UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Laboratorio 3 - Modelación y Simulación

Integrantes:	Maximiliano Arévalo Sáez
	Benjamín Muñoz Tapia
Curso:	Modelación y Simulación
Sección	A-1
Profesor:	Gonzalo Acuña Leiva
Ayudante:	Diego Mellis Galaz

11 de Septiembre de 2020

Tabla de contenidos

1. Introducción **1**

2. Marco teórico **2**

3. Desarrollo **3**

3.1. Desarrollo primera parte 3

3.2. Desarrollo segunda parte 6

3.2.1. Problema propuesto en enunciado 6

3.2.2. Problema visto en clases 10

4. Conclusiones **13**

Bibliografía **14**

1. Introducción

La modelación tiene como propósito estudiar una situación o fenómeno en específico, con el fin de comprenderlo mejor o abordarlo en caso de ser un problema. Estos modelos definen como es su entrada y su salida, gracias a las denominadas variables de estado, que van cambiando en el tiempo y representan la variación del fenómeno, o en otras palabras, su comportamiento.

Este trabajo tiene como objetivo principal la aplicación de modelos de estado para funciones de transferencia, para después resolver un problema general con otro modelo de estado representado mediante flujo entre estanques. Entre los objetivos específicos se tienen la aplicación de modelos de estado con MATLAB, la obtención de modelos con la forma matricial, la obtención de la función de transferencia a partir de un modelo y poder simular una situación general con parámetros genéricos.

El presente informe muestra en primer lugar una serie de conceptos básicos para entender este trabajo, para así mostrar las pruebas experimentales y los resultados obtenidos en ella, tanto para la obtención del modelo de estado como para un problema más específico. Para la primera parte se considera obtención de un modelo de estado en base a un diagrama de bloques dado, mientras que la segunda parte considera el desarrollo de dos problemas de flujo en estanques, para representar el modelo fenomelógico identificando las variables de entrada, salida y estado. Con esto se obtendrán y presentarán las conclusiones del trabajo respecto a la aplicación de la modelación en MATLAB.

2. Marco teórico

1. Función de Transferencia: Es la función que resulta después de haber aplicado la Transformada de Laplace a un Sistema Lineal. Se denota como H(s) y se obtiene al despejar el coeficiente que acompaña a X(s), siendo esta la respuesta de entrada. (Francis)

2. Diagrama de bloques: Manera gráfica de representar los Sistemas con sus diversas funciones de transferencia, las cuales pueden estar conectadas en serie o paralelo mediante sumadores.

3. Sistema de Lazo Cerrado: También conocidos como Sistemas de retroalimentación, donde la salida forma nuevamente parte de la entrada.

4. Modelo de Estado: Modelo que permite facilitar la operación de un fenómeno con el fin de estudiar su comportamiento. Se compone de variables de entrada, salida y estado:

   - Variable de entrada: Es la entrada al sistema, la cual no está afectada por su comportamiento. Pero una variación en ella puede alterar el comportamiento de este.
   - Variable de salida: Es la salida del sistema y lo que interesa estudiar.
   - Variable de estado: Son una serie de magnitudes físicas que permiten describir el estado del sistema.

5. MATLAB: Es un programa que permite realizar diversos cálculos matemáticos utilizando vectores y matrices, también permite trabajar con números reales y complejos, caracteres y otras estructuras que sean más complejas. (Casado)

3. Desarrollo

3.1. Desarrollo primera parte

Esta sección del laboratorio tiene como objetivo convertir una Función de Transferencia a un Modelo de Estado dado un diagrama de Modelo Retroalimentado. En primer lugar se le pide al usuario ingresar los parámetros por consola, que en este caso serían los polinomios, los cuales deben ser ingresados como vector y separados en numerador y denominador. Dichos vectores deben contener los coeficientes de la función de estado, y para el caso del denominador al tener una función de transferencia lineal, se debe ingresar primero el coeficiente de s y luego el coeficiente de la variable que no tiene grado. El diagrama de la función de transferencia tiene la siguiente forma:

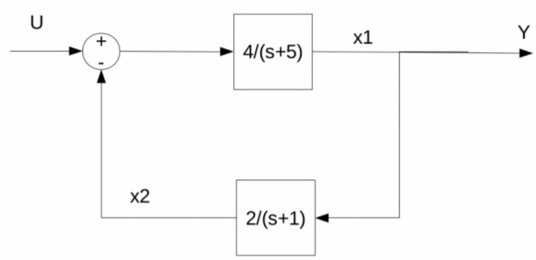

Figura 1: Diagrama de bloque de ejemplo

Para el desarrollo del Modelo de Estado (ME), se escogen las variables de estado, que en este caso serían las salidas de cada bloque, que se pueden expresar en las siguientes ecuaciones.

$$X_1 = H1 * (U - X_2) \tag{1}$$

$$X_2 = H2 * X_1 \tag{2}$$

Luego se debe despejar en ambas ecuaciones Xs. Si se consideran ecuaciones de la forma:

$$H_i = \frac{a_i}{b_i * s + c_i} \tag{3}$$

El despeje de las variables de estado quedaría de la siguiente forma:

$$X_1 * s = -\frac{a_1 * X_2}{b_1} - \frac{X_1 * c_1}{b_1} + \frac{a_1 U}{b_1} \tag{4}$$

$$X_2 = \frac{a_2 X_1}{b_2} - \frac{c_2 X_2}{b_2} \tag{5}$$

Con esto se pueden armar las matrices A, B, C y D:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{b_1} & \frac{-c_1}{b_1} \\ \frac{a_2}{b_2} & \frac{-c_2}{b_2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Como la matriz B está asociada a U queda:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Por lo que el modelo de entrada quedaría como

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{b_1} & \frac{-c_1}{b_1} \\ \frac{a_2}{b_2} & \frac{-c_2}{b_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * U \tag{8}$$

Si se tiene en cuenta la forma del sistema, la salida solo depende de la entrada X_1

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$Y = X_1 \tag{10}$$

Con esto y *D=0* se puede armar la ecuación de salida:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + 0 * u \tag{11}$$

Luego se debe transformar del Modelo de Estado a la Función de Transferencia, donde se deben considerar las ecuaciones del ME:

$$\dot{X} = AX + BU \tag{12}$$

$$Y = CX + DU \tag{13}$$

Aplicando Transformada de Laplace para X, considerando la Matriz de Identidad I, y resolviendo en Y se tiene:

$$Y = C(SI - A)^{-1} BU + DU \tag{14}$$

Considerando finalmente la forma de transferencia y $D{=}0$:

$$H = \frac{Y}{U} = C(SI - A)^{-1}B \tag{15}$$

3.2. Desarrollo segunda parte

Esta parte tiene como objetivo resolver un problema general propuesto en en enunciado y luego resolver un ejemplo visto en clases. Para ambos se solicita como resultado expresiones genéricas, indicar sus variables de entrada, salida y estado y mostrar el resultado de 3 casos diferentes para el problema del enunciado.

3.2.1. Problema propuesto en enunciado

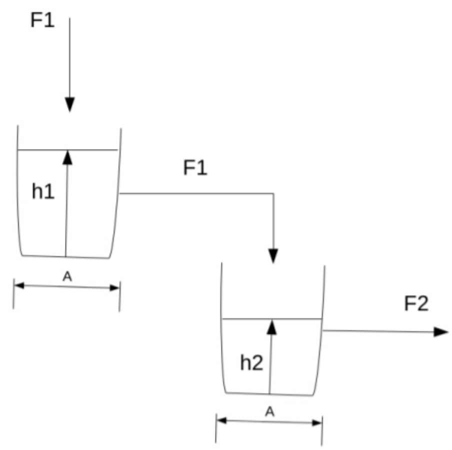

Figura 2: Diagrama de vasos comunicantes

En base a lo que se aprecia en la figura 2, las variables y parámetros que tiene el sistema corresponden a:

- F_1: Flujo de entrada y salida del estanque 1
- F_2: Flujo de salida del estanque 2
- h_1: Nivel de agua del estanque 1
- h_2: Nivel de agua del estanque 2
- A_1: Area de superficie del estanque 1
- A_2: Area de superficie del estanque 2

De lo anterior se puede mencionar que F_1, F_2, h_1 y h_2 son variables, mientras que A_1 y A_2 son parámetros. Ahora es importante señalar cuales corresponden a variables de entrada, salida y estado:

- La variable de entrada corresponde a F_1
- La variable de salida corresponde a F_2
- Las variables de estado corresponden a h_1 y h_2

Ahora se procede a elaborar el modelo fenomenológico:
Se conoce que la variación de altura de un estanque en función del tiempo se define por:

$$\frac{dV}{dt} = F_{entrada} - F_{salida} \tag{16}$$

Pero sabemos que el volumen de un estanque se puede definir como la multiplicación entre el nivel de agua y el área de superficie:

$$V_{estanque} = h_{estanque} * A_{estanque} \tag{17}$$

Si reemplazamos el volumen en la variación de altura se obtiene:

$$\frac{dh * A}{dt} = F_{entrada} - F_{salida} \tag{18}$$

Como A es un parámetro, es posible despejarlo de la derivada:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_{entrada}}{A} - \frac{F_{salida}}{A} \tag{19}$$

Utilizaremos esta ecuación para ambos estanques y así poder determinar sus variaciones de nivel de agua en función del tiempo:

- Para el estanque 1:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{F_1}{A_1} - \frac{F_1}{A_1} \tag{20}$$

Pero como el flujo que entra es igual al que sale (F_1), se obtiene:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{F_1}{A_1} - \frac{F_1}{A_1} = 0 \tag{21}$$

De lo anterior se inferir que:

$$\dot{h_1} = 0 * h_1 + 0 * h_2 + 0 * U \tag{22}$$

Lo cual nos sirve para elaborar la representación matricial.

- Para el estanque 2:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{F_1}{A_2} - \frac{F_2}{A_2} \tag{23}$$

Pero debemos recordar que para este caso:

$$F_2 = h_2 \tag{24}$$

Por lo que podemos inferir que:

$$\dot{h_2} = 0 * h_1 - \frac{1}{A_2} * h_2 + \frac{1}{A_2} * U \tag{25}$$

Y como se tiene que:

$$F_2 = y = h_2 \tag{26}$$

Se puede inferir que:

$$y = 0 * h_1 + 1 * h_2 + 0 * U \tag{27}$$

Ademas, recordamos que las matrices poseen la siguiente estructura:

$$\dot{X} = AX + BU \tag{28}$$

$$Y = CX + DU \tag{29}$$

Una vez realizados estos cálculos, podemos representar las ecuaciones de modelo del sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} * U \tag{30}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Es importante señalar que los resultados entregados por el programa realizado en MATLAB para esta parte, entrega las matrices de respuesta considerando variables genéricas. Por lo que si se requiere utilizar otros valores para algunos parámetros, basta con realizar el reemplazo. Ahora se reemplazarán los valores para las variables del modelo de estado para 3 casos diferentes, los cuales se muestran a continuación:

- Caso 1:

  Para este caso se considera un flujo de entrada $F_1 = 50\ \frac{m^3}{s}$, área de superficie del segundo estanque $A_2 = 25\ m^2$ y nivel de agua del segundo estanque $h_2 = 50\ m$. Los resultados que se obtienen indican que la variación del nivel de agua del estanque 2 es de 0 $\frac{m}{s}$ y que el flujo de salida es igual a 50 $\frac{m^3}{s}$. Esto quiere decir que el flujo de salida es igual al flujo de entrada, por lo que estaría saliendo todo lo que entra pero manteniendo el nivel de agua dentro del estanque, ya que este nivel no varía.

- Caso 2:

  Para este caso se considera un flujo de entrada $F_1 = 100\ \frac{m^3}{s}$, área de superficie del segundo estanque $A_2 = 35\ m^2$ y nivel de agua del segundo estanque $h_2 = 75\ m$. Los resultados que se obtienen indican que la variación del nivel de agua del estanque 2 es de 0.7143 $\frac{m}{s}$ y que el flujo de salida es igual a 75 $\frac{m^3}{s}$. Esto quiere decir que estaría ingresando más agua al estanque de la que sale, por lo que el nivel de agua del estanque está aumentando a una razón determinada, en este caso, 0.7143 $\frac{m}{s}$.

- Caso 3:

  Para este caso se considera un flujo de entrada $F_1 = 30\ \frac{m^3}{s}$, área de superficie del segundo estanque $A_2 = 28\ m^2$ y nivel de agua del segundo estanque $h_2 = 110\ m$. Los resultados que se obtienen indican que la variación del nivel de agua del estanque 2 es de -1.6071 $\frac{m}{s}$ y que el flujo de salida es igual a 110 $\frac{m^3}{s}$. Esto quiere decir que está saliendo más agua de la que está entrando al estanque, por lo que en nivel de agua del estanque comienza a descender a razón de -1.6071 $\frac{m}{s}$

3.2.2. Problema visto en clases

Para este caso se utiliza el ejemplo visto en la clase 17 del 11/08/2020.

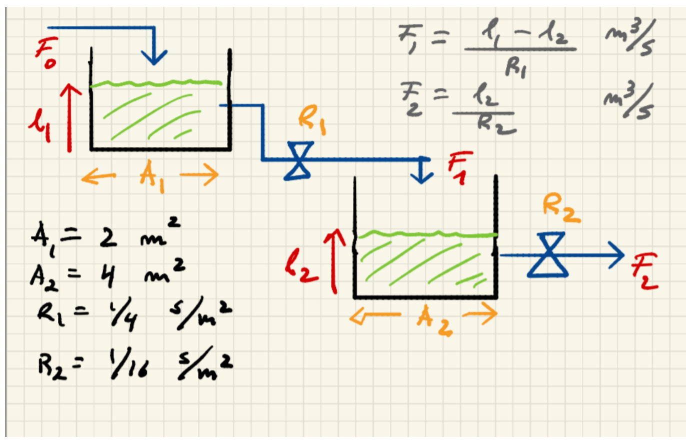

Figura 3: Ejemplo visto en clases

En base a lo que se aprecia en la figura 3, las variables y parámetros que tiene el sistema corresponden a:

- F_0: Flujo de entrada del estanque 1
- F_1: Flujo de salida del estanque 1 y entrada del estanque 2
- F_2: Flujo de salida del estanque 2
- l_1: Nivel de agua del estanque 1
- l_2: Nivel de agua del estanque 2
- A_1: Area de superficie del estanque 1
- A_2: Area de superficie del estanque 2

- R_1: Válvula de resistencia del flujo F_1
- R_2: Válvulo de resistencia del flujo F_2

De lo anterior se puede mencionar que F_0, F_1, F_2, h_1 y h_2 son variables, mientras que A_1, A_2, R_1 y R_2 son parámetros. Ahora es importante señalar cuales corresponden a variables de entrada, salida y estado:

- La variable de entrada corresponde a F_0
- Las variables de salida corresponden a l_1 y l_2
- Las variables de estado corresponden a l_1 y l_2

Ahora se procede a elaborar el modelo fenomenológico:
Recordemos las ecuaciones anteriores y utilizando valores del ejercicio:

$$\frac{dV1}{dt} = F_0 - F_1 \tag{32}$$

$$\frac{dV2}{dt} = F_1 - F_2 \tag{33}$$

Los volúmenes corresponden a:

$$V_1 = l_1 * A_1 \tag{34}$$

$$V_2 = l_2 * A_2 \tag{35}$$

Y consideramos que:

$$F_1 = \frac{l_1 - l_2}{R_1} \tag{36}$$

$$F_2 = \frac{l_2}{R_2} \tag{37}$$

Al reemplazar las ecuaciones de volúmen y los valores de los flujos F_1 y F_2 en las ecuaciones de variación de nivel en función del tiempo se obtiene:

$$\frac{dl_1A_1}{dt} = F_0 - \frac{(l_1 - l_2)}{R_1} \tag{38}$$

$$\frac{dl_2A_2}{dt} = \frac{(l_1 - l_2)}{R_1} - \frac{l_2}{R_2} \tag{39}$$

Si consideramos que A_1 y A_2 son constantes, estas pueden salir de la derivada, por lo que se obtiene:

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{-1}{A_1R_1} * l_1 + \frac{1}{A_1R_1} * l_2 + \frac{1}{A_1} * U \tag{40}$$

$$\frac{dl_2}{dt} = \frac{1}{A_2R_1} * l_1 - \frac{(R1 + R2)}{A_2R_1R_2} * l_2 + 0 * U \tag{41}$$

Además, como se considera como salida los niveles de agua de los estanques se sabe que:

$$y_1 = l_1 \tag{42}$$

$$y_2 = l_2 \tag{43}$$

Por lo que la representación matricial está compuesta por:

$$\begin{bmatrix} \dot{l_1} \\ \dot{l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{A_1R_1} & \frac{1}{A_1R_1} \\ \frac{1}{A_2R_1} & \frac{-(R1+R2)}{A_2R_1R_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} * U \tag{44}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} * U \tag{45}$$

Al reemplazar los valores entregados por el ejercicio se obtiene el siguiente resultado en representación matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{l_1} \\ \dot{l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} * U \tag{46}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

4. Conclusiones

Se puede ver para el primer caso un buen logro al obtener el modelo de estado a partir de un Sistema de Lazo Cerrado con dos Funciones de Transferencia. En este caso se logro realizar una obtención genérica para Sistemas Lineales. Por otro lado también se logra a partir del modelo, recuperar la función de transferencia total al resolver las ecuaciones de estado con la Transformada de Laplace.

Para el caso de la segunda parte, se puede mencionar que se estudiaron dos problemas de flujo de estanques, en los cuales fue necesario reconocer las variables de entrada, salida y estado. Lo que permitió elaborar el modelo fenomenológico en base a una serie de ecuaciones y reemplazos, para luego representar los resultados en manera matricial. Se considera que se obtuvieron buenos resultados, ya que se aplicó de manera práctica lo aprendido en cátedra para los modelos de estado, lo que junto a obtener resultados de manera matricial considerando variables genéricas, permite reconocer de manera general los resultados al trabajar con problemas de este tipo.

Finalmente se puede ver un buen cumplimiento de los objetivos específicos del laboratorio, llevando a satisfacer el objetivo general de este, comprendiendo bien como funcionan los Modelos de Estado y algunas de sus aplicaciones más simples. Cabe destacar que estas pequeñas aplicaciones serían las precursoras para comprender como funcionarían fenómenos y modelos de mayor complejidad, donde la aplicación de dichos modelos permiten adentrarse mejor en el problema y obtener mejores perspectivas de este.

Bibliografía

[Casado] Casado, M. C. Manual básico de matlab. http://webs.ucm.es/centros/cont/descargas/documento11541.pdf.

[Francis] Francis, L. La función de transferencia. https://dademuch.com/2018/09/12/la-funcion-de-transferencia/.