DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico 2

9 de mayo de 2014 — Algoritmos y Estructuras de Datos III

Integrante	LU	Correo electrónico
Chapresto, Matías	201/12	matiaschapresto@gmail.com
Dato, Nicolás	676/12	nico_dato@hotmail.com
Fattori, Ezequiel	280/11	ezequieltori@hotmail.com
Vileriño, Silvio	106/12	svilerino@gmail.com

Instancia	Docente	Nota
Primera entrega		
Segunda entrega		

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Ejercicio 1

1.1. Descripción del problema

El problema consiste en modelar un juego de robanúmeros en el cual ambos jugadores juegan empleando la estrategia óptima. El juego consiste en una serie de cartas con valores enteros que los jugadores deben ir robando por turnos. Solo se puede robar una serie de cartas que sean contiguas y que comiencen por alguno de los extremos. El jugador que obtenga una suma mayor gana. El algoritmo debe calcular, a partir de una tanda de cartas, como van a ser las jugadas de ambos jugadores en cada turno, suponiendo que ambos jugadores juegan de "forma óptima", es decir, de manera de maximizar la diferencia final a favor suponiendo que el contrincante hará lo mismo cuando sea su turno. En la figura 1 se muestran ejemplos del problema junto con parte de su solución. Los turnos del primer jugador están en rojo y los del segundo jugador en azul.

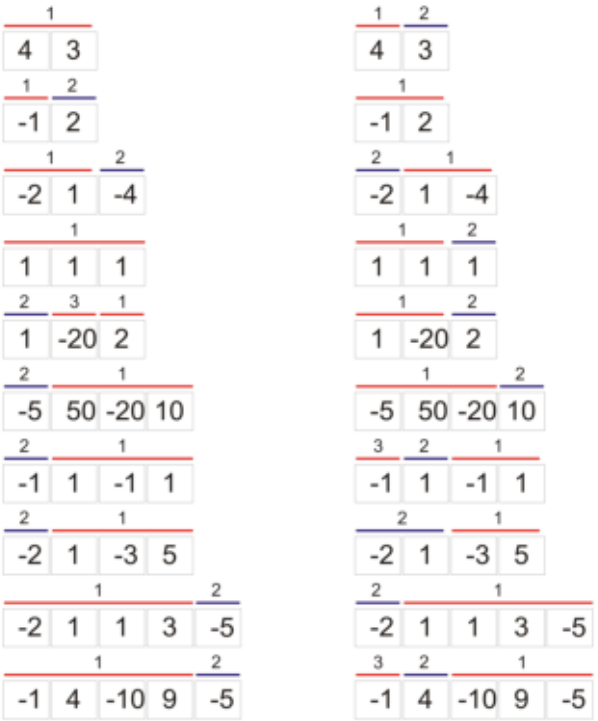


Figura 1: Soluciones óptimas del juego (izquierda) y no óptimas(derecha).

1.2. Descripción del algoritmo

Este problema presenta una estructura recursiva. Cada vez que un jugador hace su jugada, el problema queda reducido a una instancia mas pequeña del mismo, en la cual el jugador que comienza es el otro. La estrategia para resolverlo es programación dinámica.

Se llamará A_i a la tira de números inicial, con la que el juego comienza. También se define, coloquialmente, el término "juego óptimo"para referirse al desarrollo de un juego en el cual cada jugador juega según la estrategia dada por el enunciado. Esta estrategia es: jugar en cada jugada de manera de maximizar la diferencia de puntos a favor, suponiendo que el otro jugador en cada jugada hará lo mismo. El "juego óptimo"queda entonces definido recursivamente a partir del caso base: un juego que comienza con una única ficha, que solo puede jugarse de una manera (el primer jugador agarrando esa ficha).

Se definen las siguientes funciones:

$$S(i,j) = \sum_{i \le k \le j} A_k$$

$$P(i,j,h) = p1 - p2$$

Donde $p1$ y $p2$ son los puntajes sumados por los jugadores 1 y 2 respectivamente, luego de jugar óptimamente la subinstancia dada por la subtira $A_k; i \le k \le j$, comenzando por el jugador h (jugador1 = 1, jugador2 = -1).

1.2.1. Etapa 1: Calculo de la funcion S

Se calcula la función S. Se hace por programacíon dinámica guardando en una tabla los valores $S(i,j)$ y usando la fórmula de recursión

$$S(i,j) = S(i,j-1) + A_j.$$

(con $S(i,i-1) = 0$).

```
for i=1 to n do
    for j=i to n do
        S(i,j) = S(i,j-1) + A_j
    end for
end for
```

1.2.2. Etapa 2: Calculo de la funcion P

Se calcula la función P, también por programación dinámica, usando la S ya calculada. Se guarda en una tabla $P(i,j,1)$, pudiendo calcularse $P(i,j,-1) = -P(i,j,1)$ a partir de ésta. La regla de recursión es:

$$P(i,j,1) = max\{\ max\{S(i,k) + P(k+1,j,-1) \mid i \le k \le j\}, max\{S(k,j) + P(i,k-1,-1) \mid i \le k \le j\}\ \}$$

con $P(i,i-1,-1) = 0$.

Ya que la recursión requiere para el cálculo de $P(i,j)$ el cálculo de $P(i,j'); j' \le j$ y de $P(i',j); i' \ge i$ la tabla se calcula entonces de menor a mayor en las columnas, y por cada columna de mayor a menor en las filas.
La tabla contiene en el lugar (i,j) la tupla $(res(i,j), P(i,j))$ donde $res(i,j)$ son los indices que limitan la subtira que queda por jugar despues de jugar la subtira (i,j). Si ya no se juega mas, $res(i,j) = (0,0)$.

```
1:  for j=1 to n do
2:      for i=j to 1 do
3:          MAX = -∞
4:          for k =i-1 to j do
5:              if S(i,k) + P(k+1,j) > MAX then
6:                  MAX ← S(i,k) + P(k+1,j)
7:                  if k ≠ j then
8:                      res(i,j) ← (k+1,j)
9:                  else
10:                     res(i,j) ← (0,0)
11:                 end if
12:             end if
13:         end for
14:         for k = j+1 to i do
15:             if S(k,j) + P(i,k-1) > MAX then
16:                 MAX ← S(k,j) + P(i,k-1)
```

```
17:                 if k ≠ i then
18:                     res(i, j) ← (i, k − 1)
19:                 else
20:                     res(i, j) ← (0, 0)
21:                 end if
22:             end if
23:         end for
24:     end for
25: end for
```

1.2.3. Etapa 3: Simulacion del juego

Se calcula, a partir de las tablas ya calculadas, el desarrollo del juego a partir de su instancia inicial. Se guarda la cantidad de turnos jugados y las fichas robadas por izquierda o derecha en cada turno.

```
var turno ← 1
var puntj1 ← 0
var puntj2 ← 0
var i ← 1
var j ← n
var jugadas(lado, cant)
loop
    if turnos = impar then
        puntj1 ← puntj1 + puntoslevantados
    else
        puntj2 ← puntj2 + puntoslevantados
    end if
    if levantoporizq then
        jugadas.lado[turno − 1] ← izq
        jugadas.cant[turno − 1] ← cantcartaslevantadas
    else
        jugadas.lado[turno − 1] ← der
        jugadas.cant[turno − 1] ← cantcartaslevantadas
    end if
    if res(i, j) = (0, 0) then
        break
    end if
    (i, j) ← res(i, j)
    turno ← turnos + 1
end loop
```

Donde *puntoslevantados*, *cantcartaslevantadas* y *levantoporizq* se obtienen como función $O(1)$ de $res(i, j)$, y no se explicitan para simplificar la exposición. Las variables $puntj1$, $puntj2$, *turno* y *jugadas* se usan luego para construir la salida.

1.3. Correctitud del algoritmo

A continuación se da una demostración de por qué la estrategia elegida cumple el requerimiento del enunciado. Este requerimiento es: "maximizar la diferencia de puntos a favor al final del partido, asumiendo que el otro jugador tiene la misma estrategia".
La estrategia elegida es: para cada posible tira que se puede extraer, calcular la suma de los números de la tira y sumarle la diferencia que se consigue a favor al jugar de forma óptima durante el resto del juego (que ya está definida por ser el resto del juego una instancia más pequeña). Extraer la tira que maximice este número.
Sea entonces A_k una tira inicial de cartas. Si $A_k = (c1)$ hay una única manera de jugar, y por lo tanto la estrategia cumple el requerimiento. Supóngase que la estrategia cumple el requerimiento si A_k es

de longitud $\leq m$. Para A_k de longitud $m+1$, una forma genérica de jugar el juego es una elección de cartas a robar inicialmente, de puntuación total S, seguida de un cierto desarrollo en el cual la diferencia conseguida a favor es P. Llámese P' a la diferencia a favor conseguida como resultado de jugar óptimamente el juego que comienza a partir de la primer elección de cartas (comenzado por el jugador2). Por hipótesis inductiva se cumple que $P \leq P'$ luego la diferencia a favor obtenida en este juego es $S + P \leq S + P'$. Además, por definición, $S + P' \leq M$ donde M es la diferencia a favor que se consigue haciendo la primer elección según la estrategia, y jugando óptimo durante el resto del juego.

Por último resta ver que esta estrategia se traduce formalmente en la recursión dada para $P(i, j, h)$ en la descripción del algoritmo, pero esto es muy fácil de ver por inducción y no se escribe.

1.4. Complejidad teorica esperada

La parte 1 del algoritmo es $O(n^2)$, ya que son 2 bucles for anidados con interior $O(1)$ con a lo sumo n iteraciones cada uno. La parte 2 del algoritmo es $O(n^3)$ ya que son 2 bucles for anidados con a lo sumo n iteraciones cada uno, y dentro de ellos hay dos bucles for sucesivos, cada uno de ellos $O(n)$. La parte 3 del algoritmo es O(n) ya que el loop se ejecuta a lo sumo tantas veces como la cantidad de turnos, que es a lo sumo n, y el interior del loop es $O(1)$.
Por lo tanto la complejidad temporal total del algoritmo es $O(n^3)$

1.5. Verificación de correctitud

Para la verificación se emplearon las mismas instancias que fueron dadas como ejemplo del problema y su resolución. Éstas fueron calculadas a mano, y luego se verificó que efectivamente el algoritmo daba el mismo resultado (la misma diferencia de puntos a favor) en cada caso.

1.6. Análisis de performance

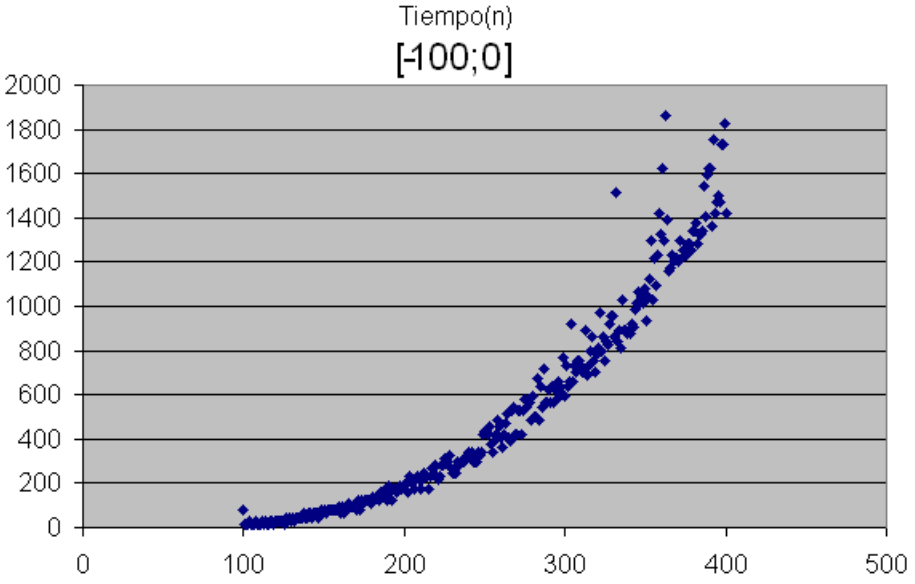
1.6.1. Consideraciones de compilacion en el analisis de performance

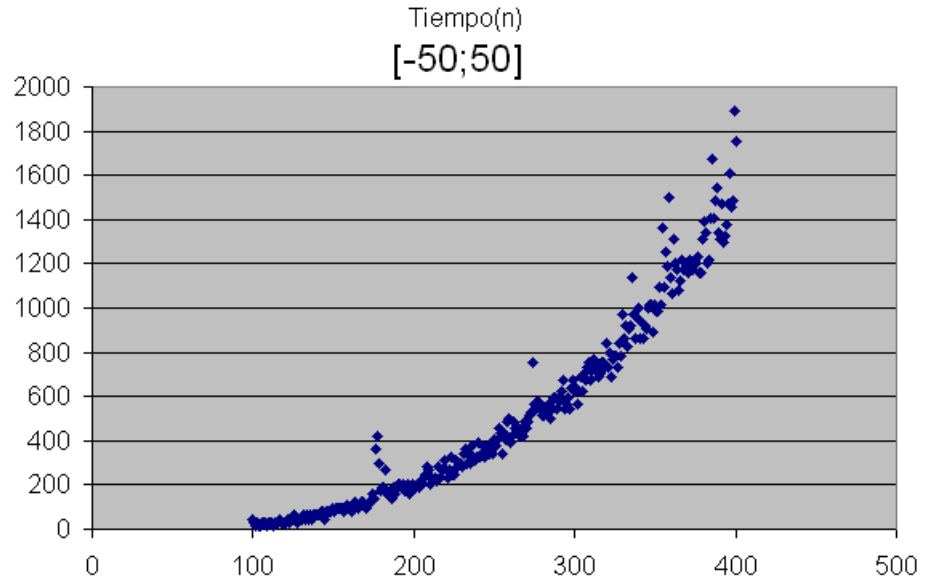
Compilador GJC: Java realiza un profiling sobre el programa a compilar y toma estadisticas para realizar diferentes procesos de compilacion/interpretacion sobre el codigo, esto se ve reflejado en el tiempo de ejecucion del programa compilado con el jdk, para forzar la compilacion de java a codigo objeto, utilizamos el compilador GCJ de GNU, que es uno de los compiladores denominados Ahead-Of-Time. Todos los experimentos fueron ejecutados sobre el programa compilado a codigo nativo. La cantidad de iteraciones por cada entrada es 100 para licuar los posibles outliers.

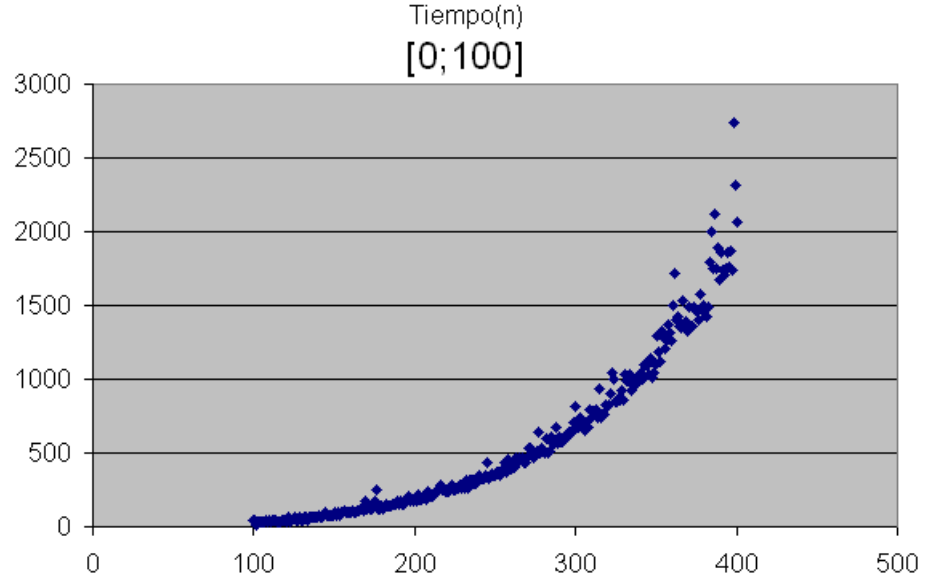
1.6.2. Experimentos

La segunda parte del algoritmo, el cálculo de la tabla P, es de complejidad $O(n^3)$ y se lleva la mayor parte del tiempo de ejecución para n grande. El cálculo de esta tabla, que tiene $n^2/2$ posiciones, involucra para cada posición el cálculo del máximo de una cantidad de elementos que depende únicamente de la posición que se cálcula, no del contenido de las cartas. Como el tiempo que demora el algoritmo está dominado por esta parte, es de esperar que el contenido de las cartas no cambie apreciablemente los tiempos de ejecución. Ésto se puede constatar por medio de la experimentación.

Se hizo una experimentación con tamaños n de entrada entre 100 y 400. Se distinguió la distribución de los valores de las cartas en tres casos : uniforme en $[-50; 50]$, uniforme en $[-100; 0]$ y uniforme en $[0; 100]$. Todos los casos dieron tiempos similares. En la gráfica puede observarse una curva similar a las de la forma ax^m. Se puede comprobar que al variar de $n = 200$ a $n' = 300$, $n' = (3/2)n$, el tiempo pasa de un promedio de 200 a un promedio de $650 \sim 200.(3/2)^3$. Ésto comprueba que la curva es cúbica. A continuación se adjuntan las gráficas experimentales de $tiempo(n)$.


Tiempo(n)
[-100;0]
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
100
200
300
400
500

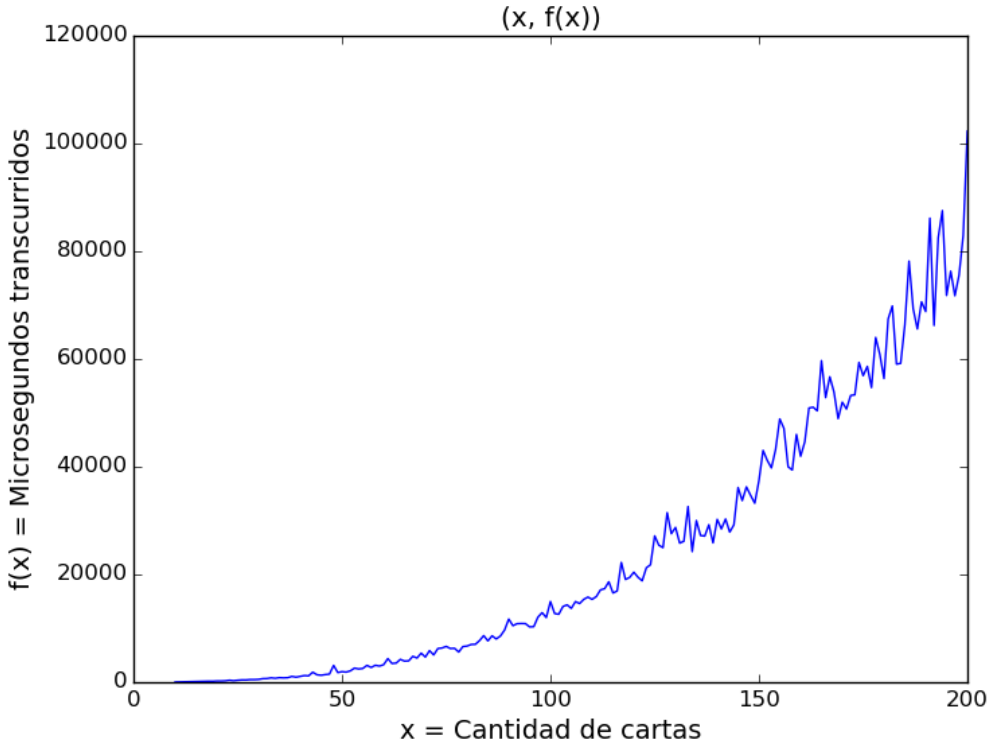

Tiempo(n)
[-50;50]
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
100
200
300
400
500

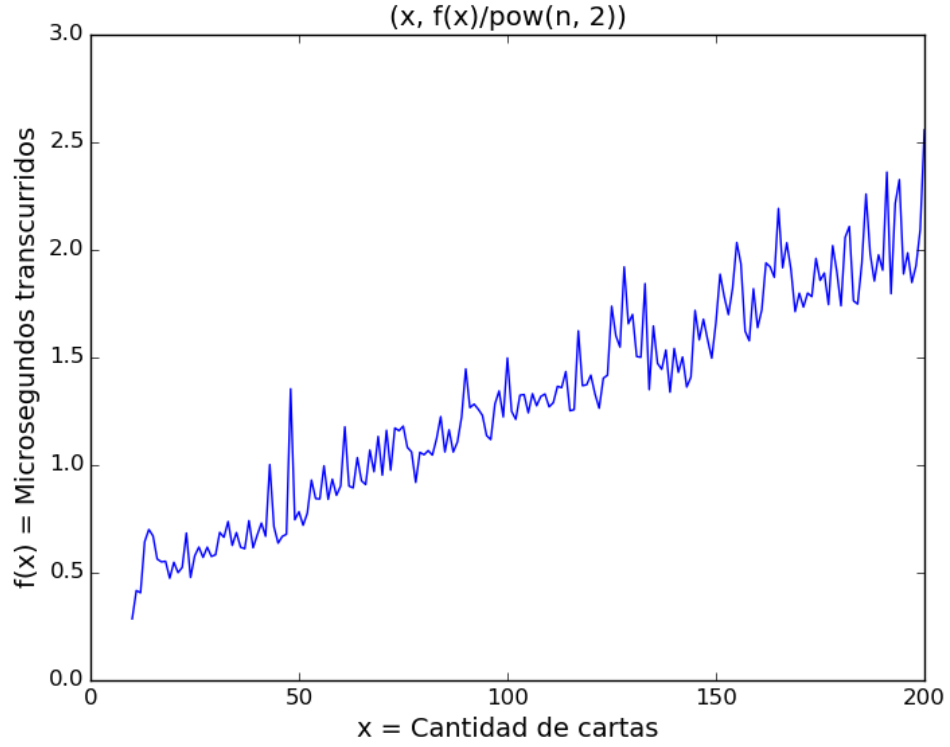

Tiempo(n)
[0;100]
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
100
200
300
400
500

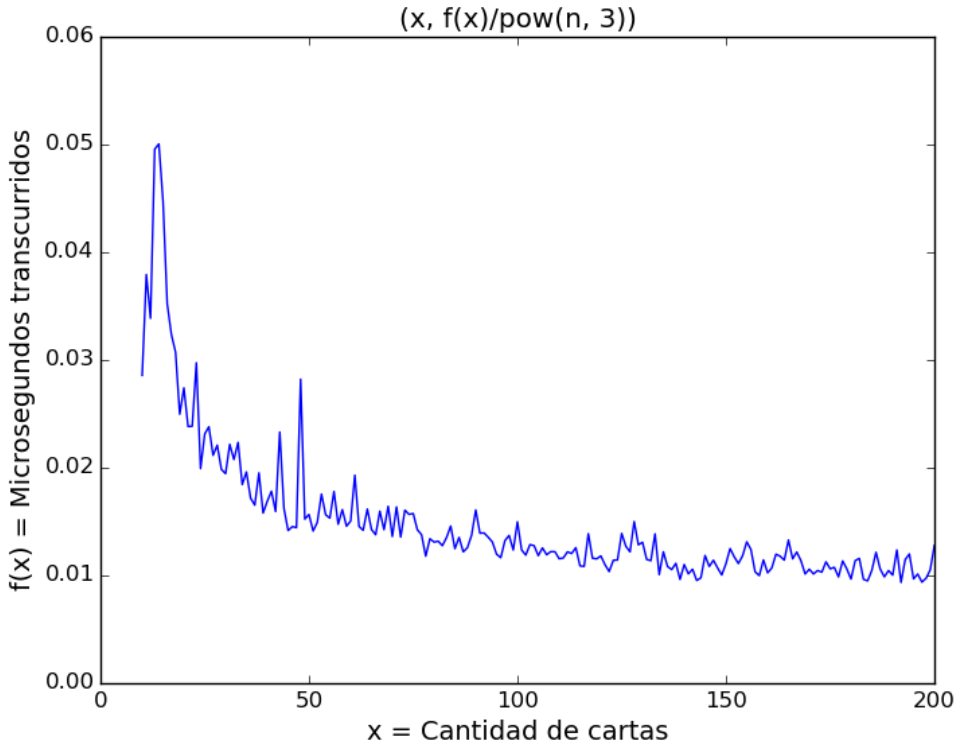
1.6.3. Experimentos adicionales

Se realizaron ademas experimentos adicionales con el objetivo de verificar de forma practica que la complejidad graficada sera $O(n^3)$.

Interpretacion de los graficos: Como se puede ver en los graficos, la complejidad empirica, coincide con la complejidad teorica esperada $O(n^3)$, llegamos a esta conclusion graficando los casos: $n = [1 \dots 200]$ para cada caso, se realizaron 3 graficos, $(X, F(X))$, $(X, F(X)/x^2)$ y $(X, F(X)/x^3)$. En estos graficos se puede observar que al dividir por x^2 se obtiene una curva con crecimiento lineal aproximado, y al dividir por x^3, se obtiene una constante aproximada, es decir, una curva acotada entre una diferencia pequena en el eje X, concluyendo que la curva inicial corresponde a una funcion $f(n) = n^3$, concluyendo, $f(n) \in O(k * n^3)$.




(x, f(x)/pow(n, 2))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Cantidad de cartas
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0
50
100
150
200


(x, f(x)/pow(n, 3))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Cantidad de cartas
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0
50
100
150
200

2. Ejercicio 2

2.1. Descripción del problema

El problema se trata de un conjunto de ciudades ubicadas a cierta distancia entre ellas, las cuales todas deben de ser provistas de gas. Para ésto, tenemos una cantidad k de centrales distribuidoras de gas, y tuberías para conectar ciudades. Una ciudad tiene gas si hay un camino de tuberías que llegue hasta una central distribuidora, es decir, si una ciudad está conectada a otra ciudad por una tubería y a su vez ésta está conectada a otra ciudad por medio de una tubería la cual tiene una central distribuidora, entonces las 3 ciudades tienen gas. Se pide lograr que todas las ciudades tengan gas, pero que la longitud de la tubería más larga de la solución debe ser la más corta posible. La longitud de una tubería es igual a la distancia entre las 2 ciudades.

El algoritmo tiene que tener una complejidad de $O(n^2)$, con n la cantidad de ciudades.

De a partir de ahora, k va a ser siempre la cantidad de centrales distribuidoras disponibles, y n la cantidad de ciudades.

2.1.1. Ejemplo

Como entrada podemos tener 6 ciudades y 2 centrales distribuidoras, como en la Figura 2, y la solución que se busca es como indica la Figura 3.

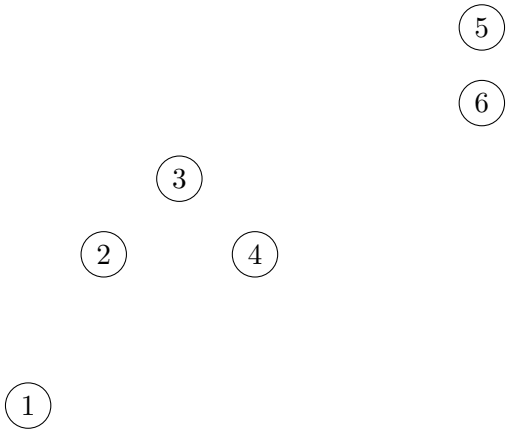


Figura 2: La entrada del problema, con las 5 ciudades y la cantidad de centrales

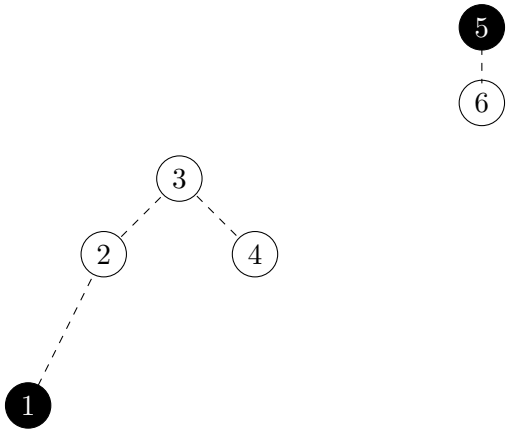


Figura 3: La solución al problema de la Figura 2, los nodos negros son los que contienen las centrales de distribución

2.2. Ideas para la resolución

Para la resolución del problema, se puede penzar en un *grafo*, donde las ciudades son nodos y las tuberías las aristas, cada arista va a tener una distancia asociada que es la distancia entre los nodos (ciudades) que conecta.

Como cada ciudad tiene gas si hay un camino hasta una central distribuidora, entonces todas las ciudades que se conectan a una misma central pertenecen a una misma componente conexa. Como tenemos un máximo de k centrales, la solución tiene que tener un máximo de k componentes conexas y las centrales se colocarán cada una en una componente conexa y en cualquier ciudad dentro de la componente conexa, ya que la distancia de las aristas dentro de una componente conexa no se verá modificada si se cambia de nodo la central dentro de la misma componente conexa.

Entonces, la solución que se pide es que el grafo tenga a lo sumo k componentes conexas, y que la distancia de la arista mas larga, sea la más corta posible.

Una idea que se propone es comenzar con todos los nodos sueltos, sin ninguna arista conectada, y calcular todas las distancias entre todos los nodos, es decir, calcular todas las tuberías posibles con sus respectivas distancias. Luego se ordenarán las aristas (tuberías) de menor a mayor de acuerdo a sus longitudes. Se calcula si la cantidad de componentes conexas es menor o igual a k, si es así, entonces el algoritmo termina, sino coloca la tubería más corta que no genere un ciclo y continúa preguntando sobre la cantidad de componentes conexas e iterando sobre las aristas siguiendo el orden de menor a mayor. Básicamente es aplicar *Kruskal* sobre un grafo completo.

Como se requiere tener todas las aristas ordenadas por peso, en un grafo completo tenemos $n(n-1)/2$ aristas, dandonos una complejidad de al menos $O(n^2 \log n^2)$, y no cumple con el requerimiento. Para mejorar la complejidad del algoritmo, en vez de calcular la distancia de todos las aristas e iterar sobre todas las aristas, requiriendo ordenar por peso *todas* las aristas, primero creamos un árbol generador mínimo (con las aristas más cortas posibles), con una idea como el algoritmo de *Prim* y que tenga de cota $O(n^2)$, el árbol generador mínimo generado nos queda $n-1$ aristas, y luego, al igual que antes, se ordenan y se recorren esas $n-1$ aristas de menor a mayor.

En resumen, la idea es partir de un grafo completo con n nodos, aplicar *Prim* y obtener el *AGM*, luego sobre ese árbol aplicar *Kruskal* pero cortando el algoritmo cuando se tienen tantas componentes conexas como k centrales de gas. La colocación de las centrales de gas se colocan luego en un nodo cualquiera de los nodos de cada componente conexa.

En la sección 2.2.1 se propone un pseudocódigo, en la sección **??** se verá un ejemplo de ejecución del algoritmo, en la sección 2.3 se justificará la correctitud, y en la sección 2.4 se hará el cálculo de la complejidad del algoritmo.

2.2.1. Algoritmo

El algoritmo propuesto lo que realiza es generar un *AGM* siguiendo al algoritmo de *Prim* (desde la Línea 5 a 30), y luego se ordenan las aristas del *AGM* para ir agregándolas siguiendo la idea de *Kruskal* y detenerse cuando se llega a k componentes conexas (desde la Línea 31 a 34).

Algorithm 1 minimizarTuberias

Require: *centrales*: cantidad de centrales disponibles, mayor que 0
Require: *ciudades*: las ciudades con sus posiciones
Require: n: cantidad de ciudades en el parámetro *ciudades*

Ensure: Retorna el grafo tal que hay tanas componentes conexas como *centrales*, y que la arista más larga es la más corta posible

1: **procedure** MINIMIZARTUBERIAS(Entero: centrales, Array: ciudades, Entero: n)→ Grafo
2: Grafo g ← NUEVOGRAFO(n) ▷ Creo un grafo con n nodos, sin aristas
3: <bool agregado, entero distancia, entero nodo> nodos[n] ▷ La distancia es desde n (índice del array) hasta nodos[n].nodo
4: <nodo1, nodo2, distancia> aristas[n - 1]

```
5:     nodos[0] ← <true, 0, 0>
6:     for i ← 1; i < n; i++ do
7:         nodos[i] ← <false, DISTANCIA(ciudades[i], ciudades[0]), 0>
8:     end for

9:     for agregados ← 0; agregados < n - 1; agregados++ do
10:        distancia_minima ← ∞
11:        nodo_minimo ← 0
12:        for i ← 0; i < n; i++ do              ▷ Busco el nodo mas cercano al árbol que ya tenemos
13:            if nodos[i].agregado = false then
14:                if nodos[i].distancia < distancia_minima then
15:                    distancia_minima ← nodos[i].distancia
16:                    nodo_minimo ← i
17:                end if
18:            end if
19:        end for

20:        nodos[nodo_minimo].agregado ← true
21:        aristas[agregados] ← <nodo_minimo, nodo[nodo_minimo].nodo, distancia_minima>        ▷
   Agrego el nodo encontrado

22:        for i ← 0; i < n; i++ do              ▷ Actualizo la distancia de los nodos no agregados aún
23:            if nodos[i].agregado = false then
24:                if nodos[i].distancia > DISTANCIA(ciudades[i], ciudades[nodo_minimo]) then
25:                    nodo[i].distancia ← DISTANCIA(ciudades[i], ciudades[nodo_minimo)
26:                    nodo[i].nodo ← nodo_minimo
27:                end if
28:            end if
29:        end for
30:    end for

31:    ORDENAR(aristas)                                  ▷ Ordeno las aristas por la distancia

32:    for componentes ← n; componentes > centrales; componentes−− do
33:        AGREGARARISTA(g, aristas[n - componentes].nodo1, aristas[n - componentes].nodo2)        ▷
   AgregarArista está especificado en el Algoritmo ??
34:    end for
35:    retornar ← g
36: end procedure
```

Una vez que tenemos el árbol, lo que tenemos que hacer es seleccionar un nodo cualquiera de cada componente conexa para colocar la central distribuidora. Para ésto al crear un nodo sin aristas, cada nodo va a estar asociado a una componente conexa distinta, y cada vez que se agrega una arista, se unen las componentes conexas de ambos nodos bajo una misma componente. Luego al tener el grafo armado, se recorre la lista de componentes conexas y se agarra un nodo para cada componente:

Algorithm 2 AgregarArista

```
1: procedure AGREGARARISTA(Grafo g, Nodo n1, Nodo n2)
2:     NUEVAARISTA(g, n1, n2)        ▷ agrega la arista entre n1 y n2, sin actualizar las componentes
   conexas
3:     if COMPONENTECONEXA(g,n1) ≠ COMPONENTECONEXA(g,n2) then
4:         nueva ← COMPONENTECONEXA(g,n1)
5:         vieja ← COMPONENTECONEXA(g,n2)
```

```
6:        for n ∈ Nodos(g) do        ▷ Le asigno a todos los nodos de la componente conexa vieja, la nueva componente conexa
7:            if ComponenteConexa(g,n) = vieja then
8:                SetearComponente(g,n,nueva)
9:            end if
10:       end for
11:   end if
12: end procedure
```

Y por último para obtener un Nodo para cada componente conexa, vamos a crear un array con n elementos, cada posición i representa a la componente conexa i, y adentro puede tener un valor nulo representando que esa componente conexa no existe, o el valor de un nodo, entonces se va a retornar para cada componente conexa existente, un nodo, para que esos nodos representen las centrales:

Algorithm 3 NodosDeComponentes

```
1: procedure NodosDeComponentes(Grafo g)Nodo[CantidadNodos(g)]
2:     Nodos nodos[CantidadNodos(g)]
3:     for i = 0; i < CantidadNodos(g); i++ do ▷ Inicializo todas las componentes conexas (que son como máximo igual a la cantidad de nodos) asignandole ningún nodo
4:         nodos[i] = nil
5:     end for
6:     for n ∈ g do        ▷ para cada nodo, le asigno dento del array nodos tomando como índice la componente conexa el valor del nodo. Así al finalizar el ciclo sólo las componentes conexas existentes y con nodos tienen un valor dentro del array nodos, y va a tener el valor del último nodo correspondiente a esa componente conexa, ya que nodos de la misma componente se van pisando en el array
7:         nodos[ComponenteConexa(g,n)] ← n
8:     end for
9:     return nodos
10: end procedure
```

2.3. Justificación del procedimiento

Para la justificación vamos a justificar primero que si se aplica el algoritmo de *Kruskal* sobre el *AGM* generado por el algoritmo de *Prim* dado un grafo completo, entonces llegamos a un grafo con pesos de aristas iguales que aplicar *Kruskal* sobre el grafo completo directamente, aunque puede tener aristas diferentes de igual peso. Como tienen los mismos pesos aunque las arisas sean diferentes, a efectos de minimizar el peso de la arista de mayor peso da el mismo resultado. (Sección 2.3.1).

Luego vamos a justificar que aplicando el algoritmo de *Kruskal* sobre un grafo completo pero cortando cuando tenemos K componentes conexas, nos genera la solución que buscamos (Sección 2.3.2).

Teniendo demostrado esos 2 puntos, entonces aplicar *Kruskal* a un grafo completo nos da la solución que buscamos y aplicar *Kruskal* al resultado *Prim* (que es lo que realiza el algoritmo propuesto) nos da el mismo resultado que aplicar *Kruskal* directamente, siendo la solución buscada.

2.3.1. Demostración de Kruskal sobre Prim

Demostraremos que aplicar el algoritmo de *Kruskal* sobre un grafo completo da aristas con los mismos pesos que aplicar *Kruskal* sobre el *AGM* resultante del algoritmo de *Prim*. Como el problema pone restricción sobre el peso de las aristas (de las tuberías), entonces nos fijaremos que las aristas del resultado pueden ser diferentes pero si se mira sólo los pesos de las aristas, estos son los mismos.

Demostración. Un *AGM* de un grafo tiene como suma de los pesos de sus aristas, la menor suma posible de todos los árboles de un grafo. Si se aplica *Prim* y *Kruskal* a un mismo grafo (un grafo completo por ejemplo), ambos dan un *AGM* como resultado, por ende el peso del árbol generado por *Prim* del grafo g ($P_p(g)$) es igual al peso del que genera *Kruskal* ($P_k(g)$), si no fueran iguales, el que tiene mayor peso

no sería un *AGM*. Como ámbos son árboles del mismo grafo, ambos tienen $n-1$ aristas (n = cantidad de nodos del grafo).

$$P_p(g) = \sum_{i=0}^{i<n-1} \pi(a_i)$$

$$=$$

$$P_k(g) = \sum_{i=0}^{i<n-1} \pi(a_i)$$

Como *Prim* y *Kruskal* son 2 algoritmos diferentes, podrían generar un árbol con diferentes aristas pero igual mantienen la igualdad en la suma de los pesos y la cantidad de aristas.

Supongamos que un algoritmo pone las mismas aristas que el otro pero en vez de poner la arista a pone la arista a' con distinto peso, entonces también tiene que haber cambiado otra arista b por b' para mantener la igualdad de la suma. Supongamos que tenemos todas las aristas a_i del AGM y las ordenamos de menor a mayor y de la arista a_0 a a_{j-1} y de $a_j + 2$ a a_{n-2} las aristas son las mmismas para ambos algoritmos pero a_j y a_{j+2} son diferentes, entonces:

$$P_p(g) = \sum_{i=0}^{i<j} \pi(a_i) + \pi(a') + \pi(b') + \sum_{i=j+2}^{i<n-1} \pi(a_i)$$

$$=$$

$$P_k(g) = \sum_{i=0}^{i<j} \pi(a_i) + \pi(a) + \pi(b) + \sum_{i=j+2}^{i<n-1} \pi(a_i)$$

Simplificamos la igualdad de las suma, nos queda:

$$\pi(a') + \pi(b')$$

$$=$$

$$\pi(a) + \pi(b)$$

Como dijimos que el peso de a' es distinto de a, podemos suponer que $\pi(a) > \pi(a')$ y por lo tanto $\pi(b) < \pi(b')$ (se puede suponer también lo contrario y sería análogo). *Prim* entonces hubiera agregado a' con menor peso que a, pero como *Kruskal* recorre las aristas de menor a mayor peso, ya tendría que haber pasado por a', y como las aristas anteriores a a' son las mismas en ambos algoritmos, agregar a' no genera ciclos, entonces *Kruskal* hubiera agregado a a', entonces $\pi(a') = \pi(a)$ porque $a' = a$. Aún quedaría $\pi(b') \neq \pi(b)$, pero como todas las demás aristas son las mismas (incluidas a' y a), entonces para mantener la igualdad de la suma $\pi(b') = \pi(b)$, contradiciendo la suposción que un algoritmo cambiaria una arista por otra con peso dinstinto.

Si cambia una arista por otra de igual peso, no modifica la solución porque el peso de la arista de mayor peso seguiría siendo el mismo.

Como aplicar *Kruskal* a un árbol da el mismo árbol (porque es el único subgrafo que es un árbol), aplicar *Kruskal* al resultado de *Prim* da el mismo resultado que aplicar directamente *Prim*, y ya demostramos que aplicar *Prim* y *Kruskal* dan árboles con mismos pesos de aristas, por lo que aplicar *Kruskal* directamente o aplicar *Kruskal* a la salida de *Prim*, da árboles con los mismos pesos de aristas.

□

2.3.2. Demostración de que aplicar Kruskal nos genera la solución

Demostraremos que teniendo un grafo completo, si aplicamos *Kruskal* y dejamos de agregar aristas cuando llegamos a k componentes conzas, tenemos la solución que buscamos:

Demostración. El algoritmo de *Kruskal* ordena las aristas de menor a mayor según su peso, y agrega 1 a 1 las aristas según dicho orden tal que no genere un ciclo. Al agregar una arista se disminuye en 1. Nosotros detendremos el algoritmo cuando se llego a k componentes conezas. Supongamos que tenemos m aristas ordenadas de menor a mayor por su peso, $(a_0, a_1..a_i..a_{m-1})$, que se fueron agregando (aunque algunas generaban ciclos y no se agregaron), y que detuvimos el algoritmo de *Kruskal* al agregar la arista a_j porque se llegaron a k componentes conexas. Entonces, como las aristas estaban ordenadas:

$$(\forall 0 \leq i < j) a_i \leq a_j$$
$$\wedge$$
$$(\forall j < i < m) a_i \geq a_j$$

Todos los $a_i, i < j$ están agregados al resultado de *Kruskal*.

El a_j es la arista de mayor peso (la tubería más larga), y es la que queremos minimiza.

Si existiese una mejor forma de armar las componentes conexas, entonces existe un $a_i, a_i < a_j \implies i < j$, tal que se puede reemplazar a_i por a_j y así terner la arista de mayor peso que es de menor peso que la que obtuvimos. Como $i < j$, *Kruskal* ya la analizó a_i antes de pasar por a_j.

Si a_i no generaba ciclos, entonces esa arista pertenece al resultado del algoritmo, y como no se detuvo en a_i significa que aún agregando esa arista (y todas las anteriores) no se llegaban a las k componentes componentes conexas que se buscan, entonces no se puede sacar a_j porque no se llegaría a la cantidad de componentes conexas necesarias, contradiciendo que se puede quitar a_j para mejorar la solución.

Si a_i generaba un ciclo, entonces esa arista no pertenece al resultado del algoritmo. Notar que como a_i se analiza antes que a_j por tener menor peso, entonces a_i generaba un ciclo cuando a_j aún no estaba agregada. Si se quita a_j y se agrega a_i, al quitar a_j se aumenta en 1 la cantidad de componentes conexas (ahora tenemos $k + 1$) y no es solución, y al agregar a_i se está generando un ciclo, por lo que no disminuye la cantidad de componentes conexas, manteniendose en $k + 1$ y no es solución tampoco, por lo que contradice que se puede quitar a_j para agregar a_i y tener una mejor solución.

Entonces, agregar aristas en orden según su peso si no genera ciclos y parar cuando se alcanzan las k componentes conexas, nos da como peso de la arista más larga, el peso mas chico posible, siendo la solución que se busca del problema.

□

2.4. Cota de complejidad

Se analiza la complejidad de algoritmo 1, para ésto se supone que el cálculo de la distancia entre ciudades (el peso de las aristas/tuberías) se realiza en $O(1)$

La cantidad de nodos se representará como n, y la cantidad de centrales como k.

- La inicialización de unas variables se realiza de la línea 5 a 8, y se realizan n iteraciones calculando la distancia y guardando en un vector, quedando $O(n)$
- Para la creación del AGM entre las líneas 9 a 30 realiza $n - 1$ iteraciones
  - Líneas 12 a 19, busca el nodo más cercano, realizando n iteraciones de comparaciones y asignaciones que son $O(1)$, quedandonos $O(n)$
  - Las líneas 20 y 21 son $O(1)$
  - La actualización de las distancias, entre las líneas 22 y 29 realiza n iteraciones de comparaciones y asignaciones que son $O(1)$, quedandonos $O(n)$
- Ordenar las aristas en la línea 31, y se realizan sobre las aristas agregadas en la iteración anterior, la cual agrega $n - 1$ aristas, entonces se ordenan $n - 1$ elementos. Al n no estar acotado, se puede realizar con algoritmos como *MergeSort* o *HeapSort* en $O(n \log n)$
- Entre las líneas 32 y 34 se realizan $n - k$ iteraciones, implementando el grafo g en una *matriz de adyacencia*, *AgregarArista* se realiza en $O(n)$ ya que agrega la relación en la matriz de adyacencia en $O(1)$ y luego tiene que actualizar las componentes conexas en $O(n)$ quedandonos una complejidad de $O(n * (n - k))$. Notar que si $k > n$, no se realiza ninguna iteración.

- Luego de tener el grafo solución, tenemos que obtener 1 nodo de cada componente, eso se realiza con la función *NodosDeComponentes* que inicializa un array de n elementos y luego recorre todos los nodos (n nodos) una vez, quedando $O(n+n) = O(n)$

Bajo éste análisis, la complejidad nos queda (1)

$$\begin{aligned} & O(n) + (n-1) * (O(n) + O(1) + O(n)) + O(n \log n) + O(n * (n-k)) + O(n) \\ & = \\ & O(n) + O(n^2) + O(n) + O(n^2) + O(n \log n) + O(n * (n-k)) + O(n) \\ & = \\ & O(3n) + O(2n^2) + O(n \log n) + O(n * (n-k)) \\ & = \\ & O(n^2) + O(n * (n-k)) \end{aligned} \tag{1}$$

Como el $O(n*(n-k))$ está acotado por $O(n^2)$ (cuando $k = 0$), entonces nos queda que la complejidad del algoritmo es:

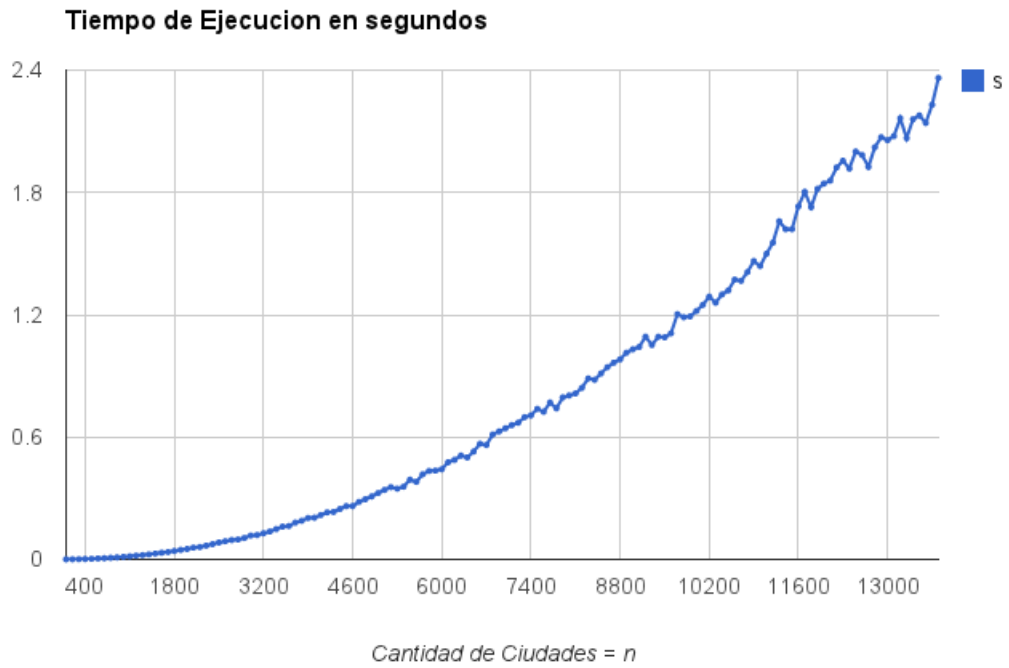
$$O(n^2)$$

Cumpliendo así la complejidad requerida.

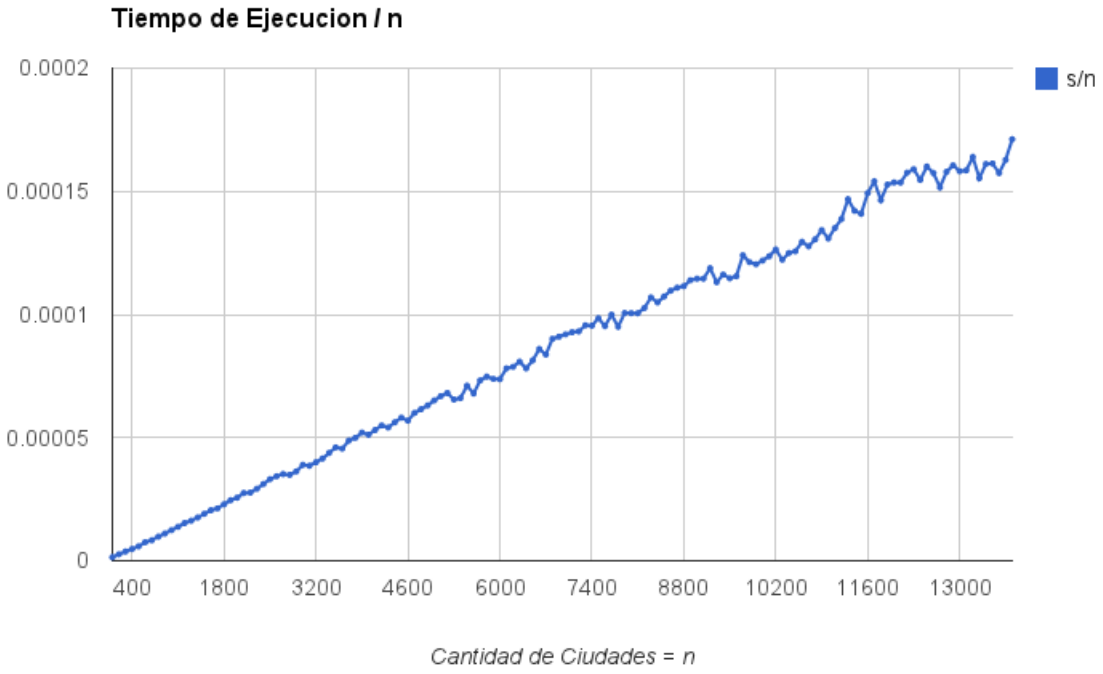
2.5. Mediciones de pérformance

Para medir la pérformance del algoritmo, se crearon casos de prueba como se especifa en el Apéndice de casos de prueba (Sección 4) y se comparó contra la complejidad $O(n^2)$ calculada en la Sección 2.4

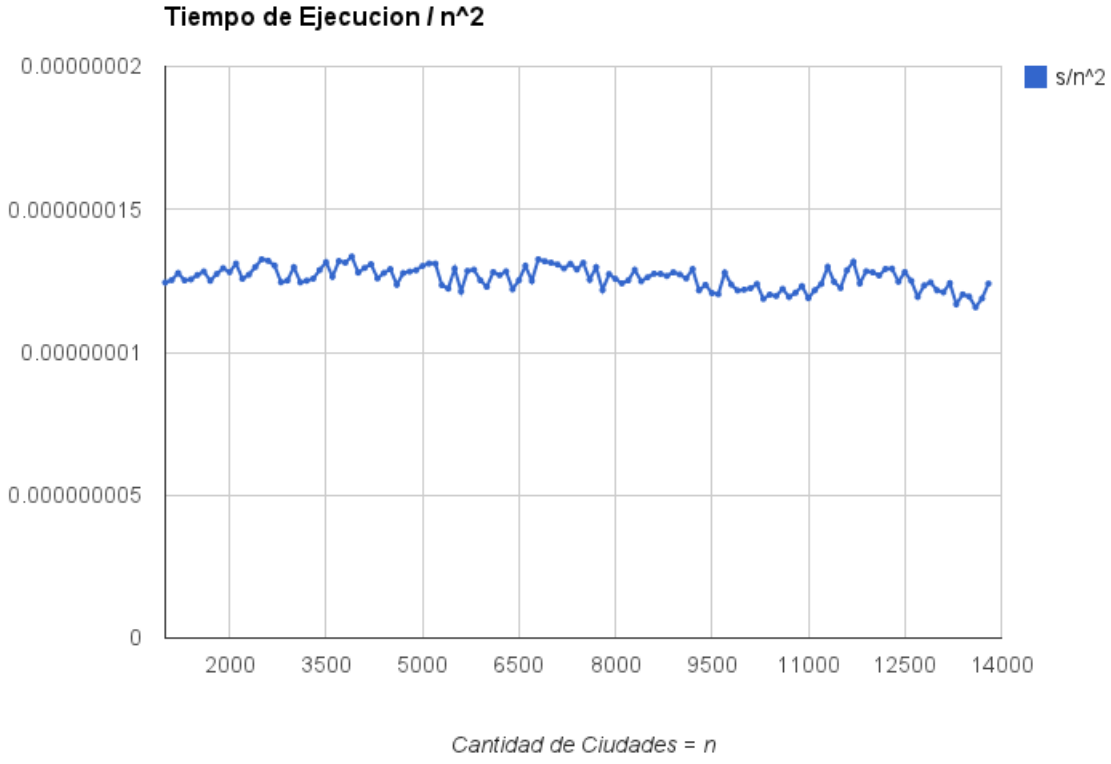
Se probó la implementación con n desde 100 a 13800, avanzando de a 100, y se graficó el promedio del tiempo en segundos que tardó el algoritmo repitiendo la prueba 10 veces.



Luego se graficó el resultado anterior diviendo el tiempo por n, quedando lo que parece una recta



Y por último se graficó el resultado anterior diviendo el tiempo por n^2, mostrando una recta que se aproxima a una constante acotada por arriba y abajo. Se quitó del gráfico las mediciones para valores chicos de n por dar valores demaciado chicos y variables.



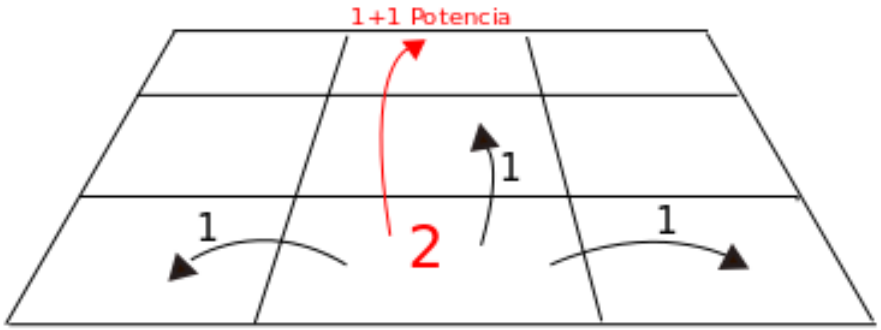
No se pudieron hacer pruebas para n mucho mas grandes por el tiempo que se tardaba en sacar las mediciones y porque el consumo de memoria crecía en el órden de n^2, con $n = 20000$ se requerían al menos $(20000b)^2 * 4b = 1600000000b = 1600000kb = 1600mb$ de memoria (la multiplicación por 4 es por el tamaño de un entero) y al llegar a esos valores, la computadora que se usaba para las mediciones comenzaba a ponerse muy lenta porque el sistema mientras tanto movía memoria en RAM al disco rígido.

3. Ejercicio 3

3.1. Descripción del problema

El problema se trata de un juego que forma parte de un reality show. Este juego tiene un campo de juego cuadrado dividido en celdas, de tamano n x n. Cada una de estas celdas posee un resorte con el que se puede saltar hacia otras celdas. Estos resortes varían en sus potencias, siendo la potencia la cantidad de celdas que pueden propulsar al jugador. Es posible apuntar los resortes hacia adelante, atrás, izquierda y derecha. Adicionalmente cada jugador posee unidades extra de potencia, que le permiten potenciar sus saltos. Éstan son limitadas, y el jugador las podrá usar a elección en los saltos que le parezcan convenientes.

Un ejemplo de salto sería la siguiente situación: vemos que la celda tiene una potencia de 1, por lo que el jugador podría saltar una celda izquierda, hacia adelante o hacia la derecha. Y en caso de que quisiera usar una potencia, podría saltar does celdas hacia adelante, pero su reserva de potencias se reduciría en uno.

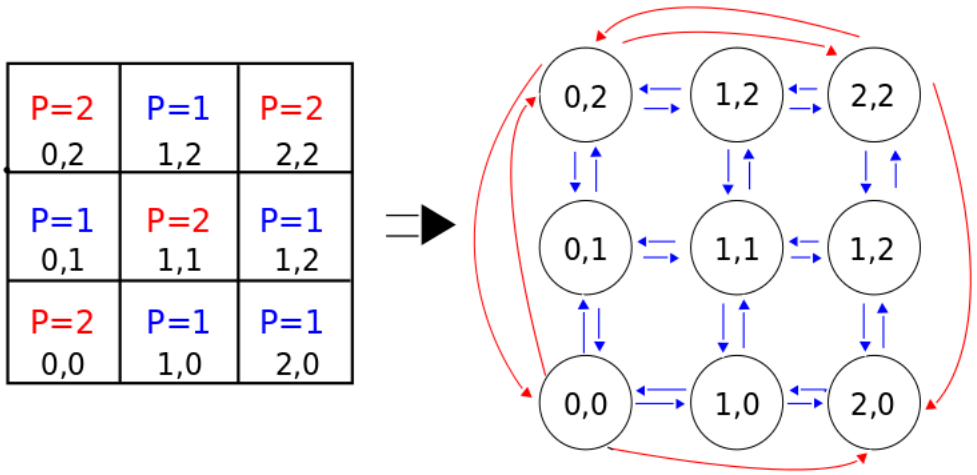


El objetivo del juego es llegar de una celda origen a otra destino, realizando la menor cantidad de saltos posibles. Por esto, se pide el diseno e implementación de un algoritmo que calcule y de como resultado uno de los caminos que lleguen de origen a destino cuya cantidad de saltos sea mínima.

El algoritmo tiene que tener una complejidad de $O(n^3 * k)$, con n la cantidad de filas y columnas del campo de juego y k la cantidad de potencias otorgadas al inicio del juego al jugador.

3.2. Ideas para la resolución

Decidimos encarar la resolucioón como un problema de grafos. El campo de juego es representado como un grafo con un nodo por cada celda, y las aristas son orientadas, de peso constante y representan todos los posibles saltos entre celda y celda.



Por cada uno de los valores $0..k$ de potencia tenemos un campo de juego de los anteriormente mencionados. Los vamos a llamar "*niveles*", y van a ser subgrafos interconectados para formar un grafo general que va a resolver el problema. Entre estos niveles va a haber aristas conectando los nodos de mayor nivel con los de menor nivel, representando el hecho de "*gastar*" potencias, es decir, si en un turno estoy en el nivel k y utilizo dos potencias, en el siguiente turno voy a estar posicionado en un nodo del nivel $k-2$.

De esta forma, estar en el nodo (i,j) del nivel k representa estar posicionado en la celda de juego (i,j) y disponer de k potencias para utilizar .Podemos "*saltar entre celdas*", moviéndonos de un nodo a otro usando las aristas este nivel. En caso de querer usar las potencias, debemos movernos por aristas que conectan los nodos de nivel k con los niveles inferiores. Por ejemplo, si estamos en el nodo (i,j,k), de potencia 2, y queremos saltar 3 nodos hacia la derecha, debemos tomar la arista orientada que nos lleva al nodo $(i+3,j,k-1)$ (en caso de disponer de una potencia). De esto deducimos que las aristas entre niveles sólo salen de nodos de nivel superior hacia nodos de nivel inferior. Formalicemos esto:

Para cada nivel, sea:

$$G_L = (V_L, E_L) / \; V_= V1_L, ..., V_{n_L} = \{casillas\ 1..n\ con\ L\ potencias\ disponibles\}$$

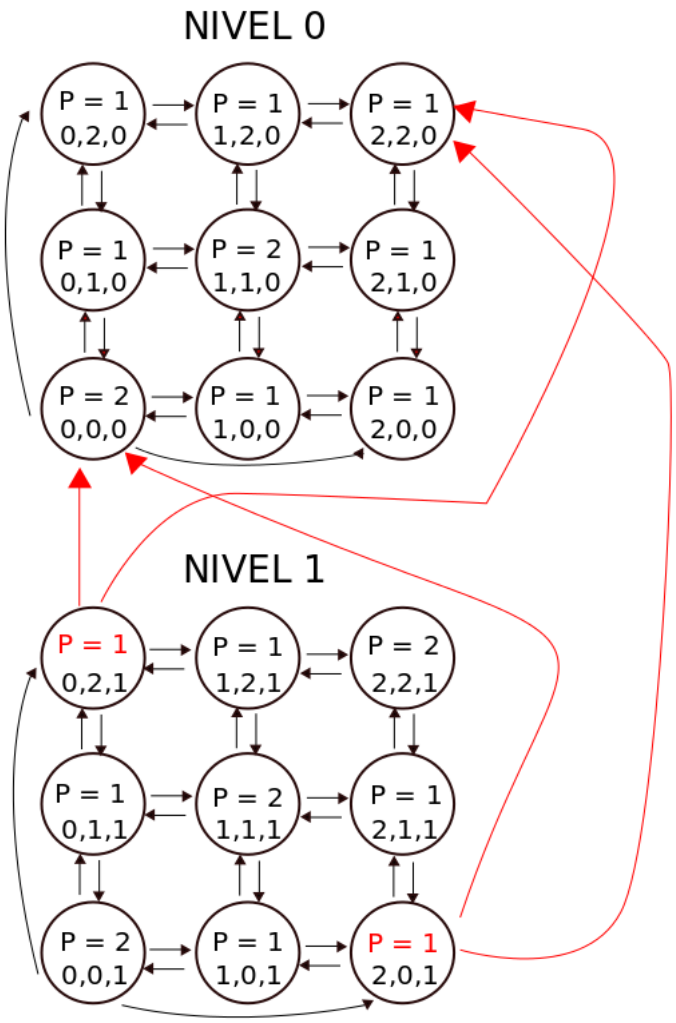
Por lo tanto, el grafo G es:

$$G = (W, A) / \; W \; = \cup_{i=1}^{k} V_i(G_i) \; \wedge \; A \; = \; (\cup_{L=1}^{k} E_L(G_L)) \cup T$$

Donde T son las aristas entre niveles, descriptas a continuación:

Se tienen aristas dirigidas en cada nivel tal que si $v, u \in V_t$, $(u,v) \in E_t$ sii v es alcanzable desde u sin usar potencias. Dados niveles G_m, $G_j \; / \; m < j$ y dos vértices $v \in V_m(G_m) \wedge w \in V_j(G_J)$ existe una arista dirigida "*entre*" niveles, que pertenezca a T, sii w es alcanzable desde v usando estrictamente $(j-m)$ unidades de potencia, es decir, que la distancia en casillas (verticales u horizontales) de v a w es igual a $(j-m) + pot(v)$.

En el siguiente diagrama mostramos las aristas entre niveles que deberían tomarse en caso de usar una potencia en las celdas $(0,2)$ y $(2,0)$



Notemos que al avanzar hacia niveles más bajos no se puede ir hacia arriba (lo cual tiene sentido pues el nivel actual indica la cantidad de potencias disponibles para usar, y este valor nunca puede aumentar)

Definimos n_0 como el nodo origen $/n_0 \in V_k$ (primer nivel, más alto), dado por las coordenadas cartesianas de la celda de comienzo de la entrada. Si la celda destino en el juego es (i, j) definimos el conjunto de nodos destino como los nodos (i, j, k), con k entre 0 y la cantidad de potencias máxima, de forma que al llegar al nodo destino (i, j, l), l es la cantidad de potencias sin usar.

Las aristas son de peso constante en su totalidad (en particular, 1). Además, en cada arista se guarda un valor indicando la cantidad de niveles atravesadas en este paso, lo cual es equivalente a la cantidad de potencias utilizadas en el salto. No confundir este valor con el costo o peso de la arista. (Dibujo zarpado)

De esta forma, encontrar el camino que realize la menor cantidad de saltos se reduce a buscar el camino más corto en el grafo de n_0 a algún nodo destino, guardando en cada caso el valor de cada arista (potencia usada) y la posición (i, j) del nodo sin importar el nivel actual. Un recorrido de anchura BFS del grafo nos brinda el camino más corto, comenzando la búsqueda desde n_0.

3.3. Estructuras de datos

A cada una de las celdas, las representamos con la clase *nodo*, que posee tres atributos: x, y y *level*, (el numero de fila y columna de la celda que representa este nodo, y el nivel en el que se encuentra el nodo).

Representamos el grafo en memoria con una modificación del método de listas de adyacencia. La estructura es un diccionario (java $HashMap$) llamado graph, cuyas claves son los nodos y sus definiciones son el tipo $NodoMetadata$.

La clase $NodoMetadata$ brinda la información necesaria de cada nodo para poder armar el grafo, ya que contiene el atributo $alcanzables$, que es su lista de adyacencia. Además de esto, posee tres atributos más: $nodoValue$, $fueVisitado$ y $predecesor$, el primero representando la potencia del resorte de la celda, y los otros dos son de utilidad al bfs, para "$marcar$" un nodo, e indicar su antecesor en el recorrido de éste.

Finalmente tenemos una clase $Juego$ que unifica todo, cuyos atributos son un nodo inicial, un nodo destino, y el diccionario graph.

3.4. Algoritmos y Complejidad

El algoritmo consta de varias etapas principales:

1. Generación del grafo a partir de los datos de entrada.
2. Busqueda del camino mínimo(en cantidad de pasos) con un BFS.
3. Construcción del camino a través de los predecesores del destino indicados por BFS y cálculo de powerup utilizado en cada salto.

3.4.1. Generación del Grafo

A continuación mostramos un pseudocódigo de la generación del juego. Durante las demostraciones, se usará la variable k para referirse a la cantidad de potencias iniciales al iniciar el juego, y la variable n como la cantidad de filas del juego.

```
1: procedure JUEGO(int[][]valores, int potInicial, int filInicial, intcolInicial, int filDestino, int colDestino)
2:     Juego.nodoInicial ← new Nodo(filInicial, colInicial, potInicial)                          ▷ O(1)
3:     Juego.nodoDestino ← new Nodo(filDestino, colDestino, 0)                                   ▷ O(1)
4:     Juego.graph ← new HashMap < Nodo, NodoMetadata > ()                                       ▷ O(1)
5:     int dimension ← longitud(valores)                                                         ▷ O(1)
6:     for int level ← potInicial; level ≥ 0; level − − do                                       ▷ O(potInicial)
7:         for int i ← 0; i < dimension; i + + do                                                ▷ O(dimension)
8:             for int j ← 0; j < dimension; j + + do                                            ▷ O(dimension)
9:                 Nodo nodo ← new Nodo(i, j, level)                                             ▷ O(1)
10:                int nodoValue ← valoress[i][j]                                                ▷ O(1)
11:                if nodoValue > dimension then
12:                    nodoValue ← dimension
13:                end if
14:                boolean fueVisitado ← false                                                   ▷ O(1)
15:                List < Nodo >:, alcanzables ← calcularAlcanzables(nodo, nodoValue, dimension)
   ▷ O(dimension)
16:                NodoMetadata metaData ← new NodoMetadata(nodoValue, fueVisitado, alcanzables, null)
   ▷ O(1)
17:                graph.put(nodo, metaData)                                                     ▷ O(1)
18:            end for
19:        end for
20:    end for
21: end procedure
```

Donde valores representa la matriz de celdas con sus respectivas potencias de resorte, potInicial representa k, la cantidad de potencias que se le brinda a un jugador al iniciar el juego, y $filInicial$,

colInicial, *filDestino*, *colDestino* las coordenadas respectivas de la celda de inicio y la celda destino. Cabe aclarar, en la línea 11, en caso de que en la entrada, una celda posea un valor de resorte mayor a la dimensión del campo de juego, fijamos el valor del nodo como *dimension*, ya que no tiene sentido poseer un resorte que permita saltar fuera de los límites de la matriz, es decir, el jugador sólo va a poder usar uso de la potencia del resorte como máximo hasta el valor dimensión. Esto nos permite ajustar el cálculo de complejidad de la función siguiente.

Complejidad:

Los 3 ciclos for anidados indican una complejidad de $O(k * n^2)$. Dentro de estos ciclos se realizan operaciones, todas de tiempo constante $O(1)$ excepto la llamada a a función *alcanzables*, que toma $O(n)$, y será justificado a continuación, dándonos un total de $O(k * n^3)$ en la construccion del grafo para nuestro modelo.

3.4.2. Cálculo de alcanzables

Función auxiliar que para un nodo, calcula todos los otros nodos a los que podriá "*saltar*", usando y no usando potencias. La salida del algoritmo es del tipo $Lista < Nodo >$.

```
1: procedure CALCULARALCANZABLES(Nodo nodo, int valorNodo, int dimension)
2:     int nivelActual = nodo.getLevel()                                   ▷ O(1)
3:     int actualX = nodo.getX()                                           ▷ O(1)
4:     int actualY = nodo.getY()                                           ▷ O(1)
5:     int resorte = valorNodo                                             ▷ O(1)
6:     Lista < Nodo > alcanzables = new Lista < Nodo >                     ▷ O(1)
7:     for int j ← −resorte; j ≤ resorte; j++ do   ▷ O(resorte) acotado por O(dimension)
8:         if validarBordes(dimension, actualX, j) then                    ▷ O(1)
9:             Nodo alcanzableDir ← new Nodo(actualX + j, actualY, nivelActual)  ▷ O(1)
10:            alcanzables.agregar(alcanzableDir)                          ▷ O(1)
11:        end if
12:        if validarBordes(dimension, actualY, j) then                    ▷ O(1)
13:            Nodo alcanzableDir ← new Nodo(actualX, actualY + j, nivelActual)  ▷ O(1)
14:            alcanzables.agregar(alcanzableDir);                         ▷ O(1)
15:        end if
16:    end for
17:    for int potAdic ← 1; potAdic+ ≤ nivelActual; potAdic++ do           ▷ O(dimension)
18:        int potTotal ← potencia + potAdic;
19:        if potTotal > dimension then
20:            break
21:        end if
22:        if validarBordes(dimension, actualY, potTotal) then             ▷ O(1)
23:            NodoalcanzableIndir = newNodo(actualX, actualY + potTotal, nivelActual − potAdic)
   ▷ O(1)
24:            alcanzables.agregar(alcanzableIndir)                        ▷ O(1)
25:        end if
26:        if validarBordes(dimension, actualY, −potTotal) then            ▷ O(1)
27:            NodoalcanzableIndir = newNodo(actualX, actualY − potTotal, nivelActual − potAdic)
   ▷ O(1)
28:            alcanzables.agregar(alcanzableIndir)                        ▷ O(1)
29:        end if
30:        if validarBordes(dimension, actualX, potTotal) then             ▷ O(1)
31:            NodoalcanzableIndir = newNodo(actualX + potTotal, actualY, nivelActual − potAdic)
   ▷ O(1)
32:            alcanzables.agregar(alcanzableIndir)                        ▷ O(1)
```

```
33:         end if
34:         if validarBordes(dimension, actualX, −potTotal) then                    ▷ O(1)
35:             NodoalcanzableIndir = newNodo(actualX − potTotal, actualY, nivelActual − potAdic)
    ▷ O(1)
36:             alcanzables.agregar(alcanzableIndir)                                ▷ O(1)
37:         end if
38:     end for
39:     returnalcanzables                                                           ▷ O(1)
40: end procedure
```

Donde *nodo* es el nodo del cual se van a calcular sus alcanzables, $valorNodo$ la potencia de su resorte y dimension es n. Podemos ver que al algoritmo lo componen dos ciclos for lineales, que van armando la lista *alcanzables*. El primer ciclo, calcula los nodos alcanzables *Directos*, es decir, aquellos a los que puede saltar con el resorte de la celda sin hacer uso de ninguna potencia adicional.El ciclo itera de $-resorte$ a $resorte$, agregando de ésta forma a la lista de alcanzables los nodos a su izquierda, derecha, hacia adelante y atrás, validando con cuidado los bordes de la matriz, y sin agregarse a sí mismo, tomando cada uno de estos pasos ($O(1)$). Dado que la potencia de un resorte está acotada por la dimensión de la matriz (por la forma en la que generamos el grafo), este ciclo itera como máximo de $-dimension$ a $dimension$, por lo tanto $\in O(n)$.

El segundo ciclo for calcula todos los nodos alcanzables indirectamente, es decir, aquellos para los cuales el jugador tiene que 1 o más de sus potencias extra para poder llegar. Este ciclo itera seguún la variabie *potAdic*, potencias adicionales, que comienza en 1 hasta el nivel del nodo en cuestión (recordar que el nivel de un nodo representa la cantidad de potencias extra que le quedan a un jugador). Este valor se le suma a la potencia del resorte (línea 18) y si se validan bien los bordes, se agregan estos nodos ($O(1)$), los que están a distancia *potencia de resorte* + *potAdic*, y al iterar *potAdic* hasta el nivel del nodo obtenemos todos los nodos alcanzables usando las potencias que le quedan disponibles al jugador. Estas acciones se realizan en $O(1)$, y el ciclo itera de 1 hasta el nivel del nodo.

Esto indicaría que el ciclo tendría una complejidad de $O(k)$, por ser k el nivel máximo del grafo, pero podemos acotar esto, en la línea 19, por el mismo motivo que en el ciclo anterior, una vez que la potencia total a usar supera el valor de la dimensión de la matriz, cortamos el ciclo, ya que no tiene sentido saltar fuera del campo de juego. Por lo tanto calculamos para los posibles valores de potencia adicional que le queden al jugador, hasta que la potencia total de salto sea de *dimension*. Por lo tanto el ciclo también $\in O(dimension)$. Como comentario adicional, remarcamos que es posible agregar este condicional a la guarda del ciclo, pero dada la complejidad de entendimiento de este pseudocódigo decidimos ponerlo como una instrucción de *break* para mayor claridad.

Concluimos en que la función tiene una complejidad de $O(n) + O(n) = O(n)$. Lo cual tiene sentido, ya que si consideramos la matriz de juego, un nodo como máximo puede moverse hacia todos los de su fila y columna, es decir a $2n - 2$ nodos, lo cual concuerda con la complejidad ya que anadimos cada uno de ellos a la lista de alcanzables en tiempo constante.

3.4.3. Búsqueda del camino mínimo

A continuación el pseudocódigo de la búsqueda BFS. Se trata de una modificacion de BFS que busca un camino entre el nodo inicial y alguno de los nodos destino, sin importar a qué nivel pertenezcan, es decir, cuando la búsqueda encuentra un nodo w tal que las primeras 2 coordenadas de w coinciden con la celda destino, termina el algoritmo. Acto seguido reconstruye el camino en base a los predecesores, que se van guardando a medida que se realiza la expansion en anchura. Teniendo en cuenta que BFS encuentra el camino mas corto en cantidad de aristas entre 2 nodos, esto resuelve nuestro problema. La salida es una lista de nodos que comprende el camino, indicando en cada paso: (posX, posY, gasto de PowerUp en el salto del predecesor de este nodo al actual).

```
1: procedure CAMINOMINIMO(Juegoj)List < Nodo >
2:     Cola < Nodo > cola ← new Cola < Nodo >                                   ▷ O(1)
```

```
3:    cola.encolar(nodoInicial)                                          ▷ O(1)
4:    marcarVisitado(nodoInicial)                                        ▷ O(1)
5:    while ¬cola.esVacia() do                                           ▷ O(dimension * dimension)
6:        Nodo actual ← cola.desencolar()                                ▷ O(1)
7:        if esDestino(actual) then                                      ▷ O(1)
8:            return construirCaminoConPredecesores(actual)              ▷ O(dimension * dimension)
9:        end if
10:       Lista < Nodo > alcanzables ← obtenerAlcanzables(actual)        ▷ O(dimension * dimension)
11:       for all Nodo alcanzable : alcanzables do                       ▷ O(dimension * dimension)
12:           if ¬estaVisitado(alcanzable) then                          ▷
13:               marcarVisitado(alcanzable)                             ▷ O(1)
14:               asignarPredecesor(alcanzable, actual)                  ▷ O(1)
15:               cola.encolar(alcanzable)                               ▷ O(1)
16:           end if
17:       end for
18:   end while
19:   return null                                                        ▷ O(1)
20: end procedure
```

Sea n = dimension de la matriz cuadrada de entrada, k = unidades de powerUp Disponibles al inicio del algoritmo + 1(hay capas [0..k] en el grafo) * El while principal del ciclo recorre todos los nodos en el peor caso(cuando la busqueda no se detiene en el if(esDestino(...)) * Veamos porque: En cada iteracion, se visita un nodo, se lo marca para no visitarlo nuevamente, y se verifica que no sea * el nodo que estamos buscando(nodo destino), si lo es, termina el algoritmo de busqueda y se llama a la funcion construirCaminoConPredecesores * Caso contrario, se agregan a la cola todos los nodos adyacentes(alcanzables) NO visitados, ademas se indicarse quien es el precedesor, en este paso. * Veamos ciertos detalles tecnicos, obtener los adyacentes de un nodo es O(1) amortizado(acceder al hashmap por key) y O(n) para encolar todos los adyacentes * (cada nodo tenia 2n alcanzables como maximo). Sea f(G, i) = cantidad de nodos sin visitar en G en la iteracion i, esta funcion tiene un valor inicial f(G, 0) = pow(n,2)*k y * en cada iteracion esta funcion decrece y toma el valor cero en f(G, pow(n,2)*k) = f(G, cantNodosG) = 0, en este momento, no hay mas nodos no visitados para agregar * a la cola. Luego, se procesaran todos los elementos encolados y terminara el algoritmo. Juntando todas estas observaciones vemos que el * while(!queue.isEmpty()) esta asociado a la funcion f(G, i), que decrece en cada iteracion al menos una unidad, en el peor de los casos, * tomara O(f(G,0)) = O(pow(n,2)*k) = cantNodos de G al comenzar en recorrer todos los nodos. * la funcion esDestino(...) toma tiempo constante, de ingresar en este if, termina el algoritmo con un costo O(f(G, 0)) adicional por armar * el camino con la funcion construirCaminoConPredecesores. La lista de alcanzables se obtenia en O(1), iterar sobre los alcanzables(adyacentes) * realizando operaciones de tiempo constante adentro de este subciclo era O(n). En total, este metodo tiene una complejidad temporal * iterar sobre todos los nodos O(k*pow(n, 2))*(esDestino O(1) + obtenerAlzancables O(1 + encolarAlcanzables O(n) + al finalizar armar camino O(k*pow(n, 2)) * = O(k*pow(n, 2))*O(n) + O(k*pow(n, 2)) = O(k*pow(n, 3))

Finalmente, el pseudocódigo de la función que genera el camino a partir del recorrido que realizó el BFS. La salida del algoritmo es del tipo $Lista < Nodo >$.

```
1: procedure CONSTRUIRCAMINOCONPREDECESORES(Nodo actual)
2:    Lista < Nodo > camino ← new Lista < Nodo >                         ▷ O(1)
3:    Nodo nodo ← actual                                                 ▷ O(1)
4:    while damePredecesor(nodo)! = null) do                             ▷ O(dimension)
5:        Nodo predecesor ← damePredecesor(nodo)                         ▷ O(1)
6:        nodo.nivel ← predecesor.nivel() − nodo.nivel()                 ▷ O(1)
7:        camino.agregarAdelante(nodo)                                   ▷ O(1)
8:        nodo ← predecesor                                              ▷ O(1)
9:    end while
10:   nodo.setLevel(0)                                                   ▷ O(1)
```

11: *camino.agregarAdelante(nodo)* ▷ $O(1)$
12: *return camino* ▷ $O(1)$
13: **end procedure**

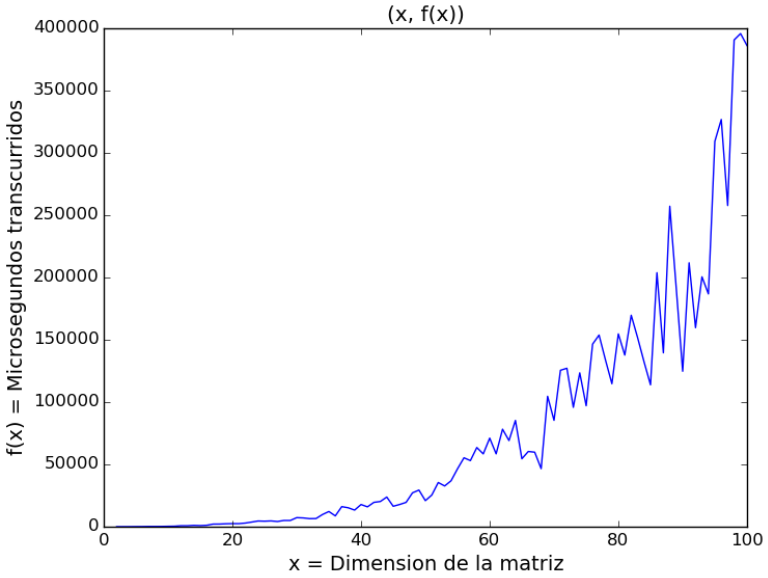
3.5. Cota de complejidad

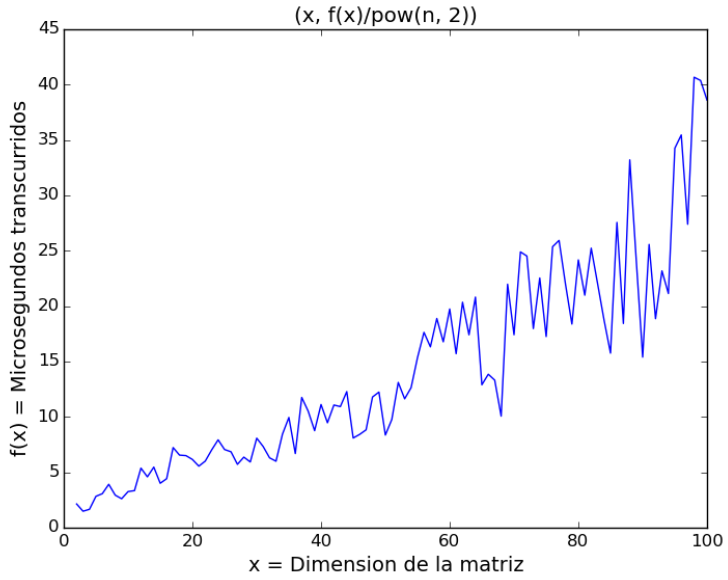
3.6. Casos de prueba y resultado del programa

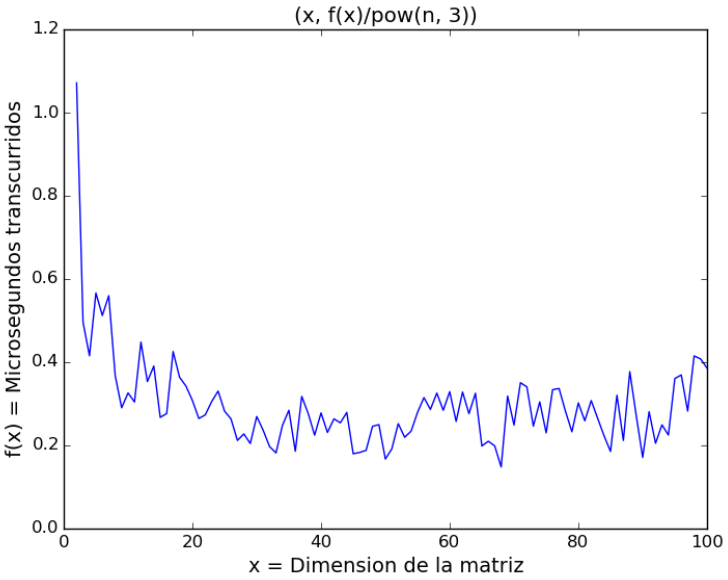
Compilador GJC: Java realiza un profiling sobre el programa a compilar y toma estadisticas para realizar diferentes procesos de compilacion/interpretacion sobre el codigo, esto se ve reflejado en el tiempo de ejecucion del programa compilado con el jdk, para forzar la compilacion de java a codigo objeto, utilizamos el compilador GCJ de GNU, que es uno de los compiladores denominados Ahead-Of-Time. Todos los experimentos fueron ejecutados sobre el programa compilado a codigo nativo. La cantidad de iteraciones por cada entrada es 100 para licuar los posibles outliers.

Interpretacion de los graficos: Como se puede ver en los graficos, la complejidad empirica, coincide con la complejidad teorica esperada $O(k*n^3)$, llegamos a esta conclusion graficando los siguientes casos: $k = [0.,5]$ $n = [2.,100]$ para cada caso, se realizaron 3 graficos, $(X, F(X))$, $(X, F(X)/x^2)$ y $(X, F(X)/x^3)$. En estos graficos se puede observar que al dividir por x^2 se obtiene una curva con crecimiento lineal aproximado, y al dividir por x^3, se obtiene una constante aproximada, es decir, una curva acotada entre una diferencia pequena en el eje X, concluyendo que la curva inicial corresponde a una funcion $f(n) = q.n^3$, con q en R. Asimismo veamos que cuando se incrementa el valor de k para los graficos anteriores, la imagen de las funciones graficadas crecen linealmente a medida que crece k. Lo que nos indica que en realidad las funciones graficadas son realmente $f(n) = j.(k.n^3)$, con j en R, concluyendo, $f(n) \in O(k * n^3)$. Referencia: http://www.excelsior-usa.com/jetcs00007.html

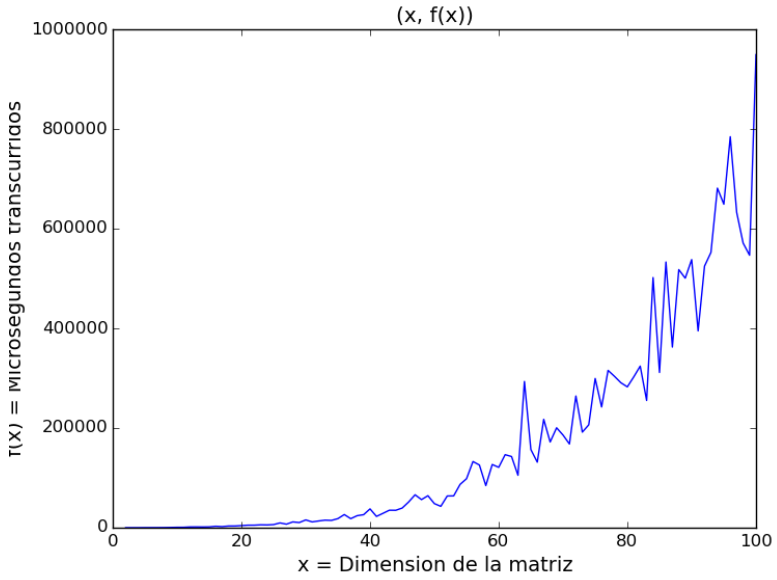
Con k = 0

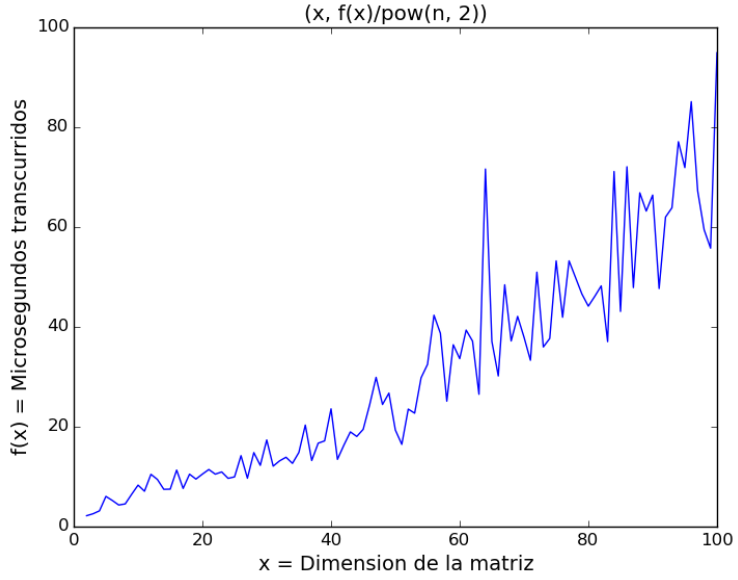


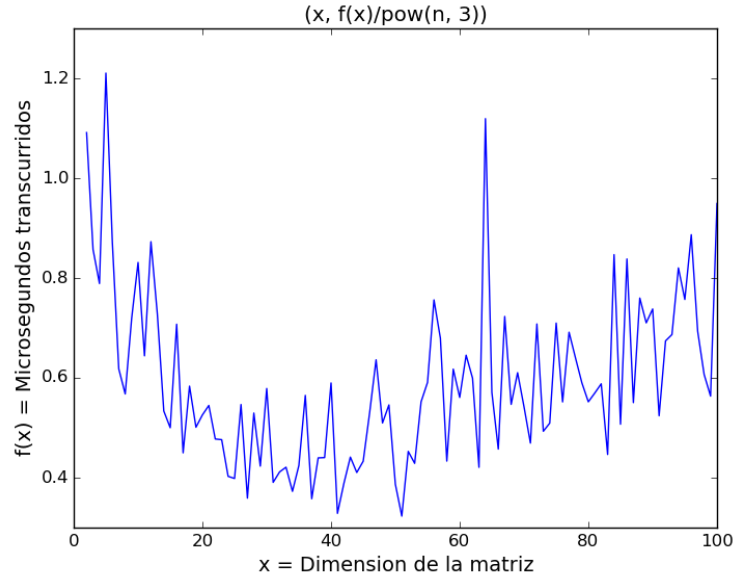

(x, f(x)/pow(n, 2))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
0
20
40
60
80
100


(x, f(x)/pow(n, 3))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
0
20
40
60
80
100

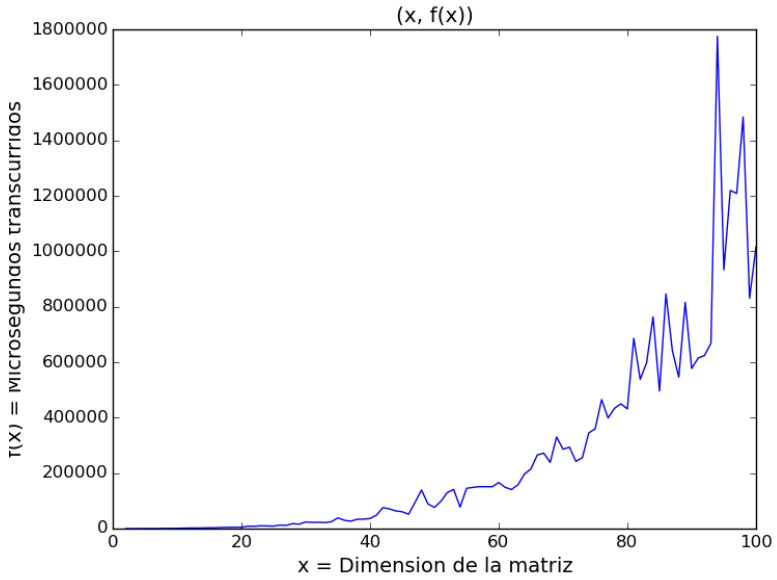
Con k = 1

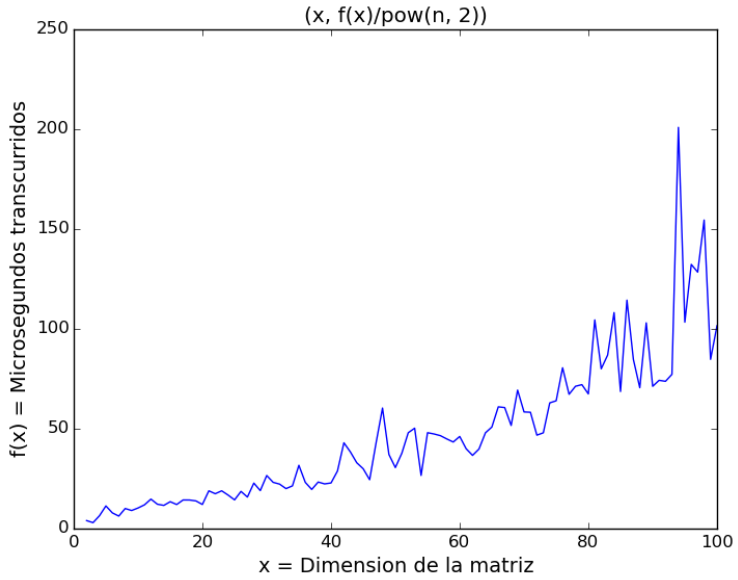

(x, f(x))
1000000
800000
600000
400000
200000
0
0
20
40
60
80
100
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz

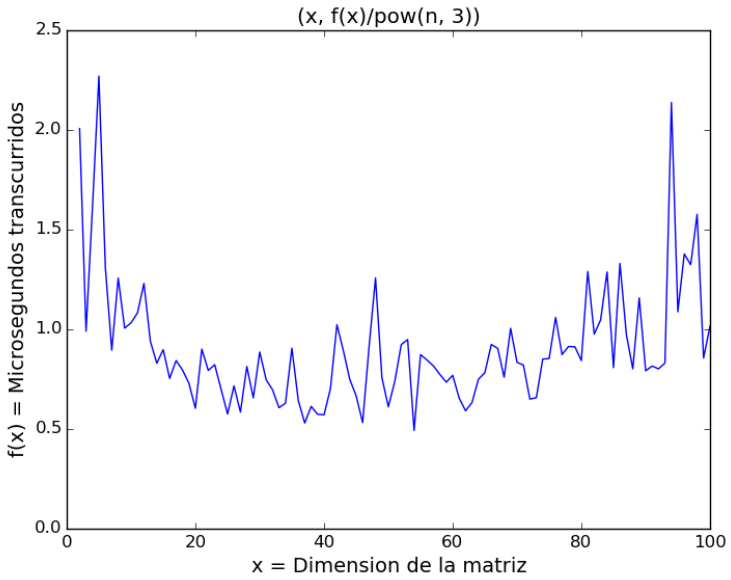

(x, f(x)/pow(n, 2))
100
80
60
40
20
0
0
20
40
60
80
100
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz


(x, f(x)/pow(n, 3))
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0
20
40
60
80
100
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz

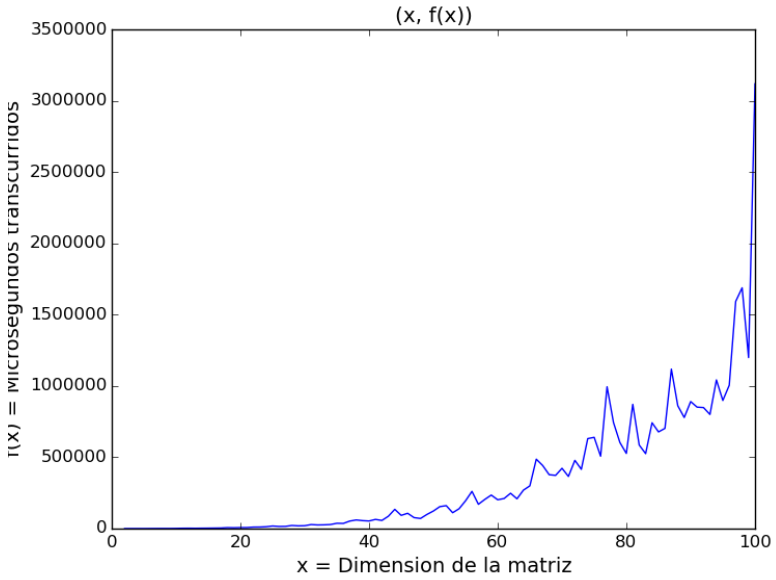
Con k = 2

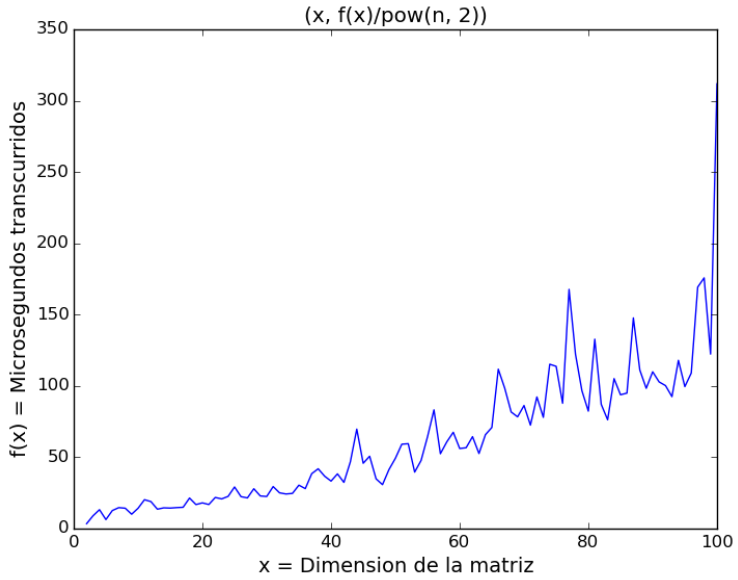

(x, f(x))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz

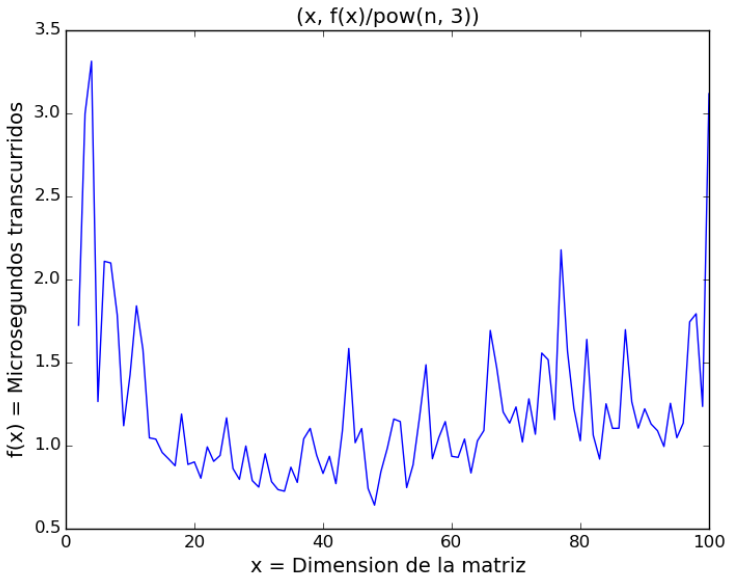

(x, f(x)/pow(n, 2))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz


(x, f(x)/pow(n, 3))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz

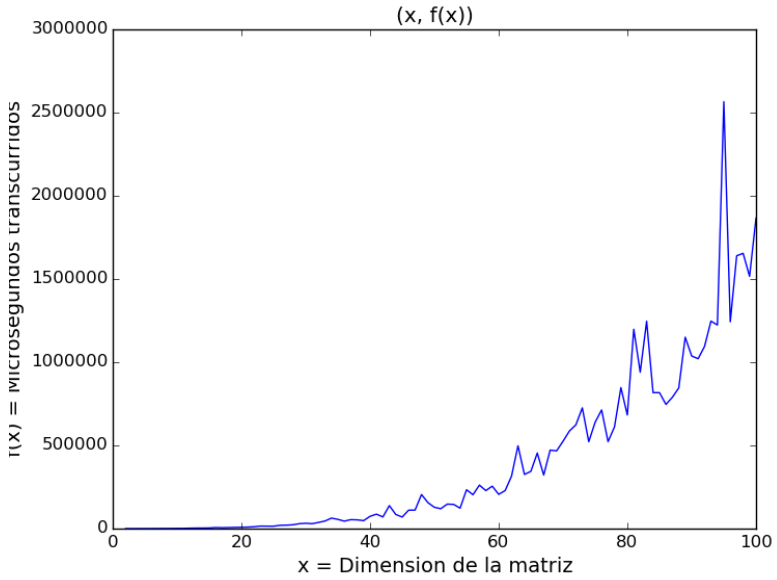
Con k = 3

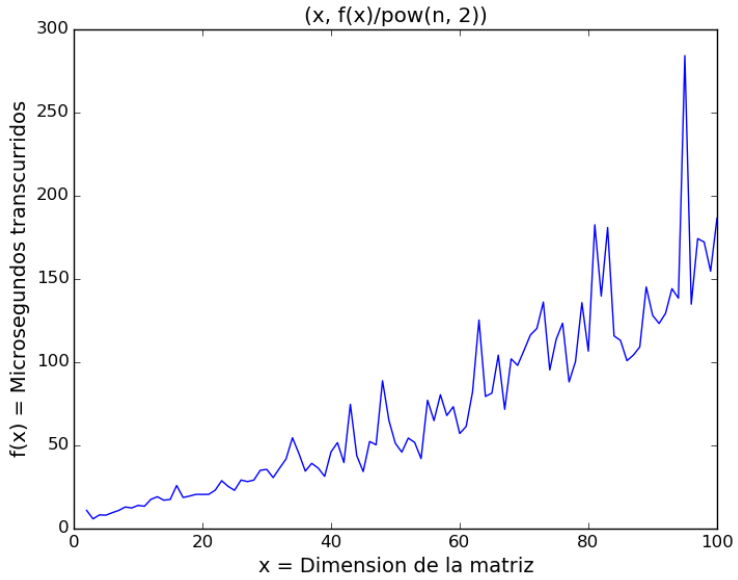

(x, f(x))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz

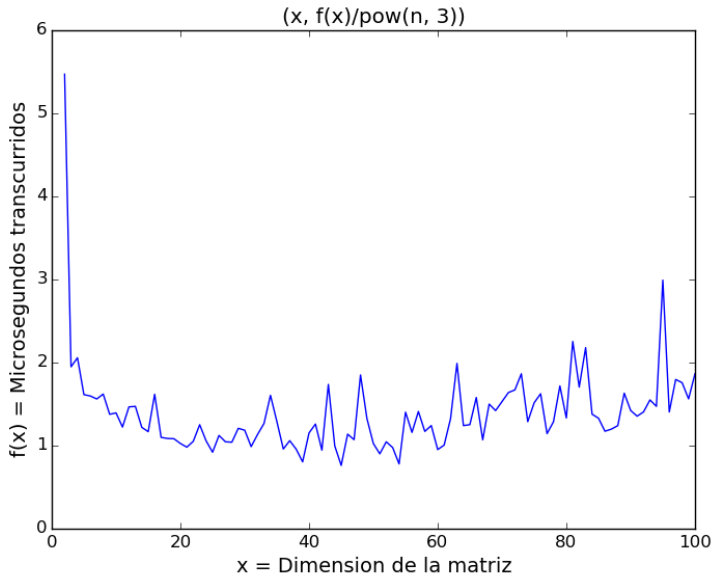

(x, f(x)/pow(n, 2))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz


(x, f(x)/pow(n, 3))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz

Con k = 4


(x, f(x))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz


(x, f(x)/pow(n, 2))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz


(x, f(x)/pow(n, 3))
f(x) = Microsegundos transcurridos
x = Dimension de la matriz

3.7. Mediciones de performance

3.8. Conclusiones

4. Apéndice: Generación de casos de prueba

Para el testeo de los algoritmos y la medición de tiempos en función de la entrada, se programó una utilidad para generar los casos de prueba.

El programa recibe como parámetro el ejercicio del cual se quieren generar los casos, y las variables, como el tamaño de la entrada o en el ejercicio 1 la cantidad de días que estaba disponible el inspector.

Los números aleatorios que se generaron en los casos, se hizo con la función *random()* de C (http://linux.die.net/man/3/random) usando como semilla el tiempo en microsegundos.

Para el ejercucio 2, se le indica al programa la cantidad de ciudades, la cual se fue incrementando para la medición del tiempo, y la cantidad de centrales se indicaba como un número aleatorio entre 1 y la cantidad de ciudades.

Así se crearon muchos casos donde se fue incrementando el tamaño de la entrada y ejecutando varios tests de un mismo tamaño y varias veces el mismo test para obtener un promedio del tiempo que tarda en resolvero y descartar algunas imperfecciones que puedan surgir por el entorno donde se está midiendo los tiempos, como puede ser que justo se ejecute otra tarea.

5. Apéndice: Código fuente relevante

5.1. Ejercicio 1

```
1
2  public class algo_robanum {
3
4      private int turnos_jug;
5      private int pt_j1;
6      private int pt_j2;
7      private tupla_turnos turnos;
8
9      public void calcular( int[] entrada ){
10         //Calcula las tablas S y P
11         tablas_S_P tabla_res = new tablas_S_P(entrada);
12
13         //Las usa para obtener los datos requeridos por el enunciado
14
15         turnos = new tupla_turnos(entrada.length); //Como maximo se juegan tantos turnos como
               cantidad de cartas
16         turnos_jug=1; //se juega siempre al menos un turno, el primero
17         pt_j1 = 0;
18         pt_j2 = 0;
19         int i = 1;
20         int j = entrada.length;
21         boolean jugador = true; //true es jugador1
22         while(tabla_res.P()[i-1][j-1][0] != 0){ //La condicion es true si no se agarraron todas
               las cartas
23
24             //calculo lado
25             if(tabla_res.P()[i-1][j-1][0] != i){
26                 turnos.lado[turnos_jug-1] = true;
27             }
28             else{
29                 turnos.lado[turnos_jug-1] = false;
30             }
31             //calculo cant de cartas robadas
32             turnos.cant[turnos_jug-1] = (j - i) - (tabla_res.P()[i-1][j-1][1] - tabla_res.P()[i
                   -1][j-1][0]);
33
34             //sumo puntos para el jugador que juega actualmente
35             if(turnos.lado[turnos_jug-1] == true){ //Si se saco de izquierda
36                 if(jugador == true){
37                     pt_j1 += tabla_res.S()[ i-1 ][ i + turnos.cant[turnos_jug-1] -2];
38                 }
39                 else{
40                     pt_j2 += tabla_res.S()[ i-1 ][ i + turnos.cant[turnos_jug-1] -2];
41                 }
42             }
43             else{   //Si se saco de derecha
44                 if(jugador == true){
45                     pt_j1 += tabla_res.S()[ j - (turnos.cant[turnos_jug-1] -1) -1][j-1];
46                 }
47                 else{
48                     pt_j2 += tabla_res.S()[ j - (turnos.cant[turnos_jug-1] -1) -1][j-1];
49                 }
50             }
51
52             int i2 = i;
53             i = tabla_res.P()[i-1][j-1][0];
54             j = tabla_res.P()[i2-1][j-1][1];
55             jugador = !jugador;
56             turnos_jug++;
57         }
58
59         //Falta lo correspondiente al ultimo turno
60         turnos.lado[turnos_jug-1] = true; // Se elige lado por defecto "izq" para cuando se
               sacan todas
61         turnos.cant[turnos_jug-1] = j - i + 1;
62         if(jugador == true){
63             pt_j1 += tabla_res.S()[i-1][j-1];
64         }
65         else{
66             pt_j2 += tabla_res.S()[i-1][j-1];
67         }
68
```

```
69      }
70
71      public int ret_turnos_jug(){
72          return turnos_jug;
73      }
74
75      public int ret_pt_j1(){
76          return pt_j1;
77      }
78
79      public int ret_pt_j2(){
80          return pt_j2;
81      }
82
83      public boolean ret_turnos_lado(int turno){
84          return turnos.lado[turno-1];
85      }
86
87      public int ret_turnos_cant_rob(int turno){
88          return turnos.cant[turno-1];
89      }
90
91      private class tupla_turnos{
92
93          public tupla_turnos(int cant_turnos){
94              lado = new boolean[cant_turnos];
95              cant = new int[cant_turnos];
96          }
97
98          public boolean lado[]; //true es "izq"
99          public int cant[];
100
101     }
102
103     private class tablas_S_P {
104
105         private int S[][];
106         private int P[][][];// P[i][j] es una tupla que en las dos primeras coordenadas tiene
                el i y el j que quedan en la mesa despues de jugado el turno (ó (0,0) si se
                levantan todas las cartas) y en la tercer coordenada tiene a la funcion P
                propiamente.
107         private int tira_entrada[];
108
109         public tablas_S_P(int entrada[]){
110             tira_entrada = entrada;
111             S = new int[tira_entrada.length][tira_entrada.length];
112             //Calcula tabla S
113             calcular_S();
114             P = new int[tira_entrada.length][tira_entrada.length][3];
115             //Calcula tabla P a partir de la S
116             calcular_P();
117         }
118
119         public int [][][] P(){
120             return P;
121         }
122         public int [][] S(){
123             return S;
124         }
125
126         private void calcular_S(){
127             int i;
128             for(i=1;i<=tira_entrada.length;i++){
129                 int j;
130                 for(j=i;j<=tira_entrada.length;j++){
131                     if(i==j){
132                         S[i-1][j-1] = tira_entrada[i-1];
133                     }
134                     else{
135                         S[i-1][j-1] = S[i-1][j-2] + tira_entrada[j-1];
136                     }
137                 }
138             }
139         }
140
141         private void calcular_P(){ //Recorre la tabla de columna 1 hacia columna n, cada una de
                abajo hacia arriba.
```

```
142             int j;
143             for (j=1; j<=tira_entrada.length;j++){
144                 int i;
145                 for(i=j; i>=1;i--){
146 
147                         int[] restante = {i,j};
148                         Double MAX = Double.NEGATIVE_INFINITY;
149                         int k;
150                         //Para cada posicion, que representa un intervalo (i,j) de cartas,
                                calcula la eleccion de cartas a robar, primero desde la izquierda y
                                 luego desde la derecha
151                         //En cada posicion queda guardada una tupla con el valor de P y ademas
                                los indices (i,j) del intervalo de cartas que quedan por jugarse, ó
                                 (0,0) en caso robar todo.
152                         for(k=0;k<=j-i;k++){
153                             int m;
154                             m = S[i-1][i+k-1] - ( (k==j-i)?0:P[i+k][j-1][2] );
155                             if(m > MAX){
156                                 MAX = (double) m;
157                                 if(k==j-i){
158                                     restante[0]=0;
159                                     restante[1]=0;
160                                 }
161                                 else{
162                                     restante[0]=i+k+1;
163                                     restante[1]=j;
164                                 }
165                             }
166                         }
167 
168                         for(k=0;k<=j-i;k++){
169                             int m;
170                             m = S[j-k-1][j-1] - ( (k==j-i)?0:P[i-1][j-k-2][2] );
171                             if(m > MAX){
172                                 MAX = (double) m;
173                                 if(k==j-i){
174                                     restante[0]=0;
175                                     restante[1]=0;
176                                 }
177                                 else{
178                                     restante[0]=i;
179                                     restante[1]=j-k-1;
180                                 }
181                             }
182                         }
183                         double _MAX = MAX;
184                         int tupla[] = {restante[0],restante[1],(int)_MAX};
185                         P[i-1][j-1] = tupla;
186 
187 
188                 }
189             }
190         }
191     }
192 
193 
194 }
```

5.2. Ejercicio 2

```
1  typedef int Nodo;
2 
3  struct GrafoMatrizAdyacencia{
4      int nodos; //cantidad de nodos
5      int *componente_conexa_nodos; //array para asignar componentes conexas
6      int componentes_conexas;
7      int **adyacencia; //la matriz ed adyacencia
8      int aristas; //aristas colocadas
9  };
10 
11 typedef struct GrafoMatrizAdyacencia Grafo;
12 
13 typedef struct Ciudad {
14     Nodo nodo;
15     int x;
16     int y;
17 } Ciudad;
```

```
18
19 typedef struct NodoDistancia {
20     int agregado;
21     int distancia;
22     Nodo nodo;
23 } NodoDistancia;
24
25 typedef struct Arista{
26     Nodo nodo1;
27     Nodo nodo2;
28     int distancia;
29 } Arista;
30
31 Grafo *crear_grafo(int nodos)
32 {
33     int i;
34
35     Grafo *g = NULL;
36     if(nodos <= 0)
37         return NULL;
38
39     g = (Grafo *)malloc(sizeof(Grafo));
40     g->nodos = nodos;
41     g->componente_conexa_nodos = (int *)calloc(nodos, sizeof(int));
42     g->componentes_conexas = nodos;
43     g->aristas = 0;
44     g->adyacencia = (int **)malloc(sizeof(int *) * nodos);
45
46     for(i = 0; i < nodos; i++) {
47         g->adyacencia[i] = (int *)calloc(nodos, sizeof(int));
48     }
49     for(i = 0; i < nodos; i++) {
50         g->componente_conexa_nodos[i] = i;
51     }
52     return g;
53 }
54
55 void liberar_grafo(Grafo *g)
56 {
57     int i;
58
59     if(!g)
60         return;
61
62     free(g->componente_conexa_nodos);
63     for(i = 0; i < g->nodos; i++) {
64         free(g->adyacencia[i]);
65     }
66     free(g->adyacencia);
67     free(g);
68 }
69
70 int agregar_arista(Grafo *g, Nodo nodo1, Nodo nodo2)
71 {
72     int i;
73     int nueva_componente, vieja_componente;
74
75     if(!g)
76         return -1;
77
78     if(nodo1 >= g->nodos || nodo2 >= g->nodos)
79         return -1;
80
81     g->adyacencia[nodo1][nodo2] = 1;
82     g->adyacencia[nodo2][nodo1] = 1;
83     g->aristas++;
84
85     if(g->componente_conexa_nodos[nodo1] != g->componente_conexa_nodos[nodo2]){
86         nueva_componente = g->componente_conexa_nodos[nodo1];
87         vieja_componente = g->componente_conexa_nodos[nodo2];
88
89         for(i = 0; i < g->nodos; i++){ //actualizo la componente conexa de todos los nodos que
               pertenecian a esa componente
90             if(g->componente_conexa_nodos[i] == vieja_componente){
91                 g->componente_conexa_nodos[i] = nueva_componente;
92             }
93         }
```

```
94          g->componentes_conexas--;
95      }
96      return 0;
97  }
98
99  int cantidad_componentes_conexas(Grafo *g)
100 {
101     if(!g)
102         return -1;
103     return g->componentes_conexas;
104 }
105
106 int cantidad_aristas(Grafo *g)
107 {
108     if(!g)
109         return -1;
110     return g->aristas;
111 }
112
113 int cantidad_nodos(Grafo *g)
114 {
115     if(!g)
116         return -1;
117     return g->nodos;
118 }
119
120 int son_adyacentes(Grafo *g, Nodo nodo1, Nodo nodo2)
121 {
122     if(!g)
123         return 0;
124
125     return g->adyacencia[nodo1][nodo2];
126 }
127
128 //retorna un vector con cantidad_componentes_conexas() elementos, en cada iesimo elemento, hay
        un nodo correspondiente a la componente iesima. liberar el resultado con free()
129 Nodo *nodos_de_componentes(Grafo *g)
130 {
131     Nodo *nodos;
132     int i;
133
134     if(!g)
135         return NULL;
136
137     nodos = (Nodo *)malloc(sizeof(Nodo) * g->nodos);
138     for(i = 0; i < g->nodos; i++){
139         nodos[i] = -1;
140     }
141     for(i = 0; i < g->nodos; i++){
142         nodos[g->componente_conexa_nodos[i]] = i;
143     }
144     return nodos;
145 }
146
147 int distancia(Ciudad *c1, Ciudad *c2)
148 {
149     if(!c1 || !c2)
150         return 0;
151
152     return (c1->x - c2->x) * (c1->x - c2->x) + (c1->y - c2->y) * (c1->y - c2->y); //el cuadrado
            de la distancia euclidiana
153 }
154
155 void ordenar_aristas(Arista *aristas, int n)
156 {
157     int m, i, j, k;
158     Arista *aux;
159
160     if(n <= 1)
161         return;
162     m = n / 2;
163     ordenar_aristas(aristas, m);
164     ordenar_aristas(aristas + m, n - m);
165     aux = (Arista *)malloc(sizeof(Arista) * n);
166     i = 0;
167     j = 0;
168     k = 0;
```

```
169     while(i < m || j < (n - m)){
170         if(j >= (n - m)){
171             memcpy(&(aux[k]), &(aristas[i]), sizeof(Arista));
172             i++;
173             k++;
174             continue;
175         }
176         if(i >= m){
177             memcpy(&(aux[k]), &(aristas[m + j]), sizeof(Arista));
178             j++;
179             k++;
180             continue;
181         }
182         if(aristas[i].distancia < aristas[m + j].distancia){
183             memcpy(&(aux[k]), &(aristas[i]), sizeof(Arista));
184             i++;
185             k++;
186             continue;
187         }
188         else{
189             memcpy(&(aux[k]), &(aristas[m + j]), sizeof(Arista));
190             j++;
191             k++;
192             continue;
193         }
194     }
195     memcpy(aristas, aux, n * sizeof(Arista));
196     free(aux);
197 }
198
199 Grafo *resolver(int k_centrales, Ciudad *ciudades, int n_ciudades, Nodo **centrales)
200 {
201     Grafo *g = NULL;
202     NodoDistancia *nodos = NULL;
203     Arista *aristas = NULL;
204     int i, agregados, distancia_minima = -1, nodo_minimo = -1, componentes;
205
206     if(k_centrales <= 0 || ciudades == NULL || n_ciudades <= 0 || centrales == NULL){
207         return NULL;
208     }
209
210     g = crear_grafo(n_ciudades);
211     nodos = (NodoDistancia *)malloc(sizeof(NodoDistancia) * n_ciudades);
212     aristas = (Arista *)malloc(sizeof(Arista) * (n_ciudades - 1));
213
214     nodos[0].agregado = 1;
215     nodos[0].distancia = 0;
216     nodos[0].nodo = 0;
217     for(i = 1; i < n_ciudades; i++){
218         nodos[i].agregado = 0;
219         nodos[i].distancia = distancia(&(ciudades[i]), &(ciudades[0]));
220         nodos[i].nodo = 0;
221     }
222
223     for(agregados = 0; agregados < n_ciudades - 1; agregados++){
224         distancia_minima = -1;
225         nodo_minimo = 0;
226         for(i = 0; i < n_ciudades; i++){
227             if(!nodos[i].agregado){
228                 if(distancia_minima == -1 || nodos[i].distancia < distancia_minima){
229                     distancia_minima = nodos[i].distancia;
230                     nodo_minimo = i;
231                 }
232             }
233         }
234
235         nodos[nodo_minimo].agregado = 1;
236         aristas[agregados].nodo1 = nodo_minimo;
237         aristas[agregados].nodo2 = nodos[nodo_minimo].nodo;
238         aristas[agregados].distancia = distancia_minima;
239
240         for(i = 0; i < n_ciudades; i++){
241             if(!nodos[i].agregado){
242                 if(nodos[i].distancia > distancia(&(ciudades[i]), &(ciudades[nodo_minimo]))){
243                     nodos[i].distancia = distancia(&(ciudades[i]), &(ciudades[nodo_minimo]));
244                     nodos[i].nodo = nodo_minimo;
245                 }
```

```
246             }
247         }
248     }
249 
250     ordenar_aristas(aristas, n_ciudades - 1);
251 
252     for(componentes = n_ciudades; componentes > k_centrales; componentes--){
253         agregar_arista(g, aristas[n_ciudades - componentes].nodo1, aristas[n_ciudades -
                componentes].nodo2);
254     }
255 
256     *centrales = nodos_de_componentes(g);
257 
258     free(nodos);
259     free(aristas);
260 
261     return g;
262 }
```

5.3. Ejercicio 3

6. Apéndice: Entregable e instrucciones de compilacion y testing