Primer parcial de Investigación Operativa 2015

Supongamos que se dispone del siguiente diagrama óptimo de un problema de PL

		Variable decisión		*Variables de holgura*			
Base	*Z*	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	*Solución*
Z	1	0	0	0	3/2	1	36
h_1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
x_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

¿Cómo haría para determinar el modelo de programación lineal que originó la tabla simplex óptima?

RESOLUCION

En forma tabular, un problema de programación lineal se resuelve haciendo

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -c & 0 & 0 \\ 0 & A & I & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} A - c & C_B B^{-1} & C_B B^{-1} b \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} & B^{-1} b \end{bmatrix}$$

que corresponde a **[Matriz que pre multiplica a la tabla original] x [Tabla original] = [Tabla óptima]**

En este caso tenemos la tabla óptima y debemos hallar la tabla original. Las matrices desconocidas que debemos hallar son A, b y -c dado que I es la matriz identidad.

Dentro de la tabla óptima identificamos las matrices que la componen:

		Variable decisión		*Variables de holgura*			
Base	*Z*	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	*Solución*
Z	**1**	**0**	**0**	**0**	**3/2**	**1**	**36**
h_1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1/3**	**-1/3**	**2**
x_2	**0**	**0**	**1**	**0**	**1/2**	**0**	**6**
x_1	**0**	**1**	**0**	**0**	**-1/3**	**1/3**	**2**

- *1*
- *0*
- $C_B B^{-1} A - c$
- $B^{-1} A$
- $C_B B^{-1}$
- B^{-1}
- $C_B B^{-1} b$
- $B^{-1} b$

Para despejar b usamos las siguientes propiedades de matrices:

- Una matriz multiplicada por su inversa es la matriz identidad. $\left(B^{-1}\right)^{-1} \cdot B^{-1} = I$
- Una matriz multiplicada por la matriz identidad es la misma matriz: $I \cdot b = b$

Por lo tanto $\left(B^{-1}\right)^{-1} \cdot B^{-1} b = b$

Conocemos B^{-1} así que la invertimos con Matlab y queda $(B^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Entonces $b = (B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

El mismo razonamiento aplica para despejar A:

$$A = (B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Por último, para despejar -c aprovechamos que $C_B B^{-1} A - c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ por lo tanto

$$-c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - C_B B^{-1} \cdot A$$

$$-c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Halladas las incógnitas, podemos reconstruir la tabla original:

		Variable decisión		***Variables de holgura***			
Base	*Z*	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	*Solución*
Z	**1**	**-3**	**-5**	**0**	**0**	**0**	**0**
h_1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**4**
h_2	**0**	**0**	**2**	**0**	**1**	**0**	**12**
h_3	**0**	**3**	**2**	**0**	**0**	**1**	**18**

1	*0*
0	*I*
-c	*0*
A	*b*

Sólo resta interpretar la tabla para deducir el problema de PL que resuelve. En principio se trataría de un problema de maximización porque en la tabla óptima los coeficientes son no negativos (en los problemas de minimización se busca que sean no positivos). Además las restricciones son de tipo ≤ porque sólo hay holguras y no variables artificiales. Entonces el modelo de programación lineal buscado sería:

$$\begin{array}{llrcrcl} \textit{Maximizar} & Z = & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ \textit{sujeto a} & & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$