

independencia

Matias Bajac

2023-04-01

x_1, x_2, \dots, x_n en (Ω, P) diremos que son independientes sii

$\{X_1=x_1\}, \dots, \{X_n=x_n\}$ son independientes para cualquier $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

◇ Demostracion 2.1.5

Probar que x_1, x_2, \dots, x_n son independientes sii $\{X_1=B_1\}, \dots, \{X_n=B_n\}$

son independientes para todo B_1, \dots, B_n subconjuntos de \mathbb{R}

$$B_i = \{x_i\}$$

comenzar probando que $\{x_1 \in B_1\} \{x_2 \in B_2\}$

$$B_1 \cap I_n X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$B_2 \cap I_n X_2 = \{y_1, y_2\}$$

$$P(\{x_1 \in B_1\} \{x_2 \in B_2\}) =$$

$$P(x_1 \in B_1) x_2 \in B_2)$$

$$\{x_1 \in B_1\} = \{X_1 = x_1\} \cup \{X_1 = x_2\} \cup \{X_1 = x_3\} \cap$$

$$\{x_1 \in B_1\} \cap \{x_2 \in B_2\}$$

$$\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = y_1\} \cup \{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = y_2\} \cup \{X_1 = x_2\} \cap \{X_2 = y_1\} \cup \{X_1 = x_3\} \cap \{X_2 = y_1\} \\ \cup \{X_1 = x_3\} \cap \{X_2 = y_2\}$$

◇ Demostracion 2.1.6

Probar que una familia de eventos es independiente si lo es su familia de funciones indicatrices

Supongamos que tenemos A_i^n y su funcion indicatriz $1_{A_i^n}$.

$$1_{\{A\}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots, A_n)$$

Ahora, si asumimos que las funciones indicatrices $1_{A_i^n}$ son independientes, entonces podemos separar el valor esperado en un producto de valores esperados:

Expresandolo en relacion a sus funciones indicatrices..

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots, A_n) = E[1_{A_1}(\omega)]E[1_{A_2}(\omega)]E[1_{A_3}(\omega)] \dots E[1_{A_n}(\omega)] = P(A_1) \cap P(A_2) \cap P(A_3), \dots, \cap P(A_n)$$

◇ Demostracion 2.1.8

sean X e Y v.a independientes. Entonces

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$X = \sum_{i=1} x_i 1_{x=x_i}$$

$$Y = \sum_{i=1} y_i 1_{y=y_i}$$

$$X.Y = \sum \sum x_i y_i 1_{X=x_i} 1_{Y=y_i}$$

$$= \sum \sum x_i y_i E[1_{X=x_i} \cap 1_{Y=y_i}]$$

$$= \sum \sum x_i y_i [P(X=x_i)][P(Y=y_i)]$$

$$= \sum x_i P(X=x_i) \sum y_i P(Y=y_i)$$