

Segunda tarea para entregar

Fecha de entrega: 4/10/2024

Entreguen un único PDF con los siguientes ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Supongamos que uno tiene una variable aleatoria Y que puede modelar con una distribución geométrica. Es decir que $P(Y = y | \theta) = \theta (1 - \theta)^{y-1}$ para $y \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Se utiliza un prior $Beta(a, b)$ para θ .

- ¿Qué situación se representa con una variable aleatoria geométrica?
- Derivar la distribución posterior para θ suponiendo que se observó $Y = y$. Identificar la distribución encontrada y sus parámetros.
- El modelo Beta es un prior conjugado de la Geométrica?

Ejercicio 2

Identificar una pregunta que se pueda responder con un modelo de regresión lineal con β_0, β_1, σ como parámetros a estimar. Por ejemplo puede ser, altura del hijo en función de altura de la madre, velocidad máxima de un auto en función de caballos de fuerza, etc. Usá tus propios datos o simulalos.

$$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu(x_i), \sigma^2)$$

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 \times x_i$$

- Proponer priors para β_0 , β_1 y σ .
- Escribir la likelihood de los datos de forma analítica en función de los parámetros.
- Implementar el algoritmo de Metrópolis (MCMC) y generar 5.000 samples del posterior sin descontar el tramo inicial de la cadena (burn = 0).
- Graficar la cadena resultante (en 3d para todo el posterior o independientemente para cada parámetro en 3 gráficos distintos). ¿Parece haber convergido la cadena?
- Repetir el inciso c) y d) para 3 cadenas paralelas. Grafíquelas superpuestas con colores distintos. ¿Cuántos samples tarda en llegar a estado de equilibrio (a ojo)?
- Elija al azar 100 samples del posterior y grafique las 100 rectas correspondientes superpuestas a los datos.
- Genere una distribución posterior predictive para Y con algún X fijo. Utilícela para responder alguna pregunta relevante a sus datos.

Ejercicio 3

Para los mismos datos, mismo modelo y mismos priors del ejercicio 2, haga la regresión lineal utilizando **brms** o un paquete similar.

- a) Grafique, utilizando el paquete, las cadenas marginales. ¿Parecen haber convergido?
- b) ¿Coinciden los posteriors marginales (los de cada parámetro por separado) con los calculados en el ejercicio 2?
- c) Compute la respuesta al ítem g) del ejercicio 2. ¿Coinciden estas respuestas?