Resumen — pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

1. Reescribir $\Rightarrow$ usando $\neg$ y $\vee$.
2. Pasar a f.n. negada, empujando $\neg$ hacia adentro.
3. Pasar a f.n. prenexa, extrayendo $\forall, \exists$ hacia afuera.
4. Pasar a f.n. de Skolem, Skolemizando los existenciales.
5. Pasar a f.n. conjuntiva, distribuyendo $\vee$ sobre $\wedge$.
6. Empujar los cuantificadores hacia adentro de las conjunciones.

Cada paso produce una fórmula equivalente,
excepto la Skolemización que sólo preserva satisfactibilidad.

Ejemplo — pasaje a forma clausal

Queremos ver que $\sigma \equiv \exists \mathtt{X}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \Rightarrow \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X}))$ es válida.
Primero la negamos: $\neg\sigma \equiv \neg\exists \mathtt{X}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \Rightarrow \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X}))$.
Pasamos $\neg\sigma$ a forma clausal:

$$
\begin{array}{rl}
 & \neg\exists \mathtt{X}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \Rightarrow \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\rightarrow & \neg\exists \mathtt{X}. (\neg\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \vee \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\rightarrow & \forall \mathtt{X}. \neg(\neg\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \vee \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\rightarrow & \forall \mathtt{X}. (\neg\neg\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \wedge \neg\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\rightarrow & \forall \mathtt{X}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \wedge \exists \mathtt{Y}. \neg\mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\rightarrow & \forall \mathtt{X}. \exists \mathtt{Y}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \wedge \neg\mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\rightarrow & \forall \mathtt{X}. \exists \mathtt{Y}. \forall \mathtt{Z}. (\mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Z}) \wedge \neg\mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\rightarrow & \forall \mathtt{X}. \forall \mathtt{Z}. (\mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Z}) \wedge \neg\mathbf{P}(\mathtt{f}(\mathtt{X}), \mathtt{X})) \\
\rightarrow & \forall \mathtt{X}. \forall \mathtt{Z}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Z}) \wedge \forall \mathtt{X}. \forall \mathtt{Z}. \neg\mathbf{P}(\mathtt{f}(\mathtt{X}), \mathtt{X})
\end{array}
$$

La forma clausal es:

$$\{\{\mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Z})\}, \{\neg\mathbf{P}(\mathtt{f}(\mathtt{X}), \mathtt{X})\}\} \equiv \{\{\mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y})\}, \{\neg\mathbf{P}(\mathtt{f}(\mathtt{Z}), \mathtt{Z})\}\}$$

Refutación en lógica de primer orden

Una vez obtenido un conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{\kappa_1, \dots, \kappa_n\}$,
se busca una **refutación**, es decir, una demostración de $\mathcal{C} \vdash \bot$.

Recordemos la regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{\mathbf{P}, \ell_1, \dots, \ell_n\} \quad \{\neg\mathbf{P}, \ell'_1, \dots, \ell'_m\}}{\{\ell_1, \dots, \ell_n, \ell'_1, \dots, \ell'_m\}}$$

Queremos adaptarla a lógica de primer orden.

En lugar de una variable proposicional $\mathbf{P}$ vamos a tener una
fórmula atómica $\mathbf{P}(t_1, \dots, t_n)$.
¿Podemos escribir la regla así?:

$$\frac{\{\mathbf{P}(t_1, \dots, t_n), \ell_1, \dots, \ell_n\} \quad \{\neg\mathbf{P}(t_1, \dots, t_n), \ell'_1, \dots, \ell'_m\}}{\{\ell_1, \dots, \ell_n, \ell'_1, \dots, \ell'_m\}}$$