25/04/20

A. M. I

Unidad ⑤: INTEGRAL INDEFINIDA

PRIMITIVAS:

Dada $y=f(x)$, se denomina PRIMITIVA (o Integral Inmediata) de $f(x)$, a la Función $F(x)$, tal que:

$$F'(x)=f(x)$$

Todas las Primitivas de una Función difieren en una constante.

$$F(x)+C=G(x)$$

Teorema:

Si una función $f(x)$ tiene una Primitiva $F(x)$ en un intervalo, entonces tiene infinitas Primitivas, de la Forma $F(x)+C$, donde C es una constante arbitraria.

D/ Sea $F(x)$ Primitiva de $f(x)$, entonces: $F'(x)=f(x)$.

Debe verse que: $F(x)+C$ también es Primitiva, hecho que es cierto, pues: $(F(x)+C)'=F'(x)+\underbrace{C'}_{=0}=f(x)$

Entonces: si $F(x)$ es Primitiva de $f(x)$, resulta:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C}$$

Propiedades:

① $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Corolario: $\int \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^{n} \int f_i(x)\,dx$

② $\int K f(x)\,dx = K\int f(x)\,dx$

Corolario: $\int \left(\sum_{i=1}^{n} K_i \cdot f_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^{n}\left(K_i \int f_i(x)\,dx\right)$

③ Cambio de Operador

$\int f(x)\,dx = F(x)+C \Rightarrow$ Derivando: $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}(F(x)+C)$

$$\frac{d\int f(x)\,\cancel{dx}}{\cancel{dx}} = F'(x)+C'$$

$$\therefore\ f(x)=F'(x)$$

Tabla de primitivas:

① $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c;\ n \neq -1$

② $\int x^{-1}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

③ $\int e^x\,dx = e^x + c$

④ $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$

⑤ $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + c;\ a = cte,\ a > 0$

⑥ $\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + c$

⑦ $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + c$

⑧ $\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + c$

⑨ $\int \operatorname{cosec}^2(x)\,dx = -\operatorname{ctg}(x) + c$

⑩ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}(x) + c$

⑪ $\int -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,cos}(x) + c = -\operatorname{arc\,sen}(x) + c$

⑫ $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + c$

⑬ $\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + c$

⑭ $\int \operatorname{cosec}(x)\,dx = \ln|\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{ctg}(x)| + c$

⑮ $\int \operatorname{sh}(x)\,dx = \operatorname{ch}(x) + c$

⑯ $\int \operatorname{ch}(x)\,dx = \operatorname{sh}(x) + c$

⑰ $\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + c$

⑱ $\int \operatorname{cosech}^2(x)\,dx = -\operatorname{ctgh}(x) + c$

⑲ $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$

⑳ $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = -\dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + c$

· Método de Sustitución: -

Sea: $x = \varphi(t)$; t es una nueva variable y φ es una función continua diferenciable, entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt \quad (A)$$

La función φ se elige de tal forma que el 2º m. de (A) tome una forma más adecuada para la integración.

Otra forma:

Sea: $y = f(g(x))$; $u = g(x)$; $u' = g'(x)$

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow dy = f'[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$$

O bien:

$$dy = f'(u) \cdot u'\,dx$$

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Entonces:

$$\int dy = \int f'[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$$

$$\therefore\ y = f(u) + C$$

$$\therefore\ f(u) + C = \int f'[g(x)]\,g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow f(u) + C = \int f'[g(x)] \cdot d[g(x)]$$

· Método de Integración por Partes:

Sea la variable: $u \cdot v$

Diferenciando: $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$

Integrando: $\int d(uv) = \int u\,dv + v\,du$

$$\underbrace{\int d(uv)}_{} = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\therefore \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

29/04/21

Ej. A:

$$\int \ln(x)\,dx \Rightarrow \text{sea: } u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx$$
$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

Entonces:
$$\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$
$$= x\cdot\ln(x) - \int dx$$
$$= x\cdot\ln(x) - x + C$$
$$\therefore \boxed{\int \ln(x)\,dx = x\,(\ln(x) - 1) + C}$$

Comprobación:
$$\left(x\cdot(\ln(x) - 1) + C\right)' = \left[x\cdot(\ln(x) - 1)\right]' + \underbrace{C'}_{=0}$$
$$= 1\,(\ln(x) - 1) + x\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \ln(x) \cancel{-1} \cancel{+1}$$

Ej. C: Integrales cíclicas

$$\int e^x\cdot \operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow u = e^x \Rightarrow du = e^x\cdot dx$$
$$dv = \operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen}(x)\,dx$$
$$\therefore v = -\cos(x)$$

$$\therefore \int e^x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x\cdot\cos(x) - \int(-\cos(x))\cdot e^x\,dx$$
$$= -e^x\cdot\cos(x) + \underbrace{\int \cos(x)\cdot e^x\,dx}_{A}$$

En: A $\quad p = e^x \Rightarrow dp = e^x dx$
$$dq = \cos(x)\,dx \Rightarrow q = \int\cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$$
$$\therefore \int\cos(x)e^x\,dx = \underbrace{e^x\cdot\operatorname{sen}(x) - \int\operatorname{sen}(x)\cdot e^x\,dx}_{A'}$$

Reempl. A' en A: $\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x\cdot\cos(x) + e^x\cdot\operatorname{sen}(x) - \int e^x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx$

$$\therefore 2\int e^x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx = e^x\cdot(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))$$
$$\Rightarrow \boxed{\int e^x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + C}$$

FRACCIONES SIMPLES:

Sea $\frac{F(x)}{f(x)}$ una fracción racional propia. Supóngase que los coeficientes de los polinomios que la componen sean números reales y que la fracción dada sea irreductible; entonces, en tal caso se plantean:

Teorema (1):

"Sea $x = a$ una raíz múltiple de orden k del denominador; entonces:

$$f(x) = (x-a)^k \cdot f_1(x) \;;\; f_1(a) \neq 0$$

En consecuencia: $\frac{F(x)}{f(x)}$ puede descomponerse en una suma de dos funciones racionales:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot f_1(x)} \quad (1)$$

tal que: $A = cte \neq 0$; $F_1(x)$: Polinomio de grado inferior al del denominador: $(x-a)^{k-1} f_1(x)$"

Corolario:

Si la fracción racional: $\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot f_1(x)}$ es tal que el denominador tiene una raíz múltiple de orden k en a; entonces:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-2}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{(x-a)} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)}$$

Teorema (2): "Si: $f(x) = (x^2+px+q)^\mu \cdot \varphi_1(x)$, donde el polinomio: $\varphi_1(x)$ no es divisible por: (x^2+px+q), la fracción racional propia: $\frac{F(x)}{f(x)}$ puede ser expresada por la suma de dos expresiones propias:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1} \cdot \varphi_1(x)}$$

tal que $\Phi_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al grado del polinomio $(x^2+px+q)^{\mu-1} \varphi_1(x)$"

INTEGRACIÓN DE FRACCIONES SIMPLES:

Supóngase que se tiene que resolver: $\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx$, entonces el cociente puede descomponerse en una suma de un polinomio $M(x)$ y una fracción racional propia: $\frac{F(x)}{f(x)}$

Caso ①: Las raíces del denominador son reales y distintas:

$$f(x) = (x-a).(x-b)\ldots\ldots(x-z)$$

Entonces:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \ldots\ldots + \frac{Z}{(x-z)}$$

Luego:
$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{A}{(x-a)}\,dx + \int \frac{B}{(x-b)}\,dx + \ldots\ldots + \int \frac{Z}{(x-z)}\,dx$$

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \ldots\ldots + Z\ln|x-z| + C$$

Ej: Resolver: $\int \frac{dx}{(x^2-4x-12)} = \int \frac{dx}{(x-6)(x+2)}$

$$\Rightarrow: \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x-6)(x+2)} = \frac{A}{(x-6)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-6)}{(x-6)(x+2)}$$

Luego, como los denominadores son iguales:

$$\frac{1}{(x-6)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-6)}{(x-6)(x+2)}$$

$$1 = Ax + 2A + Bx - 6B.$$

Descomponiendo en potencias de x:

$$0x = (A+B)x \Rightarrow A = -B.$$

$$1 = 2A - 6B \Rightarrow 1 = -2B - 6B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{8}} \therefore \boxed{A = \frac{1}{8}}$$

$$\int \frac{dx}{(x-6)(x+2)} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x-6)} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x+2)} = \frac{1}{8}\ln|x-6| - \frac{1}{8}\ln|x+2| + \ln c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-6)(x+2)} = \ln\left[c\sqrt[8]{\frac{(x-6)}{(x+2)}}\right]}$$

Caso 2: Las raíces del denominador son <u>reales y coincidentes</u>:

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\ldots(x-z)^{\omega}$$

Ej: $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{(x+1)^3(x-2)} = \int \frac{A\,dx}{(x+1)^3} + \int \frac{A_1\,dx}{(x+1)^2} + \int \frac{A_2\,dx}{(x+1)} + \int \frac{B\,dx}{(x-2)}$

Resolviendo, algebraicamente, resulta:

$A = -1;\ A_1 = \frac{1}{3};\ A_2 = -\frac{2}{9};\ B = \frac{2}{9}$

$$\int \frac{(x^2+2)\,dx}{(x+1)^3(x-2)} = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{(x-2)}$$

$$\int \frac{(x^2+2)\,dx}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| + \ln c.$$

$$= \frac{3-2(x+1)}{(x+1)^2} + \ln\left[c\sqrt[9]{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2}\right]$$

$$\therefore \boxed{\int \frac{(x^2+2)\,dx}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{(1-2x)}{(x+1)^2} + \ln\left[c\cdot\sqrt[9]{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2}\right]}$$

Caso 3: El denominador tiene raíces <u>complejas simples</u>, esto es, la raíz compleja y su conjugada:

Ej: 1) Integrales de la forma: $\int \frac{dx}{(x^2+x+4)} \longrightarrow$ <u>Forma</u>: Compl. cuadr.

2) Integral de la forma: $\int \frac{(ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)}$; $b^2-4ac<0 \longrightarrow$ <u>Forma</u>: Por Reducción

Caso 4: El denominador tiene raíces <u>complejas múltiples</u> y/o combinaciones:
En tales casos, se aplica el Método de OSTROGRADSKI, que contempla:
Si $Q(x)$ tiene raíces múltiples, resulta:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}\,dx \quad (1)$$

tal que: $Q_1(x)$ es el MCD del polinomio $Q(x)$ y de su derivada $Q'(x)$;

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$$

Hoja 8

$X(x)$ e $Y(x)$ son polinomios con coeficientes indeterminados, cuyos grados son menores en una unidad que los de $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$, respectivamente.
Los coeficientes indeterminados de los polinomios $X(x)$ e $Y(x)$ se obtienen por diferenciación de la identidad (1). -

Ej: $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; $P(x) = 1$, $Q(x) = (1+x^2)^2$

$$Q'(x) = 2(1+x^2) \cdot 2x = 4x(1+x^2)$$

$$Q_1(x) = MCD[Q(x), Q'(x)] = (1+x^2)$$

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = \frac{(1+x^2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(1+x^2)}} = (1+x^2)$$

$$X(x) = Ax+B ; \; Y(x) = Cx+D$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{(Ax+B)}{(1+x^2)} + \int \frac{(Cx+D)}{(1+x^2)} dx \quad (I)$$

Derivando ambos miembros de (I):

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{A(1+x^2) + (Ax+B)2x}{(1+x^2)^2}\right) + \frac{(Cx+D)}{(1+x^2)}$$

$$\frac{1}{\cancel{(1+x^2)^2}} = \frac{A + Ax^2 + 2Ax^2 + 2Bx + (Cx+D)(1+x^2)}{\cancel{(1+x^2)^2}}$$

$$1 = A + Ax^2 + 2Ax^2 + 2Bx + Cx + D + Cx^3 + Dx^2$$

Descomponiendo en potencias de x:

$0x^3 = Cx^3 \Rightarrow \boxed{C=0}$

$0x^2 = (3A+D)x^2 \Rightarrow D = -3A \; \therefore \; \boxed{D = \frac{3}{2}}$

$0x = (2B+C)x \Rightarrow \boxed{B=0}$

$1 = A + D \Rightarrow 1 = A - 3A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{2}}$

Reemplazando en (I):

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}x\right)}{(1+x^2)} + \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right) dx}{(1+x^2)} = \frac{(-x)}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x) + C.$$

INTEGRALES DE LA FORMA: (1) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

Los integrales de la forma (1) se resuelven mediante el uso de sustitución Hiperbólica, tal que:

$$x = a\,sh(t) \Rightarrow sh(t) = \frac{x}{a}$$

$$\therefore\ dx = a\,ch(t)\,dt$$

Entonces:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2+a^2sh^2(t)}\;a\,ch(t)\,dt$$

$$= a^2\int \sqrt{1+sh^2(t)}\;ch(t)\,dt$$

$$= a^2\int \sqrt{ch^2(t)}\,.\,ch(t)\,dt$$

$$= a^2\int ch^2(t)\,dt$$

$$= a^2\int \left(\frac{ch(2t)+1}{2}\right)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}sh(2t)+t\right]+C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[sh(t).ch(t)+t\right]+C$$

Como: $sh(t) = \frac{x}{a}$ y $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$, resulta:

$$ch(t) = \sqrt{1+sh^2(t)} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}$$

$$\therefore\ e^t = ch(t)+sh(t) = \frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} = \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$$

$$a^2\int \sqrt{1+sh^2(t)}\,.\,ch(t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left[ch(t).sh(t)+t\right]+C$$

Luego: $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)\right]+C$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left[\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right]+C}$$

(2) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; $x = a\,ch(t) \Rightarrow ch(t) = \frac{x}{a}$

$dx = a.sh(t)\,dt$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a^2.ch^2(t).\,a.\,sh(t)\,dt}{\sqrt{a^2ch^2(t)-a^2}} = \int \frac{a^{\cancel{3}2}ch^2(t)\,sh(t)\,dt}{\cancel{a}\sqrt{ch^2(t)-1}}$$

$$= a^2\int \frac{ch^2(t)\,\cancel{sh(t)}\,dt}{\cancel{sh(t)}}$$

$$= a^2\int ch^2(t)\,dt \quad \text{(Se reduce a la forma anterior)}$$

INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS:

① Forma: $\int \operatorname{sen}^m(x).\cos^n(x)\,dx \;;\; m, n \in \mathbb{Z}.$ (A)

Caso Ⓘ: Si: $m = 2k+1$ es un número impar y positivo, se supone

$$I = -\int \operatorname{sen}^{2k}(x)\cos^n(x)\,d(\cos(x)) = -\int (1-\cos^2(x))^k \cos^n(x)\,d(\cos(x))$$

Análogamente, resulta si n es un número impar positivo.

Ej: $\int \operatorname{sen}^{10}(x).\cos^3(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^{10}(x).(1-\operatorname{sen}^2(x))\,d(\operatorname{sen}(x))$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{11}(x)}{11} - \frac{\operatorname{sen}^{13}(x)}{13} + C$$

Caso Ⓘⓘ: Si m y n son números pares positivos, (A) se transforma a partir de las relaciones trigonométricas:

$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$; $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

$\operatorname{sen}(x).\cos(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$

Ej: $\int \cos^2(3x).\operatorname{sen}^4(3x)\,dx = \int (\cos(3x).\operatorname{sen}(3x))^2.\operatorname{sen}^2(3x)\,dx$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2(6x)}{4}\,\frac{(1-\cos(6x))}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\left[\left(\frac{1-\cos(12x)}{8}\right) - \operatorname{sen}^2(6x).\cos(6x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(12x)}{24} - \frac{1}{18}\operatorname{sen}^3(6x)\right) + C$$

Caso Ⓘⓘⓘ: Las integrales de la forma: $\int tg^m(x)\,dx$ o $\int ctg^m(x)\,dx$, se calculan, cuando m es un número entero y positivo, por uso de la fórmula trigonométrica:

$tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$; o bien: $ctg^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1$

Ej: $\int tg^4(x)\,dx = \int tg^2(x).tg^2(x)\,dx = \int tg^2(x)(\sec^2(x)-1)\,dx$

$$= \int tg^2(x).\sec^2(x)\,dx - \int tg^2(x)\,dx$$

$$= \frac{tg^3(x)}{3} - \int(\sec^2(x)-1)\,dx$$

$$= \frac{tg^3(x)}{3} - tg(x) + x + C$$

Caso IV: Las integrales de la forma (A) se calculan por medio de Fórmulas de Reducción o Fórmulas de Recurrencia, que se deducen, en general del uso de la Fórmula de Integración por Partes.

Ej. $\int \frac{dx}{\cos^3(x)} = \int \sec^3(x)\,dx = \int \frac{(\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x))}{\cos^3(x)}\,dx$

$= \int \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)}\,dx + \int \frac{dx}{\cos(x)}$

$= \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{1}{2\cos^2(x)} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\,dx + \int \frac{dx}{\cos(x)}$

$= \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos^2(x)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos(x)}$

$\int \sec^3(x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x) \cdot \sec(x) + \frac{1}{2}\ln|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C$

Ej. Adic. $\int \frac{dx}{\cos^4(x)} = \int \sec^2(x) \cdot \sec^2(x)\,dx = \int \sec^2(x)\,d(\operatorname{tg}(x))$

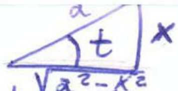
$= \int (1 + \operatorname{tg}^2(x))\,d(\operatorname{tg}(x)) = \int d(\operatorname{tg}(x)) + \int \operatorname{tg}^2(x)\,d(\operatorname{tg}(x))$

$\int \sec^4(x)dx = \operatorname{tg}(x) + \frac{\operatorname{tg}^3(x)}{3} + C$

Sustituciones Trigonométricas

1er Caso:

Forma: $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$



sustitución: $x = a\cdot \operatorname{sen}(t)$

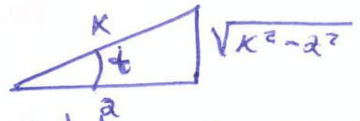
$dx = a\cdot\cos(t)\,dt$

Luego:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2(t)}\cdot a\cos(t)\,dt$$
$$= a\int a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt$$
$$= a^2\int \cos(t)\cdot\cos(t)\,dt$$
$$= a^2\int \cos^2(t)\,dt$$
$$= a^2\int \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt$$

2do caso:

Forma: $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$



sustitución: $x = a\cdot\sec(t)$

$dx = a\cdot\sec(t)\cdot tg(t)\,dt$

Luego: $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int \sqrt{a^2\sec^2(t)-a^2}\cdot a\sec(t)\cdot tg(t)\,dt$

$$= a^2\int \sqrt{\sec^2(t)-1}\;\sec(t)\cdot tg(t)\,dt$$
$$= a^2\int tg(t)\cdot\sec(t)\cdot tg(t)\,dt$$
$$= a^2\int tg^2(t)\cdot\sec(t)\,dt$$
$$= a^2\left[\int \sec^3(t)\,dt - \int \sec(t)\,dt\right]$$

3er caso:

Forma: $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

sustitución: $x = a\cdot tg(t)$

$dx = a\cdot\sec^2(t)\,dt$

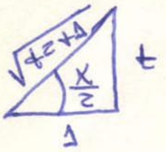
Luego: $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int \sqrt{a^2\cdot tg^2(t)+a^2}\cdot a\sec^2(t)\,dt$

$$= a^2\int \sqrt{tg^2(t)+1}\cdot\sec^2(t)\,dt$$
$$= a^2\int \sec^3(t)\,dt$$

INTEGRALES RACIONALES DE SENOS Y COSENOS:

$$\int R\left(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\right) dx = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] \cdot \left(\frac{2}{1+t^2}\right) dt$$

sustitución:



$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 2\, arctg(t) \\ dx &= \left(\frac{2}{1+t^2}\right) dt \end{aligned}}$$

considerando que:

1) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha) . \cos(\alpha) \; ; \; \alpha = \frac{x}{2}$

$$\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) . \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen}(x) = 2 . \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) . \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) = \frac{2t}{t^2+1}}$$

2) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) \; ; \; \alpha = \frac{x}{2}$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore \boxed{\cos(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$