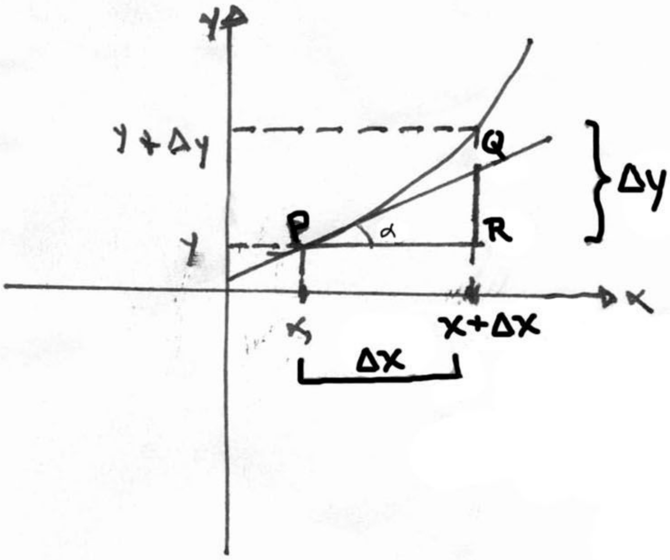
4.1. Interpretación Geométrica



$\triangle PQR$: $tg(\alpha) = \dfrac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$ (1)

$tg(\alpha) = m$ (2)

Pero: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ (3)

Como: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ (4)

De (1) y (4): $\dfrac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \dfrac{dy}{dx}$

Por construcción: $\Delta x = dx$.

Pero, de (3) y (4):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow \Delta y \cong dy$, cdo: $\Delta x \to 0$

Entonces: $\Delta x = dx$ ↳ Diferencial de var. Indep.
↳ Incremento lineal

$\Delta y \cong dy$ ↳ Diferencial de la función
↳ Incremento funcional

4.2. Propiedades de Diferencial

(1) $d(x+y) = dx + dy$

(2) $d(x-y) = dx - dy$

(3) $d(K.x) = K\,dx$

(4) $d(x.y) = y\,dx + x\,dy$

(5) $d\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$

4.3. Diferenciales de Orden Superior

Como: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} \rightarrow dy = f'(x)\,dx$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow d^2y = f''(x)\,dx$$

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} \rightarrow d^3y = f'''(x)\,dx$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \rightarrow d^n y = f^n(x)\,dx^n$$

4.4. Aplicación de Diferencial en Cálculo Aproximado

Por definición de Derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

$$\rightarrow f'(x) \cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

De (2): $\boxed{f(x+\Delta x) \cong f'(x)\cdot\Delta x + f(x)}$ (3)

y: $f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x).\Delta x$

o bien: $\boxed{\Delta y \cong f'(x).\Delta x}$ (4)

Las expresiones (3) y (4) permiten aproximar el cálculo tanto de una función incrementada como la variación (o incremento) de la función, respectivamente.

Ejemplos:

1. Calcular, en forma aproximada: $\sqrt{1.227}$

D/ Sea: $f(x) = \sqrt{x}$

y: $x = 1.225$, $\Delta x = 2$

$$\rightarrow f(x+\Delta x) \cong f'(x).\Delta x + f(x)$$

Resulta: $\sqrt{1.227} \cong \dfrac{1}{2\sqrt{1.225}}.2 + \sqrt{1.225}$

$$\sqrt{1.227} \cong \frac{1}{35} + 35 = \frac{36}{35}$$

2 Calcular, aproximadamente: $tg\,(46°)$

R/ sea: $f(x) = tg\,(x)$, con: $x = 45°$, $\Delta x = 1°$

Entonces: $x = \frac{\pi}{4}$

$\Delta x = \frac{\pi}{180}$

Como: $$f(x+\Delta x) \cong f'(x).\,\Delta x + f(x)$$

Resulta: $$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) \cong sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right).\,\frac{\pi}{180} + tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) \cong \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}.\,\frac{\pi}{180} + 1$$

$$\cong \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}.\,\frac{\pi}{180} + 1$$

$$\cong \frac{2\pi}{180} + 1 = \frac{\pi}{90} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\,(46°) \cong \frac{\pi}{90} + 1}$$

3 ¿En cuánto aumenta el volumen de una esfera, de radio 50 cm, si el mismo se incrementa en 5 mm?

R/ $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, con: $r = 50$

$\Delta r = 0{,}5$

$$f'(r) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\,\cancel{3}r^2$$

Como: $$f(r+\Delta r) \cong f'(r).\,\Delta r + f(r)$$

resulta: $$f(50+0{,}5) \cong 4\pi.(50)^2.\,0{,}5 + \frac{4}{3}\pi.(50)^3$$

$$\cong 5.000\,\pi + \frac{500.000\,\pi}{3}$$

$$\therefore \boxed{f(50{,}5) \cong \frac{515.000\,\pi}{3}} \text{ (en } cm^3)$$