Entrega P2

Matias Bajac

2023-06-12

Ejercicio 3.84

Aplicamos la **desigualdad de Jensen** , $\phi(\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}\,\phi(X))$.

Tenemos que $\phi(x)$ es convexa ya que $\phi''(x) > 0$

$$\mathbf{E}(\phi(x)) = \mathbf{E}(e^x) = \underbrace{\sum_{m=1}^{n} p(m) y_m}_{\substack{\text{Por definición} \\ \text{de esperanza}}}$$

$$\phi(\mathbf{E}(X) = exp(\sum_{m=1}^{n} p(m) \log(y_m))$$

$$\underbrace{\exp(\log \prod_{m=1}^{n} y_m^{p(m)})}_{\substack{\text{Por propiedad} \\ \text{de logaritmo}}} = \prod_{m=1}^{n} y_m^{p(m)})$$

entonces por la desigualdad de Jensen podemos concluir que

$$\exp \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(e^x)$$

Ejercicio 4.5

Si $X_n \xrightarrow{L^2} X$ entonces $X_n \xrightarrow{P} X$

Por hipotesis, si $X_n \xrightarrow{L^2} X$ entonces

$$\mathbf{E}(X_n - X)^2 \xrightarrow{n} 0$$

Para todo $\epsilon > 0$

$$\Pr\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = \Pr\left(|X_n - X|^2 > \epsilon^2\right) \leq \mathbf{E}\left(\frac{(X_n - X)^2}{\epsilon^2}\right) \xrightarrow{n} 0$$

Usando la desigualdad de Chebyshev - Markov, queda probado que Si $X_n \xrightarrow{L^2} X$ entonces $X_n \xrightarrow{p} X$.

- El recíproco no es cierto.

Ejercicio 5.8

$X_n = \frac{1}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{2^n} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{2^n} \\ \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ \end{cases}$$

$F_n(x)$ no es continua en x=0 , ya que $F_n(0) = 0 \neq F(0) = 1$, en este punto no hay convergencia

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \end{cases}$$

en todos los puntos de continuidad , se cumple que $F_n(x) = F(x)$

entonces diremos que en todos los puntos de continuidad, $X_n \xrightarrow{D} F(x)$

Ejercicio 3.102

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty = td\mu x(t) =$$

$$\int_0^\infty \lambda([0,t])d\mu x(t) =$$

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \ I[0,t](s) \ d\lambda(s)\Big)d\mu x(t) =$$

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \ I[0,t](s)d\mu x(t) \ \Big)d\lambda(s) =$$

$$\int_0^\infty \Pr(x > s)d\lambda(s)$$