Análisis Matemático I

Unidad Nº 1: Límites y Continuidad

Práctica 1.1: Límites de Sucesiones

1- A partir de la definición de límite de una sucesión, demostrar que:

a. $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$; $x_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$

b. $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{5}$; $x_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$

c. en (b), desde que valor de n se cumple: $\left|x_n - \dfrac{3}{5}\right| < 0.01$

d. $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$; $x_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$

2- Hallar los límites de las siguientes sucesiones:

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

b. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+1).(n+2).(n+3)}{n^3}\right)$

c. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}\right)$

d. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

e. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right)$

3- Dada la sucesión, cuyo término general es: $x_n = \dfrac{3n-5}{9n+4}$, sabiendo que: $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$, hallar el número de puntos x_n que caen fuera del intervalo:

$$L = \left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1000}\right);\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1000}\right)\right)$$

4- Indicar si, para n suficientemente grande, las sucesiones siguientes tienen límite:

a. $x_n = \dfrac{1}{2}\pi$

b. $x_n = \begin{cases} 1; n: par \\ \dfrac{1}{n}; n: impar \end{cases}$

c. $x_n = \dfrac{1}{n}.\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

d. $x_n = n.\left[1-(-1)^n\right]$

5- Hallar los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2n^3}{2n^2+3}+\dfrac{1-5n^2}{5n+1}\right]$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2.\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

6- Demostrar que las siguientes sucesiones son, respectivamente:

a. Creciente; si $x_n=\dfrac{2n-1}{3n+1}$

b. Decreciente; para $n\geq 10$; si $x_n=\dfrac{10^n}{n!}$

7- Verificar la acotación de las sucesiones:

a. $x_n=\dfrac{5n^2}{n^2+3}$

b. $x_n=(-1)^n.\dfrac{2n}{n+1}.sen(n)$

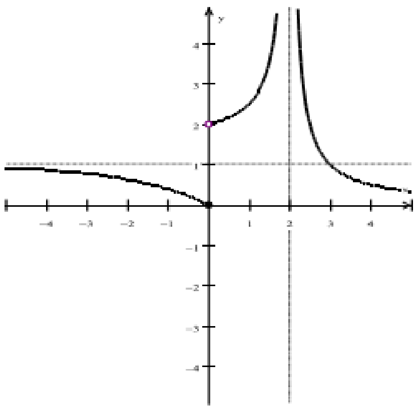
c. $x_n=n.\cos(n\pi)$

Análisis Matemático I

Unidad Nº 1: Límites y Continuidad

Práctica 1.2: Límites y Continuidad de Funciones

1- A partir de las gráficas de las siguientes funciones determinar dominio, imagen y hallar, si existen, los límites propuestos:



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

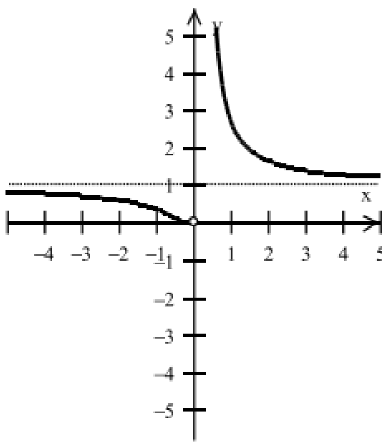
$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$



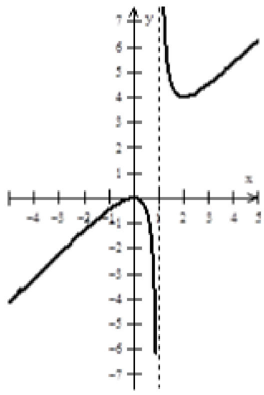
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

2- En cada caso, graficar una función que verifique las siguientes condiciones:

$a)$ *Función par*, $f(0)=2,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1,\quad \lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty,$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$

$b)\,f(1)=0,\quad \lim_{x\to0} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-3^-} f(x)=+\infty,$

$\lim_{x\to-3^+} f(x)=-4,\quad \lim_{|x|\to+\infty} f(x)=0$

3- Sea la función $f(x) = \dfrac{P(x)}{x+3}$, donde *P(x)* es un polinomio de grado 2:

- *f(x)* tiene una asíntota vertical
- (0, 0) es un punto de la gráfica de *f(x)*
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4- Determinar los límites indicados:

a. $\displaystyle\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(x+1)^3}-1}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{x^3}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

g. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{sen(a+2h)-2sen(a+h)+sen(a)}{h^2}$

h. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{tg(x)-tg(x_0)}{x-x_0}$

i. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{\pi-2x}$

j. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$

k. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x.sen(x)}-1}{x^2}$

l. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(5t)}{1-\cos(3t)}$

m. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sen(x)}{x^3}$

n. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+px)}{x}$

o. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3}{2^x-3}$

p. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}$

q. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x-1}}{x-1}$

r. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t+sen(t)}{t-sen(t)}$

s. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x.\ln(x)}$

t. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

A. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

B. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(2x)}{x}\right)^{x+1}$

C. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

6. Hallar los siguientes límites laterales:

A. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$

B. $\lim\limits_{x\to \alpha} e^{\frac{1}{x-\alpha}}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}$

E. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|sen(x)|}{x}$

F. $\lim\limits_{x\to 1} f(x);\ f(x)=\begin{cases} -2x+3;si: x\le 1 \\ 3x-5;si: x>1 \end{cases}$

7. La población de un determinado país aumenta el 2% cada año. ¿Cuántas veces crecerá en un siglo?

8. Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones dadas:

C.

A. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1).(x-5)}$

B. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$

C. $f(x)=\dfrac{sen(x)}{x}$

D. $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$

E. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$

F. $f(x)=\dfrac{1}{x^4-26x^2+25}$

G. $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$

9. En caso de existir, clasificar los Puntos de Discontinuidad de las funciones dadas en el ejercicio precedente.

10. Investigar la Continuidad o Discontinuidad de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x}; x \neq 0 \\ 1; x = 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}; x \neq 0 \\ 3; x = 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x.sen\left(\dfrac{1}{x}\right); x \neq 0 \\ 0; x = 0 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}; x \neq 0 \\ 0; x = 0 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} 4.3^x; x < 0 \\ 2a + x; x \geq 0 \end{cases}$

f. $f(x) = sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 26x^2 + 25}$; en [6,10] ; [-2,2] ; [-6,6]