

Trabajo Práctico N°7

Alumno: Matías Patricio Arévalo

Docente: Dr. Ing. Julián Pucheta

Cátedra: Control Óptimo

Institución: Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas.
Universidad Nacional de Catamarca

Año: 2025

Controlador con estimación de estados

1. Implementar un sistema de control con estimación de estados para cada caso del TP N°6, y realizar la comparación del observador allí empleado (el de Luenberger) con el estimador de Kalman.

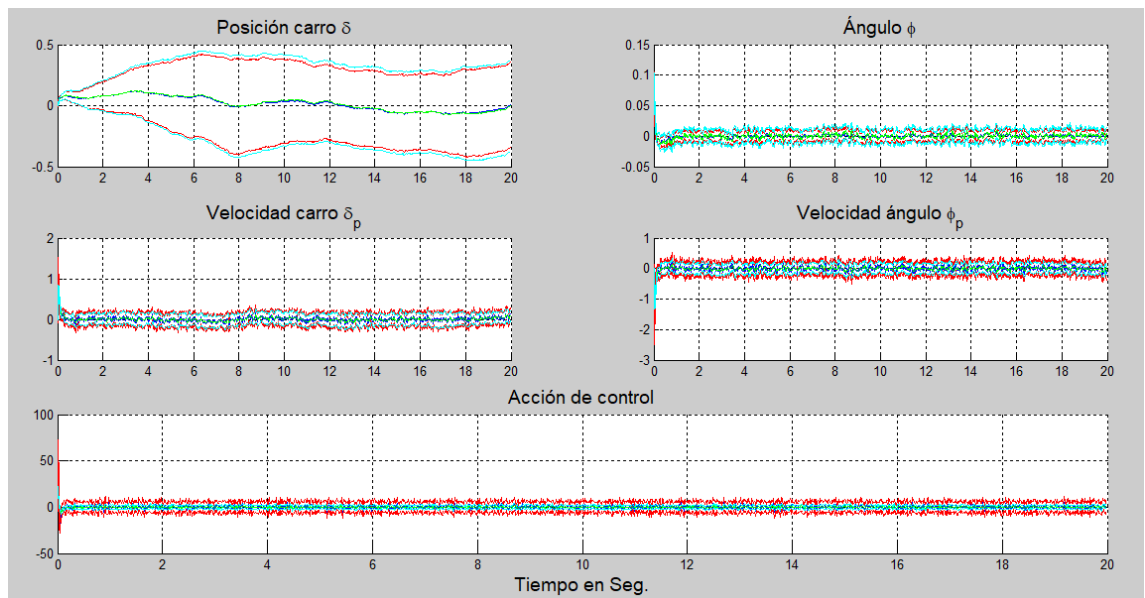
Se analizan dos sistemas de control diferentes en el que se empleó el observador de Luenberger, diseñado de manera determinística, a los cuales se añadió ruido para observar su desempeño. A los mismos sistemas de control se les implementó el controlador con estimación de estados, el estimador de Kalman.

El primer caso para comparar es el **sistema de control del péndulo invertido** con referencia nula, al cual se sometió a distintas condiciones iniciales y distintas magnitudes de ruido, en las siguientes imágenes se superponen las dos simulaciones, la respuesta del estimador de Luenberger y el de Kalman.

- **Ruido $\sigma=0.01$ y condición inicial $\phi=0.1[\text{rad}]$**

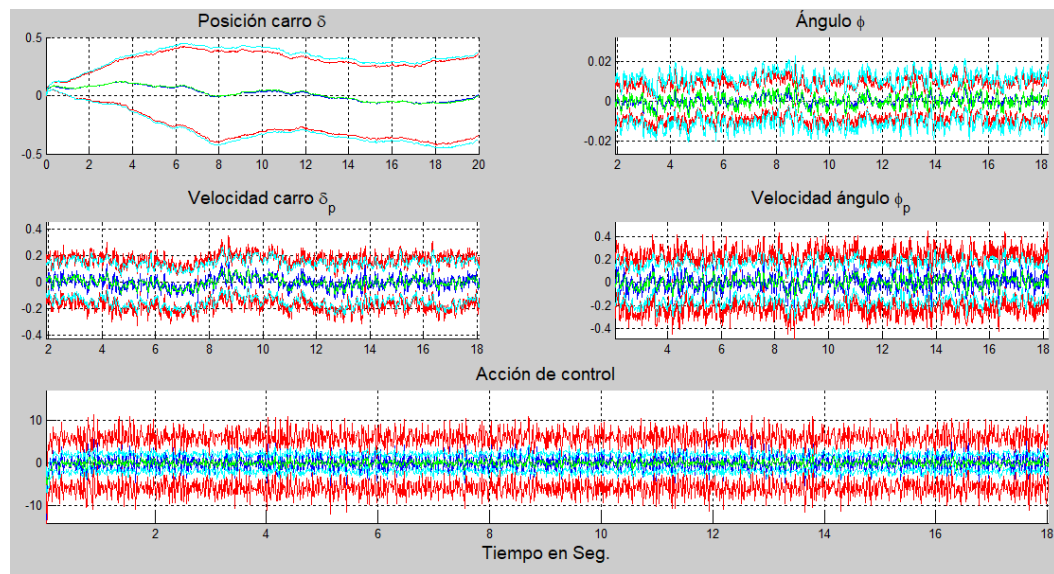
Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



Se puede observar que en las variables de estado tiene un comportamiento similar, excepto en los valores iniciales en los cuales el estimador de Kalman tiene un valor más pequeño en lo que respecta a la acción de control y las velocidades. Sin embargo, en la acción de control el Kalman no sólo tiene un valor inicial significativamente más pequeño, sino que su dispersión es mucho más pequeña, se encuentra centrada y es simétrica respecto a la media.

A continuación, se muestra un acercamiento para poder apreciar las diferencias de las simulaciones.



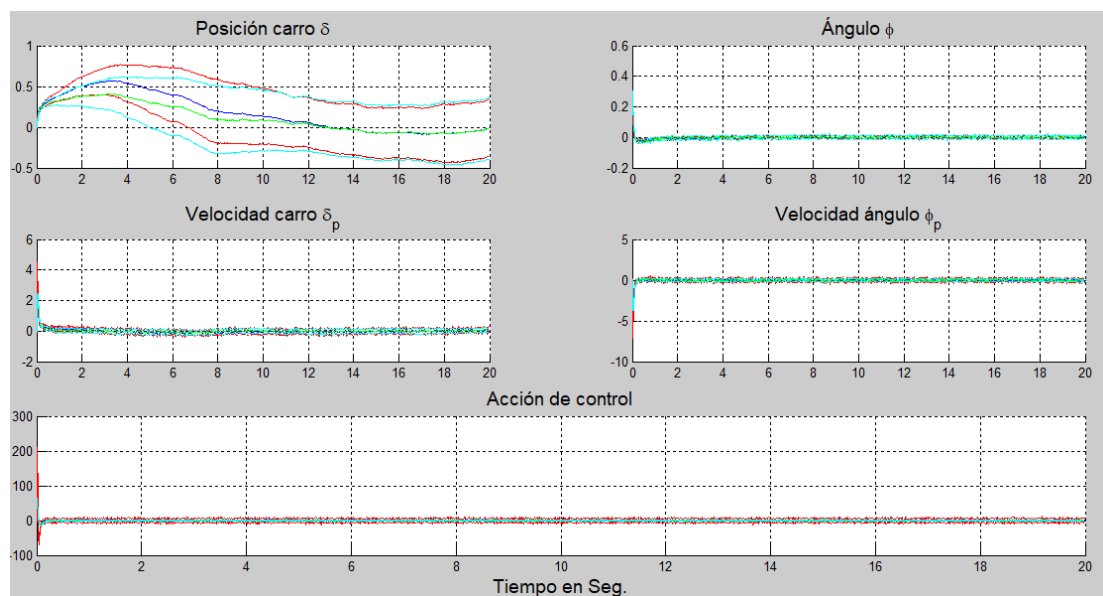
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=290730.4029$. $fi(1)=0.097609$. $\sigma = 0.01$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=1236.4595$. $fi(1)=0.097609$. $\sigma = 0.01$

- **Ruido $\sigma=0.01$ y condición inicial $\phi=0.3[\text{rad}]$**

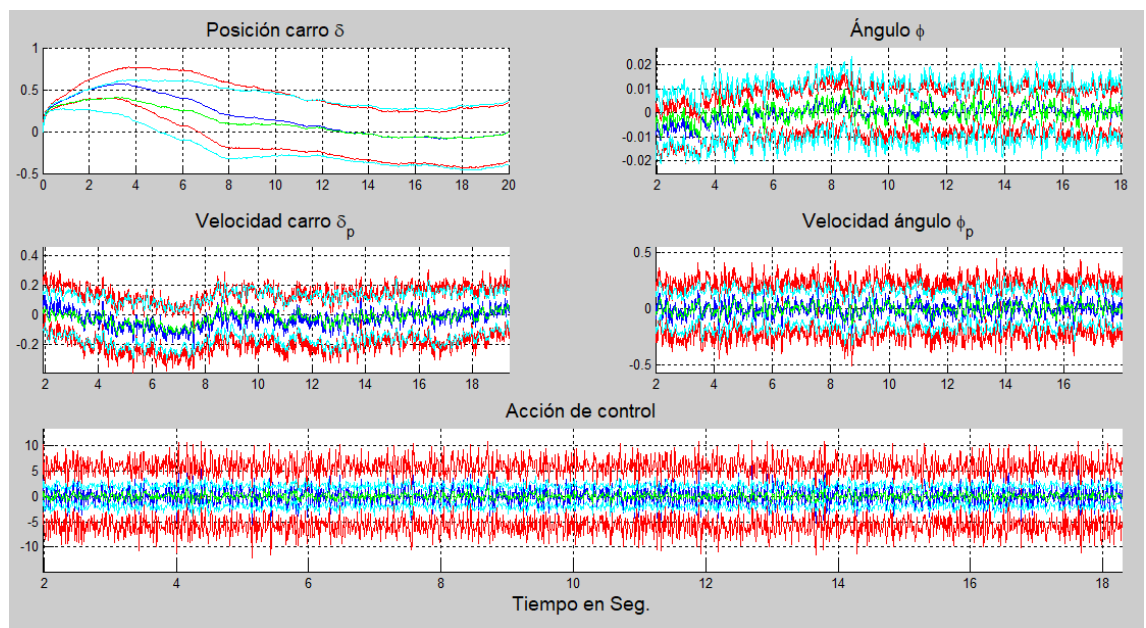
Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



Con un ángulo inicial mayor la evolución del sistema ya se diferencia más, como la posición del carro, en el Kalman tiene un sobrepaso menor que el de Luenberger. Se acentúa la diferencia en los valores iniciales en el transitorio de las velocidades y de la acción de control.

La dispersión sigue siendo menor en el estimador de Kalman, como se puede ver en la acción de control.



Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=340074.0873$. $fi(1)=0.29761$. $\sigma = 0.01$

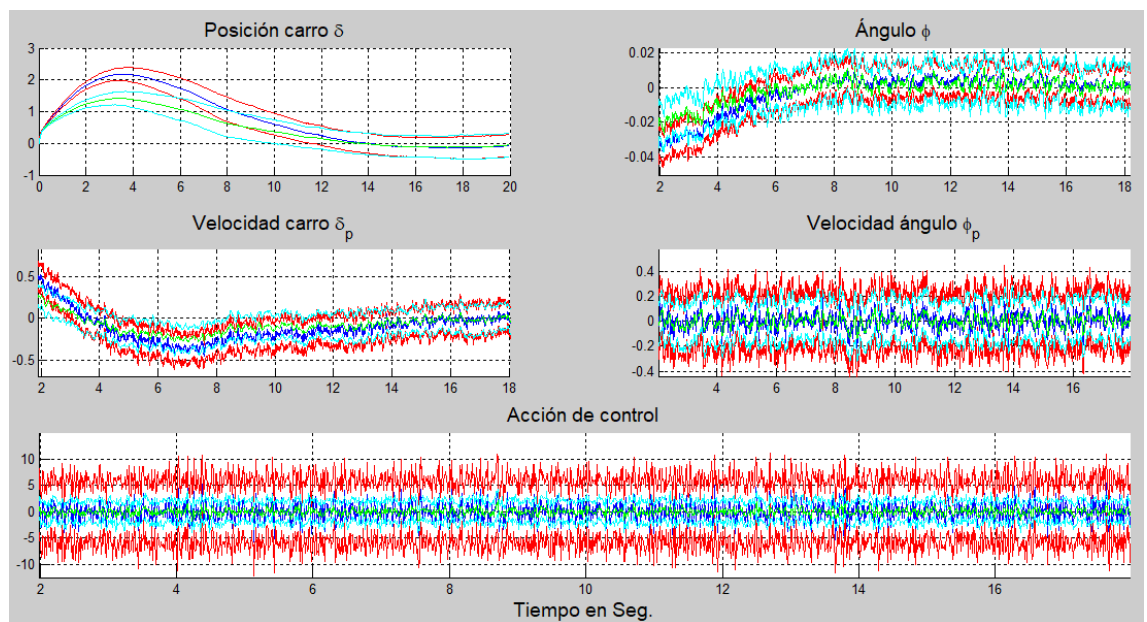
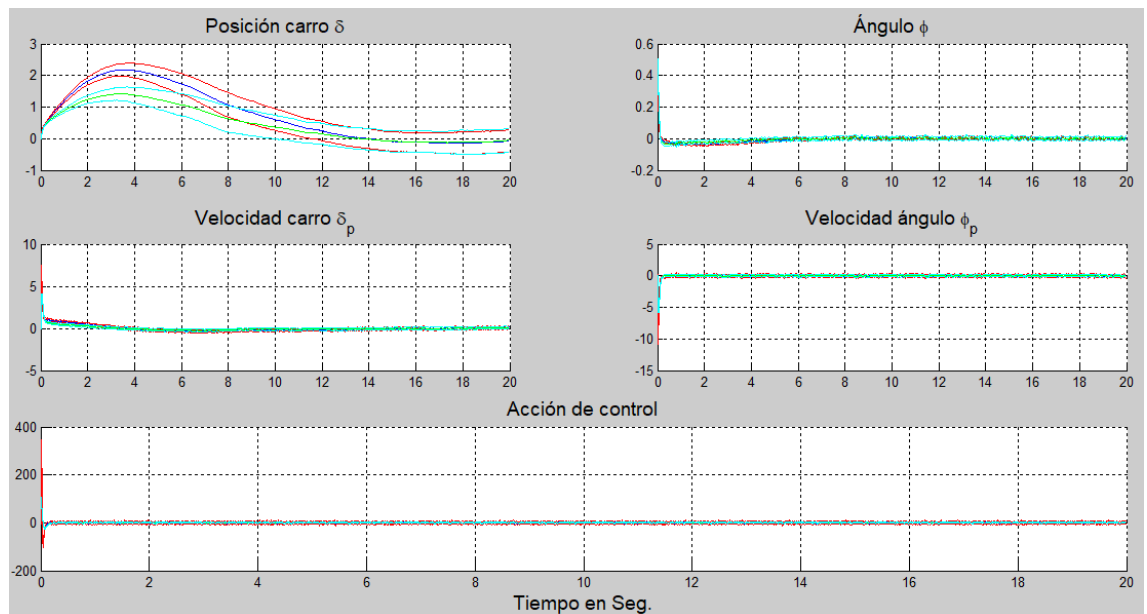
Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=1424.5522$. $fi(1)=0.29761$. $\sigma = 0.01$

- **Ruido $\sigma=0.01$ y condición inicial $\phi=0.5[\text{rad}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)

Se puede observar que el ángulo ϕ del Kalman llega más rápido a cero y la posición del carro es menor.



Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=437672.4795$. $f_i(1)=0.49761$. $\sigma = 0.01$

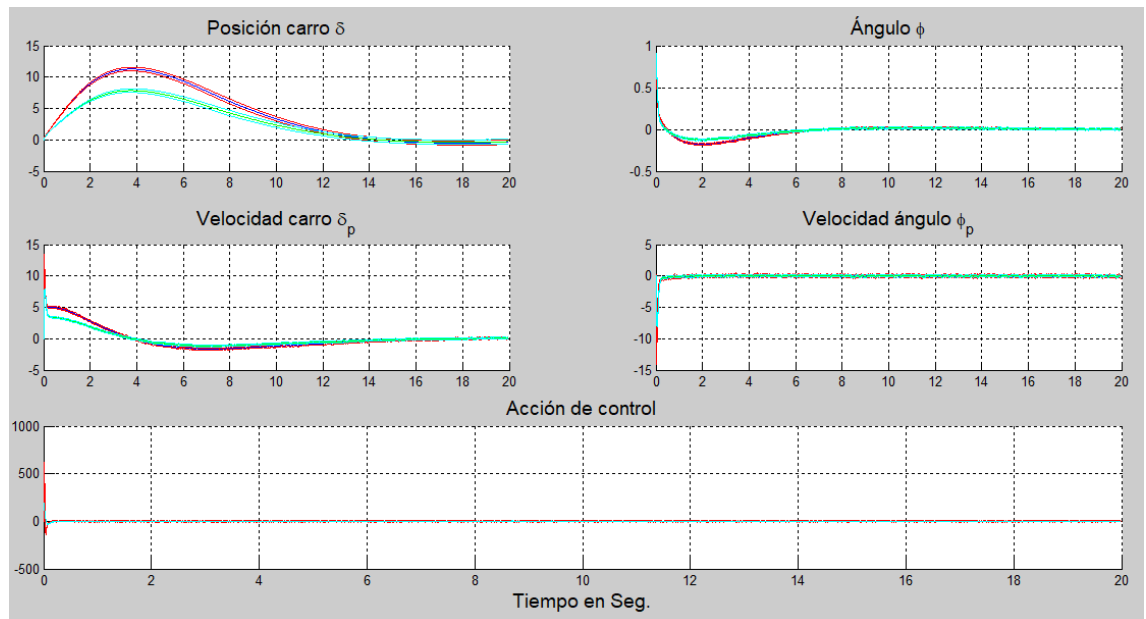
Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=2679.3155$. $f_i(1)=0.49761$. $\sigma = 0.01$

- **Ruido $\sigma=0.01$ y condición inicial $\phi=0.9[\text{rad}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)

Ya para este ángulo inicial ϕ el Luenberger es totalmente irrealizable debido a su acción de control demasiado elevada.



Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=812621.3139$. $f_i(1)=0.89761$. $\sigma = 0.01$

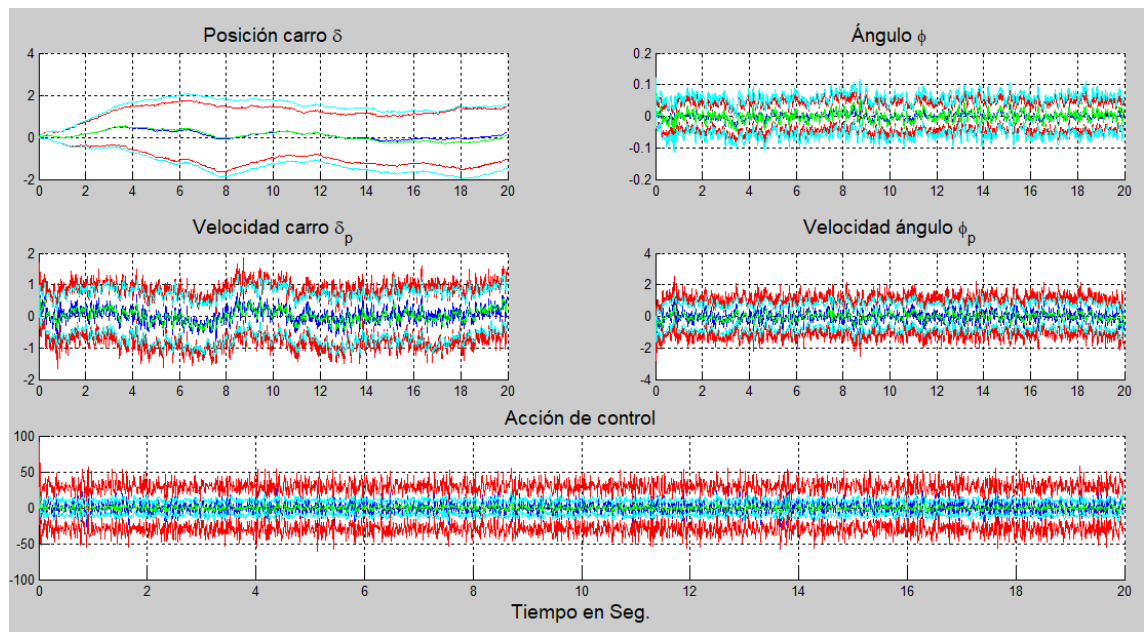
Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=38426.6663$. $f_i(1)=0.89761$. $\sigma = 0.01$

- **Ruido $\sigma=0.05$ y condición inicial $\phi=0.1$ [rad]**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)

Con un ruido mayor el estimador de Luenberger tiene una menor dispersión que el Kalman en lo que respecta al ángulo ϕ y la posición del carro, sus medias se comportan de manera similar. Pero la acción de control y las velocidades poseen una mayor dispersión y valores transitorios más grandes que el Kalman.



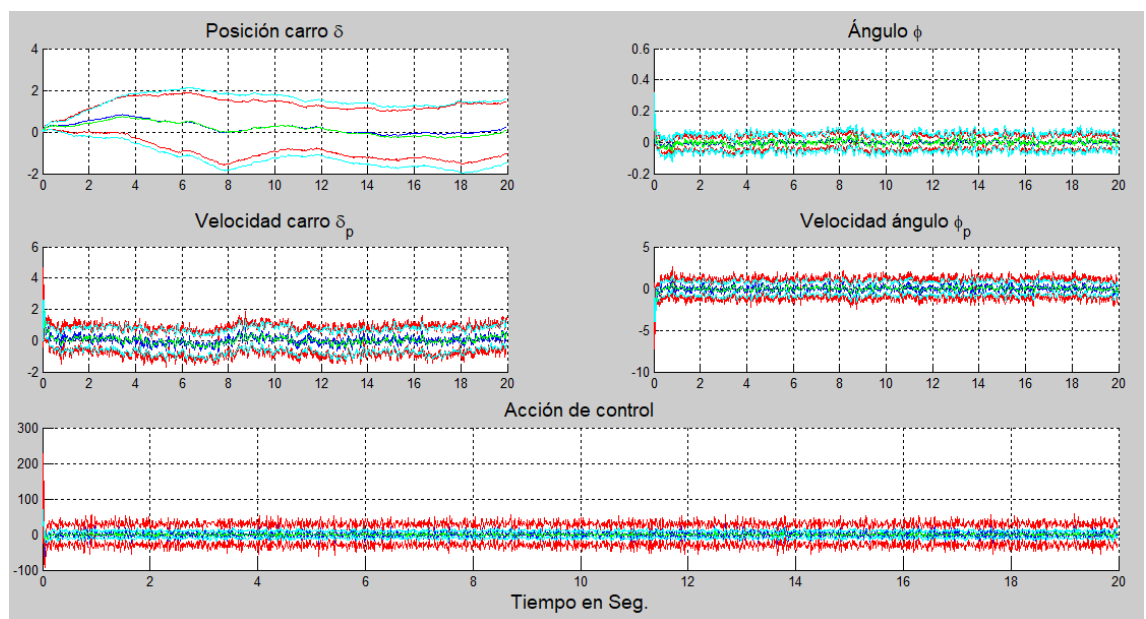
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=7102593.2068$. $f_i(1)=0.088047$. $\sigma = 0.05$

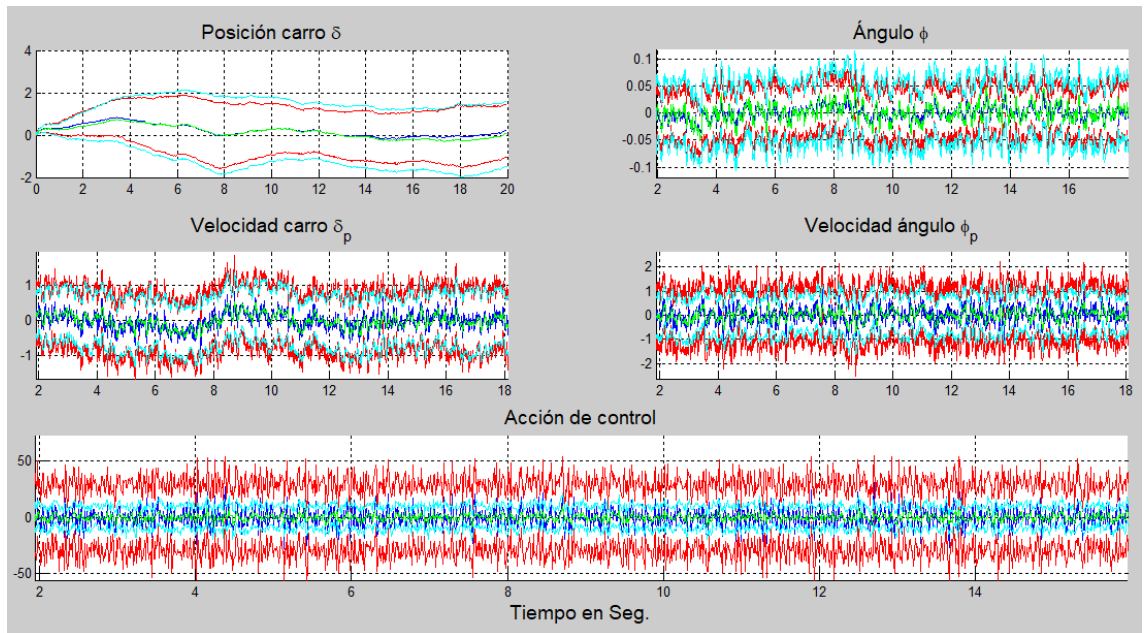
Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=25404.9886$. $f_i(1)=0.088047$. $\sigma = 0.05$

- **Ruido $\sigma=0.05$ y condición inicial $\phi=0.3[\text{rad}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)





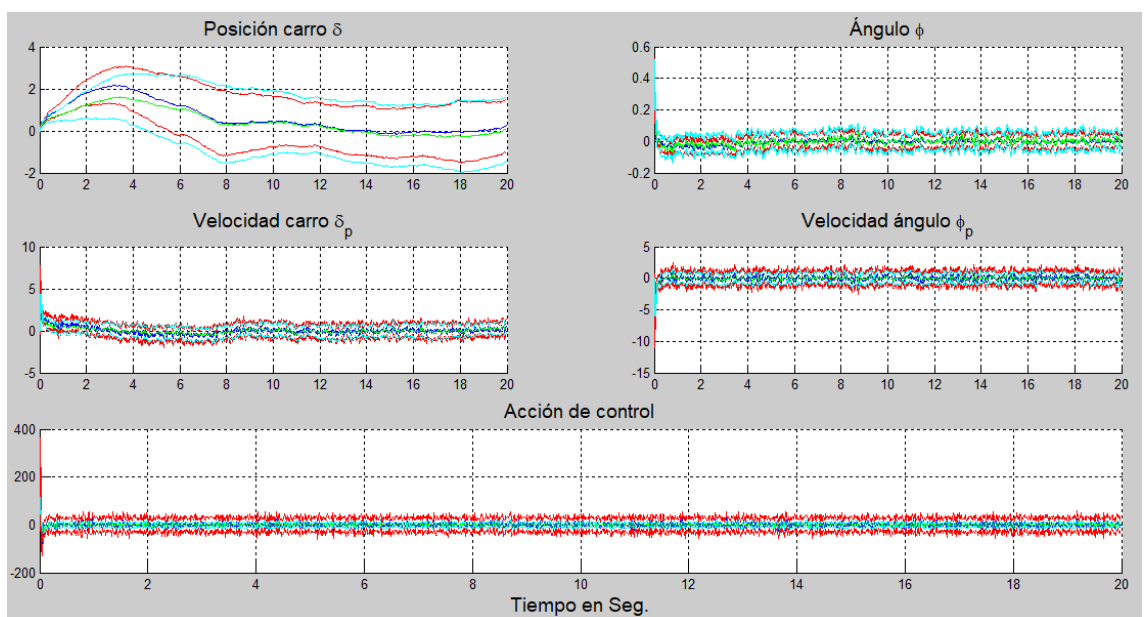
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=7150752.94$. $fi(1)=0.28805$. $\sigma = 0.05$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=25594.3497$. $fi(1)=0.28805$. $\sigma = 0.05$

- **Ruido $\sigma=0.05$ y condición inicial $\phi=0.5[\text{rad}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



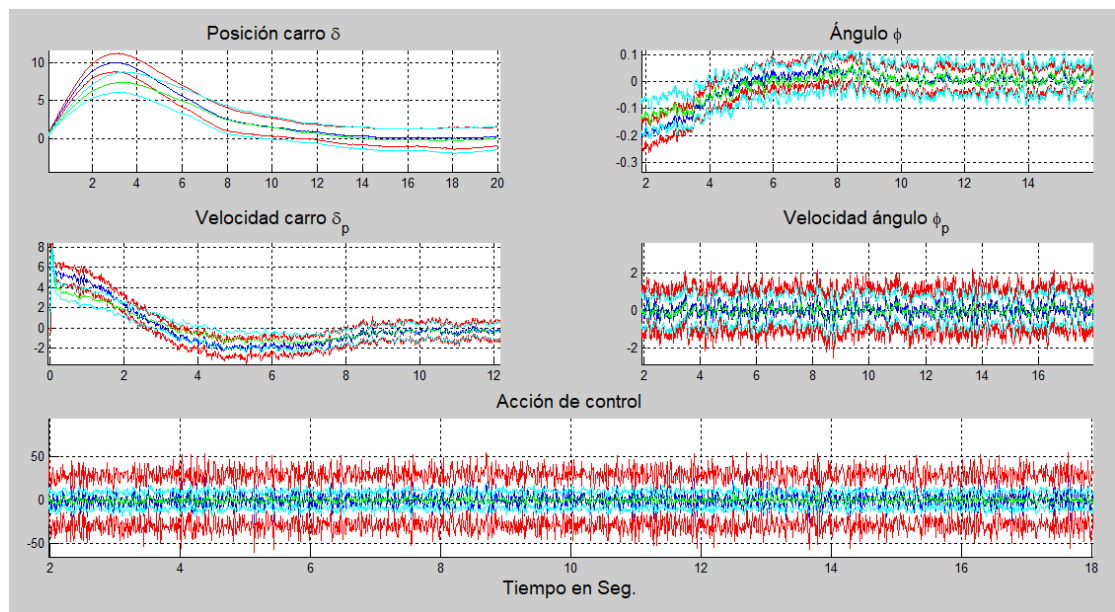
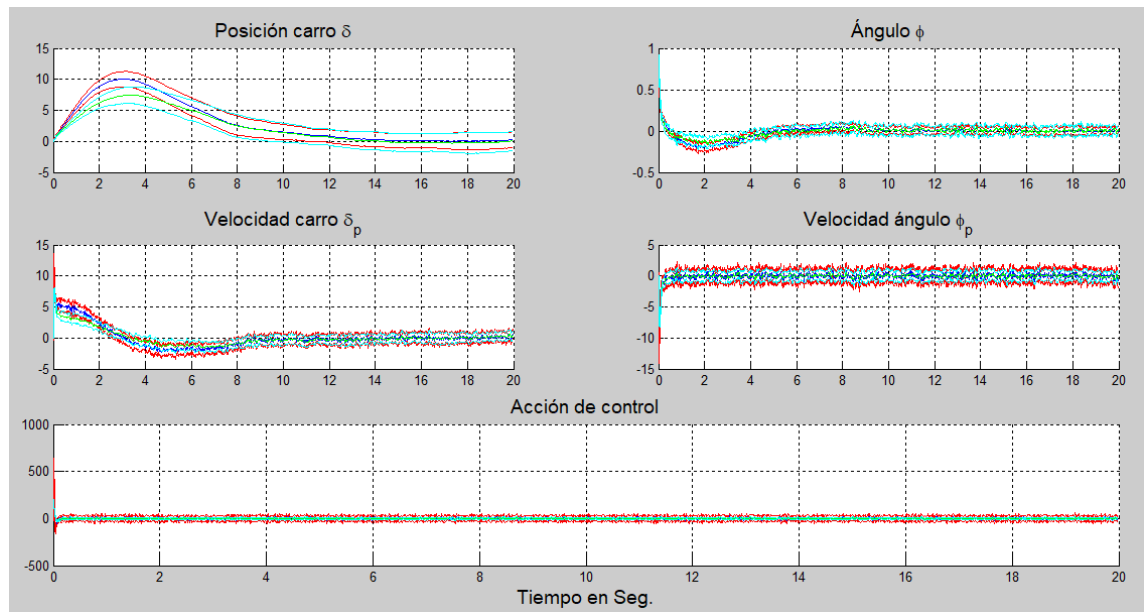
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=7246389.3393$. $f_i(1)=0.48805$. $\sigma = 0.05$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=26780.9762$. $f_i(1)=0.48805$. $\sigma = 0.05$

- **Ruido $\sigma=0.05$ y condición inicial $\phi=0.9[\text{rad}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=7590175.376$. $f_i(1)=0.88805$. $\sigma = 0.05$

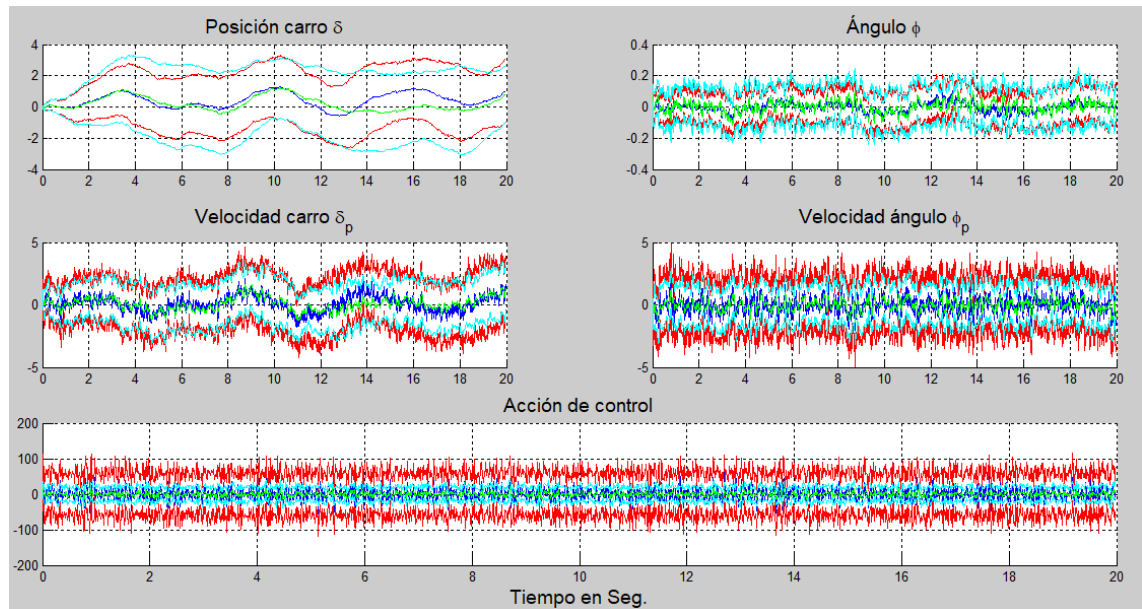
Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=54601.299$. $f_i(1)=0.88805$. $\sigma = 0.05$

- **Ruido $\sigma=0.1$ y condición inicial $\phi=0.1$ [rad]**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)

Se puede observar que con un ruido lo suficientemente grande ya los dos estimadores presentan una pequeña oscilación de la media en la posición del carro y el ángulo ϕ . Aunque el Kalman a partir de los 14 segundos tiene un comportamiento menos oscilatorio en lo que respecta a la posición del carro y el ángulo ϕ .



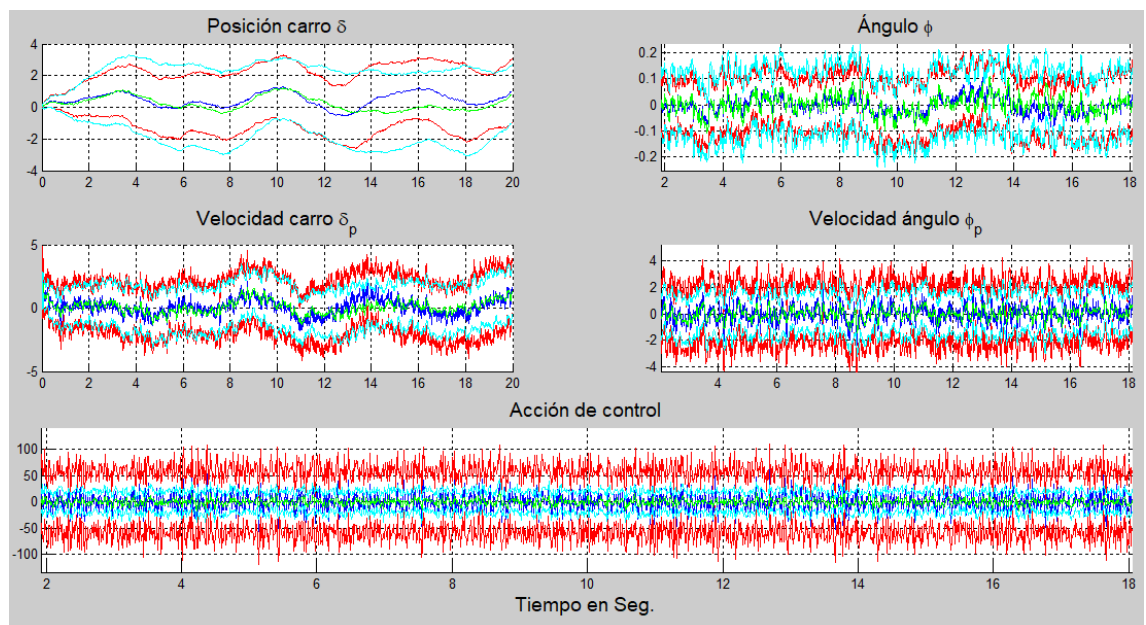
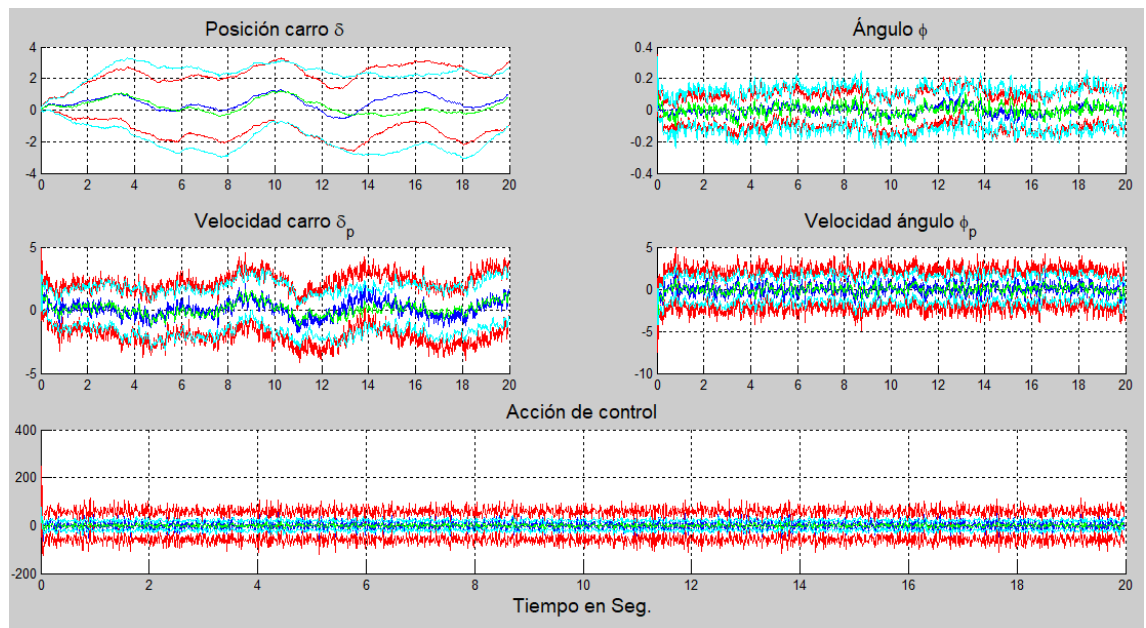
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=28226310.6189$. $f_i(1)=0.076094$. $\sigma = 0.1$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=85236.0352$. $f_i(1)=0.076094$. $\sigma = 0.1$

- **Ruido $\sigma=0.1$ y condición inicial $\phi=0.3$ [rad]**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



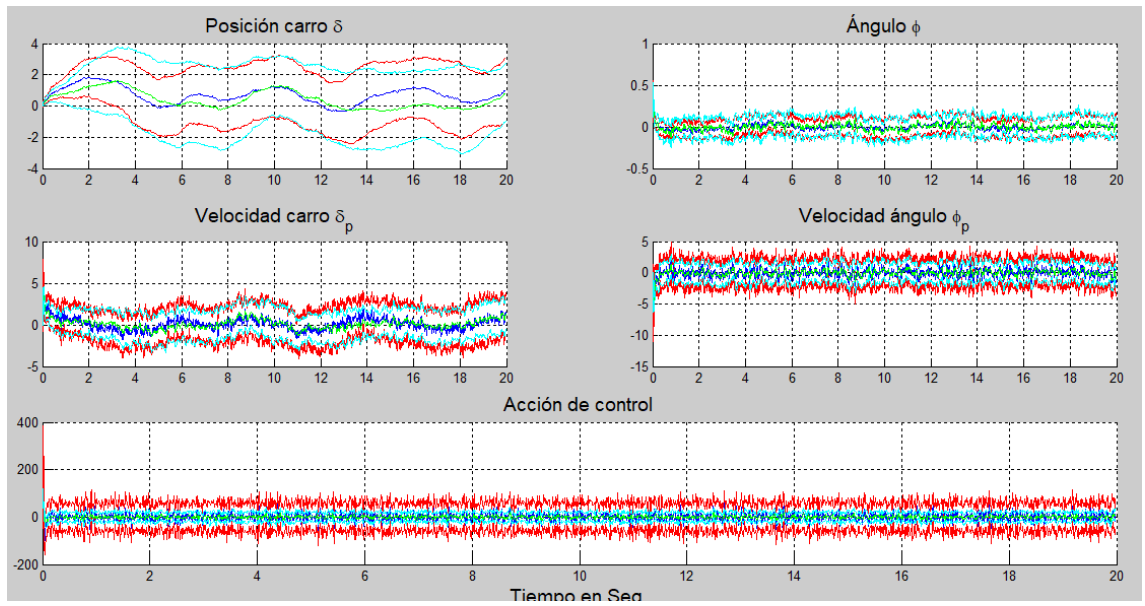
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=28272627.1742$. $fi(1)=0.27609$. $\sigma = 0.1$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=85377.7648$. $fi(1)=0.27609$. $\sigma = 0.1$

- **Ruido $\sigma=0.1$ y condición inicial $\phi=0.5[\text{rad}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



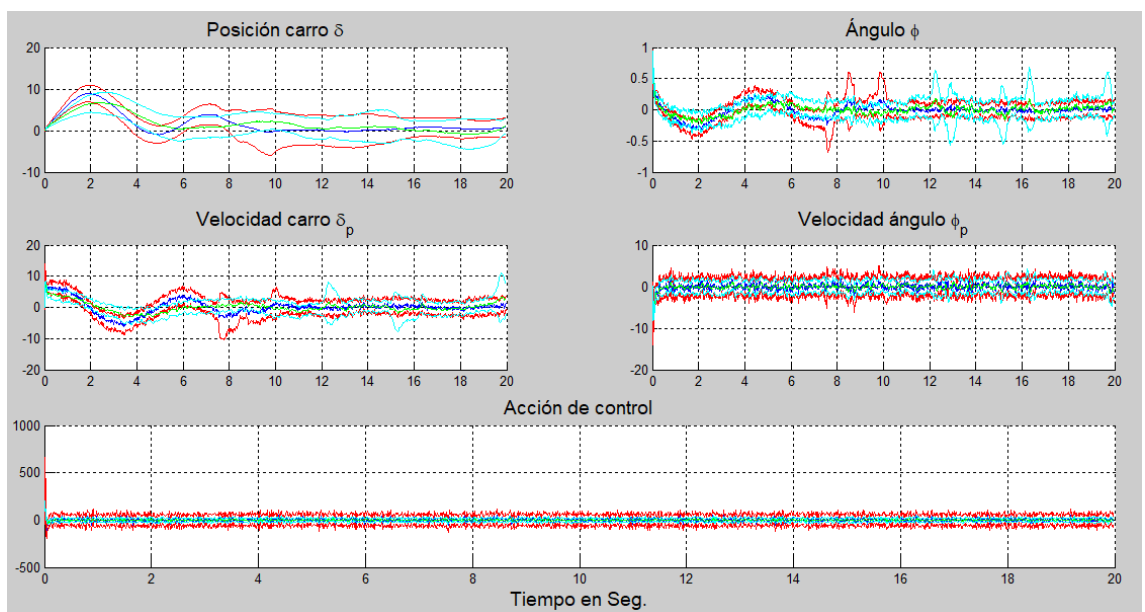
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=28364711.7476$. $fi(1)=0.47609$. $\sigma = 0.1$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=86581.4933$. $fi(1)=0.47609$. $\sigma = 0.1$

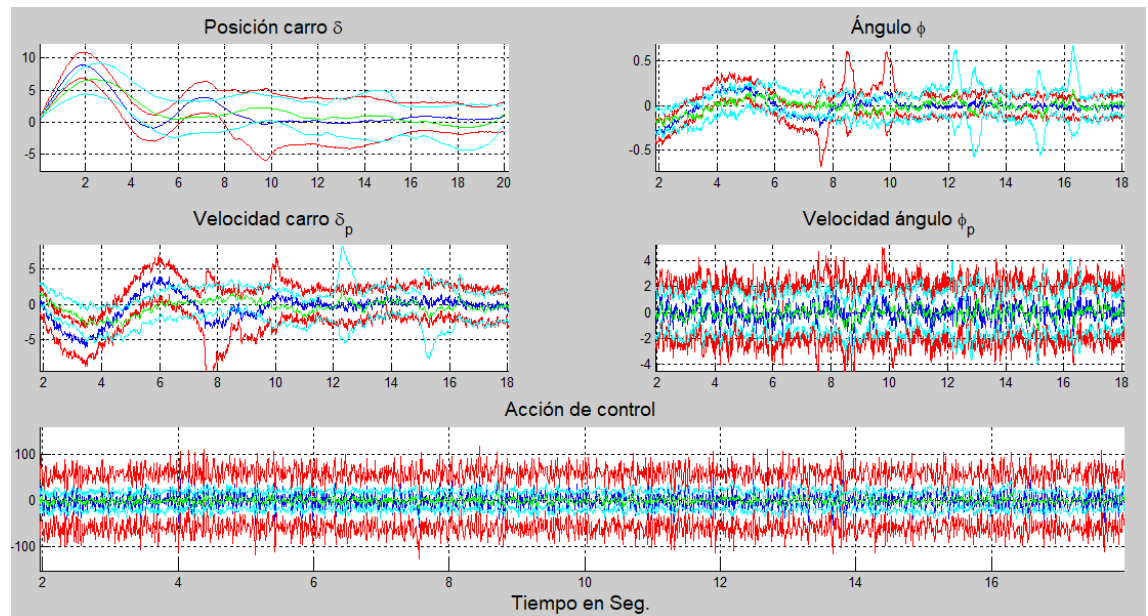
- **Ruido $\sigma=0.1$ y condición inicial $\phi=0.9[\text{rad}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



Se puede observar que el ángulo ϕ tiene picos en ambos estimadores, tanto en su media como su varianza, lo que implica que se sale de su punto de equilibrio inestable, es decir que se “cae”. Si bien el Kalman por su predicción de uno puede presentar mayores “caídas”, pero es recompensado con su acción de control mucho menor que la que posee el estimador de Luenberger que es totalmente irrealizable.



Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=28836062.3482$. $f_i(1)=0.87609$. $\sigma = 0.1$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=147165.2161$. $f_i(1)=0.87609$. $\sigma = 0.1$

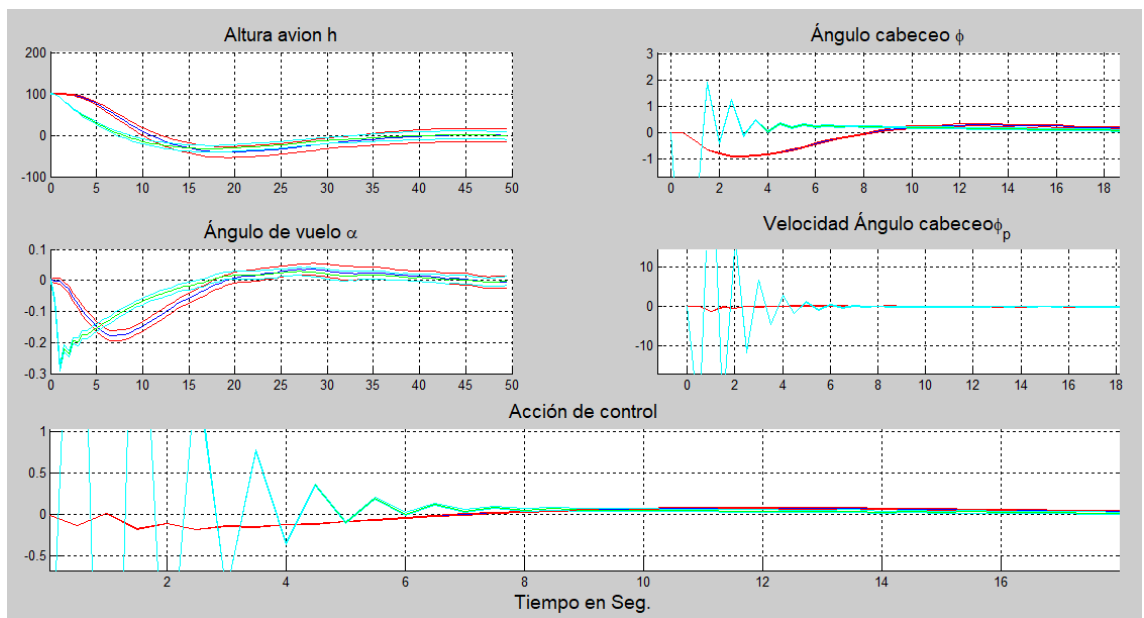
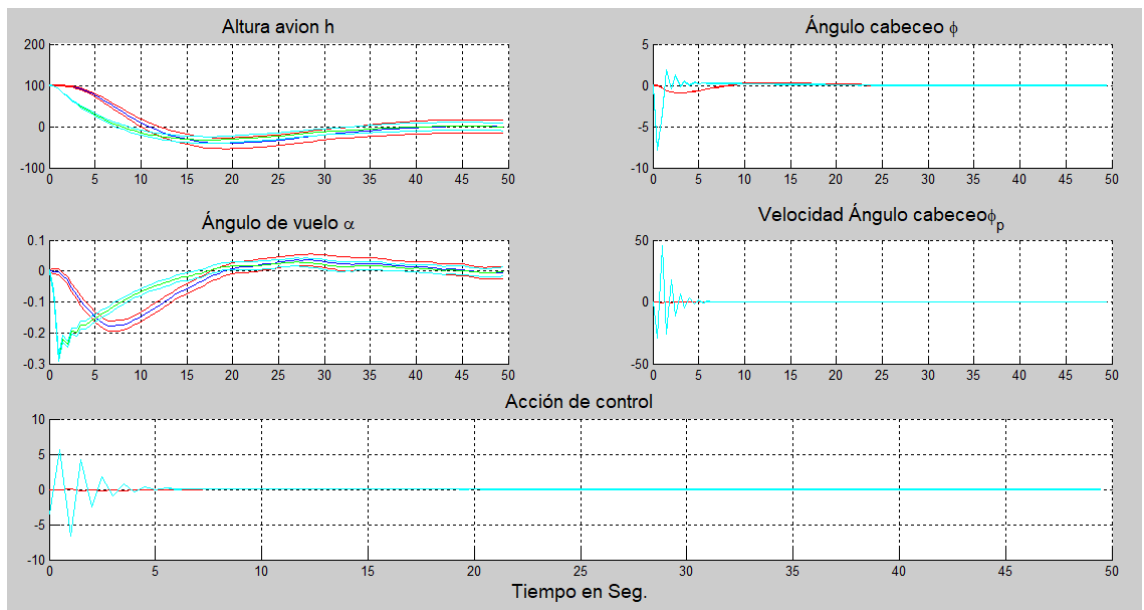
El segundo caso para comparar es el **sistema de control altura de vuelo de un avión** con referencia nula, al cual se sometió a distintas condiciones iniciales y distintas magnitudes de ruido, en las siguientes imágenes se superponen las dos simulaciones, la respuesta del estimador de Luenberger y el de Kalman.

- **Ruido $\sigma=0.01$ y condición inicial altura $h=100[\text{m}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)

Si bien en este caso el estimador de llega más rápido a la altura “cero”, su acción de control y ángulo de cabeceo es demasiado abrupta. En este caso el Luenberger es mejor ya que cumple con la limitación física del accionador que es el timón, el cual sólo posee unos $0.3[\text{rad}]$ de grados de libertad.

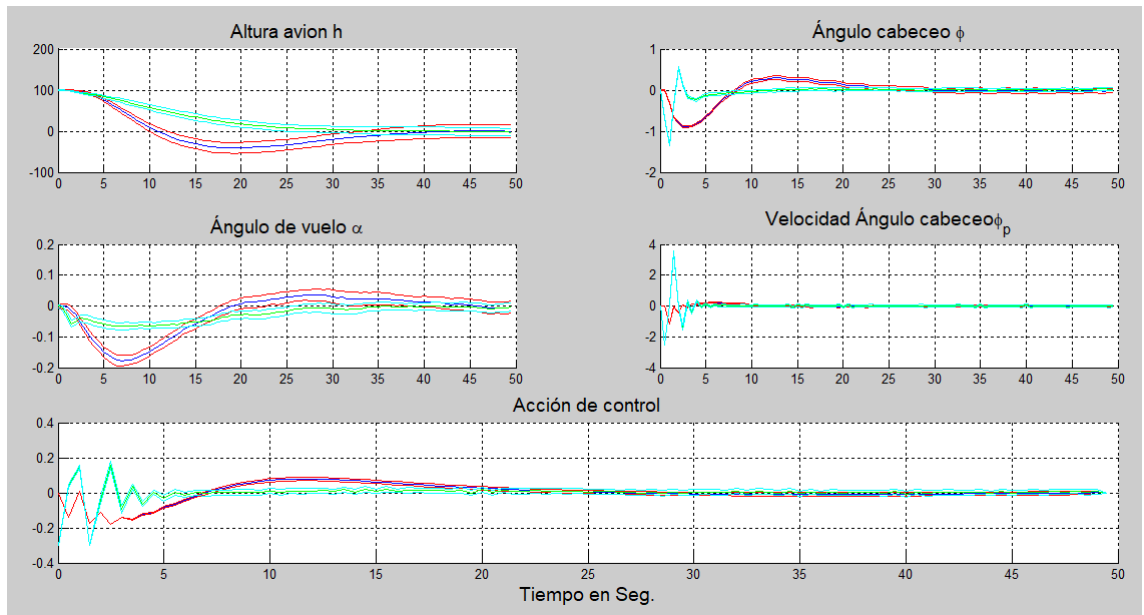


Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=249021.4513$. $h(1)=100.0007$. $./\sigma = 0.01$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=110585.9063$. $h(1)=100.0007$. $./\sigma = 0.01$

Considerando que el timón no puede superar los $0.3[\text{rad}]$, se forzó a que ambos estimadores lo cumplan.

Aun con la limitación el estimador de kalman presentó un mejor desempeño, descendió de altura sin sobrepaso por cero y presenta una menor dispersión. EL ángulo de vuelo también presenta un menor pendiente entre los segundos de 3 a 30 segundos. Sin embargo, su ángulo de cabeceo presenta pendientes más elevadas que el Luenberger, lo que se traduce en turbulencia en el “piloto”



Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=249021.4513$. $h(1)=100.0007$. $./\sigma = 0.01$

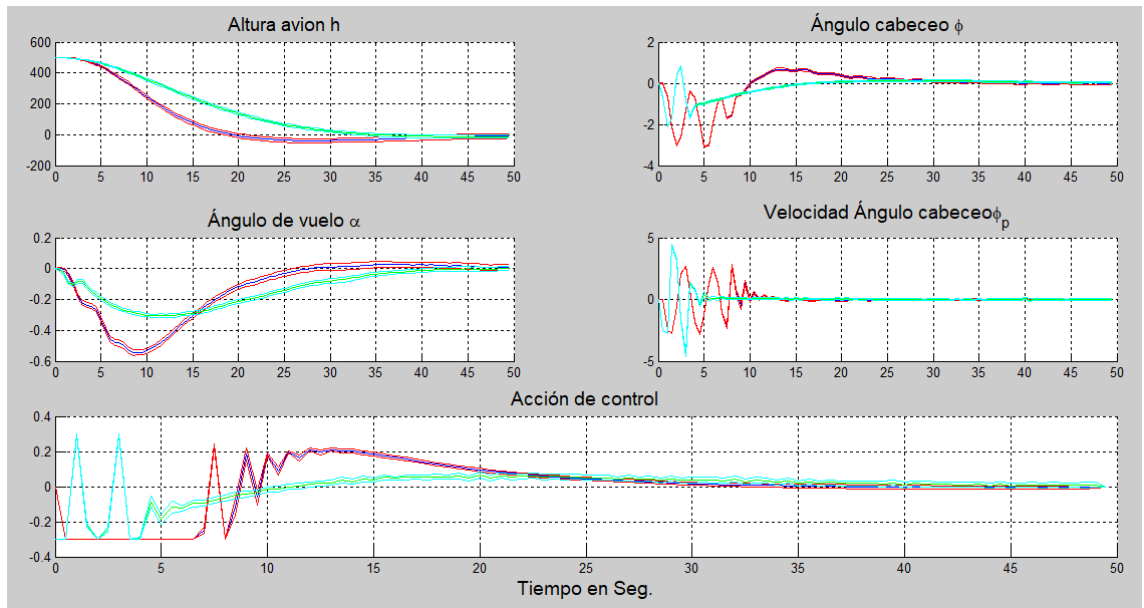
Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=196844.133$. $h(1)=100.0007$. $./\sigma = 0.01$

Se puede observar que el valor de costo del Estimador de Kalman aumenta cuando se limita acción de control, de todas manera el resto de las simulaciones se las realizó teniendo en cuenta la limitación física.

- **Ruido $\sigma=0.01$ y condición inicial altura $h=500[m]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



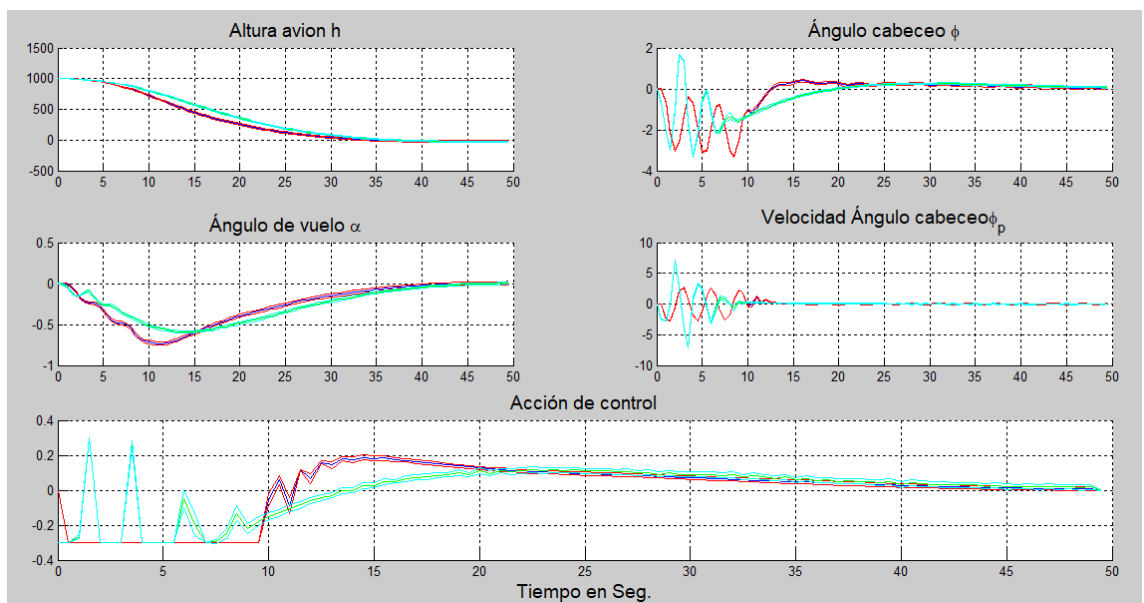
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=4307323.771$. $h(1)=500.0007$. $\sigma = 0.01$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=5610640.6061$. $h(1)=500.0007$. $\sigma = 0.01$

- **Ruido $\sigma=0.01$ y condición inicial altura $h=1000[m]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



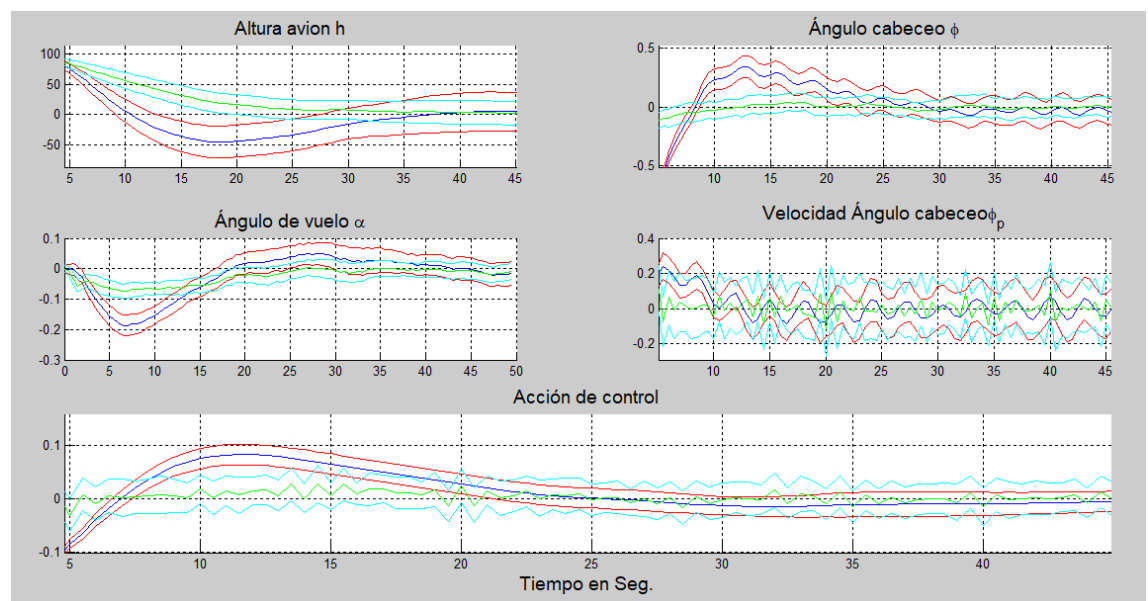
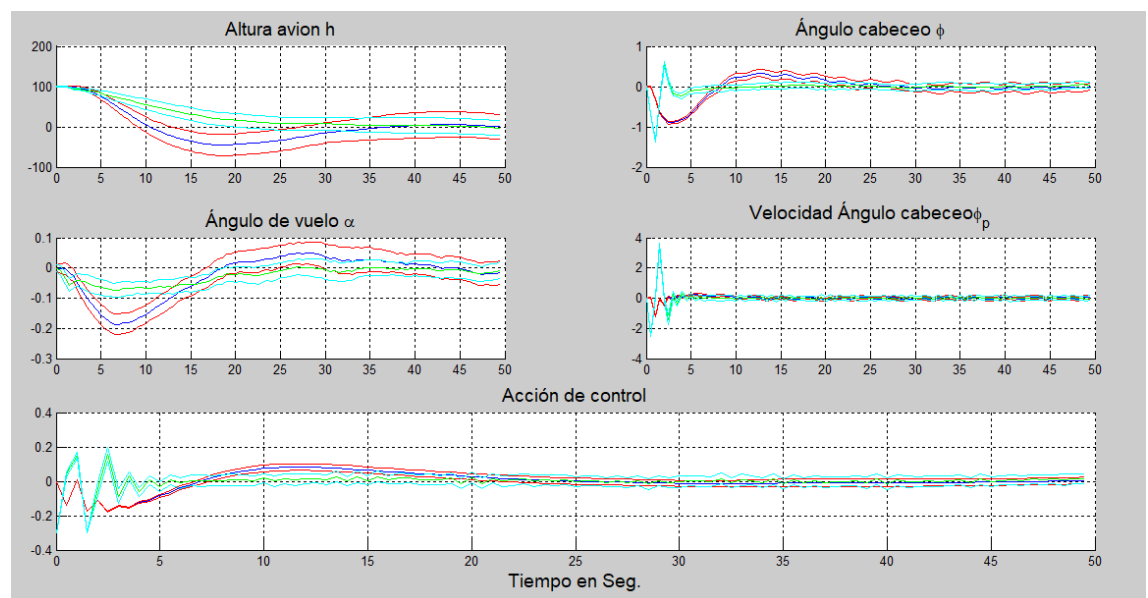
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=22805592.9852$. $h(1)=1000.0007$. $./\sigma = 0.01$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=26057186.919$. $h(1)=1000.0007$. $./\sigma = 0.01$

- **Ruido $\sigma=0.02$ y condición inicial altura $h=100$ [m]**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



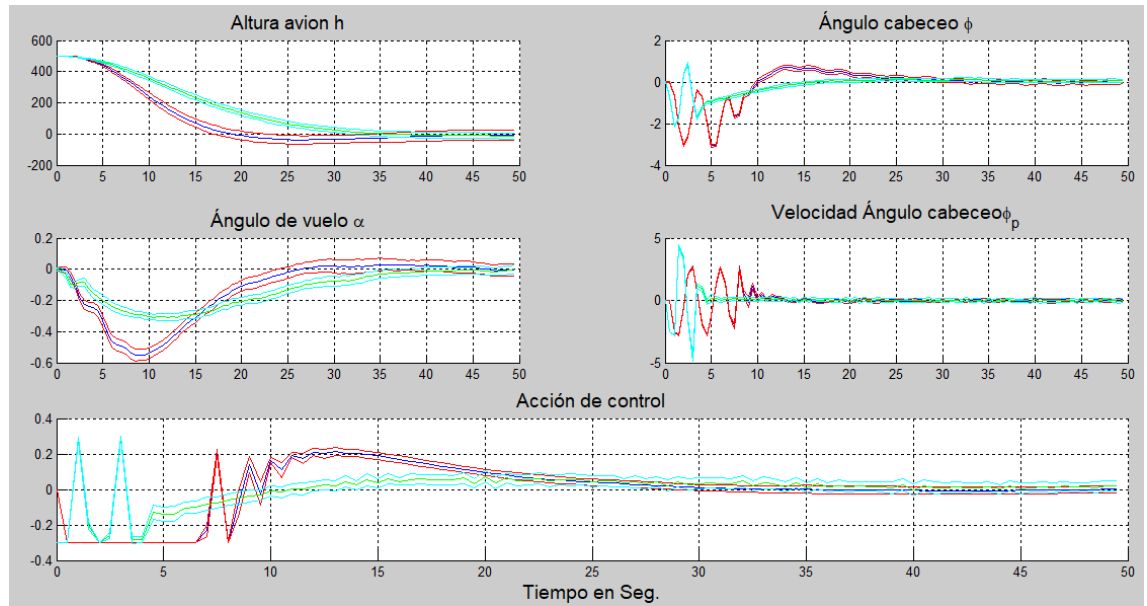
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=447548.655$. $h(1)=100.0014$. $./\sigma = 0.02$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=263339.6486$. $h(1)=100.0014$. $\sigma = 0.02$

- **Ruido $\sigma=0.02$ y condición inicial altura $h=500$ [m]**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



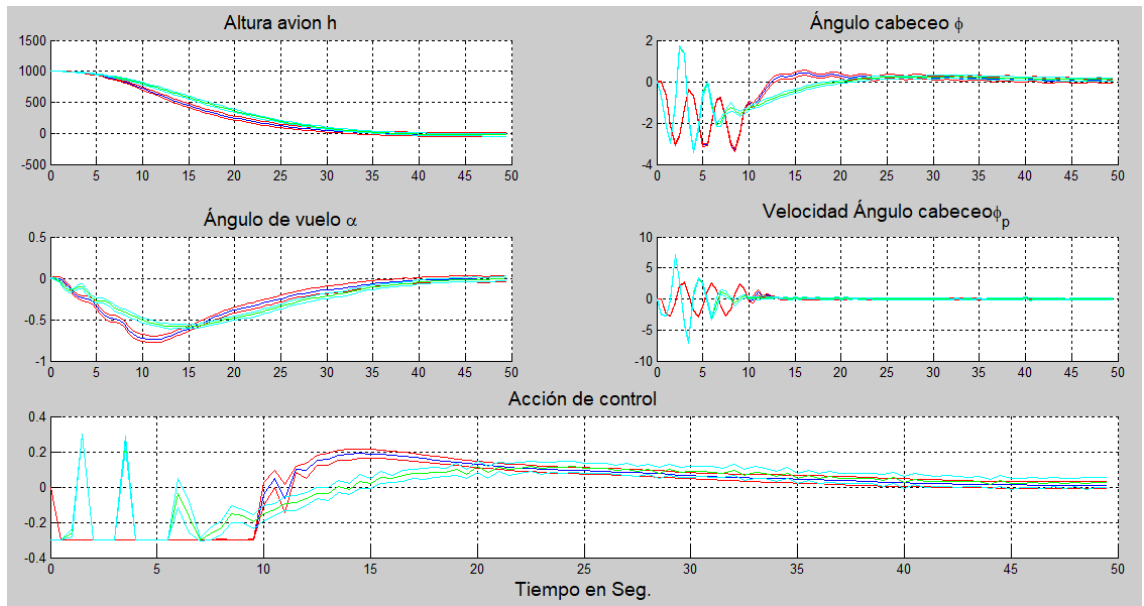
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=4476664.0034$. $h(1)=500.0014$. $\sigma = 0.02$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=5640027.9866$. $h(1)=500.0014$. $\sigma = 0.02$

- **Ruido $\sigma=0.02$ y condición inicial altura $h=1000$ [m]**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



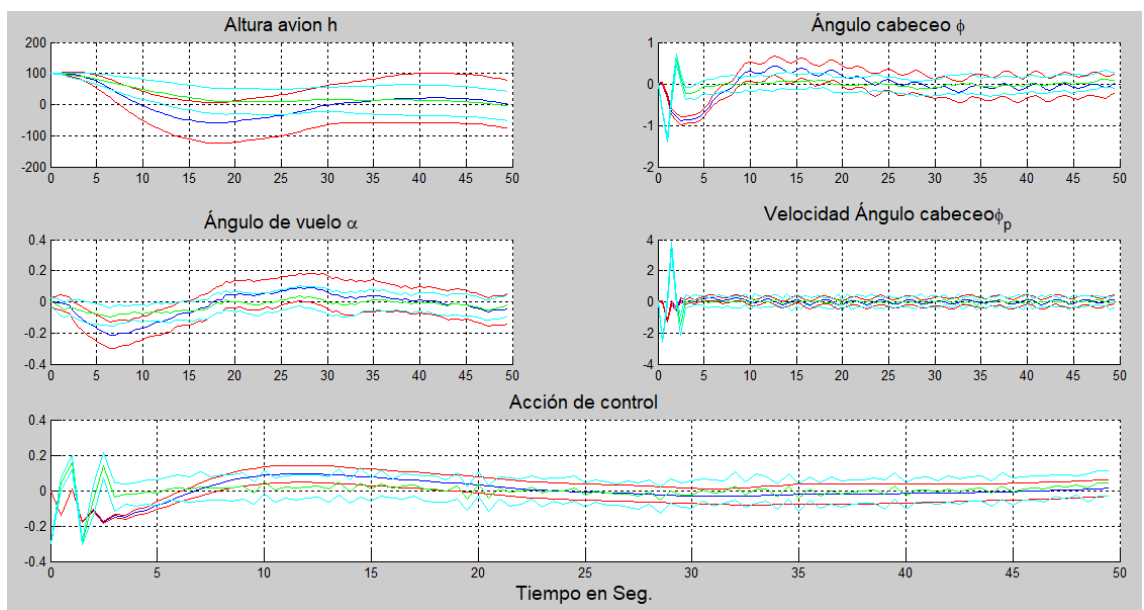
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=22904229.0224$. $h(1)=1000.0014$. $./\sigma = 0.02$

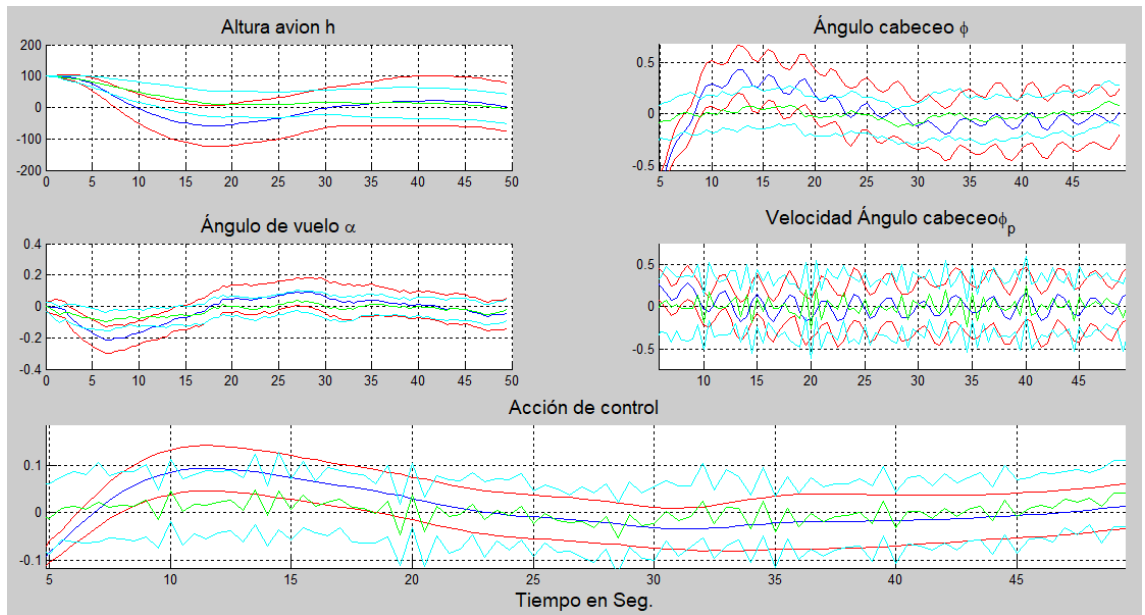
Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=26164193.9034$. $h(1)=1000.0014$. $./\sigma = 0.02$

- **Ruido $\sigma=0.05$ y condición inicial altura $h=100$ [m]**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)





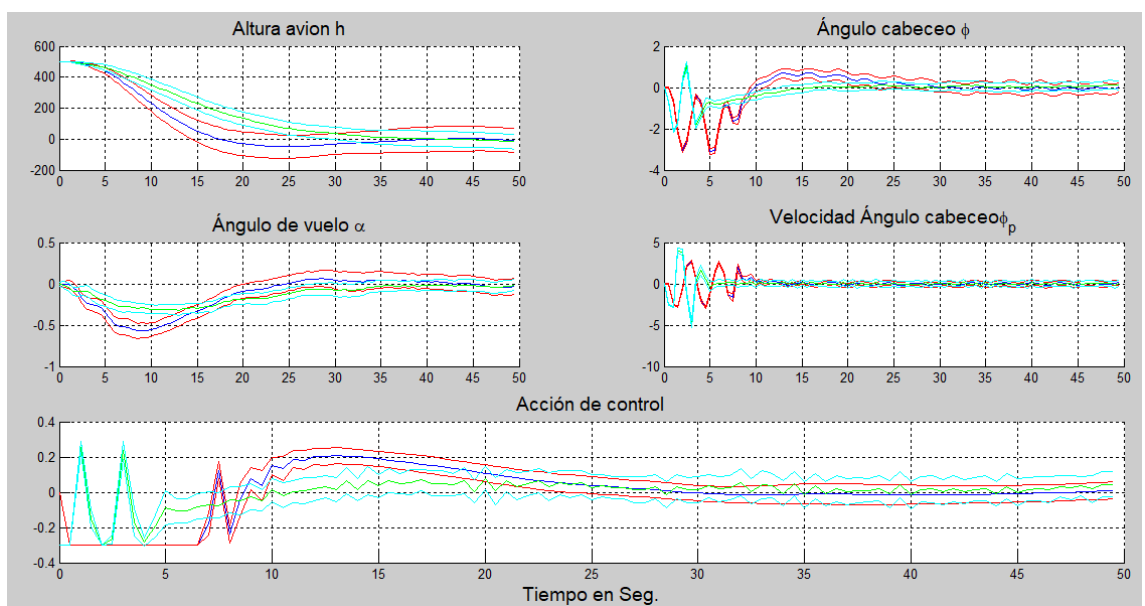
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=1840179.7745$. $h(1)=100.0034$. $\sigma = 0.05$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=773103.1645$. $h(1)=100.0034$. $\sigma = 0.05$

- **Ruido $\sigma=0.05$ y condición inicial altura $h=500[m]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



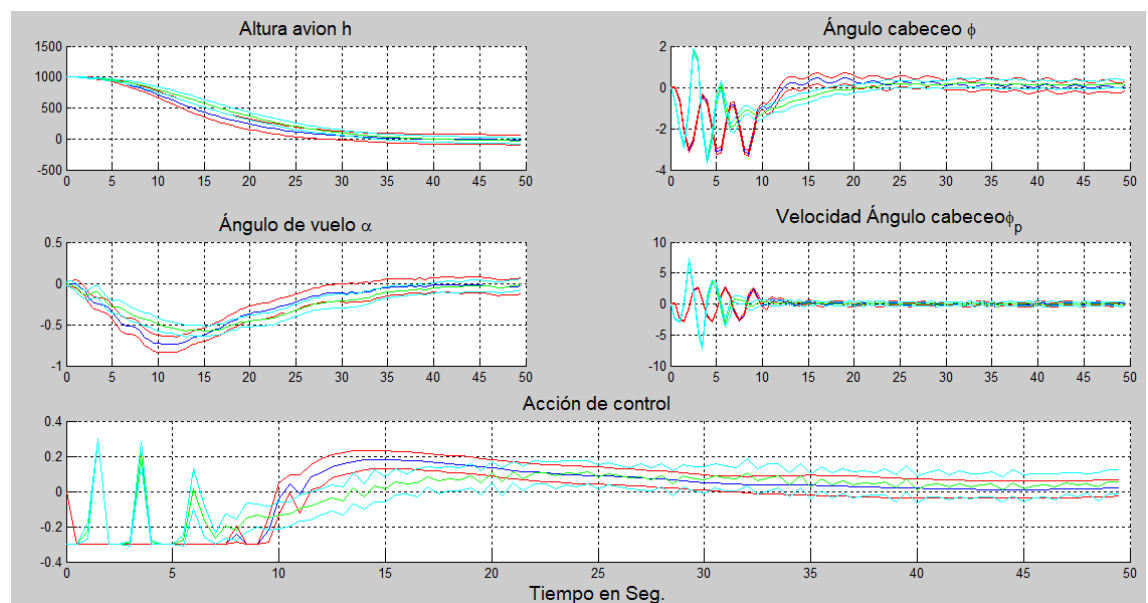
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=5984886.4962$. $h(1)=500.0034$. $./\sigma = 0.05$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=6123838.9471$. $h(1)=500.0034$. $./\sigma = 0.05$

- **Ruido $\sigma=0.05$ y condición inicial altura $h=1000[m]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



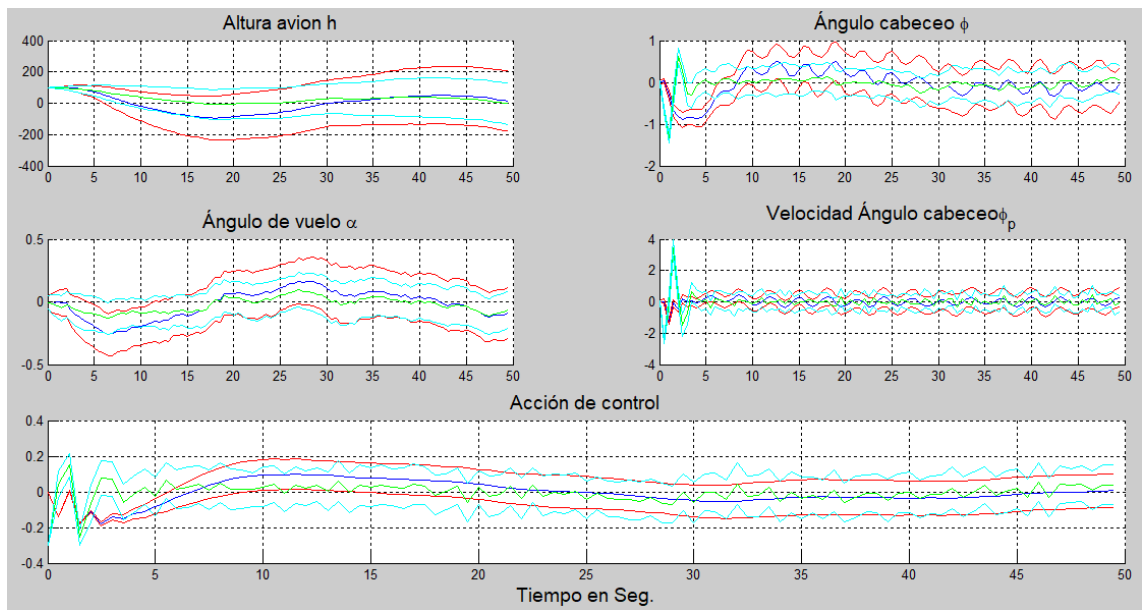
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=24268509.1997$. $h(1)=1000.0034$. $./\sigma = 0.05$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=26940194.5597$. $h(1)=1000.0034$. $./\sigma = 0.05$

- **Ruido $\sigma=0.1$ y condición inicial altura $h=100[m]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



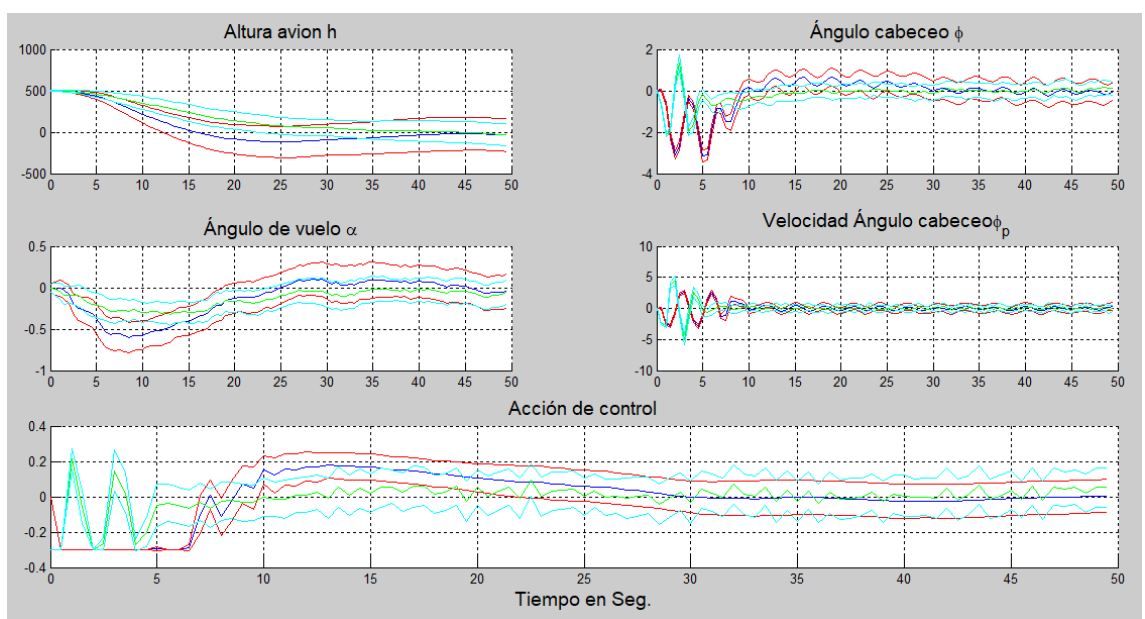
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=8528829.9977$. $h(1)=100.0069$. $\sigma = 0.1$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=3832183.6584$. $h(1)=100.0069$. $\sigma = 0.1$

- **Ruido $\sigma=0.1$ y condición inicial altura $h=500[\text{m}]$**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



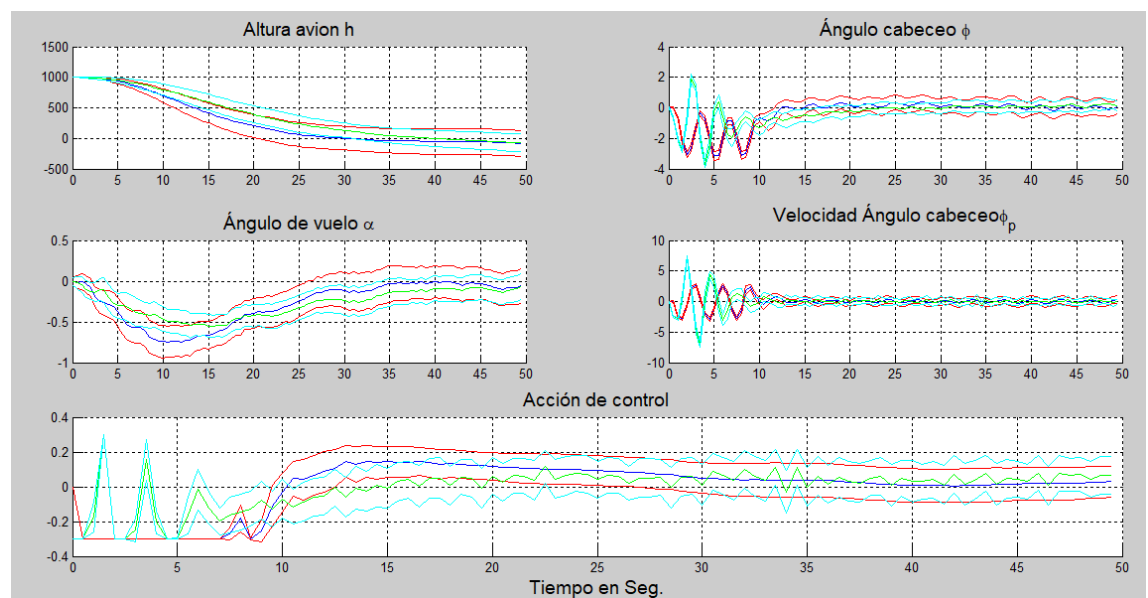
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=15337782.2365$. $h(1)=500.0069$. $./\sigma = 0.1$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=9496481.0005$. $h(1)=500.0069$. $./\sigma = 0.1$

- **Ruido $\sigma=0.1$ y condición inicial altura $h=1000$ [m]**

Colores de las gráficas:

- Observador de Luenberger:
 - Valor medio (azul)
 - Varianza(rojo)
- Estimador de Kalman
 - Valor medio (verde)
 - Varianza(cian)



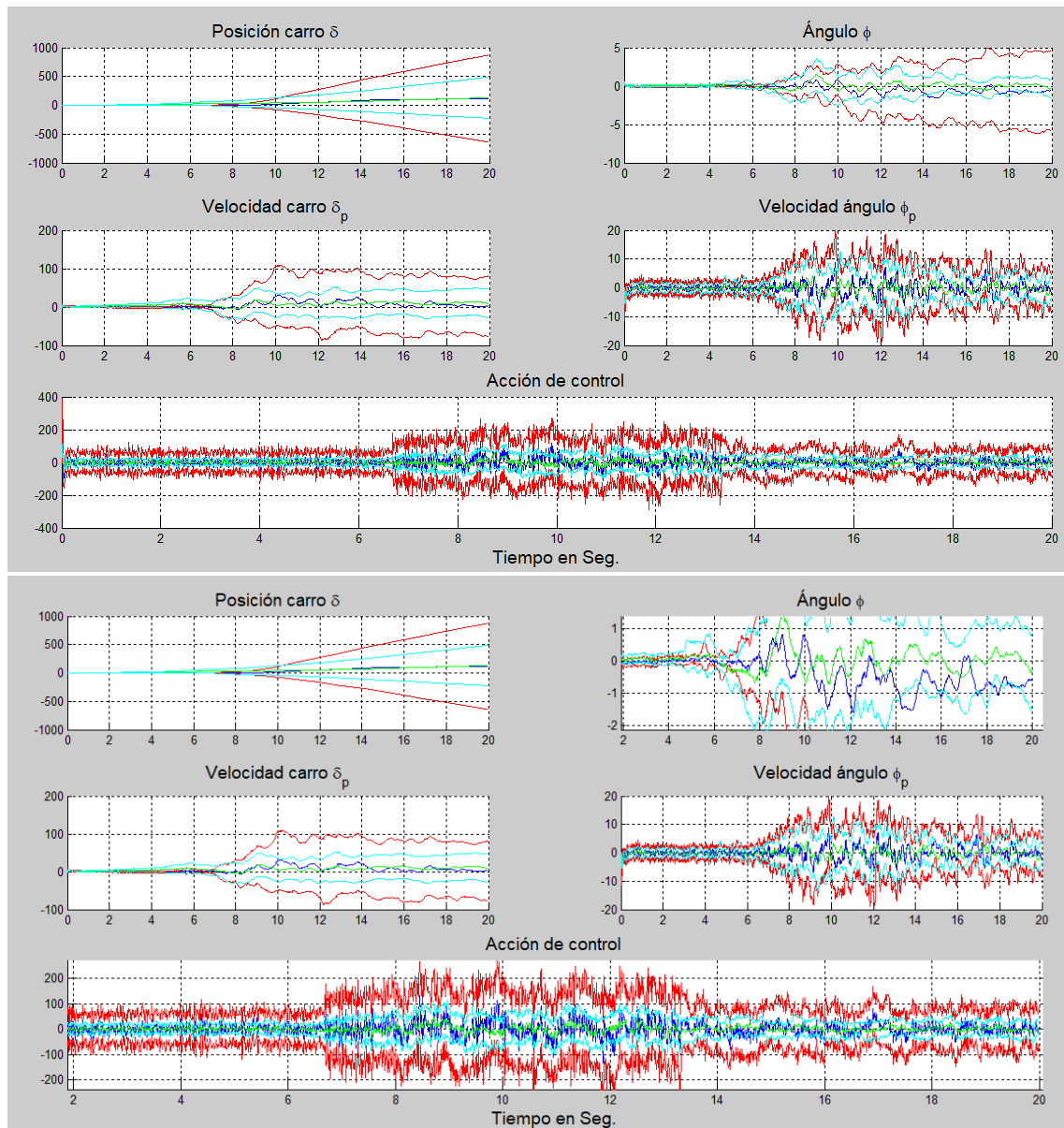
Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=33746608.8595$. $h(1)=1000.0069$. $./\sigma = 0.1$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=32194255.0523$. $h(1)=1000.0069$. $./\sigma = 0.1$

- Dividir en 3 al tiempo de simulación, inicia con F y G definidas, en la segunda etapa F y G al doble, y en la tercer etapa, F y G como al inicio. Definir si es posible calcular la ganancia de Kalman de estado estacionario, o hay que calcularla en línea.

Primer Caso: Péndulo Invertido

Sigma = 0.5 y ángulo inicial = 0.5[rad]



Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=963686977.0111$. $f_i(1)=0.47609$. $\sigma = 0.1$

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=219136674.5493$. $f_i(1)=0.47609$. $\sigma = 0.1$

Ambos sistemas presentan una mayor inestabilidad, sin embargo el Kalman se mantiene más cercano al equilibrio.

kalman etapa 1

0.7517	-0.2458
0.5691	-0.1147
-0.2483	0.7542
-0.1463	0.8799

kalman etapa 2

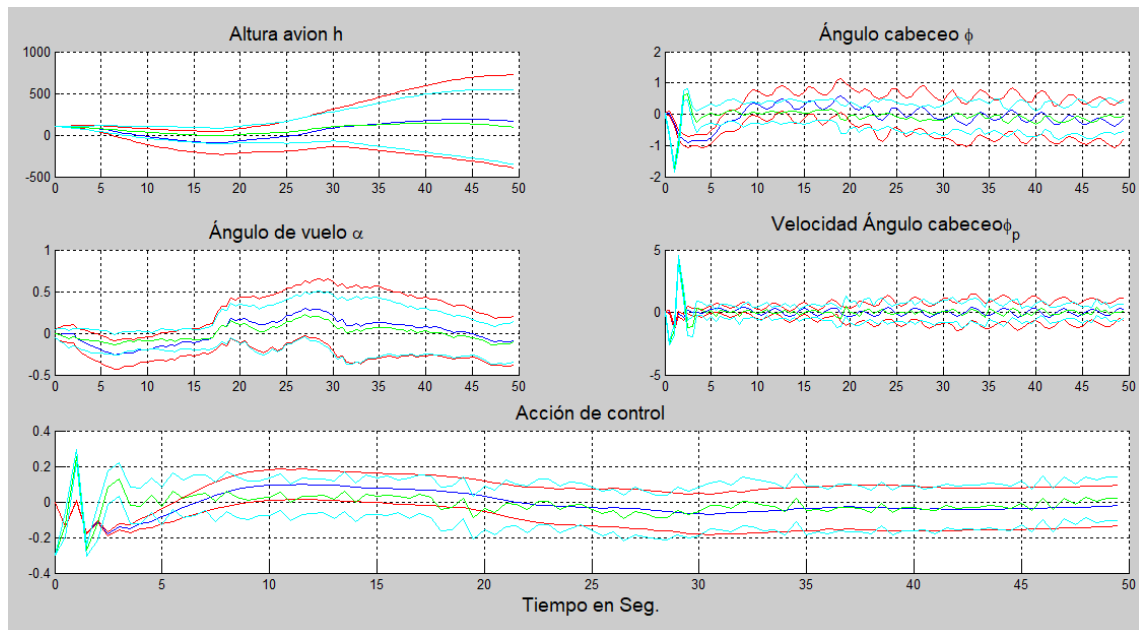
0.7499	-0.2498
0.0062	-0.0086
-0.2501	0.7502
-0.0258	0.0773

kalman etapa 3

0.7499	-0.2498
0.0062	-0.0086
-0.2501	0.7502
-0.0258	0.0773

Segundo Caso: Avión

Con Sigma =0.1 y altura inicial de 100[m]



Luenberger: El valor de costo es $J_n(\text{end})=33027266.7834$. $h(1)=100.0069$.

Kalman: El valor de costo es $J_n(\text{end})=21100415.7681$. $h(1)=100.0069$.

```
kalman etapa 1
    0.0248   -0.0082
    0.0038    0.6589
    0.0398    0.0682
    1.0038   -0.3411
```

```
kalman etapa 2
    0.0248   -0.0070
    0.0043    0.5958
    0.0451   -0.2941
    1.0043   -0.4042
```

```
kalman etapa 3
    0.0248   -0.0070
    0.0043    0.5958
    0.0451   -0.2941
    1.0043   -0.4042
```

En esta situación en que el ruido se modifica al doble, el Luenberger posee una mayor dispersión al final y su valor medio no llega a cero. El Kalman por su parte se acerca más a cero en valor medio y presenta menor dispersión, sumado a que no tiene una oscilación tan acentuada como el Luenberger en el ángulo de cabeceo.

3. Explicitar una tabla, que indique el desempeño de cada controlador, con el funcional calculado mediante la expectativa de las realizaciones. Se recomiendan 50 en total.

Primer Caso: Péndulo Invertido

		Luenberger	Kalman	
Cond. Inicial	Sigma	Funcional de costo		Mejora K vs L
0,1	0,01	290730,4029	1236,4595	235,13
0,3	0,01	340074,0873	1424,5522	238,72
0,5	0,01	437672,4795	2679,3155	163,35
0,9	0,01	812621,3139	38426,6663	21,15
0,1	0,05	7102593,207	25404,9886	279,57
0,3	0,05	7150752,94	25594,3497	279,39
0,5	0,05	7246389,339	26780,9762	270,58
0,9	0,05	7590175,376	54601,299	139,01
0,1	0,1	28226310,62	85236,0352	331,15
0,3	0,1	28272627,17	85377,7648	331,15
0,5	0,1	28364711,75	86581,4933	327,61
0,9	0,1	28836062,35	147165,216	195,94

El funcional de costo acumulado en todos los casos es mayor y se incrementa cuando el ruido es más grande.

Segundo Caso: Avión

		Luenberger	Kalman	
Cond. Inicial	Sigma	Funcional	de costo	Mejora K vs L
100	0,01	249021,451	110585,906	2,25
100	0,01	249021,451	196844,133	1,27
500	0,01	4307323,77	5610640,61	0,77
1000	0,01	22805593	26057186,9	0,88
100	0,02	447548,655	263339,649	1,70
500	0,02	4476664	5640027,99	0,79
1000	0,02	22904229	26164193,9	0,88
100	0,05	1840179,77	773103,165	2,38
500	0,05	5984886,5	6123838,95	0,98
1000	0,05	24268509,2	26940194,6	0,90
100	0,1	8528830	3832183,66	2,23
500	0,1	15337782,2	9496481	1,62
1000	0,1	33746608,9	32194255,1	1,05

Cuando la condición inicial es 100 y sigma 0.01(naranja), es 2.25 más pequeño el funcional de costo del estimador de Kalman esto disminuye cuando se limita la acción de control. Se puede ver que en las situaciones de ruido menor de sigma=0.1 el estimador de Luenberger es mejor que el Kalman.

Conclusión

- El estimador de Kalman presenta menor dispersión en los valores finales
- Si se limita la acción de control el funcional de costo acumulado aumenta
- El Kalman presenta un funcional de costo menor al variar la magnitud de ruido
- La ganancia de Kalman puede modificarse y calcularse en línea, mejorando su desempeño