Análisis Matemático I

Unidad Nº 2: Derivación

1. Determinar por definición las derivadas de las siguientes funciones:

   a. $y = \ln(2x)$

   b. $y = sen(2x)$

   c. $y = \cos(3x)$

   d. $y = sen(x).\cos(x)$

   e. $y = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}$

   f. $y = tg(x) - x$

   g. $y = \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}$

   h. $y = \sec(x)$

2. Hallar las derivadas de las funciones:

a) $y = x^4 + 3x^2 - 6$

b) $y = \dfrac{x^5}{a+b} - \dfrac{x^2}{a-b} - x$

c) $y = \sqrt{3x} + x^{1/3} + x^{-1}$

d) $y = \cos(x) + 5tg(x) - \ln(x)$

e) $y = (1+4x^3)(1+2x^2)$

f) $y = \dfrac{a-x}{a+x}$

g) $y = e^x tg(x)$

h) $y = \dfrac{sen(x) + \cos(x)}{\ln(x)}$

3. Derivar las siguientes funciones, reduciendo a la mínima expresión posible:

   a. $y = \dfrac{1+\sqrt{2z}}{1-\sqrt{2z}}$

b. $y=\dfrac{sen(z)-\cos(z)}{sen(z)+\cos(z)}$

c. $y=2t.sen(t)-(t^2-2).\cos(t)$

d. $y=(1+x^2).arctg(x)-x$

e. $y=\sqrt{\dfrac{3sen(x)-2\cos(x)}{6x}}$

f. $y=\sqrt[3]{e^{2x}-2^{e^{2x}}-2e^x}.\ln(x^2)$

g. $y=\dfrac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$

h. $y=arctg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

i. $y=\sqrt{\ln(x)+1}+\ln(\sqrt{x}+1)+\ln(\sqrt{x+1})$

j. $y=\left[(x)^x\right]^{x^{\ln(x)}}$

k. $y=arctg[\ln(x)]+\ln[arctg(x)]$

l. $y=\ln\left[\sqrt{2sen(x)+1}+\sqrt{2sen(x)-1}\right]$

m. $y=\dfrac{1}{2}tg^2(\sqrt{x})+\ln[\cos(\sqrt{x})]$

n. $y=\dfrac{(2x-1)^3.\sqrt{3x+2}}{(5x+1)^3.\sqrt[3]{1-x}}$

o. $y=\ln\left[\dfrac{\sqrt{4tg(x)+1}-2\sqrt{tg(x)}}{\sqrt{4tg(x)+1}+2\sqrt{tg(x)}}\right]$

p. $y=\ln\left[\sqrt{\dfrac{1+sen(x)}{1-sen(x)}}\right]$

q. $y=\dfrac{\ln[\ln(x)]}{\ln(\ln(\ln(x)-1))}$

r. $y=[sen(x)]^{tg^2(x)}$

s. $y=2^{\cos^2(x)}-\cos^2(2x)$

t. $y = \dfrac{x+1}{x} - e^{-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}$

u. $y = e^{x}.\sqrt{1-e^{2x}} - arcsen\left(e^{x}\right)$

v. $y = e^{\frac{tg^{2}(x)}{2}}.\cos(x)$

w. $y = x^{arcsen(x)}.e^{-x^{2}}.\ln(x)$

x. $y = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^{2}} + 1}\right)$

A. $y = 3sen\left(x.e^{x} - e^{x}\right) - sen^{3}\left(x.e^{x} - e^{x}\right)$

B. $y = \sqrt{(x+a).(x+b).(x+c)}$

C. $y = \ln\left(\sqrt{1+e^{x}} - 1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^{x}} + 1\right)$

D. $y = arctg\left[\dfrac{sen(\beta).x}{1 - x.\cos(\beta)}\right]$

E. $y = \dfrac{\left(tg^{2}(x) - 1\right)\left(tg^{4}(x) + 10tg^{2}(x) + 1\right)}{3tg^{3}(x)}$

F. $y = \ln\left(c + x + \sqrt{2cx + x^{2}}\right)$

G. $y = arcsen\left(arcsen(x)\right) + arcsen\left(x^{2}\right) + arcsen^{2}(x)$

H. $y = 3a^{2}arctg\left(\sqrt{\dfrac{x}{b-x}}\right) - (3b+2x).\sqrt{bx - x^{2}}$

I. $y = \sqrt[3]{x.\sqrt[4]{2x.\sqrt[5]{x + e^{x}.\ln(x)}}}$

J. $y = \left[\ln\left(\dfrac{x-8}{x+8}\right)\right]^{-1}.arcsen\left[x^{3}\ln(x)\right]$

K. $y = 3^{\frac{sen(bx)}{\cos(ax)}} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{sen^{3}(bx)}{\cos^{3}(ax)}$

L. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\ln\left[\dfrac{tg\left(\frac{x}{2}\right) + 2 - \sqrt{3}}{tg\left(\frac{x}{2}\right) + 2 + \sqrt{3}}\right]$

M. $y = 2arctg\left(\sqrt{sen(x)}\right) + \ln\left[\dfrac{1+\sqrt{sen(x)}}{1-\sqrt{sen(x)}}\right]$

N. $y = e^{x}.arctg\left(e^{x}\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)$

O. $y = \dfrac{sen(x)}{1+\ln(sen(x))}$

P. $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$

Q. $y = \ln\left(\dfrac{x\ln(x)-1}{x\ln(x)+1}\right)$

R. $y = \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\ln(x)}$

S. $y = arctg\left(\dfrac{x^{x}-x^{-x}}{2}\right)$

2. Analizar la posibilidad de obtener la derivada en cada una de las siguientes funciones (demostrando en cada caso):

   a. $y = \ln|x|; x \neq 0$

   b. $y = |x|$

   c. $y = |x|.x$

   d. $y = \begin{cases} 1-x; x \leq 0 \\ e^{-x}; x > 0 \end{cases}$

3. Hallar la derivada enésima de las funciones siguientes, y cuando sea posible construir una fórmula:

   a. $y = (c+dx)^{n}$

   b. $y = \cos(2x)$

   c. $y = e^{-x^2}$

   d. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

   e. $y = \ln(1-x)$

4. Demostrar si cada una de las funciones enunciadas seguidamente, satisfacen a las respectivas ecuaciones diferenciales:

a. $y=\frac{x^2+2x+2}{2}$ satisface a: $1+(y')^2=2.y.y''$?

b. $y=0.5x^2.e^x$ satisface a: $y''-2y'+y=e^x$?

c. $y=(1+x^2).(c+e^x)$ satisface a: $y'-\frac{2xy}{x^2+1}=e^x.(1+x^2)$?

d. $y=C_1.e^x+C_2.e^{-2x}$ satisface a: $y''+3y'+2y=0$?

e. $y=e^{2x}.sen(5x)$ satisface a: $y''-4y'+29y=0$?

f. $y=x^n.[C_1.\cos(\ln(x))+C_2.sen(\ln(x))]$ satisface a:
$x^2y''+(1-2n).x.y'+(1+n^2).y=0$?

5. Hallar las Derivadas de Orden Superior indicadas:

a. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$; Cuarto Orden

b. $y=(1+x^2).arctg(x)$; Tercer Orden

c. $y=a.ch\left(\frac{x}{a}\right)$; Sexto Orden

d. $y=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$; Tercer Orden

6. En las funciones siguientes, hallar las Derivadas Implícitas indicadas:

a. $y=2x^3+3x^5+6x^2$; hallar x'_y

b. $y=4x^2-\frac{\cos(x)}{4}+sen^2(x)$; hallar x''_{yy}

c. $y=x^2+2e^x$; hallar x'''_{yyy}

7. Hallar : $y'=\frac{dy}{dx}$, en las Funciones Implícitas que se dan a continuación:

a. $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$

b. $x^y-y^x=0$

c. $tg(y)=x.y$

d. $x.sen(y)+y.sen(x)=0$

e. $x.y = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$

f. $e^x + e^y - 2^{x.y} - 1 = 0$

g. $sen\left(y - x^2\right) - \ln\left(y - x^2\right) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$

h. $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 0$

i. $x^{y^2} + y^2.\ln(x) - 4 = 0$

j. $x^2.sen(y) + y^3.\cos(x) - 2x - 3y + 1 = 0$

k. $\ln(x) + e^{\frac{y}{x}} = 0$

l. $\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} + \left(y^2\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{3}}$

m. $arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

8. Determinar en las funciones dadas paramétricamente, las derivadas indicadas:

a. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{a.sen(t)}{1 + b\cos(t)} \\ y = \frac{a.\cos(t)}{1 + b\cos(t)} \end{array}\right\}; \frac{dy}{dx}$

b. $\left\{\begin{array}{l} x = \ln\left(1 + t^2\right) \\ y = t - arctg(t) \end{array}\right\}; \frac{dy}{dx}$

c. $\left\{\begin{array}{l} x = a.[\cos(t) + t.sen(t)] \\ y = a.[sen(t) - t.\cos(t)] \end{array}\right\}; \frac{dy}{dx}$

d. $\left\{\begin{array}{l} x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\right) \\ y = arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\right) \end{array}\right\}; \frac{dy}{dx}$

e. $\left\{\begin{array}{l} x = arcsen\left(t^2 - 1\right) \\ y = \arccos(2t) \end{array}\right\}; \frac{dy}{dx}$

f. $\left\{\begin{array}{l} x = arcsen(t) \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{array}\right\}; y''_{xx}$

9. Hallar el valor de y’’ en x = 1, para la ecuación: $x^3 + 5x + y - 5 - 2x^2y^2 = 0$, sabiendo que $y''(1) = 1$.