Ejercicio 15

Probar que Γ es consistente maximal si y sólo si Γ es consistente y para toda fórmula σ, $\sigma \in \Gamma$ o $\neg\sigma \in \Gamma$.

- Vuelta:

Para que Γ sea C.M debe cumplirse:

1 Γ es consistente   2 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' consistente $\to \Gamma = \Gamma'$.

1 ya lo cumplimos. Ahora hay que probar 2:

Tomemos a Γ y analicemos con la idea de que se debe cumplir que $\forall \sigma, \sigma \in \Gamma$ o $\neg\sigma \in \Gamma$ o en otras palabras lo definimos inductivamente.

Tomamos todas las fórmulas de lógica prop y consistente:

$\Gamma_0 = \Gamma$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{t_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{t_n\} \nvdash \bot \\ \Gamma_n & \text{sino} \end{cases}$$

Con $[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ todas las fórmulas lógicas.

Luego Γ tiene a σ ó $\neg\sigma \longleftrightarrow$ agregar a una de ellas mantiene la consistencia.

Veamos que pasa si $\Gamma, \sigma \vdash \bot$:

Por la def de antes me gustaría entonces poder decir que $\Gamma, \neg\sigma \nvdash \bot$. Así puedo asegurar que siempre tengo a una o a otra.

Si $\Gamma, \sigma \vdash \bot \to \Gamma \nvdash \sigma$. Me gustaría entonces que $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ sea consistente.

Pruebo que si $\Gamma \nvdash \sigma \to \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ es consistente.

Por contrarrecíproco: $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ es inconsistente $\to \Gamma \vdash \sigma$.

Vale pq $\underbrace{\Gamma \cup \{\neg\sigma\}}$ es inconsistente

$$\dfrac{\Gamma, \neg\sigma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \sigma}\ PBC$$

Así pruebo que siempre va a estar σ ó $\neg\sigma$ en Γ (veamos) pues agregarlos mantiene la consistencia.

$|\Gamma| = |\Gamma'|$ luego $\Gamma = \Gamma'$ y Γ es consistente maximal. $\therefore$

- Ida:

Pruebo por el contrarrecíproco:

Γ no es consistente o existe una fórmula $\sigma / \sigma \notin \Gamma$ y $\neg\sigma \notin \Gamma$ implica que Γ no es consistente maximal.

Para que Γ sea consistente maximal se tienen que cumplir las siguientes 2 props simultáneamente:

1 Γ es consistente 2 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ con Γ' consistente $\rightarrow \Gamma = \Gamma'$.

Si Γ no es consistente claramente no se cumple 1 por lo que Γ no es consistente maximal.

Si Γ es consistente pero $\exists \varphi / \varphi \notin \Gamma$ y $\neg\varphi \notin \Gamma$ entonces no se va a cumplir la segunda prop.

Porque si $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$ con Γ' consistente o $\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ $\Gamma \subseteq \Gamma'$ pero $\Gamma \neq \Gamma'$ pq φ (resp $\neg\varphi$) $\notin \Gamma$.

Por lo que en este caso por más que Γ sea consistente va a seguir sin ser consistente maximal.