INSTITUTO SUPERIOR POLITÉCNICO DE TETE

DIVISÃO DE ENGENHARIA

ENGENHARIA INFORMÁTICA

Turma:B

Sistemas de Sinais

Tema: Função degrau unitário

Estudante:

Matias Alberto Matavel

Tete, Outubro de 2025

DIVISÃO DE ENGENHARIA

Matias Alberto Matavel

Função degrau unitário

Trabalho de carácter avaliativo
na cadeira de Sistemas de Sinais

Docente: Eng. Faztudo Languisse

Tete, Outubro de 2025

Índice

1. Introdução

A função degrau unitário, também conhecida como **função de Heaviside**, é uma das funções matemáticas mais utilizadas na representação de fenómenos físicos e sistemas dinâmicos. Trata-se de uma função descontínua que descreve a transição abrupta de um estado para outro, sendo amplamente empregue para modelar sinais que se iniciam em um instante específico do tempo. Em termos práticos, essa função representa a activação ou desactivação de um processo, como o fechamento de um interruptor eléctrico, o accionamento de uma força mecânica ou o início de um sinal digital.

Na **engenharia eléctrica** e nos **sistemas de controle**, o degrau unitário é usado como entrada padrão para avaliar o comportamento dinâmico de circuitos e sistemas — permitindo observar sua **resposta ao degrau**, fundamental na análise de estabilidade e desempenho. Em **física**, ela é utilizada para representar fenómenos com variações instantâneas, como o accionamento súbito de uma força. Já em **computação** e **processamento de sinais**, o degrau é usado na modelagem e simulação de sinais digitais e discretos.

O estudo das funções descontínuas, como a função degrau, é de grande importância em **análise matemática**, pois permite compreender o comportamento de sistemas que sofrem variações instantâneas. Além disso, o degrau unitário está intimamente ligado a outras funções fundamentais, como a **função impulso de Dirac** e a **função rampa**, desempenhando papel essencial nas transformadas de Laplace e de Fourier, ferramentas centrais na análise de sistemas lineares.

1.1 Objectivos

1.1.1 Objectivo Geral

Analisar a **função degrau unitário** sob o ponto de vista matemático, gráfico e físico, compreendendo seu papel na modelagem de sistemas e na análise de sinais descontínuos.

1.1.2 Objectivos Específicos

- Definir formalmente a função degrau unitário e apresentar suas principais notações e representações.
- Explicar o significado físico da função e seu comportamento no tempo.

- Explorar as propriedades matemáticas e as relações com outras funções, como a rampa e o impulso de Dirac.
- Apresentar aplicações práticas em engenharia, física e computação.
- Demonstrar, por meio de exemplos e simulações, como o degrau unitário é utilizado na análise e no projecto de sistemas dinâmicos.

1.2 Metodologia

A metodologia empregada neste trabalho baseia-se em **pesquisa teórica e analítica**, com o intuito de descrever, interpretar e aplicar os conceitos fundamentais da função degrau unitário. O desenvolvimento foi dividido nas seguintes etapas:

1. **Revisão bibliográfica** — consulta a livros, artigos científicos e materiais didácticos sobre funções descontínuas, teoria dos sinais e sistemas lineares, com destaque para autores clássicos como Oppenheim, Ogata e Kreyszig.
2. **Análise matemática** — formulação da função degrau unitário e derivação de suas propriedades principais, como linearidade, deslocamento e escalonamento.
3. **Representação gráfica** — construção e interpretação de gráficos que ilustram o comportamento do degrau unitário, com ênfase na descontinuidade em t=0t = 0t=0.
4. **Interpretação física** — estudo de exemplos reais em circuitos eléctricos e sistemas mecânicos, onde o degrau unitário modela eventos de activação instantânea.
5. **Aplicações práticas** — análise de casos em engenharia, física e computação, demonstrando o uso do degrau unitário na resolução de equações diferenciais e simulações computacionais.
6. **Discussão e conclusão** — Interpretação dos resultados teóricos e observação da relevância da função na modelagem de sistemas dinâmicos.

A metodologia adoptada é de carácter **qualitativo e explicativo**, pois busca compreender o papel conceitual e aplicado da função degrau unitário, além de fornecer uma visão integrada entre sua formulação matemática e seu significado físico.

2. Fundamentação Teórica

2.1 Definição Matemática

A **função degrau unitário** $u(t)$ é definida matematicamente como:

função degrau $\longrightarrow$ **$u_{-1}(t)$**

Essa notação indica que a função é nula para $t < 0$. Para $t > 0$ apresenta um valor constante e diferente de zero. Matematicamente podemos defini-la como:

$K \quad u_{-1}(t) \quad = \quad 0 \quad$ se $\quad t < 0$

$K \quad u_{-1}(t) \quad = \quad K \quad$ se $\quad t > 0$

Na Figura abaixo vemos a ilustração gráfica da Observe a concordância com a definição acima:

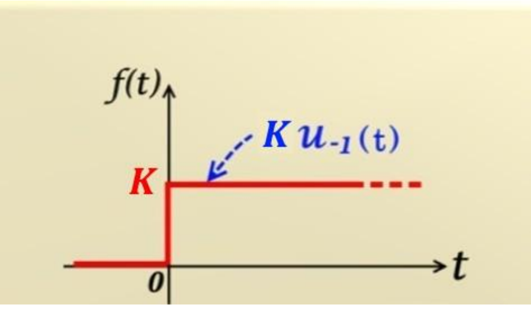

Figura 1

Quando K = 1 a função definida acima é chamada **função degrau UNITÁRIA**. A função degrau não é definida em t = 0. Quando necessário definir a transição de 0^- para 0^+, supomos que ela ocorre de forma linear, isto é, que nesse intervalo temos:

$K \quad u_{-1}(0) \quad = \quad 0{,}5\ K$

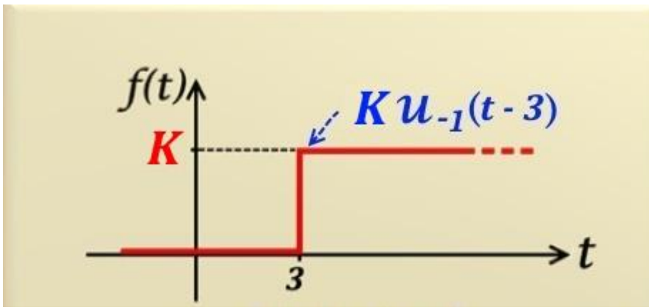

Figura 2

Note que quando a > 0, o degrau ocorre à direita da origem. Então, quando a < 0, o degrau ocorre à esquerda da origem. Assim, uma função degrau igual a K para t < a pode ser escrita como:

K u_{-1}(a - t) = K quando t < a

K u_{-1}(a - t) = 0 quando t > a<

Na Figura abaixo vemos a ilustração gráfica da função. Observe a concordância com a definição acima.

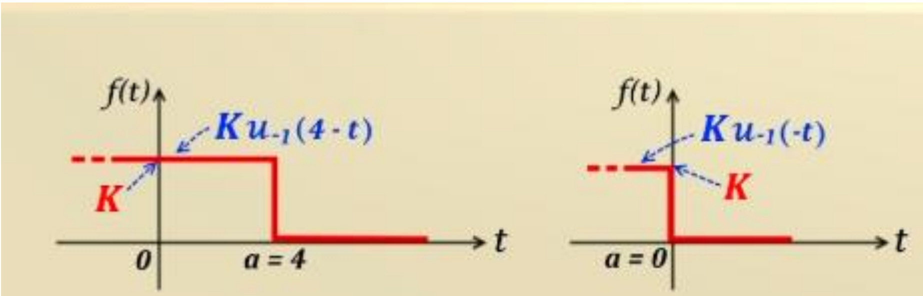

Figura 3

2.3 Interpretação Física

Fisicamente, o degrau unitário representa o comportamento de um **sinal que é activado instantaneamente** em um determinado momento. Por exemplo, em um circuito eléctrico, quando uma chave é fechada em $t = 0$, a tensão aplicada ao circuito pode ser modelada como uma função degrau. Esse tipo de representação permite estudar a resposta do sistema à entrada súbita, analisando como ele reage até alcançar o regime permanente.

Outros exemplos incluem o **accionamento instantâneo de uma força** em um corpo, o **ligamento de uma fonte de calor** ou o **início de um fluxo de corrente eléctrica** em um circuito resistivo-capacitivo (RC).

2.4 Relação com Outras Funções

A função degrau unitário está relacionada a diversas outras funções importantes da análise de sinais e sistemas:

- **Função rampa:** A integração da função rampa resulta na função degrau.

A função rampa é definida por rectas crescentes ou decrescentes. Como a função degrau, ela pode ser representada de várias maneiras.

função rampa $\longrightarrow$ $u_{-2}(t) = t\,u_{-1}(t)$

Essa notação indica que a função é nula para $t < 0$ e para $t > 0$ apresenta um valor linearmente crescente ou linearmente decrescente, dependendo do coeficiente angular K da recta. Matematicamente podemos defini-la como:

$$K\ u_{-2}(t) = 0 \quad \text{quando} \quad t < 0$$

$$K\ u_{-2}(t) = K\ t \quad \text{quando} \quad t > 0$$

Na Figura abaixo vemos a ilustração gráfica da função rampa. Observe a concordância com a definição acima. Note que, neste caso, o valor de K = 1. Como ele representa o coeficiente angular da recta, isto significa que a recta do gráfico faz um ângulo de 45° com o eixo horizontal.

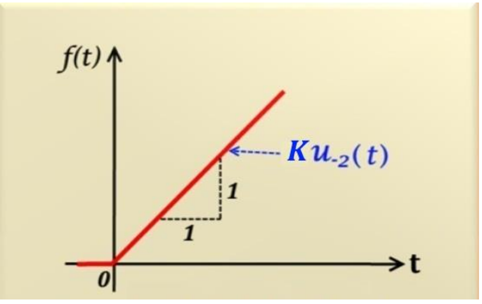

Figura 4

A função rampa também pode ser deslocada no tempo. Na Figura abaixo vemos a ilustração dessa condição.

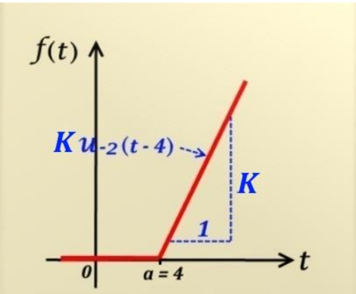

Figura 5

Note que quando a > 0, a função rampa ocorre à direita da origem. Então, quando a < 0, a rampa ocorre à esquerda da origem. Assim, uma função rampa igual a K para t < a pode ser escrita como:

K u_{-2} (a - t) = K (a - t) quando t < a

K u_{-2} (a - t) = 0 quando t > a

Na Figura abaixo vemos a ilustração gráfica da função rampa nesta condição. Observe a concordância com a definição acima.

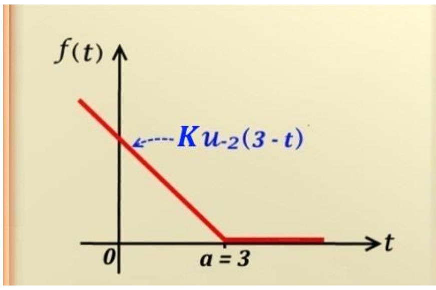

Figura 6

- **Função impulso de Dirac:**

  A função impulso obedece a algumas características peculiares. Assim, para que uma função possa ser considerada uma função impulso deve apresentar as seguintes características quando seu parâmetro tende a zero:

- A amplitude da função tende a infinito.
- A duração da função tende a zero.
- A área sob a curva que representa a função não depende do valor do parâmetro.

  Existem muitas funções que satisfazem essas exigências. Porém, no momento estamos interessados em uma função chamada função Delta de Dirac representada por d(t). Matematicamente a função impulso é definida da seguinte maneira:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} K \; d(t) \; dt = K$$

Figura 7

Isto é válido se t = 0 e será igual a zero para t diferente de zero. Observe que a integral da função, ou seja, a área sob a função impulso é constante. Essa área representa a intensidade do impulso. A função ilustrada na figura abaixo, à esquerda, gera uma função impulso quando ε → 0. Note que se calcularmos a área sob a curva encontraremos o valor 1. Na abaixo, à direita, temos o símbolo para representar a função impulso centrada em zero.

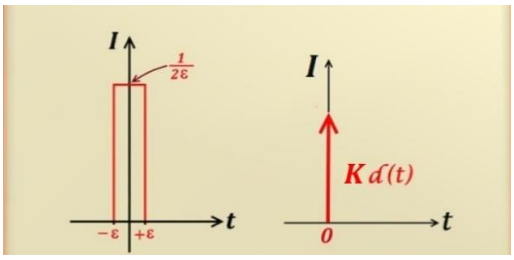

Figura 8

Obviamente, é possível representar a função impulso em um outro instante diferente de zero. Na figura abaixo vemos dois exemplos.

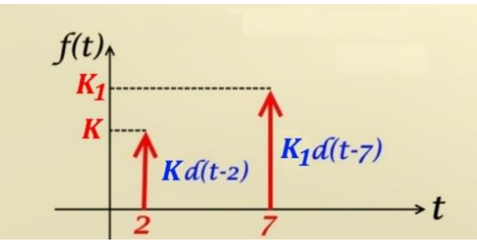

Figura 9

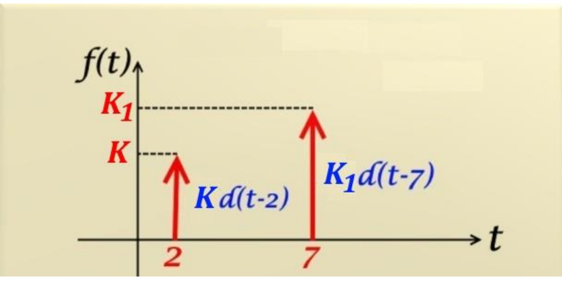

Figura 10

Na Figura acima vemos a representação de duas funções impulso onde a primeira está deslocada para a = 2, sendo sua intensidade igual a K. A segunda está deslocada para a = 7, sendo sua intensidade igual a K_1.

Uma propriedade importante da função impulso é a propriedade de filtragem, que pode ser expressa pela equação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ d(t-a)\ dt \ = \ f(a)$$

Figura 11

Onde supomos que a função f(t) seja contínua em t= a, ou seja, no instante em que ocorre o impulso. Essa equação mostra que a função impulso filtra tudo menos o valor de f(t) no instante t = a. Para demonstrar, observe que d(t - a) é zero em todos os instantes de tempo excepto em t = a. Logo, baseados na Figura 10, a integral pode ser reescrita como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ d(t-a)\ dt \ = \ \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\ d(t-a)\ dt$$

Figura 12

Mas como f(t) é contínua em t = a, a função tende para o valor f(a) quando t → a e portanto

$$\boldsymbol{I} \ = \ \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\ d(t-a)\ dt \ = \ f(a)$$

Figura 13

Relação entre as Três Funções

As três funções estudadas estão relacionadas através de integração e derivação. As duas equações abaixo definem que a função impulso pode ser obtida através da derivação da função degrau. E a função degrau pode ser obtida pela derivação da função rampa.

$$\delta(t) = \frac{du_{-1}(t)}{dt}$$

Figura 14

$$u_{-1}(t) = \frac{du_{-2}(t)}{dt}$$

Figura 15

Por outro lado, a função degrau pode ser obtida através da integração da função impulso, enquanto que a função rampa pode ser obtida através da integração da função degrau. É o que ilustra as duas equações abaixo.

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt$$

Figura 16

$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} u_{-1}(t)\, dt$$

Figura 17

2.5 Propriedades Principais

A função degrau unitário apresenta diversas propriedades úteis:

- **Linearidade:**

$$a\,.\,u(t) \;+\; b\,.\,u(t) = (a+b)u(t)$$

- **Deslocamento no tempo:**

  $u(t - t_0)$ representa um degrau que ocorre no instante $t = t_0$

- **Escalonamento:**

  Multiplicar o argumento por uma constante modifica a taxa de variação temporal.

- **Operações com outras funções:**

  O degrau é frequentemente utilizado para “ligar” ou “desligar” outras funções no tempo. Por exemplo, $f(t)\,.\,u(t-t_0)$ representa uma função $f(t)$ que se inicia em t_0.

2.6 Extensões e Generalizações

- **Degrau deslocado:**

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

  Indica que o degrau ocorre em um instante t_0 diferente de zero.

- **Degrau escalonado:**
  Um degrau de amplitude A pode ser escrito como $A\,.\,u(t)$, representando um salto de 0 para A .

- **Versão discreta:**
  Em sistemas digitais, define-se $u[n] = 1$ para $n \geq 0$ e $u[n] = 0\ para\ n < 0$. Essa forma é amplamente usada em processamento de sinais e controle digital.

3. Aplicações Práticas

3.1 Em Engenharia e Sistemas de Controle

Na engenharia de controle e eléctrica, a função degrau unitário é usada para representar entradas que simulam **comandos de activação** ou **mudanças súbitas** em sistemas. A análise da **resposta ao degrau** é uma das principais ferramentas para avaliar:

- A **estabilidade** de sistemas lineares;
- O **tempo de resposta** e o **comportamento transitório**;
- O **erro em regime permanente**.

Por exemplo, aplicar um degrau de tensão a um circuito RC permite observar como o capacitor carrega ao longo do tempo, demonstrando conceitos fundamentais de resposta temporal.

3.2 Em Matemática Aplicada e Física

Em matemática aplicada, a função degrau é usada na **resolução de equações diferenciais** com condições de contorno por partes, permitindo modelar sistemas que mudam de estado em momentos específicos.

Na **física**, o degrau unitário modela eventos abruptos, como **choques mecânicos**, **ligações instantâneas de corrente** e **mudanças súbitas de potencial**. Também é útil na análise de **funções por partes**, fundamentais em transformadas integrais e em equações de evolução temporal.

3.3 Em Computação e Processamento de Sinais

Na computação, a função degrau é usada para **simular sinais digitais** e testar algoritmos de filtragem, amostragem e detecção. Em linguagens como **Python** e **MATLAB**, é comum implementar o degrau unitário para gerar sinais de teste, observar comportamentos de filtros digitais ou realizar simulações de sistemas discretos.

Além disso, a função degrau serve como base para construir sinais complexos, como pulsos e janelas temporais, muito utilizadas em **análise espectral** e **sintetização de sinais**.

3.4 Mecânica dos sólidos

Na mecânica dos sólidos, a função degrau (ou função de Heaviside) é usada principalmente para modelar carregamentos rectangulares uniformes, representando o início ou fim de uma carga aplicada ao longo do tempo ou do espaço. Essa representação matemática simplifica a análise de problemas de engenharia, como a resposta de uma estrutura a um impacto repentino.

- **Modelagem de carregamentos:**

A função degrau permite expressar matematicamente um carregamento que começa ou termina abruptamente, como o de um martelo atingindo uma viga.

- **Análise de sistemas dinâmicos:**

É uma ferramenta para analisar o comportamento de sólidos sob cargas que mudam com o tempo, como a aplicação de uma força súbita que depois é removida.

- **Simplificação da modelagem:**

Permite descrever um carregamento aplicado em um trecho específico de uma peça de forma concisa. Por exemplo, para modelar uma carga distribuída em um eixo, a função degrau é usada para definir o início e o fim da área onde a carga actua.

3.5 Na electricidade

Nest área, a função degrau é utilizada para representar sinais causais que iniciam em um determinado tempo, como o accionamento de uma chave (ligar/desligar). Ela é aplicada na modelagem de circuitos eléctricos, na análise de sistemas de controle e na engenharia eléctrica para analisar a resposta de circuitos a um pulso de tensão ou corrente que começa abruptamente.

- **Modelagem de chaves:**

A função degrau representa o momento em que uma chave é ligada ou desligada, o que causa uma mudança abrupta no circuito. Por exemplo, uma tensão constante que é aplicada a um circuito a partir de um certo instante de tempo pode ser modelada usando a função degrau.

- **Análise de sistemas:**

Em sistemas de controle, a função degrau é usada como sinal de entrada para verificar como um sistema reage a uma mudança repentina. Isso é importante para optimizar o desempenho do sistema, como no caso de um processo químico onde se busca uma mudança específica na pressão ou temperatura através do controle de uma bomba.

- **Sinais causais:**

A função degrau é fundamental para descrever sinais que existem apenas para tempos maiores ou iguais a um determinado instante ($t \geq 0$), definindo o início da sua existência. Isso é amplamente utilizado na engenharia elétrica e no estudo de circuitos, onde os sinais são frequentemente causais.

- **Transformada de Laplace:**

A função degrau é usada na análise de circuitos usando a transformada de Laplace, uma ferramenta matemática que ajuda a resolver equações diferenciais de circuitos e a analisar o comportamento do sistema ao longo do tempo

4. Conclusão

O estudo da **função degrau unitário** permite compreender de forma profunda como sistemas reagem a variações instantâneas em suas entradas. Ao longo deste trabalho, foram analisados sua **definição matemática**, **representação gráfica**, **interpretação física** e **principais aplicações** em áreas como engenharia, física e computação.

Compreender o comportamento da função degrau é essencial para a **análise de sistemas dinâmicos**, a **resolução de equações diferenciais** e a **simulação de sinais digitais**. O degrau unitário é uma ferramenta fundamental na teoria dos sinais e sistemas, servindo como base para funções derivadas, como a **rampa** e o **impulso de Dirac**, e sendo indispensável no uso de **transformadas de Laplace** e **Fourier**.

Como perspectiva futura, o aprofundamento em funções relacionadas, como a **função impulso**, bem como o estudo das **respostas transitórias e em frequência**, pode ampliar a compreensão sobre o comportamento de sistemas lineares e não lineares diante de estímulos descontínuos.

9. Referências Bibliográficas

- OPPENHEIM, Alan V.; WILLSKY, Alan S. *Sinais e Sistemas*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 2011.
- OGATA, Katsuhiko. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2010.
- DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. *Modern Control Systems*. 13. ed. Boston: Addison-Wesley, 2017.
- KREYSZIG, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics*. 10. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.
- RUGH, Wilson J. *Linear System Theory*. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.
- WIKIPEDIA. *Heaviside Step Function*. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Heaviside_step_function. Acesso em: 11 out. 2025.
- WIKIPÉDIA (em português). *Função de Heaviside*. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_de_Heaviside. Acesso em: 11 out. 2025.
- RESPONDE AÍ. *Representação de Funções via Função Degrau*. Disponível em: https://www.respondeai.com.br/conteudo/calculo/transformada-de-laplace/representacao-de-funcoes-via-funcao-degrau/643. Acesso em: 11 out. 2025.
- ELETRICA TOTAL. *Relação entre as Três Funções: Degrau, Rampa e Impulso*. Disponível em: https://www.eletricatotal.com/pagina3/salto.htm. Acesso em: 11 out. 2025.
- REDDIT. *What Are Step Functions Useful For?* Disponível em: https://www.reddit.com/r/learnmath/comments/kvwrdt/what_are_step_functions_useful_for/?tl=pt-br. Acesso em: 11 out. 2025.