Independencia

Matias Bajac

2023-04-04

x_1 , x_2, ..., x_n en (Ω, P) diremos que son independientes sii

$\{X_1{=}x_1\}$,..., $\{X_n{=}x_n\}$ son independientes para cualquier $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

♢ **Demostracion 2.1.5**

Probar que x_1 , x_2, ..., x_n son independientes sii $\{X_1{=}B_1\}$,..., $\{X_n{=}B_n\}$

son independientes para todo B_1,..., B_n subconjuntos de $\mathbb{R}$

$B_i = \{x_i\}$

comenzar probando que $\{x_1 \in B_1\}$ $\{x_2 \in B_2\}$

$B_1 \cap I_n X_1 = \{x_1,x_2,x_3\}$

$B_2 \cap I_n X_2 = \{y_1,y_2\}$

$\mathrm{P}(\{x_1 \in B_1\}$ $\{x_2 \in B_2\} =$

$\mathrm{P}(x_1 \in B_1) x_2 \in B_2)$

$\{x_1 \in B_1\} = \{X_1 = x_1\} \cup \{X_1 = x_2\} \cup \{X_1 = x_3\} \cap$

$\{x_1 \in B_1\} \cap \{x_2 \in B_2\}\}$

$\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = y_1\} \cup \{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = y_2\} \cup \{X_1 = x_2\} \cap \{X_2 = y_1\} \cup \{X_1 = x_3\} \cap \{X_2 = y_1\} \cup \{X_1 = x_3\} \cap \{X_2 = y_2\}$

♢ **Demostracion 2.1.6**

Probar que una familia de eventos es independiente si lo es su familia de funciones indicatrices

Supongamos que tenemos ${A_i}^n$ y su funcion indicatriz $1{A_i}^n$.

$$1\{A\}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ,\ldots, A_n)$

Ahora, si asumimos que las funciones indicatrices $1{A_i}^n$ son independientes, entonces podemos separar el valor esperado en un producto de valores esperados:

Expresandolo en relacion a sus funciones indicatrices..

$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ,\ldots, A_n) = E[1_{A_1}(\omega)]E[1_{A_2}(\omega)]E[1_{A_3}(\omega)]\ E[1_{A_i}(\omega)] = \mathrm{P}(A_1) \cap \mathrm{P}(A_2) \cap \mathrm{P}(A_3),\ldots, \cap\ \mathrm{P}(A_i)$

♢**Demostracion 2.1.8**

sean X E e Y v.a independientes. Entonces

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$X = \sum_{i=1} x_i 1_{x=x_i}$$

$$Y = \sum_{i=1} y_i 1_{y=y_i}$$

$$X.Y = \sum \sum x_i y_i 1_{X=x_i} 1_{Y=y_i}$$

$$= \sum \sum x_i y_i E[1_{X=x_i}] \cap [1_{Y=y_i}]$$

$$= \sum \sum x_i y_i [P(_{X=x_i})][P(Y = y_i)]$$

$$= \sum x_i P(X = x_i) \sum y_i P(Y = y_i)$$