

Estimación de los componentes inobservables

Curso Series Cronológicas

Silvia Rodríguez- Collazo

Licenciatura de Estadística
Facultad de Ciencias Económicas y Administración

Organización de la presentación

Componentes no observables

Primeras estimaciones

Procedimientos empiricistas

Filtros lineales

Métodos basados en modelos

Componentes no observables

Algunos aspectos esenciales de los procesos no son directamente observables por ello es importante disponer de procedimientos que permitan extraer aspectos que aunque no son observables dan cuenta de características relevantes de la serie.

Se parte de la consideración de que una serie temporal X_t admite una descomposición de la forma:

$$Y_t = T_t + C_t + S_t + I_t$$

ó alternativamente

$$Y_t = T_t * C_t * S_t * I_t$$

Consideremos las siguientes definiciones de los componentes no observables:

Componente Irregular (I_t): Se le define al conjunto de oscilaciones no sistemáticas, que en general afectan a la serie en el momento en que ocurren y normalmente tienen una estructura puramente aleatoria (Ejemplo: el proceso Ruido Blanco).

Componente Estacional (S_t): Conjunto de oscilaciones cuasiperiódicas de media cero, las que tienen periodicidad anual o de un submúltiplo del año (trimestrales, mensuales, etc.) y se conocen como oscilaciones estacionales.

Componentes no observables II

Componente Cíclico (C_t): Contiene información sobre los desvíos sistemáticos de la tendencia, son oscilaciones distintas de la estacionalidad. Se define a las oscilaciones cíclicas como aquellas que tienen una periodicidad de entre dos y diez años. Suelen ser menos frecuentes y menos sistemáticas que las estacionales.

Componente Tendencial (T_t): Es el componente que recoge la parte de la variable vinculada principalmente con factores de largo plazo, los períodos de estas oscilaciones son infinitos. En la práctica resulta difícil distinguir la tendencia del componente cíclico, algunas metodologías combinan en un solo componente ambos tipos de oscilaciones, llamado a ese agregado Tendencia-ciclo (Tt).

Pero hay filtros específicos (como el filtro de Hodrick Prescott) y métodos que modelizan separadamente al componente Tendencial del cíclico (Modelos estructurales).

En el caso de las series anuales, el componente estacional, no está presente y los componentes son: $Y_t = T_t + C_t + I_t$ ó $Y_t = T_t * C_t * I_t$

Tipo de agregación y primeras estimaciones

Como vimos previamente la agregación de estos componentes puede ser aditiva o multiplicativa.

En el primer caso el componente cíclico e irregular son magnitudes absolutas que se agregan al componente tendencia independientemente del valor que la misma tenga, en cambio en el caso de la agregación multiplicativa los componentes cíclico e irregular son una proporción de la tendencia.

La diferencia consiste en que la oscilación sea proporcional al nivel o una cantidad independiente de éste.

Vamos a enfocar el tema de la descomposición o extracción de señales en un contexto univariante.

Primeras estimaciones de los componentes

La forma más simple de modelizar algunos de estos componentes, es mediante modelos determinísticos.

Este tipo de aproximaciones era usual en el pasado hasta que fue posible desarrollar instrumentos de cálculo potentes. Una vez que se superó este obstáculo se pudo verificar que la aproximación determinista de los componentes no era satisfactoria, son especificaciones muy rígidas para representar la dinámica de estos componentes.

Modelización determinística

El siguiente paso fue aproximar las señales mediante medias móviles sobre la serie original.

Se llama media móvil de tamaño $2m+1$ a la serie definida como:

$$MM(2m+1) = \sum a_j * Y_{t-j}$$

Con $a_j \neq 0$ con j que va de $-m$, m .

$\sum a_j = 1$ y $a_j = a_{-j}$ (media móvil simétrica)

Esta aproximación supone interpretar al proceso como estocástico, no determinista.

La $MM(2m+1)$ es una transformación lineal de las variables aleatorias Y_{t-j} con j recorriendo de $-m$ a m y por tanto el carácter aleatorio de las variables se traslada a su transformación.

Es una transformación basada en promediar sucesivos valores de la serie de origen por lo que genera una nueva serie en la que se han atenuado determinadas características y se han realzado otras.

Conocida toda la serie temporal Y_1, Y_2, \dots, Y_T se pretende en cada momento t obtener la transformación lineal que recoja el aspecto que se desea aislar.

Para ello lo más eficiente es utilizar toda la información disponible y en t aplicar una transformación bidireccional (usando las m observaciones pasadas y futuras respecto al momento t).

Modelización determinística, ejemplo

Sea una serie que sólo presenta tendencia y componente irregular, $Y_t = T_t + I_t$. El objetivo es aislar el componente tendencial mediante la aplicación de una media móvil simétrica.

Si se promedia alrededor del momento t :

$$1/(2m+1) * \sum Y_{t-j} = 1/(2m+1) * \sum T_{t-j} + 1/(2m+1) * \sum I_{t-j}$$

$$Y_t^* = T_t^* + I_t^*$$

Si la tendencia (T_t) evoluciona suavemente, su promedio (T_t^*) va a diferir poco de T_t .

En cambio al promediar I_t , el componente irregular la perturbación presentará menos oscilaciones, como resultado Y_t^* será muy parecido a T_t^* , que es similar a la tendencia.

A partir de la aplicación de este filtro a la serie original, se obtuvo el componente tendencia.

Esto es una justificación intuitiva para la operación de promediar sobre la serie original y aproximar al componente tendencial no observable a partir de ese promedio.

Lo que está implícito es que este filtro afecta poco a la tendencia pero elimina gran parte del componente irregular.

Procedimientos empiricistas, familia de los X-11

Los procedimientos empiricistas se caracterizan por implementar una descomposición basada en filtros lineales cuya estructura y parámetros no dependen de la naturaleza de los datos, sino que tienen valores prefijados. Los procedimientos de descomposición más utilizados son los procedimientos de medias móviles, la familia de los X-11 y el filtro Hodrick –Prescott.

Métodos X-11 y X-11 ARIMA

La familia de métodos $X - 11$ de desestacionalización se desarrolla en los trabajos de Shiskin en el Bureau of the Census de EUA en 1954, la versión denominada $X - 11$ es de 1967.

Estos métodos se desarrollaron a partir del análisis empírico de un gran número de series reales, sin hacer referencia a ningún tipo de modelo teórico de generación de los datos (PGD).

Los métodos X-11 y X-11 ARIMA se basan en un proceso iterativo de aplicación de distintos tipos de medias móviles. E. Dagum incorpora métodos ARIMA para proyección de las series al inicio y final de la muestra (*forecast y backcast*), denominándolo X-11 ARIMA. El X-12 ARIMA ha incorporado un programa de pre ajuste (REGARIMA), que permite modelizar los puntos anómalos y otras intervenciones como la cantidad de días laborables y días de pascua.

Procedimientos empiricistas, familia de los X-11 II

Aunque no se utilice un modelo específico para la serie observada, X_t , hay un modelo para el cual esta metodología aplica el filtro óptimo.

Se han realizado diversos estudios al respecto y se determinó que el filtro aplicado es el más adecuado cuando el proceso generador de los datos (PGD) de la serie es un ARIMA (0,1,1)(0,1,1). Por tanto cuando el PGD de X_t sea muy diferente a él, los resultados serán poco satisfactorios al aplicar tanto el X-11 como los filtros de la familia X-11 para la descomposición.

Filtros lineales

Sea X_t un proceso estocástico estacionario con varianza finita. Sea Y_t una nueva serie construida a partir de X_t , como un promedio ponderado de los valores pasados y futuros de X_t .

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j} = h(L)X_t \quad (1)$$

Donde h_j son los ponderadores del filtro.

$$H(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j L^j \quad (2)$$

Siendo una suma convergente.

Se dice que Y_t es una versión filtrada de X_t .

Una de las alternativas de utilización de un filtro lineal es aislar un componente inobservable de la serie. Su aplicación da lugar a la creación de un nuevo proceso cuya variabilidad está explicada únicamente por las periodicidades de interés.

Filtro de Hodrick Prescott (HP)

El filtro de Hodrick Prescott (HP), es usado para extraer la tendencia de una serie y es ampliamente utilizado por los investigadores que estudian el ciclo de negocios. Este filtro estima una tendencia alisada y un componente cíclico (diferencia o proporción entre la serie original y la tendencia alisada). Mediante la elección de un parámetro, que se identifica como λ , se determina el grado de alisamiento de la tendencia estimada.

Sea τ_t el componente tendencia y Y_t la serie observada.

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^T (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=1}^T [(\tau_t - \tau_{t-1}) - (\tau_{t-1} - \tau_{t-2})]^2 \right\} \quad (3)$$

Donde $(y_t - \tau_t)$ es el desvío de la tendencia, que se asocia con el componente cíclico.

El filtro incluye al parámetro λ , un parámetro de alisamiento, que penaliza la aceleración en la tendencia relativo al componente cíclico.

El objetivo de la aplicación del filtro de Hodrick-Prescott consiste en separar el componente inobservable tendencia de los datos de manera que el residuo pueda ser interpretado como el componente cíclico de la serie.

Filtro de Hodrick Prescott (HP) II

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^T (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=1}^T [(\tau_t - \tau_{t-1}) - (\tau_{t-1} - \tau_{t-2})]^2 \right\} \quad (4)$$

El **primer término** es la suma al cuadrado de los desvíos entre la serie original y la tendencia, es una medida de “bondad de ajuste” de la tendencia.

El **segundo término** es la suma de los cuadrados del componente tendencia (las segundas diferencias al cuadrado multiplicadas por λ) y es una medida del grado de alisamiento de la tendencia estimada, el parámetro controla la variación del crecimiento del componente tendencia.

A través de la modificación de este parámetro se puede alterar el equilibrio entre bondad de ajuste y grado de alisamiento obtenido.

Si $\lambda = 0$ el primer término es cero y para minimizar la función objetivo, $\tau_t = Y_t$. La bondad de ajuste es perfecta (todo es tendencia) y el componente cíclico es cero.

Si $\lambda = \infty$, el segundo término debe ser cero para minimizar la función objetivo y el componente tendencia queda especificado como una tendencia lineal.

Filtro de Hodrick Prescott (HP) III

El uso del filtro HP para la estimación del ciclo ha sido sujeto a una profusa discusión académica, pero a pesar de ello su uso es extendido y los analistas han encontrado utilidad en los resultados obtenidos.

Algunas de las críticas en torno a la aplicación del filtro HP son que: puede dar lugar a ciclos de carácter espurio debido a su característica de ser un filtro con una estructura fija y el hecho de que produce estimaciones imprecisas sobre el final de la muestra, recordar que en el proceso de minimización de las diferencias, se pierden observaciones, por tanto para tener un dato de ciclo y tendencia sobre el final de la muestra es necesario incorporar predicciones.

Kaiser y Maravall (1999) muestran como la integración entre el filtro y el uso de los métodos de descomposición AMB pueden mejorar la performance de la señal cíclica. Plantean por un lado extender la serie con predicciones basadas en modelos ARIMA (Hodrik- Prescott ARIMA, HPA), lo que permitiría reducir las revisiones sobre el final de la muestra. A su vez, para mejorar la señal cíclica proponen aplicar el filtro HPA al componente tendencia-ciclo y no a la serie desestacionalizada, de modo de reducir la erraticidad del estimador.

Filtro de Hodrick Prescott (HP) IV

En Ravn y Uhlig (2002) estudia los posibles valores para el parámetro λ . Si se concibe la descomposición de la serie de tiempo en tendencia y ciclo:

$$Y_t = \tau_t + c_t$$

Si c_t así como a segunda diferencia de τ_t son normales e independientemente distribuidas el filtro HP sería óptimo y λ está dada por el ratio entre las dos varianzas: $\sigma_c^2 / \sigma_{\Delta^2}^2$

A través de esta relación los autores analizan los diversos valores que puede tomar el parámetro λ y sus resultados en términos de la descomposición. Partiendo que para datos trimestrales el λ se fija en 1600, estudian posibles valores para el caso de los datos anuales.

Para $\lambda_{trimestral} = 1600$, entonces $\lambda_{anual} = 1600/4^4 = 6,25$

En base a datos trimestrales, que anualiza estudia la tendencia que obtiene a partir de los datos trimestrales del PIB real de USA para 1947-2000 y anuales y concluye que la mayor similitud se da cuando $\lambda_{trimestral} = 1600$ y $\lambda_{anual} = 6,25$.

Mientras que obtiene grandes diferencias con $\lambda_{anual} = 400, 100$ o 25.

Por lo que sugieren usar para datos anuales $\lambda_{anual} = 6,25$, próximo al valor sugerido por Baxter y King (1999) $\lambda_{anual} = 10$, pero diferente a lo que se aplica usualmente $\lambda_{anual} = 100$.

Métodos basados en modelos

En los métodos basados en modelos se plantea en forma explícita una representación, un modelo para cada componente y se tienen en cuenta las características particulares de cada serie.

Vamos a mencionar dos metodologías: el método basado en modelos estructurales (Harvey 1989) y el método de la forma reducida o método basado en modelos ARIMA.

En los segundos se inicia el proceso identificando el modelo para la serie observada y luego se derivan los modelos para los componentes. Son modelos lineales estocásticos usualmente parametrizados como modelos ARIMA.

Ambos enfoques parten del supuesto de que la serie observada puede expresarse como la suma de componentes ortogonales entre sí, donde cada componente puede expresarse como un proceso estocástico con perturbaciones normales.

Los métodos basados en modelos ARIMA maximizan la varianza del componente irregular a los efectos de obtener estimaciones más estables en los componentes tendencia y estacional. A esto se le conoce como “propiedad canónica”. Los métodos basados en modelos estructurales imponen la restricción de ortogonalidad entre las perturbaciones de los componentes.

Métodos de la forma reducida

Dada una serie observada Y_t cuyos componentes no observables son la tendencia, el ciclo, componente estacional y componente irregular, se trata de estimar estos componentes a partir de la serie original incorporando explícitamente en el diseño del filtro a utilizar la información sobre el PGD de Y_t .

Al tomarse como punto de partida el modelo estimado para Y_t , se dispone de las estimaciones de los parámetros del modelo ARIMA de Y_t y con ello se estiman los parámetros de los modelos de los componentes, los filtros adecuados para estimar esos componentes y las series históricas de los componentes.

En esta metodología se plantea un problema de identificación pues existen infinitas estructuras, diferentes descomposiciones igualmente compatibles con el modelo ARIMA de la serie observada. Es necesario introducir una serie de restricciones para poder identificar todos los parámetros.

Esto es lo que llama requisito canónico, la idea básica consiste en:

Las señales se obtienen considerando las características de cada serie, que se recogen en el modelo ARIMA y con ellos se diseña una MM adecuada al problema.

Modelos basados en ARIMA

Este método está basado en modelos estocásticos paramétricos para las series y sus componentes no observables y se estiman estos últimos de modo que se haga mínimo el Error Cuadrático Medio (ECM) de las estimaciones respecto a los datos observados.

Los modelos utilizados para representar los componentes son Modelos ARIMA. Se les clasifica como modelos de extracción de señales basados en modelos.

Este método en esencia hace lo siguiente:

- ▶ Se especifica un modelo ARIMA para los datos observados
- ▶ Se factoriza el polinomios autorregresivo que da lugar a los polinomios autorregresivos de los componentes. Se imponen ciertas restricciones para que la descomposición sea admisible (que el espectro de todos los componentes sea no negativo).
- ▶ En Maravall (1986) se demuestra que el resultado de la extracción de señales se puede modificar bastante cuando se modifica el modelo de Y_t .
- ▶ Modelos muy similares pueden requerir filtros muy diferentes, por ello es necesario para que esta metodología funcione adecuadamente, validar el modelo para la serie observada.

Guia de procedimiento

- ▶ Pre- tratamiento de la serie
- ▶ Análisis gráfico de la serie
- ▶ Efecto calendario
 - ▶ Trading day o Working day (6 días o días de la semana vs fines de semana)
 - ▶ Feriados móviles
- ▶ Detección y corrección de outliers
- ▶ Selección del modelo
- ▶ Esquema de descomposición

Pre-tratamiento

Los métodos de ajuste estacional o de descomposición , que usan procedimientos de filtrado en general lineales: modelos ARIMA, medias móviles, análisis de regresión, modelos de espacio de estado, etc., presentan debilidades cuando hay valores atípicos (outliers) y no son robustos frente a una mala especificación del modelo de base.

El principal objetivo del pre-tratamiento de la serie es asegurar una estimación confiable de los componentes inobservables.

Los **outliers** son el típico caso de de las situaciones que afectan la calidad de la estimación. TRAMO-SEATS y X-12 ARIMA y X-13, han construido procedimientos para detectar y corregir varios tipos de outliers (AO, TC, LS, etc.).

El **efecto calendario**, es un elemento a tener en cuenta. TRAMO-SEATS y X-12 ARIMA y X-13 y otros paquetes han elaborado procedimientos para detectar e incorporar en la modelización estos efectos (trading day y pascua) y también para incorporar los feriados civiles o religiosos a través de regresores específicos.

- ▶ diferente número de días laborables en un mes o trimestre específico
- ▶ composición de los días laborables
- ▶ feriados móviles o feriados nacionales

Modelos basados en ARIMA, software

El programa original donde se implementa este método basado en modelos se llama TRAMO-SEATS, originalmente diseñado por el Banco de España. Posteriormente la Unión Europea a través de EUROSTAT.

Actualmente hay una versión libre disponible llamada JDemetra+, desarrollada por el Banco de Bélgica.

https://ec.europa.eu/eurostat/cros/content/software-jdemetra_en

También está contenido en otros paquetes estadísticos con licencia y también paquetes de uso libre como por ejemplo : EViews, Gretl, R.

Lo que nosotros vamos a usar en el taller es el paquete **seas()** del R que realiza la descomposición pudiendo utilizar tanto el método SEATS como el X-13, se llama X-13 ARIMA-SEATS.

<https://www.jstatsoft.org/article/download/v087i11/1273>

Bibliografía

- ▶ Gómez, V.;Maravall, A. (1998) "Seasonal Adjustment and Signal Extraction in Economic Time Series". Banco de España . Servicio de Estudios. Documento de Trabajo *N*º 9809.
- ▶ Ravn,M.;UhligH. (2022) "On Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observations ". *The Review of Economic and Statistics*. May 2002, 84(2).
- ▶ Sax,C.; Eddebuetell,D. (2018) "Seasonal Adjustment by X-13ARIMA-SEATS in R". *Journal of Statistical Software, Vol 87, Issue 11*
<https://www.jstatsoft.org/article/download/v087i11/1273>
- ▶ x-13arima-seats Reference Manual, Version 1.1. Bureau of the Census
<https://www2.census.gov/software/x-13arima-seats/x13as/windows/documentation/docx13as.pdf>