

**Análisis Numérico I**  
**[75.12/95.04]**  
**Curso 3**  
**Trabajo Práctico 2**  
**Problema de los Tres Cuerpos Restringido**

Grupo 5  
Primer cuatrimestre de 2019

<b>Integrantes del grupo</b>		
Santa María Tomás	92797	tomasisantamaria@gmail.com
Hemmingsen Lucas	76187	lhemmingsen@fi.uba.ar
Huenul Matías	102135	matias.huenul.07@gmail.com

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Conceptos teóricos</b>	<b>2</b>
2.1. Método de Euler . . . . .	2
2.2. Método de Runge-Kutta . . . . .	2
2.3. Método de Nyström . . . . .	2
2.4. Método de Newmark . . . . .	2
2.5. Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden . . . . .	2
2.6. Ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1 . . . . .	3
<b>3. Desarrollo</b>	<b>3</b>
3.1. Parte A . . . . .	3
3.2. Parte B . . . . .	4
3.3. Parte C . . . . .	5
3.4. Parte D . . . . .	5
3.5. Parte E . . . . .	7
3.6. Parte F . . . . .	7
3.7. Parte G . . . . .	7
<b>4. Conclusiones</b>	<b>7</b>

## 1. Introducción

El objetivo del presente trabajo práctico es utilizar los distintos metodos numéricos de problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias, para resolver el “Problema de los Tres Cuerpos Restringido o de Euler” y realizar una comparación de los resultados con cada método.

Los métodos que utilizaremos son el método de Euler, Runge-Kutta de orden 2 y 4, Nyström y Newmark.

## 2. Conceptos teóricos

### 2.1. Método de Euler

Sea  $y'(t) = f(t, y)$  una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial  $y(t_0) = y_0$ . Se quiere obtener la solución en  $N + 1$  puntos en un intervalo dado, uniformemente espaciado con paso  $h$ . Se puede aproximar  $y(t)$  por su Polinomio de Taylor de primer orden:

$$y(t_k + h) \cong y(t_k) + hy'(t_k) \quad (1)$$

Pero como  $y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$  y además  $t_{k+1} = t_k + h$  para todo  $0 \leq k \leq N$ , esta expresión se puede reescribir como:

$$y(t_{k+1}) \cong y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) \quad (2)$$

Este método puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, aplicando lo anterior a cada componente del sistema.

El error cometido con este método se debe en parte al error de truncamiento local (dado por el Teorema de Taylor) en cada paso  $k$  y al error cometido por utilizar como condición inicial en dicho paso  $y_{k-1}$ , obtenido en el anterior. Se puede demostrar que si el problema está bien planteado, el error total es  $e = O(h)$ .

### 2.2. Método de Runge-Kutta

### 2.3. Método de Nyström

### 2.4. Método de Newmark

### 2.5. Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

[1] Sea un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con la forma:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \frac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{cases} \quad (3)$$

para  $a \leq t \leq b$ , con condiciones iniciales:

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m \quad (4)$$

El objetivo es encontrar  $m$  funciones  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  que satisfacen cada una de las ecuaciones diferenciales junto con las condiciones iniciales. Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden son simplemente generalizaciones de los métodos para una sola ecuación diferencial presentados anteriormente.

## 2.6. Ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1

[2] Una ecuación diferencial de grado  $m$

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad (5)$$

con  $a \leq t \leq b$  y condiciones iniciales  $y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \dots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$  puede convertirse a un sistema de ecuaciones de la forma de (3) y (4).

Sea  $u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t), \dots, u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$ . Esto produce el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2, \frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3, \dots, \frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m \quad (6)$$

y

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \quad (7)$$

con condiciones iniciales

$$u_1(a) = y(a) = \alpha_1, u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m \quad (8)$$

## 3. Desarrollo

### 3.1. Parte A

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que representan el movimiento de un satélite viajando entre la tierra y la luna e influenciado gravitatoriamente solo por estos dos cuerpos:

$$\begin{cases} x_1'' = 2x_2' + x_1 - \eta \frac{x_1 + \mu}{d_1^3} - \mu \frac{x_1 - \eta}{d_2^3} \\ x_2'' = -2x_1' + x_2 - \eta \frac{x_2}{d_1^3} - \mu \frac{x_2}{d_2^3} \end{cases} \quad (9)$$

Siendo  $d_1 = \sqrt{(x_1 + \mu)^2 + x_2^2}$  y  $d_2 = \sqrt{(x_1 - \eta)^2 + x_2^2}$ .

Sea:

$$\begin{cases} v_1(t) = x_1'(t) \\ v_2(t) = x_2'(t) \end{cases} \quad (10)$$

Entonces podemos transformar el sistema de ecuaciones anterior en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} x_1'(t) = v_1(t) \\ v_1'(t) = 2v_2(t) + x_1(t) - \eta \frac{x_1(t) + \mu}{d_1(t)^3} - \mu \frac{x_1(t) - \eta}{d_2(t)^3} \\ x_2'(t) = v_2(t) \\ v_2'(t) = -2v_1(t) + x_2(t) - \eta \frac{x_2(t)}{d_1(t)^3} - \mu \frac{x_2(t)}{d_2(t)^3} \end{cases} \quad (11)$$

Con valores iniciales en  $t = t_0$ :

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{1_0} \\ v_1(t_0) = v_{1_0} \\ x_2(t_0) = x_{2_0} \\ v_2(t_0) = v_{2_0} \end{cases} \quad (12)$$

### 3.2. Parte B

Ahora resolvamos el problema numéricamente con la función *lsode* de *Octave*. Primero creamos la función *yprima*, que representa a la función  $f(t,y)$ . A continuación se detalla el código de la misma:

```

1 function [f]=yprima(y, t)
2     mu = 1 / 81.3;
3     eta = 1 - mu;
4
5     d1 = sqrt((y(1) + mu)^2 + y(3)^2);
6     d2 = sqrt((y(1) - eta)^2 + y(3)^2);
7
8     f(1)= y(2);
9     f(2)= 2*y(4) + y(1) - eta*((y(1) + mu)/d1^3) - mu*((y(1)-eta)/d2^3);
10    f(3)= y(4);
11    f(4)= -2*y(2) + y(3) - eta*(y(3)/d1^3) - mu*(y(3)/d2^3);
12
13 end

```

Luego, desde la consola de *Octave* ejecutamos la función *lsode* con la función *yprima* como entrada, con una posición inicial  $(x_1, x_2) = (1, 2, 0)$  y velocidad inicial  $(v_1, v_2) = (0, -0,8)$  en el intervalo  $[t_0, t_1) = [0, 2]$  con un  $h = 0,01$ . Para ello, ejecutamos:

```

1 [y]=lsode('yprima',[1.2 0 0 -0.8],0:0.01:2)
2

```

con lo que en la última iteración (en  $t=2$ ) obtenemos una posición final  $(x_1, x_2) = (-0,51306, 0,07881)$  y una velocidad final  $(v_1, v_2) = (-1,18383, -0,48564)$ .

A continuación se muestra un gráfico de la trayectoria del satélite, que se mueve desde el extremo derecho del gráfico hacia la izquierda.

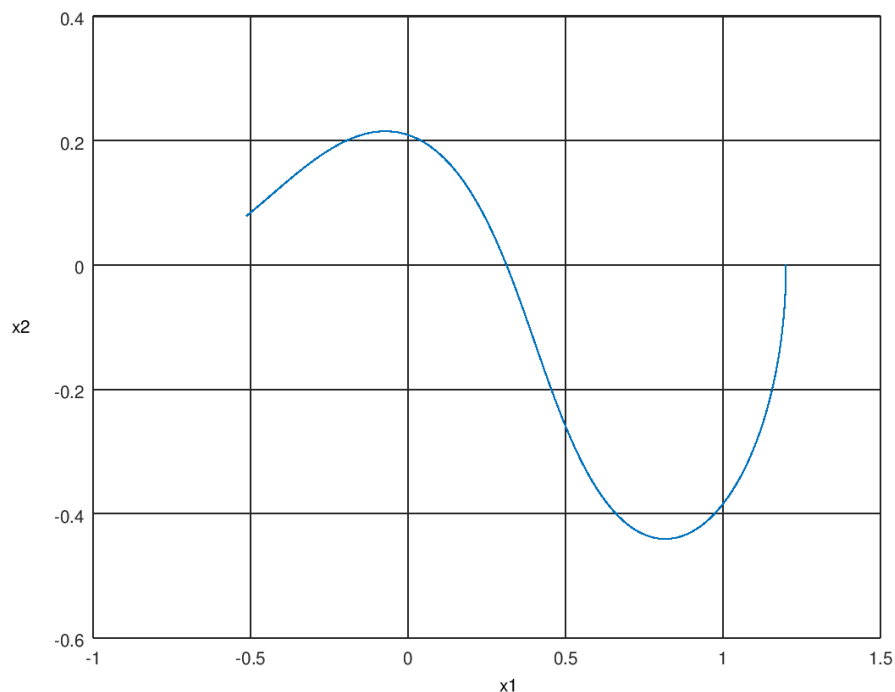


Figura 1: Trayectoria del satélite obtenida con *lsode*.

### 3.3. Parte C

Veremos ahora como se modifica la trayectoria aumentando el paso  $h$ . Para ello implementamos siguiente función.

```

1 function lsode_con_distintos_h(yprima, a, b, h, y0)
2 % Grafica las trayectorias obtenidas con lsode para distintos valores de h.
3 % Recibe:
4 % -> yprima = f(y, t)
5 % -> a, b extremos del intervalo
6 % -> h vector con distintos valores de paso
7 % -> y0 vector de condiciones iniciales
8
9 for h_i = h
10     Y = lsode(yprima, y0, a:h_i:b);
11     x1 = Y(:, 1);
12     x2 = Y(:, 3);
13     plot(x1, x2, sprintf(";h = %d;", h_i));
14     hold on
15 end
16 end

```

En el siguiente gráfico se puede observar lo obtenido para cuatro valores de  $h$  en particular, utilizando como condiciones iniciales las mismas que al comienzo de la parte b.

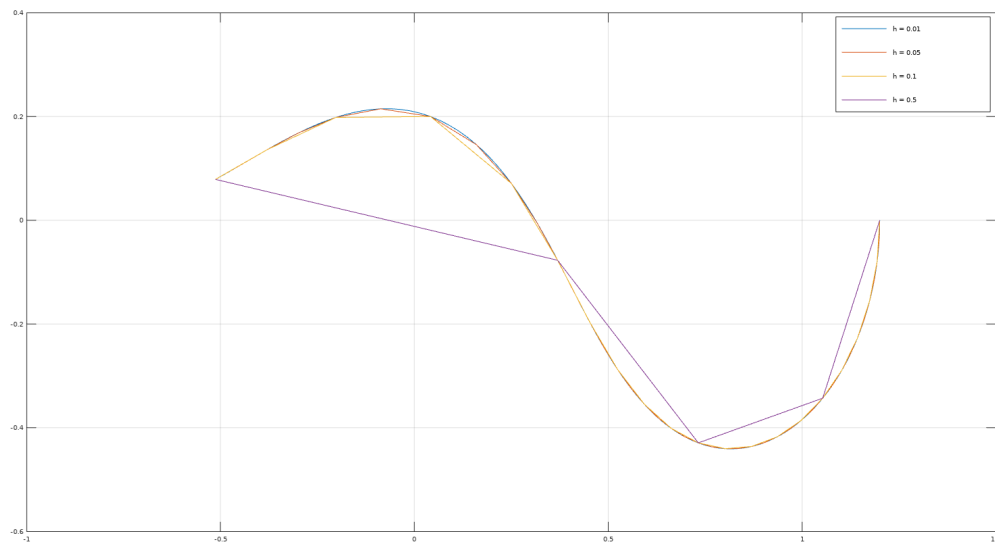


Figura 2: Trayectoria obtenida con distintos valores de  $h$ .

### 3.4. Parte D

Resolveremos ahora el sistema en el intervalo  $[0; 2]$  mediante el método de Euler. Las ecuaciones son:

$$\begin{cases}
 x_1(t_{k+1}) = x_1(t_k) + hv_1(t_k) \\
 v_1(t_{k+1}) = x_2(t_k) + h(2v_2(t_k) + x_1(t_k) - \eta \frac{x_1(t_k) - \mu}{d_1(t_k)^3}) \\
 x_2(t_{k+1}) = x_2(t_k) + hv_2(t_k) \\
 v_2(t_{k+1}) = v_2(t_k) + h(-2v_1(t_k) + x_2(t_k) - \eta \frac{x_2(t_k)}{d_1(t_k)^3}) - \mu \frac{x_2(t_k)}{d_2(t_k)^3}
 \end{cases} \quad (13)$$

El código de la función implementada en *Octave* para la resolución con este método se muestra a continuación.

```

1 function [Y] = euler(f, a, b, h, y0)
2 % Recibe:
3 % -> f = yprima
4 % -> a, b extremos del intervalo
5 % -> h paso
6 % -> y0 vector de condiciones iniciales
7 % Devuelve:
8 % -> Y matriz donde cada fila es el correspondiente vector yk = y(tk)
9
10 t = a:h:b;
11 k = (b - a) / h;
12
13 Y = zeros(k, length(y0));
14 Y(1, :) = y0;
15 for i = 2 : k + 1
16
17     y_n = Y(i-1, :);
18     yprima_n = feval(f, Y(i-1, :));
19
20     Y(i, :) = y_n + h * yprima_n;
21
22 end
23 end

```

Primero utilizamos como condición inicial el vector  $y_0 = (1, 2; 0; 0; -0,8)$  y como tolerancia el valor  $h = 0,01$ .

Los resultados para cada  $t$  del intervalo se encuentran en el archivo *resultados-parte-d.txt*.

En particular, el resultado obtenido para  $t = 2$  es:

$$y(2) = (-0,54958; -1,49872; 0,21286; -0,03654) \quad (14)$$

La trayectoria obtenida en este caso es la siguiente.

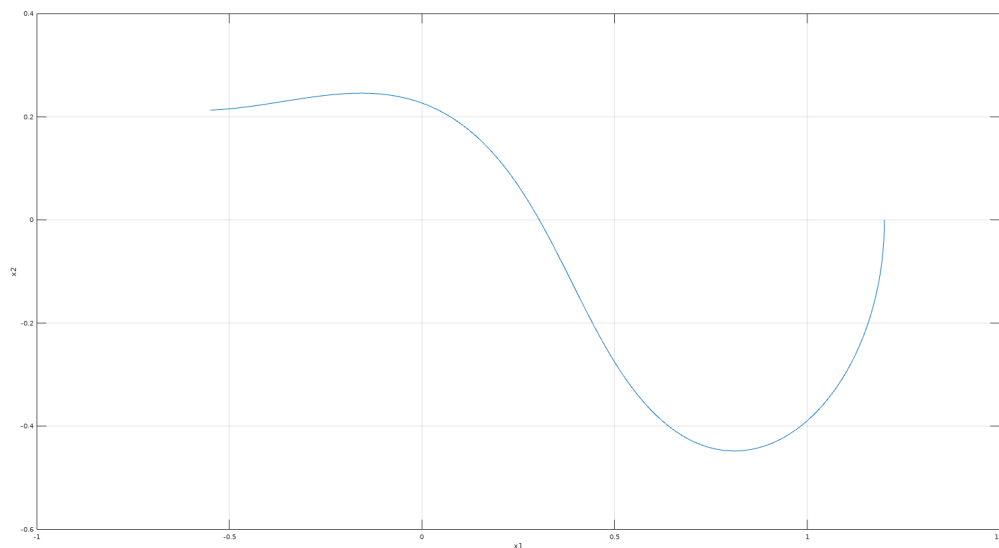


Figura 3: Trayectoria del satélite obtenida con el método de Euler.

Calcularemos ahora el error cometido por este método. Asumiendo como valor correcto el obtenido por la función *lsode* en la parte B, el error es:

$$e = (x_{1_{lsode}}; x_{2_{lsode}}) - (x_{1_{euler}}; x_{2_{euler}}) = (0,036514; -0,134042) \quad (15)$$

Modificando el paso  $h$ , vemos que el error es proporcional a éste, de acuerdo a la teoría. Por ejemplo, para  $h = 0,001$  el error es  $e = (0,0063200; -0,0160951)$  y para  $h = 0,1$  es  $e = (0,0098268; 0,61340)$ . En el siguiente gráfico se puede ver que la dependencia entre  $h$  y la norma del error absoluto es aproximadamente lineal.

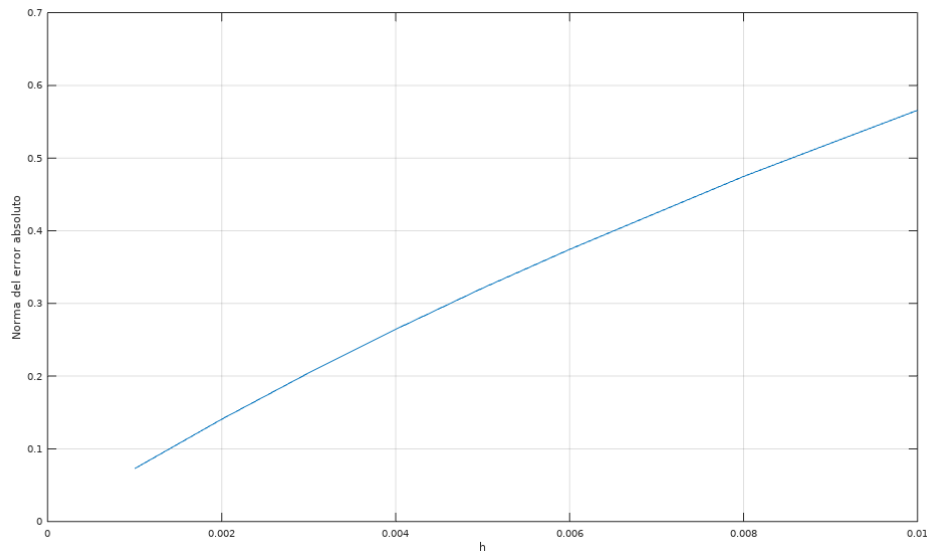


Figura 4: Error cometido con el método de Euler en función de  $h$ .

### 3.5. Parte E

### 3.6. Parte F

### 3.7. Parte G

## 4. Conclusiones

## Referencias

- [1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires  
*Numerical Analysis (9th edition)*.  
Brooks/Cole - Cengage Learning  
Sección 5.9 Higher Order Equations and Systems of Differential Equations  
Páginas 328-334
- [2] Richard L. Burden, J. Douglas Faires  
*Numerical Analysis (9th edition)*.  
Brooks/Cole - Cengage Learning  
Sección 5.9 Higher Order Equations and Systems of Differential Equations  
Páginas 334-336