Algunos temas de Lógica.

Cálculo Proposicional.

Empecemos dando la siguiente definición. Una **proposición** es una expresión del lenguaje que tiene la siguiente particularidad: tiene sentido preguntarse si ella es verdadera o falsa. Por ejemplo, la expresión "Ahora está lloviendo" es una proposición ya que tiene sentido decir si es verdadera o falsa (yo puedo asomarme a la ventana y ver si está lloviendo o no), mientras que expresiones como "¡Dios mío!" o "¿Cuántos años tenés?" no son proposiciones. ¿Qué sentido tiene preguntarse si "¿Cuántos años tenés?" es verdadera o falsa?
En castellano diríamos que las proposiciones son las oraciones "declarativas" mientras que las oraciones "exclamativas" o las "interrogativas" no lo son (como en los ejemplos de arriba).
También supongamos que en estas expresiones se han eliminado todas las ambigüedades del idioma. Por ejemplo, la proposición "Ahora hace mas de veinte grados" podría generar confusiones como: ¿En dónde hace mas de veinte grados en Luján o en Córdoba? ¿Veinte grados Centígrados o veinte grados Fahrenheit? etc. Vamos a suponer que se han desterrado todas estas ambigüedades.

Nuestro interés en las proposiciones radica en que en muchos de nuestros razonamientos, tanto en nuestra vida real como en cuestiones mas técnicas, lo que hacemos es conectar varias proposiciones entre sí de determinada forma. Justamente, el cálculo proposicional intenta capturar y representar esa forma de razonar.
Para empezar a entender lo anterior, miremos la siguiente expresión:
"Si la temperatura de la válvula A o de la válvula B son menores a 1000°C entonces no se detiene la caldera"
Si llamamos:
$p =$la temperatura de la válvula A es menor a 1000°C,
$q =$la temperatura de la válvula B es menor a 1000°C,

r = se detiene la caldera,
entonces podemos escribir en símbolos la expresión anterior de esta forma:
"Si p o q entonces no r".
Vemos justamente que, además de las proposiciones ("la temperatura de la válvula A es mayor a 1000°C", "la temperatura de la válvula B es mayor a 1000°C", "se detiene la caldera") aparecen también "conectores" entre esas proposiciones ("o","no", "entonces"). Esto nos lleva a pensar que un lenguaje adecuado para nuestros fines será:

- las letras "p", "q", "r", ... representarán proposiciones,
- los símbolos lógicos serán:

$$\begin{aligned}
``\wedge'' &= \text{y}, \\
``\vee'' &= \text{o}, \\
``\neg'' &= \text{no}, \\
``\Rightarrow'' &= \text{implica o entonces } (p \Rightarrow q \text{ se lee: ``}p\text{ implica }q\text{'' o ``Si }p\text{ entonces }q\text{''}).
\end{aligned}$$

- símbolos de paréntesis "(" y ")" como separadores

Con este lenguaje, la expresión de arriba se escribiría como: "$(p \vee q) \Rightarrow \neg r$".

Al revés, por ejemplo, fórmulas como "$(p \wedge q) \Rightarrow r$" podrían representar expresiones del tipo "Si jugamos bien y tenemos suerte entonces ganamos".

Tablas de Verdad

Hasta ahora, estamos viendo las "fórmulas" como una simple tira de símbolos (de los símbolos del lenguaje descripto arriba), es decir desde un punto de vista puramente sintáctico. Veremos a continuación como asignarle a cada una de estas fórmulas un valor de verdad que solo dependa de ciertas reglas y de los valores de verdad de las proposiciones que la componen (un punto de vista más "semántico").
Los valores de verdad serán:
V = verdadero,
F = falso.

Tablas de verdad de los cuatro conectores básicos:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Algunas de estas reglas parecen bastante "naturales", por ejemplo, $p \wedge q$ es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas ya que uno podría imaginarse que para que "Llueve y Hace calor" sea verdadero es necesario y suciente que "Llueve" sea verdadero y que "Hace calor" sea verdadero también. También parece razonable la tabla de $p \vee q$ que es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones es verdadera.
Quizás la menos "natural" sea la tabla del "entonces". Puede que la siguiente "imagen" ayude a entender el sentido de la tabla. Pensemos las expresiones $p \Rightarrow q$ como una "promesa". Solo será falsa si se rompe esa promesa. Por ejemplo "Si llueve entonces abro el paraguas" solo será falsa en caso que llueva y no abra el paraguas ya que en cualquier otro caso no estoy rompiendo la promesa (pensarlo!). También puede resultar útil recordar (como regla nemotécnica) que la implicación es siempre verdadera salvo en un solo caso: cuando lo de la izquierda es verdadero y lo de la derecha es falso.

Una observación: suele usarse el "1" y el "0" en lugar de "V" y "F" para indicar verdadero y falso. Es decir, por ejemplo,

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

representa lo mismo que

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Conociendo ahora como se comportan los valores de verdad con los cuatro conectores básicos podremos encontrar los valores de verdad de cualquier fórmula.

Veamos un ejemplo. Confeccionemos la tabla de verdad de la fórmula $p \Rightarrow (p \wedge (\neg q))$. Conviene ir haciendo los cálculos por pasos hasta llegar a la fórmula final.

p	q	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$p \Rightarrow (p \wedge (\neg q))$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Practiquemos tres tablas más:

$p \vee (\neg p)$

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
V	F	V
F	V	V

$p \wedge (\neg p)$

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$
V	F	F
F	V	F

$(\neg p) \vee (\neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

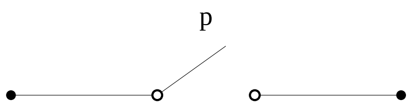
Aprovechemos los cálculos que estuvimos haciendo y demos tres nuevas definiciones:

- Una **tautología** es una fórmula lógica que es siempre verdadera mas allá del valor de verdad que adopten las variables proposicionales que la componen. Por ejemplo: $p \vee (\neg p)$.
- Una **contradicción** es una fórmula lógica que es siempre falsa mas allá del valor de verdad que adopten las variables proposicionales que la componen. Por ejemplo: $p \wedge (\neg p)$.
- Una **contingencia** es una fórmula lógica que a veces es verdadera y a veces falsa, dependiendo del valor de verdad que adopten las variables proposicionales que la componen. Por ejemplo: $p \Rightarrow (p \wedge (\neg q))$.
- Dos fórmulas se dicen **equivalentes** (o lógicamente equivalentes) si cuando una fórmula es verdadera entonces la otra también y cuando una es falsa la otra también lo es. Es decir que dos fórmulas son equivalentes si ambas tienen la misma tabla de verdad. Usamos el símbolo "$\equiv$" para indicar que dos fórmulas son equivalentes. Por ejemplo, aprovechando los cálculos hechos más arriba, podemos decir que: $[p \Rightarrow (p \wedge (\neg q))] \equiv [(\neg p) \vee (\neg q)]$.

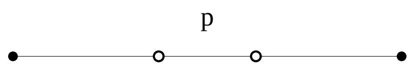
En la tabla que figura al final del apunte pueden encontrarse una lista de tautologías y equivalencias “famosas” que serán de gran utilidad para resolver los ejercicios de la práctica.

Circuitos

Hay una forma interesante de interpretar o de “visualizar” una fórmula lógica. Imaginemos que una proposición es como una “llave” que puede dejar pasar, o no, una corriente eléctrica desde el nodo de la izquierda representado por un punto negro hasta el nodo de la derecha representado de la misma forma. Cuando la proposición p es falsa, la llave está abierta y entonces no pasa corriente y cuando p es verdadera la llave está cerrada y sí pasa corriente.



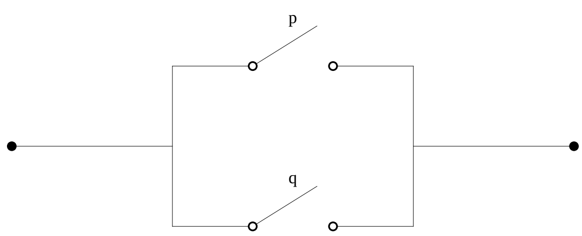
p Falsa



p Verdadera

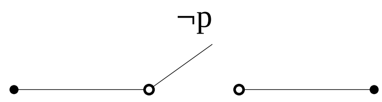
Ahora interpretemos los conectores “y” y “o” como circuitos en “serie” y en “paralelo” como en la imagen de abajo (aclaramos que por comodidad las “llaves” en principio siempre se dibujan abiertas).

$p \wedge q$



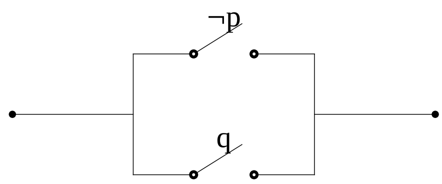
$p \vee q$

Esto tiene sentido ya que en el circuito de la izquierda solo pasa corriente si las dos llaves están cerradas (es decir si p y q son ambas verdaderas) y en el de la derecha solo pasa corriente si alguna de las dos llaves están cerradas (o sea si p es verdadera o q es verdadera). Exactamente el mismo comportamiento que se ve en las tablas de verdad de los conectores “$\wedge$” y “$\vee$”.

La negación se representa directamente como: 

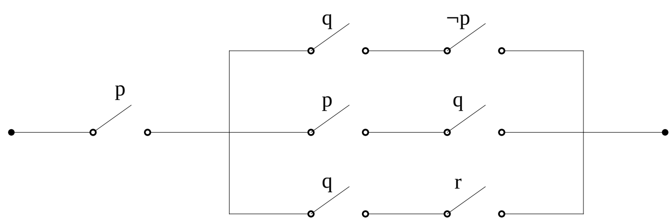
Para representar la implicación podemos usar el hecho de que $p \Rightarrow q$ es equivalente a $\neg p \vee q$ (cosa que puede comprobarse haciendo las correspondientes tabla de verdad).

Así $p \Rightarrow q$ puede representarse como:



Combinando las representaciones anteriores podemos representar fórmulas más complicadas.

Por ejemplo, la fórmula $p \wedge [(q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge r)]$ se representaría mediante el circuito:

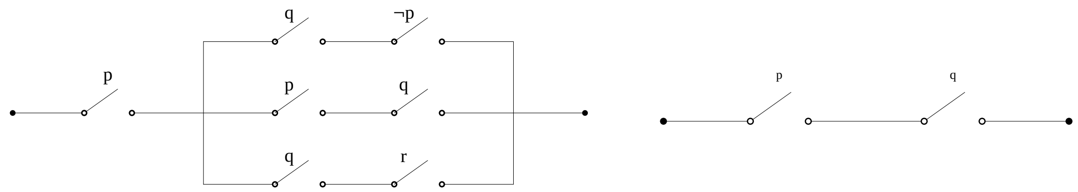


Obviamente, también podría hacerse el camino al revés y a partir de un circuito armar la fórmula que lo representa.

Simplificación de Fórmulas

A veces, nos vemos en la necesidad de trabajar con fórmulas lógicas que son muy extensas y uno se pregunta si no es posible simplificarla de alguna forma. Concretamente, buscamos una fórmula equivalente a la original pero que sea más agradable a la vista (menos recargada de símbolos).

Por ejemplo, miremos el circuito de arriba. Vemos en seguida que para que circule corriente por el circuito es necesario que la "llave" p esté cerrada (o sea que p sea verdadera) pero entonces de las tres ramas que se abren a continuación, por la de arriba seguro no pasará corriente pues $\neg p$ estará abierta (ya que $\neg p$ será falsa). Ahora, para que pase por la del medio deberíamos pedir además que q también sea verdadera. Acá ya podemos ver que para que circule corriente por el circuito basta con que p y q sean verdaderas sin importar el valor de verdad de r (ya que tanto si r está abierta o cerrada la corriente seguro pasa por la rama del medio). Esto nos hace concluír que los dos circuitos de abajo son equivalentes



Es decir, si por el de la izquierda circula corriente entonces por el de la derecha también y si por el de la izquierda no circula corriente entonces por el de la derecha tampoco. En algún sentido ambos son el mismo circuito.

Representando los circuitos por sus respectivas fórmula lógicas obtenemos que la fórmula $p \wedge [(q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge r)]$ es equivalente a la fórmula $p \wedge q$ y ésta última es mucho más clara y simple que la original.

Ahora ¿podemos hacer esta simplificación de una forma puramente "algebraica"? Pues si. Solo hace falta usar de manera adecuada las equivalencias lógicas que figuran en la tabla al final del apunte. Para ilustrar lo que estamos diciendo, probemos la equivalencia de arriba. Vamos a ir simplificando, de a poco, la fórmula original e iremos aclarando que equivalencias lógicas fuimos usando para pasar de una fórmula a otra. Aclaramos también que, en general, no hay una única forma de hacer la simplificación si no que se puede llegar al mismo resultado de muchas maneras diferentes.

$$\begin{aligned}
p \wedge [(q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge r)] &= [p \wedge (q \wedge \neg p)] \vee [p \wedge (p \wedge q)] \vee [p \wedge (q \wedge r)] \quad \text{(por 17)} \\
&= [p \wedge (\neg p \wedge q)] \vee [p \wedge (p \wedge q)] \vee [p \wedge (q \wedge r)] \quad \text{(por 15)} \\
&= [(p \wedge \neg p) \wedge q] \vee [(p \wedge p) \wedge q] \vee [(p \wedge q) \wedge r] \quad \text{(por 16)} \\
&= (0 \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee [(p \wedge q) \wedge r] \quad \text{(por 22 y 14)} \\
&= 0 \vee (p \wedge q) \vee [(p \wedge q) \wedge r] \quad \text{(por 23)v))} \\
&= (p \wedge q) \vee [(p \wedge q) \wedge r] \quad \text{(por 23)i))} \\
&= p \wedge q \quad \text{(por 23)vi))}
\end{aligned}$$

Reglas de inferencia.

Una idea que ha guiado el desarrollo de la lógica a lo largo de la historia es la idea de "consecuencia". Precisemos esto. Nos interesará contar con un procedimiento que nos

permita determinar si a partir de la validez de ciertas proposiciones (llamadas “premisas”) podemos asegurar la validez de otra proposición (llamada “conclusión”). Es decir, si las proposiciones (premisas) $p_1, p_2, \ldots p_n$ son verdaderas, entonces ¿podemos asegurar que la proposición q (conclusión) también es verdadera? O sea ¿puede decirse que la veracidad de la proposición q es consecuencia de las veracidad de las proposiciones $p_1, p_2, \ldots p_n$? Digamoslo una vez más, ya que es muy importante entender bien que estamos buscando. Si p_1 es verdadera y p_2 es verdadera y $\ldots$ p_n es verdadera, entonces ¿q también <u>debe</u> ser verdadera?
Esta situación se suele representar simbólicamente así:

$$\begin{array}{lll} p_1 & & \\ p_2 & \longleftarrow & \text{premisas} \\ \vdots & & \\ p_n & & \\ \hline \therefore \quad q & \longleftarrow & \text{conclusión} \\ \uparrow & & \\ \text{se deduce que} & & \end{array}$$

Las premisas se listan en forma vertical. El símbolo de los tres puntitos “$\therefore$” debajo de la barra se lee como “entonces se deduce que” vale la proposición q.

Ahora, estos razonamientos lógicos son, en principio, afirmaciones que podrían ser correctas o no. Por ejemplo, el razonamiento:

$$\begin{array}{c} \text{Hoy comí fideos} \\ \text{Ayer viajé en colectivo} \\ \hline \therefore \ \text{Mañana Boca sale campeón} \end{array}$$

pereciera ser una tontería absoluta, ya que si es verdad que hoy comí fideos y también es verdad que ayer viajé en colectivo no se ve ninguna razón lógica para afirmar que de eso se deduzca que necesariamente mañana Boca tenga que salir campeón.
Por otro lado, el razonamiento lógico:

$$\begin{array}{c} \text{Hace frío} \ \ \text{y} \ \ \text{LLueve} \\ \hline \therefore \ \text{Hace frío} \end{array}$$

parece tener mucho más sentido ya que si es verdad que llueve y hace frío, entonces, en particular, es verdad que hace frío.

Generalizando el ejemplo anterior, podríamos decir que parece natural considerar válidos los razonamientos:

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore \ p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore \ q \end{array}$$

Veamos, para seguir practicando el tema, algún otro razonamiento lógico que tenga sentido considerar como válido. Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Efectivamente. Si $p \vee q$ es verdadera, entonces o p es verdadera o q es verdadera, pero como también se afirma que $\neg p$ es verdadera (o sea p es falsa) entonces q debe ser verdadera.

En la tabla que figura al final del apunte pueden encontrarse una lista de reglas de inferencias que serán aceptadas como válidas y que son las que usaremos para demostrar la validez de razonamientos lógicos más complejos.
Veamos, en un último ejemplo, como se utilizan esas reglas:

Probemos que el siguiente razonamiento lógico es válido:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow (q \vee r) \\ \neg q \\ p \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

Si miramos la primera y la tercera de las premisas (o sea $p \Rightarrow (q \vee r)$ y p) y aplicamos la regla que en la tabla del final del apunte figura como regla de inferencia 12 (Modus Ponens) obtenemos:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow (q \vee r) \\ p \\ \hline \therefore\ (q \vee r) \end{array}$$

Si ahora nos quedamos con lo que obtuvimos recién y con la segunda de las premisas (o sea $q \vee r$ y $\neg q$) y aplicamos la regla de inferencia 9 (Silogismo disyuntivo) obtenemos:

$$\begin{array}{c} q \vee r \\ \neg q \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

Obtuvimos exactamente lo que queríamos obtener. Logramos llegar a que vale r usando solo las premisas y las reglas de inferencia que figuran en la tabla (es cierto que también fuimos usando deducciones intermedias).

Antes de terminar esta sección hagamos una observación importante. Todo lo que hemos visto sirve para probar que un razonamiento lógico es válido. Pero ¿qué pasa si el razonamiento es falso? ¿cómo podemos probar que un razonamiento lógico no es válido? La respuesta es sencilla, solo hace falta mostrar que todas las premisas pueden ser verdaderas y sin embrago la conclusión ser falsa. ¿Cómo vemos eso? Buscando (normalmente medio "a ojo") alguna asignación de verdad de las proposiciones que intervienen en el razonamiento que hagan verdaderas a todas las premisas y falsa a la conclusión. Esto prueba justamente que el razonamiento no es válido, ya que si lo fuera, el hecho de que todas las premisas sean verdaderas debería asegurar que la conclusión también debería serlo y estamos exhibiendo una situación en donde eso no pasa. Veamos un ejemplo.

Probemos que el siguiente razonamiento lógico no es válido:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \vee r \\ \hline \therefore\ r \wedge p \end{array}$$

Podemos ver, por ejemplo, que si p es falsa, q es falsa y r es verdadera, entonces todas las premisas son verdaderas y sin embargo la conclusión es falsa. Luego, el razonamiento NO es válido.

$$\begin{array}{lc} p \Rightarrow q & \mathbf{V} \\ q \vee r & \mathbf{V} \\ \hline \therefore\ r \wedge p & \mathbf{F} \end{array}$$

Cuantificadores

Algo que no hemos estudiado en este apunte (y que no estudiaremos en este curso) es lo que se conoce como "Cálculo de Predicados" en donde el lenguaje lógico con el que estuvimos trabajando se ve enriquecido, entre otras cosas, por los denominados "cuantificadores". En nuestros razonamientos cotidianos usamos muchas veces el "para todo" y el "existe al menos un".

Veamos un ejemplo, analicemos la siguiente frase: "Todos los docentes son idiotas"

Esta expresión puede escribirse en símbolos matemáticos si la pensamos de esta forma:

En la oración se está diciendo que si alguién, digamos un "x", pertenece al conjunto de los docentes, entonces ese "x" (ese alguien) cumple con la propiedad, con el "predicado": ser un idiota.

Si llamamos "P" al predicado "ser un idiota", entonces usaremos la expresión "$P(x)$" para indicar que el elemento (el individuo) "x" satisface el predicado "P". En nuestro caso eso significaría que "x" es un idiota.

También en matemática se usa el símbolo $\in$ para decir "pertenece" o "perteneciente a" y suelen usarse los símbolos ":" o "," para decir "se cumple que" o "vale que". Si además llamamos, por ejemplo, D al conjunto de los docentes, entonces podríamos escribir la frase anterior de esta forma:

$$\forall\, x \in D \;:\; P(x)$$

$\forall$	x	$\in$	D	$:$	$P(x)$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
Para todos	los elementos "x"	que pertenecen al	conjunto D	vale que	"x" cumple con el predicado P

Ahora analicemos como segundo ejemplo la frase: "Existe al menos un alumno que es estudioso".
Si llamamos A al conjunto de los alumnos y P al predicado "ser estudioso" la oración de arriba se escribe en símbolos de la siguiente manera:

$$\exists\, x \in A \;:\; P(x)$$

$\exists$	x	$\in$	A	$:$	$P(x)$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
Existe al menos un	elemento	que pertenecen al	conjunto A	que cumple	el predicado P

En general las afirmaciones en las que usemos los conectores "para todo" o "existe" siempre podrán llevarse a la forma:

$$\forall\, x \in C \;:\; P(x) \qquad \text{o} \qquad \exists\, x \in C \;:\; P(x)$$

Negación

Nos interesa ahora estudiar cómo se niegan las expresiones en las que intervienen estos cuantificadores. Vamos a llegar a una fórmula general pero será mejor primero entender la idea con un par de ejemplos.
Tomemos la primera frase que vimos "Todos los docentes son idiotas". Lo contrario a eso es que no todos los docentes son idiotas, o equivalentemente, que existe al menos un docente que no es idiota. Acá ya empezamos a ver que negar que "todos" satisfacen tal

predicado es afirmar que "existe al menos un" elemento que no lo satisface. Si escribimos en símbolos que "el elemento x no satisface el predicado P" de la forma $\neg P(x)$ entonces tenemos que:

$$\forall\, x \in C \,:\, P(x) \qquad \to \qquad \text{NEGACIÓN} \qquad \to \qquad \exists\, x \in C \,:\, \neg\, P(x)$$

Por otro lado, si ahora queremos negar la segunda frase que estudiamos, "Existe al menos un alumno que es estudioso", vemos que lo contrario a eso es que ningún alumno sea estudioso o, equivalentemente, que todos los alumnos no son estudiosos. Aquí llegamos a la segunda fórmula que queríamos llegar, en la que observamos que negar que "existe al menos un" elemento que satisface tal predicado es afirmar que "todos" los elementos no lo satisface. En símbolos:

$$\exists\, x \in C \,:\, P(x) \qquad \to \qquad \text{NEGACIÓN} \qquad \to \qquad \forall\, x \in C \,:\, \neg\, P(x)$$

Así, por ejemplo:

La negación de "Todos los sabios son viejos" es "Existe al menos un sabio que no es viejo" (que también podría decirse "Existe un sabio que es joven").

La negación de "Existe una flor que es amarilla" podría escribirse como "Todas las flores son no amarillas".

	Tautologías		Reglas de inferencia		Equivalencias lógicas
1	Adición $p \Rightarrow (p \vee q)$	7	Adición $\dfrac{p}{\therefore\ p \vee q}$	14	Doble negación $\neg(\neg p) \equiv p$
2	Simplificación $(p \wedge q) \Rightarrow p$	8	Simplificación $\dfrac{p \wedge q}{\therefore\ p}$	15	Leyes conmutativas $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3	Absurdo $(p \Rightarrow Falso) \Rightarrow \neg p$	9	Silogismo disyuntivo $p \vee q$ $\dfrac{\neg p}{\therefore\ q}$	16	Leyes asociativas $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$
4	Modus ponens $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$	10	Silogismo hipotético $p \Rightarrow q$ $\dfrac{q \Rightarrow r}{\therefore\ p \Rightarrow r}$	17	Leyes distributivas $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
5	Modus tollens $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	11	Conjunción p $\dfrac{q}{\therefore\ p \wedge q}$	18	Leyes de idempotencia $p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
6	Transitividad $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$	12	Modus ponens p $\dfrac{p \Rightarrow q}{\therefore\ q}$	19	Leyes de De Morgan $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
		13	Modus tollens $p \Rightarrow q$ $\dfrac{\neg q}{\therefore\ \neg p}$	20	Contrarecíproco $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Mas equivalencias:

21) **Importante** $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

Aclaración: Llamaremos "1" a cualquier tautología (por ejemplo $p \vee \neg p$) y "0" a cualquier contradicción (por ejemplo $p \wedge \neg p$).

22) Contradicción $p \wedge \neg p \equiv 0$ Tautología: $p \vee \neg p \equiv 1$

23) Leyes de identidad y absorción:

i) $(p \vee 0) \equiv p$ ii) $(p \vee \neg p) \equiv 1$

iii) $(p \vee 1) \equiv 1$ iv) $(p \wedge 1) \equiv p$

v) $(p \wedge 0) \equiv 0$ vi) $(p \wedge r) \vee p \equiv p$