Ejercicios en proceso

May 3, 2023

Abstract

1 Abreboca

2 Modelo probabilístico

2.1 Repeticiones del experimento

2.1.1 Ejercicio 2.2

Podemos plantear (al menos) dos formas de solucionar el ejecicio. Una es analizar casos favorables sobre casos posibles y la otra es transformar el resultado para utilizar una distribución binomial.

Si particionamos los casos totales en favorables y no favorables, tenemos que de las 37 posibilidades hay 18 que sirven y 19 que no. El primer término son las combinaciones posibles y los resultados posibles tanto de los casos favorables como los no favorables, el último término los casos totales.

$$\frac{\binom{37}{18} 18^{18} 19^{19}}{37^{37}}$$

- forma 2

Expresión usando formula de stirling

2.1.2 Ejercicio 2.3

$$\Omega_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \tag{1}$$
$$P_2(\omega_1 = 0) = P_2((0,*)) = P((0,0)) + P((0,1)) = a + b = q \tag{2}$$
$$P_2(\omega_1 = 1) = P_2((1,*)) = P((1,0)) + P((1,1)) = c + d = p \tag{3}$$
$$P_2(\omega_2 = 0) = P_2((*,0)) = P((0,0)) + P((1,0)) = a + c = q \tag{4}$$
$$P_2(\omega_2 = 1) = P_2((*,1)) = P((0,1)) + P((1,1)) = b + d = p \tag{5}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones de forma matricial y observamos que el mismo es un SCI dado que $E_4 = E_1 + E_2 - E_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \\ q \\ p \end{pmatrix}$$

Una manera alternativa es encontrar 2 medidas de probabilidad que suman 1, por tanto, no es unívoca.

Ejercicio 2.4

Planteamos inicialmente Ω_2, luego Ω_3 y vemos que a partir de (1) y del caso n, podemos obtener el caso n+1.

Para el caso Ω_2, tenemos:

$$\begin{aligned} P(0,1) &= P_2(w_2 = 1, w_1 = 0) = P_2(w_2 = 1)P_2(w_1 = 0) = pq \\ P(1,1) &= P_2(w_2 = 1, w_1 = 1) = P_2(w_2 = 1)P_2(w_1 = 1) = p^2 \\ P(0,0) &= P_2(w_2 = 0, w_1 = 0) = P_2(w_2 = 0)P_2(w_1 = 0) = q^2 \\ P(1,0) &= P_2(w_2 = 0, w_1 = 1) = P_2(w_2 = 0)P_2(w_1 = 1) = qp \end{aligned}$$

Si tomamos $\Omega_3 = \{(0,0,0), \dots (1,1,1)\}$ el evento $(0,0,0)$ lo podemos obtener como la intersección de los eventos $(*,*,0)$ y $(0,0,*)$, por tanto, $P(0,0,0) = P(*,*,0)P(0,0,*)$ donde $P(*,*,0)$ es conocida por (I) y $P(0,0,*)$ es conocida por el paso anterior ($P(0,0) = q^2$). O también $P(0,0,0) = P(*,*,0)P(0,0,*) = P(*,*,0)P(*,0,*)P(0,*,*)$ todos valores conocidos por (I).

Suponiendo que para el caso $N-1$ conocemos la probabilidad $P(w_1 = e_1, \dots, w_{n-1} = e_{n-1})$, usando la propiedad (II) tenemos:

$$P(w_n = e_n, \dots, w_1 = e_1) = P(w_n = e_n)P(w_{n-1} = e_{n-1} \dots w_1 = e_1)$$

Con $P(w_n = e_n)$ conocida por (I). Por tanto, $P(w_n = e_n, \dots, w_1 = e_1)$ queda determinada.

2.1.3 Ejercicio 2.5

Acá usamos que por (I) tenemos definido el evento $P(w_i = e_i)$ con $e_i = \{0,1\}$. Por (II) podemos descomponer el el evento $(w_1, \dots, w_n)$ en la intersección de eventos elementales.

Cualquier resultado de a forma:

$$\begin{aligned}
P(w_1 = e_1, \dots, w_n = e_n) &= P(w_n = e_n)P(w_1 = e_1, \dots, w_{n-1} = e_{n-1}) \\
&= P(w_n = e_n)P(w_{n-1} = e_{n-1})P(w_1 = e_1, \dots, w_{n-2} = e_{n-2}) \\
&\dots \\
&= \prod_{i=1}^{i=N} P(w_i = e_i)
\end{aligned}$$

$e_i = \{0, 1\}$ Por (I) tenemos que $P(w_i = 0) = q$, $P(w_i = 1) = p$.

Si en N tiradas todos los resultados son éxitos, tenemos $p^{\#\text{éxitos}} = p^{S_n(\omega)}$. Si en N tiradas todos los resultados son fracasos, tenemos $q^{S_n(\omega)-\#\text{fracasos}} = q^{\#\text{fracasos}} = q^N$.

En el caso de éxitos y fracasos tenemos: $p^{S_n(\omega)}q^{N-S_n(\omega)}$ con $S_n(\omega) \in \{0, 1, \dots, N\}$

2.2 Variables aleatorias

Ejercicio 2.7

Propiedades:

a) Como X es constante, toma un único valor con probabilidad 1.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = CP(X = C) = C \tag{6}$$

b) Me tomo un $\alpha = min(x_i P(X = x_i)) \geq 0$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) \geq k\alpha \geq 0 \tag{7}$$

c) Tomo $|E(X)| = |E(X)^+ + E(X)^-|$ con $X^+ = \max(X, 0)$, $X^- = \min(X, 0)$ y en el paso dos usamos la desigualdad triangular. (Hay que exigirle a X que sea L_1 no? Agregar como queda definida también E(X))

$$|E(X)| = |E(X)^+ + E(X)^-| \leq |E(X)^+| + |E(X)^-| = E(|X|) \tag{8}$$

d) Este lo puedo plantear de otra forma como dice la letra, ache (a chequear)

Tomamos $f(X, Y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$; $f(X) = P(X = x) = \sum_y f(X, Y)$; $f(Y) = P(X = x) = \sum_x f(X, Y)$

Planteamos la definición de esperanza:

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{x,y}(x+y)f(X,Y) \\
&= \sum_{x,y} xf(X,Y) + \sum_{x,y} yf(X,Y) \\
&= \sum_{x} x \sum_{y} f(X,Y) + \sum_{y} y \sum_{x} f(X,Y) \\
&= \sum_{x} xf(X) + \sum_{y} yf(Y) \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}
$$

OBSERVACIÓN: EN EL EJERCICIO 2.7 HACERLO DE OTRA FORMA USANDO QUE $X = \sum_k y_k \mathbb{1}_{A_k}$

Ejercicio 2.8

Sea f una función a valores reales, definida sobre la imagen de X. Considere la nueva variable aleatoria $f \circ X$. Probar que: $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$.

Obs, vamos a usar $g_X(x)$ en vez de $\mathbb{P}(X = x)$. Notar que f no tiene porque ser inyectiva.

Definimos $Y = (f \circ X)(\omega)$ con y un valor posible (este paso es totalmente opcional). Definamos la preimagen, $f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$ la cual es diferente del conjunto vacio. Entonces:

$$
\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(y)) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} g_X(x)
$$

Usando la definición de esperanza, y definiendo el conjunto $Im_y = \{y : f(x) = y\}$:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{Im_y} y\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{Im_y} y \sum_{x \in f^{-1}(y)} g_X(x) = \sum_{Im_y} f(x) \sum_{x \in f^{-1}(y)} g_X(x) \\
&= \sum_{Im_y} \sum_{x \in f^{-1}(y)} g_X(x)f(x) = \sum_{x} f(x)g_X(x)
\end{aligned}
$$

En el último paso lo que estamos diciendo es que al sumar en y a la unión de los conjuntos $f^{-1}(y)$ (disjuntos), obtenemos el conjunto de los puntos x que la v.a X podría llegar a tomar.

- Una forma alternativa de hacerlo:

$$
E(Y) = \sum_{i=1}^{j} y_i P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{j} y_i P(f(X) = y_i)
$$

El evento $f(X) = y_i$ lo podemos descomponer en la unión disjunta de los eventos individuales de valores de X, es decir, $\{f(X) = y_i\} = \cup_{x_i \in \Omega : f(x_i) = y_i} \{X = x_i\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j} y_i P(f(X) = y_i) &= \sum_{i=1}^{j} y_i P(\cup_{x_i \in \Omega : f(x_i) = y_i} \{X = x_i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{j} y_i \sum_{x_i \in \Omega ; f(x_i) = y_i} P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{j} \sum_{x_i \in \Omega ; f(x_i) = y_i} f(x_i) P(X = x_i)
\end{aligned}$$

acá pasamos a sumar en k en vez de en j, me falta explicar

$$= \sum_{i=i}^{k} f(x_i) P(X = x_i)$$

Ejercicio 2.10

Probar que $\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \sum_{i; x_i > a} \mathbb{P}(X = x_i)$$

Por definición de Esperanza $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{a} = \dfrac{\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)}{a} = \sum_i \dfrac{x_i}{a} \mathbb{P}(X = x_i)$

como todos los $\dfrac{x_i}{a}$son mayores a 1:

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \sum_{i; x_i > a} P(X = x_i) \leq \sum_{i; x_i > a} \frac{x_i}{a} P(X = x_i) = \frac{1}{a} \sum x_i P(X = x_i) = \frac{1}{a} E(X)$$

2.3 Independencia

2.3.1 Ejercicio 2.14

Probar que en el modelo de tirar la moneda fiel, los conjuntos $A_1 = \{\omega_1 = 1\}, A_2 = \{\omega_2 = 1\}, A_3 = \{\omega_3 = \omega_2\}$ son dos a dos independientes, pero la familia $\{A_1, A_2, A_3\}$ son dependientes.

$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(A_1, A_2, A_3) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

2.3.2 Ejercicio 2.15

Probar que en el modelo definido en el Ejercicio 2.4 los eventos $A_i = \{\omega_i = 1\}$ son independientes.

2.3.3 Ejercicio 2.16

Probar que las variables aleatorias $\{X_1, \dots, X_n\}$ son independientes, si y solo si los eventos $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ son independientes para $B_1, \dots, B_n$ subconjuntos de $\mathbb{R}$.

El caso trivial es remplazar $B_i = x_i$.

Notar que $(X_1 \in B_1)$ son los valores que X_1 toma en B_1, pero B_1 puede ser cualquier conjunto. Lo que nos interesa es $B_1 \cap Im(X_1)$, B_1 intersección la imagen de X_1. Vamos a arrancar con 2 casos.

$X_1 \in B_1 = \sqcup_{i=1}^{k}(X_1 = x_{1i}) = \{X_1 = x_{11}\} \cup \{X_1 = x_{12}\} \cup ...\{X_1 = x_{1k}\}$

$X_2 \in B_2 = \sqcup_{m=1}^{j}(X_2 = x_{2m}) = \{X_2 = x_{21}\} \cup \{X_2 = x_{22}\} \cup ...\{X_2 = x_{2j}\}$

$$\begin{aligned}
\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\} = \cup(\cap...) = \\
&= (\{X_1 = x_{11}\} \cap \{X_2 = x_{21}\}) \cup (....) \cup (....) \\
&\cup (\{X_1 = x_{11}\} \cap \{X_2 = x_{22}\}) \cup (....) \\
&\text{Notar que los índices en } X_2 \text{ son disjuntos} \\
&\sum_{i=1...,k;m=1,...,j} \mathbb{P}(\{X_1 \in B_1\})\mathbb{P}(\{X_2 = x_{2m}\}) \\
&= (\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{X_1 = x_{1i}\}))(\sum_{m=1}^{j} \mathbb{P}(\{X_2 = x_{2m}\}))
\end{aligned}$$

Ahora plantear el caso genérico...

2.3.4 Ejercicio 2.17

Probar que una familia de eventos es independiente si lo es la familia de sus funciones características ($\mathbb{1}$).

($\Rightarrow$ si usamos que las funciones características son independientes, tenemos:)

La indicatriz cumple: $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}\{\mathbb{1}_{A_i} = 1\}) = \mathbb{P}(\{\mathbb{1}_{\cap_{i=1}^{n} A_i} = 1\}) = \mathbb{P}(\cap A_i)$

$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}\{\mathbb{1}_{A_i} = 1\}) \overset{(1)}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\mathbb{1}_{A_i} = 1\}) \overset{(2)}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

En (1) indicatrices son independientes. En (2) que indicatriz es 1 en el evento A_i, y es la probabilidad de A_i. Así los eventos A_i son independientes.

Obs: Notar lo que ya vimos en clases, $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i} = 1) = \mathbb{P}(A_i)$ y también que $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i} = 0) = \mathbb{P}(A_i^c)$. En $\mathbb{P}(\{\mathbb{1}_{\cap_{i=1}^{n} A_i} = 1\}) = \mathbb{P}(\cap A_i)$ usamos que si la indicatriz es 1, quiere decir que se 'dieron' todos los eventos, o sea su intersección.

2.3.5 Ejercicio 2.18

Probar que las variables aleatorias $\{X_1, \dots, X_n\}$ son independientes, si y solo si, los eventos $\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_{j-1} = x_{j-1}\}$ es independiente de $\{X_j = x_j\}$ para cualesquiera $x_1, \dots, x_j$ en $\mathbb{R}$

($\Rightarrow$) Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ son independientes entonces $\forall p < n$ $\{X_{n_1}, \dots, X_{n_p}\}$ con $n_j \neq n_k$ son independientes.

Usamos la definición de independencia: $\mathbb{P}(\cap_{j=1}^{p}\{X_{n_j} \in B_j\}) \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}\{X_i \in T_i\}) \overset{(2)}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in T_i) \overset{(3)}{=} \prod_{j=1}^{p} \mathbb{P}(X_{n_j} \in B_j)$

Siendo B_j subconjuntos de Borel, así que pertenecen a $\mathbb{R}$. Los $T_i = B_j$ *si* $i = n_j$ para algún j; $T_i = \mathbb{R}$, *si* $i \notin \{n_1, \dots, n_p\}$, de esta forma la $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ es 1 y no afecta en nada. Entre los i hay un subconjunto de ellos que pertenecen al conjunto $\{n_1, \dots, n_p\}$ con lo que tenemos (1), (2) resulta por hipótesis y (3) de el hecho que si $i \notin \{n_1, \dots n_p\}$ entonces su $\mathbb{P}$ es 1 y nos quedan los p casos restantes.

($\Leftarrow$)

2.3.6 Ejercicio 2.20

Probar que si X e Y v.a independientes, entonces:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x,y} (xy) f(X,Y) \\
&= \sum_{x} \sum_{y} xy f(X) f(Y) \\
&= \sum_{x} x f(X) \sum_{y} y f(Y) \\
&= E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= \mathbb{E}(X+Y)^2 - \mathbb{E}^2(X+Y) \\
&= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(X) - 2\mathbb{E}(X)E(Y) - \mathbb{E}^2(Y) \\
&= (\mathbb{E}(X^2) - E^2(X)) + (\mathbb{E}(Y^2) - E^2(Y)) \\
&= V(X) + V(Y)
\end{aligned}$$

Estamos usando que la esperanza es un operador lineal y el resultado que obtuvimos previamente $E(XY) = E(X)E(Y)$ dado que X, Y son v.a. independientes (hipótesis).

Ahora lo planteamos utilizando funciones simples: $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{\{X=x_i\}}$; $Y = \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbb{1}_{\{Y=y_j\}}$.

$$XY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j \mathbb{1}_{\{X=x_i\}}\mathbb{1}_{\{Y=y_j\}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j \mathbb{1}_{\{X=x_i \cap Y=y_j\}}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=x_i \cap Y=y_j\}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j \mathbb{P}(\{X = x_i\})\mathbb{P}(\{Y = y_j\}) = E(X)E(Y)$$

En el primer caso, reescribimos puesto que si la indicatriz vale 1 cuando sucede x_i y y_j solo puede valer uno si suceden ambos a la vez, es decir, el evento correspondiente a su intersección. Luego utilizamos que la esperanza es un operador lineal y que la esperanza de la indicatriz del evento intersección, es la probabilidad de la intersección de los eventos (notar que $P(A) = E(I_A) = 1P(A) + 0P(A^c) = P(A)$). Finalmente usamos la hipótesis de que X, Y son independientes y reagrupamos los terminos de las sumatorias.

2.4 Ley de los grandes números

2.4.1 Ejercicio 2.22

Probar que la v.a $S_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ con $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ (conteo de cantidad de éxitos) toma valores $0, 1, \ldots, n$ con probabilidad:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall\ k \in \{0, \ldots, n\}$$

La idea es construir cada realización de S_n a partir de conjuntos elementales. Veamos un par de ejemplos:

- Construyamos el evento $\{S_n = 0\}$. Este se genera $\iff$ todos los sucesos son 0 (fracasos), es decir: $\{S_n = 0\} = \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \ldots \{X_n = 0\}$. Por tanto su probabilidad es: $\mathbb{P}(\{S_n = 0\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \ldots \{X_n = 0\})$ y como los eventos son independientes obtenemos $\mathbb{P}(\{S_n = 0\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n$. El caso de todos los sucesos son éxitos es análogo.

- Construyamos el evento $\{S_n = 1\}$, es decir, algún evento contiene un éxito. Acá tenemos más posibilidades:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{S_n = 1\}) = \mathbb{P}((&\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\} \cdots \cap \{X_n = 0\}) \\
&\cup (\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\} \cdots \cap \{X_n = 0\}) \\
&\cup \cdots \cup (\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cdots \cap \{X_N = 1\})) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} \{X_i = 1, X_{-i} = 0\}) \overbrace{=}^{*} \sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

Notar que en (*) usamos que los eventos son disjuntos, si se da uno no se pude dar el otro. Si tenemos un éxito, tenemos $n-1$ fracasos.

- el último caso, $\{S_n = k\}$ requiere que tomemos todas las posibles combinaciones en las cuales se puede dar el suceso de k-éxitos... TERMINAR!

2.4.2 Ejercicio 2.24

Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a independientes definidas en un espacio de probabilidad $\Omega, \mathbb{P})$ con distribución $Ber(p)$. Entonces la v.a $S_{n,p} = X_1 + \cdots + X_n$ tiene distribución $Bin(n,p)$. Probar que $\mathbb{E}(S_{n,p}) = np$, $V(S_{n,p}) = np(1-p)$.

- $\mathbb{E}(S_{n,p}) = E(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X) = np$

  Donde hemos usado que la esperanza es un operador lineal, que las X_i son tienen la misma distribución y que su valor esperado es p.

- $V(S_{n,p}) = V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X) = nV(X) = np(1-p)$.

  Donde hemos usado que la varianza de la suma es la suma de las varianzas por ser las X_i independientes y todas tienen la misma distribución, por tanto, igual varianza: $p(1-p)$.

- Extra: TERMINAR la forma opcional....

2.4.3 Ejercicio 2.27 (PENDIENTE DE RELLENAR)

Sean $X_1, \dots, X_n$, una colección de v.a. i.i.d. con distribución $binomial(p)$, Sea S_n las sumas parciales.

- Probar que la función $B_n(p) = \mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n}))$ es un polinomio en p de grado a lo sumo n.

- Usar la desigualdad de Chebyshev para probar que $\forall p \in [0,1], y, \forall \epsilon > 0$, se cumple $\sum_{k \in K} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$

- Utilizando la continuidad uniforme de f probar que: $\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \geq p \leq 1} |f(p) - B_n(p)| = 0$

3 Grandes Desvíos

3.0.1 Ejercicio 2.28

Dar un ejemplo de v.a. donde $\mathbb{P}(X > a) = \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$ para $X \geq 0$ y $t > 0$.

3.0.2 Ejercicio 2.29

Simulación en R.

4 Ley fuerte de los grandes números

Ejercicio 2.31

Probar que la definición anterior no depende del $n(A)$ elegido.

Ejercicio 2.35

Probar la proposición 2.34

- Todo subconjunto de un conjunto de medida cero, tiene medida cero.

  Sea $A = \cup A_i$ como A tiene medida cero, todos los subconjuntos A_i tienen medida cero (puesto que la medida de un conjunto es no negativa.). O de otra forma si $B \subseteq$ A, con A de medida cero, entonces B tiene medida cero.

- Unión numerable de conjunto de medida cero, tiene medida cero.

  Sea $N = \cup_{i=1}^{\infty} N_i$ donde cada N_i tiene medida cero (hipótesis). Como cada N_i tiene medida cero existe un recubrimiento numerable A_{n_i} que lo cubre. Sea $\epsilon > 0$, para cada n tenemos que $N_n \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_{n_i}$, siendo A_{n_i} el recubrimiento al cual le pedimos que $\sum_{i=1}^{\infty} |A_{n_i}| < \frac{\epsilon}{2^n}$. Por lo tanto, $N \subset \cup_{n,j}^{\infty} A_{n_j}$. Donde usamos que $\sum_n \sum_j |A_{n_j}| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\epsilon}{2}(1 + 1/2 + ...) = \frac{\epsilon}{2}2 = \epsilon$. Por lo tanto, como ϵ es tan pequeño como queramos $\mu(N) = 0$

- Observación: En la parte anterior estamos usando que si tenemos dos secuencias que cumplen que $c_n < b_n$ entonces $\sum_n c_n < \sum_n b_n$, siendo $\sum_n c_n = \sum_j A_{n_j}$. Recubrimiento refiere a una colección de subconjuntos A de un conjunto X si y solo si la unión de los elementos de la colección A contiene a X.

- Asumiendo $0 \leq p \leq 1$, todo conjunto numerable de Ω tiene medida cero.

  La idea es notar que, usando el ejemplo de las palabras, si $N = \{\omega\}$ y $\omega \in A_{20}$ es un conjunto con 20 restricciones, es decir, las 20 primeras veces sale el 1, o sea $P(A_{20}) = p^{20}$. Es notorio que con n grande ese número va a cero. Entonces con $N \subset A_n$, con $P(A_n) \to_{n\to\infty} 0$. Sea $A_n = \{\omega \in \Omega : w^n = (e_1, \ldots, e_n)\}$, $\omega \in A_n \forall n, \mathbb{P}(A_n) = p^{e_1 + \cdots e_n}(1 - p)^{N - e_1 + \cdots + e_n} \to_{n\to\infty} 0$.

  Otra manera es ver que cualquier palabra es un conjunto numerable, de hecho es la unión de conjuntos numerables de un único elemento (singletones, $\{\omega\}$). Sea ω un elemento definido de Ω, entonces $\forall\ n \geq 1$, el singleton $\{\omega\} \subset \{\omega'\Omega : \omega'^{(n)} = \omega^{(n)}\}$ esta contenido en un evento que tiene probabilidad menor o igual a $(\max(p, 1-p))^n$. Esta cota superior se hace arbitrariamente pequeña a medida que n se hace arbitrariamente grande, por tanto el singleton $\{\omega\}$ es un conjunto o evento con medida cero.

Ejercicio 2.39

Escribir la prueba formal para una palabra $w = (w_1, w_2, \ldots, w_j) \in \{0,1\}^j$ dada.

O sea, probar que el conjunto formado por sucesiones que no contienen la palabra ω tiene medida cero.

Sea $B \in \Omega$ *tal que* $w \notin B$, osea B es el conjunto formado por sucesiones que no contienen la palabra w.

Sea:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(\omega,\omega_2,\ldots) \in \Omega : \omega = (e_1,\ldots), e_i \in \{0,1\}, (e_1,\ldots,e_j) &&\neq (w_1,\ldots,w_j)\} \\
A_2 &= \{(\omega,\omega_2,\ldots) \in \Omega : \omega = (e_1,\ldots), e_i \in \{0,1\}, (e_{j+1},\ldots,e_{2j}) &&\neq (w_1,\ldots,w_j)\} \\
&\ldots \\
A_n &= \{(\omega,\omega_2,\ldots) \in \Omega : \omega = (e_1,\ldots), e_i \in \{0,1\}, (e_{n-1},\ldots,e_{nj}) &&\neq (w_1,\ldots,w_j)\}
\end{aligned}$$

Notar que $B \subset A_1, B \subset A_2, \ldots, B \subset A_n$ y que los $A_i \perp A_j, \forall i \neq j$ puesto que sus indices son disjuntos (conjuntos con indices disjuntos son independientes). Además, conociendo $\mathbb{P}(A_1)$ por propiedad de invarianza de traslaciones tenemos que $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \cdots = \mathbb{P}(A_n) < 1$ puesto que $p \in (0,1)$.

Como $B \subset A_i, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow B \in \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Entonces:

$\mathbb{P}(\cap_i A_i) = \prod \mathbb{P}(A_i) = \prod \mathbb{P}(A_1) = P(A_1)^n \Rightarrow \lim \mathbb{P}(A_1)^n \to_{n\to\infty} 0$. Por lo tanto, B tiene medida cero.

Ejercicio 2.40

Probar que casi seguramente $\omega \in \Omega$ contiene todas las palabras posibles (Infinite monkey theorem). O lo que es igual que su complemento tiene medida cero.

Primero, notar que el conjunto de palabras es numerable, por tanto, todas las posibles palabras van a aparecer en la secuencia. Tenemos ω_* que es nuestra secuencia finita (de 0,1), o sea una palabra. Ahora veamos que la secuencia infinita de $0,1$ que no incluyen a ω_* es de medida cero.

ω_* tiene largo $j > 0$, para cada $m \geq 0$, definamos el evento A_m como el evento que incluye todas las palabras ω: $\{w_{mj+1}, w_{mj+2}, \ldots, w_{(m+1)j}\} \neq w_*$. La probabilidad de $\mathbb{P}(A_0) < 1$ y usandola propiedad de invarianza sabemos que todos los eventos A_i tienen la misma probabilidad. Luego usamos que los índices de cada evento son disjuntos y por tanto, independientes. Pleanteando la probabilidad de la intersección de los eventos A_i, tenemos $\mathbb{P}(\cap_{k\leq m} A_k) = (\mathbb{P}(A_0))^{m+1}$. Los conjuntos ω tales que $\{w_{n+1}, w_{n+2}, \ldots, w_{n+j}\} \neq w_* \forall n \geq 0$ son subconjuntos de $\cap_{k\leq m A_k}$. Y, $\mathbb{P}(\cap_{k\leq m A_k})$ va a cero, si elegimos un m suficientemente grande.

Otra forma de probar lo mismo usando el complemento: Definiendo A_i como los eventos que no contienen la palabra w, $\cup A_i$, cada evento es numerable y la unión de conjuntos numerable es numerable y tiene medida cero (cualquiera conjunto numerable tiene medida cero). Su complemento $\cap A_i^c$ es el conjunto que tiene a todas las palabras, y tiene medida uno porque su complemento tiene medida cero.

Ejercicio 2.41

Probar que el conjunto formado por sucesiones periódicas, a partir de cierto índice, forman un conjunto de medida cero.

Usar que la unión de conjuntos numerables de medida cero tiene medida cero.

Capítulo 3

4.1 $\sigma - \acute{a}lgebra$ generada por una familia

Ejercicio 3.4

Tomamos un subconjunto cualquiera $A \in \mathcal{A} : A \in \cap_\alpha \mathcal{A}_\alpha$, es decir, $\mathcal{A}$ pertenece a todas las $\sigma - \acute{a}lgebra$. Como todas son $\sigma - \acute{a}lgebra$ se cumple la propiedad de que: si $A \in \mathcal{A}_\alpha \rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\alpha$ (las $\sigma - \acute{a}lgebra$ son cerradas por complementos.) y como se cumple para $\alpha \in I$ se cumple que $A^c \in \cap \mathcal{A}_\alpha$.

Ejercicio 3.5

Probar que si tomamos la familia de subconjuntos de Ω formados por un elemento, entonces la $\sigma - \acute{a}lgebra$ coincide con la del ejemplo 3.3.

Ejemplo 3.3: Consideremos un conjunto Ω arbitrario. Consideremos $\mathcal{A}$ la familia de conjuntos $A \subset \Omega$ tales que A es numerable, o que su complemento es numerable. Entonces $\mathcal{A}$ es una $\sigma - \acute{a}lgebra$.

Ejercicio 3.7

Reescribir las diferentes formas que pueden tomar los intervalos:

Recordar las propiedades de una $\sigma - \acute{a}lgebra$: si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$. Si $A_i \in \mathcal{A}$ colección numerable entonces $\cup A_i \in \mathcal{A}$ de lo cual se desprende que si $A_i \in \mathcal{A}$ también $\cap A_i \in \mathcal{A}$.

Por tanto,los intervalos cerrados de la forma $[a, b]$ son conjuntos borelianos porque los podemos escribir como intersección **numerable** de intervalos abiertos, donde cada intervalo abierto es un conjunto de borel y su intersección también lo es:

$$[a, b] = \cap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$$

Ahora podemos ver que los intervalos de la forma $(a, \infty), (-\infty, b)$ también son borelianos:

$$(a, \infty) = \cap_{n=1}^{\infty} (a, a + n)$$
$$(-\infty, b) = \cap_{n=1}^{\infty} (b - n, b)$$

Con esto, los intervalos semiabiertos de la forma $[a, \infty), (-\infty, b]$ también son borelianos:

$$[a, \infty) = \cap_{i=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, \infty)$$
$$(-\infty, b] = \cap_{i=1}^{\infty}(-\infty, b + \frac{1}{n})$$

Lo mismo se va a cumplir para los semiabiertos de la forma $[a, b), (a, b]$. Y por último veamos que los intervalos que constan de un único elemento también son borelianos:

$$\{b\} = \cap_{i=1}^{\infty}(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$$

En conclusión tenemos que los complementos, intersecciones y uniones numerables de los conjuntos anteriores son todos borelianos, lo cual ya sabíamos porque son propiedades de cualquier $\sigma - \acute{a}lgebra$.

4.2 Medidas

Ejercicio 3.9

Demostración proposición siguiente: $Sea(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   Prueba: $\Omega = A \cup A^c$. Entonces $\mathbb{P}(\{\Omega\}) = P(\{A \cup A^c\})$ como los eventos A, A^c son disjuntos, la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades, y $P(\Omega) = 1$. Entonces $1 = \mathbb{P}(A) + P(A^c)$.

2. Si $A \subseteq B$ son subconjuntos de $\mathcal{A}$, entonces $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$

   Prueba: Como $A \subseteq B$, $B = A \cup (B \cap A^c)$. Entonces $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{A \cup (B \cap A^c)\})$ .como los eventos son disjuntos tenemos $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$ como $\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0$, tenemos $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$.

3. Sean A_i una colección numerable en $\mathcal{A}$, entonces $\mathbb{P}(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i)$

   Prueba a revisar´: Notar que los A_i no tienen porque ser disjuntos. Entonces $\cup A_i = (\cup^* A_i) \cup (\cap A_i)$ donde $\cup^* A_i$ denota la unión disjunta de los A_i. Y la unión disjunta de A_i es disjunta a las posibles intersecciones de A_i por construcción. Entonces $\mathbb{P}(\{\cup A_i\}) = \mathbb{P}(\{(\cup^* A_i) \cup (\cap A_i)\}) = \mathbb{P}(\{\cup^* A_i\}) + \mathbb{P}(\{\cap_i\}) \leq \mathbb{P}(\{\cup^* A_i\}) = P(A_i)$.

   Prueba correcta: Sea $A'_n = A_n \cap A, B_1 = A'_1,\ \forall n > 1, B_n = A'_n - \cup_{m=1}^{n-1}(A'_m)^c$. Los B_n contruidos son disjuntos y su unión es A, $\cup_n B_n = A$. Usando que $B_m \subset A_m$ y la proposición 2 ($A \subseteq B \to \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$), tenemos que: $\mathbb{P}(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \emptyset(A_m)$.

   Otra forma: Sea $B_1 = A_1, B_n = A_n - \cup_{i=1}^{n-1} A_i \ \ \forall n \geq 2$. Los B_n son una sucesión de eventos disjuntos dos a dos que cumplen $B_n \subseteq A_n$ y

$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, con lo que tenemos:

$$\mathbb{P}(\{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\}) = \mathbb{P}(\{\cup_{n=1}^{\infty} B_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

4. **Sean A_i una colección numerable en $\mathcal{A}$ creciente ($A_i \subseteq A_{i+1}$) entonces $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$.**

   Prueba:

   Sea $B_n = A_n - A_{n-1}$. Entonces los B_n son disjuntos y su unión es A, $\cup_{m=1}^{\infty} = A$. Restringiendo hasta n, tenemos $\cup_{m=1}^{n} B_m = A_n$, entonces: $\mathbb{P}(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(B_m) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

5. **Sean A_i una colección numerable en $\mathcal{A}$ decreciente ($A_i \supseteq A_{i+1}$) entonces $\mathbb{P}(\cap_i A_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$**

   Prueba:

   Si $A_n \supseteq A_{n+1}$ entonces $A_n^c \subseteq A_{n+1}^c$. Por la parte anterior, tenemos que: $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$ por tanto $\mathbb{P}(\cup_i A_i^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i^c)$. Sabemos que (De Morgan) $1 - \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - \mathbb{P}(A_n))$, por lo tanto se cumple la proposición $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{P}(A_n))$

   Otra forma:

   Tenemos que $A_1 - A_n$ tiende a $A_1 - A$, por la parte anterior sabemos que: $\mathbb{P}(A_1 - A_n) \to \mathbb{P}(A_1 - A)$, además $A_1 \supset B$, entonces $\mathbb{P}(A_1 - B) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(B)$, usando que son disjuntos tenemos $\lim \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

4.3 Variables aleatorias

4.3.1 Ejercicio 3.22

Probar que la distribución de una v.a es una medida en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$

Abstracto tenemos $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ son dos espacios medibles cualesquiera con $X : \Omega \to \Omega'$ siendo un mapa medible o una función medible.

En probabilidad tenemos $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, con $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. ($\mathbb{R}$ es la $\sigma - \acute{a}lgebra$ de Borel). Entonces tenemos que $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ definida por $\mathbb{P}_X := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$ con $B \in \mathcal{B}$ se llama la distribución de probabilidad de X. (en las notas usamos $\mu(B)$ en vez de $\mathbb{P}_X$)

Queremos demostrar que $\mathbb{P}_X$ es una medida de probabilidad. Por tanto tiene que cumplir que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ y la sigma aditividad.

$$X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \Rightarrow \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

El último paso es porque $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad.

$$X^{-1}(\emptyset) = \Omega \Rightarrow \mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\Omega) = 0$$

Idem que el paso anterior.

Por último, para la sigma aditividad, tomemos conjuntos numerables $B_1, B_2, \cdots \in B(\mathbb{R})$ tales que sean disjuntos dos a dos. Entonces con $i \neq j \Rightarrow X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j) = X^{-1}(B_i \cap B_j) = \emptyset$. Esto se cumple porque la preimagen es estable ante intersección (de hecho se cumple para cualquier mapa de Ω a $\mathbb{R}$), los B_i, B_j son disjuntos y porque la preimagen del vacío es el vacío. Por tanto, las preimagenes (cantidad numerable) son también disjuntas dos a dos. Y por definición de X v.a tenemos que $X^{-1}(B_1), X^{-1}(B_2), \cdots \in \mathcal{A}$ que como mencionamos son disjuntos dos a dos. Finalmente:

$\mathbb{P}_X(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) = \mathbb{P}(X^{-1}(\cup_{j=1}^{\infty} B_j)) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^{\infty} X^{-1}(B_j)) \stackrel{*}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(B_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_X(B_j)$.

En el primer paso usamos la definición de P_X, en el segundo que las preimagenes son estables ante uniones, en (*) que las preimagenes son disjuntas y que $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad (y por tanto, sigma-aditiva.) y en el último paso nuevamente la definición de P_X (en reverso claro).

4.3.2 Ejercicio 3.23

Distribución de la función indicatriz

4.3.3 Ejercicio 3.25

Propiedades de la función de distribución

4.3.4 Ejercicio 3.32

Función exponencial

4.3.5 Ejercicio 3.38

$f \circ X : \Omega \to T$, tomamos un conjunto de la *sigmaa* del codominio, llamemoslo C. Entonces $(f \circ X)^{-1}(C) = X^{-1}(f^{-1}(C))$ pertenece a la *sigmaa* porque $f^{-1}(C)$ pertenece a la $\sigma - \acute{a}lgebra \Rightarrow$ por hipótesis, por lo cual $f \circ X$ es medible.

4.3.6 Ejercicio 3.42

Dado un $a \in \mathbb{R}$ se tiene que el conjunto $\{\inf_n X_n \leq a\} = \cup_n \{X_n \leq a\}$ donde cada conjunto $\{X_n \leq a\}$ pertenece a la $\sigma - \acute{a}lgebra$ por ser borelianos (conjuntos abiertos), y por lo tanto, la unión de borelianos pertenece a la $\sigma - \acute{a}lgebra$.

Dado un $b \in \mathbb{R}$ se tiene que el conjunto $\{\sup_n X_n > b\} = \cup_n \{X_n > b\}$, donde cada conjunto $\{X_n > b\}$ pertenece a la $\sigma - \acute{a}lgebra$ por ser borelianos, y por lo tanto, la unión de borelianos pertenece a la $\sigma - \acute{a}lgebra$.

El $\lim_{n \to \infty} \inf X_n(\omega) = \sup_n(\inf_{m \geq n} X_m)$ donde $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\inf_{m \geq n} X_m$ es una v.a, y por la parte anterior tenemos que el supremo es una variable aleatoria.

4.3.7 Ejercicio 3.47

Recordar que $|a+b| \leq |a| + |b|$. Podemos ir por ese lado. Queremos llegar a $P(\{X - Y = 0\}) = 1$.

Previa; Convergencia de sucesiones a un número. $a_n \to a; b_n \to b \Rightarrow b_n + a_n \to a + b$. Caso $a_n \to a$, dado un $\epsilon > 0$ $\exists n_0$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Caso $b_n \to b$, existe un n_0' tal que si $n \geq n_0'$ entonces $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Si $n \geq \max(n_0, n_0')$ tenemos que $|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Ahora hagamos veamos convergencia en probabilidad $X_n \to a$, $Y_b \to b \Rightarrow X_n + Y_n \to^p a + b$. Tenemos que probar que dado $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(\{|X_n + Y_n - a - b| \geq \epsilon\}) \to 0$. Notemos que podemos reescribir $\mathbb{P}(\{|X_n + Y_n - a - b| \geq \epsilon\}) \to 0$ como $\mathbb{P}(\{|(X_n - a) + (Y_n - b)| \geq \epsilon\})$ ahora notar que $\{|(X_n - a) + (Y_n - b)| \geq \epsilon\} \subseteq \{(X_n - a) \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{(Y_n - b) \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ por lo tanto $\mathbb{P}(\{|(X_n - a) + (Y_n - b)| \geq \epsilon\}) \leq \mathbb{P}\{(X_n - a) \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{(Y_n - b) \geq \frac{\epsilon}{2}\} \leq \mathbb{P}(\{(X_n - a) \geq \frac{\epsilon}{2})\} + \mathbb{P}(\{(Y_n - b) \geq \frac{\epsilon}{2})\}$ pero sabemos por hipótesis que ambos términos convergen en probabilidad (con $n \to \infty$) y además cada secuencia de números convergen a otro número (cero) y sabemos por el caso previo que entonces convergen a la suma, entonces todo converge a cero y queda probado.

Ahora vamos a la prueba:

Consideremos los eventos $B_\epsilon = \{\omega : |X - Y| \geq \epsilon\}$, el cual podemos ver que esta contenido en $A_\epsilon = A_{\epsilon_1} \cup A_{\epsilon_2} = \{\omega : |X - X_n \geq \epsilon/2|\} \cup \{\omega : |X_n - Y \geq \epsilon/2|\}$, por tanto, la probabilidad debe ser menor a la probabilidad de la unión.

$$P(B_\epsilon) \leq P(A_\epsilon) \leq P_{A_{\epsilon_1}} + P_{A_{\epsilon_2}} \to_n 0$$

Donde aplicamos que la probabilidad cumple la propiedad de subaditividad y las hipótesis de convergencia en probabilidad de cada v.a. Luego si $P(B_\epsilon) \to 0 \forall \epsilon \Rightarrow P(B_\epsilon)^c = 1 \forall \epsilon$, por tanto, $P(\cap B_\epsilon) = 1$

4.3.8 Ejercicio 3.48

f_n no converge a ningún punto individual porque cada punto esta en un número infito de esos intervalos y también no esta en un número infinito. Osea contiene infinitos 1 e infinitos 0, por lo cual no converge. Y podríamos encontrar una subsecuencia para la cual $f_n = 1$ y otra $f_n = 0$, encontrando su límite inferior y superior (1, 0). O podemos escribir que $X_n \not\to^{c.s} 0$ dado que el conjunto $\{\omega \in \Omega : lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \exists\} = \emptyset$.

4.3.9 Ejercicio 3.51

Siguiendo la proposición anterior:

Partimos de la definición de convergencia casi segura:

$$P(\lim X_n = Y) = 1 \iff P\left(\cap_k \cup_n \cap_l \{|X_n - X| \leq \epsilon\}\right) \iff P(\cup_n N_n) = 1 \; \forall k$$

Siendo $N_n = \cap_l \{|X_n - X| \leq \epsilon\}$, como los N_n son una sucesión creciente, es decir, $N_n \subset N_{n+1}$, se cumple la propiedad de que al ser los N_n es una colección

numerable en la $\sigma - \acute{a}lgebra$, creciente, sabemos que $P(\cup N_n) = \lim P(N_n)$, por lo tanto:
$P(\cup_n N_n) = \lim_{n\to\infty} P(N_n)$

4.4 Integrales y Esperanza

4.4.1 Ejercicio 3.53

La idea es ver que los conjuntos A_i los podemos particionar y la suma del total de sus área, va a seguir siendo la misma.