Contrastes de Raíz Unitaria

Curso de Series Cronológicas
Licenciatura de Estadística

Silvia Rodríguez Collazo

Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

Resulta importante saber si una serie es:

- estacionaria
- no estacionaria:
  - tendencia determinista
  - raíces unitarias en polinomio autorregresivo

Esto es clave por las diferencias que los procesos tienen en su especificación, propiedades dinámicas y en la forma como se propagan los shocks. Siguiendo a Engle y Granger (1987), un proceso $I(0)$ posee las siguientes propiedades:

- Tienen una media constante y una tendencia de la serie a retornar a esta media, cuando se ha desviado de ella, tiende a fluctuar alrededor de la media
- Presentan una función de autocorrelación simple que decrece rápidamente cuando aumentan los retardos
- Tienen varianza finita y es independiente del tiempo
- Se dice que tienen" memoria limitada" de su comportamiento pasado.Pues los efectos de un shock aleatorio sólo son transitorios y decrecen en el tiempo.

En cambio un proceso $I(1)$ presenta otras propiedades:

- Presentan un comportamiento oscilante, en el sentido que no evoluciona sobre el valor medio de la variable a lo largo de su historia
- La función de autocorrelación tiende a 1 para cualquier retardo
- La varianza depende del tiempo y tiende a infinito cuando T tiende a infinito
- Se dice que son procesos con "memoria ilimitada", por lo que un shock aleatorio tendrá efectos permanentes en el proceso.

La presencia de raíces unitarias en la representación autorregresiva del proceso origina momentos de segundo orden que cambian a lo largo del tiempo.

Esto provoca que la inferencia clásica no se pueda utilizar ya que ésta se basa en el supuesto de estacionariedad.

Tipo de no estacionariedad

Como vimos en clases previas las herramientas típicas para identificar el posible modelo, como el ACF y PACF, no son útiles para identificar si el proceso es de tipo *Trend Stationary* (TS) o *Difference Stationary* (DS).Se requiere de otras herramientas para poder detectar esas características del proceso.

Principales fuentes de no estacionariedad

Las dos principales fuentes de no estacionariedad se pueden clasificar en dos:

- la evolución de la media y/o la varianza
- la ocurrencia de quiebres repentinos.

Las herramientas que veníamos utilizando para identificar el posible modelo, como el ACF y PACF, no son útiles para identificar si el proceso es TS o DS.

Tampoco logran distinguir claramente un proceso no estacionario de otro con alta persistencia

- Existen contrastes estadísticos cuyo objetivo es detectar si el proceso es estacionario o tiene una o varias raíces unitarias.
- Algunos de estos contrastes pueden aportar evidencia acerca del tipo de no estacionariedad: si el proceso es estacionario entorno a una tendencia determinística o si el proceso es estacionario con alta persistencia o no estacionario.
- Otros test tienen por objetivo distinguir entre que el proceso sea no estacionario y contenga al menos una raíz unitaria o sea estacionario pero presente quiebres.

Sea Y_t un proceso que presenta **una** raíz unitaria en el polinomio autorregresivo, entonces diremos que el proceso es integrado de orden 1 y se escribe como $I(1)$. En este contexto, la transformación $\Delta Y_t = (1-L)Y_t$, a una variable con **una** raíz unitaria en su polinomio autorregresivo, hace que la serie transformada ΔY_t sea estacionaria.

Orden de integración

Sea Y_t un proceso con d raíces unitarias en el polinomio autorregresivo $\Rightarrow$ se dice que es **integrado de orden** d. $Y_t \sim I(d)$

Si $Y_t \sim I(d)$ entonces $\Delta^d Y_t = (1-L)^d Y_t$ es la transformación estacionaria de esa serie: se requieren d diferencias para transformar al proceso en estacionario.

Contrastes utilizados para contrastar no estacionariedad

Para determinar el orden de integración de una serie tenemos las siguienes alternativas:

- Box-Jenkins: Herramientad de identificación en el dominio del tiempo: ACF y PACF
- Procedimientos basados en contrastes:
  - Dickey & Fuller (1976 y 1981)
  - Phillips & Perron (1988)
  - Elliott-Rothenberg-Stock (1996) ERS
  - Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992) KPSS

  Cambio/s estructural/es:
  - Perron (1989)
  - Zivot & Andrews (1992)
  - Lumsdaine & Papell (1997)

Se parte de la siguiente representación del PGD:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \tag{1}$$

Se pretende contrastar
$H_0: \ \rho = 1$
$H_1: \ \rho < 1$
con el estadístico

$$\frac{\widehat{\rho} - 1}{s.e(\widehat{\rho})}$$

Si $|\rho_0| < 1$ el estadístico tiene distribución asintótica normal.

Si $\rho_0 = 1$ el estadístico no tiene distribución asintótica normal. Para realizar el contraste se debe utilizar las distribuciones empíricas del estadístico que han sido tabuladas por Fuller (1976).

Se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: \ \rho = 1$$
$$H_1: \ \rho < 1$$

Para la realización del contraste es necesario especificar una regresión auxiliar que surge a partir de la ecuación (1), se resta de ambos lados y_{t-1} y define $\gamma = \rho - 1$:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

Por tanto la prueba transforma H_0 y H_1 en:

$$H_0: \ \gamma = 0$$
$$H_1: \ \gamma < 0$$

IMPORTANTE: Es una prueba a una sola cola, observar H_1.
H_0 corresponde a la hipótesis de raíz unitaria y H_1 a la hipótesis de estacionariedad.
El no rechazo de H_0 da sustento a la hipótesis de que el proceso no es estacionario.

El trabajo de Dickey & Fuller (1976) muestra que los valores empíricos de la distribución del estadístico dependen **del tamaño de muestra** y de los **componentes deterministas** incluidos en la regresión auxiliar (2).

Especifican tres posibles regresiones auxiliares, en función de los componentes determinísticos incluídos en la regresión auxiliar:

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \\
\Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \\
\Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t
\end{aligned} \tag{3}$$

En estos tres modelos los parámetros de interés son: γ , a_0 y a_2.
Los componentes determinísticos jegan un papel importante en los procesos con raíces unitarias.

El estadístico de contraste es $t_\gamma = \gamma/\sigma_\gamma$ y no tiene una distribución estándar. Los estadísticos se identifican como: $\tau, \tau_\mu, \tau_\tau$ para cada una de las tres regresiones auxiliares. Su distribución, tanto asintótica como para distintos tamaños muestrales, aparecen en Fuller(1976).

El test implica estimar primeramente por MCO la regresión auxiliar, obtener los valores estimados de γ y el error estándar asociado.

¿Cuál es la especificación adecuada para la regresión auxiliar del contraste de DF?

Un principio guía general será ajustar una especificación que sea plausible y describa las dos alternativas a contrastar del proceso generador de los datos bajo la hipótesis nula y la alternativa.
Este principio sugiere:

- Usar la regresión auxiliar con constante y tendencia determinista cuando la serie presenta crecimiento (decrece).
- Usar el modelo con constante para iniciar el procedimiento cuando la serie no presenta un crecimiento (decrecimiento) claro.

(Hamilton, 1994; Elder & Kennedy, 2001)

En Dickey y Fuller (1981) también se presentan los valores críticos sobre la significación individual de los parámetros a_0 y a_2 en las especificaciones 2 y 3, que bajo la hipótesis de raíz unitaria, tampoco tienen una distribución estándar.

Consideraciones sobre la regresión auxiliar de DF

El contraste de DF se plantea suponiendo que ε_t de la regresión auxiliar no está autocorrelacionado.
¿Cómo hacer el contraste si ε_t está autocorrelacionado?. Se han propuesto varias soluciones:

1. Solución paramétrica (Dickey & Fuller, 1981)
2. Solución no paramétrica (Phillips,1987; Phillips y Perron, 1988)

Solución paramétrica de Dickey & Fuller (1981).

Incluir rezagos de la variable dependiente en la regresión auxiliar de DF, que capture la estructura autorregresiva, quedando así la perturbación incorrelacionada

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \\
\Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (4) \\
\Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

p debe ser suficientemente grande para garantizar que ε_t sea un RB.

El número de rezagos a incluir se puede definir mediante criterios de información (AIC o BIC) o hasta el último que sea significativo.

La inclusión de excesivos retardos reducirá la potencia del contraste, mientras que si no se incluyen suficientes no se recogerá toda la autocorrelación residual y los valores críticos no son aplicables.

Esta es propuesta por Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988). Sugieren transformar los estadísticos del test DF para hacerlos comparables con la presencia de autocorrelación y heteroscedasticidad en el término de perturbación.

La idea es utilizar los residuos ε_t en la regresión de DF para corregir el estadístico t asociado a los parámetros. De esta forma obtenemos unos nuevos estadísticos $z(t)$, $z(t_\mu)$ y $z(t_\tau)$ que tiene las mismas distribuciones límite de los estadísticos tabulados en Fuller (1976).

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (5)\\
\Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t\\
\Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2(t - T/2) + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Los test de estacionariedad tienen como hipótesis nula que y_t sea I(0). Dentro de este tipo de test el más utilizado es el KPSS presentado en Kwiatokowki, Phillips, Schmidt y Shin(1992).
Para derivar este test se comienza por el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta' D_t + r_t + \varepsilon_t \\ r_t &= r_{t-1} + \mu_t, \qquad \mu_t \sim N(0, \sigma_\mu^2) \end{aligned} \tag{6}$$

Donde D_t contiene componentes determinísticos (constante o constante y tendencia), ε_t es I(0) y puede ser heteroscedástico.
Note que r_t es un random walk puro con la varianza de las innovaciones σ_μ^2.
La hipótesis de que y_t es I(0) está formulada como
$H_0)\sigma_\mu^2 = 0$
la cuál implica que r_t es constante y la varianza $\sigma_\mu^2 = 0$.

El test estadístico se construye de la siguiente forma:

- primero regreso y_t con la especificación previa, con constante o con constante y tendencia, dependiendo si se quiere testear estacionariedad en nivel o tendencia,
- en segundo lugar se calcula la suma parcial de $\hat{\varepsilon}_t$ de esta regresión como:

$$S_t = \sum_{i=1}^{t} \hat{\varepsilon}_i, \qquad t = 1, 2 \ldots, T \tag{7}$$

El test estadístico se define como:

$$LM = \frac{\sum_{t=1}^{T} S_t^2}{\sigma_\varepsilon^2} \tag{8}$$

con $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ se estima la varianza del error para el paso uno.
Los autores sugieren la utilización de la ventana de Bartlett $w(s,l) = 1 - s/(l+1)$ como una función de ponderaciones óptima para estimar la varianza de largo plazo $\hat{\sigma}_\varepsilon$, esto es:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = s^2(l) = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2 + 2T - 1 \sum_{s=1}^{l} 1 - \frac{s}{l+1} \sum_{t=s+1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} \tag{9}$$

La cola superior de los valores críticos de la versión para testear estacionariedad en nivel y en tendencia, están dados en Kwiatkowski et al(1992).

Se ha desarrollado una abundante literatura sobre la contrastación de raíces unitarias en presencia de cambios estructurales. La intuición detrás de este enfoque es que la ocurrencia de eventos atípicos podría dar lugar a aceptar erróneamente la hipótesis de RU bajo los tests estándar debido a la baja potencia de éstos en condiciones de incorrecta especificación de la hipótesis alternativa.

La incorporación de cambios estructurales en la modelización de las series se ha realizado en la literatura bajo diferentes enfoques, que en lo fundamental difieren en la endogeneidad o no del momento del quiebre y en el número de quiebres permitidos.
Se destacan los siguientes enfoques:

- Determinación a priori del momento (único) del cambio estructural (Perron 1989).
- Determinación endógena del mismo (Zivot y Andrews 1992).
- Determinación endógena de 2 quiebres en la serie (Lumsdaine y Papell 1997)
- Determinación endógena de múltiples quiebres (Bai y Perron 1998)

A partir del trabajo de Nelson y Plosser (1982) en el que utilizando la metodología desarrollada por Dickey y Fuller para testear la presencia de raíces unitarias se postula que la mayoría de las variables económicas tienen una estructura temporal univariada con una raíz unitaria, se generó un aluvión de trabajos teóricos y empíricos que tendieron a confirmar ese hallazgo.

Perron (1989) afirma que la mayoría de las series macroeconómicas no están caracterizadas por una raíz unitaria y que las fluctuaciones son en realidad transitorias.
Postula que sólo dos eventos han tenido efectos permanentes sobre las series:la depresión de 1929 y la crisis del petróleo de 1973. Para llegar a esta conclusión plantea que estos dos eventos no fueron una realización del proceso generador de los datos (PGD) subyacente a cada serie, sino que constituyeron eventos exógenos a los mismos.

Perron "interviene" las series de Nelson y Plosser para corregir estos efectos. Las intervenciones se realizan en fechas determinadas previamente de manera determinística, y no constituyen una variable aleatoria a estimar.

Con este procedimiento, Perron recupera la hipótesis de estacionariedad alrededor de una tendencia para la mayoría de las series analizadas por Nelson y Plosser.

Zivot y Andrews (1992) cuestionan el procedimiento seguido por Perron en lo relativo a la exogeneidad de los eventos seleccionados como quiebres, y muestran que dicho tratamiento sesga los resultados hacia el rechazo de la hipótesis de raíz unitaria.

Los autores diseñan un procedimiento para seleccionar endógenamente el momento del quiebre, y logran recuperar la hipótesis de raíz unitaria para varias de las series Perron-estacionarias.

Continuando con la modelización endógena de quiebres, Lumsdaine y Papell (1997) analizan la existencia de dos quiebres estructurales.

Con esta metodología, Lumsdaine y Papell reexaminan las series de Nelson y Plosser, considerando la posibilidad de que existan 2 quiebres estructurales. Los autores encuentran que los resultados con relación a los tests de raíz unitaria son sensibles al número de quiebres especificados en la hipótesis alternativa. En este sentido encuentran más evidencia contra la hipótesis de raíz unitaria que en Zivot y Andrews (1992) pero menos que en Perron (1989).