Definición:
Dada una sucesión $\{a_n\}$, cuyos términos son números reales, se llama Serie Infinita o simplemente Serie a la expresión:

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n + \ldots$$

En general: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

donde: a_i: Término de la serie.
a_n: Término general de la serie.

SUCESION DE SUMAS PARCIALES:

Dada una serie: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, se puede obtener una sucesión de sumas parciales de la siguiente forma:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = S_2 + a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

De tal manera, se obtiene la sucesión: $\{S_n\}$.

Definición:
Una serie infinita, o simplemente serie, se denomina Serie Convergente sí y solo sí su sucesión de sumas parciales es convergente; esto es: si existe: $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, entonces el límite es finito.
Si la sucesión de sumas parciales es divergente, entonces la serie es Divergente, entonces toda serie no convergente es divergente.

<u>Ejemplo</u>:
Sea la serie: $\sum_{i=1}^{\infty} (1/2^{i-1})$

La sucesión de sumas parciales está dada por:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + (1/2) = 3/2$$
$$S_3 = (3/2) + (1/4) = 7/4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = 1 + (1/2) + (1/4) + \ldots + (1/2^{i-1})$$

Se observa que S_n es una progresión geométrica de razón $q = 1/2$; de tal forma:

$$S_n = [a_0 \cdot (1 - q^n)]/(1 - q)$$

Tomando límite al término general de la serie, resulta:

$$\lim_{n \to \infty} (1/2^n) = 0 \qquad (1)$$

Ahora bien, la sucesión de sumas parciales permite obtener como resultado: $S = 2$ (2).
(2) indica que la sucesión de sumas parciales es convergente; en consecuencia, de (1) se desprende que la serie es convergente.

SERIES GEOMETRICAS:

La serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_o \cdot q^i$ constituye una serie geométrica de razón q, debido a que cada término se obtiene multiplicando al anterior por la razón q.
De tal forma S_n está dada por:

$$S_n = a_o + a_o q + a_o q^2 + \ldots + a_o q^n$$

en consecuencia:

$$S_n = [a_o \cdot (1 - q^n)]/(1 - q); \; q \neq 1$$

Tomando límite a esta última expresión resulta:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} a_o/(1 - q) - \lim_{n \to \infty} a_o \cdot q^n/(1 - q)$$

A esta expresión general se la debe analizar para los distintos valores de q:

a) Si $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = a_o \cdot (1 - q) = S$

b) Si $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \pm \infty$

c) Si $|q| = 1 \Rightarrow$ 1) Para $q = 1$: $\sum_{i=0}^{\infty} a_o \cdot q^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_o$

2) Para $q = -1$: $\sum_{i=0}^{\infty} a_o q^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_o \cdot (-1)^i$

$$S_1 = a_o$$
$$S_2 = a_o - a_o = 0$$
$$S_3 = 0 + a_o = a_o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{2n+1} = a_o \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = a_o$$
$$S_{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_{2n} = 0$$

Por consiguiente dada una serie de la forma: $\sum_{i=0}^{\infty} a_o q^i$, la misma es convergente si $|q| < 1$; en tanto que si $|q| \geq 1$, la serie es divergente.
En general si $|q| < 1$, $S_n = a_n/(1 - q)$.

por lo tanto: $S_n = \{1 \ . \ [1 - (1/2)^n]\}/[1 - (1/2)]$
Luego: $S_n = 2 \ . \ [1 - (1/2)^n]$
Tomando límite a esta última expresión, resulta:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 2 \ . \ [1 - (1/2)^n] = 2$$

Este resultado indica que la sucesión es convergente.

Ejemplo:

Sea la serie: $\sum_{i=1}^{\infty} i$

La sucesión de sumas parciales está dada por:
$S_1 = 1$
$S_2 = 3$
$S_3 = 6$
......
$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = [n \ .(n + 1)]/2$

Tomando límite a S_n:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} [n \ .(n + 1)]/2 = \infty$$

Este resultado indica que la serie es divergente.

TEOREMA:

Si la serie $\sum_{i=1}^{n} a_i$ converge, entonces: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Esta es condición necesaria para la convergencia.

DEMOSTRACION:

Sean: $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Entonces: $a_n = S_n - S_{n-1}$

Si $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es convergente, entonces: $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ (suma)

$\lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S$

En consecuencia: $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

Corolario:

Si $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie es divergente.

Ejemplo:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2^n)$

TEOREMA:

Si la serie: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ es convergente (o divergente) y C es un número real cualquiera, entonces $\sum_{i=0}^{\infty} C\, .a_i$ es convergente (o divergente).

TEOREMA:

Si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ y $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ son dos series convergentes, entonces:

$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i \pm b_i)$ converge.

En el caso en que alguna de ellas diverja, la serie suma (o diferencia) también resultará divergente.

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS:

Una serie de términos a_n se denomina de términos positivos si, a partir de un cierto valor, esto es $\forall\ n > N$, los a_n son todos positivos.

Una serie de términos positivos es convergente sí y sólo sí la sucesión de sumas parciales está acotada; esto significa:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

Criterios para Convergencia de Series de Términos Positivos:

1) CRITERIO DE LA INTEGRAL:

Sea $y = f(x)$ una función obtenida al sustituir la variable n del enésimo término de la serie de términos positivos por una variable x, decreciente de x, para todo $x \geq 1$, entonces:

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$, convergen (o divergen) en forma simultánea.

Por lo tanto:

$$\boxed{\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} f(x)\, dx}$$

Si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ es finita, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge.

Si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ diverge, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge.

EJERCICIO SUGERIDO:

Analizar cuándo y dónde converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n^p)$.

2) CRITERIO DE COMPARACION:

1) Sean las series $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, de términos positivos, entonces:

$\forall$ i; $0 \le a_i \le b_i$ y $\sum b_i$ es convergente.

Esto implica que $\sum a_i$ es convergente.

DEMOSTRACION:

Sean: $T_n = a_1 + a_2 + \ldots . + a_n$

$S_n = b_1 + b_2 + \ldots . + b_n$

Por hipótesis: $\forall n \Rightarrow a_n \le b_n \Leftrightarrow T_n \le S_n$

Como $\sum b_n$ converge, entonces S_n está acotada por un valor K (por condición de convergencia). Entonces:

$S_n \le K$ pero como: $0 \le T_n \le S_n \le K$ y por ser T_n una sucesión creciente acotada por K, resulta que $\sum a_n$ es convergente.

2) Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. Si: $0 \le a_n \le b_n$ $\forall$ n y $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ también es divergente.

DEMOSTRACION:

Por reducción al absurdo, supóngase que $\sum b_n$ converge; pero, por hipótesis: $0 \le a_n \le b_n$ $\forall$ n. Entonces, a_n es convergente?. Es un absurdo, pues contradice a la hipótesis, luego $\sum b_n$ es divergente.

Ejemplo:

Analizar la convergencia de: $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n.2^n)$

Tomando límite al término general de la serie:

$$\lim_{n \to \infty} (1/n.2^n) = 0$$

El hecho de tomar límite no es condición suficiente, se analiza la convergencia, en este caso por Criterio de Comparación:

$1/n.2^n \le 1/2^n$: expresión válida $\forall$ $n \ge 1$; sabiendo que $1/2^n$ es el término general de una serie convergente, por ser $1/n.2^n$ el término general, menor o igual que el primero, resulta que:

$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n.2^n)$ es convergente.

3) CRITERIO DE D'ALEMBERT (o Criterio del Cociente):

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos, tal que:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n / a_{n-1}) = L$$

a) Si $L < 1$, Σa_n converge.

DEMOSTRACION:

Sea p un número tal que: $L < p < 1$.

Como por hipótesis, $\lim_{n\to\infty}(a_n / a_{n-1}) = L$, por definición:

Dado un entorno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, con $(L - \varepsilon) < L < p$, existe un número N tal que: $\forall\, n \geq N$:

$(a_n / a_{n-1}) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \Rightarrow (a_n / a_{n-1}) < (L + \varepsilon) < p$, $\forall\, n \geq N$

Resulta:

$$a_n < a_{n-1}.p \Rightarrow a_N < a_{N-1}.p$$
$$a_{N+1} < a_N.p < a_{N-1}.p^2$$
$$a_{N+2} < a_{N+1}.p < a_N.p^2 < a_{N-1}.p^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{N+q} < a_{N+q-1}.p < \ldots < a_{N-1}.p^{q+1}$$

Por el criterio de convergencia de series:

$$\Sigma a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+q} + \ldots <$$
$$< a_1 + \ldots + a_{N-1} + a_{N-1}.p + a_{N-1}.p^2 + \ldots + a_{N-1}.p^{q+1} + \ldots$$
$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}.\underbrace{(1 + p + p^2 + \ldots + p^{q+1} + \ldots)}_{\text{SERIE GEOMETRICA DE RAZON } p}$$

Por hipótesis, $L < p < 1$, luego la serie es convergente.

b) Si $L > 1$, Σa_n diverge.

DEMOSTRACION:

Sea $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ un entorno, tal que $(L - \varepsilon) > 1$.

Como:

$\lim_{n\to\infty}(a_n / a_{n-1}) = L \Rightarrow \forall\, n \geq N$: $(a_n / a_{n-1}) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Entonces: $\forall\, n \geq N$: $(a_n / a_{n-1}) > (L - \varepsilon) > 1 \Rightarrow a_n > a_{n-1}$

En consecuencia:

$$a_{N-1} < a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \ldots$$

Por lo tanto, la sucesión a_n no converge, pues toma valores muy grandes tendientes a infinito; luego, la serie Σa_n diverge.

c) Si $L = 1$, el criterio no decide la convergencia o divergencia.

DEMOSTRACION:

Por contraejemplos se demostrará el inciso:

1) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ (Armónica). En este caso, por demostración previa se sabe que se trata de una serie divergente. Analizando la convergencia mediante el criterio del cociente se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\{[1/n]/[1/(n - 1)]\} = \lim_{n\to\infty}(n - 1)/n = 1$$

2) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. En este caso, por demostración previa se sabe que se trata de una serie convergente.
Analizando la convergencia mediante el criterio del cociente se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\{[1/n^2]/[1/(n-1)^2]\} = \lim_{n\to\infty}(n-1)^2/n = 1$$

En el ejemplo 1, al igual que en el ejemplo 2, el valor del límite es igual a 1, sin embargo se conoce que el primer ejemplo corresponde a una serie divergente, en tanto que el segundo corresponde a una serie convergente; esto permite concluir que cuando el valor del límite es 1, el criterio no decide.

4) CRITERIO DE LA RAIZ (o Criterio de Cauchy):

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y además:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

a) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

<u>DEMOSTRACION</u>:

Sea $L < 1$, tal que $L < p < 1$.

Como: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, dado un entorno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, tal que $(L + \varepsilon) < p \Rightarrow \exists$ un N / $\forall n \geq N$, que cumple: $\sqrt[n]{a_n} \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ entonces: $\sqrt[n]{a_n} < (L + \varepsilon) < p$.

En consecuencia: $\forall n \geq N \Rightarrow a_n < p^n$

$$a_N < p^N$$
$$a_{N+1} < p^{N+1}$$
$$..........$$
$$a_{N+q} < p^{N+q}$$

Luego:

$$\sum a_n = a_1 + a_2 +.....+ a_{N-1} + a_N + a_{N+1} +.....+ a_{N+q} <$$
$$< a_1 + a_2 +.....+ a_{N-1} + p^N + p^{N+1} +.....+ p^{N+q} =$$
$$= a_1 + a_2 +....+ a_{N-1} + p^N \underbrace{(1 + p + p^2 +...+ p^q)}_{\text{SERIE GEOMETRICA DE RAZON } p \text{ POR HIPOTESIS: } L<p<1\text{, LUEGO ES CONVERGENTE}}$$

En consecuencia, por el Criterio de Comparación, la serie $\sum a_n$ resulta convergente.

b) Si $L \geq 1$; como: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, para un entorno de la forma: $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ con $(L - \varepsilon) > 1$, $\exists N$ / $\forall n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > (L - \varepsilon) > 1$
Luego: $\forall n \geq N$: $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$, $\forall n \geq N$

Por tanto: $\lim_{n\to\infty} a_n$ no converge a 0; esto indica que la serie $\Sigma\, a_n$ es Divergente.

c) Para demostrar el caso en el cual L = 1, se analizarán dos ejemplos:

1) Analizar la convergencia de $\Sigma\,(1/n)$ [se ha demostrado previamente que se trata de una serie divergente].

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}) \qquad (I)$$

Analizando el denominador de esta última expresión, se puede escribir: $\lim_{n\to\infty} [\ln(n)/n] = \ln(M)$
Aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} [\ln(n)/n] = \lim_{n\to\infty} [(1/n)/1] = 0 \therefore M = e^0 = 1$$

Por lo tanto, reemplazando en (I), resulta:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1} \qquad (1)$$

2) Analizar la convergencia de la serie $\Sigma\,(1/n^2)$ [previamente se ha demostrado que se trata de una serie convergente].

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1/n^2)} = \lim_{n\to\infty} 1/(\sqrt[n]{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 1/(n^{2/n}) = 1$$

En consecuencia:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1} \qquad (2)$$

Observando (1) y (2) se concluye que cuando L = 1, el Criterio de la Raíz no decide, por cuanto el primer ejemplo constituye una serie divergente, en tanto que el segundo ejemplo satisface una serie convergente, en ambos casos por análisis previos.

5) CRITERIO DE RAABE:

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie de términos positivos y sea además:
$\lim_{n\to\infty} n.[1 - (a_n/a_{n-1})] = L$

a) Si $L < 1$, la serie $\Sigma\, a_n$ es Divergente.

b) Si $L > 1$, la serie $\Sigma\, a_n$ es Convergente.

c) Si $L = 1$, el criterio no decide.

SERIES ALTERNADAS:

Una serie $\sum a_n$ recibe el nombre de ALTERNADA cuando sus términos son alternativamente positivos y negativos.

Ejemplo:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.(1/n) = 1 - (1/2) + (1/3) - (1/4) + \ldots\ldots$$

Criterio de LEIBNITZ:

Sea $\sum (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots.; \; a_n > 0$

Entonces: Una serie alternada es tal si la sucesión a_n es decreciente y si:

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ converge y a_n es decreciente.

$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

En el caso que converja, el resto (o residuo) de la serie es expresable mediante la acotación:

$$|R_n| \leq a_{n+1}$$

DEMOSTRACION:

Sean las sumas parciales S_{2n} (acumula número par de términos) y S_{2n+1} (acumula número impar de términos).

$S_2 = a_1 - a_2 = S_1 - a_2$

$S_3 = S_2 + a_3$

$S_4 = S_3 - a_4$

En general:

$$|S - S_n| < a_{n+1}$$

Se tienen:

$$S_{2n+2} = [S_{2n} + \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{> 0}] > S_{2n}: \text{ es creciente}$$

$$S_{2n+1} = [S_{2n-1} - \underbrace{(a_{2n} + a_{2n+1})}_{< 0}] < S_{2n-1}: \text{ es decreciente}$$

En consecuencia:

$$S_{2n-2} < S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} < S_{2n-1} < S_1$$

Esto significa que S_{2n} es creciente y está acotada superiormente por S_1, luego S_{2n} es convergente, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = S \quad (1)$$

En forma análoga S_{2n+1} es decreciente y está acotada inferiormente por S_2, luego S_{2n+1} es convergente, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = S' \quad (2)$$

Restando (1) y (2), resulta:

$$S - S' = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \text{(por ser decreciente)} = 0$$

$$\Rightarrow S = S' \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow S \neq S' \Rightarrow \Sigma\, (-1)^{n+1}\, a_n$: Diverge.

ERROR EN UNA SERIE ALTERNADA:

Sea $\Sigma\, (-1)^{n+1}\, a_n$, convergente a un valor S; entonces:

$$S_2 < S_{2n+2} \leq S \quad \text{o} \quad S \leq S_{2n+1} < S_{2n-1}$$

$$0 < S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$$

En forma análoga:

$$0 \leq S_{2n+1} - S < S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n}$$

Entonces: $|S - S_{2n}| < a_{2n+1}$

$$|S_{2n+1} - S| = |S - S_{2n+1}| < a_{2n}$$

$$\forall n:\ |S - S_{2n}| < a_{n+1} = |R_n|$$

Se concluye que el error en una serie alternada es menor que el primer término no tomado en cuenta.

SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES:

Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de signos positivos y negativos, se denomina serie de valores absolutos a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Defenición:
Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se dice que es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Teorema:
Si la suma $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

<u>DEMOSTRACION</u>:
Sea $b_n = a_n + |a_n| \Rightarrow b_n = 0$, o bien: $b_n = 2|a_n|$

$0 \leq b_n \leq 2|a_n|$: está acotada inferior y superiormente.

Entonces:
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \text{(por convergencia de } \sum |a_n| \text{ por hipot.)}$$

Por aplicación del Criterio de Comparación: $\sum b_n$ también converge.

Como: $a_n = b_n - |a_n|$, resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \qquad (1)$$

(1) indica una diferencia de series convergentes, por lo tanto resulta que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Si la serie CONVERGE ABSOLUTAMENTE $\Rightarrow$ CONVERGE.
La recíproca no se verifica; esto es: si la serie converge no implica que la serie de valores absolutos converja.

Ejemplo:

Sea: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.(1/n) = 1 - (1/2) + (1/3) - \ldots + (-1)^{n+1}.(1/n)$

Mediante aplicación del Criterio de LEIBNITZ, resulta que:

1) $\forall n$: $(1/n) > [1/(n+1)]$: Sucesión Decreciente.

2) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (1/n) = 0$

De acuerdo a esto, la serie converge.
Aplicando el concepto del módulo, se llega a que:

$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1}.(1/n)|$ es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$, este último caso corresponde a la serie armónica, sobre la cual se sabe que es divergente.
En este caso en el cual la serie converge, pero la serie de los valores absolutos no, se tiene una serie CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.

Ejemplo:

Estudiar la convergencia de la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}.(1/2^n)$

Analizando la serie de valores absolutos: $\sum_{n=0}^{\infty} |(1/2^n)|$, se obtiene una serie geométrica de razón $r = 1/2$, que por ser menor que 1 indica convergencia; por lo tanto:

$\sum_{n=0}^{\infty} |(1/2^n)|$ converge, en consecuencia: $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2^n)$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.-

SERIES DE FUNCIONES:

Se denomina SERIE DE FUNCION a una serie cuyos términos son funciones tal que:

$$\mu_1(x) + \mu_2(x) + \ldots + \mu_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x)$$

donde $x \in$ a Funciones Reales.