02/05/20 | Unidad ⑥ | Hoja ①

INTEGRAL IMPROPIA

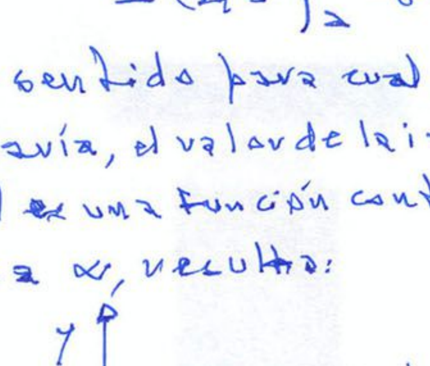
① Integrales con Límites Infinitos

Sea: $f(x)$ una función continua, definida $\forall x: a \leq x < +\infty$

Se presenta la Integral:

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad (1)$$

que tiene sentido para cualquier b, tal que: $b > a$.
Cuando b varía, el valor de la integral varía, entonces, la integral es una función continua de b, y cuando: b tiende a ∞, resulta:



Se establece la definición:

"si existe el límite:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

tal límite se denomina Integral Impropia de la función $f(x)$ en $[a, +\infty)$, escribiéndose:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

En consecuencia, resulta:

$$\boxed{\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx} \quad (2)$$

Es necesario evaluar la convergencia:

(1) si existe (2) y el resultado es finito, la Integral Impropia es Convergente.

(2) si no existe (2) o el resultado es igual a $\pm\infty$, la Integral Impropia es Divergente.

Significado geométrico de $\int_a^b f(x)\,dx$ para $f(x)\geq 0$:

Si la integral: $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de un dominio limitado por la curva: $y=f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas: $x=a$, $x=b$; es natural considerar que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ expresa el área del dominio infinito, comprendido entre las curvas: $y=f(x)$, $x=a$ y el eje de abscisas.

Gráficamente:

De forma análoga, las integrales impropias correspondientes a los x, tales que: $-\infty < x \leq a$, resultan:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to -\infty} \int_{\varepsilon}^{a} f(x)\,dx$$

y además:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{(A)} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\varepsilon} f(x)\,dx}_{(A1)} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx}_{(A2)}.$$

Si las integrales (A1) y (A2) existen (o convergen), de acuerdo a la definición, la integral impropia (A) converge (o existe)

Ejemplos:

① $$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^b$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-b}+1\right] = -\underbrace{\lim_{b\to+\infty} e^{-b}}_{=0} + 1$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 \Rightarrow e^{-x}$$ es <u>convergente</u> en el <u>intervalo</u>: $\underline{1 \leq x < +\infty}$

② $\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx \;;\quad p \neq 1.$

$\therefore \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{1-p}}{(1-p)}\right]_1^b = \frac{1}{1-p}\left[b^{1-p} - 1\right]$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - 1\right)\right]$

En consecuencia:

1) Si: $p > 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$: La Integral converge

2) Si: $p < 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$: La Integral Diverge-

3) Si se hubiese definido: $p = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big]_1^{+\infty} = \infty$, entonces, la Integral diverge -

③ $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$

$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2}\right]$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2}$

$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1}$

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[-\frac{1}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{(-1)}\right)\right] + \lim_{\varepsilon \to 0}\left[-\frac{1}{(1)} + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \infty$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$: Es divergente

④ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1+x^2)} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{dx}{(1+x^2)} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$

con: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{(1+x^2)} = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \operatorname{arctg}(x) \Big]_0^{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}.$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1+x^2)} = \lim_{\varepsilon \to -\infty} \int_{\varepsilon}^{0} \frac{dx}{(1+x^2)} = \lim_{\varepsilon \to -\infty} \operatorname{arctg}(x) \Big]_{\varepsilon}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} = \pi \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$: converge.-

② Teoremas sobre convergencia de Integrales Impropias

Teorema ①: Si para todo x, tal que: $x \geq a$; se cumple la desigualdad:

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

siendo: $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, convergente; entonces, resulta $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también es convergente y:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx}$$

Ejemplo: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$;

Para: $x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$

con: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^{+\infty} = 1$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

$\Rightarrow \boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} < 1} \Rightarrow$ convergente y < 1.-

Teorema ②: Si para todo x, tal que: $x \geq a$; se cumple la desigualdad: $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$; siendo $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también es divergente.

Ejemplo:

① Evaluar la convergencia de la integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\, dx$$

$$\Rightarrow: \quad \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = x^{1-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\Big]_1^b = +\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}} \therefore \text{Es } \underline{\text{Divergente}}$$

Nota: 1) Los Teoremas anteriores, ① y ②, son para funciones no negativas.-

2) El teorema siguiente es para una función que cambia de signo en un intervalo infinito.-

Teorema ③: Si la integral: $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, entonces: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, también converge.

En tal caso la integral se denomina Absolutamente Convergente.

Ejemplo: Estudiar la convergencia de la integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}\, dx \qquad \left(o \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^3}\, dx\right)$$

La función $f(x)$ es una función de signo variable.

Se tiene además que:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|$$

Con: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2x^2}\Big]_1^{+\infty} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}\right| dx \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}\right| dx \text{ es Convergente}$$

$$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}\, dx \text{ es Absolutamente Convergente}$$

3) Integrales de Funciones Discontinuas:

Sea $f(x)$ una función definida y continua p/: $a \leq x \leq c$; tal que en: $x = c$, la función es discontinua; en tal caso, no puede definirse la integral: $\int_a^c f(x)dx$ como límite de sumas integrales, debido a que la función f(x) no es continua en $[a, c]$ y este límite puede no existir.

La integral: $\int_a^c f(x)dx$ de la función $f(x)$, discontinua en: $x = c$, se determina así:

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)\,dx} \quad (\varepsilon)$$

Esta integral se denomina Impropia convergente si existe el límite del segundo miembro de (ε) y en caso contrario, recibe el nombre de divergente.

- Si la función $f(x)$ es discontinua en el extremo izquierdo del intervalo $[a, c]$, esto es p/ $x = a$, de acuerdo a la definición:

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c+0} \int_b^c f(x)\,dx}$$

- Si la función $f(x)$ es discontinua en un punto: $x = x_0$ del intervalo $[a, c]$, entonces:

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx},$$

siempre que existan ambas integrales del 2º miembro

Ejemplo: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ (En el recorrido $[-1, 1]$, existe el punto de discontinuidad: $x = 0$, en el cual el integrando es discontinuo)

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}}_{(A)} = \underbrace{\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2}}_{(A1)} + \underbrace{\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}}_{(A2)}$$

(A1): $\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \frac{1}{x}\Big]_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right) = \infty$

$\Rightarrow$ En $[-1, 0)$: la integral diverge.

(A2): $\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \frac{1}{x}\Big]_{\varepsilon_2}^{1} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty$

$\Rightarrow$ En $(0, 1]$: la integral diverge.

En cambio, si se hubiese analizado la integral (A) se habría caído en un error, dado que:

(A): $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -\left(1 + 1\right) = -2.$ (conv.)

Nota: El concepto es extensible a un número finito de discontinuidades y, si, por lo menos, una integral diverge, la integral impropia general diverge.-

P/determinar la convergencia de integrales impropias de funciones discontinuas y calcular sus valores se pueden aplicar teoremas análogos a los de integrales con límites infinitos.

Teorema (1'):

Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son discontinuas en el punto c del intervalo $[a, c]$, en tanto que en todos los puntos de este intervalo se verifican: $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$

y: $\int_a^c \varphi(x)\,dx$, es convergente $\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx$ es también convergente.-

Teorema (2'): Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son discontinuas en el punto c del intervalo $[a, c]$, en tanto que en todos los puntos de este intervalo se verifican: $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$ y:

$\int_a^c \psi(x)\,dx$ es divergente, $\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx$, también es divergente.-

Teorema (3°):

Si $f(x)$ es una función de signo variable en el intervalo $[a, c]$ y discontinua sólo en el punto c, en tanto que la integral impropia: $\int_a^c |f(x)|\,dx$ del valor absoluto de esta función es convergente, entonces la integral: $\int_a^c f(x)\,dx$ también es convergente.-

Nota: Suele tomarse: $\frac{1}{(c-x)^p}$ como función de comparación dado que: $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^p}$ converge p/ $p<1$ y diverge p/ $p \geq 1$. Igual sucede con: $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$.

Ejemplo: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}\,dx$: ¿Es convergente?

El integrando es discontinuo en el extremo izquierdo de $[0, 1]$. Comparando con $\frac{1}{\sqrt{x}}$, resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}\,dx$ también existe, o sea es convergente.-