Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n/n^2) = 1 + x + (x^2/4) + \ldots + (x^n/n^2) + \ldots$$

Se define la suma enésima de la siguiente forma:

$S_n = S_n(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) + \ldots + \mu_n(x)$

En consecuencia: $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x)$ converge si existe $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S$, para ciertos valores de x.

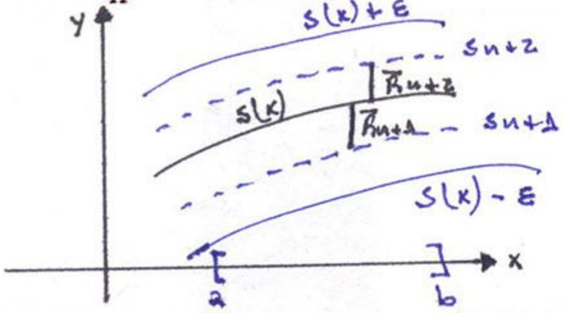
$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x)$ converge a S(x) en [a,b], si para cada $x \in [a,b]$ y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un N / $\forall n \geq N$, $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

(N depende de ε y de x, indica CONVERGENCIA PUNTUAL).

La CONVERGENCIA ES UNIFORME si el valor de N que se encuentra, no depende de x pero sí de ε.

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x)$ converge uniformemente a S(x) en [a,b] si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un N (dependiente de ε pero no de x), tal que:

$\forall n \geq N$, resulta: $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$.



Todas las sumas parciales deben estar dentro de la franja (diferencia entre Convergencia Puntual y Convergencia Uniforme).

En general: f(x) = S(x); en consecuencia:

$$|R_n(x)| = |f(x) - S_n(x)| \quad (1)$$

Si las funciones son continuas:

$$\bar{R}_n = \text{Max } |f(x) - S_n(x)|$$

Entonces:

$\lim_{n\to\infty} \bar{R}_n = 0$, para $x \in [a,b]$; en tal caso la convergencia es UNIFORME.

Ejemplo:

Analizar si la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente.

Esta serie es geométrica, su razón está dada por: r = x, de tal forma:
$S(x) = 1/(1 - r)$.
La serie es convergente cuando $|x| < 1$; esto lleva a decir que:
$S(x) = f(x) = 1/(1 - x)$.
$\forall x \in (-1, 1)$: la serie converge a $S(x) = 1/(1 - x)$.
El residuo o resto de la serie está dado por la expresión (1), donde $S_n(x)$ corresponde a la suma de una serie geométrica; de tal modo:

$S_n(x) = [(1 - x^n)/(1 - x)]$

Así:

$$|f(x) - S_n(x)| = |[1/(1 - x)] - [(1 - x^n)/(1 - x)]|$$

$$= |x^n/(1 - x)| = |x|^n/|1 - x|$$

Analizando un subintervalo del [-1, 1], como ser: [-1/2, 1/2], se obtiene:

$$\bar{R}_n = \text{Max } |R_n(x)| = [(1/2)^n/(1 - 1/2)] = 1/2^{n-1}$$

Tomando límite a esta última expresión:

$$\lim_{n \to \infty} \bar{R}_n = \lim_{n \to \infty}(1/2^{n-1}) = 0$$

La serie en [-1, 1] no es Uniformemente Convergente, entonces $\bar{R}_n$ tiende a infinito. Será Uniformemente Convergente cuando $|x| \leq a < 1$.

Criterio de WEIERSTRASS para Convergencia Uniforme:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$; $\forall\, x \in [a,b]$, si $\exists$ un M_n / $|M_n(x)| \leq M_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$ es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE para cada $x \in [a,b]$ y es UNIFORMEMENTE CONVERGENTE en $[a,b]$ si $\sum M_n$ es convergente.

<u>DEMOSTRACION</u>:

1) ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE:

Si $\forall$ n, tal que $\forall\, x \in [a,b]$: $|M_n(x)| \leq M_n$, sea un x fijo tal que $a \leq x \leq b$, entonces: $|M_n(x)| \leq M_n$; entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} |M_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, para cada x fijo de [a,b].

Como $\sum M_n$ es convergente (por hipótesis), por aplicación del Criterio de Comparación se obtiene que si una serie es menor que una serie convergente, resulta que dicha serie también es convergente; pero considerando que los términos de la serie corresponden a valores absolutos, la misma es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

2) UNIFORMEMENTE CONVERGENTE:

$|R_n(x)| = |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, tal que:

$$f(x) = \underbrace{M_1(x) + M_2(x) + \dots + M_n(x)}_{=S_n(x)} + M_{n+1}(x) + \dots$$

Luego:

$$|R_n(x)| = |M_1(x) + M_2(x) + \dots + M_n(x) + M_{n+1}(x) + \dots| - |M_1(x) + M_2(x) + \dots + M_n(x)|$$

$$|R_n(x)| = |M_{n+1}(x) + M_{n+2}(x) + \dots| \le |M_{n+1}(x)| + |M_{n+2}(x)| + \dots$$

$$\le M_{n+1} + M_{n+2} + \dots = T_n \text{ (No depende de x)}$$

En consecuencia:

$$|R_n(x)| \le T_n$$

Como ΣM_n es Convergente por Hipótesis, resulta que:

Dado un $\varepsilon > 0$, $\exists$ N (No dependiente de x), tal que: $\forall\ n \ge N,\ T_n < \varepsilon$, entonces: $|R_n(x)| \le T_n < \varepsilon$.

De tal forma, la Serie es Uniformemente Convergente en [a, b].

<u>Propiedades de las Series Uniformemente Convergentes</u>:

1) Teorema:

La suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas es CONTINUA.

<u>DEMOSTRACION</u>:

Sea x_o tal que: $x_o \in [a, b]$.

Se debe demostrar si f(x) corresponde a $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$, entonces:

$\forall\ \varepsilon > 0: \exists\ \delta > 0\ /\ |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$

Una forma equivalente de esta definición es:

Una función f es continua en x_o sí y solo sí:

$\forall\ \varepsilon > 0: \exists\ \delta > 0\ /\ |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$, por ser Uniformemente Convergente, existe un N tal que $\forall\ n \ge N$: $f(x) - S_n(x) < (\varepsilon/3)$ (I)

Como $M_n(x)$ es continua para todo n, entonces $S_n(x)$ (suma finita de funciones continuas) es CONTINUA; entonces:

$\exists\ \delta > 0\ /\ \forall\ x: |x - x_o| < \delta \Rightarrow |S_n(x) - S_n(x_o)| < (\varepsilon/3)$ (II)

Por tratarse de una serie convergente, $\forall\ x \in [a,b]$ y $\forall\ n \ge N$ dado, $f(x_o) - S_n(x_o) < (\varepsilon/3)$ (III)

Por lo tanto puede escribirse que:

$$|f(x) - f(x_o)| = |f(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_o) + S_n(x_o) - f(x_o)|$$
$$\le |f(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_o)| + |S_n(x_o) - f(x_o)|$$
$$< (\varepsilon/3) + (\varepsilon/3) + (\varepsilon/3) = \varepsilon \quad \text{(de I, II y III)}$$

<u>Ejemplo</u>:

Analizar la convergencia de: $f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$

Desarrollando la serie y sumándole el primer término se obtiene la suma $S_n(x)$; de tal forma:

$$S_n(x) = x^n$$

Tomando límite a esta última expresión se procede a analizar la convergencia:

$$\lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0; \text{ si } |x| < 1 \\ 1; \text{ si } x = 1 \\ \text{no existe límite si } x = -1\text{: Diverge} \\ \infty; \text{ si } |x| > 1\text{: Diverge} \end{cases}$$

$S_n(x)$ converge $\forall\ x \in (-1, 1]$ a $S(x)$, siendo igual a 0 si $x \in (-1,1)$ e igual a 1 si $x = 1$. Esto indica que no converge uniformemente debido a que $S(x)$ es discontinua.

Ejemplo:

Estudiar la convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} [\cos(nx)]/[2^n]$

$\forall\ x \in R$: $|[\cos(nx)]/[2^n]| \leq (1/2^n)$, porque: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n)$, esta es una serie geométrica de razón $r = 1/2$, por lo tanto convergente; en consecuencia, en virtud de la aplicación del Criterio de Comparación, $\forall\ x \in R$, la serie es ABSOLUTA Y UNIFORMEMENTE CONVERGENTE.

2) **Teorema:**

Una serie Uniformemente Convergente de funciones continuas puede integrarse término a término; esto significa que si cada $M_n(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces:

$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b M_n(x)\,dx$, si: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$, entonces Converge Uniformemente en el $[a,b]$.

3) **Teorema:**

Una serie convergente puede derivarse término a término siempre que las funciones de la serie tengan derivadas continuas y que la serie de derivadas sea Uniformemente Convergente. Es decir que si:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$ converge y si además $M_n'(x)$ es continua en (a,b) y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n'(x)$ es convergente uniformemente en $[a,b]$, entonces:

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n'(x)$.

SERIE DE POTENCIAS:

Se denomina Serie de Potencias de x a una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n.x^n = c_0 + c_1.x + c_2.x^2 + \ldots + c_{n-1}.x^{n-1} + c_n.x^n + \ldots$$

donde c_i = constante $\forall$ i.

Se denomina Serie de Potencias de (x − a) a una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n.(x-a)^n = c_0 + c_1.(x-a) + c_2.(x-a)^2 + \ldots + c_n.(x-a)^n + \ldots$$

donde c_i = constante $\forall$ i.

Teorema:

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n.x^n$ es convergente para $x = x_1$ tal que: $x_1 \neq 0$, entonces es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE $\forall$ x tal que: $|x| < |x_1|$.

<u>DEMOSTRACION</u>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n.x_1^n: \text{ converge, entonces: } \lim_{n\to\infty} c_n.x_1^n = 0$$

$\forall\, \varepsilon > 0$, en particular $\varepsilon = 1$, existe un N / $\forall$ n $\geq$ N, resulta: $|c_n.x_1^n - 0| < \varepsilon = 1$

$$\forall x: |x| < |x_1| \Rightarrow |c_n.x^n| = |[c_n.x^n.x_1^n]/x_1^n| = |c_n.x_1^n|.|x/x_1|^n$$

$$< [|x|/|x_1|]^n, \ \forall n \geq N$$

Entonces, se considera:

$$\sum_{n=N}^{\infty} [|x|^n/|x_1|^n] = [|x|^N/|x_1|^N] + [|x|^{N+1}/|x_1|^{N+1}] + \ldots\ldots$$

La anterior es una serie geométrica de razón $r = [|x|/|x_1|] < 1$, convergente $\forall$ x: $|x| < |x_1|$; por lo tanto: $\sum_{n=N}^{\infty} [|x|^n/|x_1|^n]$ es convergente.

En consecuencia: $\sum_{n=N}^{\infty} |c_n.x^n| < \sum_{n=N}^{\infty} [|x|^n/|x_1|^n]$, convergente $\forall$ x, tal que: $|x| < |x_1|$; pero por Criterio de Comparación: $\sum_{n=N}^{\infty} |c_n.x^n|$ converge $\forall$ x tal que $|x| < |x_1|$.

Entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n.x^n| = |c_0| + |c_1.x| + \ldots + |c_{N-1}.x^{N-1}| + \sum_{n=N}^{\infty} |c_n.x^n|, \ \forall x: |x| < |x_1|$$

Entonces: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n.x^n|$ converge: $\forall$ x tal que $|x| < |x_1|$.

Corolario:

Si la serie de potencias es divergente para $x = x_2$, entonces es divergente: $\forall$ x / $|x| > |x_2|$.

<u>DEMOSTRACION</u>:

Se supone convergente para x_0 tal que $|x_0| > |x_2|$.

Por teorema previo, $\sum c_n.x^n$ es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE, $\forall$ x tal que $|x| < |x_0|$.

Como $|x_2| < |x_0|$, $\sum c_n . x_2^n$ sería convergente, hecho que resulta absurdo, puesto que por hipótesis la serie es Divergente.

Teorema:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ una serie de potencias dada. Entonces, <u>exactamente</u> una de las siguientes condiciones se cumple:

1) La serie converge solamente para: $x = 0$; en consecuencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n = c_0 + c_1 . x + \dots + c_n . x^n + = c_0 + 0 + \dots + 0 = c_0$$

Esta condición se verifica al menos para cualquier serie de potencias.

2) La serie converge absolutamente $\forall x \in R$.

3) $\exists$ un $R > 0$, tal que la serie es Absolutamente Convergente $\forall x$ tal que: $|x| < R$ y Divergente $\forall x$, tal que: $|x| > R$, donde R se denomina Radio de Convergencia de la Serie.-

Teorema:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n . (x-a)^n$ una serie de potencias dada; entonces <u>exactamente</u> una de las siguientes condiciones se cumple:

1) La serie es convergente solamente para $x = a$

2) La serie es absolutamente convergente $\forall x \in R$

3) $\exists R > 0$, tal que la serie es absolutamente convergente $\forall x$: $|x - a| < R$ y divergente $\forall x$: $|x - a| > R$

RADIO DE CONVERGENCIA: Su Determinación:

Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n$, la misma es convergente absolutamente $\forall x \in R$ (debido a Teorema pre-anterior).
El Radio de Convergencia en consecuencia, se determina aplicando el Criterio del Cociente; de tal forma, se plantea:

$$\lim_{n \to \infty} |[c_{n+1} . x^{n+1}]/[c_n . x^n]| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} [|c_{n+1}| . |x|]/|c_n| < 1$$

$$\Rightarrow |x| . \lim_{n \to \infty} |c_{n+1}/c_n| < 1$$

Luego:

$$|x| < 1/[\lim_{n \to \infty} |c_{n+1}/c_n|]$$

$$|x| < \lim_{n \to \infty} |c_n/c_{n+1}| = R \quad \text{(RADIO DE CONVERGENCIA)}$$

De tal forma se establece el siguiente criterio:

1) Si $|x| < R$: la serie converge absolutamente.

2) Si $|x| > R$: la serie diverge.

3) Si $|x| = R$: ???

<u>Ejemplo</u>:

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.[(2^n.x^n)/(n.3^n)]$, determinar su radio de convergencia.

De tal forma:

$$R = \lim_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|[(-1)^{n+1}.2^n/(n.3^n)]/[(-1)^{n+2}.2^{n+1}/(3^{n+1}.(n+1))]|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|[2^n.3^{n+1}.(n+1)]/[2^{n+1}.3^n.n]|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|[3.(n+1)]/[2.n]| = 3/2$$

En consecuencia, la serie converge para $|x| < R = 3/2$. Es necesario analizar qué ocurre en los extremos, dado que se trata de una serie alternada se aplica el Criterio de LEIBNITZ; de tal manera, reemplazando respectivamente en la serie original a x por 3/2 y -3/2, resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.[2^n.(3/2)^n]/n.3^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.(1/n)\text{: CONVERGENTE}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.[2^n.(-3/2)^n]/n.3^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}.(1/n)\text{: DIVERGENTE}$$

Este análisis indica que la serie en cuestión converge, pero no absolutamente en (-3/2, 3/2].

<u>Ejemplo</u>:

Estudiar el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.(x-2)^n$$

El radio de convergencia está dado por:

$$R = \lim_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}| = \lim_{n\to\infty}|n/(n+1)| = 1$$

De tal forma: $|x-2| < R = 1$; luego la serie es absolutamente convergente en (1, 3). Debe analizarse la convergencia en los extremos; por lo tanto:

En $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n.(1-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n.(-1)^n$: DIVERGENTE

En $x = 3$: $\sum_{n=1}^{\infty} n.(3-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$: DIVERGENTE

CONVERGENCIA UNIFORME PARA SERIES DE POTENCIAS:

Teorema:

Toda serie de potencias $\sum a_n.x^n$, de radio no nulo, converge uniformemente en $|x| \leq \rho < R$.

DEMOSTRACION:

Sea $\rho < R$. Por Criterio de WEIERSTRASS se toma: $M_n = |a_n.\rho^n|$; de tal forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n.\rho^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.\rho^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.|x_1|^n}_{\text{CONVERGENTE POR WEIERSTRASS}}$$

Por lo tanto $\sum M_n$ es CONVERGENTE.

$\forall x$: $|x| \leq \rho \Rightarrow |a_n.x^n| \leq |a_n.\rho^n| = M_n$; entonces por Criterio de WEIERSTRASS para convergencia uniforme resulta que: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n.x^n|$ converge; entonces: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$ converge absoluta y uniformemente.

Consecuencias:

1) Una serie de potencias representa siempre una función continua dentro del intervalo de convergencia.

2) Una serie de potencias puede integrarse término a término dentro del intervalo de convergencia.

3) Una serie de potencias puede derivarse término a término dentro del intervalo de convergencia.

Si $\sum a_n.x^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, la derivada $\sum n.a_n.x^{n-1}$ también tiene radio de convergencia R.

DEMOSTRACION:

$$R = \lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |[n.a_n]/[(n+1).a_{n+1}]|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |n/(n+1)|.|a_n/a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = R$$

Ejemplo:

Sea la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

La serie de referencia es geométrica, de razón: $r = x$; por lo tanto, es convergente: $\forall x$: $|x| < R = 1$.
La sucesión de sumas parciales está dada por:

$S_n = a_0/(1 - r) = 1/(1 - x)$, $\forall x$: $|x| < 1$

En consecuencia:

$$\underbrace{\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x 1/(1 - x)\,dx}_{A} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x^n\,dx}_{B}$$

--------A------ -----B-----

Resolviendo A, resulta:

$$-\ln(1 - x)\Big]_0^x = -\ln(1 - x) \qquad (I)$$

Resolviendo B, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/(n+1) \qquad (II)$$

De (I) y (II):

$$\ln(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/(n+1),\ \forall x:\ |x| < 1 \qquad (III)$$

Derivando $f(x) = 1/(1 - x)$, se obtiene: $f'(x) = 1/(1 - x)^2$ (IV)
Luego, derivando la expresión (II), resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n.x^{n-1} \qquad (V)$$

En consecuencia, de (IV) y (V):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n.x^{n-1} = 1/(1 - x)^2,\ \forall x:\ |x| < 1$$

SERIE DE TAYLOR. SERIE DE MAC LAURIN:

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(x - a)^n$, una serie de potencias que representa a $f(x)$,

tal que: $|x - a| < R$.
Una serie de tales características se denomina SERIE DE TAYLOR de $f(x)$ en $x = a$, si cada c_n está dado por:

$$c_n = f^n(a)/n!;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ \text{con: } c_0 = f(a)$$

De tal forma:

$$f(x) = f(a) + [f'(a).(x - a)/1!] + \ldots + [f^n(a).(x - a)^n/n!]$$

En el caso particular de ser: $a = 0$, la Serie de Taylor se transforma en SERIE DE MAC LAURIN, tal que su forma es:

$$f(x) = f(0) + [f'(0).x/1!] + \ldots + [f^n(0).x^n/n!]$$

Teorema:

Toda serie de potencias con radio de convergencia R > 0 corresponde a una Serie de Taylor de su suma.

DEMOSTRACION:

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(x - a)^n$

De tal forma:

$$f(x) = c_0 + c_1.(x - a) + c_2.(x - a)^2 + \ldots + c_n.(x - a)^n + \ldots$$

Derivando en forma sucesiva a f(x):

$$f'(x) = c_1 + 2.c_2.(x - a) + \ldots + n.c_n.(x - a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = c_2 + 3.c_3.(x - a) + \ldots + n.(n - 1).c_n.(x - a)^{n-2} + \ldots$$

....

$$f^n(x) = n!.c_n + (n + 1)!.c_{n+1}.(x - a) + \ldots$$

Por lo tanto, reemplazando en: x = a:

$$f(a) = c_0;\ f'(a) = c_1;\ f''(a) = 2.c_2;\ \ldots;\ f^n(a) = n!.c_n$$

Teorema de Unicidad:

Si dos series de potencias: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n.(x - a)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n.(x - a)^n$ son tales que sus radios de convergencia son no nulos y sus sumas son iguales, entonces las series son idénticas.

DEMOSTRACION:

Sea f(x) la suma de ambas series; esto es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(x - a)^n \Rightarrow c_n = f^n(a)/n!,\ \forall n \in N \Rightarrow f(a) = c_0$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.(x - a)^n \Rightarrow b_n = f^n(a)/n!,\ \forall n \in N \Rightarrow f(a) = b_0$$

En consecuencia, es posible escribir:

$$\left.\begin{array}{l} c_0 = b_0 \\ c_n = b_n \end{array}\right| \forall n \in N$$

Por lo tanto, la representación de una función de serie de potencias es UNICA.

COROLARIO:

Si una serie de potencias tiene un radio de convergencia no nulo y su suma es idénticamente nula, todos los coeficientes de la serie son iguales a cero.

Teorema FUNDAMENTAL:

Sea f una función tal que ésta y sus sucesivas derivadas existen en algún intervalo (a - R, a + R); entonces, f(x) se representa por su Serie de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f^{n}(a).(x-a)^{n}/n!],\ \forall x:\ |x-a| < R$$

$$\leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{[f^{n+1}(\xi_n).(x-a)^{n+1}/(n+1)!]}_{A}$$

tal que ξ_n está entre a y x.

La expresión A se identifica como RESTO O RESIDUO DE LA FORMULA DE TAYLOR.

<u>DEMOSTRACION</u>:

Partiendo de la Fórmula de Taylor:

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde: $P_n(x)$ es el Polinomio de Taylor f(x) de Enésimo Grado y $R_n(x)$ es el Residuo de la Fórmula de Taylor.

Luego:

$$P_n(x) = S_n(x)$$

Se supone que la serie representa a f(x), entonces:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

Por lo tanto:

$$f(x) - S_n(x) = f(x) - P_n(x) = R_n(x)$$

Tomando límite:

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - P_n(x)] = \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

$$f(x) - \underbrace{\lim_{n\to\infty} P_n(x)}_{=f(x)} = \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0}$$

Recíprocamente, se supone que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Como por Fórmula de Taylor: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, entonces:

$$f(x) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} P_n(x)}_{=S_n(x)} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} R_n(x)}_{=0} = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

Entonces:

$$\boxed{S_n(x) \text{ Converge a } f(x)}$$

Ejemplo:

La función: $f(x) = e^x$ es expresable mediante Serie de Potencias, de la forma:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n!) \qquad (I)$$

Tal que el resto o residuo está dado por:

$$R_n(x) = [f^{n+1}(\xi_n).x^{n+1}/(n+1)!]$$

Debe averiguarse si efectivamente el segundo miembro de la expresión (I) representa a e^x; a tal efecto debe cumplirse la condición:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

El Radio de Convergencia está dado por:

$$R = \lim_{n\to\infty} |[1/n!]/[1/(n+1)!]| = \lim_{n\to\infty} [n!.(n+1)/n!] = \infty$$

El Residuo está representado a través de:

$$R_n(x) = [(e)^{\xi_n}.x^{n+1}/(n+1)!];\ 0 < \xi_n < x$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

Efectuando el análisis correspondiente:

1) Si: $x < 0 \Rightarrow x < \xi_n < 0 \Rightarrow (e)^{\xi_n} < e^0 = 1$

De tal forma:

$$|R_n(x)| = |(e)^{\xi_n}.x^{n+1}/(n+1)!| = (e)^{\xi_n}/(n+1)!.|x|^{n+1} < |x|^{n+1}/(n+1)!$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| < \lim_{n\to\infty} |x|^{n+1}/(n+1)! = 0,\ \forall x$$

2) Si: $x > 0 \Rightarrow 0 < \xi_n < x \Rightarrow (e)^{\xi_n} < e^x$

De tal forma:

$$|R_n(x)| = |(e)^{\xi_n}.x^{n+1}/(n+1)!| = (e)^{\xi_n}/(n+1)!.|x|^{n+1} < |x|^{n+1}/(n+1)!$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} [e^x.|x|^{n+1}/(n+1)!] = e^x.\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1}/(n+1)! = 0$$

OPERACIONES CON SERIES:

.Producto:

Si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, son Absolutamente Convergentes, entonces el producto de las mismas dado por: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, donde los coeficientes c_k se obtienen a partir de la Regla de CAUCHY de la forma: $c_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j . b_{k-j}$. La serie en cuestión corresponde a una serie también Absolutamente Convergente.

El concepto es extendible a Series de Potencias.

Sean las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n . (x-x_o)^n \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} b_n . (x-x_o)^n$$

tal que sus radios de convergencia son R y r, en forma respectiva; el producto de las mismas, esto es, la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k . (x-x_o)^k, \text{ con: } c_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j . b_{k-j}$$

tiene por Radio de Convergencia al mínimo (R, r).-