Teorema de Cauchy

H) f(x) y g(x) continuas en [a,b]

f(x) y g(x) derivables en (a,b)

$f'^2(x) + g'^2(x)$ distinto de 0 para todo x perteneciente a (a,b)

(Las derivadas no se anulan en el mismo punto del intervalo.)

g(a) distinto de g(b)

T) Existe c perteneciente a (a,b) / (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(c)/g'(c)

Ejemplo:

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

$g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$

[1,4]

Hallo los valores:

F(1)=2

F(4)=11

G(1)=9

G(4)=27

Compruebo si se cumple

$g(b) - g(a) \neq 0$

Uso la formula:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Entonces remplazo

$$\frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Derivo las funciones y las remplazo en f'(c) y g'(c)

$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(c) = 2c - 2$

$g'(x) = 3x^2 - 14x + 20 \rightarrow g'(c) = 3c^2 - 14c + 20$

Igualo los resultados de la formula

$$\frac{2c-2}{3c^2-14c+20} = \frac{1}{2}$$

Resuelvo

$4c - 4 = 3c^2 - 14c + 20$

$4c - 4 - 3c^2 + 14c - 20 = 0$

$-3c^2 + 18c - 24 = 0$

Y ahora resuelvo la ecuación de segundo grado (como todos los términos son divisibles por -3) puedo reducirla.

$c^2 - 6c + 8 = 0$

$$\frac{-(-6) \pm \sqrt{6^2 - 4.1.8}}{2.1}$$

$$\frac{6 \pm 2}{2} = \cancel{c_1 = 4}\ y\ c_2 = 2$$

El valor $\cancel{c_1 = 4}$ no lo tomo por el intervalo abierto (1,4)

Por ultimo compruebo que la deriva g'(c)≠0

$g'(c) = 3c^2 - 14c + 20$

$g'(2) = 3.2^2 - 14.2 + 20$

$g'(2) = 12 - 28 + 20$

$g'(2) = 4 \neq 0$

Teorema de Lagrange (o Teorema del Valor Medio)

Si f(x) es continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en todo punto del intervalo abierto (a,b), entonces existe al menos un punto c donde f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a).

H) f(x) es continua en [a,b]
f(x) es derivable en (a,b)
T) Existe c perteneciente a (a,b) / f'(c)=(f(b) - f(a))/(b - a)

Ejemplo:

F(x)=x^2 [1,2]

F(1)=1

F(2)=4

Como es continua y derivable, hallo el valor de c con la formula

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(c) = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

Hallo la derivada de la función

F'(x)=2x

Y remplazo por c

F'(c)=2c

Resuelvo igualando a f(c)

2c=3

C=$\frac{3}{2}$

Teorema de Rolle

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b], derivable en el intervalo abierto (a,b) y f(a)=f(b), entonces existe al menos un punto c entre a y b para el cual f'(c)=0.

H) f es continua en [a,b]
f es derivable en (a,b)
f(a)=f(b)
T) Existe c perteneciente a (a,b) / f'(c)=0

Ejemplo:

F(x)=$x^3 - 2x^2 + x + 6$ [0,1]

Como es una función polinómicas es continua y derivable

F(0)=6

F(1)=6

Como f(0)=f(1) se cumplen los tres axiomas (continua, derivable e iguales)

Para hallar el valor de c, hago la derivada y la igualo a 0

F'(x)=$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$x_1 = 1$, pero no lo tomamos por el intervalo abierto (0,1)

$x_2 = \frac{1}{3}$

c=$\frac{1}{3}$