Modelos Estructurales

Curso Series Cronológicas

Silvia Rodríguez-Collazo

Licenciatura de Estadística
Facultad de Ciencias Económicas y Administración

Organización de la presentación

Modelos estructurales

Los modelos estructurales univariados son modelos de regresión en los que las variables explicativas son funciones del tiempo y los parámetros también varían en el tiempo.
Se puede especificar un modelo estructural para la serie observada y_t como:

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, ... T \tag{1}$$

Donde μ_t es la tendencia, ψ_t es el ciclo, γ_t es el componente estacional y ε_t es el componente irregular. Estos componentes son estocásticos y las perturbaciones de cada componente están incorrelacionadas.

Introducción

Dentro del marco de regresión, se podría especificar de manera muy simple la tendencia en términos de una constante, el tiempo y una perturbación aleatoria:

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \tag{2}$$

Este modelo se puede estimar por MCO pero esta especificación es muy restrictiva, para flexibilizarla se puede permitir que α y β evolucionen en el tiempo como un proceso estocástico.

La estimación de la tendencia, se realiza escribiendo al modelo en la forma de espacio de estado y aplicando el Filtro de Kalman.
La forma como se permite que estos parámetros evolucionen viene dado por un conjunto de *hiperparámetros* (por ejemplo las varianzas de las perturbaciones de esos procesos estocásticos).

Cuando el modelo ha sido estimado, se aplican los test de diagnóstico que se aplican en la modelización de ByJ.

Local level model

En este modelo se permite que el componente del NIVEL varíe en el tiempo. El componente del nivel puede ser concebido como equivalente a la constante en un modelo clásico.

La diferencia es que la constante es fija mientras que el componente del nivel se permite que cambie de un punto a otro del tiempo, cuando no cambia se comporta como una constante.

Si fuera constante hay un nivel global, aplicable a todos los puntos de la serie, en cambio si cambia a través del tiempo, **el nivel estocástico** tiene un carácter local.

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{3}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \xi_t \qquad \xi_t \sim NID(0, \sigma_\xi^2) \tag{4}$$

Donde μ_t es el nivel inobservable en t, ε_t es la perturbación en t. ε_t y ξ_t **mutuamente incorrelacionados**.

Local level model II

La primer ecuación (7), en términos de la representación de espacio de estado se le llama ecuación de medida y la segunda ecuación (8) se llama ecuación de estado.
El estado en el momento *t+1* es una función del estado en t.
El nivel puede fluctuar como un paseo aleatorio.
Cuando la perturbación de la ecuación de estado, $\xi_t = 0$ para t= 1,2,....,T el modelo se reduce a un modelo donde el nivel no varía a lo largo del tiempo.
Si la perturbación ξ_t **no tiene varianza nula**, el nivel fluctúa.

Cuando la perturbación ξ_t **tiene varianza nula**, $\sigma^2_\xi = 0$ el modelo se reduce a especificar la dinámica de y_t como una constante más un ruido y se necesita estimar sólo dos parámetros μ_1 y σ_{ε^2} Cuando el nivel **no varía** en el tiempo, el modelo tiene un nivel determinístico y queda especificado como:

$$Y_t = \mu_1 + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon) \qquad t = 1, 2, \ldots . T$$

Local linear trend model

El modelo con tendencia local se obtiene adicionando un componente que representa la pendiente, β_t:

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon) \tag{5}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t + \xi_t \qquad \xi_t \sim NID(0, \sigma^2_\xi) \tag{6}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \varsigma_t \qquad \varsigma_t \sim NID(0, \sigma^2_\varsigma) \tag{7}$$

Donde ε_t (componente irregular), ξ_t (perturbación del nivel) y ς_t (perturbación de la pendiente) están mutuamente incorrelacionados.

Mediante dos ecuaciones de estado, se modeliza el nivel y la pendiente.
Si σ^2_ξ y σ^2_ς son distintos de cero, tanto el nivel como la tasa de crecimiento evolucionan en el tiempo.

Nivel y pendiente determinísticos

En qué caso, el nivel y la pendiente serían fijos?: Cuando las especificaciones de las ecuaciones no incluyen las perturbaciones, cuando las varianzas σ^2_ξ y σ^2_ς son cero.

El grado en que el nivel y la pendiente cambian a través de tiempo viene dado por dos hiperparámetros:

$q_\eta = \frac{\sigma^2_\eta}{\sigma^2_\varepsilon} \qquad \mathrm{q}_\varsigma = \frac{\sigma^2_\varsigma}{\sigma^2_\varepsilon}$

En el caso límite, cuando q_η y q_ς sean cero, se obtiene un modelo con tendencia determinística.

Local linear trend model II

Nivel estocástico y pendiente determinística
Cuando lo punico que varía en el tiempo es el nivel, pero la pendiente es fija:

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{8}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_1 + \xi_t \qquad \xi_t \sim NID(0, \sigma_\xi^2) \tag{9}$$

En este caso el componente tendencial se compone de un nivel estocástico y una tendencia determinística , con lo que la varianza de la pendiente es cero, $\sigma_\varsigma^2 = 0$.
β_1 es una constante, mide la tasa de crecimiento medio de la serie, la pendiente de la tendencia. El nivel cambia aleatoriamente pero la tasa de crecimiento medio es constante.

Nivel determinístico y pendiente estocástica

En este caso la varianza del nivel es cero, $\sigma_\xi^2 = 0$.
Que la pendiente sea estocástica, significa que la tasa de crecimiento no es constante a lo largo del tiempo.

Representación gráfica de la tendencia

Pelagatti (2016), la tendencia puede tomar diferentes especificaciones, igualando a cero las varianza de los componentes nivel y pendiente:

- Local linear trend: nivel y pendiente fijas
- Random Walk with drift: varianza de la pendiente $= 0$
- Random Walk: Pendiente constante y fija β_1, varianza de la pendiente $= 0$
- Integrated Random Walk: nivel determinístico, pendiente estocástica.

Representación gráfica de la tendencia

Figura tomada de Pelagatti (2016) “Time Series Modelling with Unobserved Components"

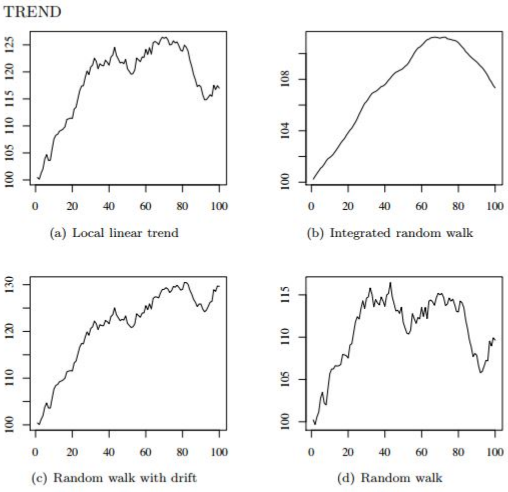

Figure 3.2 *Sample path of a local linear trend and its embedded trends.*

Figura: Distintas especificaciones de la tendencia

Modelización de la estacionalidad

Para incorporar la dinámica estacional de las series, se agrega el componente γ_t.Este componenrte se asocia a las estaciones, $s = s_t$ para $s = 1, ...S$, donde $S = 4$ si la serie es trimestral, $s = 12$ si la serie es mensual. Especificar una estacionalidad que varíe en el tiempo se puede hacer de diversas formas:

Dummies estacionales fijas

En este caso el patrón estacional es fijo y los efectos estacionales: $\gamma_1, ...\gamma_s$ representan coeficientes desconocidos, que seben ser estimados junto con los otros coeficientes del modelo.

Los efectos estacionales deben cumplir la propiedad de sumar cero al considerar el año completo: $\gamma_1 + \gamma_2 + ...\gamma_s = 0$ y $\gamma_t = \gamma_{t-s}$

Para evitar el problema de multicolinealidad: $\gamma_s = -\gamma_{s-1} = -\gamma_1$, lo que asegura que los efectos suman 0.Se tienen entonces s-1 coeficientes estacionales a estimar.

Modelización de la estacionalidad I

Dummies estacionales con coeficientes variables

Si se quiere permitir suaves variaciones en el tiempo del componente estacional:
$\gamma_{t+1} = -\gamma_t = -\gamma_{t-s+2} + \omega_t$ con $\omega_t \sim NID(0, \sigma^2_\omega)$
Donde la perturbacipon ω_t es independiente de las otras perturbaciones del modelo.
Si $\sigma^2_\omega = 0$, se retorna a la especificación de estacionalidad determinística.
Si σ^2_ω es reativamente grande, el patrón estacional varía de forma importante.

Estacionalidad trigonométrica

Suma de ciclos trigonómetricos en las frecuencias estacionales:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s/2} \gamma_{j,t} \qquad y \qquad \gamma_{j,t} = a_j * cos(\lambda_{j,t} - b_j) \tag{10}$$

Con amplitud a_j , fase b_j y frecuencia estacional $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{j,t} \\ \gamma^*_{j,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_j & \sin\gamma_j \\ -\sin\gamma_j & \cos\gamma_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma^*_{j,t-1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Modelización de la estacionalidad II

Estacionalidad con especificación trigonométrica cque varía en el timepo

$$\begin{bmatrix} \gamma_{j,t} \\ \gamma^*_{j,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_j & \sin\gamma_j \\ -\sin\gamma_j & \cos\gamma_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma^*_{j,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{j,t} \\ \omega^*_{j,t} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Con $\begin{bmatrix} \omega_{j,t} \\ \omega^*_{j,t} \end{bmatrix} \sim NID(0, \sigma^2_\omega)$ con frecuencia estacional $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$

Las perturbaciones de $\omega_{j,t}$ y $\omega^*_{j,t}$ son independientes e independientes del resto de las perturbaciones del modelo y se suponen iguales.

$\omega_{j,t}$ y $\omega^*_{j,t}$ son ruidos blancos con una varianza común, σ^2_ω

Si $\sigma^2_\omega = 0$, la ecuación (16) se convierte en la ecuación (15).

En la práctica las varianzas de los distintos componentes armónicos se suponen iguales, $\sigma^2_j = \sigma^2_\omega$

Componente cíclico

Sea ψ_t la función cíclica con frecuencia λ_c, medida en radianes, asociada a ciclos con periodicidad entre 1.5 y 8 ó 10 años .
Se puede escribir al ciclo como una combinación de senos y cosenos, donde la aplitud y la fase se representan mediante dos parámetros, α y β.

$$\psi_t = \alpha \cos(\lambda_c t) + \beta \sin(\lambda_c t) \tag{13}$$

Donde $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ es la amplitud y $\tan^{-1}(\beta/\alpha)$ es la fase.
Para que **el ciclo sea estocástico** es necesario permitir que los **parámetros** α **y** β **evolucionen en el tiempo** y agregar perturbaciones tipo Ruido Blanco κ_t, κ_t^* Ambas perturbaciones tienen la misma varianza y están incorrelacionadas.

$$\psi_t = \psi_{t-1} \cos(\lambda_c t) + \psi_{t-1}^* \sin(\lambda_c t) + \kappa_t \tag{14}$$

$$\psi_t^* = \psi_{t-1} - \sin(\lambda_c t) + \psi_{t-1}^* \cos(\lambda_c t) + \kappa_t^* \tag{15}$$

Para dar mayor flexibilidad se introduce un factor de amortiguación ρ:

$$\psi_t = \rho \left[\psi_{t-1} \cos(\lambda_c t) + \psi_{t-1}^* \sin(\lambda_c t) \right] + \kappa_t \tag{16}$$

$$\psi_t^* = \rho \left[\psi_{t-1} - \sin(\lambda_c t) + \psi_{t-1}^* \cos(\lambda_c t) \right] + \kappa_t^* \tag{17}$$

Con ρ entre cero y uno.

Componente cíclico I

El modelo es estacionario si ρ es estrictamente menor que uno. La ecuación es una representación análoga a la de un AR(1). Cuando ρ está dentro del intervalo entre 0 y 1, la función de predicción es un seno o coseno amortiguada, si $\rho = 1$ no hay amortiguación. Al igua que con un proceso AR(1), la condición de estacioanriedad es que ρ esté dentro del intervalo 0 y 1.
Si $\lambda_c = 0$ ó $\lambda_c = \pi$ colapsa en un AR(1) y en ese caso ψ_t^* es redundante.
Cuando $\lambda_c = 0$

$$\psi_t = \rho \psi_{t-1} + \kappa_t \tag{18}$$

Cuando $\lambda_c = \pi$

$$\psi_t = -\rho \psi_{t-1} + \kappa_t \tag{19}$$

Bibliografía

- Commandeur,J.; Koopman,S.J. (2007) “State Space Time Series Analysis". Oxford University Press.
- Harvey, A.(2003) Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter.Cambridge University Press.
- Koopman, S. J., & Ooms, M. (2011). Forecasting economic time series using unobserved components time series models. In M. P. Clements, & D. F. Hendry (Eds.), Oxford Handbook on Economic Forecasting (pp. 5). Oxford University press.