Análisis Matemático I

Unidad Nº 0: Funciones Elementales básicas

Práctica 0.1: Funciones Pares e Impares

Un breve repaso de Ecuación de la Recta

Ecuaciones de la Recta

Ecuación Punto - Pendiente

Si son conocidos un punto $P(x_0, y_0)$ y un número real m (la pendiente de la recta), su ecuación quedará denotada por: $y = m(x – x_0) + y_0$ de modo tal que: $y = mx – mx_0 + y_0$. Haciendo $b = – mx_0 + y_0$ (que es la ordenada al origen), queda establecida la forma: $y = mx + b$.

Ecuación de la Recta entre dos puntos

Si son conocidos dos puntos de la recta: $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$, se determina la pendiente m considerando:

$m = (y_1 – y_0) / (x_1 – x_0)$

A partir de esta determinación, se procede igual que en la Ecuación Punto – Pendiente tomando cualquiera de los dos puntos P ó Q.

Ecuación General de la Recta

Toda ecuación de la Recta puede ser llevada a la forma General: $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$.

Ecuación Canónica de la Recta

A partir de le Ecuación General, se obtiene la Ecuación Canónica: $\boldsymbol{x/a + y/b = 1}$.

Condición de Paralelismo y Perpendicularidad entre dos Rectas

Sean dos rectas L_1: $y = m_1x + b_1$ y L_2: $y = m_2x + b_2$

- **L_1 y L_2 son paralelas sí y sólo sí, $m_1 = m_2$**
- **L_1 y L_2 son perpendiculares sí y sólo sí, $m_1 = -1/m_2$**

EN CADA CASO JUSTIFICAR LA RESPUESTA

1- Dados los puntos A = (0, 0), B = (-1, 3), C = (-1, 1) determinar cuáles de ellos pertenecen a la gráfica de la función y = $-x$ + 2.

2- Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -1) y tiene pendiente 3. Trazar la gráfica.

3- Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, -1) y (-3, 1)

4- Dado el punto P = (-2, 2) y la recta *r* de ecuación $-3x + y = 2$ se pide:

a) Escribir la ecuación de la recta que pasa por P y es paralela a la recta *r*

b) Escribir la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta *r*

5- Graficar las siguientes curvas.

a) $x = 2$ b) $y= -1$ c) $x= 0$ d) $y= 0$

¿Cuáles de ellas son funciones de x?

6- Trazar las gráficas de las siguientes funciones.

- $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- $f(x) = -2x^2 - 4x - 4$
- $f(x) = x^2/3 + (2/3)x + 1$

7-

- Esbozar la gráfica de las siguientes funciones exponenciales. Indicar dominio e imagen.

$f(x) = e^x$ $g(x) = (1/2)^x$

- A partir de las gráficas de *f* y *g* construir, por simetría, la gráfica de sus respectivas funciones inversas. Indicar dominio e imagen.

8- Calcular

$a)\ \log_2 8$ $c)\ \log_3 3$ $e)\ \ln e + \ln e^2$

$b)\ \log_4 \frac{1}{16}$ $d)\ \ln 1$ $f)\ \log_2 6 - \log_2 3$

9-Esbozar las gráficas de las siguientes funciones potencia. ¿Cuáles de ellas corresponden a funciones pares o impares?

a) $f(x) = x^{1/2}$

b) $f(x) = x^{5/3}$

c) $f(x) = x^{-1/4}$

d) $f(x) = x^{-6/5}$

Breve repaso sobre Secciones Cónicas

La combinación de la Geometría y el Álgebra conforma la base de la Geometría Analítica.

Definiciones

Circunferencia

Una Circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **Centro** de la Circunferencia, y a la distancia constante de dichos puntos se le denomina **Radio**. Por lo tanto la **Ecuación de una Circunferencia** con centro en el punto de coordenadas (h, k) y radio r, es:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

En el caso particular que la Circunferencia está centrada en el Origen de coordenadas (0, 0), la ecuación se reduce a:

$x^2 + y^2 = r^2$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$

Parábola

La parábola es el conjunto de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado **foco**, y una recta fija llamada **directriz**. La ecuación de una parábola con su foco en $(0, p)$ y directriz $y = -p$ es:

$x^2 = 4py$ *(Eje Focal en el eje de ordenadas, y vértice en el Origen de Coordenadas)*

La ecuación de una parábola con su foco en $(p, 0)$ y directriz $x = -p$ es:

$y^2 = 4px$ *(Eje Focal en el eje de abcisas, y vértice en el Origen de Coordenadas)*

En los casos generales en que el Vértice tiene coordenadas (h, k) distintas del Origen, las respectivas ecuaciones son:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ *(Eje Focal paralelo al eje de ordenadas)*

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ *(Eje Focal paralelo al eje de abcisas)*

ECUACIONES GENERALES DE LA PARÁBOLA:

$\boldsymbol{y^2 + Dx + Ey + F = 0}$ *(Eje Focal paralelo al eje de abcisas)*

$\boldsymbol{x^2 + Dx + Ey + F = 0}$ *(Eje Focal paralelo al eje de ordenadas)*

Elipse

Una elipse es el conjunto de puntos del plano para el que es constante la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos**. Siendo que **2a** es la constante a la que se refiere la definición, y que los focos están en (c, 0) y (-c, 0), entonces, si $b^2 = a^2 - c^2$, la ecuación de la elipse es:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Donde la elipse está entrada en el Origen de Coordenadas (0, 0)

En los casos generales en que el Vértice tiene coordenadas *(h, k)* distintas del Origen, la respectiva ecuación es:

$(x - h)^2/a^2 + (y - k)^2/b^2 = 1$

ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE: $\boldsymbol{Ax^2 + Bx^2 + Cx + Dy + F = 0}$

Hipérbola

Una hipérbola es el conjunto de puntos del plano para el que es constante el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos**. Si **2a** es la constante a la que se refiere la definición, y si los focos están en *(c, 0)* y *(-c, 0)* entonces, si $b^2 = c^2 - a^2$ la ecuación de la hipérbola es:

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

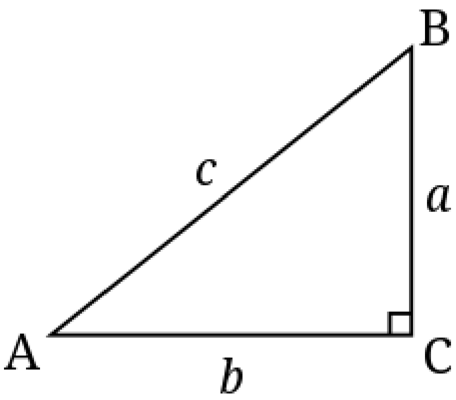
Donde la hipérbola está entrada en el Origen de Coordenadas (0, 0)

En los casos generales en que el Vértice tiene coordenadas *(h, k)* distintas del Origen, la respectiva ecuación es:

$(x - h)^2/a^2 - (y - k)^2/b^2 = 1$

ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA: $\boldsymbol{Ax^2 - Bx^2 + Cx + Dy + F = 0}$

Un breve repaso de Trigonometría



Definiciones

En un triángulo rectángulo, se define la relación **seno** de un ángulo, como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa. Entonces: sen(A) = a / c y sen(B) = b / c

Se define la relación **coseno** de un ángulo, como el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa. Entonces: cos(A) = b / c y cos(B) = a / c

Se define la relación **tangente** de un ángulo, como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. Entonces: tg(A) = a / b y tg(B) = b / a

Se define la relación **cotangente** de un ángulo, como el cociente entre el cateto adyacente y el cateto opuesto. Entonces: ctg(A) = b / a y ctg(B) = a / b

Se define la relación **secante** de un ángulo, como el cociente entre la hipotenusa y el cateto adyacente. Entonces: sec(A) = c / b y sec(B) = c / a

Se define la relación **cosecante** de un ángulo, como el cociente entre la hipotenusa y el cateto opuesto. Entonces: csc(A) = c / a y csc(B) = c / b

Por lo tanto se verifica:

sen(A) = 1 / csc(A), cos(A) = 1 / sec(A), y tg(A) = 1 / ctg(A)

tg(A) = sen(A) / cos(A)

$\text{sen}^2(A) + \cos^2(A) = 1$ **(Relación trigonométrica fundamental)**

Coseno de la suma y diferencia de ángulos

cos(A + B) = cos(A)cos(B) – sen(A)sen(B)

cos(A – B) = cos(A)cos(B) + sen(A)sen(B)

Seno de la suma y diferencia de ángulos

$\mathrm{sen}(A + B) = \mathrm{sen}(A)\cos(B) + \mathrm{sen}(B)\cos(A)$

$\mathrm{sen}(A - B) = \mathrm{sen}(A)\cos(B) - \mathrm{sen}(B)\cos(A)$

Seno y Coseno del ángulo doble

$\mathrm{sen}(2A) = 2\mathrm{sen}(A)\cos(A)$

$\cos(2A) = \cos^2(A) - \mathrm{sen}^2(A)$

Coseno y Seno de la mitad de un ángulo

$\cos(A/2) = \pm ((1 + \cos(A)) / 2)^{1/2}$

$\mathrm{sen}(A/2) = \pm ((1 - \cos(A)) / 2)^{1/2}$

Tangente de la Suma y Diferencia de Ángulos

$\mathrm{tg}(A + B) = (\mathrm{tg}(A) + \mathrm{tg}(B))/(1 - \mathrm{tg}(A)\mathrm{tg}(B))$

$\mathrm{tg}(A - B) = (\mathrm{tg}(A) - \mathrm{tg}(B))/(1 + \mathrm{tg}(A)\mathrm{tg}(B))$

Tangente del doble de un Ángulo

$\mathrm{tg}(2A) = (2\mathrm{tg}(A)) / (1 - \mathrm{tg}^2(A))$

Tangente de la mitad de un Ángulo

$\mathrm{tg}(A/2) = \pm ((1 - \cos(A)) / (1 + \cos(A)))^{1/2}$

Análisis Matemático I

Unidad Nº 0: Funciones Elementales básicas

Práctica 0.2: Gráficas que se obtienen por simetría y/o por traslación

1- Esbozar las gráficas de las siguientes funciones y determinar las eventuales intersecciones con los ejes coordenados. ¿Cuáles de ellas corresponden a funciones pares o impares?

a) $f(x) = sen(x)$

b) $f(x) = cos(x)$

c) $f(x) = | x |$

d) $f(x) = 1/x$

2- Esbozar las gráficas de las siguientes funciones a partir de simetrías y/o traslaciones

a) $f(x) = ln(x – 2)$

b) $f(x) = e^x – 2$

c) $f(x) = e^{x – 2}$

d) $f(x) = 1 + cos(x)$

e) $f(x) = sen(x - 1)$

f) $f(x) = - arctg(x)$

3-Esbozar las gráficas de las siguientes funciones e indicar su dominio de definición.

a) $f(x) = 2 + | x |$

b) $f(x) = 1 / (2 - x^2)$

c) $f(x) = (x – 1)^{1/2}$

d) $f(x) = (x + 1)^{1/3}$

e) $f(x) = e^{-|x|}$

4- Grafica en GeoGebra las siguientes funciones, y explica matemáticamente lo que ocurre:

a) $f(x) = (x + 1)^{1/3}$

b) $f(x) = -(x + 1)^{1/3}$

c) $f(x) = |(x + 1)^{1/3}|$

d) $f(x) = (|x| + 1)^{1/3}$

5- Esbozar las gráficas de las siguientes funciones indicando una secuencia que permita obtenerlas

$a) f(x) = \left|(x-1)^{\frac{7}{3}}\right|$ $\quad$ $b)\ f(x) = \ln(1-x)$ $\quad$ $c) f(x) = \ln(2+|x|)$

Análisis Matemático I

Unidad Nº 0: Funciones Elementales básicas

Práctica 0.3: Expresiones Algebraicas. Polinomios. Operaciones Algebraicas. Conjuntos Numéricos.

1 - Decide si las siguientes expresiones algebraicas son polinomios o no. En caso afirmativo, señala cuál es su grado, coeficiente principal y término independiente.

a) $x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 5$
b) $x^{1/2} + 7x^2 + 2$
c) $2/x^2 - x - 7$
d) $x - 2x^{-3} + 8$
e) $x^3 - x + 7/2$

2 - Hallar una descomposición en factores de la forma $(x - a)$, para los siguientes polinomios:

a) $x^2 - x + ¼$
b) $x^2 - 49$
c) $x^2 + x - 2$
d) $x^3 + 5x^2 - 6x$
e) $x^4 - 5x^2 + 4$

3 - Factorizar los polinomios:

a) $2xy + 8x + 3y + 12$
b) $5xz - 5yz - x + y$

4 - Sean los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x + 1$$

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$$

$$R(x) = 2x^4 - 2x - 2$$

$$S(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20$$

$$T(x) = x^2 + 3x - 2$$

Efectuar los siguientes cálculos. En el caso de los cocientes de polinomios, establecer qué condiciones deben tenerse en cuenta para que dichas operaciones sean posibles:

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) Q(x).R(x)
c) S(x)/T(x)

5 – Sin efectuar las divisiones, hallar el resto de las siguientes operaciones:

$$\frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10}{x + 2}$$

$$\frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10}{x + 2}$$

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x - 3}$$

6 - Marca con una X a qué conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números:

	Naturales	**Enteros**	**Racionales**	**Irracionales**	**Reales**	**Complejos**
45						
4,23333….						
$\sqrt{7}$						
4,5308						
8 + 9i						
π						
-12						
1 + $\sqrt{2}$						

7 - ¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta? Explicar por qué.

a) $\sqrt{a^2 + b^2 = a + b}$
b) $\sqrt{a^2 - b^2 = a - b}$
c) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 = a + b}$

d) $\sqrt{x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y}}$

8 – Racionalizar los denominadores de:

a) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{3+4\sqrt{3}}{5\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$

9 – Simplificar:

a) $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}$

b) $\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

10 – Sean los siguientes números complejos:

$Z_1 = 3 – 2i$

$Z_3 = -4 – 7i$

$Z_4 = 6 – 5i$

$Z_5 = 1 + i$

Realizar los siguientes cálculos:

a) $Z_3 – 3Z_4$

b) $Z_1 . Z_3$

c) $-Z_3 / Z_4$

d) $(Z_4)^2$

e) $\sqrt{Z_5}$

Análisis Matemático I

Unidad Nº 0: Funciones Elementales básicas

Práctica 0.4: Estudio Esquemático de la Gráfica de una función

A partir de las siguientes gráficas, indicar dominio, imagen, paridad, intersecciones con los ejes, signo de la función y eventuales asíntotas.