

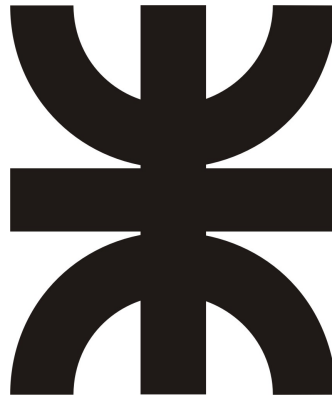
**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL**

**FACULTAD REGIONAL CÓRDOBA**

# **Fundamentos de Robótica móvil**

**Trabajo Práctico N°2:**

**Control de lazo cerrado de balancín con dos hélices**



**Profesores:**

- Prof. Dr. Ing Gaydou, David A.
- Prof. Dr. Ing. González Dondo, Diego.
- Prof. Dr. Ing. Perez Paina, Gonzalo F.

**Alumnos:**

- Barrios, Cristhian Esteban / Legajo: 65.372
- Dogliani, Matías / Legajo: 72.152
- Martinez, Luciano / Legajo: 68.402



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Actividades</b>	<b>1</b>
2.1. Actividad 1 . . . . .	1
2.2. Actividad 2 . . . . .	2
2.3. Actividad 3 . . . . .	4
2.4. Actividad 4 . . . . .	5
2.5. Actividad 5 . . . . .	5
2.6. Actividad 6 . . . . .	6
2.7. Actividad 7 . . . . .	7
2.8. Actividad 8 . . . . .	8
2.9. Actividad 9 . . . . .	9
2.10. Actividad 10 . . . . .	10
<b>3. Conclusión</b>	<b>11</b>

## 1. Introducción

En este trabajo práctico estudiaremos el comportamiento de un sistema multi-rotor, que solo posee un grado de libertad.

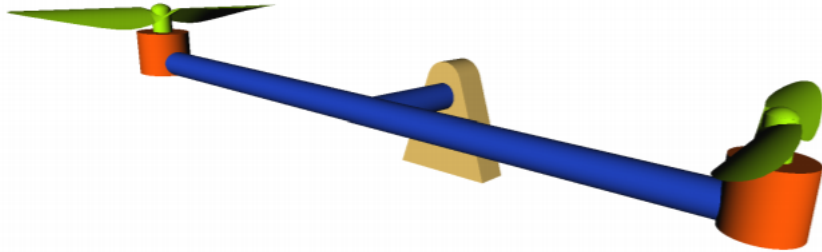


Figura 1: Balancín.

El sistema de la figura 1 se compone por dos motores propulsores en cada extremo de la barra, el balancín no posee otras fuerzas actuantes más que el empuje que realiza cada rotor. Por lo que cualquier fuerza de rozamiento que pudiésemos encontrar en el sistema, será nula.

La tensión que le apliquemos al motor será directamente proporcional al empuje que efectúen estas ( $k_e = 1$  [N/V]). Los motores utilizados son del tipo *Brushless* y las hélices tienen un comportamiento dinámico lineal.

Cada motor tiene una masa de 0,2 [Kg] y se considera concentrada en un punto en el extremo de la barra.

## 2. Actividades

### 2.1. Actividad 1

- Obtener las ecuaciones correspondientes a la cinemática de la rotación

En un análisis cinemático solo se considera el estudio del movimiento del cuerpo y no las causas que generan a este. Las variables de interés que forman el modelo cinemático son, entonces, los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones.

Como se puede observar en la figura 2, la rotación del balancín es  $\theta_o(t)$ , cuyo valor será el ángulo que forma el bastidor con la horizontal.

La velocidad angular instantánea  $\omega(t)$  es la variación de la posición angular en el tiempo. Entonces:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$$

← Esta es la ec. de es dada que interesa para la parte cinemática (1).

Además, la variación de la velocidad angular con respecto al tiempo, será la aceleración angular, que se puede expresar según 2. De esta forma, con los parámetros de interés definidos, queda completo el modelo cinemático.

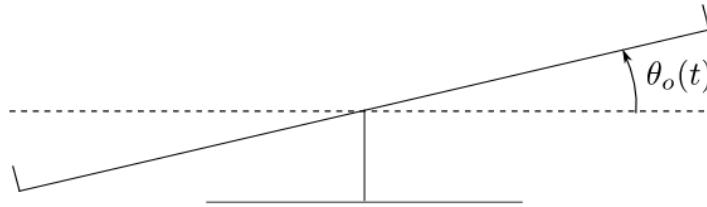


Figura 2: Angulo de rotación del balancín

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t) \quad (2)$$

## 2.2. Actividad 2

- Obtener las ecuaciones correspondientes a la dinámica de la rotación.

Para un estudio de las ecuaciones dinámicas que describen a nuestro sistema, se debe considerar las causas que generan el movimiento antes descripto. Estas causas (fuerzas y torques) se relacionan entre ellas mediante la ley de movimiento rotacional de Newton que establece que un momento de torsión resultante aplicado a un cuerpo rígido siempre genera una aceleración angular que es directamente proporcional al momento de torsión aplicado e inversamente proporcional al momento de inercia del cuerpo [1] y es determinado por la ecuación 3

$$\sum \tau = I \times \ddot{\alpha} \quad (3)$$

↳ Matriz por vector. No es cruz

Mejor que  
omega la, digas  
torque en  
este caso

Esta ecuación representa una cupla de fuerzas o cupla de fuerza respecto a un eje de giro, que provoca una rotación o un cambio en el movimiento rotacional y otra cupla de fuerzas que es la que se opone a este cambio.

El primer miembro es denominado momento de una fuerza con respecto a un eje de giro o **torque**. Es el producto vectorial entre la fuerza aplicada y el vector de posición  $\vec{r}$  con origen en el punto del eje de giro, como se observa en la expresión 4

$$\tau = \vec{F} \times \vec{r} \quad (4)$$

↳ producto cruz

El segundo término de la ecuación 3 hace referencia a la oposición del cambio del movimiento rotacional, conocido como **momento de inercia**. Para un conjunto de partículas puntuales, el momento de inercia queda definido por la expresión 5. Donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $\vec{r}$  es el vector posición desde el eje de rotación.

$$I = \sum (m \cdot r^2) \quad (5)$$

Teniendo en cuenta el sistema bajo estudio y las expresiones de la cinemática antes definidas, resolveremos estas ecuaciones, partiendo de la expresión 6

$$\sum \tau = \sum (m \cdot r^2) \cdot \ddot{\theta}(t) \quad (6)$$

Los torques que actúan sobre el sistema balancín son los generados por las fuerzas de empuje de los rotores en los extremos del bastidor. Mediante un análisis extra, y simple en este caso, se puede deducir que el torque resultante será el producto de la distancia desde el centro del balancín hasta los rotores por cada una de las tensiones de alimentación, y tendrán su correspondiente signo según la convención que se adopte. Esto puede ser útil si se desea realizar un sistema de control cuyas entradas sean las tensiones de cada rotor, aunque en nuestro caso el sistema de control posee como entrada ya el torque resultante.

El momento de inercia puede ser fácilmente calculado ya que se supone a los rotores como dos puntos de masa concentrados en los extremos de una barra de masa despreciable, por lo que se consideran dos masas puntuales separados por una distancia  $d = 1 \text{ m}$ . Puesto que las masas de ambos son iguales  $m_1 = m_2 = m$  y se encuentran equidistantes, la inercia queda definida según la expresión 8

$$I = m_1 r_1 + m_2 r_2 \quad (7)$$

$$I = 2 \cdot m \cdot r^2 \quad (8)$$

$$I = 2 \cdot 0,2 \text{ Kg} \cdot (0,5 \text{ m})^2 = 0,1 \text{ Kg.m}^2 \quad \checkmark \quad (9)$$

Por todo lo mencionado, ~~la expresión~~ el sistema queda definido por la expresión 10

$$\tau_R(t) = 2mr^2 \cdot \ddot{\theta}(t) \quad (10)$$

Para obtener la función de transferencia del sistema en el dominio de Laplace, aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación del sistema

$$\mathcal{L}\{\tau_R(t)\} = \mathcal{L}\{2mr^2 \cdot \ddot{\theta}(t)\} \quad (11)$$

$$\mathcal{L}\{\tau_R(t)\} \frac{1}{2mr^2} = \mathcal{L}\{\ddot{\theta}(t)\} \quad (12)$$

$$\tau_R(s) \frac{1}{2mr^2} = s^2 \Theta(s) - s\theta(0) - \ddot{\theta}(0) \quad (13)$$

La función de transferencia supone condiciones iniciales nulas, por lo que queda definida por la ecuación

$$\frac{\Theta(s)}{\tau_r(s)} = \frac{1}{2mr^2 s^2} \quad (14)$$

Reemplazando por los valores de nuestro sistema:

$$\begin{aligned} \text{Mayúscula } T \rightarrow \frac{\Theta(s)}{\tau_r(s)} &= \frac{1}{0,1s^2} \\ \frac{\Theta(s)}{\tau_r(s)} &= \frac{10}{s^2} \quad \checkmark \end{aligned} \quad (15)$$

### 2.3. Actividad 3

• Conseguida la función de transferencia, se instala un transductor ideal que mide la posición angular y se construye un sistema de lazo cerrado como el de la figura 3.

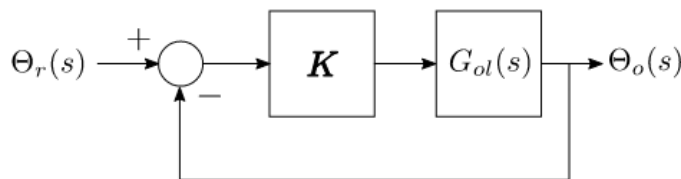


Figura 3: Lazo cerrado de posición angular.

Debemos obtener la función de transferencia de lazo cerrado  $G_{cl}(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_r(s)}$ . Sabemos que la función de lazo cerrado tiene la forma de la expresión 16:

$$G_{cl}(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (16)$$

En nuestro sistema a lazo cerrado se puede observar de la figura 3:

$$\begin{aligned} G(s) &= K \cdot G_{ol}(s) \\ H(s) &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo con la función de transferencia obtenida:

$$G_{cl}(s) = \frac{\frac{K}{Is^2}}{1 + \frac{K}{Is^2}} \quad (17)$$

$$G_{cl}(s) = \frac{\frac{K}{I}}{s^2 + \frac{K}{I}} \quad (18)$$

Reemplazando por los valores encontrados en 9

$$G_{cl}(s) = \frac{10K}{s^2 + 10K} \quad \checkmark \quad (19)$$

## 2.4. Actividad 4

• Calcular las raíces del polinomio característico y decir qué tipo de respuesta se espera para un escalón aplicado al sistema de lazo cerrado de la actividad anterior.

El polinomio característico del sistema es el denominador de la función de transferencia de la expresión 19 y para encontrar sus raíces lo igualamos a cero, como en la ecuación 20.

$$s^2 + 10K = 0 \quad (20)$$

Las raíces, entonces, son:

$$s_{1,2} = \sqrt{-10k} = \pm j\sqrt{10K}$$

Las raíces del sistema son complejas y conjugadas. Debido a esto se espera que ante una entrada de tipo escalón la salida oscile infinitamente (puesto que las raíces tienen parte real nula). La frecuencia de oscilación dependerá del valor de K ya que la misma será  $\omega_n = 10K$  ✓

## 2.5. Actividad 5

• Graficar el lugar de raíces del sistema con los valores de K que la función asigne por defecto.

Definimos la función de transferencia en Octave para poder graficar el lugar de raíces de la siguiente manera:

---

```
% Actividad 5
```

```
Num = [1 0];
```

```
Den = [1, 0, 0];
```

```
G = tf(Num, Den)
```

```
GH = feedback(G);
```

```
rlocus(GH)
```

---

Obtuvimos lo que se muestra en la figura 4. Como se puede ver, y de acuerdo a lo mencionado en la actividad N°4, tenemos dos polos sobre el eje imaginario.

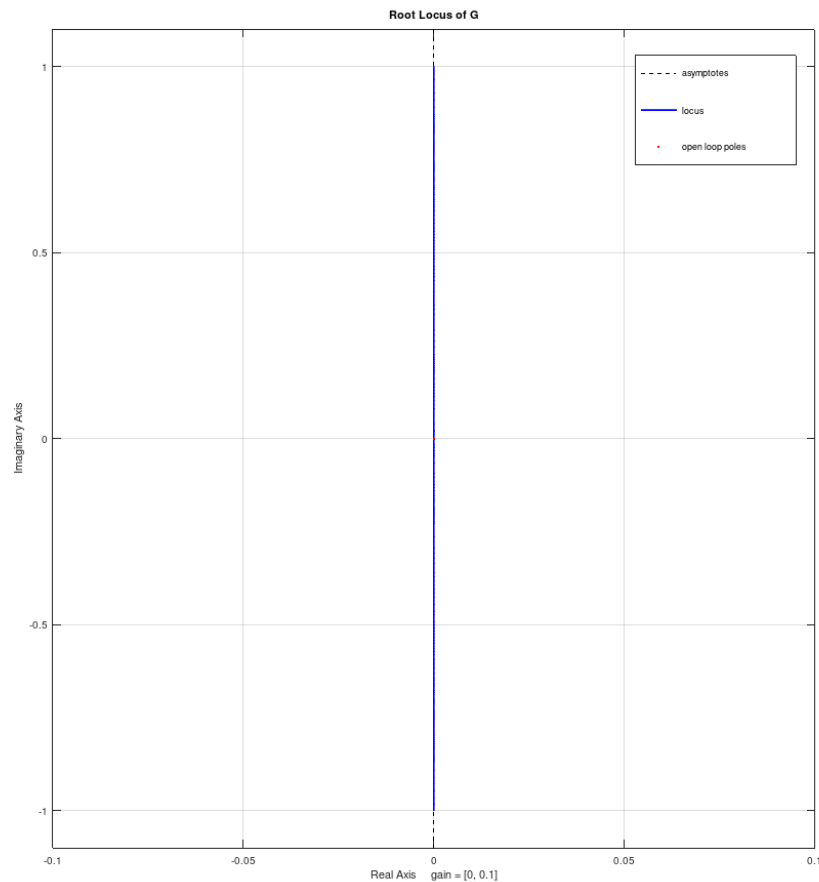


Figura 4: Lugar de raíces del lazo cerrado.

Haciendo un análisis de la figura 4, podemos observar los puntos que cumplen con las condiciones para ser polos del lazo cerrado obtenido. Esto representan las posiciones de los polos para cada valor del parámetro de ganancia  $K$ . Es decir, para cualquier valor de  $K$  los polos obtenidos serán puramente imaginarios.

## 2.6. Actividad 6

- Utilizando la función **feedback** definir el modelo de lazo cerrado y aplicarle la función escalón unitario **step**. Obtener las gráficas para valores de  $K=0,1$  ;  $K=1$  ;  $K=10$ .

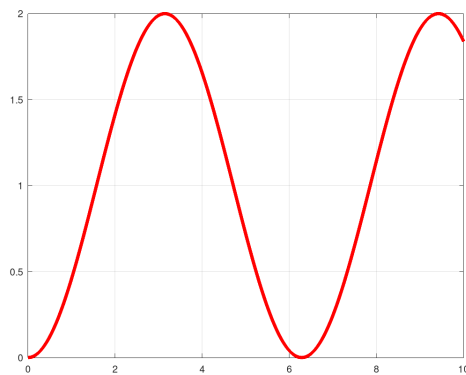
Como se menciona anteriormente, era de esperarse que las gráficas sean señales oscilantes, y que la frecuencia de las mismas dependa del valor de  $K$ . El script utilizado se puede observar a continuación.

### % Actividad 6

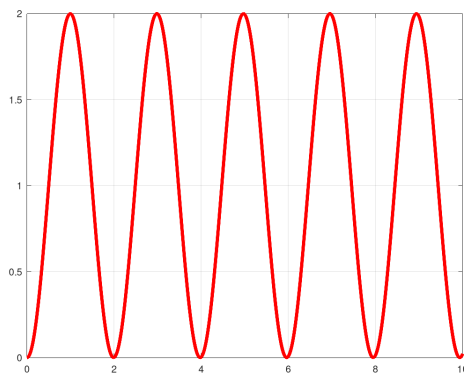
```
K=0,1 %K=1 K=10
Num = [10*K];
Den = [1,0,0];
```



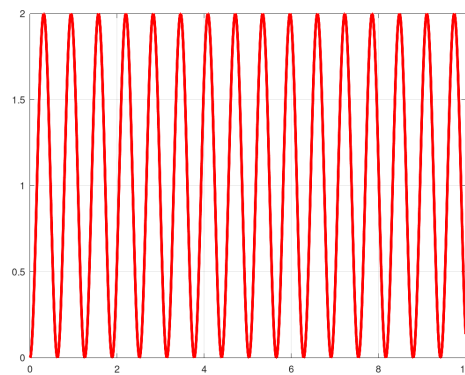
```
G = tf (Num, Den)
GH = feedback (G);
step (GH)
```



(a) Respuesta al escalón del lazo cerrado para  $K=0,1$



(b) Respuesta al escalón del lazo cerrado para  $K=1$



(c) Respuesta al escalón del lazo cerrado para  $K=10$

Figura 5: Respuestas a escalón de sistema a lazo cerrado - Act. 6

En la figura 5 se puede observar que aumentando la constante  $K$ , la frecuencia de la onda también lo hace. Como se esperaba, debido al lugar de raíces obtenido anteriormente, las respuestas son oscilantes para todo valor de  $K$ .

## 2.7. Actividad 7

- Obtener la función de transferencia de lazo cerrado.

Al agregar un compensador tipo derivativo en el lazo directo, el sistema es el de la figura 6. La función de transferencia de este nuevo sistema a lazo abierto queda definida por la expresión 21.

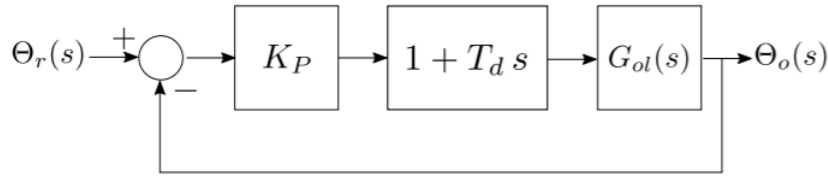


Figura 6: Compensador derivativo agregado

$$G'(s) = \frac{K_p(1 + T_d s) \cdot (\frac{1}{I})}{s^2} \quad (21)$$

$$G'(s) = \frac{10 \cdot T_d K_p s + 10 \cdot K_p}{s^2} \quad (22)$$

Teniendo en cuenta que la función de transferencia de un sistema a lazo cerrado tiene la forma de la ecuación 16, la función de transferencia de este sistema es el de la expresión 23.

$$G_{cl}(s) = \frac{(10K_p T_d)s + 10K_p}{s^2 + (10K_p T_d)s + 10K_p} \quad (23)$$

$$G_{cl}(s) = (10K_p T_d) \cdot \frac{s + \frac{1}{T_d}}{s^2 + (10K_p T_d)s + 10K_p} \quad (24)$$

## 2.8. Actividad 8

- Calcular las raíces del polinomio característico con  $K_P = 1$  y  $T_d$  como parámetro. Calcular el valor de  $T_{d_{critico}}$ . Decir qué tipo de respuesta al escalón se espera que tenga el sistema de lazo cerrado.

Para calcular las raíces del polinomio característico, utilizamos la misma forma que en actividades anteriores, entonces serán:

$$s^2 + (10K_p T_d)s + (10k_p) = 0 \quad (25)$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (26)$$

Para  $K_p = 1$

$$s_{1,2} = \frac{-(10T_d) \pm \sqrt{100(T_d)^2 - 40}}{2} \quad (27)$$

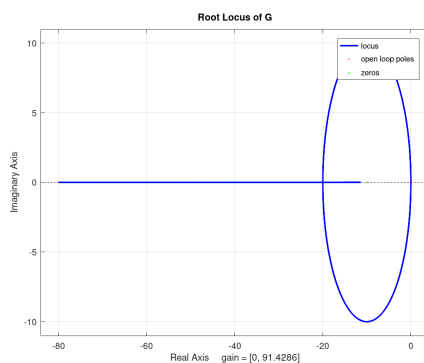
El valor del tiempo derivativo  $T_d$  que hace nulo el discriminante de la ecuación 27 es el denominado  $T_{d_{critico}}$ . En este punto los polos no tendrán componente imaginaria y serán polos completamente reales.

$$T_{d_{critico}} = \sqrt{\frac{40^2}{100^5}} \approx 0,633 \quad (28)$$

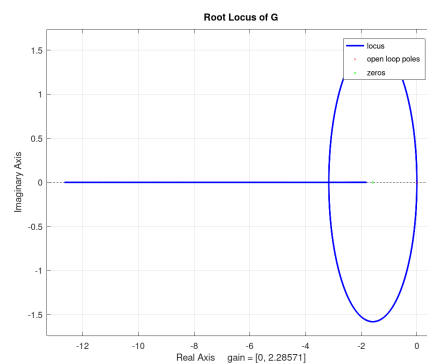
La respuesta al escalón va a depender tanto de  $K_p$  como de  $T_d$ . Tomando  $T_d = T_{d_{critico}}$  la respuesta que se obtendrá será **críticamente amortiguada**, ya que el polinomio característico tendrá dos raíces reales iguales.

## 2.9. Actividad 9

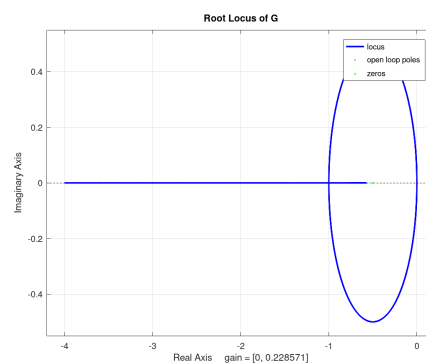
• Utilizando el paquete de control de octave (pkg load control) graficar el lugar de raíces del sistema con los valores de  $K$  que la función asigne por defecto para  $T_d = 0,1$  ;  $T_d = T_{d_{critico}}$  y  $T_d = 2$ .



(a)  $T_d=0,1$



(b)  $T_d=T_{d_{crit}}$



(c)  $T_d=2$

Figura 7: Lugar de raíces compensador derivativo

Se puede observar en la figura 7 que el lugar de raíces para cada tiempo derivativo se hace más pequeño mientras mayor sea el  $T_d$ , esto nos acota la ganancia

proporcional del sistema.

A continuación se muestra el script utilizado:

---

```
% Actividad 9
```

```
Td=0,1 %Td=0,633( critico ) Td=2
Num = [10*Td 10];
Den = [1 0 0];
G = tf(Num,Den)
rlocus(G)
```

---

## 2.10. Actividad 10

- Utilizando la función **feedback** definir el modelo de lazo cerrado y aplicarle la función escalón unitario (**step**). Obtener las gráficas para valores de  $K = 0, 1; K = 1; K = 10$ ) usando para cada caso los valores de  $T_d$  del inciso anterior.

---

```
% Actividad 10
```

```
Td=0.1 %Td=0.633( critico ) Td=2
Kp= 0.1 %Kp= 1 Kp=10
Num = [10*Td*Kp 10*Kp];
Den = [1 0 0];
G = tf(Num,Den)
GH = feedback(GH)
t=0:0.1:20;
step(GH,t)
```

---

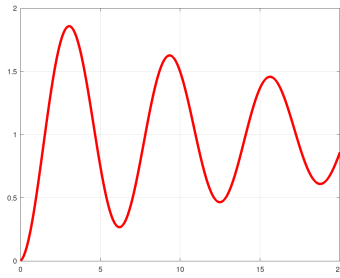
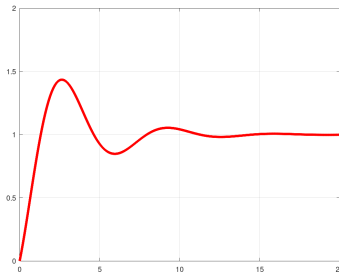
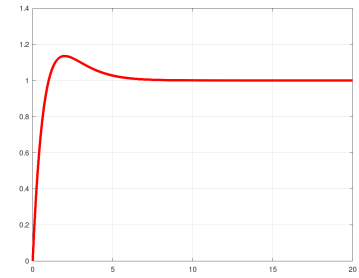
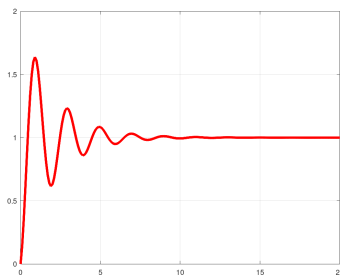
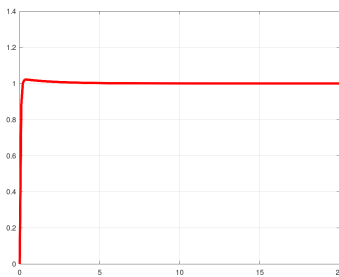
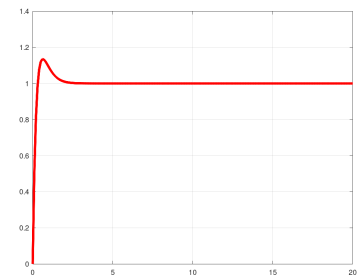
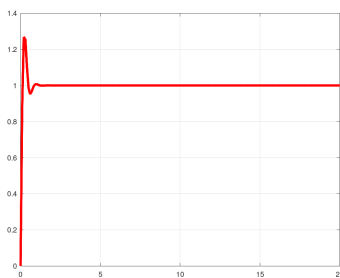
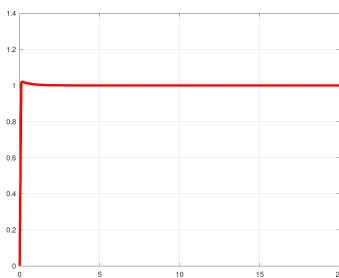
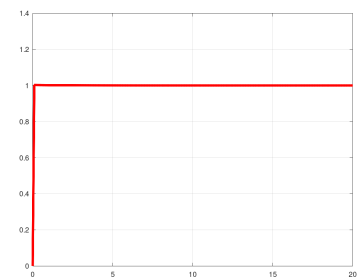

(a)  $K_p=0.1$ ,  $T_d=0.1$ 

(b)  $K_p=0.1$ ,  $T_d=T_{d_{crit}}$ 

(c)  $K_p=0.1$ ,  $T_d=2$ 

(d)  $K_p=1$ ,  $T_d=0.1$ 

(e)  $K_p=1$ ,  $T_d=T_{d_{crit}}$ 

(f)  $K_p=1$ ,  $T_d=2$ 

(g)  $K_p=10$ ,  $T_d=0.1$ 

(h)  $K_p=10$ ,  $T_d=T_{d_{crit}}$ 

(i)  $K_p=10$ ,  $T_d=2$ 

Figura 8: Respuesta al escalón con  $T_d$  y  $K_p$  variables

### 3. Conclusión

En el sistema original planteado por el conjunto de motores de propulsión y la ganancia  $K$ , al cerrar el lazo y excitarlo con una señal de forma de escalón, sin ningún compensador agregado aún, se observó que para ningún valor de  $K$  es posible estabilizar el sistema, como puede observarse en el lugar de raíces de la figura 4 y en las respuestas oscilatorias de la figura 5 cuya frecuencia depende de  $K$ .

Al agregar el compensador de tipo derivativo y cerrar el lazo transformamos el lugar de raíces y ahora puede lograrse la estabilidad del sistema. La respuesta al escalón dependerá del valor que tome tanto  $K_p$  como  $T_d$ . Según el valor que adquieran los mismos se puede observar como el sistema puede ser sub-amortiguado, críticamente amortiguado o sobre-amortiguado. Esto mismo se pudo deducir de la

actividad 8. Encontramos un umbral determinado  $KpTd = T_{d_{crit}}$ , superior a este el sistema tendrá una respuesta sobre-amortiguado, por debajo sub-amortiguado y en si toma este valor exacto tendrá una respuesta críticamente amortiguado.

Do se autiende → [De los lugares de raíces encontrados podemos observar como el valor de los polos  $S_1 = S_2$  reales disminuye al aumentar  $T_d$ .] Como se observa en las imágenes 7, a medida que aumentamos el tiempo derivativo el valor del punto en donde los polos comienzan a ubicarse sobre el eje real es mayor. Para  $Td = 0, 1$ , aproximadamente  $S = -20$  y para  $Td = 2$ ,  $S = -1$ .

En la actividad N°10 podemos notar las diferentes respuestas para distintas constantes de ganancia proporcional y distintos tiempos derivativos. Podemos decir que a medida que aumentamos  $K_p$ , (con  $T_d = cte$ ) los tiempos de establecimiento para cualquiera de los tiempos derivativos, se vieron disminuidos notablemente. Y con el aumento de los  $T_d$ , se observa como la respuesta del sistema es más rápida. El valor que tomen ambos, modificará la respuesta de tal forma que cambie el tipo de amortiguación, disminuya o la amplitud de oscilaciones y los picos y el tiempo de establecimiento. El compensador derivativo entonces convierte el sistema inestable a un sistema estable añadiendo atenuación para evitar la oscilación ✓



## Referencias

- [1] Paul E Tippens, José Hugo Contreras Orozco, and Ángel Carlos González Ruiz.  
*Física: conceptos y aplicaciones*. Number Sirsi) i9789701035146. McGraw-Hill  
Interamericana, 2007.