Introducción a la Modelización de Series Temporales

Curso de Series Cronológicas 2024

Silvia Rodríguez Collazo

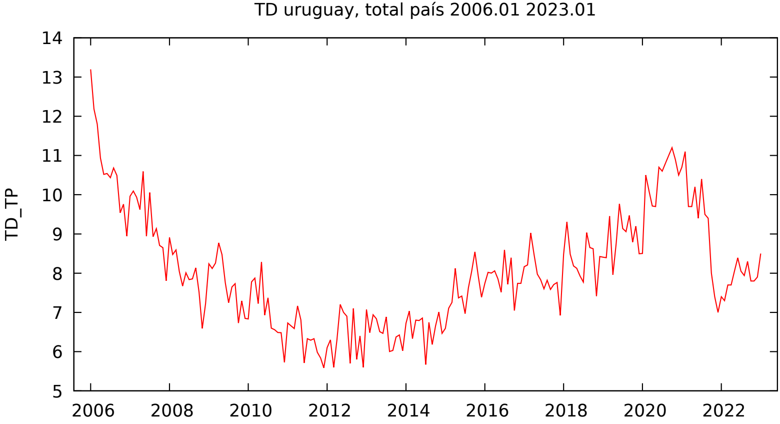
Licenciatura de Estadística
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

Introducción

- Una serie de tiempo es una secuencia ordenada de acuerdo a un órden temporal.
- En general vamos a trabajar con series discretas donde las observaciones se obtienen a intervalos regulares. Series anuales, trimestrales, mensuales, diarias, cada minuto, etc.
- Es muy diferente pensar en la temperatura por hora de un día de otoño en Uruguay si la pensamos ordenada por hora, que si se desordena.El conjunto de datos de temperatura por hora sin el orden temporal, carece de sentido.
- En este tipo de datos el orden cronológico es fundamental para entender su trayectoria.
- **La modelización y el análisis va a estar determinado por esta estructura temporal**.

Características de la evolución de las series de tiempo

TD Uruguay, Total país 2006.01 - 2023.01

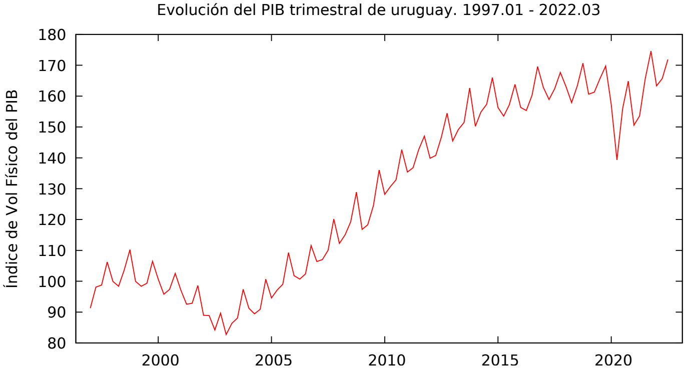


Fuente: INE

¿Cuál o cuáles son las características más relevantes de esta serie?

Algunas características de las series de tiempo económicas

Evolución de PIB de Uruguay

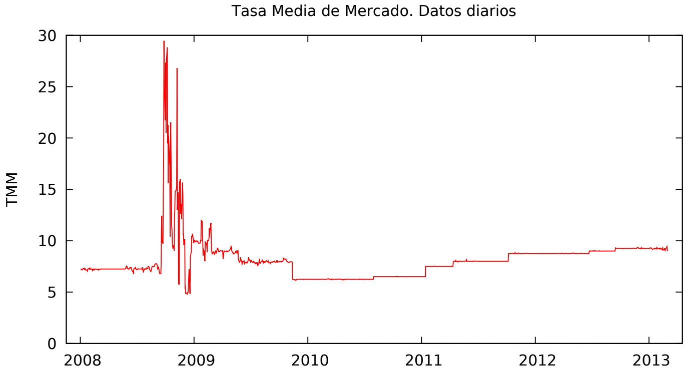


Fuente: BCU

- Este es el gráfico de la serie del IVF del PIB pero considerando la información relevada TRIMESTRALMENTE por el BCU. ¿Qué nuevas características detecta en su trayectoria respecto a la serie anual?
- ¿La frecuencia de los datos influye en la trayectoria de la serie?
- ¿ Y el efecto económico de la crisis sanitaria?

Algunas características de las series de tiempo económicas

Tasa Media de Mercado diaria (TMM)



Fuente: BCU. La Tasa Media de Mercado (T.M.M.) surge de las operaciones a un día de plazo que realicen las Instituciones Bancarias entre si y entre éstas y el Banco Central del Uruguay con excepción de las operaciones de facilidad de depósitos y de crédito.

¿Dirían que tiene una varianza constante en el tiempo?

Evolución diaria del precio del petróleo WTI, USD/Bbl, 1 día últimos 5 años hasta el 9 de marzo 2023

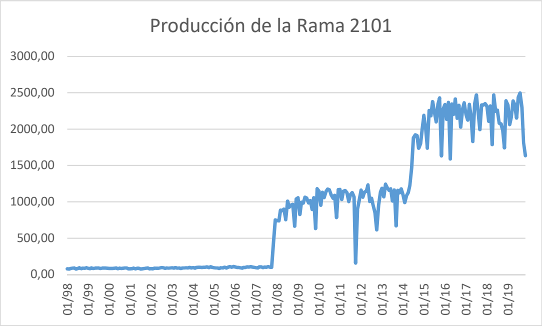
Fuente: Trading Economics.

https://tradingeconomics.com/commodity/crude-oil

Algunas características de las series de tiempo económicas

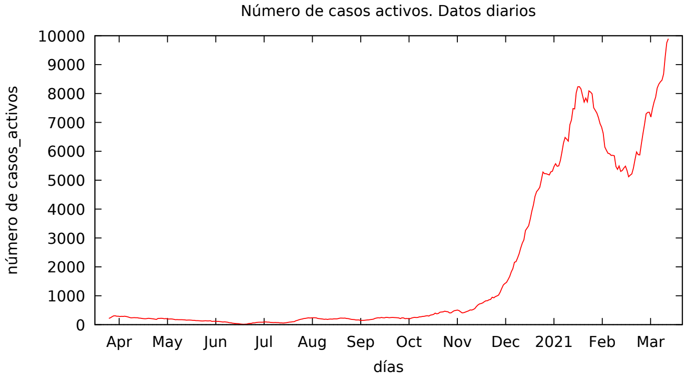
Evolución de la producción de la Rama industrial 2101
Fuente: INE

¿ La media es constante a través del tiempo?



Crisis sanitaria en Uruguay y las series de tiempo

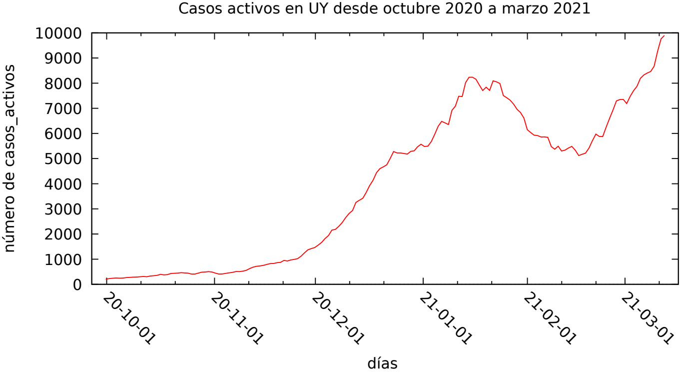
Casos activos diarios de enfermos que contrajeron COVID-19 en Uruguay



Fuente: SINAE y GUIAD-COVID

COVID-19 y series de tiempo

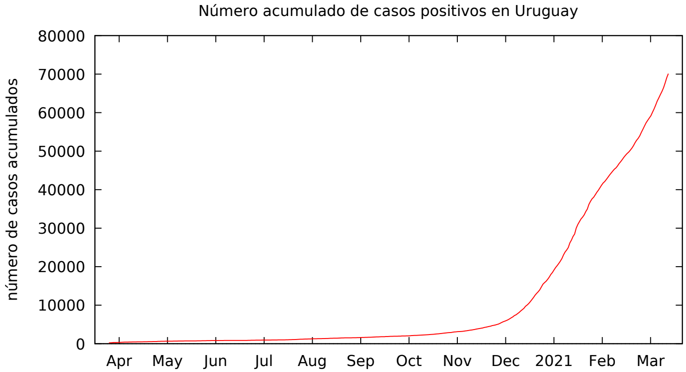
Casos activos diarios de enfermos que contrajeron COVID-19 en Uruguay hasta marzo de 2021



Fuente: SINAE y GUIAD-COVID

COVID-19 y series de tiempo

Acumulado de casos positivos diarios de enfermos que contrajeron COVID-19 en Uruguay hasta marzo de 2021



Fuente: SINAE y GUIAD-COVID

El poder de la visualización gráfica en Series de Tiempo

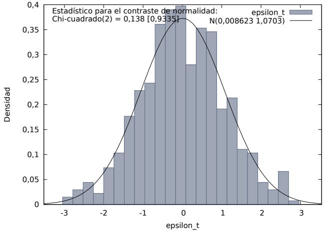
Como hemos visto la representación gráfica en ST juega un papel importante tanto en el reconocimiento inicial o exploratorio de la serie y sus propiedades como para identificar posibles patrones de dependencia temporal.

- Es una práctica recomendable, hacer un gráfico de líneas de la serie para visualizar si la serie presenta un crecimiento sistemático o no. Para hacer una primer detección sobre la estabilidad de la varianza en el tiempo.
- En una primer observación se puede realizar hipótesis sobre si se han registrado quiebres esporádicos o quiebres frecuentes pero no predecibles.
- En breve veremos como un primer paso en la modelización univariada, siguiendo la metodología de Box y Jenkins, es realizar la identificación del patrón de dependencia temporal, lo que se realiza mediante la observación de dos gráficos llamados Función de autocorrelación (FAC) y Función de autocorrelación parcial (FACP).
- Gráficos como el histograma permiten obtener un primer aproximación a la densidad de probabilidad de una variable aleatoria.

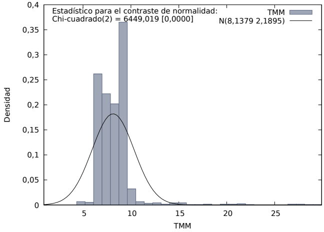
El poder de la visualización gráfica en Series de Tiempo II

Gráficos como el histograma permiten obtener un primer aproximación a la densidad de probabilidad de una variable aleatoria.

Histograma del Proceso Ruido Blanco



Histograma de la Tasa Media de Mercado (TMM)



Procesos Estocásticos y series de tiempo discretas

- Un fenómeno estadístico que evoluciona en el tiempo de acuerdo a leyes probabilísticas se llama **proceso estocástico** $\{X_t\}$.
- Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, ...X_0$
- La **serie de tiempo** puede ser vista como una realización, producto de esa ley probabilística. Al analizar una serie de tiempo la vamos a estar concibiendo como una realización de un proceso estocástico, x_t (Box-Jenkins-Reinsel 1994).
- En estadística clásica se manejan los conceptos de población y muestra. Los conceptos equivalentes en series de tiempo son el proceso estocástico teórico (PE) y las realizaciones o los datos observados.
- El objetivo inicial es hacer inferencia sobre las propiedades o características básicas del proceso estocástico *PE* a través de la información contenida en la serie observada. (Granger- Newbold (1976)).

Procesos estocásticos y series de tiempo II

- La distribución del proceso $\{X_t\}$ está caracterizada por su función de distribución
- La serie de tiempo queda completamente definida a través de la función de distribución conjunta.
- La evolución en el tiempo queda descrita de acuerdo a ciertas leyes probabilísticas caracterizadas por $F_{X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n}}(x_1, x_2 \ldots, x_n)$,la función de distribución.
- Contar con una única realización hace que el proceso de inferencia cobre características especiales. Para hacer inferencia es necesario asegurar cierta estabilidad en las observaciones. Dicha *estabilidad* se puede describir en términos estadísticos mediante el concepto de **estacionariedad**.

Breve panorama de la metodología de modelización univariada ST

En esta parte del curso vamos a tomar un enfoque univariado y estudiar una metodología de modelización propuesta por Box y Jenkins.

Trabajaremos sobre un tipo de modelos. Los modelos ARMA(p,q), que luego generalizarmeos a modelos ARIMA(p,d,q) y finalmente a modelos SARIMA (p,d,q)(P,D,Q).

Es un proceso de modelización iterativo que comprende las siguientes etapas

- Identificación del posible modelo
- Estimación del modelo identificado
- Diagnóstico y validación del modelo estimado
- Predicción en base al modelo seleccionado

Estacionariedad

Intuición

El proceso estocástico existe conceptualmente, pero no es posible obtener realizaciones o muestras sucesivas del mismo, entonces para estimar las características transversales del proceso es necesario suponer que esas propiedades son estables a lo largo del tiempo (concepto de estacionariedad).

La **importancia del concepto de estacionariedad** radica en que, dado que sólo contamos con una observación para cada momento del tiempo, una única realización, que las series manifiesten tener propiedades invariantes en el tiempo cobra una importancia fundamental.

Estacionariedad estricta

Estacionarieadad estricta
La serie de tiempo $\{X_t, t \in Z\}$ se dice estrictamente estacionaria si las distribuciones conjuntas de $(X_{t_1} \dots X_{t_k})'$ y $(X_{t_1+h}, \dots X_{t_k+h})'$ son las mismas para todo entero h, y para todo $t_1, \dots, t_k, k \in Z$. Es decir,

$$F_{(X_{t_1} \dots X_{t_k})}(x_1, \dots, x_k) = F_{(X_{t_1+h} \dots X_{t_k+h})}(x_1, \dots, x_k)$$

La distribución conjunta de cualquier conjunto de variables no se modifica si trasladamos las variables en el tiempo.

Estacionariedad débil

La serie de tiempo $\{X_t, t \in Z\}$ con $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ es covarianza estacionaria ó débilmente estacionaria si:

- $E(X_t) = \mu \; \forall t \in Z$ y $|\mu| < \infty$. Media constante y finita.
- $E(X_t - \mu)^2 < \infty \; \forall t \in Z$. Varianza finita y constante.
- $\gamma_j = Cov(X_t, X_{t+j}) = E\left[(X_t - \mu)(X_{t+j} - \mu)\right] = \; \forall j \; t \in Z$. Las covarianzas no dependen del tiempo sino de la ventana de rezagos j.

La estacionariedad débil no garantiza la estabilidad completa del proceso, porque la distribución de la variable aleatoria X_t puede estar cambiando en el tiempo, si los momentos de mayor órden cambian.

Pero si suponemos que las variables tienen distribución conjunta normal n-dimensional, como ésta queda determinada por las medias, varianzas y covarianzas , entonces todas las distribuciones serán idénticas, por lo que en este caso, la estacionariedad débil y estricta coinciden.

Algunas definiciones adicionales

- **Proceso Gaussiano o Normal**:Si la distribución de las observaciones asociadas con cualquier conjunto de tiempos es Normal multivariada, el proceso se denomina Normal o Gaussiano.
- **Operador de Rezagos**:Anotaremos L al operador de rezagos que transforma una serie de tiempo en una nueva serie de tiempo. Es un operador lineal, tal que, aplicado a la variable X_t produce la nueva variable X_{t-1}: $LX_t = X_{t-1}$.
- Se extiende fácilmente a más rezagos $L^j X_t = X_{t-j}, \quad j = 0, 1, \ldots$ L puede manipularse como cualquier cantidad algebraica.Sigue las mismas reglas algebraicas que el operador multiplicación.
- Una constante se interpreta como una función que es constante en el tiempo, por tanto aplicar el operador de rezagos a una constante, no da lugar a modificaciones.$L(a) = a$
- Es un operador lineal, por tanto : $L(aX_t + bY_t) = aX_{t-1} + bY_{t-1}$
- **Operador Diferencias**:Un caso particular de operador polinómico es el operador diferencias,se define como $\Delta = (1 - L)$.
  Por tanto, $\Delta X_t = (1 - L) X_t = X_t - X_{t-1}$

Herramientas para analizar la estructura de dependencia temporal

La estructura de dependencia lineal entre las variables aleatorias del proceso se representa por la funciones de autocovarianzas y autocorrelación.

La estructura de dependencia lineal entre las variables aleatorias del proceso se representa a través de las funciones de autocovarianzas y autocorrelación conjuntamente con la función de autocorrelación parcial.

Función de autocovarianzas del proceso

Es una función que describe las covarianzas entre dos variables de proceso en dos instantes cualesquiera.
Si $\{X_t, t \in T\}$ es un proceso estacionario en media y con $V(X_t) < \infty$ para cada $t \in T$, entonces la FACov γ_j de $\{X_t\}$ se define como:

$$\gamma_j = \gamma(t, t+j) = Cov(X_t, X_{t+j}) = E\left[(X_t - \mu_t))(X_{t+j} - \mu_{t+j}))\right] \quad (1)$$

$$\gamma_0 = Var(X_t) = \sigma_X^2 \quad (2)$$

Las autocovarianzas tienen dimensiones, las del cuadrado de la serie, por lo que no son convenientes para comparar series medidas en unidades distintas. Se puede quitar esta dimensión y tener una medida de la dependencia lineal mediante la función de autocorrelación ρ_j.

Herramientas para analizar la estructura de dependencia temporal II

La **función de autocorrelación** (FAC) del proceso $\{X_t\}$ es una medida normalizada de la función de autocovarianzas y se define como:

$$\rho_j = \frac{Cov(X_t, X_{t+j})}{\sigma_t \sigma_{t+j}} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \tag{3}$$

A diferencia de la función de autocovarianzas la función de autocorrelación es **independiente de la escala de medida de la serie**. La función de autocorrelación representa los coeficientes de autocorrelación ρ_j en función del retardo j.

Función de Autocorrelación Parcial

La **FACP** viene dada por el valor del coeficiente de autocorrelación parcial para los distintos valores de k, con $k = 1, 2, \ldots, \overline{k}$

El **coeficiente de autocorrelación parcial de orden** k muestra la correlación existente entre $\bar{Y}_t$ y $\bar{Y}_{t-k}$ una vez que se depuran de la relación entre las dos variables la dependencia lineal debida a valores intermendios, lo que podríamos identificar como efectos indirectos a través de $\bar{Y}_{t-k+1}$ a $\bar{Y}_{t-1}$.

$$
\begin{aligned}
\bar{Y}_t &= \alpha_{11}\bar{Y}_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\
\bar{Y}_t &= \alpha_{21}\bar{Y}_{t-1} + \alpha_{22}\bar{Y}_{t-2} + \varepsilon_{2t} \\
&\vdots \\
\bar{Y}_t &= \alpha_{k1}\bar{Y}_{t-1} + \alpha_{k2}\bar{Y}_{t-2} + \cdots + \alpha_{kk}\bar{Y}_{t-k} + \varepsilon_{kt}
\end{aligned}
$$

Siendo $\bar{Y}_t = Y_t + \mu$ y μ la media del proceso estacionario.
LLamaremos FACP a la representación de los coeficientes de la autocorrelación parcial en función de los retardos.

Notación: Sea α_{11} es la autocorrelación parcial para $k = 1$ y α_{33} es la autocorrelación parcial para $k = 3$.

Un Proceso Estocástico fundamental: Ruido Blanco ε_t

El proceso estocástico débilmente estacionario más simple que se puede definir, se denomina RUIDO BLANCO (RB).
Un proceso estocástico estacionario se denomina Ruido Blanco si:

1. $E(\varepsilon_t) = 0 \; \forall t \in Z$
2. $\gamma_0 = \sigma^2$
3. $\gamma_k = 0$ si $k \neq 0$

Es un proceso con esperanza cero, varianza constante y donde las variables del proceso están incorrelacionadas para todos los retardos.

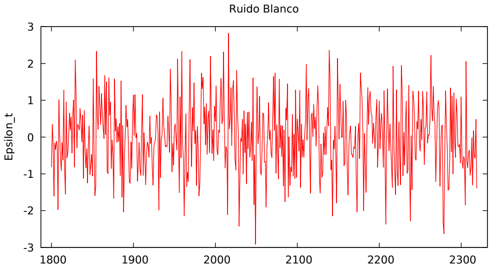
Si se impone la condición de que las variables del proceso tienen distribución normal, el proceso será estacionario en sentido estricto y el proceso se denomina **ruido blanco gaussiano**.

Ruido Blanco ε_t

El proceso Ruido Blanco representa la aleatoriedad pura de la serie. En una serie que representa el conjunto de realizaciones de variables aleatorias que provienen de un proceso Ruido Blanco, no es posible detectar ningún tipo de regularidad, de periodicidad.

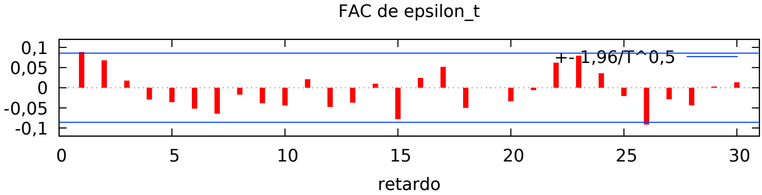
Por ejemplo: los números ganadores de la lotería de Ciencias Económicas en los últimos 50 años. No es posible predecir con esa información le próximo número ganador.
No hay dependencia entre los futuros números ganadores y los números pasados.

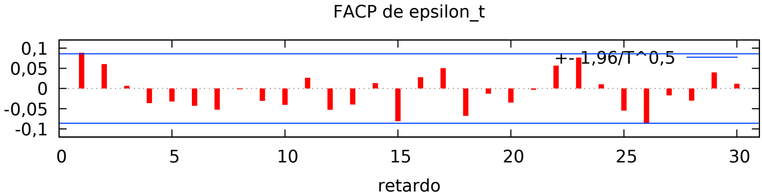
Simulación de un proceso Ruido Blanco



FAC de un Ruido Blanco, ε_t

Función de autocorrelación de un proceso Ruido Blanco





Modelos Autorregresivos

Los modelos autorregresivos se basan en la idea de que los valores corrientes de la serie puede ser especificados a partir de los p valores pasados, como combinación lineal de los mismos más un componente que introduce la aleatoriedad (un ruido blanco) .

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un proceso Ruido Blanco.

Utilizando el operador de retardos:

$$\Phi(L).Y_t = \delta + \varepsilon_t$$

Si $\delta = 0$

$$Y_t = \frac{\varepsilon_t}{\phi(L)}$$

Siendo $\Phi(L)$ el polinomio característico.

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - ... - \phi_p L^p$$

A partir de un RB genero Y_t. El filtro $\frac{1}{\phi(L)}$ es el que introduce correlación en el proceso Y_t, correlación que el RB , ε_t no tiene.

Modelos aurorregresivos de primer órden, AR(1)

Cuando $p = 1$ tenemos un modelo AR(1) que se escribe :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Haciendo N sustituciones sucesivas se tiene:

$$Y_t = \phi_1^{N+1} Y_{t-N-1} + \sum_{j=0}^{N} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

Se puede profundizar este punto en las Notas del Curso. En estas presentaciones haremos referencia a un caso, que es el que se presenta a continuación:

- Cuando $N \to \infty$, lo que significa que las realizaciones de la serie arrancan en el pasado infinito , y $|\phi_1| < 1$ el primer sumando $\to 0$
- Con $|\phi_1| < 1$, $\phi_1^{N+1} \to 0$ Se puede escribir a la suma de infinitos términos como: $(1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \phi_1^3 + \dots) \to \frac{1}{(1-\phi_1)}$ Por lo que se puede re-escribir el proceso AR(1) como una suma de infinitos ruidos blancos rezagados.

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

Procesos AR(1)

Otra forma de expresar ese resutado se obtiene en la expresión en el operador de retardos, ahora incluimos una constante distinta de cero en el proceso:

$$(1 - \phi_1 L) Y_t = \delta + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \frac{\delta}{(1 - \phi_1 L)} + \frac{\varepsilon_t}{(1 - \phi_1 L)}$$

Con $|\phi_1| < 1$:

$$Y_t = \frac{\delta}{(1 - \phi_1 L)} + (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \dots)\varepsilon_t$$

$$Y_t = \frac{\delta}{(1 - \phi_1)} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

Por lo que el proceso AR(1) con $|\phi_1| < 1$ se puede representar como una suma ponderada de ruidos blancos rezagados, que más adelante anotaremos como MA(∞)

AR(1) y Función de impulso respuesta

Consideremos la siguiente expresión:

$$Y_t = \frac{\delta}{(1-\phi_1)} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

Si $\delta = 0$, la expresión se simplifica y queda:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j} = (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \dots)\varepsilon_t$$

Como el proceso es estacionario $\phi < 1$, por tanto los coeficientes que multiplican a los ε_j van decreciendo a medida que aumenta el rezago.
Por tanto los efectos en Y_t de los shocks pasados van siendo más pequeños a medida que se alejan del momento t. Y el patrón con que se diluyen es ϕ_j^i exponencial.
Podemos interpretar esta ecuación como la forma como se propagan los shocks en la variable.Que será diferente para los distintos procesos.
Una características de los procesos estacionarios es que son de <u>memoria corta</u>, lo que ocurre en un pasado lejano deja de afectar la dinámica de hoy.

Estacionariedad débil de los procesos AR(1) y Función de autocovarianzas

Para analizar a estacionariedad de un proceso, se pueden verificar las propiedades antes mencionadas de estacionariedad débil o alternativamente se pueden calcular las raíces del polinomio de rezagos y verificar que sean en valor absoluto mayores a uno.
Si se sigue el segundo procedimiento se llega a la siguiente condicioón $|\phi_1| < 1$ para la estacionariedad del proceso AR(1).

La media incondicional del proceso es $E(Y_t) = \frac{\delta}{(1-\phi_1)} = \mu$.

La Función de autocovarianzas

- $\gamma_0 = E(Y_t - \mu)^2 = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots) = \frac{\sigma^2}{(1-\phi_1^2)}$
- $\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = E\left[(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j})(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j-k})\right]$
  $= \sigma^2 \phi_1^k (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots) = \frac{\sigma^2 \phi_1^k}{1-\phi_1^2}$

Observar que $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$

En general: $\boxed{\gamma_k = \phi_1^k \gamma_0}$

¿Qué comportamiento de Y_t cabe esperar si $|\phi_1| = 1$?

Función de Autocorrelación de un proceso AR(1)

- A cada autocorrelación la anotaremos como ρ_k
- La **Función de Autocorrelación (FAC)** viene dada por el conjunto de valores de ρ_k para los distintos k, con $k = 1, 2, \ldots, \overline{k}$
- El **coeficiente de autocorrelación de orden k** en un AR(1):

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sigma^2 \phi_1^k}{1 - \phi_1^2} \frac{(1 - \phi_1^2)}{\sigma^2} = \phi_1^k$$

- $\rho_0 = 1$
  $\rho_1 = \phi_1$
  $\rho_2 = \phi_1^2$
  $\rho_k = \phi_1^k$

La forma y la velocidad de convergencia de la FAC teórica de un AR(1) va a depender del signo y de la magnitud del coeficiente ϕ_1.

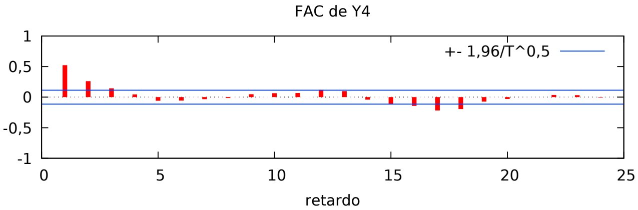
Va a mostrar un **decrecimiento exponencial**, pues: $\gamma_k = \phi_1^k \gamma_0$,que será más o menos acentuado dependiendo de la magnitud de $|\phi_1|$.

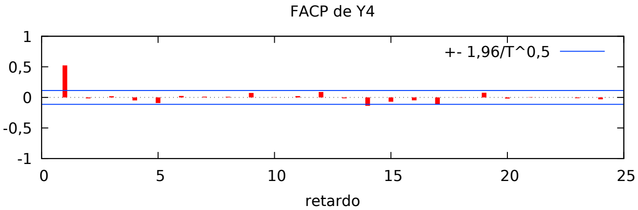
La forma de la convergencia dependerá del signo de ϕ_1

Modelos AR(1) - Función de Autocorrelación

Distintos tipos de convergencia que se pueden observar en las FAC y FACP de procesos estocásticos tipo AR(1)

AR(1) con ϕ=0.5

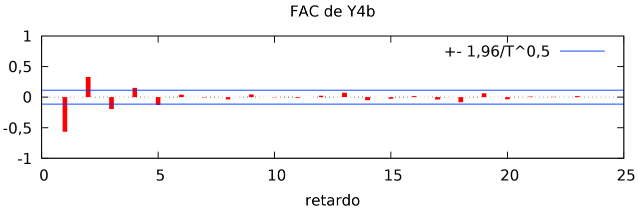


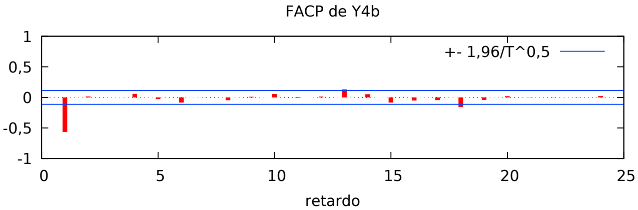


Modelos AR(1) - Función de Autocorrelación

Distintos tipos de convergencia que se pueden observar en las FAC y FACP de procesos estocásticos tipo AR(1)

AR(1) con ϕ=-0.6

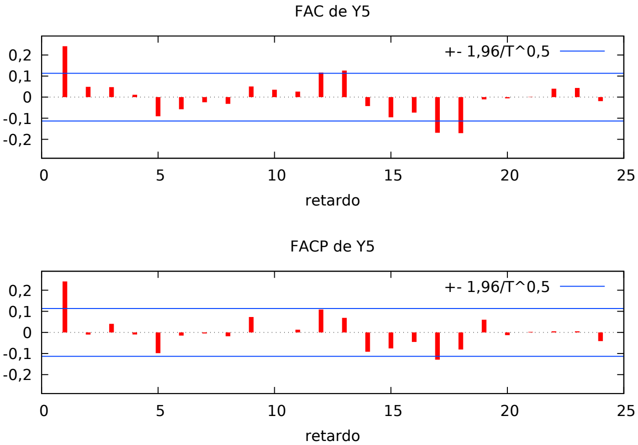




Modelos AR(1) - Función de Autocorrelación

Distintos tipos de convergencia que se pueden observar en las FAC y FACP de procesos estocásticos tipo AR(1)

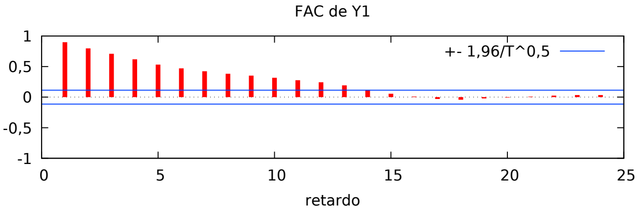
AR(1) con ϕ=0.2

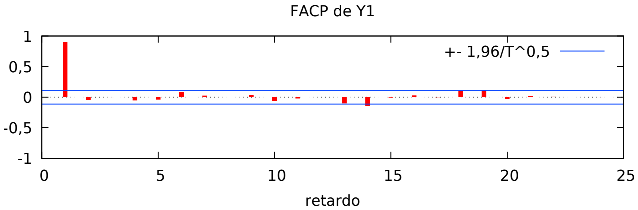


Modelos AR(1) - Función de Autocorrelación

Distintos tipos de convergencia que se pueden observar en las FAC y FACP de procesos estocásticos tipo AR(1)

AR(1) con ϕ=0.9

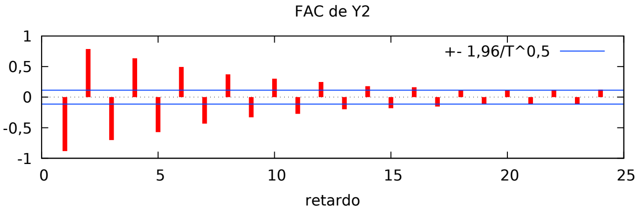


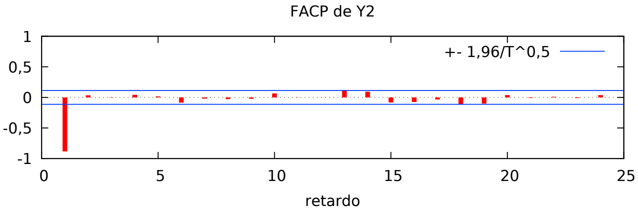


Modelos AR(1) - Función de Autocorrelación

Distintos tipos de convergencia que se pueden observar en las FAC y FACP de procesos estocásticos tipo AR(1)

AR(1) con ϕ=-0.9





Modelos AR(1) - Función de Autocorrelación Parcial

- La **FACP** viene dada por el valor del coeficiente de autocorrelación parcial para los distintos valores de k, con $k = 1, 2, \ldots, \overline{k}$
- El **coeficiente de autocorrelación parcial de orden** k muestra la correlación existente entre Y_t y Y_{t-k} una vez que se depuran los efectos indirectos a través de Y_{t-k+1} a Y_{t-1}

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \delta + \phi_{11} Y_{t-1} + \varepsilon_t \\
Y_t &= \delta + \phi_{21} Y_{t-1} + \phi_{22} Y_{t-2} + \varepsilon_t \\
&\vdots \\
Y_t &= \delta + \phi_{k1} Y_{t-1} + \phi_{k2} Y_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} Y_{t-k} + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

- La FACP toma el mismo valor que la FAC para $k = 1$
- En un proceso AR(1) el coeficiente de autocorrelación parcial debe ser nulo para cualquier retardo $k > 1$

Procesos Autorregresivos de segundo órden, AR(2)

El proceso AR(2) se define como:

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Usando el operador de rezagos (L) se puede expresar como:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = \delta + \varepsilon_t$$

A los efectos de simplificar la exposición, vamos a suponer que $\delta = 0$, por tanto:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad \text{o} \quad (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = \varepsilon_t$$

Procesos AR(2) como ecuación en diferencias finitas

La ecuación que define el proceso AR(2) es una ecuación en diferencias de segundo orden:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad \text{o} \quad (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = \varepsilon_t$$

De forma compacta podemos escribir:

$$\Phi(L) X_t = \varepsilon_t \Rightarrow \text{ Ecuación en diferencias}$$

- Es una ecuación en diferencias no homogénea (ver el término ε_t),
- La solución a la ecuación en diferencias será una función, que genera valores de X_t a través del tiempo
- A través de la solución se puede analizar si se cumple la propiedad de **estacionariedad** del proceso.

Solución de la ecuación en diferencias

Ecuación en diferencias no homogénea (proceso AR(2)):

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = \varepsilon_t$$

Ecuación homogénea:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = 0$$

Solución particular de la ecuación no homogénea

Una solución particular de la ecuación en diferencias no homogénea se puede obtener realizando sustituciones recursivas de X_{t-1}, X_{t-2}, y así sucesivamente en la no homogénea.
Tomando como condiciones iniciales $X_{t-n} = 0$; $X_{t-(n+1)} = 0$ se tiene una solución particular de la ecuación no homogénea:

$$X_t = \sum_{j=0}^{j=n-1} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Solución de la ecuación homogénea

Ecuación homogénea:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = 0$$

Se debe resolver la ecuación característica: $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$
Tendremos 3 posibilidades:

1. 2 raíces reales distintas $(m_1 \neq m_2)$
2. una raíz real doble $(m_1 = m_2 = m)$
3. 2 raíces complejas conjugadas $(m_1 \neq m_2)$

Sean c_1 y c_2 dos constantes a determinar por las condiciones iniciales.
Entonces, las soluciones de la ecuación homogénea, según las soluciones de la ecuación característica, serán:

1. 2 raíces reales distintas $(m_1 \neq m_2) \Rightarrow X_t = c_1(1/m_1)^t + c_2(1/m_2)^t$
2. una raíz real doble $(m_1 = m_2 = m) \Rightarrow X_t = (c_1 + c_2 t)(1/m)^t$
3. 2 raíces complejas conjugadas $(m_1 \neq m_2) \Rightarrow X_t = c_1(1/m_1)^t + c_2(1/m_2)^t$

Solución de la ecuación no homogénea

Finalmente, la solución de la ecuación no homogénea se obtiene sumando la solución de la homogénea más la solución particular:

Para el caso de 2 raíces distintas (reales o complejas):

$$\Rightarrow X_t = c_1(1/m_1)^t + c_2(1/m_2)^t + \sum_{j=0}^{j=n-1} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Para el caso de 1 raíz real doble:

$$\Rightarrow X_t = (c_1 + c_2 t)(1/m)^t + \sum_{j=0}^{j=n-1} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Estacionariedad e inicio del proceso

El cumplimiento de la propiedad de estacionariedad está asociado a las características de las condiciones iniciales.

1. el proceso comenzó en $t = 0$ con X_0 fijo
2. el proceso comenzó en $t = -\infty (n = \infty)$
3. el proceso comenzó en $t = 0$, pero con X_{t-n} y X_{t-n-1} v.a estacionarias

Caso 1: el proceso comenzó en $t = -\infty (n = \infty)$ Si $t \to \infty$ alcanza con m_1 y m_2 con módulo mayor que 1 y entonces la solución queda:

$$X_t = \overbrace{c_1 (1/m_1)^t}^{\to 0} + \overbrace{c_2 (1/m_2)^t}^{\to 0} + \sum_{j=0}^{j=\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

por lo que el proceso es independiente de las constantes (de las condiciones iniciales) y por tanto **es estacionario**.

Condición de estacionariedad de procesos AR(2)

- La forma más general consiste en analizar el módulo de las raíces del polinomio en L.
- En particular para los AR(2), si las raíces de $\Phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)$ en módulo, son mayores que 1

  Notar: si las raíces son sobre $\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$, la condición de estacionariedad es que sean en módulo menores que 1
- Otra forma de verificar la propiedad, que sólo es aplicable a los procesos AR(2) es que se cumplan las siguientes condiciones sobre ϕ_1 y ϕ_2 como
  - $\phi_1 + \phi_2 < 1$
  - $\phi_2 - \phi_1 < 1$
  - $|\phi_2| < 1$

Representación del proceso como suma infinita de procesos Ruido Blanco

Vamos a ver más adelante que esta representación cumple un papel fundamental. En lo inmediato a través de esta expresión se simplifica el cálculo de la esperanza, la varianza y las covarianzas.

Al hacer sustituciones recursivas en $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ se obtiene la expresión del proceso AR(2) como una suma de los ruidos blancos rezagados.

Vamos a suponer que el proceso inicia en el pasado $(t = -\infty)$, por lo que el la condición de estacionariedad no está atada al inicio del proceso:

$$X_t = \sum_{j=0}^{j=\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \psi_j L^j \varepsilon_t = \Psi(L)\varepsilon_t$$

Podemos escribir el proceso como, $\Phi(L)X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{1}{\Phi(L)}\varepsilon_t$

Veremos más adelante que los valores que tengan los sucesivos parámetros ψ_j van a ser muy importantes para analizar como se propagan los shocks a lo largo del tiempo. Esta expresión se puede identificar como una función de **impulso-respuesta**. La respuesta en X_t frente a un impulso en un determinado momento del tiempo.

Representación del proceso como suma de innovaciones

Por tanto puedo establecer un vínculo entre los parámetros ϕ_j con los parámetros ψ_j

$$\Psi(L)\Phi(L) = 1$$

A partir de esta relación se puede calcular los parámetros ψ_j , una vez conocidos los parámetros ϕ_j.

Reescribimos los polinomios $\Psi(L)$ y $\Phi(L)$

$(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots)(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = 1$ de donde surge
$\psi_0 = 1$

$\psi_1 - \psi_0\phi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$

$\psi_2 - \psi_1\phi_1 - \psi_0\phi_2 = 0$

En forma generl podemos escribir:
$\psi_k - \psi_{k-1}\phi_1 - \psi_{k-2}\phi_2 = 0 \ \forall \ k \geq 2$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\psi_k = 0 \ \forall \ k \geq 2$$

Notar: La forma de la ecuación en diferencias y su parecido con la ecuación que genera a X_t.

Función de autocvarianzas de un proceso AR(2)

Veamos la expresión analítica de las autocovarianzas de un AR(2) estacionario, sin constante:

$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

Para calcular la esperanza, usemos la expresión como suma de innovaciones:
$E(X_t) = \mu = E(\sum_{j=0}^{j=\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}) = 0 \Rightarrow \mu = 0$
Este proceso tiene media cero.

Función de autocovarianzas:

$\gamma_0 = E(X_t X_t) = E(\phi_1 X_{t-1} X_t + \phi_2 X_{t-2} X_t + \varepsilon_t X_t)$
$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2$

$\gamma_1 = E(X_t X_{t-1}) = E(\phi_1 X_{t-1} X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-1} + \varepsilon_t X_{t-1})$
$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1$

$\gamma_2 = E(X_t X_{t-2}) = E(\phi_1 X_{t-1} X_{t-2} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-2} + \varepsilon_t X_{t-2})$
$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0$

En general, $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \ \forall \ k > 1$

$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\gamma_k = 0 \ \forall \ k > 1 \Rightarrow (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\rho_k = 0 \ \forall \ k > 1$

Resumen proceso AR(2)

Especificación del proceso:

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)X_t=\varepsilon_t$$

Ecuación en diferencias que define los coeficientes de autocorrelación:

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)\rho_k=0$$

Ecuación en diferencias que define la trayectoria de coeficientes ψ_j

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)\psi_k=0$$

La trayectoria de define los ψ_j es la misma trayectoria que define a los ρ_k y a X_t, observen que la ecuación en diferencias que los define es la misma.
Esto no significa que los valores de ψ_j,ρ_k y X_t sean los mismos.

Procesos MA(q)

Un proceso de medias móviles de orden q se puede expresar como una suma ponderada de innovaciones, de Ruidos Blancos. Se puede pensar al proceso X_t como el resultado de aplicar un filtro lineal, $\theta(\mathrm{L})$ a un ruido blanco.
Un proceso MA(q) sin constante, se escribe como :

$$X_t = \sum_{j=0}^{j=q} -\theta_j \varepsilon_{t-j}; \quad \text{con } \varepsilon_t \sim \text{ RB}; \quad V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2; -\theta_0 = 1$$

q es el orden del proceso MA, es la suma de q Ruidos Blancos rezagados.

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

Estacionariedad y momentos

El proceso de medias móviles de orden q, es una combinación lineal finita de shocks, por tanto es estacionario.
La esperanza, la varianza y las autocovarianzas tienen a siguiente forma:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= 0 & \forall t \\ V(X_t) &= \sigma^2\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots\theta_q^2\right) & \forall t \\ \gamma(k) &= \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j\theta_{j+k} & \forall k \leq q \\ 0 & \forall k > q \end{cases} \end{aligned}$$

IMP:Todos los MA de orden ***finito*** son estacionarios, los de orden infinito no necesariamente.

Invertibilidad de los procesos MA(q)

Se dice que un proceso MA es invertible si las raíces del polinomio $\Theta(L) = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)$ están fuera del círculo unitario, es decir, en módulo son > 1.

Si X_t es invertible, entonces podemos escribir el proceso de medias móviles como un proceso autorregresivo de orden infinito:

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$$

En particular $\pi_0 = 1$

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = \pi(L) X_t$$

$$\pi(L) = (\pi_0 + \pi_1 L + \pi_2 L^2 + \ldots)$$

$$X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

Si X_t es estrictamente invertible, los $\pi_j \to 0$ cuando $t \to \infty$. El adjetivo "invertible" corresponde a la característica de poder escribir, en ese caso, los X_t en función del pasado. Es una característica deseable que el pasado remoto de X_t importe cada vez menos.

Proceso Medias móviles de órden uno, MA(1)

El proceso MA(1) se escribe como:
$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} = (1 - \theta L) \varepsilon_t$

Siendo ε_t un proceso Ruido Blanco, con media cero y varianza, σ_ε^2
$E(X_t) = 0$ (puedo luego agregarle una constante y la media sería defere

La función de autocovarianzas de este proceso MA(1) es:

$\gamma_0 = V(X_t) = \left(1 + \theta^2\right) \sigma^2$
$\gamma_1 = E\left[(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-2})\right] = -\theta \sigma^2$
$\gamma_k = 0 \ \forall k \geq 2$

Observar cuando se hacer cero γ_k

Ejemplo obtención de momentos de un MA(2)

Se aun proceso MA(2):
$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

Con esperanza:
$E(X_t) = \mu = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}) = 0 \Rightarrow \mu = 0$

Y varianza:
$\gamma_0 = E(X_t X_t) = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})\right]$
$\gamma_0 = E\left[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2^2 \varepsilon_{t-2}^2\right] = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$

$\gamma_1 = E(X_t X_{t-1}) = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-3})\right]$
$\gamma_1 = E\left[-\theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2 \theta_1 \varepsilon_{t-2}^2\right] = \sigma^2(-\theta_1 + \theta_2 \theta_1)$

$\gamma_2 = -\theta_2 \sigma^2$
$\gamma_k = 0 \quad \forall k > 2$

Proceso de medias móviles de orden infinito

Si la media móvil es una combinación lineal de infinitas innovaciones

$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} -\theta_j \varepsilon_{t-j}$; $con\ \varepsilon_t \to RB$; $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$;

$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} - \ldots\ldots$

Las propiedades del proceso se obtienen de la misma forma que para cualquier proceso de medias móviles.

La varianza de X_t, $Var(X_t) = \gamma_0 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$

Se tiene una suma de infinitos términos, **para que la varianza sea finita**, la serie $\{\psi_i^2\}$debe ser convergente.

Se puede probar[1] que **para que un proceso de medias móviles de orden infinito sea débilmente estacionario se debe cumplir** :

$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty$ ó que $\sum_{j=0}^{\infty} \left|\theta_j\right| < \infty$

La segunda condición implica la primera, pero no a la inversa. La media y las autocovarianzas de un $MA(\infty)$ cuyos coeficientes cumplen alguna de las condiciones explicitadas más arriba, pueden ser calculados como una extensión de los procesos MA(q).

[1] Ver Hamilton (1994), apéndice 3.A

Procesos mixtos ARMA(p,q)

Hasta ahora hemos analizado 2 formas para generar series cronológicas a partir de un Ruido Blanco: a través de los procesos autorregresivos AR(p) y a través de los procesos de medias móviles MA(q). Ahora veremos una tercer forma, una clase de procesos más general es la clase de procesos ARMA(p,q):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

con $\varepsilon_t \sim$ RB; $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_q L^p) X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

$$\Phi(L) X_t = \Theta(L) \varepsilon_t$$

Otra forma de escribirlo:

$$X_t = \sum_{j=1}^{j=p} \phi_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{j=q} -\theta_j \varepsilon_{t-j}; \quad \text{con } \varepsilon_t \sim \text{ RB}; \quad V(\varepsilon_t) = \sigma^2; \theta_0 = 1$$

ARMA(1,1)

Poniéndo énfasis en los polinomios en L del componente AR y MA, es que se puede escribir el proceso como:

$$(1-\phi_1 L)X_t = (1-\theta_1 L)\varepsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim$ RB; $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$
Como en los procesos anteriores, analizamos las condiciones que se deben cumplir para que el proceso sea estacionario e invertible.

Para que sea estacionario se requiere que la raíz del polinomio en L de la parte AR, tenga módulo > 1, lo que se verifica si $|\phi_1| < 1$

Para que sea invertible se requiere que la raíz del polinomio en L de la parte MA, tenga módulo > 1, lo que se verifica si $|\theta_1| < 1$

Para que no sea un RB se requiere $\phi_1 \neq \theta_1$

Estacionariedad e invertibilidad en el proceso ARMA(1,1)

- La condición de estacionariedad de un ARMA(p,q) es la misma que la de un proceso AR(p).
  Se verifica cuando las raíces del polinomio $\Phi(L)$ están fuera del círculo unitario.
- La condición de invertibilidad de un ARMA(p,q) es la misma que la de un proceso MA(q).
  Se verifica cuando las Raíces del polinomio $\Theta(L)$ están fuera del círculo unitario.

Función de autocovarianzas y autocorrelación

La expresión de la Función de autocovarianzas y autocorrelación son las que siguen:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1 \sigma^2 (\phi_1 - \theta_1) \qquad \rho_0 = 1$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2 \qquad \rho_1 = \phi_1 - \theta_1 \sigma^2 / \gamma_0$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \qquad \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \text{ con } k > 1$$

Los primeros rezagos, los valores iniciales de γ_0 y γ_1 y ρ_1 están determinados por los valores de los parámetros θ, ϕ y σ_ε^2.

Observar que para $k > 1$ la función de autocorrelación va a presentar un decrecimiento exponencial, cuya velocidad de convergencia a cero va a estar determinado por la magnitud del parámetro ϕ_1 de la parte AR. Y la forma de la convergencia viene dada por el signo.

Representación como un proces MA(∞)

Si el proceso ARMA(p,q) es estacionario e invertible:
$X_t = \psi(L)\varepsilon_t$.

Con $\psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \equiv \frac{1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\ldots+\theta_q L^q}{1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\ldots-\phi_p L^p}$
Se cumple que $\phi(L)\psi(L) = \theta(L)$.
A partir de aquí, igualando los coeficientes de estos polinomios, se obtienen los valores de los coeficentes ψ:
$(1-\phi_1)(1+\psi_1+\psi_2+\ldots) = (1-\theta_1)$

$\psi_0 = 1$

$\psi_1 - \phi_1\psi_0 = -\theta_1$

$\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 = -\theta_2$

.

$\phi(L)\psi_k = 0 \;\; k > max(p,q)$

Representación proeceso $AR(\infty)$

Recordemos que a los coeficientes de un $AR(\infty)$, los anotamos como π.
Considerando que el proceso es estacionario e invertible:

$$\pi(L)X_t = \varepsilon_t$$
$$\pi_0 = 1$$
$$\pi_1 - \theta_1\pi_0 = -\phi_1$$
$$\pi_2 - \theta_1\pi_1 - \theta_2\pi_0 = -\phi_2$$
$$.$$
$$\theta(L)\pi_k = 0 \quad \forall k > max(p,q)$$

Teorema de Wold

Cualquier proceso X_t con media 0 y estacionario en sentido débil (o en covarianza) se puede representar como:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + V_t$$

donde

1. $\psi_0 = 1$ y $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$
2. $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$
3. $E(\varepsilon_t V_t) = 0 \ \forall s, t > 0$
4. ε_t es el error de predicción de X_t mediante una función lineal de X_t y sus rezagos: $\varepsilon_t = X_t - \widehat{E}[X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots]$
5. V_t es un proceso determinístico que puede predecirse a partir de una función lineal de los rezagos de X_t
6. El valor de V_t está incorrelacionado con U_t, es decir, V_t está incorrelacionado con ε_{t-j} para todo j, aunque V_t puede predecirse arbitrariamente bien a partir de una función lineal de los valores pasados de X_t, $V_t = \hat{E}[V_t / X_{t-1}, X_{t-2}, ...]$

Teorema de Wold

- La descomposición de Wold dice que cualquier proceso estacionario en covarianza tiene una representación lineal: un componente determinista lineal (V_t) y un componente indeterminista lineal, cuya aleatoriedad viene dada por (ε_t)
- Si $V_t = 0 \Rightarrow$ el proceso X_t es puramente no determinista y puede representarse como un proceso MA(∞).
- V_t se denomina determinística, pues el conocimiento de una realización del proceso permite la predicción del proceso sin error, o bien con varianza del error de predicción nula.
- La componente U_t se denomina <u>no</u> determinística o componente estocástica porque genera una estructura esencialmente estocástica. Viene generada por el proceso ruido blanco ε_t y de la sucesión $\{\psi_j\}$. El conocimiento de una realización de U_t no implica la determinación unívoca de U_{t+k} con k>0, por lo que la varianza del error de predicción no será nula.

Bibliografía básica

- Box,G and Jenkins, G, Reinsel ,G. (1994) *"Time Series Analysis: Forecasting and Control"*. Third Edition, prentice Hall.
- Hamilton, J. (1994) *"Time Series Analysis"*. Princeton University Press
- Peña, D. (2005) *"Análisis de series temporales"*. Alianza Editorial.
- Rodríguez-Collazo,S. (2024) Series Cronológicas.Notas de curso. Licenciatura de Estadística. Facultad de Ciencias Económicas y Administración.