Trabajo Práctico N°2

Alumno:	Matías Patricio Arévalo
Docente:	Dr. Ing. Julián Pucheta
Cátedra:	Control Óptimo
Institución:	Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. Universidad Nacional de Catamarca
Año:	2025

Ejercicio N° 1:

Definir: A) Experimento aleatorio, dé sus características. B) Suceso elemental. C) Espacio de muestras, dé sus características en continua y en discreta. D) Definir matemáticamente Razón Frecuencial.

A)

Un experimento aleatorio es un proceso en la se mide alguna magnitud con diferentes instrumentos/sensores y nos produce diferentes resultados en la medición.

Una definición más formal: un experimento aleatorio es un proceso o acción que se lleva a cabo bajo condiciones controladas y cuyos resultados son inciertos. Aquí están algunas de sus características más importantes:

1. **Incertidumbre**: Los resultados del experimento no se pueden predecir con certeza antes de que se realice.
2. **Espacio muestral**: El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama espacio muestral.
3. **Eventos**: Un evento es un subconjunto del espacio muestral.
4. **Repetibilidad**: Un experimento aleatorio puede repetirse en las mismas condiciones, y cada repetición puede dar lugar a diferentes resultados.
5. **Probabilidad**: Cada posible resultado del experimento aleatorio tiene una cierta probabilidad asociada, que es la medida de la posibilidad de que ocurra. Las probabilidades deben cumplir con ciertas propiedades, como sumar 1 en total en el espacio muestral.
6. **Independencia**: En algunos experimentos, los resultados son independientes entre sí, lo que significa que el resultado de un intento no afecta el resultado de otro.
7. **Distribuciones**: Los resultados de experimentos aleatorios pueden seguir diferentes tipos de distribuciones (normal, binomial, etc.), lo que permite modelar la probabilidad de diferentes resultados.

B)

Un suceso elemental es un evento que consiste en un único resultado posible dentro de un experimento aleatorio. En términos de probabilidad, se refiere a un resultado en el espacio muestral que no se puede descomponer en otros resultados más simples. Algunas características clave de los sucesos elementales son:

1. **Unicidad**: Cada suceso elemental representa un resultado único.
2. **Parte del Espacio Muestral**: Los sucesos elementales son componentes del espacio muestral. El espacio muestral está formado por todos los sucesos elementales posibles del experimento.

3. **Probabilidad**: Cada suceso elemental tiene una probabilidad asociada.
4. **Construcción de Eventos**: Los eventos más complejos pueden construirse a partir de sucesos elementales.

En nuestro caso sería tomar una de las mediciones que de los sensores que se colocaron

C)

Espacio Muestral: Es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden surgir de un experimento aleatorio.

Espacio Muestral Discreto

1. **Definición**: El espacio muestral es discreto cuando contiene un número finito o contable de resultados posibles. Esto significa que los resultados pueden ser enumerados uno a uno.

2. **Elementos Contables**: Los elementos del espacio muestral discreto son contables, es decir, se pueden enumerar sin dejar ninguno fuera.

3. **Probabilidades**: Cada resultado tiene una probabilidad bien definida, y la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales en el espacio muestral es igual a 1.

4. **Función de Probabilidad**: En un espacio discreto, se puede usar una función de probabilidad que asigna a cada suceso elemental una probabilidad. Se puede representar como $P(X=x_i)$, donde x_i es un suceso elemental.

5. **Eventos**: Los eventos son subconjuntos del espacio muestral. Un evento puede ser un solo suceso elemental o una combinación de varios.

Espacio Muestral Continuo

1. **Definición**: El espacio muestral es continuo cuando contiene un número infinito no contable de resultados posibles. Esto ocurre cuando los resultados pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

2. **Elementos No Contables**: Los elementos del espacio muestral continuo no se pueden enumerar de forma explícita porque abarcan intervalos de valores en lugar de puntos discretos

3. **Probabilidades**: En un espacio continuo, no se asigna probabilidad a un único resultado, ya que la probabilidad de que un evento ocurra en un solo punto es cero. En su lugar, se asigna probabilidad a intervalos de valores.

4. **Función de Densidad**: Se utiliza una función de densidad de probabilidad (PDF) para describir la probabilidad de que un resultado caiga dentro de un intervalo específico. La integral de esta función sobre un intervalo da la probabilidad de que el resultado se encuentre en ese intervalo.

5. **Eventos**: Al igual que en el caso discreto, los eventos son subconjuntos del espacio muestral.

D)

$$P(A) = lim_{N\rightarrow\infty} \frac{N_A}{N}$$

Ejercicio N° 2:

Defina matemáticamente: A) Función de probabilidad. B) Sucesos disjuntos. C) Sucesos independientes. D) Probabilidad condicional. E) Probabilidad disjunta. F) Eventos mutuamente excluyentes.

A) Función de probabilidad

$$F_x(\alpha) = P(x_\omega \leq \alpha), \omega \in \Omega$$

$$0 \leq F_x(\alpha) \leq 1$$

B) Sucesos disjuntos

Dos eventos A y B de un mismo espacio muestral

$$P(A) \cap P(B) = \emptyset$$

C) Sucesos independientes

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

D) Probabilidad condicional

$$P(B|A) = \frac{N_{A\cap B}}{N_A} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

E) Probabilidad disjunta

$$P(A) \cup P(B) = P(A) + P(B), si\ A\ y\ B\ son\ disjuntos$$

F) Eventos mutuamente excluyentes

$$P(A) \cap P(B) = \emptyset$$

Ejercicio N° 3:

Defina matemáticamente: A) Variable aleatoria. B) Distribución de probabilidad

gaussiana, uniforme y geométrica; establezca en cada caso sus características principales.

A) Variable aleatoria: es una función que asigna un número real a cada resultado de un experimento aleatorio.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

B) Distribución de probabilidad gaussiana: es una distribución de probabilidad continua caracterizada por su forma de campana. Se describe completamente por dos parámetros: la media m (promedio) y la desviación estándar σ.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}\right) dz$$

Características Principales:

- **Simetría**: Es simétrica respecto a la media.
- **Campana**: Tiene forma de campana, donde la mayoría de las observaciones se agrupan alrededor de la media.
- **Propiedades**: Aproximadamente el 68% de los datos cae dentro de 1 desviación estándar, el 95% dentro de 2 desviaciones estándar y el 99.7% dentro de 3 desviaciones estándar (regla empírica).

Distribución de probabilidad uniforme : puede ser discreta o continua, donde todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad.

Distribución Uniforme Discreta:

- Se puede definir en un conjunto finito de *n* resultados {x1,x2,...,xn}.
- La función de probabilidad es:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Distribución Uniforme Continua:

- Se define en un intervalo [a,b].
- La función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{para } a \leq x \leq b$$

Características Principales:

- **Igual Probabilidad**: Todos los resultados tienen la misma probabilidad (en el caso discreto) o densidad (en el caso continuo).
- **Análisis Simple**: La media y la varianza son fáciles de calcular:

- Media: $\mu = \frac{a+b}{2}$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

Distribución de probabilidad geométrica: es una distribución de probabilidad discreta que modela el número de ensayos necesarios para obtener el primer éxito en una serie de ensayos de Bernoulli (ensayos independientes con dos resultados posibles).

- **Función de Probabilidad**:

  $$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

  donde p es la probabilidad de éxito en cada ensayo.

Características Principales

Media: μ de la variable aleatoria geométrica se calcula como:

$$\mu = \frac{1}{p}$$

Esto indica que, en promedio, se necesitarán 1/p ensayos para esperar el primer éxito.

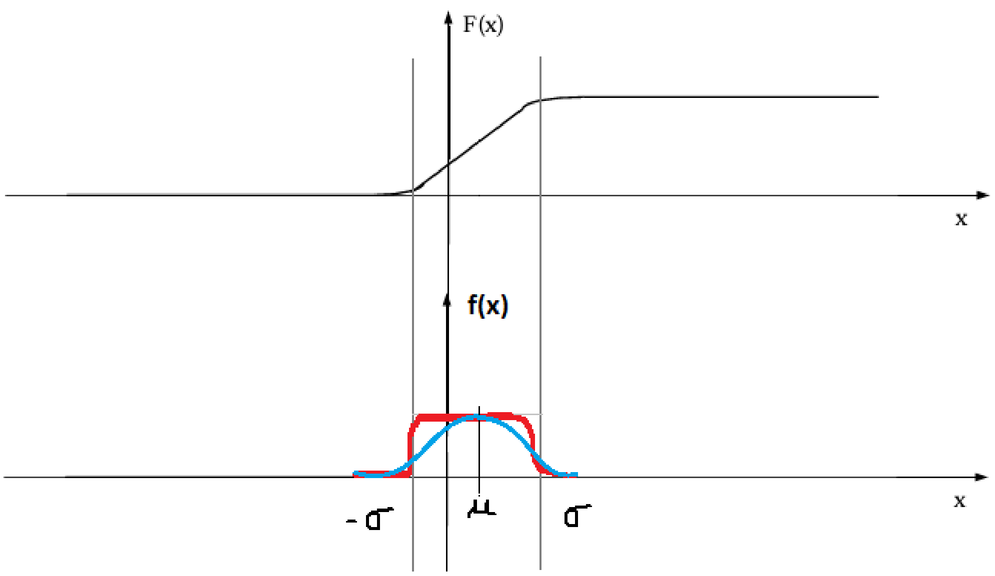
Varianza: σ^2 se calcula como:

$$\sigma^2 = \frac{1 - p}{p^2}$$

Esto describe la dispersión de la cantidad de ensayos necesarios hasta el primer éxito.

Ejercicio N° 4:

Dada la siguiente función de probabilidad acumulativa F(x), a) Construya gráficamente la función de probabilidad f(x). b) Ubique sobre el gráfico de f(x) el valor medio y la desviación estándar.



Ejercicio N° 5:

¿Cuál es la distribución de probabilidad de una señal aleatoria binaria?

La distribución de probabilidad de una señal aleatoria binaria generalmente se modela mediante la **distribución binomial** o la **distribución de Bernoulli**, dependiendo del contexto.

1. Distribución de Bernoulli

La distribución de Bernoulli es el caso más simple de una variable aleatoria binaria, donde sólo hay dos resultados posibles:

- **Éxito** (generalmente representado por 1)
- **Fracaso** (generalmente representado por 0)

Función de Probabilidad:

$$P(X = 1) = p \quad (\text{éxito})$$

$$P(X = 0) = 1 - p \quad (\text{fracaso})$$

donde p es la probabilidad de éxito ($0 \leq p \leq 1$).

2. Distribución Binomial

Si consideramos n ensayos independientes de una variable aleatoria binaria, donde se desea contar el número de éxitos, se utiliza la distribución binomial:

- **Número de intentos**: n
- **Éxitos**: k (donde k puede tomar valores de 0 a n)
- **Probabilidad de éxito**: p

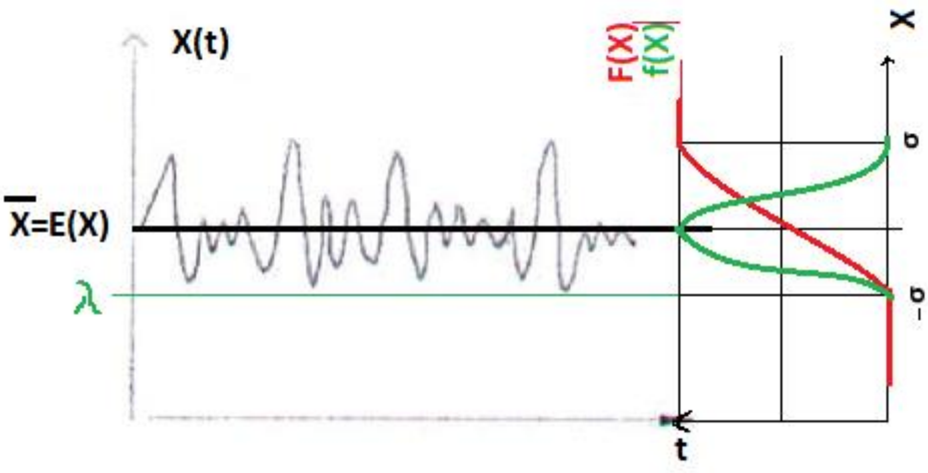
Función de Probabilidad Binomial:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-i}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Ejercicio N° 6:

A) Grafique la función distribución de probabilidad f(x) de la siguiente señal aleatoria x(t). Indique su valor medio y desviación estándar.



En primer lugar, se genera la función de probabilidad acumulativa F(X), se logra recorriendo los valores de X con λ, luego se la deriva F(X) respecto a X para obtener f(X)

Ejercicio N° 7:

A) Definir matemáticamente Proceso aleatorio. B) Dé un ejemplo e identifique en él una realización, una variable aleatoria y un punto.

A)

Si la variable aleatoria definida como

$$X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$$

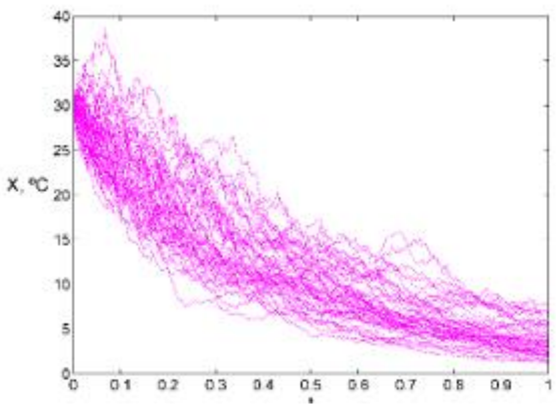
Y siendo $\omega \in \Omega$

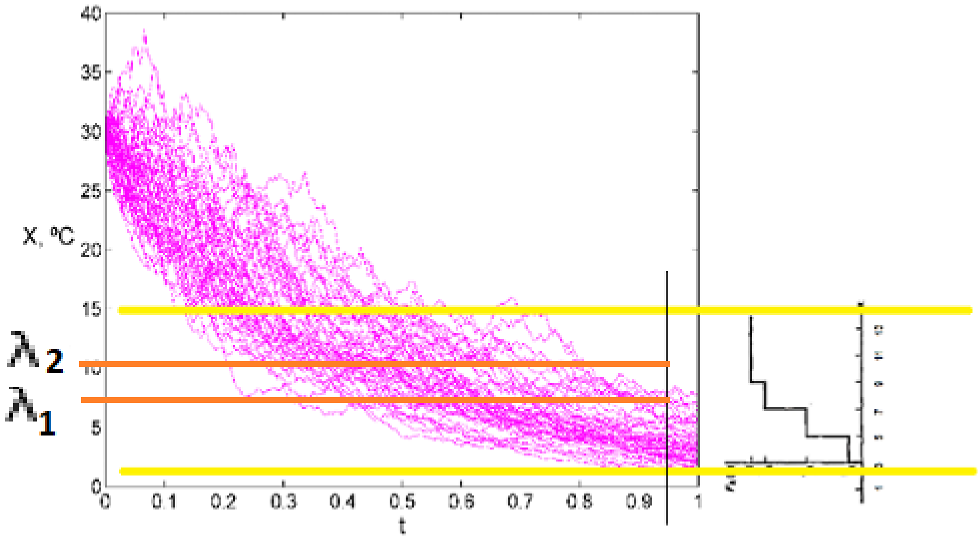
Entonces el Proceso aleatorio queda definido como

$$X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_t$$

B)

Se requiere modelar la temperatura de una sala, donde se toman mediciones con 30 sensores. Cada uno de ellos tiene un rango de -10ºC a 50ºC. Esta variable es cuantificada en 256 valores, y el rango es [0, 255].





Razones frecuenciales en un punto

$$R_{f1} = \frac{N°\lambda_1}{N°Total}$$

$$R_{f2} = \frac{N°\lambda_2}{N°Total}$$