Análisis Numérico I
[75.12/95.04]
Curso 3
Trabajo Práctico 2
Problema de los Tres Cuerpos Restringido

Grupo 5
Primer cuatrimestre de 2019

Integrantes del grupo		
Santa María Tomás	92797	tomasisantamaria@gmail.com
Hemmingsen Lucas	76187	lhemmingsen@fi.uba.ar
Huenul Matías	102135	matias.huenul.07@gmail.com

Índice

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo práctico es utilizar los distintos metodos numéricos de problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias, para resolver el "Problema de los Tres Cuerpos Restringido o de Euler" y realizar una comparación de los resultados con cada método.

Los métodos que utilizaremos son el método de Euler, Runge-Kutta de orden 2 y 4, Nyström y Newmark.

2. Conceptos teóricos

2.1. Método de Euler

2.2. Método de Runge-Kutta

2.3. Método de Nyström

2.4. Método de Newmark

2.5. Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

[1] Sea un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con la forma:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, ..., u_m) \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, ..., u_m) \\ \vdots \\ \frac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, u_2, ..., u_m) \end{cases} \tag{1}$$

para $a \leq t \leq b$, con condiciones iniciales:

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m \tag{2}$$

El objetivo es encontrar m funciones $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ que satisfacen cada una de las ecuaciones diferenciales junto con las condiciones iniciales. Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden son simplemente generalizaciones de los métodos para una sola ecuación diferencial presentados anteriormente.

2.6. Ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1

[2] Una ecuación diferencial de grado m

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \tag{3}$$

con $a \leq t \leq b$ y condiciones iniciales $y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \dots, y^{(m-1)(a)=\alpha_m}$ puede convertirse a un sistema de ecuaciones de la forma de (1) y (2).

Sea $u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t), \dots, u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$. Esto produce el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2, \frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3, \dots, \frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m \tag{4}$$

y

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \tag{5}$$

con condiciones iniciales

$$u_1(a) = y(a) = \alpha_1, u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m \tag{6}$$

3. Desarrollo

3.1. Parte A

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que representan el movimiento de un satélite viajando entre la tierra y la luna e influenciado gravitatoriamente solo por estos dos cuerpos:

$$\begin{cases} x_1'' = 2x_2' + x_1 - \eta\frac{x_1+\mu}{d_1^3} - \mu\frac{x_1-\eta}{d_2^3} \\ x_2'' = -2x_1' + x_2 - \eta\frac{x_2}{d_1^3} - \mu\frac{x_2}{d_2^3} \end{cases} \tag{7}$$

Siendo $d_1 = \sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}$ y $d_2 = \sqrt{(x_1-\eta)^2 + x_2^2}$.
Sea:

$$\begin{cases} v_1(t) = x_1'(t) \\ v_2(t) = x_2'(t) \end{cases} \tag{8}$$

Entonces podemos transformar el sistema de ecuaciones anterior en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} x_1'(t) = v_1(t) \\ v_1'(t) = 2v_2(t) + x_1(t) - \eta\frac{x_1(t)+\mu}{d_1(t)^3} - \mu\frac{x_1(t)-\eta}{d_2(t)^3} \\ x_2'(t) = v_2(t) \\ v_2'(t) = -2v_1(t) + x_2(t) - \eta\frac{x_2(t)}{d_1(t)^3} - \mu\frac{x_2(t)}{d_2(t)^3} \end{cases} \tag{9}$$

Con valores iniciales en $t = t_0$:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{1_0} \\ v_1(t_0) = v_{1_0} \\ x_2(t_0) = x_{2_0} \\ v_2(t_0) = v_{2_0} \end{cases} \tag{10}$$

3.2. Parte B

Ahora resolvamos el problema numéricamente con la función *lsode* de *Octave*. Primero creamos la función *yprima*, que representa a la función *f(t,y)*. A continuación se detalla el código de la misma:

```
function [f]=yprima(y, t)
    mu = 1 / 81.3;
    eta = 1 - mu;
    d1 = sqrt((y(1) + mu)^2 + y(3)^2);
    d2 = sqrt((y(1) - eta)^2 + y(3)^2);
    f(1)= y(2);
    f(2)= 2*y(4) + y(1) - eta*((y(1) + mu)/d1^3) - mu*((y(1)-eta)/d2^3);
    f(3)= y(4);
    f(4)= -2*y(2) + y(3) - eta*(y(3)/d1^3) - mu*(y(3)/d2^3);
end
```

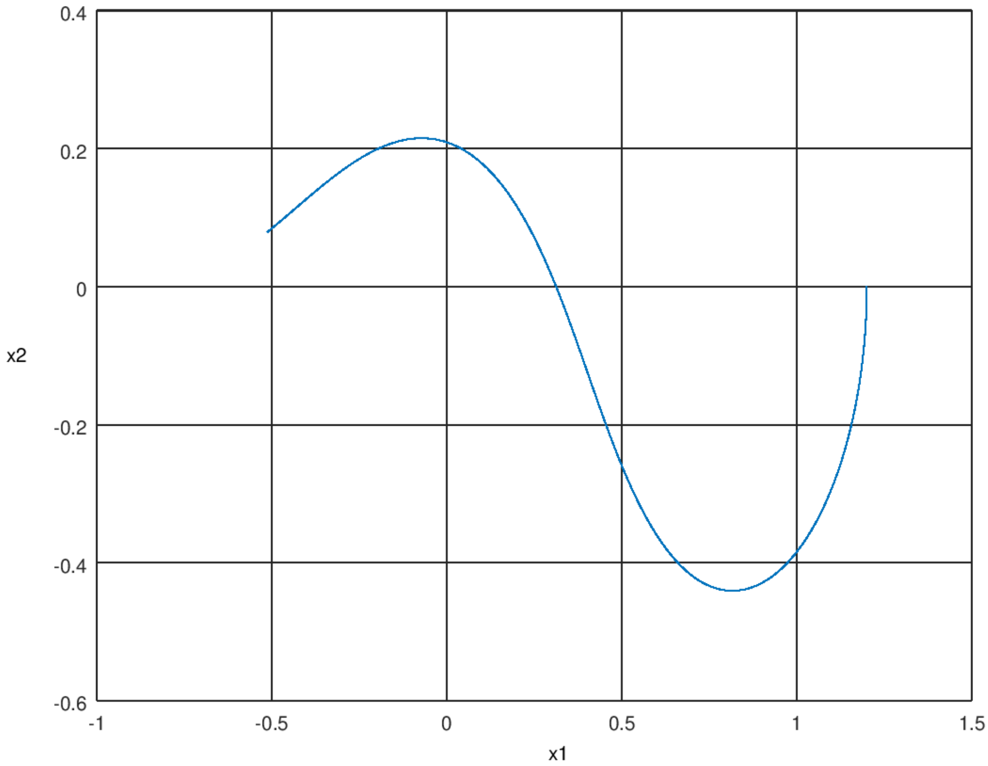
Luego, desde la consola de *Octave* ejecutamos la función *lsode* con la función *yprima* como entrada, con una posición inicial $(x_1, x_2) = (1{,}2, 0)$ y velocidad inicial $(v_1, v_2) = (0, -0{,}8)$ en el intervalo $[t_0, t_1) = [0, 2]$ con un $h = 0{,}01$. Para ello, ejecutamos:

```
        [y]=lsode('yprima',[1.2 0 0 -0.8],0:0.01:2)

```

con lo que en la última iteración (en t=2) obtenemos una posición final $(x_1, x_2) = (-0{,}51306, 0{,}07881)$ y una velocidad final $(v_1, v_2) = (-1{,}18383, -0{,}48564)$.

A continuación se muestra un gráfico de la trayectoria del satélite, que se mueve desde el extremo derecho del gráfico hacia la izquierda.



3.3. Parte C

3.4. Parte D

3.5. Parte E

3.6. Parte F

3.7. Parte G

4. Conclusiones

Referencias

[1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires
Numerical Analysis (9th edition).
Brooks/Cole - Cengage Learning
Sección 5.9 Higher Order Equations and Systems of Differential Equations
Páginas 328-334

[2] Richard L. Burden, J. Douglas Faires
Numerical Analysis (9th edition).
Brooks/Cole - Cengage Learning
Sección 5.9 Higher Order Equations and Systems of Differential Equations
Páginas 334-336