**Ejercicio 14** *(Conmutación de sustituciones)*

Sean $M$, $N$ y $P$ términos del cálculo-$\lambda$.

a) Por inducción en la estructura del término $M$, demostrar que si $x$ no aparece libre en $P$ y $x \neq y$, entonces:

$$M\{x := \mathbf{N}\}\{y := \mathbf{P}\} = M\{y := \mathbf{P}\}\{x := \mathbf{N}\{y := \mathbf{P}\}\}$$

b) Dar un contraejemplo para la ecuación de arriba cuando $x$ aparece libre en $P$.

$M ::= x \mid \lambda z:T.M \mid MQ \mid true \mid False \mid if\ C\ Then\ M\ else\ Q$

- Caso Base $M = x$.
- Por Hi $x \notin FV(P)$ y $x \neq y$.
- QVQ $x\{x:=N\}\{y:=P\} = x\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$x\{x:=N\}\{y:=P\} = x\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$N\{y:=P\} = x\{x:=N\{y:=P\}\}$ (Como $x \neq y$ entonces la sust en el lado izq no afecta a $x$)

$N\{y:=P\} = N\{y:=P\}$.

- Caso True (False es igual)
- Por Hi $x \notin FV(P)$ y $x \neq y$.
- QVQ $True\{x:=N\}\{y:=P\} = True\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$True\{x:=N\}\{y:=P\} = True\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$True\{y:=P\} = True\{x:=N\{y:=P\}\}$

$True = True\{x:=N\}$

$True = True$.

- Caso $\lambda z:T.\ M$
- Hi: $M\{x:=N\}\{y:=P\} = M\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$, $x \notin FV(P)$ y $x \neq y$.
- QVQ: $(\lambda z:T.\ M)\{x:=N\}\{y:=P\} = (\lambda z:T.\ M)\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$(\lambda z:T.\ M)\{x:=N\}\{y:=P\} = (\lambda z:T.\ M\{y:=P\})\{x:=N\{y:=P\}\}$

$(\lambda z:T.\ \underbrace{M\{x:=N\}\{y:=P\}}_{M'}) = (\lambda z:T.\ \underbrace{M\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}}_{M'})$

Vale x Hi. Ya que en ambos lados tenemos $\lambda z:T.\ M'$.

- Caso MQ:
- Hi: $M\{x:=N\}\{y:=P\} = M\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$,
  $Q\{x:=N\}\{y:=P\} = Q\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$, $x \notin FV(P)$ y $x \neq y$
- QVQ $(M\,Q)\{x:=N\}\{y:=P\} = (MQ)\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$(M\,Q)\{x:=N\}\{y:=P\} = (MQ)\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$(M\{x:=N\}\;Q\{x:=N\})\{y:=P\} = (M\{y:=P\}\;Q\{y:=P\})\{x:=N\{y:=P\}\}$

$= x\ Hi$

$M\{x:=N\}\{y:=P\}\,Q\{x:=N\}\{y:=P\} = M\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}\;Q\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$= x\ Hi$

- caso if $C$ then $M$ else $Q$:
- $Hi$: $C\{x:=N\}\{y:=P\} = C\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$,

  $M\{x:=N\}\{y:=1\} = M\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$,

  $Q\{x:=N\}\{y:=1\} = Q\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$, $x \notin FV(P)$ y $x \neq y$.
- QVQ (if $C$ then $M$ else $Q$)$\{x:=N\}\{y:=P\}$ = (if $C$ then $M$ else $Q$)$\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

(if $C$ then $M$ else $Q$)$\{x:=N\}\{y:=P\}$ = if $C$ then $M$ else $Q\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

(if $C\{x:=N\}$ then $M\{x:=N\}$ else $Q\{x:=N\}$)$\{y:=P\}$

=

(if $C\{y:=P\}$ then $M\{y:=P\}$ else $Q\{y:=P\}$)$\{x:=N\{y:=P\}\}$

if $C\{x:=N\}\{y:=P\}$ then $M\{x:=N\}\{y:=P\}$ else $Q\{x:=N\}\{y:=P\}$

$\| =$ $\quad = \quad$ $\| =$ $\quad =$

if $C\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$ then $M\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$ else $Q\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$