Primer parcial – 4 de Mayo

1. (15pt) Consideremos un conjunto Ω arbitrario.

   a) Probar que la familia

   $$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \, A \text{ numerable o } A^c \text{ numerable}\},$$

   es una σ-álgebra en Ω. (Se asume que el conjunto vacío y Ω están en $\mathcal{A}$.)

   b) Considere la familia $\mathcal{F} := \{\{\omega\} : \; \omega \in \Omega\}$ formada por todos los subconjuntos de Ω con un único elemento. Probar que la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$ coincide con $\mathcal{A}$.

   c) Sea $\Omega = [0,1]$, y $\mathcal{A} = \sigma(\{x\}_{x\in[0,1]})$. Consideremos funciones X, Y de Ω en $\mathbb{R}$ dadas por $X = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$, e $Y = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, donde denotamos por $\mathbb{Q}$ los números racionales. ¿Son X e Y variables aleatorias? Justifique su respuesta.

2. (15pt) Consideremos el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ siendo $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel, y λ la medida de Lebesgue. (Recordar que $\lambda([a,b]) = b - a$, para todo $0 \leq a < b \leq 1$.)

   a) Probar que $\{x\} \in \mathcal{B}$, para todo $x \in [0,1]$.

   b) Utilizando la definición de λ para intervalos, probar que $\lambda(\{x\}) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

   c) Probar que $\lambda(\{q \in [0,1] : \, q \in \mathbb{Q}\}) = 0$.

3. (10pt) Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Consideremos $A_1, A_2, \ldots$, una sucesión de eventos en $\mathcal{A}$. Se define el *límite superior* de la sucesión $\{A_n\}$ como

   $$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

   a) Probar que $\omega \in \limsup_n A_n$ si y sólo si $\omega \in A_n$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$.

   b) Probar que $\limsup_n A_n \in \mathcal{A}$.

   c) Probar que si la serie $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, entonces $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.