Unidad 2: Ecuaciones

Álgebra y Lógica Computacional
UNLu
2021

Apunte que involucra teoría y que intercala los ejercicios de la práctica 2 con algunas respuestas y explicaciones de resolución.

El pensamiento matemático es un tema de estudio de la humanidad desde las civilizaciones más antigüas. Nosotros y nosotras hemos estudiado matemática desde los primeros años de educación formal. Inclusive en el nivel inicial (jardín de infantes) hay trabajos que intentan desarrollar el pensamiento matemático. A partir de la escuela primaria, volcamos muchos esfuerzos en empezar a escribir esas ideas matemáticas, esto no es un capricho, los razonamientos matemáticos previos a la escritura son razonamientos poco potentes.

La escritura, así como la escritura en español nos permite plasmar ideas y conceptos para la posteridad e, inclusive para nosotrxs mismxs, pero a partir de allí se pueden desarrollar cuestiones más elaboradas. En Matemática es igual. La posibilidad de escribir matemática nos permite trabajar con razonamientos más elaborados. Escribir Matemática no es más que lo que hacemos desde muy pequeños. Un ejemplo de esto es los signos de suma $(+)$, resta $(-)$ o cualquier otra operación. Pero a medida que los conceptos se complejizan, la escritura tiene que acompañar al desarrollo.

En un principio, solo con símbolos simples como $+$ o $-$ podemos representar algunos pensamientos y situaciones simples como por ejemplo: *si tengo cuatro caballos y le doy tres a mi hermana, entonces me quedo con uno*; esto se puede simbolizar $4-3=1$. Este tipo de razonamientos que parecen muy sencillos son el resultado de muchos años de desarrollo de conceptos y de lenguaje. Nosotrxs, como resultado de haber estudiado esto desde muy pequeñxs lo tenemos internalizado y nos parece natural, pero tengamos en claro que esto no es así, es resultado de la educación.

Ahora bien, qué ocurre si queremos considerar la misma situación pero planteada así. *Si tengo un caballo, le doy alguna cantidad de caballos a mi hermana y luego de eso, me queda un caballo ¿cuántos caballos le dí a mi hermana?*. Esta situación no puede plasmarse de manera escrita de la manera en que lo hicimos antes, aparece la idea de *incógnita*, de algún valor que debemos descubir. Para esto, el leguaje que suele utilizarse es el de denominar x a ese valor desconocido. En este caso sería $4-x=1$. Este caso, la ecuación es muy simple, al punto de que podríamos haberla resuelto aun sin haberla escrito. Claramente la respuesta es tres, para usar la escritura que hemos propuesto, $x=3$ es solución de la ecuación.

Resolver una ecuación quiere decir hallar el **conjunto** de todos los valores que al ser reemplazados en la incógnita hacen que la igualdad se satisfaga (***conjunto solución*** o simplemente ***solución***).
Observar que el *conjunto solución* podría ser el *conjunto vacío* (que se denota con el símbolo $\emptyset$), que una ecuación tenga como solución al conjunto vacío quiere decir que sabemos que ningún valor de la incógnita satisface la igualdad; obtener ese resultado es, también, haber resuelto la ecuación.

A continuación se propone resolver el primer punto de la práctica. Debajo del listado de ejercicios se resuelven algunos, pero se sugiere intentar resolver sin mirar las resoluciones. Luego se puede verficar.

1. Resolver "mentalmente" (sin despejar la incógnita) las siguientes ecuaciones con incógnita real x:

   (a) $x - 3 = 0$
   (b) $x + 5 = 2$
   (c) $x - \pi = 0$
   (d) $x + \sqrt{2} = 3$
   (e) $2x + 1 = 5$
   (f) $2x + 1 = 0$
   (g) $x^2 = 16$
   (h) $4x + 1 = 3$
   (i) $x + 1 = x + 2$
   (j) $x + a = 0$
   (k) $\sqrt{x + 2} = \sqrt{5}$
   (l) $x + b = 0$
   (m) $ax + b = 0$
   (n) $\sqrt{x} + 1 = 10$
   (o) $5x = 0$
   (p) $x + 1 = x + 1$

   Como hemos dicho, resolveremos solo algunos de los puntos anteriores (tengamos muy presente la consigna: **resolver mentalmente**):

   - $x + 5 = 2$. Estamos buscando un número tal que al sumarle 5 nos de como resultado 2. Es claro que el número que buscamos tiene que ser menor que cero, ya que dos es menor que cinco. El número buscado es -3 (el opuesto de tres), y es claro que es el único que cumple, por lo que **la respuesta es** $S = \{-3\}$: .
   - $x + \sqrt{2} = 3$. Buscamos un número que al sumarle $\sqrt{2}$ nos da como resultado 3. En casos como este necesitamos desprendernos de la idea de que un número es un solo símbolo, en realidad un número puede escribirse como una o varias operaciones lo más sencillas posibles. Por ejemplo, en este caso, el número que buscamos es el $3 - \sqrt{2}$; esto es **un número**, aunque esté escrito de esta manera. Observemos que si al número $3-\sqrt{2}$ le sumamos $\sqrt{2}$, nos da como resultado el número 3. Es decir que $x = 3 - \sqrt{2}$ es una solución. Como este número es el único que satisface, **la respuesta es** $S = \{3 - \sqrt{2}\}$.
   - $x^2 = 16$. En este caso necesitamos encontrar el o los números tales que al elevarlos al cuadrado nos da como resultado 16. Hay un caso que posiblemente surja sin mucho problema, $x = 4$. El tema es recordar que, según lo que leyeron más arriba, resolver una ecuación es encontrar **todos** los valores de x que satisfacen. En este caso hay uno más, $x = -16$. Entonces, la solución de la ecuación es el conjunto con estos dos valores, y se escribe así: $S = \{-16; 16\}$.

- $x + a = 0$. En este caso aparecen dos letra, la x y la a. Hay que tener en cuenta que la consigna aclara que la incógnita es x, esto es un concepto que puede parecer simle, pero no lo es. La letra a es un oarámetro, pero no una incógnita. Esto quiere decir que hay que tratarla como si fuera un número más, solo que no sabemos cuál es. x, en cambio es el valor que tenemos que identificar para que la igualdad se cumpla. En este caso, entonces, para que la igualdad de cero, x debe tomar el valor opuesto a a, es decir $-a$. Por lo tanto la solución será $S = \{-a\}$.

Las ecuaciones pueden tener más de una incógnita. En general, cuando hay dos incógnitas, se las denomina x e y. La idea es la misma de antes, hay que pensar en valores que satisfagan la igualdad. Hay que observar que ahora cada par puede satisfacer o no, pero ya no será posible poner el foco en una sola de las incógnitas. Pensemos en un ejemplo concreto: $x + y = 10$. En este caso tenemos que la suma de dos números da como resultado 10. una posibilidad es que $x = 1$ y que $y = 9$, pero es importante identificar que es el par 1 y 9 el que satisface la igualdad. Ambos valores por separado no nos dicen nada. Es entonces que esto o escribios así: $(1; 9)$, siempre el primer número corresponderá a la x y el segundo a la y, esto es una convención, es decir, un acuerdo generalizado que hacemos para entender cómo escribimos. Es importante observar que hay muchos pares de números que satisfacen la igualdad, por ejemplo $(5; 5)$, $(0; 10)$, $(-15; 25)$, $(\sqrt{3}; 10 - \sqrt{3})$; les proponemos que hagan las verificaciones de estos ejemplos. Está claro que hay infinitos pares posibles, es por eso que, por el momento, no podremos escribir *la solución*, sino solo algunos pares que satisfagan.

En este sentido es que se propone la actividad siguiente:

2. Para cada una de las siguientes ecuaciones con hasta dos incógnitas reales x e y hallar, cuando sea posible, al menos cinco pares (x, y) que pertenezcan a la solución (al conjunto solución).

   (a) $x + y = 15$
   (b) $x + y = 1$
   (c) $xy = 12$
   (d) $x + 2y = 3$
   (e) $x = y$
   (f) $\pi x = y$
   (g) $x^2 = y$
   (h) $x^2 = y^2$
   (i) $2x^2 = y^2$
   (j) $(x + 1)(y + 2) = 0$
   (k) $(x + y)(2x - y) = 0$
   (l) $x(x + y) = 0$
   (m) $(x + 5)0 = 2$
   (n) $(x + 5)0 = 0$

Nuevamente vamos a elegir algunos para resolver.

- $x + 2y = 3$. La primera estrategia que podemos usar es probar poner algún valor que se nos ocurra en alguna de las incógnitas: por ejemplo, si $x = 1$, entonces la ecuación quedará $1 + 2y = 3$, de lo que se puede concluir sin mucha vuelta que y también tiene que valer 1, es decir, $1 + 2.1 = 3$; esto quire decir que el par $(1; 1)$ es uno de los que satisface la igualdad. Busquemos otro par. Si $y = 0$, entonces queda la ecuación $x + 2.0 = 3$, es decir que para cumplir con la igualdad tenemos que reemplazar a x con 3, es decir que $3 + 2.0 = 3$, según la nomenclatura que venimos usando, el par $(3; 0)$ es otro que satisface. Hasta acá tenemos dos pares, a consigna nos pide 5, por lo que tendremos que repetir este tipo de razonamientos para encontrar los tres restantes.

- $x(x+y) = 0$. En este caso es conveniente mirar la ecuación con el ojo afinado y pensar qué es lo que se propone. En este caso tenemos una multiplicación que da como resultado 0. Para que una multiplicación de como resultado 0 debe ocurrir que alguno de los factores sea cero, por ejemplo, si $x = 0$, entonces nnos queda $0.(0 + y) = 0$ fijansé que no importa cuánto valga y, el resultado de esa igualdad será 0 porque aparece el 0 miltiplicando, por lo que cualquier par que tenga $x = 0$ sirve. Algunos ejemplos son: $(0; 4)$; $(0; 0)$; $(0; -7)$; $(0; \sqrt{5})$; $(0; \pi)$.

A continuación, más ejercicios.

3. Decidir si los valores de x indicados pertenecen a la solución de la ecuación en cada caso:

(a) $x = \frac{1}{2}$, $2x + 7 = 8$

(b) $x = \frac{1}{3}$, $3x + 4 = 1$

(c) $x = 3$, $(x - 4)(x - 3) = 0$

(d) $x = -\sqrt{2}$, $x^2 = 2$

(e) $x = \sqrt{2}$, $x^2 = 1$

(f) $x = 3$, $\dfrac{1}{x-3} = 1$

(g) $x = -4$, $\sqrt{x^2} = 4$

(h) $x = 0$, $\dfrac{x}{x} = 0$

(i) $x = 3$, $\dfrac{x-3}{x-3} = 1$

(j) $x = 4$, $x^3 + 4x - 1 = 0$

(k) $x = 4$, $\sqrt{3x - 3} = \dfrac{3}{x-3}$

(l) $x = -3$, $(x - 4)\sqrt{x - 3} = 1$

(m) $x = 3$, $(x - 4)\sqrt{x - 3} = 0$

(n) $x = \sqrt{2}$, $x + \sqrt{x} = 2$

A partir de lo que hemos resuelto hasta ahora, es evidente que conocer algunas reglas y propiedades nos ayudan a resolver total o parcialmente algunas ecuaciones.

Algunos resultados útiles para resolver ecuaciones:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0, a = b \Leftrightarrow a.c = b.c$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^n = b^n \Leftrightarrow |a| = |b|$ para n un número par.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$ para n un número impar.
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_0^+, \quad a^2 = b \Leftrightarrow |a| = \sqrt{b}$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_0^+, \quad |a| = b \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + 2.a.b + b^2 = (a + b)^2$ (propiedad conocida como *Cuadrado del Binomio* o *Trinomio Cuadrado Perfecto*).
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (propiedad conocida como *Diferencia de Cuadrados*).
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c.(a + b) = c.a + c.b$ (propiedad conocida como *Distributiva del producto respecto de la suma*).
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,\ ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (propiedad conocida como *Resolvente de la cuadrática*)

4. Utilizando ejemplos numéricos, estudiar la validez de cada uno de los resutados mostrados en el cuadro anterior.

5. Utilizando estrategias de resolución conocidas, resolver las siguientes ecuaciones (no realizar aproximaciones numéricas):

   (a) $(x + 4)\left(2x + \frac{1}{5}\right) = 0$

   (b) $\dfrac{2x + 1}{3} = \frac{5}{2}$

   (c) $x + \pi x = 2$

   (d) $\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{8}x + 1\right) = 0$

   (e) $x^3 = 2$

   (f) $x^4 = 16$

   (g) $\sqrt{5}x + \frac{\sqrt{\pi+2}-7}{12\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[12]{10}}$

   (h) $x^2 + 4 = 0$

   (i) $(x - 1)(x + 2) = 2$

   (j) $x^2 + x - 2 = 0$

   (k) $3x^2 - 5x = 2$

   (l) $3(x - 5)^2 - 5(x - 5) = 2$

   (m) $(x^2 + x - 2)(3x^2 - 5x) = 0$

   (n) $(-2x^2 + 4x + 6)(x - 3) = 0$

   (o) $\dfrac{x + 1}{3} = \frac{5}{2}$

   (p) $3x + \pi x = 2$

   (q) $x^4 = 7$

   (r) $(x + 1)(x + 9) = 2$

   (s) $2x^2 + 2x - 4 = 0$

   (t) $(-3x^2 + 3x + 7)(x + 1) = 0$

A continuación se explican algunas de las propiedades del cuadro anterior y se muestran resoluciones del punto 5.

Propiedades:

Vamos a hacer una lista de algunas propiedades y conocimientos que usaremos constantemente en la resolución de estos ejercicios. Los que no las conozcan deben leerlas con atención ya que sin ellas es casi imposible resolver las actividades.

- Si un producto da cero, es porque alguno de sus factores es cero. O sea:

$$\text{Si} \quad a.b = 0, \quad \text{entonces} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

$$\text{Si} \quad a.b.c = 0, \quad \text{entonces} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0 \quad \text{o} \quad c = 0$$

$$\vdots$$

etc.

- Resolución de ecuaciónes cuadráticas. Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $a.x^2 + b.x + c = 0$, donde a, b y c son números reales fijos llamados "coeficientes" y x es la incógnita cuyo valor (o valores) se pretende averiguar.

  Este tipo de ecuaciones se resuelven usando una fórmula muy conocida:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Ya veremos cómo se usa esta fórmula cuando resolvamos el problema 5) m).

- Algunas reglas con la "igualdad".
  - Si $a = b$ entonces $a+c = b+c$ para todo número c. Es decir, si dos términos son iguales y sumo un mismo número a ambos miembros, entonces los dos nuevos términos son iguales también.
  - Si $a = b$ entonces $a-c = b-c$ para todo número c. Es decir, si dos términos son iguales y resto un mismo número a ambos miembros, entonces los dos nuevos términos son iguales también.
  - Si $a = b$ entonces $a.c = b.c$ para todo número c. Es decir, si dos términos son iguales y multiplico ambos miembros por el mismo número, entonces los dos nuevos términos son iguales también.
  - Si $a = b$ entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ para todo número c distinto de cero. Es decir, si dos términos son iguales y divido ambos miembros por el mismo número (un número distinto de cero), entonces los dos nuevos términos son iguales también.

- "Despejes"

  La reglas anteriores, dan lugar a la técnica de "despejes" con la que uno logra "despejar" una incógnita de una ecuación. Normalmente uno aprende esa técnica en la escuela secundaria aunque no siempre se ve de donde sale. Por ejemplo uno aprende en la escuela que:

– Si un término está sumando, entonces “pasa” restando al otro lado de la igualdad.

– Si un término está restando “pasa” sumando.

– Si un número está multiplicando “pasa” dividiendo.

– Si un número está dividiendo “pasa” multiplicando.

Todo esto funciona siguiendo la regla de que primero se “pasan” las sumas y las restas y luego las multiplicaciones y divisiones.

Veamos como se deduce la primera de estas reglas de despejes a partir de las reglas con la igualdad que citamos antes. Despejemos la x de la ecuación $x + 6 = 10$

$$\begin{aligned} x + 6 &= 10 \\ x + 6 - 6 &= 10 - 6 \\ x &= 10 - 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Aquí restamos 6 a ambos miembros de la igualdad que, según las reglas de arriba, mantiene la igualdad y además nos permite dejar a la x sola (ya que $6 - 6 = 0$).

Notemos que si en la cuenta anterior pasamos directamente del primer paso al tercero (nos salteamos el paso de restar 6 a ambos miembros), el efecto visual es que el 6 que estaba sumando a la izquierda del signo igual, “pasó” restando a la derecha. Esa es la primer regla de despejes que figuran arriba.

$$\begin{aligned} x + 6 &= 10 \\ &\downarrow \\ x &= 10 - 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Las demás reglas se demuestran de forma similar (sumando, multiplicando o dividiendo a ambos miembros de la igualdad por el valor que queremos eliminar para dejar sola a la x).

- Módulo.

Hay un concepto que aparecerá varias veces en esta materia (y en otras que cursarán más adelante), se conoce como “módulo” o “valor absoluto”. Aquí veremos apenas una idea que nos bastará para resolver estos ejercicios. Luego, más adelante deberemos profundizar este concepto.

Primero, se simboliza el módulo de un número a de la siguiente forma: $|\,a|$.

La primera idea que podríamos dar es que el módulo vuelve positivo lo que se le pone adentro, por ejemplo $|-3| = 3$, $|\,3| = 3$, $|-7| = 7$, $|\,0| = 0$, $|\,5| = 5$, ... etc.

Para ver como aparece esto en nuestros ejercicios, comencemos haciendo esta pregunta Â¿cuánto debe valer x para que $|\,x| = 5$? O sea Â¿qué números satisfacen que su módulo es 5? Bueno, como el módulo solo vuelve positivo al número que está adentro, seguro sabemos que $|\,5| = 5$ y que $|-5| = 5$ Â¿hay algún otro número que satisfaga que su módulo sea 5? la respuesta es no, si pongo dentro del módulo cualquier otro número, el resultado ya no es 5 ($|-8| = 8 \neq 5$, $|\,20| = 20 \neq 5$, $|-0,4| = 0,4 \neq 5$, ...). Dicho de otra forma, si $|\,x| = 5$, entonces o $x = 5$ o $x = -5$.

Generalizando, tenemos nuestra primera regla con el módulo:

$\boxed{\text{Si } \quad |\,a| = b \quad (\text{con } \ b \geq 0\ ) \quad \text{entonces, o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a = -b}$

Ahora, hagamos otra observación. Hay que tener especial cuidado a la hora de simplificar la raíz con la potencia: ¿Es correcto simplificar de la siguiente manera? $\sqrt[\cancel{2}]{x^{\cancel{2}}}$, o $\sqrt[\cancel{3}]{x^{\cancel{3}}}$, o $\sqrt[\cancel{4}]{x^{\cancel{4}}}$, ... etc. Lamentablemente esto no siempre es correcto. En realidad ese tipo de simplificaciones valen si el número x es positivo o si la potencia y el índice de la raíz son el mismo número y ese número es impar. El problema aparece cuando tenemos x negativo y la potencia y el índice de la raíz son un mismo número par. Veamos con un mínimo ejemplo que pasa en ese caso:

Miremos $\sqrt[2]{(-3)^2}$. Si valiera simplificar el cuadrado con la raíz, llegaríamos a que $\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[\cancel{2}]{(-3)^{\cancel{2}}} = -3$ pero si hacemos la cuenta vemos que $\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[2]{9} = 3$. Ahora, acá hay algo que no funciona bien. Algo está mal. Por un lado llegamos a que $\sqrt[2]{(-3)^2} = 3$ y por otro lado llegamos a que $\sqrt[2]{(-3)^2} = -3$ Â¿Cual de las dos cuentas está bien?

La respuesta correcta es $\sqrt[2]{(-3)^2} = 3$, no vale simplificar la raíz con el cuadrado así nomás. O mejor dicho, se pueden simplificar pero no nos devuelve lo de adentro, si no <u>el módulo de lo de adentro!</u> , o sea $\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[\cancel{2}]{(-3)^{\cancel{2}}} = |\,-3| = 3$. Este problema pasa cada vez que quiera simplificar la potencia y la raíz cuando ambos son el mismo número y ese número es par

Resumiendo:

1Â°) Si n es un número impar, entonces $\sqrt[n]{x^n} = x$ (vale simplificar)
2Â°) Si n es un número par, entonces $\sqrt[n]{x^n} = |\,x|$ (vale simplificar pero no queda lo de adentro si no <u>el módulo de lo de adentro)</u>

Pasemos ahora a resolver los ejercicios:

Ejercicio 5)a) Resolver la ecuación $(x + 4).(2x + \frac{1}{5}) = 0$

<u>Resolución</u>:

Por la primera propiedad que vimos arriba, si $(x+4).(2x+\frac{1}{5}) = 0$ entonces o $x + 4 = 0$ o $2x + \frac{1}{5} = 0$. Despejando de esas dos ecuaciones el valor de x obtenemos:

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 \\ x &= 0-4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+\frac{1}{5} &= 0 \\ 2x &= 0-\frac{1}{5} \\ 2x &= -\frac{1}{5} \\ x &= -\frac{1}{5}:2 \\ x &= -\frac{1}{5}:\frac{2}{1} \\ x &= -\frac{1}{5}.\frac{1}{2} \\ x &= -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Obtenemos las respuestas

$$\boxed{S=\left\{-4;-\frac{1}{10}\right\}}$$

Ejercicio 5)b) Resolver la ecuación

$$\frac{2x+1}{3}=\frac{5}{2}$$

<u>Resolución</u>:
Vamos a hacerlo de dos formas distintas, usando solo las reglas con la igualdad y usando la técnica de despejes.

Usando solo las reglas de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3} &= \frac{5}{2} \\ \frac{2x+1}{3}\cdot 3 &= \frac{5}{2}\cdot 3 && \text{Multiplicamos por 3 a ambos miembros.} \\ 2x+1 &= \frac{15}{2} && \text{Simplificamos y hacemos las cuentas.} \\ 2x+1-1 &= \frac{15}{2}-1 && \text{Restamos uno a ambos miembros.} \\ 2x &= \frac{13}{2} && \text{Hacemos las cuentas.} \\ \frac{2x}{2} &= \frac{\frac{13}{2}}{2} && \text{Dividimos por dos a ambos miembros.} \\ & && \text{Hacemos las cuentas y obtenemos.} \\ x &= \frac{13}{2}.\frac{1}{2} \\ x &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Usando la técnica de despejes:

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+1}{3} &= \frac{5}{2} \\
2x+1 &= \frac{5}{2}\cdot 3 && \text{Pasamos el 3 multiplicando.} \\
2x+1 &= \frac{15}{2} \\
2x &= \frac{15}{2} - 1 && \text{Pasamos el 1 restando.} \\
2x &= \frac{13}{2} \\
x &= \frac{\frac{13}{2}}{2} && \text{Pasamos el 2 dividiendo.} \\
x &= \frac{13}{2}.\frac{1}{2} \\
x &= \frac{13}{4}
\end{aligned}
$$

De las dos formas obtenemos la solución

$$\boxed{S = \left\{\frac{13}{4}\right\}}$$

Ejercicio 5)f) Resolver la ecuación $x^4 = 16$

Resolución:

Aquí vamos a usar lo que vimos sobre el módulo. Si es necesario vuelvan a leerlo ya que usando esos resultados la resolución del problema es muy sencilla.

$$
\begin{aligned}
x^4 &= 16 \\
\sqrt[4]{x^4} &= \sqrt[4]{16} && \text{aplicamos raíz cuarta a ambos miembros de la igualdad} \\
|\,x| &= 2 && \text{aquí aplicamos la propiedad recuadrada más arriba}
\end{aligned}
$$

Por último, usando una regla del módulo recuadrada arriba obtenemos que $x = -2$ o $x = 2$.

Es decir que la solución es

$$\boxed{S = \{-2; 2\}}$$

Ejercicio 5)m) Resolver la ecuación $(x^2 + x - 2).(3x^2 - 5x) = 0$

Resolución:

Si $(x^2+x-2).(3x^2-5x) = 0$ entonces o $x^2+x-2 = 0$ o $3x^2-5x = 0$.

Nos encontramos con dos expresiones cuadráticas igualadas a cero. Resolvemos cada una por separado usando la fórmula que vimos arriba.

$$\text{Esta ecuación puede verse como} \qquad \begin{aligned} x^2+x-2 &= 0 \\ 1.x^2+1.x-2 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática con $a=1$, $b=1$ y $c=-2$.

Usando la fórmula obtenemos:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

que es una abreviatura de dos cuentas: $\frac{-1\ +\ 3}{2}$ y $\frac{-1\ -\ 3}{2}$

de donde obtenemos por ahora dos resultados: $x=1$ y $x=-2$

Ahora resolvemos la otra ecuación: $3x^2-5x=0$.

$$\text{Esta ecuación puede verse como} \qquad \begin{aligned} 3x^2-5x &= 0 \\ 3.x^2-5.x+0 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática con $a=3$, $b=-5$ y $c=0$.

Usando la fórmula obtenemos:

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4.3.0}}{2.3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-0}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{5 \pm 5}{6}$$

que es: $\frac{5\ +\ 5}{6}$ y $\frac{5\ -\ 5}{6}$

de donde obtenemos otros dos resultados: $x=\frac{5}{3}$ y $x=0$

Juntando todo, obtuvimos cuatro soluciones de la ecuación $(x^2+x-2).(3x^2-5x)=0$:
Resulta que los valores de x que satisfacen la igualdad son: $x=1$, $x=-2$, $x=\frac{5}{3}$ y $x=0$. Es decir que la solución de la ecuación es:

$$\boxed{S=\left\{-2;0;1;\frac{5}{3}\right\}}$$

Entre los conjuntos numéricos más conocidos con los que trabajaremos en esta práctica se encuentran los Naturales ($\mathbb{N}$), los Enteros ($\mathbb{Z}$), los Racionales ($\mathbb{Q}$) y los Reales ($\mathbb{R}$).

- Los **Números Naturales** son aquellos que se usan para contar $(1, 2, 3, \dots)$.
- Los **Números Enteros** contienen a los Naturales, los opuestos de los Naturales y al cero $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$.
- Los **Números Racionales** son todos aquellos que pueden expresarse como un cociente de Números Enteros ($\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$).
- Los **Números Reales** son todos los valores que pueden ser alguna medida (por jemplo, la medida de un segmento). Este conjunto contiene a los Racionales, pero hay muchos otros, entre los más conocidos está $\sqrt{2}$ (que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno), π (que es la mitad de la longitud de una circunferencia de radio uno). Desde el punto de vista de la representación, los Números Reales son todos los números decimales (con una cantidad finita o infinita de decimales, incluyendo entre estos a los enteros).

Observar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

6. Resolver las siguientes ecuaciones con incógnitas en los conjuntos indicados en cada caso:

(a) $2x + 2 = 5, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$
(b) $2x + 2 = 5, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(c) $2x + 2 = 5, \quad \text{con } x \in \mathbb{Q}$
(d) $2x + 2 = 5, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$
(e) $x^2 = 16, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$
(f) $x^2 = 16, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(g) $x^2 = 16, \quad \text{con } x \in \mathbb{Q}$
(h) $x^2 = 16, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$
(i) $(x + \frac{1}{3})(x + 5)(x + \sqrt{7}) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$
(j) $(x + \frac{1}{3})(x + 5)(x + \sqrt{7}) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(k) $(x + \frac{1}{3})(x + 5)(x + \sqrt{7}) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{Q}$
(l) $(x + \frac{1}{3})(x + 5)(x + \sqrt{7}) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$
(m) $(x + \frac{1}{\sqrt{3}})(x - 5)(x + 2) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$
(n) $x^2 + 2 = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(o) $x^2 - 7 = -3 \;, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(p) $(x^2 + 1)(x + 3) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$

A continuación ponemos a disposición las respuestas para que puedan corroborar los resultados.

(a) $S = \varnothing$
(b) $S = \varnothing$
(c) $S = \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$
(d) $S = \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$
(e) $S = \{4\}$
(f) $S = \{-4; 4\}$
(g) $S = \{-4; 4\}$
(h) $S = \{-4; 4\}$
(i) $S = \varnothing$
(j) $S = \{-5\}$
(k) $S = \left\{ -5; -\dfrac{1}{3} \right\}$

(l) $S = \left\{-5; -\dfrac{1}{3}; -\sqrt{7}\right\}$

(m) $S = \{5\}$

(n) $S = \varnothing$

(o) $S = \{-2; 2\}$

(p) $S = \{-3\}$

7. Utilizando estrategias de resolución vistas hasta el momento, resolver las siguientes ecuaciones (no realizar aproximaciones numéricas). Luego, de ser posible, verificar los resultados obtenidos:

   (a) $\dfrac{x+1}{x+1} = 0$

   (b) $\dfrac{x}{x} = 0$

   (c) $x\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1}$

   (d) $\dfrac{x+2}{x-2} = 2$

   (e) $x + 3 = \sqrt{x+3}$

   (f) $\dfrac{x}{x} = 1$

   (g) $\dfrac{x}{x+2} = -\dfrac{2}{x+2}$

   (h) $\dfrac{x^2+3x}{x} = 0$

   (i) $\sqrt{-2x-1} = x$

   (j) $\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x-1)} = 1$

   (k) $\dfrac{\sqrt{x}}{3} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

   A continuación ponemos a disposición las respuestas para que puedan corroborar los resultados.

   (a) $S = \varnothing$

   (b) $S = \varnothing$

   (c) $S = \{1\}$

   (d) $S = \{6\}$

   (e) $S = \{-3; -2\}$

   (f) $S = \mathbb{R} - \{0\}$

   (g) $S = \varnothing$

   (h) $S = \{-3\}$

   (i) $S = \varnothing$

   (j) $S = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

   (k) $S = \{9\}$

8. Explique en lenguaje coloquial por qué la ecuación $x = -\sqrt{x}$ tiene como solución al conjunto $\{0\}$.

Llamamos *dominio natural* de una ecuación al subconjunto de los Números Reales “más grande” que podrían ser solución de la ecuación, es decir aquellos para los cuales es posible *evaluar* la expresión de la ecuación para obtener un valor de verdad (V o F). En los casos en los que se proponga una ecuación y no se aclare cuál es su dominio, sobreentenderemos que el mismo es el *dominio natural.*

Algunos casos que hay que mirar con especal cuidado cuando pensamos en el dominio de ecuaciones son la *división* y la *raíz cuadrada.*

División

Para poder abordar una división tenemos que asegurarnos que lo que divide, es decir el *denominador*, es distinto de 0. Si estamos dividiendo por x, como sucede en el *item (a)* del *Ejercicio 9*, entonces podremos realizar esa operación con cualquier valor real de x distinto de 0.

En el *item (d)*, por ejemplo, tenemos un cociente donde el denominador es $x+5$. La división puede efectuarse entonces siempre que $x+5$ sea distinto de 0, por lo que x tiene que ser diferente a -5 (observar que por más que x esté dividiendo, x sí puede tomar el valor 0. Lo que tiene que ser distinto de 0 es la expresión $x+5$, o sea, el denominador).

Raíz Cuadrada

El dominio natural de la raíz cuadrada son los números reales mayores o iguales a cero. En otras palabras, no se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo, pero sí se puede calcular para números positivos y para el 0.

En general, si tomamos raíz con una potencia par, por ejemplo raíz cuarta, el dominio van a ser los números reales mayores o iguales a cero. Sin embargo, el dominio de $\sqrt[3]{x}$ son todos los números reales, es decir, podemos tomarle la raíz cúbica a cualquier expresión que podamos calcular.

A continuación la consigna:

9. Hallar el dominio natural de las siguientes ecuaciones:

   (a) $\dfrac{2}{x} = 3$

   (b) $3 + x = \sqrt{x}$

   (c) $x + 5 - \sqrt{5} = \dfrac{x}{2}$

   (d) $\dfrac{2}{x+5} = 6$

   (e) $1 = -\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$

   (f) $\dfrac{\sqrt{x}}{3} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

   (g) $\sqrt{\dfrac{2}{x+4}} = -3$

   (h) $\sqrt{-\dfrac{2}{x+4}} = \dfrac{2}{x}$

   (i) $\dfrac{x-3}{2x+1} = 3$

   (j) $-\dfrac{2}{x+4} = \dfrac{4}{x^2}$

   (k) $\sqrt{2x+4} = \dfrac{1}{x}$

   (l) $\sqrt[3]{x} = \dfrac{4}{x-3}$

   (m) $\sqrt{x} = \dfrac{4}{x-3}$

   A continuación ponemos a disposición las respuestas para que puedan corroborar los resultados.

   (a) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

   (b) $Dom = \mathbb{R}_{\geq 0}$

   (c) $Dom = \mathbb{R}$

   (d) $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$

   (e) $Dom = [0; 9) \cup (9; +\infty)$

   (f) $Dom = \mathbb{R}_{>0}$

   (g) $Dom = (-4; +\infty)$

   (h) $Dom = (-\infty; -4)$

   (i) $Dom = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

   (j) $Dom = \mathbb{R} - \{-4; 0\}$

   (k) $Dom = [-2; 0) \cup (0; +\infty)$

   (l) $Dom = \mathbb{R} - \{3\}$

   (m) $Dom = [0; 3) \cup (3; +\infty)$

10. Resolver las ecuaciones del ítem anterior, a excepción de las 9k, 9l y 9m.

    A continuación ponemos a disposición las respuestas para que puedan corroborar los resultados.

(a) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

(b) $S = \emptyset$

(c) $S = \{2\sqrt{5} - 10\}$

(d) $S = \left\{-\frac{14}{3}\right\}$

(e) $S = \{1,69; 5,30\}$

(f) $S = \{9\}$

(g) $S = \emptyset$

(h) $S = \emptyset$

(i) $S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

(j) $S = \emptyset$

A continuación desarrollamos algunas resoluciones vinculadas a los puntos 9 y 10:

Item (b)

$$3 + x = \sqrt{x}$$

Del lado izquierdo de la operación tenemos x+3; como a todo número real podemos sumarle 3, entonces esa operación puede realizarse para cualquier valor de x.

Del lado derecho tenemos una raíz cuadrada. Recordemos que el dominio natural de la raíz cuadrada eran los números reales mayores o iguales a cero, esto significa que x tiene que ser mayor o igual a cero. Esta es la única restricción que encontramos para x, asi que el dominio es

$$x \geq 0$$

Resolvamos la ecuación. para eliminar la raíz cuadrada podemos elevar ambos lados de la igualdad al cuadrado.

$$3 + x = \sqrt{x}$$
$$(3 + x)^2 = (\sqrt{x})^2$$

Sabemos que $(\sqrt{x})^2 = x$ si $x \geq 0$, y que $(3 + x)^2 = (3 + x).(3 + x) = 3.3 + 3.x + x.3 + x.x = x^2 + 6x + 9$. La ecuación nos queda así

$$x^2 + 6x + 9 = x$$

Restando x a ambos lados

$$x^2 + 5x + 9 = 0$$

Esta es una ecuación de tipo cuadrática. Las soluciones de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se obtienen según la fórmula

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso, $a = 1$, $b = 5$, $c = 9$, así que reemplazamos en la fórmula a,b y c por esos valores queda

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

Como no es posible resolver la raíz cuadrada de -11 por ser un número negativo, entonces la ecuación tiene como solución el *conjunto vacío* ($S = \emptyset$).

Item (i)

$$\frac{x-3}{2x+1} = 3$$

Analicemos el dominio natural. En el miembro derecho de la ecuación no aparece incógnita x. En el miembro izquierdo hay una división.

Primero miramos el numerador y el denominador para ver si tenemos problemas de dominio con alguno de ellos. En el numerador aparece $x - 3$, y esa expresión es válida para cualquier valor de x. En el denominador tenemos x multiiplicada por 2 y, a eso, sumado 1, estas operaciones pueden hacerse para cualquier valor de x. Por lo que tanto dentro del numerador como del denominador no hay problemas de dominio.

Nos falta analizar la división en sí. Para poder realizar el cociente necesitamos que $2x + 1$ sea distinto de 0. A ojo podemos ver entonces que x tiene que ser un valor distinto a $-0,5$. Por lo tanto el dominio natural de la ecuación es

$$x \neq -0,5$$

Resolvamos ahora si la ecuación. La división nos molesta porque tiene términos con x tanto en el numerador como en el denominador. Podemos comenzar pasando el denominador multiplicando

$$\frac{x-3}{2x+1} = 3$$
$$(x-3) = 3.(2x+1)$$

Distribuyendo el 3, la expresión de la derecha nos queda $6x + 3$, luego ponemos las x en el mismo lado y despejamos

$$x - 3 = 6x + 3$$
$$x = 6x + 6$$
$$x - 6x = 6$$
$$-5x = 6$$
$$x = \frac{6}{-5} = -1,2$$

$x = -1,2$ satisface la igualdad. Notar que es parte de la solución porque $-1,2$ pertenece al *dominio natural.*
$S = \{-1,2\}$

Item (m)

$$\sqrt{x} = \frac{4}{x-3}$$

Esta ecuación es más difícil de resolver, pero podemos calcular su dominio natural.

Del lado derecho tenemos $\sqrt{x}$ por lo tanto, necesitamos que x sea mayor o igual a 0.

Del lado izquierdo tenemos una división. Como podemos restarle 3 a cualquier número, entonces no encontramos problemas de dominio tanto en el numerador, que es un número, como en el denominador.

Para poder realizar la división necesitamos que el denominador, en este caso $x - 3$, sea distinto a 0. Esto nos dice que x tiene que ser distinto a 3. Por lo tanto tenemos 2 restricciones de dominio. El dominio de la ecuación por lo tanto nos queda

$$x \geq 0; x \neq 3$$