TAREA 3 GF4002, Física de la Tierra Noviembre 17 de 2022

Prof. Emilio Vera Prof. Auxiliar Nicole Avilés

---

1) Considere una Tierra primordial esférica de radio $\boldsymbol{R}$, con una temperatura inicial (en tiempo $\boldsymbol{t = 0}$) uniforme igual a $\boldsymbol{T_0}$, y estudie la evolución temporal de su temperatura bajo la condición de que en su superficie, ésta es mantenida a una temperatura $\boldsymbol{T_S} < \boldsymbol{T_0}$. Dada la simetría esférica del problema, la temperatura dependerá solo de la coordenada radial $\boldsymbol{r}$ y del tiempo $\boldsymbol{t}$, y la ecuación de difusión será conveniente considerarla en coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

donde κ es la difusividad térmica que se considera constante, y $\boldsymbol{T = T(r,t)}$ es la función de temperatura buscada.

a) Considere esta última ecuación y encuentre una solución para $\boldsymbol{T = T(r,t)}$. Utilice para ello la variable auxiliar $\boldsymbol{u(r,t)} = \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{T(r,t) - T_S})$, y resuelva $\boldsymbol{u}$ por separación de variables tal que $\boldsymbol{u(r,t)} = \boldsymbol{G(r)\,F(t)}$. Este problema se resuelve en forma análoga al del enfriamiento de un dique unidimensional en que sus paredes se mantienen a temperatura $\boldsymbol{T_S}$ constante.

b) Con la solución encontrada en **a)**, encuentre una expresión para el gradiente térmico superficial:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R}$$

Este gradiente comienza con un valor infinito en $\boldsymbol{t = 0}$ y decrece luego monótonamente con el tiempo. William Thompson, "Lord Kelvin", uso este modelo para calcular la edad de la Tierra, la cual él estimó como el tiempo que demora el gradiente térmico superficial en decrecer hasta su valor actual, digamos unos 25 °C/km. Para este gradiente y según su resultado ¿Cual sería la edad de la Tierra? Considere $\boldsymbol{R}$ = 6371 km, $\boldsymbol{\kappa}$ = 1 mm^2/s, $\boldsymbol{T_0}$ = 2000 °C, $\boldsymbol{T_S}$ = 0 °C. ¿Como se compara esta edad con el valor actualmente aceptado, digamos 5500 ma? ¿Como se explicaría la diferencia?

2) El enfriamiento de un semiespacio homogéneo a través de su superficie, tiene el mismo tratamiento que el modelo unidimensional para el enfriamiento de la corteza oceánica dado en clases. La evolución de su temperatura $\boldsymbol{T}$ en función de la profundidad $\boldsymbol{z}$ y tiempo $\boldsymbol{t}$ viene dada por:

$$T(z,t) = T_s + (T_0 - T_s)\,erf\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$$

donde $\boldsymbol{T_s}$ es la temperatura superficial que se mantiene constante a partir de $\boldsymbol{t = 0}$, $\boldsymbol{T_0} > \boldsymbol{T_s}$ es la temperatura inicial del semiespacio, $\boldsymbol{\kappa}$ es su difusividad térmica, y erf es la función error:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\,du$$

a) Derive $\boldsymbol{T}$ y encuentre el gradiente térmico superficial en función del tiempo:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$$

b) Siguiendo la idea de Lord Kelvin (Problema 1), y usando el resultado de la parte ***a)*** estime la edad de la Tierra. Utilice para ello los mismos valores usados en el Problema 1, es decir $\boldsymbol{T_0}$ = 2000 ºC, $\boldsymbol{T_s}$ = 0 ºC, $\boldsymbol{\kappa}$ = 1 mm^2/s. y un gradiente superficial actual de 25 ºC/km. Compare su resultado con aquel obtenido en el Problema 1.