $\Gamma' / x:\tau \notin \Gamma'$.

• Caso $\to_i$:

• Por Hi $\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M:\sigma$ y $x \notin FV(M)$

$$\dfrac{\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M:\sigma}\right\} d}{\Gamma, x:t \vdash \lambda y:\varepsilon.M : \varepsilon \to \sigma}\to_i \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Vale x Hi en d}}{\Gamma, y:\varepsilon \vdash M:\sigma}}{\Gamma \vdash \lambda y:\varepsilon.M : \varepsilon \to \sigma}\to_i$$

• Por Hi si $\Gamma, x:t, y:\varepsilon \vdash M:\sigma$ y $x \notin FV(M) \longrightarrow \Gamma, y:\varepsilon \vdash M:\sigma$. ya que exista una derivación por Hi.

• Caso $\to_e$:

• Por Hi $\Gamma, x:t \vdash M: \sigma \to \varepsilon$, $x \notin FV(M)$, $\Gamma, x:t \vdash N:\sigma$ y $x \notin FV(N)$

$$\dfrac{d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t \vdash M:\sigma \to \varepsilon}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t \vdash N:\sigma}\right\} d_2}{\Gamma, x:t \vdash MN : \varepsilon}\to_\varepsilon \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Vale x Hi en } d_1}{\Gamma \vdash M:\sigma \to \varepsilon} \quad \dfrac{\text{Vale x Hi en } d_2}{\Gamma \vdash N:\sigma}}{\Gamma \vdash MN : \varepsilon}\to_\varepsilon$$

• Por Hi si $\Gamma, x:t \vdash M:\sigma \to \varepsilon$ y $x \notin FV(M) \longrightarrow \Gamma \vdash M:\sigma \to \varepsilon$.

• Por Hi si $\Gamma, x:t \vdash N:\sigma$ y $x \notin FV(N) \longrightarrow \Gamma \vdash N:\sigma$.

• Caso if:

• Por Hi $\Gamma, x:\tau \vdash M: Bool$, $\Gamma, x:t \vdash P:\sigma$, $\Gamma, x:t \vdash Q:\sigma$ y $x \in FV(M)$, $x \notin FV(P)$ y $x \notin FV(Q)$.

$$\dfrac{d_1\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t \vdash M:Bool}\right. \quad d_2\left\{\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t \vdash P:\sigma}\right. \quad \left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:t \vdash Q:\sigma}\right\} d_2}{\Gamma, x:t \vdash \text{if } M \text{ Then } P \text{ else } Q:\sigma}\,if \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Vale x Hi en } d_1}{\Gamma \vdash M:Bool} \quad \dfrac{\text{Vale x Hi en } D_2}{\Gamma \vdash P:\sigma} \quad \dfrac{\text{Vale x Hi en } D3}{\Gamma \vdash Q:\sigma}}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ Then } P \text{ else } Q:\sigma}\,if$$

- Por HI $\Gamma, x:T \vdash M : Bool$ y $x \notin FV(M) \to \Gamma \vdash M : Bool$
- Por HI $\Gamma, x:T \vdash P : \sigma$ y $x \notin FV(M) \to \Gamma \vdash P : \sigma$
- Por HI $\Gamma, x:T \vdash Q : \sigma$ y $x \notin FV(M) \to \Gamma \vdash Q : \sigma$

3) Si tenemos por ejemplo $x : Bool$ y la expr:

$\lambda y : Bool.\ \text{if } y \text{ then } x \text{ else False} : Bool \to Bool$.

No nos podemos deshacer de la hipótesis $x : Bool$ porque si no no vamos a poder demostrar el tipo de la expr:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y:Bool \vdash y:Bool}\,ax \qquad \dfrac{\text{No podemos probarlo}}{y:Bool \vdash x:Bool} \qquad \dfrac{}{y:Bool \vdash False:Bool}}{y:Bool \vdash \text{if } y \text{ then } x \text{ else False} : Bool}\,if}{\vdash \lambda y:Bool.\ \text{if } y \text{ then } x \text{ else False} : Bool \to Bool}\,{\to_i}$$

En cambio si $x : Bool \in \Gamma$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:Bool, y:Bool \vdash y:Bool}\,ax \qquad \dfrac{}{x:Bool, y:Bool \vdash x:Bool}\,ax \qquad \dfrac{}{x:Bool, y:Bool \vdash True:Bool}\,ax}{x:Bool, y:Bool \vdash \text{if } y \text{ then } x \text{ else False} : Bool}\,if}{x:Bool \vdash \lambda y:Bool.\ \text{if } y \text{ then } x \text{ else False} : Bool \to Bool}\,{\to_i}$$