Análisis Numérico I (75.12 – 95.04)
Curso nro. 3
Primer Cuatrimestre del 2019
<u>TRABAJO PRÁCTiCO nro. 2</u>

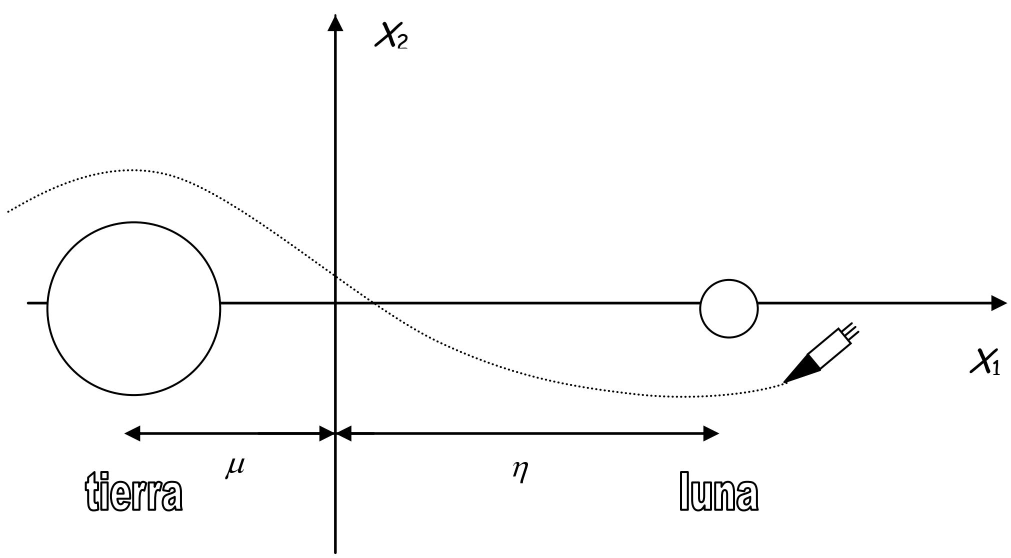
Fecha de Entrega: 26/06/2019.

<u>Introducción:</u>
Resolución del "Problema de los Tres Cuerpos Restringido o de Euler" en forma numérica.
Considere un sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente al movimiento de un satélite viajando entre la luna y la tierra (e influenciado gravitatoriamente solo por estos dos cuerpos):

$$(E_1) \qquad \begin{cases} x_1'' = 2 \cdot x_2' + x_1 - \eta \cdot \dfrac{x_1 + \mu}{d_1^{\,3}} - \mu \cdot \dfrac{x_1 - \eta}{d_2^{\,3}} \\ x_2'' = -2 \cdot x_1' + x_2 - \eta \cdot \dfrac{x_2}{d_1^{\,3}} - \mu \cdot \dfrac{x_2}{d_2^{\,3}} \end{cases} \qquad (1)$$

Siendo $d_1 = \|(x_1 + \mu, x_2)\|$ y $d_2 = \|(x_1 - \eta, x_2)\|$ las distancias del satélite a la tierra y la luna.

La posición del satélite es (x_1, x_2) en un sistema de coordenadas que se mueve con el sistema tierra-luna (en el que el origen está en el baricentro del sistema, el primer eje atraviesa la tierra y la luna y el segundo eje es perpendicular en el plano de movimiento del satélite y pasa por el baricentro del sistema). La tierra está en $(-\mu, 0)$ y la luna en $(\eta, 0)$ siendo $\mu = \frac{1}{81,3}$ la proporción de masas luna/tierra y $\eta = 1 - \mu$.
En el instante inicial $t = t_0$ están dadas la posición (x_1, x_2) y la velocidad (v_1, v_2) del satélite.



Objetivo:
Resolver numéricamente la trayectoria del satélite, realizando los gráficos pertinentes y comparando dichos resultados con la mejor solución conocida.

Desarrollo:
Parte a:
Escriba el sistema en la forma

$$(E_2) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

siendo $y = (x_1; x_1'; x_2; x_2')$.

Parte b:
Resuelva el problema numéricamente en el intervalo $[t_0; t_1] = [0; 2]$ usando la rutina ***"lsode"*** del Octave: ***"[y] = lsode('yprima',y0,t)"***, donde ***yprima*** es el nombre del m-file de la función ***"f"*** que calcula la función. Use el vector de condiciones iniciales y0 correspondiente a salir de la posición $(x_1; x_2) = (1.2; 0)$ con velocidad $(v_1; v_2) = (0; -0.8)$. Use como h=0.01.

Ayuda: Para verificar que escribió correctamente los códigos, podría usar la función de prueba: *yprima(1, [2 3 4 5]')* es aproximadamente *(9.8;10.4;5.1;-5.2)*, y que la posición final en t=2 es $(x_1; x_2) = (-0.5142; 0.0742)$.
Haga una gráfica[1] de la trayectoria hallada. Pruebe con distintos intervalos de tiempo y con distintas condiciones iniciales (por ejemplo con $t_1 = 10$ ó $v_{20} = -0{,}6$).

Parte c (opcional): Estudie la evolución del paso h=Δt . Calcule la trayectoria con una tolerancia mayor y vea qué pasa (ej.: h=0.1).

Parte d: Use el método de Euler para hallar la Solución de la ecuación en el Intervalo $[0;2]$ con las condiciones iniciales de la parte (b).
Asumiendo $(x_1, x_2) = (-0.5142; 0.0742)$ como valor correcto para la posición final (valor correcto el del método ***"lsode"*** para $t = 2$), halle el error cometido con Euler. Pruebe con distintos valores del paso y estudie si los resultados son coherentes con la teoría.

Parte e: Repita los cálculos de (d) para los métodos de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Compare con los resultados anteriores.

Parte f: Repita los cálculos de (d) para los métodos de Nyström y Newmark. Compare con los resultados anteriores.

Parte g (Opcional): Con las condiciones iniciales de la parte b, el satélite llega al x_1 de la tierra con aproximadamente $x_2 = 0.2$ Modifique la componente vertical de la velocidad inicial para que llegue con $|x_2| < 10^{-3}$. Considere trabajar en forma iterativa, planteando el problema como el de hallar la raíz de una función adecuada de la velocidad inicial. Estudie cómo determinar el valor de x_2 en el momento en que $x_1 = 0$.

---

[1] Puede usar plot (x1,x2), siendo x1,x2 las columnas adecuadas de la matriz ***"y"*** hallada con lsode.

Bibliografía:

[1] Wild W. J. - "Euler's three-body problem". Am. J. Phys. 48(4) April 1980, pp. 297-301.

[2] Adrián Faigón. - "Apuntes Mecánica Racional, Dpto Fisica, FIUBA" – Movimiento Planetario – (URL: http://materias.fi.uba.ar/6211/Mecanica%20rac%2003-04%20Movimiento%20Planetario.pdf)

[3] Wang Sang Koon, Martin W. Lo, Jerrold E. Marsden, Shane D. Ross – "Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design" -
Control and Dynamical Systems, Caltech and JPL, Pasadena, California, USA
International Conference on Differential Equations, Berlin, 1999
Edited by B. Fiedler, K. Gröger and J. Sprekels, World Scientific, 2000, 1167–1181.

[4] Shampine, L. F. and M. K. Gordon, Computer Solution of Ordinary Differential Equations: the Initial Value Problem, W. H. Freeman, San Francisco, 1975.

[5] Shampine, L. F. and M. W. Reichelt, "The MATLAB ODE Suite," SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 18, 1997, pp 1-22.