Álgebra Linear
Coordenadas - Matriz Mudança de Base - Teorema do Completamento

Ana Julia Gomes Alves
Maria do Carmo Carbinatto

SMA - ICMC - USP

Coordenadas

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e seja $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ uma base de V. Logo, dado $v \in V$, segue que v é combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$. Logo existem α_1, α_2, …, $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Propriedade 6 implica que os escalares são únicos. Dizemos que α_1, α_2, …, α_n são as *coordenadas do vetor v em relação à base* $\mathcal{B}$. Usaremos a notação: $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ e

$$(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exemplo 41

Seja $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$, onde

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = 1 + t, \quad p_3(t) = 1 - t^2, \text{ para } t \in \mathbb{R},$$

uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Defina $q_1 = p_1 + p_2 + p_3$, $q_2 = p_1 + p_2$ e $q_3 = p_1$.

(a) Encontre as expressões de q_1, q_2 e q_3.

(b) Mostre que $\mathcal{C} = (q_1, q_2, q_3)$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(c) Encontre as coordenadas de $p(t) = -4 + t^2$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

(d) Encontre as coordenadas de q_1, q_2 e q_3 em relação à base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(e) Encontre as coordenadas de q_1, q_2 e q_3 em relação à base $\mathcal{B}$.

(f) Encontre as coordenadas de q_1, q_2 e q_3 em relação à base $\mathcal{C}$.

Solução do Exemplo 41

(a) Vamos aplicar a definição de cada um desses vetores:

$$q_1(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = (1) + (1+t) + (1-t^2) = 3 + t - t^2$$
$$q_2(t) = p_1(t) + p_2(t) = (1) + (1+t) = 2 + t$$
$$q_3(t) = p_1(t) = 1$$

(b) Como $\mathcal{C}$ possui **três vetores** de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, para mostar que $\mathcal{C}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ basta mostrar que os vetores de $\mathcal{C}$ são LI. Se $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, temos

$$q_1 = (3, 1, -1)_{\mathcal{E}}, \quad q_2 = (2, 1, 0)_{\mathcal{E}}, \quad q_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{E}}.$$

Sejam α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 0$. Logo,

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{e isso implica que } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Portanto, $\mathcal{C} = (q_1, q_2, q_3)$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Solução do Exemplo 41

(c) As coordenadas de p em relação à base $\mathcal{B}$. Devemos determinar como p é escrito como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$.

$$p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3.$$

Pergunta: Como encontrar α, β e γ?

$$\begin{aligned} p(t) = -4 + t^2 &= \alpha(1) + \beta(1+t) + \gamma(1-t^2) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta)t + (-\gamma)t^2 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$-4 + t^2 = (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta)t + (-\gamma)t^2.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha + \beta + \gamma & = -4 \\ \beta & = 0 \\ -\gamma & = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = -3,\ \beta = 0 \text{ e } \gamma = -1.$$

Solução do Exemplo 41

Portanto, $p = (-3, 0, -1)_{\mathcal{B}}$.
As coordenadas de p em relação à base $\mathcal{C}$: Devemos determinar como p é escrito como combinação linear dos vetores de $\mathcal{C}$.

$$p = \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3.$$

Pergunta: Como encontrar α, β e γ?

$$\begin{aligned} p(t) = -4 + t^2 &= \alpha(3 + t - t^2) + \beta(2 + t) + \gamma(1) \\ &= (3\alpha + 2\beta + \gamma) + (\alpha + \beta)t + (-\alpha)t^2 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$-4 + t^2 = (3\alpha + 2\beta + \gamma) + (\alpha + \beta)t + (-\alpha)t^2.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3\alpha + 2\beta + \gamma & = -4 \\ \alpha + \beta & = 0 \\ -\alpha & = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = -1,\ \beta = 1 \text{ e } \gamma = -3.$$

Portanto, $p = (-1, 1, -3)_{\mathcal{C}}$.
(d) Se $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, temos

$$q_1 = (3, 1, -1)_{\mathcal{E}}, \quad q_2 = (2, 1, 0)_{\mathcal{E}}, \quad q_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{E}}.$$

(e) Temos

$$q_1 = 1p_1 + 1p_2 + 1p_3 \Longrightarrow q_1 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$q_2 = 1p_1 + 1p_2 + 0p_3 \Longrightarrow q_2 = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$$

$$q_3 = 1p_1 + 0p_2 + 0p_3 \Longrightarrow q_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}}.$$

(f) Temos

$$q_1 = 1q_1 + 0q_2 + 0q_3 \Longrightarrow q_1 = (1, 0, 0)_{\mathcal{C}}$$

$$q_2 = 0q_1 + 1q_2 + 0q_3 \Longrightarrow q_2 = (0, 1, 0)_{\mathcal{C}}$$

$$q_3 = 0q_1 + 0q_2 + 1q_3 \Longrightarrow q_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{C}}. \quad \square$$

Exemplo 42

Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 2, -1)$, $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (m, 2m, -1)$ e $f_3 = (0, 4, 3)$.
(a) Para que valores de m, o conjunto $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?
(b) Nas condições do item (a), calcule m para que $u = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$.

Como $\mathcal{B}$ possui **três vetores** de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ basta mostrar que os vetores de $\mathcal{B}$ são LI.
Se $\mathcal{E} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, temos

$$f_1 = (1, 1, 1)_{\mathcal{E}}, \quad f_2 = (m, 2m, -1)_{\mathcal{E}}, \quad f_3 = (0, 4, 3)_{\mathcal{E}}.$$

Solução do Exemplo 42

(f_1, f_2, f_3) é LD se, e somente se,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & 2m & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6m + 4m + 4 - 3m = 7m + 4.$$

Portanto, $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $7m + 4 \neq 0$ se, e somente se, $m \neq -4/7$.

(b) Devemos encontrar um $m \in \mathbb{R}$ (com $m \neq -4/7$) tal que $u = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$.

$$(1, 2, -1) = u = 0f_1 + 1f_2 + 0f_3 = 1(m, 2m, -1) = (m, 2m, -1).$$

Logo,

$$\begin{cases} 1 = m \\ 2 = 2m \\ -1 = -1 \end{cases} \Longrightarrow m = 1. \quad \square$$

Um exemplo em $\mathbb{R}^3$

Exemplo 43

Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Defina $f_1 = 2e_1 - e_3$, $f_2 = e_2 + 2e_3$ e $f_3 = 7e_3$.
(a) Mostre que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Se $u = e_1 + e_2 + e_3$, encontre as coordenadas de u em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

(a) Notemos que
$f_1 = (2, 0, -1)_{\mathcal{B}}, \quad f_2 = (0, 1, 2)_{\mathcal{B}} \quad$ e $\quad f_3 = (0, 0, 7)_{\mathcal{B}}$. Para mostrar que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, devemos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0.$$

Portanto, os vetores de $\mathcal{C}$ são LI e isso implica que $\mathcal{C}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Um exemplo em $\mathbb{R}^3$

(b) As coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$: $u = (1,1,1)_{\mathcal{B}}$.
As coordenadas de u em relação à base $\mathcal{C}$: $u = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{C}}$, onde

$$u = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3.$$

Pergunta: Como encontrar α, β e γ?

$$\begin{aligned} u &= \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 \\ &= \alpha(2e_1 - e_3) + \beta(e_2 + 2e_3) + \gamma(7e_3) \\ &= (2\alpha)e_1 + (\beta)e_2 + (-\alpha + 2\beta + 7\gamma)e_3. \end{aligned}$$

Ou seja, obtivemos uma combinação linear de u em relação aos vetores da base $\mathcal{B}$. Logo,

$$\begin{cases} 2\alpha & = 1 \\ \beta & = 1 \\ -\alpha + 2\beta + 7\gamma & = 1 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 1/2, \ \beta = 1 \text{ e } \gamma = -1/14.$$

Um exemplo em $\mathbb{R}^3$

(b) As coordenadas de u em relação à base $\mathcal{C}$: $u = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{14})_{\mathcal{C}}$.
E completamos a resolução do Exemplo 3.

Mas antes de continuar vamos olhar com mais cuidado o sistema linear que utilizamos para encontrar os valores de α, β e γ. Vamos colocá-lo na forma matricial:

$$\begin{cases} 2\alpha & = 1 \\ \beta & = 1 \\ -\alpha + 2\beta + 7\gamma & = 1 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

As colunas de M são as coordenadas dos vetores da base $\mathcal{C}$
A matriz coluna a é formada pelas coordenadas do vetor u em relação a $\mathcal{C}$
A matriz coluna b é formada pelas coordenadas do vetor u em relação a $\mathcal{B}$. Pergunta: Uma mera coincidência? $\square$

Matriz de Mudança de base

Seja U um espaço vetorial real de dimensão n. Sejam

$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \text{ e } \mathcal{C} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

bases de U. Em particular cada vetor de $\mathcal{C}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$. Mais explicitamente

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_{11} u_1 + \alpha_{21} u_2 + \cdots + \alpha_{n1} u_n \\
v_2 &= \alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \cdots + \alpha_{n2} u_n \\
&\vdots \\
v_n &= \alpha_{1n} u_1 + \alpha_{2n} u_2 + \cdots + \alpha_{nn} u_n
\end{aligned}$$

Seja $u \in U$. Temos

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n \quad \text{e} \quad u = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n$$

Matriz de Mudança de base

Pergunta: como relacionar as coordenadas de u em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$?

$$
\begin{aligned}
u &= y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n \\
&= y_1(\alpha_{11} u_1 + \alpha_{21} u_2 + \cdots + \alpha_{n1} u_n) + y_2(\alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \cdots + \alpha_{n2} u_n) \\
&+ \cdots + y_n(\alpha_{1n} u_1 + \alpha_{2n} u_2 + \cdots + \alpha_{nn} u_n) \\
&= (\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \cdots + \alpha_{1n} y_n) u_1 + (\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \cdots + \alpha_{2n} y_n) u_2 \\
&+ \cdots + (\alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \cdots + \alpha_{nn} y_n) u_n
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \cdots + \alpha_{1n} y_n \\
x_2 &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \cdots + \alpha_{2n} y_n \\
&\vdots \\
x_n &= \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \cdots + \alpha_{nn} y_n
\end{aligned}
$$

Matriz de Mudança de base

Colocando na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{(u)_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{(u)_{\mathcal{C}}}$$

- $(u)_{\mathcal{B}}$: é a matriz coluna $n \times 1$ formada pelas coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$.
- $(u)_{\mathcal{C}}$: é a matriz coluna $n \times 1$ formada pelas coordenadas de u em relação à base $\mathcal{C}$.
- $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$: é a matriz quadrada $n \times n$ na qual a coluna 1 é formada pelas coordenadas de v_1 em relação à base $\mathcal{B}$; a coluna 2 é formada pelas coordenadas de v_2 em relação à base $\mathcal{B}$ e assim por diante.

Matriz de Mudança de base

A matriz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é chamada *matriz de mudança da base* $\mathcal{B}$ *para a base* $\mathcal{C}$.

Exemplo 44: em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

Seja $\mathcal{B}$ a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e defina $\mathcal{C} = (p_1, p_2, p_3)$, onde

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = 1 + t, \quad p_3(t) = 1 + t + t^2, \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que $\mathcal{C}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e encontre $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Notemos que $p_1 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$, $p_2 = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ e $p_3 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$. Agora

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{C} \text{ é uma base de } \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Exemplo 44

E

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C} = (p_1, p_2, p_3)$, onde

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = 1 + t, \quad p_3(t) = 1 + t + t^2, \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

Determinemos as coordenadas de $q_1(t) = 1$, $q_2(t) = t$ e $q_3(t) = t^2$ em relação à base $\mathcal{B}$. Temos

$$\begin{aligned} q_1 &= 1q_1 + 0q_2 + 0q_3 \Longrightarrow q_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \\ q_2 &= 0q_1 + 1q_2 + 0q_3 \Longrightarrow q_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}} \\ q_3 &= 0q_1 + 0q_2 + 1q_3 \Longrightarrow q_3 = (0,0,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned} \text{ e } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_3$$

Exemplo 44

Determinemos as coordenadas de p_1, p_2 e p_3 em relação à base $\mathcal{C}$. Temos

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1p_1 + 0p_2 + 0p_3 \Longrightarrow p_1 = (1,0,0)_{\mathcal{C}} \\
p_2 &= 0p_1 + 1p_2 + 0p_3 \Longrightarrow p_2 = (0,1,0)_{\mathcal{C}} \\
p_3 &= 0p_1 + 0p_2 + 1p_3 \Longrightarrow p_3 = (0,0,1)_{\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

e

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_3 \,. \quad \square$$

Exemplo 45

Seja $\mathcal{B}$ a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e defina $\mathcal{C} = (p_1, p_2, p_3)$, onde

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = 1 + t, \quad p_3(t) = 1 + t + t^2, \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{C}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e encontre $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
(b) Se $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, é tal que $p = (-1, -1, 3)_{\mathcal{C}}$, encontre as coordenadas de p em relação à base $\mathcal{B}$.
(c) Se $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, é tal que $q = (1, -1, 1)_{\mathcal{B}}$, encontre as coordenadas de q em relação à base $\mathcal{C}$.

Solução:
(a) Exemplo 44.

Um exemplo em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

(b) Utilizaremos a matriz mudança de base. Recordemos que

$$(p)_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(p)_{\mathcal{C}} \text{ e } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$(p)_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(p)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e obtemos $p = (1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$.
(c) Como resolver este problema utilizando matriz mudança de base? (continua...) $\square$

Matriz de Mudança de base

Seja U um espaço vetorial real de dimensão n. Sejam

$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \text{ e } \mathcal{C} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

bases de U. Apresentamos a matriz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é chamada *matriz de mudança da base* $\mathcal{B}$ *para a base* $\mathcal{C}$ que possui a propriedade:

$$(u)_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(u)_{\mathcal{C}}, \text{ para cada } u \in U.$$

Pergunta: Faz sentido $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$?
Resposta: Sim...
Pergunta: Como seria a construção de $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$?
Resposta: É a matriz quadrada $n \times n$ na qual a coluna 1 é formada pelas coordenadas do vetor u_1 em relação à base $\mathcal{C}$; a coluna 2 é formada pelas coordenadas do vetor u_2 em relação à base $\mathcal{C}$ e assim por diante.

Matriz de Mudança de base

Pergunta: Existe uma relação entre $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$?

Sejam U um espaço vetorial real de dimensão n e $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases de U.

Propriedades

(P1) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é uma matriz inversível, isto é, $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) \neq 0$.

(P2) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{Id}_n$, onde Id_n é a matriz identidade.

(P3) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$.

(P4) $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.

Exemplo 46

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ tais que

$\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ e $\mathcal{C} = ((1,2,2),(-1,0,0),(0,-1,0))$

(a) Encontre a matriz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

(b) Se $(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, encontre $(v)_{\mathcal{C}}$ e v.

(a) Notemos que

$$\begin{aligned} (1,2,2) &= 1\cdot(1,1,1) + 1\cdot(0,1,1) + 0\cdot(0,0,1) \\ (-1,0,0) &= (-1)\cdot(1,1,1) + 1\cdot(0,1,1) + 0\cdot(0,0,1) \\ (0,-1,0) &= 0\cdot(1,1,1) + (-1)\cdot(0,1,1) + 1\cdot(0,0,1). \end{aligned}$$

Logo,

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 46

Temos que $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$.
Logo devemos encontrar a matriz inversa de $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Exemplo 46

(b) Dado $v \in \mathbb{R}^3$, sabemos que

$$(v)_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(v)_{\mathcal{B}}.$$

Logo,

$$(v)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$v = (1, -1, 2)_{\mathcal{B}}$ e

$$v = 1 \cdot (1, 1, 1) + (-1) \cdot (0, 1, 1), +2 \cdot (0, 0, 1) = (1, 0, 2). \quad \square$$

Exercício

Resolva a parte (c) do Exemplo 45 usando a matriz mudança de base $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Teorema do Completamento

Teorema 6

Seja V um vetorial de dimensão n e seja E uma sequência de V LI. Então existe uma base $\mathcal{B}$ de V que contém os elementos de E.

Exemplo 47

$E = ((1,1,1),(1,1,0))$ é um conjunto LI de $\mathbb{R}^3$ e existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ que contém os elementos de E. Por exemplo $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Note que há outras bases de $\mathbb{R}^3$ que contém os elementos de E. $\square$

Observação

Na lista de exemplos apresentamos espaços temos dois exemplos de espaços de dimensão infinita. Recordemos: $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Uma pergunta natural é se para espaços que não são finitamente gerados faz sentido falar em base. E a resposta é sim. É necessário generalizar o conceito de base. Além disso, obtemos um resultado análogo ao Teorema 5.1. Porém sua demonstração é muito mais complicada e faz uso do Lema de Zorn.
Ver Flávio Coelho, página 76.