Tema 9. Aplicaciones de las derivadas: Representación gráfica de funciones y Optimización

1. Aplicaciones de la derivada primera para el estudio de la variación de una función

El signo de la derivada primera de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la determinación de máximos y mínimos relativos.

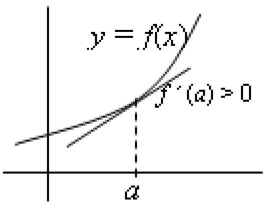
1.1. Crecimiento y decrecimiento

- $f(x)$ es creciente en un punto $x = a$ si $f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- $f(x)$ es decreciente en un punto $x = a$ si $f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- La función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un intervalo cuando crece (decrece) en todos los puntos de él.

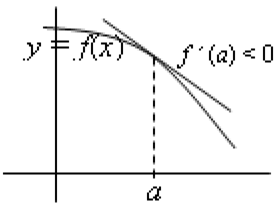
Caracterización mediante la derivada primera

- Si $f´(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $x = a$.

En general, si una función $f(x)$ es tal que $f´(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo.



La demostración de este resultado es fácil, pues si $f´(a) > 0$, se tiene que $f´(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$ en un entorno de a. Esto implica que los dos términos de la fracción deben tener el mismo signo. Luego:



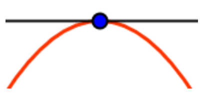
Si $h > 0$, (a la derecha de a), entonces $f(a+h) - f(a) > 0 \Leftrightarrow$ $f(a) < f(a+h) \rightarrow$ Luego f es creciente en a.

Si $h < 0$, (a la izquierda de a), entonces $f(a-h) - f(a) < 0 \Leftrightarrow$ $f(a-h) < f(a) \rightarrow$ Luego f es creciente en a.

- Si $f´(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $x = a$.

Si una función $f(x)$ es tal que $f´(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es decreciente ese el intervalo.

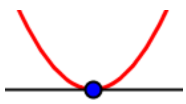
- Máximos. El punto a es un máximo relativo cuando la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha. Por tanto:



a es un máximo si: $f´(a^-) > 0$, $f´(a) = 0$, $f´(a^+) < 0$

(En un máximo, la recta tangente a la curva es horizontal: su pendiente vale 0).

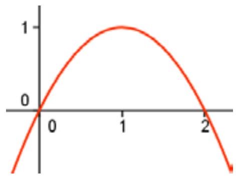
- Mínimos. El punto a es un mínimo relativo cuando la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha. Por tanto:



a es un mínimo si: $f´(a^-) < 0$, $f´(a) = 0$, $f´(a^+) > 0$

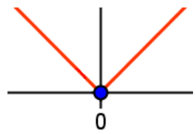
(En un mínimo, la recta tangente a la curva es horizontal: su pendiente vale 0).

Ejemplo:
La función $f(x) = -x^2 + 2x$ es creciente a la izquierda del punto $x = 1$, y decreciente a su derecha, pues $f'(x) = -2x + 2$ es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$.
Por tanto, $f(x) = -x^2 + 2x$ tiene un máximo en $x = 1$.
(Es evidente que $f'(1) = 0$).



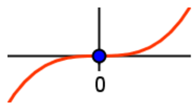
- La determinación de los puntos singulares de una función (aquellos en los que la derivada vale 0, llamados también puntos estacionarios; y los puntos en lo que la función no está definida), permitirá obtener el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos.

Advertencias:
- No siempre que $f'(x) = 0$ se tiene un máximo o un mínimo; ni siquiera esto es una condición necesaria (lo es sólo para funciones derivables).
- Puede haber mínimo sin que $f'(x) = 0$. Así, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ y en ese punto no es derivable la función.



- Puede suceder que $f'(x) = 0$ y no haya mínimo ni máximo. Así pasa en el punto $x = 0$ para la función $f(x) = x^3$. Su derivada, $f'(x) = 3x^2$, se anula en $x = 0$, pero:

Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Por tanto, en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Hay un punto de inflexión.



2. Trazado de gráficas con ayuda de la derivada primera

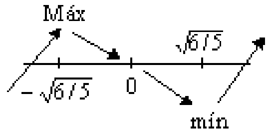
Dada la función $y = f(x)$, para dibujarla es útil el siguiente proceso:
1) Determinar los puntos en los que no está definida $f(x)$. Dominio de definición.
2) Hallar la derivada $f'(x)$.
3) Calcular las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ (puntos singulares).
4) Marcar sobre el eje *OX* los puntos singulares y aquellos en los que la función no está definida. Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos.
5) Estudiar el signo de la derivada en cada intervalo anterior: deducir si la función es creciente o decreciente. (Basta con probar un punto de cada intervalo y ver si $f'(x)$ es positiva o negativa).
6) Deducir (de lo anterior) dónde se dan los máximos y los mínimos, si es el caso.
7) Trazar la gráfica ajustándose a la información obtenida y dando algunos de sus puntos, entre ellos los correspondientes a los puntos singulares y a los cortes con los ejes de coordenadas.

Ejemplo: Trazado de la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 2x^3$.
1) Está definida siempre: Dom(f) = **R**.

2) y 3) $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 \Rightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(5x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{\frac{6}{5}},\ x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$

4), 5) y 6) Se marcan los puntos en la recta, y se observa que:

- Si $x < -\sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = -2$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.



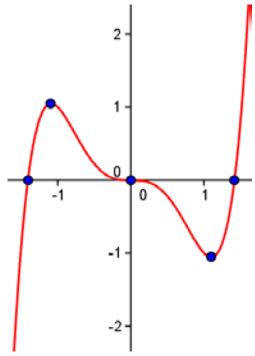
- Si $-\sqrt{\dfrac{6}{5}} < x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x = -\sqrt{\dfrac{6}{5}}$ hay máximo
- Si $0 < x < \sqrt{\dfrac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = 1$), $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.
- Si $x > \sqrt{\dfrac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = 3$), $f\,'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente $\Rightarrow$ en $x = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$ hay mínimo.

7) Dando algunos valores se obtiene la gráfica adjunta.
Para $x = 0$, $f(0) = 0 \rightarrow$ punto (0, 0).

Para $x = -\sqrt{\dfrac{6}{5}} \approx -1{,}1$, $f(-\sqrt{6/5}) \approx 1{,}05 \rightarrow$ punto (–1,1, 1,05)

Para $x = \sqrt{\dfrac{6}{5}} \approx 1{,}1$, $f(\sqrt{6/5}) \approx -1{,}05 \rightarrow$ punto (1,1, –1,05)

Los cortes con el eje *OX* son las soluciones de $x^5 - 2x^3 = 0$, que son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2} \rightarrow$ puntos $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$.



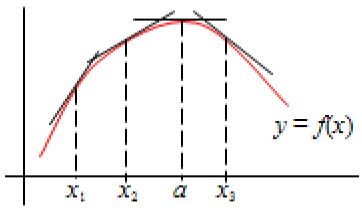
3. Aplicaciones de la derivada segunda. Curvatura: concavidad y convexidad; inflexión

La concavidad y la convexidad dependen del punto de vista del que mira. Aquí se mirará siempre desde la parte negativa del eje *OY*. Por tanto, la concavidad será así: ∩; y la convexidad, así: ∪.

3.1. Concavidad y convexidad

- Observa lo que sucede en un intervalo de **concavidad**.

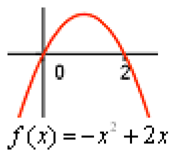
– Las tangentes a la curva están por encima de ella.
– Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez menor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes decrecen. (La pendiente viene dada por la derivada)
– Luego la derivada decrece: $f\,'(x)$ es decreciente.
– En consecuencia, su derivada (la de $f\,'(x)$) será negativa: $f\,''(x) < 0$.



concavidad

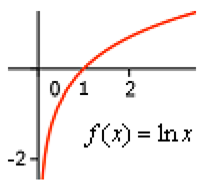
– Los máximos se dan siempre en una concavidad.
– Por tanto, si en $x = a$ hay un máximo de $f(x)$, se cumplirá que $f\,''(a) < 0$.

Ejemplos:
a) La función $f(x) = -x^2 + 2x$ es cóncava, pues su derivada segunda es siempre negativa: $f\,'(x) = -2x + 2 \rightarrow f\,''(x) = -2 < 0$



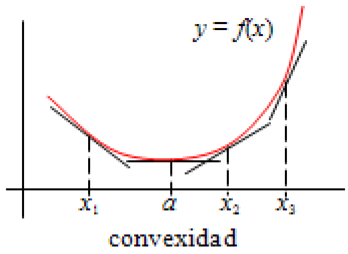
b) La función logaritmo, $f(x) = \ln x$ es cóncava en todo su dominio: $\mathbf{R}^+$.
Efectivamente, derivando:

$$f\,'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f\,''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ para todo } x.$$



- Observa lo que sucede en un intervalo de **convexidad**.

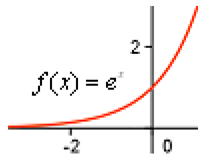
– Las tangentes a la curva están por debajo de ella.
– Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez mayor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes crecen. (La pendiente viene dada por la derivada)
– Luego la derivada crece: $f'(x)$ es creciente.
– En consecuencia, su derivada será positiva: $f''(x) > 0$.
– Los mínimos se dan siempre en una convexidad.



– Por tanto, si en $x = a$ hay un mínimo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) > 0$.
Resumiendo:
Si $f''(x) < 0$ en el intervalo $(x_1, x_2) \Rightarrow f(x)$ es cóncava en ese intervalo.
Si $f''(x) > 0$ en el intervalo $(x_1, x_2) \Rightarrow f(x)$ es convexa en ese intervalo.

Ejemplos:
a) La función $f(x) = x^2 - 2x$ es convexa, pues su derivada segunda es siempre positiva:
$f'(x) = 2x - 2 \to f''(x) = 2 > 0$

b) La función exponencial, $f(x) = e^x$ es convexa siempre, pues su derivada segunda es siempre positiva:
$f'(x) = e^x \to f''(x) = e^x > 0$ para todo x.



3.2. Máximos y mínimos

- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un máximo en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo en $x = a$.

El recíproco no es cierto. Esto es, puede suceder que $f(x)$ tenga un máximo (o un mínimo) en $x = a$ siendo $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$ (sin que $f''(x) < 0$ o $f''(a) > 0$).
En definitiva: La condición necesaria para que en $x = a$ se dé un máximo o un mínimo es que $f'(a) = 0$; pero no es condición suficiente.

Ejemplos:
a) La función $f(x) = -x^2 + 2x$, vista anteriormente, cumple:
$f'(x) = -2x + 2 \to$ la derivada se anula en $x = 1$
Como $f''(x) = -2 < 0$ para todo x, en $x = 1$ se da un máximo.

b) La función $f(x) = \sin x$, cumple:

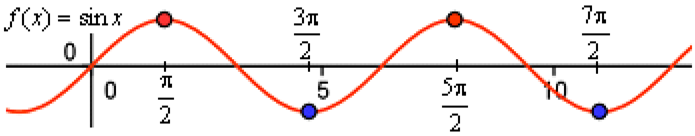
Su derivada primera: $f'(x) = \cos x$, se anula cuando $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Su derivada segunda: $f''(x) = -\sin x$:

– toma valores negativos cuando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Por ejemplo en $x = \frac{\pi}{2}$ o en $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$

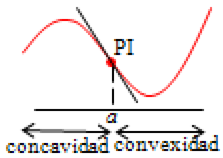
$\to$ en esos puntos tendrá máximos.

– toma valores positivos cuando $x=\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$. Por ejemplo en $x=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$ o en $x=\frac{\pi}{2}+3\pi=\frac{7\pi}{2}$ → en esos puntos tendrá mínimos.



Puede observarse que los máximos se dan en concavidades; y los mínimos, en convexidades.

3.3. Puntos de inflexión



Los puntos en los que la curva cambia de cóncava a convexa, o al revés, se llaman puntos de inflexión; en esos puntos, la tangente corta a curva. Se cumple también que:

- Si $x = a$ es un punto de inflexión de $f(x) \Rightarrow f''(a)=0$.

El recíproco no es cierto. Esto es, puede suceder que $f''(a)=0$ y en $x = a$ no haya punto de inflexión. Por tanto, que $f''(a)=0$ es condición necesaria, pero no suficiente.

3.4. Criterio general para la determinación de puntos máximos, mínimos y de inflexión

Si $x = a$ es un punto que cumple:

$$f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ f'''(a)=0,\ \ldots\ f^{n-1)}(a)=0 \ \text{ y } \ f^{n)}(a)\neq 0,$$

entonces:

–Si n es par y $f^{n)}(a)<0$, en $x = a$ hay un máximo.

–Si n es par y $f^{n)}(a)>0$, en $x = a$ hay un mínimo.

–Si n es impar, en $x = a$ hay un punto de inflexión, aunque $f'(a)\neq 0$.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=x^5-2x^3$, vista en un ejemplo anterior, cumple:

$$f'(x)=5x^4-6x^2 \Rightarrow 5x^4-6x^2=0 \text{ si } x=0,\ x=\sqrt{\frac{6}{5}},\ x=-\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Los puntos $x = 0$, $x=\sqrt{\frac{6}{5}}$, $x=-\sqrt{\frac{6}{5}}$ son candidatos a máximos o mínimos.

Para decidirlo se hace la derivada segunda:

$$f''(x)=20x^3-12x \Rightarrow 20x^3-12x=0 \Rightarrow 4x(5x^2-3)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Como:

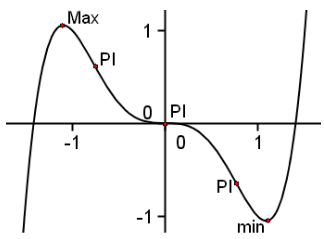
$f''(-\sqrt{6/5})<0$, en $x=-\sqrt{6/5}$ se da un máximo relativo

$f''(0)=0$, en $x = 0$ se da un punto de inflexión.

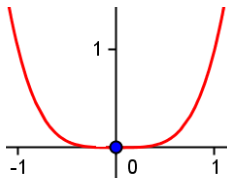
(Es un punto de inflexión con tangente horizontal).

$f''(\sqrt{6/5})>0$, en $x=\sqrt{6/5}$ se da un mínimo relativo

Otros puntos de inflexión son $x=-\sqrt{3/5}$ y $x=\sqrt{3/5}$.



Para confirmar que los tres puntos indicados son de inflexión hay que ver que $f'''(x)=60x^2-12$ es $\neq 0$ en los tres casos: así es, como puede comprobar el lector interesado.

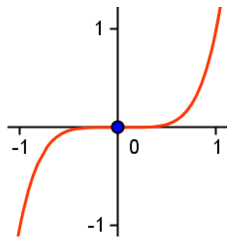


b) La función $f(x) = x^4$, cumple:

$f´(x) = 4x^3 = 0$ en $x = 0$; $f´´(x) = 12x^2 = 0$ en $x = 0$;

$f´´´(x) = 24x = 0$ en $x = 0$; $f^{4)}(x) = 24 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ en $x = 0$ se da un mínimo.



c) La función $f(x) = x^5$, cumple:

$f´(x) = 5x^4 = 0$ en $x = 0$; $f´´(x) = 20x^3 = 0$ en $x = 0$;

$f´´´(x) = 60x^2 = 0$ en $x = 0$; $f^{4)}(x) = 120x = 0$ en $x = 0$;

$f^{5)}(x) = 120 \Rightarrow$ en $x = 0$ se da un punto de inflexión.

4. Sugerencias para la representación gráfica de una función

Para representar una función $f(x)$, puede seguirse el esquema siguiente:

1) Determinar el dominio de definición y el recorrido de $f(x)$. (Esto permite el estudio de posibles discontinuidades y de las regiones: intervalos en los que $f(x)$ es positiva o negativa; para su determinación deben conocerse los puntos de corte de la curva con el eje *OX*).

2) Asíntotas. Puede haberlas verticales, horizontales y oblicuas

- Verticales. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Rightarrow$ la recta $x = a$ es asíntota vertical $f(x)$.

Las asíntotas verticales sólo pueden darse en puntos en los que la función no esté definida.

- Horizontales. Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b \Rightarrow$ la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.
- Oblicuas. Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $(m \neq 0$ y $m \neq \infty)$ y $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right) = n$, $(n \neq \infty) \Rightarrow$ la recta

$y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$.

Es muy útil determinar, mediante el cálculo de límites laterales, la posición de la curva respecto de las asíntotas.

3) Simetrías. Hay dos tipos de simetrías.

- Función par: $f(x)$ es simétrica respecto del eje *OY*. Se cumple que $f(-x) = f(x)$.
- Función impar: $f(x)$ es simétrica respecto del origen: Se cumple que $f(-x) = -f(x)$

–El estudio de las simetrías no es imprescindible, aunque facilita el trazado de la curva.

4) Periodicidad. $f(x)$ es periódica de período *p* si $f(x + p) = f(x)$.

Las funciones periódicas se representan en un intervalo de amplitud *p*; después se repite el dibujo. En la práctica, sólo se tiene en cuenta en las funciones trigonométricas.

5) Puntos singulares e intervalos de variación y curvatura.

- Con la derivada primera, $f´(x)$: Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
- Con la derivada segunda, $f´´(x)$: Concavidad, convexidad y puntos de inflexión; y confirmación de máximos y mínimos.

6) Determinar algunos puntos significativos de la curva $y = f(x)$.

Puntos máximos, mínimos y de inflexión. Puntos de corte de la curva con los ejes.

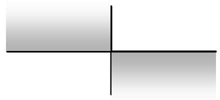
7) <u>Trazado de la curva.</u>
Todas *las piezas deben encajar*. En caso contrario habrá que revisar los cálculos realizados.

A continuación se practica con ejemplos y ejercicios.

Ejemplos:

a) Para la función $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ se tiene:

– Dominio: **R** – {1}.
– Regiones (signo): por debajo del eje *OX* (negativa) si $x < 0$; por encima de *OX* si $x > 0$ (excluido el punto $x = 1$).

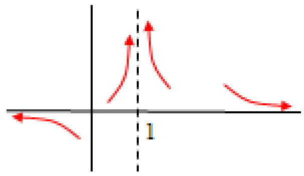


– Asíntotas:

Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(x-1)^2}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=+\infty \Rightarrow$ la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{(x-1)^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2(x-1)}=\left[\dfrac{1}{\pm\infty}\right]=0 \Rightarrow$ la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

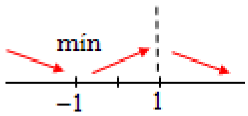
Hacia $-\infty$ la asíntota va por debajo del eje, pues toma valores negativos.
Hacia $+\infty$ la asíntota va por encima del eje, pues el signo de la función es positivo.



– Derivada primera: $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2-2(x-1)\cdot x}{(x-1)^4}=\dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$.

Se anula en $x = -1$. Se marcan los puntos –1 y 1 en la recta.

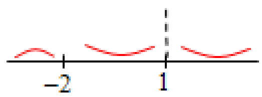
- Si $x<-1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $-1<x<1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente. En $x = 1$ hay mínimo.
- Si $x>1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.



– Derivada segunda: $f''(x)=\dfrac{2x+4}{(x-1)^4}$. Se anula en $x = -2$.

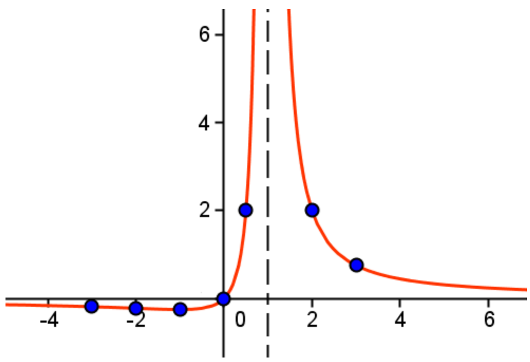
Se marcan los puntos –2 y 1 en la recta.

- Si $x<-2$, $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).
- Si $-2<x<1$, $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).
- Si $x>1$, $f''(\mathrm{x})<0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).



Como $f''(-1)=\dfrac{1}{8}>0$, se confirma que en $x = -1$ hay un mínimo relativo.

– Con toda esta información y calculando algunos puntos se puede hacer su representación gráfica.
Algunos puntos:
(–3, –0,1875); (–2, –0,222); (–1, –0,25);
(0, 0); (0,5, 2); (2, 2); (3, 0,75).



b) Para la función $f(x)=e^{-x^2}$ se tiene:
– Su dominio es R; y siempre es positiva.
– Es par: $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}$.
– Tiene una asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=0^+$ $\to$ La curva va por encima de la asíntota, $y = 0$.
– Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$ $\to$ se anula en $x = 0$.

Si $x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.
Si $x > 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece $\Rightarrow$ En $x = 0$ hay un máximo.

– Concavidad y convexidad:

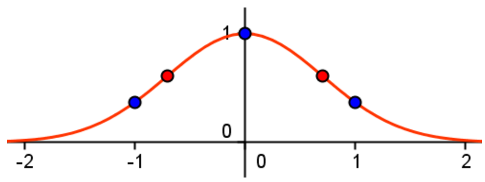
$$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=\left(-2+4x^2\right)e^{-x^2} \to \text{se anula en } x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si $x<-1/\sqrt{2}$, $f''(x)>0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$).
Si $-1/\sqrt{2}<x<1/\sqrt{2}$, $f''(x)<0 \Rightarrow$ la función es cóncava ($\cap$).
Si $x>1/\sqrt{2}$, $f''(x)>0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$).

Pueden darse algunos valores:

$(-1, e^{-1}) \approx (-1, 0{,}37)$, $\left(-1/\sqrt{2},\ e^{-1/2}\right)$; $(0, 1)$;
$\left(1/\sqrt{2},\ e^{-1/2}\right)$; $(1, 0{,}37)$

Su gráfica es la adjunta:



c) Para la función $f(x)=\sin x+\cos x$ se tiene:
– Dominio: **R**. Y siempre toma valores entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.
– Es periódica de período 2π, pues $f(x)=\sin\left(x+2\pi\right)+\cos\left(x+2\pi\right)=\sin x+\cos x$.
Se representará la función en uno de los periodos: intervalo [–π/4, 7π/4].
– Es obvio que no tiene asíntotas.
– Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=\cos x-\sin x \to$ Se anula cuando $\sin x=\cos x \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (Máx. o mín.)

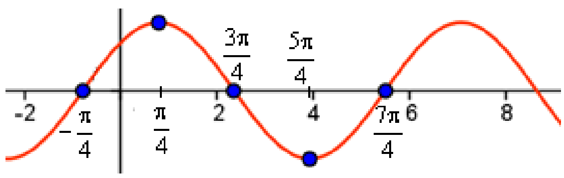
$f'(x)=\cos x-\sin x>0$ si $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ o si $\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$ $\Rightarrow$ la función es creciente; será decreciente si $\pi/4 < x < 5\pi/4$.
– Concavidad y convexidad:

$f''(x)=-\sin x-\cos x \to$ Se anula cuando $\sin x=-\cos x \Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ (Puntos de inf.)

$f''(x)=-\sin x-\cos x>0$ si $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ $\Rightarrow$ la función es convexa; y cóncava en el resto.

El valor máximo lo toma en π/4 y vale $\sqrt{2}$; el mínimo en 5π/4, y vale $-\sqrt{2}$.
En los puntos de inflexión la función toma el valor 0.

La función tiene infinitos máximos, infinitos mínimos e infinitos puntos de inflexión.



Ejercicio 1

Dada la función $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$, se pide:

a) Sus asíntotas.
b) Los puntos de corte de la gráfica de *f* con el eje de abscisas; y el signo de la función.
c) ¿Cuántos máximos y mínimos tiene? Indica algunos de ellos.

Solución:

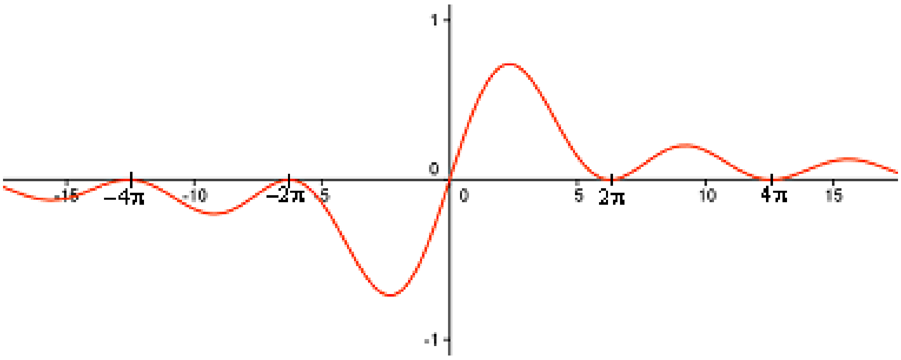
a) La función no está definida en $x = 0$. En esa abscisa habrá una asíntota vertical si el límite se hace infinito.

Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1} = 0 \Rightarrow$ No hay asíntota vertical.

Tiene una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$. La asíntota es la recta $y = 0$.

b) La función se anula siempre que $1-\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Salvo en esos puntos, como $1-\cos x > 0$, el signo de la función dependerá del denominador, de x. Por tanto, será negativa si $x < 0$; y positiva, si $x > 0$.

c) La función se anula en los extremos de cada uno de los intervalos $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$.
Como la función es continua y derivable en cada uno de esos intervalos, salvo en $[-2\pi, 2\pi]$, por el teorema de Rolle, en cada caso habrá un punto que anule la derivada. En todos esos puntos se da un máximo o un mínimo.
Cuando $k > 0$ se tienen máximos; si $k < 0$ se tienen mínimos. (Los demás máximos y mínimos se dan cuando $f(x) = 0$, que, como se dijo antes, sucede en $x = 2k\pi$: si $x = +2k\pi$, se dan mínimos; si $x = -2k\pi$, máximos).
Todo lo dicho puede ilustrase con la gráfica de *f*.



Ejercicio 2

Haz un esbozo gráfico de la función $f(x) = x - \ln(x^2-1)$.

Solución:

Dominio: $\mathbf{R}$ – [–1, 1]. La expresión $\ln(x^2-1)$ sólo tiene sentido si $x^2-1>0$.

Asíntotas:

En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene sendas asíntotas verticales, pues $\lim\limits_{x\to\pm 1}\left(x-\ln(x^2-1)\right) = +\infty$

No tiene asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\ln(x^2-1)\right) = \infty$.

Observación: Si se sustituye se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\ln(x^2-1)\right) = [\infty-\infty]$. Esta indeterminación puede resolverse como sigue:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln(x^2-1)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln(e^x)-\ln(x^2-1)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{e^x}{x^2-1}\right)=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2-1}\right)$$

Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{(x^2-1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x-\ln(x^2-1)\right)=\infty .$$

Tampoco tiene asíntota oblicua, pues si fuese la recta $y=mx+n$ se tendría:

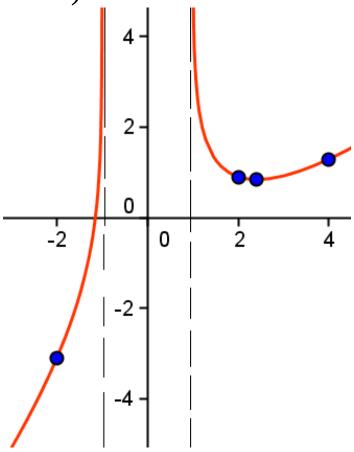
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\ln(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\ln(x^2-1)}{x}\right)=\left(L'H\right)=1-\lim_{x\to\infty}\frac{2x/(x^2-1)}{1}=1-0=1 .$$

$n=\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln(x^2-1)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x^2-1)\right)=\infty$. Como *n* debe ser distinto de ∞, se deduce que no hay asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x^2-2x-1}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=0 \text{ si } x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2} .$$

Además hay que tener en cuenta los puntos $x=-1$ y $x=1$. Con esto:
Si $x<-1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece. (Entre –1 y 1 no hay curva).
Si $1<x<1+\sqrt{2}$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
Si $x>1+\sqrt{2}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece. (En $x=1+\sqrt{2}$ habrá un mínimo.)



Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}>0 \text{ para todo punto de su dominio.}$$

La función es convexa (∪) en todo su dominio.

Algunos puntos:
(–2, –3,1); (2, 0,9); $(1+\sqrt{2}$, 0,84); (4, 1,29)
Su gráfica es la adjunta.

Ejercicio 3

Dada la función $f(x)=\ln\dfrac{3x}{x+1}$, determina su dominio, asíntotas, crecimiento y decrecimiento y concavidad y convexidad. Haz un esbozo gráfico de ella.

Solución:

Dominio: **R** – [–1, 0]. Hay que descartar los valores de *x* tales que $\dfrac{3x}{x+1}\le 0$

Asíntotas:
En $x=-1$ (por la izquierda) y en $x=0$ (por la derecha) la función tiene sendas asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to -1^-}\ln\frac{3x}{x+1}=\left[\ln\left(\frac{-3}{0^-}\right)\right]=+\infty ;\ \lim_{x\to 0^+}\ln\frac{3x}{x+1}=\left[\ln\left(\frac{0^+}{1}\right)=\ln 0^+\right]=-\infty$$

Tiene una asíntota horizontal, pues $\lim_{x\to\pm\infty}\ln\dfrac{3x}{x+1}=\ln 3$. La asíntota es $y=\ln 3$.

Hacía –∞, la curva va por encima de la asíntota, pues $\dfrac{3x}{x+1}>3$; hacia +∞, sucede al revés.

Crecimiento y decrecimiento:

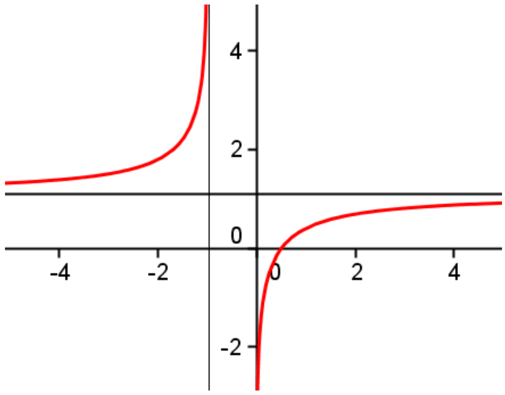
$$f(x)=\ln\frac{3x}{x+1}=\ln 3x-\ln(x+1)\ \Rightarrow\ f´(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}.$$

El valor de la derivada es positivo en todo su dominio, luego la función siempre es creciente.

Concavidad y convexidad:

$$f´´(x)=-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

Si $x<-1$, $f´´(x)>0\Rightarrow f$ es convexa ($\cup$).
Si x > 0, $f´´(x)<0\Rightarrow f$ es cóncava ($\cap$).
Un esbozo de su gráfica es la figura adjunta.



Ejercicio 4

Se considera la curva definida por la función $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

a) Dominio de definición, cortes con los ejes, simetrías y asíntotas.
b) Intervalos de crecimiento de la función. ¿Tiene extremos la función?
c) Una representación aproximada de la curva.

Solución:

a). La función está definida siempre, pues el denominador no se anula en ningún caso.

Corte ejes:

si $x=0\Rightarrow y=0\to$ punto (0, 0); si $y=0\Rightarrow x=0\to$ el mismo punto.

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas (impar), pues

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=-\frac{x^3}{x^2+1}=-f(x)$$

Tiene una asíntota oblicua ($y=mx+n$), pues:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2+1)}=1;\ n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0.$$

La asíntota es la recta $y=x$.

Como $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}=\dfrac{x^3+x-x}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$ se tiene:

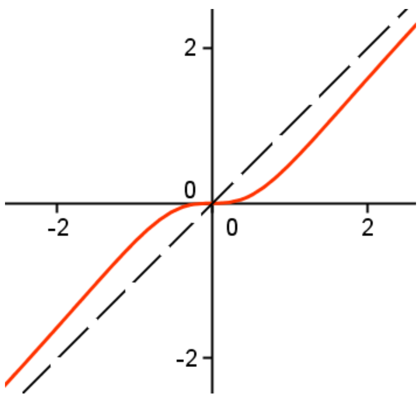
–cuando $x\to+\infty$, la curva va por debajo de la asíntota ($-\dfrac{x}{x^2+1}$ resta);

–cuando $x\to-\infty$, la curva va por encima de la asíntota ($-\dfrac{x}{x^2+1}$ suma).

b) Derivando: $y´=\dfrac{3x^2(x^2+1)-(x^3\cdot 2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.

Salvo en $x=0$, la derivada siempre es positiva $\Rightarrow$ la función es creciente siempre. En consecuencia no tiene extremos.
En $x=0$ hay un punto de inflexión con tangente horizontal.

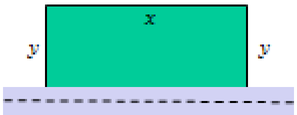
c) Algunos valores de la curva son:
(0, 0), (1, 1/2), (2, 8/5), (3, 27/10), y sus simétricos.
Representándolos se obtiene la gráfica adjunta.



5. Optimización de funciones. Problemas de optimización

La optimización es uno de los problemas económicos más interesantes de resolver. Consiste en determinar el valor que maximiza (beneficios) o minimiza (costes) una función sujeta a determinadas condiciones.

Un problema de optimización clásica es el siguiente:
Se desea construir, al lado de una carretera, una zona de descanso para automovilistas. Tendrá forma rectangular y estará vallada por los tres lados no adyacentes a la carretera. Si su superficie es de 7.200 m², ¿qué dimensiones debe tener para que el coste de la valla sea mínimo?
La situación planteada se representa en la figura adjunta, que en este, como en la mayoría de los casos, es clave para entender el problema.



5.1. Planteamiento y resolución de un problema de optimización

Un problema de optimización vendrá dado, generalmente, en términos de enunciado. Se dice que está planteado cuando se sabe exactamente qué función hay que hacer máxima o mínima; quedará resuelto cuando se halle y critique la solución. Para ello, puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:

1) Saber qué objetivo hay que hacer máximo o mínimo. Esto se deduce de la lectura del enunciado.
En el ejemplo anterior hay que *hacer mínimo el coste de la valla*. (Este mismo ejemplo nos servirá para ilustrar los demás pasos).

2) Expresar en forma de función el objetivo propuesto.
→ *El coste de la valla será mínimo cuando su longitud (L) sea mínima*.
Por tanto, la función que hay que hacer mínima es $L = x + 2y$.
Generalmente esta función dependerá de varias variables; aquí, de dos. Hay que determinar cuál de ellas depende de la(s) otra(s) y buscar en el enunciado la relación que liga esas variables; esta relación siempre es una igualdad. Se obtendrá así una función de una sola variable, que puede designarse por $f(x)$ o por cualquier otra letra. Aquí se ha elegido *L*.
En $L = x + 2y$ aparecen dos variables, x e y, que son las medidas del largo (x) y ancho (y) de la zona de descanso.
¿Qué relación existe entre *x* e *y*? Como se dice que la superficie de la zona es de 7.200 m², y esta superficie vale $S = x \cdot y$, se tendrá que $xy = 7200$. De donde $y = \dfrac{7200}{x} \Rightarrow L(x) = x + 2\cdot\dfrac{7200}{x}$.
(Aquí termina el planteamiento del problema. Ahora hay que resolverlo).

3) Determinar el máximo o mínimo buscado.
Los óptimos se encuentran entre los puntos críticos de la función, que son las soluciones de $f'(x) = 0$. Para que sea máximo hay que exigir que $f''(x) < 0$; y para que sea mínimo, que $f''(x) > 0$.
En este caso hay que buscar un punto que cumpla: $L'(x) = 0$ y $L''(x) > 0$.

Como $L(x) = x + 2\cdot\dfrac{7200}{x} = x + \dfrac{14400}{x} \Rightarrow L'(x) = 1 - \dfrac{14400}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 14400 \Rightarrow x = \pm 120$

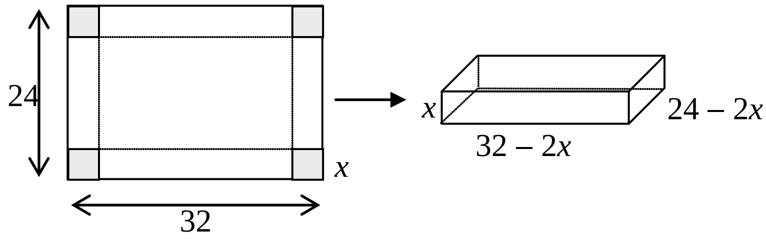
La solución $x = -120$ hay que descartarla por no ser del dominio de definición de la función.

La derivada segunda: $L''(x) = \dfrac{28800}{x^3}$ y $L''(120) = 2 > 0$.

Por tanto, el mínimo pedido se obtiene cuando $x = 120$ metros e $y = 60$ m.

Ejercicio 1
Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?
Solución:
A partir del enunciado y siguiendo el proceso aplicado en el ejemplo anterior se tiene:
1) El objetivo es que el *volumen de la caja sea máximo.*
La caja es un prisma rectangular, cuyo volumen = área de la base por la altura.

2) Para obtener la función conviene hacer un dibujo.



Si se corta un cuadradito de lado x, el volumen de la caja obtenida será:

$$V(x) = (32-2x)(24-2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$

3) Los puntos máximos o mínimos se encuentran, si existen, entre las soluciones de $V' = 0$.

$$V'(x) = 12x^2 - 224x + 768 = 0 \Rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{208}}{3} \text{ (se ha simplificado)}$$

Se obtienen $x \approx 4{,}53$ y $x \approx 14{,}14$.

4) Para ver para qué valor se obtiene el máximo se hace $V''(x) = 24x - 224$ y se evalúa en esas soluciones.
Como $V''(4{,}53) < 0$ y $V''(14{,}14) > 0$, el máximo se da para $x = 4{,}53$. Esta es la solución buscada.
El valor $x = 14{,}14$ no es posible, pues 24 cm no da para cortar dos trozos de ese tamaño.

Ejercicio 2
El coste de fabricación de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0{,}1x^2 + 3x + 100$. Todas las unidades producidas se venden a un precio dado por $p(x) = 25 - 0{,}3x$ ($C(x)$ y $p(x)$ en unidades monetarias, u.m.). Calcula el nivel de producción que:
a) Minimiza el coste medio por unidad. ¿Cuál es ese coste?
b) Maximiza los beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio?
Solución:
El nivel de producción es el número de unidades que hay que producir para alcanzar un determinado fin.
a) El objetivo es determinar el número de unidades que hay que producir para que el coste medio por unidad, $M(x)$, sea mínimo.
El coste por unidad se halla dividiendo el coste total, $C(x)$, entre las unidades producidas, x:

$$M(x) = 0{,}1x + 3 + \frac{100}{x}$$

Para que $M(x)$ sea mínimo, su derivada debe ser 0: $M'(x) = 0{,}1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1000} \approx 31{,}6$.

Como $M''(x) = \frac{200}{x^3} \Rightarrow M''(\sqrt{1000}) > 0$. Luego, el mínimo se da cuando $x = \sqrt{1000}$.

El precio unitario mínimo será $M\left(\sqrt{1000}\right)\approx 9,3246$ u.m.

Observación: En este caso, la variable es discreta y sólo puede tomar valores enteros (de hecho, en el contexto del problema, la función considerada no es continua, y, por ende, tampoco derivable), por ello, la solución $x=\sqrt{1000}$ = 31,6 no es posible; la respuesta debe ser *x* = 31 o *x* =32. Como *M*(31) = 9,3258 y *M*(32) = 9,325, debe elegirse *x* = 32.

b) El objetivo es maximizar los beneficios obtenidos por la fabricación y venta de *x* unidades de producto.
Estos beneficios, *B*(*x*), se hallan restando los costes a los ingresos:
B(*x*) = Ingresos totales – Costes totales.

Los ingresos, *I*(*x*), se calculan multiplicando el número de unidades vendidas por el precio por unidad.
Por tanto,

$$I(x)=x\cdot p(x)=x\left(25-0,3x\right)=25x-0,3x^2$$

De donde,

$$B(x)=I(x)-C(x)=\left(25x-0,3x^2\right)-\left(0,1x^2+3x+100\right)\Rightarrow B(x)=-0,4x^2+22x-100$$

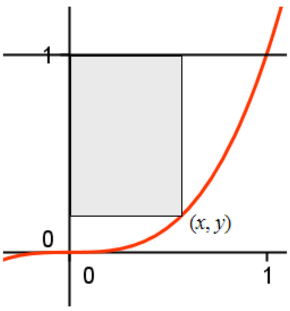
Para que *B*(*x*) sea máximo, $B'(x)=0$: $B'(x)=-0,8x+22=0\Rightarrow x$ 1= 27,5.
Como $B''(x)=-0,8<0$, el punto hallado da el máximo beneficio, que asciende a *B*(27,5) = 202,5 u.m.

Nota: Como en el apartado a), la respuesta debe ser *x* = 27 o *x* = 28. En este caso es indiferente, pues *B*(27) = *B*(28) = 202,4.

Ejercicio 3
En el primer cuadrante y entre la curva $y=x^3$ y la recta *y* = 1 se inscribe un rectángulo con uno de sus lados sobre el eje *OY*. Determina sus vértices para que tenga superficie máxima.
Solución:
Si (*x*, *y*) es el vértice sobre la curva, las dimensiones del rectángulo serán:
base = *x*; altura 1 – *y*.
Como $y=x^3$, su superficie viene dada por:

$$S=x\left(1-y\right)\Rightarrow S(x)=x\left(1-x^3\right)=x-x^4$$

El máximo de *S* se da en la solución de *S*´ = 0 que hace negativa a *S*´´.



Derivando:

$$S'(x)=1-4x^3=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{1/4}.$$

Como $S''(x)=-12x^2<0$ siempre, para el valor $x=\sqrt[3]{1/4}$ se tiene la abscisa del vértice buscado. La ordenada será $y=1/4$.
Por tanto, los vértices son: (0, 1/4); (0, 1); ($\sqrt[3]{1/4}$, 1); ($\sqrt[3]{1/4}$, 1/4).

Problemas Propuestos

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión

1. Dada la función $f(x)=(x+3)(x-2)^4$, determina:
a) Los puntos de corte con el eje *OX*; y su signo.
b) Sus máximos y mínimo.
c) Sus puntos de inflexión.

2. Comprueba que la función $y=2\sqrt{\dfrac{2}{x}-1}$ es decreciente en todo su dominio.

3. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ en el intervalo [0, 2π].

4. Halla los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x)=x-\ln(x^2+1)$.

5. Demuestra que la función $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$ nunca es decreciente. ¿Es posible que, a pesar de lo anterior, tenga puntos de inflexión?

6. Dada la función $f(x)=(x-1)e^{x+1}$, halla:
a) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.
b) Sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y convexidad.

7. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3+3x^2$ en su punto de inflexión.

Estudio de una función dependiente de uno o más parámetros

8. Halla el valor que debe tomar *a* para que la función $f(x)=\dfrac{3x^2-ax}{x+2}$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

9. Estudia los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=x^3+ax^2+5$ dependiendo de los valores de *a*.

10. Halla el valor de *a* para que $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$ tenga un punto de inflexión en $x = 2$.

11. Comprueba que la función $f(x)=e^{p+x^2}$ tiene un mínimo local en $x = 0$ para cualquier valor de *p*. ¿Tendrá algún punto de inflexión?

12. Halla el valor de *p* para que la función $f(x)=e^{-x}+px-1$ tenga:
a) Un mínimo.
b) Un máximo.
c) Un punto de inflexión.

13. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{a}-ax^2+5x+10$, $a\neq 0$.

a) Halla los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.

b) Calcula los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$.

14. (Propuesto en Selectividad, Castilla la Mancha)

Calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x)=ax+b+\dfrac{4}{x}$ pase por el punto (–1, –3) y admita en ese punto una tangente horizontal.

15. a) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto (1/2, 4).

b) Para esos valores de a y b, calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Esboza su gráfica.

16. (Propuesto en Selectividad)

De la función f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe: tiene un máximo en $x = -1$; su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$; tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$.

Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

17. Halla los valores de los coeficientes b, c y d para que la gráfica de la función $y=x^3+bx^2+cx+d$ corte al eje OY en el punto (0, −1), pase por el punto (2, 3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.

Representa gráficamente la función obtenida dando algunos de sus puntos.

Representación gráfica de una función

18. Dada la función $f(x)=x^5-5x^3$:

a) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos relativos.
b) Determina sus intervalos de concavidad y convexidad; y sus puntos de inflexión.
c) Traza su gráfica.

19. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

a) Su dominio, posibles simetrías y asíntotas.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Sus máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.
d) Su representación gráfica.

20. Dada la función $f(x)=\dfrac{4x^2-3x}{x-1}$, se pide:

a) Su dominio, asíntotas, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad.

b) Haz su representación gráfica.

21. Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$.

22. Representa gráficamente la función $f(x)=xe^x$, calculando: asíntotas; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos, mínimos y puntos de inflexión.

23. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$, halla:

a) Dominio de definición y asíntotas.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Extremos locales y los puntos de inflexión.
d) Un esbozo gráfico.

24. (Propuesto en Selectividad)

Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$, determinando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

25. (Propuesto en Selectividad)

Sea f la función dada por $f(x)=x^2-3|x|+2,\quad x\in R$.

a) Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.
b) Determina los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos.
c) Esboza la gráfica de f.

26. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su gráfica.

27. Sea la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Haz una representación gráfica aproximada determinando sus asíntotas y sus extremos relativos.

28. Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones definidas en el intervalo [0, 8]. Dibuja sus gráficas a partir de esos datos y de los cortes con los ejes.

a) $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$ b) $g(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

29. Representa gráficamente la función $f(x)=x-2\sin x$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$.

Problemas de optimización

30. La suma de dos números positivos es 36; encuentra aquellos cuya suma de cuadrados sea mínima.

31. (Propuesto en selectividad, Aragón 2007)
Obtener las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que:
1) El perímetro del primero de ellos es el triple del perímetro del tercero.
2) Se necesitan exactamente 1664 metros de valla para vallar los tres campos.
3) La suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

32. (Propuesto en Selectividad)
Determina las medidas de los lados de un rectángulo de área 1, de modo que la suma de las longitudes de tres de sus lados sea mínima.

33. (Propuesto en Selectividad, Murcia 2000)
Las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ se cortan en los puntos *P* y *Q*. Encuentra el punto *A* que está situado sobre la curva $y = \sqrt{x}$, entre *P* y *Q*, y que determina con *P* y *Q* un triángulo *PAQ* de área máxima.

34. (Propuesto en Selectividad, Murcia 2000)
Determina las dimensiones de los lados y el área del rectángulo de área máxima que, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro, se puede inscribir en un semicírculo de 2 m de radio.

35. (Propuesto en Selectividad, Aragón 2012)
Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

36. Determina las medidas de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 6 y cuya área sea máxima.

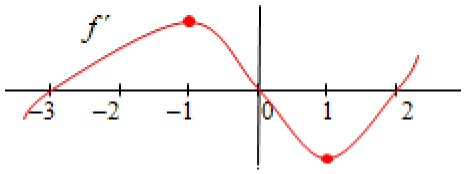
37. (Propuesto en Selectividad, Madrid 99)
Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 4$ y el punto (p, q) sobre ella con $0 \le p \le 2$. Se forma un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos (0, 0) y (*p*, *q*). Calcula (*p*, *q*) para que el área de este rectángulo sea máxima.

38. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

39. El coste de fabricación de *x* unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0,02x^2 + 4x + 80$. Todas las unidades producidas se venden a un precio dado por $p(x) = 200 - x$ (*C*(*x*) y *p*(*x*) en unidades monetarias, u.m.). Calcula el nivel de producción que:
a) Minimiza el coste medio por unidad. ¿Cuál es ese coste?
b) Maximiza los beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

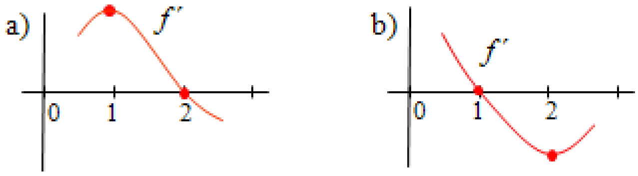
Otros problemas

40. (Propuesto en Selectividad, Madrid)
Sea *f*: **R** $\to$ **R** una función derivable en todo **R**. Se sabe que *f*(0) = 3; *f*(–3) = 0 y *f*(2) = 0.
Además, la gráfica de su derivada es:



Dibuja la gráfica de $f(x)$.

41. Sea *f* una función de la que se sabe que la gráfica de su derivada *f* ´ tiene la forma que aparece en la figura:



Determina, en cada caso, si $f(x)$ tiene máximos, mínimos (relativos) o puntos de inflexión en los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 2.

42. (Propuesto en Selectividad, País Vasco)
El beneficio obtenido por la producción y venta de *x* kilos de un artículo viene dado por la función $B(x) = -0{,}01x^2 + 3{,}6x - 180$
a) Determina los kilos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.
b) Determina los kilos que hay que producir y vender como máximo para que la empresa no tenga pérdidas.

43. Demuestra que la función $f(x) = e^x + 2x$ corta una sola vez al eje *OX*.

44. Demuestra que la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una sola raíz real.

45. Determina si la función $f(x) = \dfrac{m}{1+x^2}$ tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión. ¿Depende del valor que tome *m*?

46. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-a}$:
a) ¿Hay algún valor de *a* para el que se pueda evitar la discontinuidad en *x* = *a*?
b) ¿Hay algún valor de *a* para el que la función tenga un máximo?

47. Dada la función $f(x) = 2 + 2x - e^x$, se pide:
a) Sus máximos y mínimos relativos, si los tiene.
b) Demuestra que corta dos veces al eje *OX* en el intervalo [–1, 2].

Soluciones

1. a) $x = -3$; $x = 2$. b) Max. (–2, 256). Min. (2, 0). c) $x = -1$.

3. $x = \pi/3$, máximo; $x = 5\pi/3$, mínimo. **4**. $x = \pm 1$.

6. a) Decrece: $x < 0$; crece, $x > 0$. b) $x = -1$; $x < -1$, cóncava ($\cap$); $x > -1$, convexa ($\cup$).

7. $y = -3x - 1$. **8.** $a = 18$.

9. En $x = 0$ hay máximo si $a < 0$, y mínimo si $a > 0$. En $x = -2a/3$ hay mínimo si $a < 0$, y máximo si $a > 0$. **10**. $a = -1/8$.

12. a) Si $p > 0$, en $x = -\ln p$ hay un mínimo. b) No hay máximo. c) No tiene PI.

13. a) $a = -\dfrac{1}{2}$ o $a = 3$. b) máximo, (1, 35/3); mínimo, (5, 5/3).

14. $a = 4$, $b = 5$.

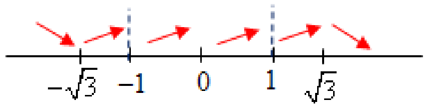
15. a) $a = 4$; $b = 1$. b) AV, $x = 0$; AO, $y = 4x$; Máx, (–1/2, –4); mín, 1/2, 4).

16. $b = 0$; $a = 1$; $c = -3$; $d = 2$

17. $b = -5$; $c = 8$; $d = -1$. (4/3, 3,15), máx; (5/3, 3,07), PI; (2, 3), mín.

18. Crece: $x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$. Máx, $x = -\sqrt{3}$; min, $x = +\sqrt{3}$; PI, $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3/2}$.

19. **R** – {–1, 1}; impar); $x = -1$, $x = 1$, $y = -x$. b)



c) $x < -1$, ($\cup$); $-1 < x < 0$, ($\cap$); $0 < x < 1$, ($\cup$); $x > 1$, ($\cap$).

20. a) **R** – {1}. AV, $x = 1$; AO, $y = 4x + 1$; $x = 1/2$, máx; $x = 3/2$, mín. Crec. $(-\infty,\ 1/2) \cup (3/2,\ \infty)$.

Decrec: $(1/2,\ 1) \cup (1,\ 3/2)$; $x < 1$, ($\cap$); $x > 1$, ($\cup$).

21. AV, $x = 0$; AO, $y = -x$ .Decrece siempre.

22. AH, $y = 0$. Dec: $(-\infty, -1)$; cre: $(-1, +\infty)$. $x = -1$, mín; $x = -2$, PI. $x < -2$, ($\cap$); $x > -2$, ($\cup$).

23. a) AH, $y = 0$. b) $x < -1$ o $x > 1$, decrece; $-1 < x < 1$, crece. c) (–1, 0), mín; $(1-\sqrt{2}$, 0,517), PI; (1, 1,47), máximo; $(1+\sqrt{2}$, 1,05), PI.

24. **R** – {2}. AV, $x = 2$; AH, $y = 1$, $(-\infty)$; $y = -1$, $(+\infty)$. Si $x < 0$, decrece; $x > 0 - \{2\}$, crece.

25. No derivable en $x = 0$. b) Minimos: $x = -3/2$ y $x = 3/2$; max, $x = 0$.

26. Si $x < 0$, crece; $x > 0$, decrece ; Max, $x = 0$. PI: $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. AH, $y = 0$.

27. AV, $x = 0^+$; AH, $y = 0$. Máx, $(e^{1/2}, 1/e)$

28. a) Máx, 2; mín, 6. b) Máx, $x = 1$, $x = 5$; mín, $x = 3$, $x = 7$.

29. $x = -\pi/3$, máximo; $x = \pi/3$, mínimo; $x = 0$, PI.

30. 18 y 18. **31**. 192 m, 160 m y 64 m. **32**. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$.

33. $A = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$. **34**. base = $2\sqrt{2}$; altura: $y = \sqrt{2}$. $S = 4$ m^2.

35. $x = 4$ e $y = 8$. **36**. $x = 6 - 3\sqrt{2}$, $y = 6 - 3\sqrt{2}$, $z = 6\sqrt{2} - 6$

37. $p = 2/3$, $q = 16/9$. **38**. $r = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow h = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$

39. a) $x = \sqrt{4000}$; 6,53 u.m. b) $x = 96{,}08$; 9336 u.m.

40. Crece; $(-3, 0) \cup (2 + \infty)$; decrece, $(-\infty, -3) \cup (0, 2)$. Min,–3 y 2; máx, 0; PI, –1 y 1.

41. a) $x = 1$, PI; $x = 2$, máximo. b) $x = 1$, máximo; $x = 2$, PI.

42. a) 180 kg. b) 300 kilos.

45. Si $m > 0$, un máximo. Si $m < 0$, un mínimo. Si $m \neq 0$, PI en $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

46. $a = 1/3$. b) No. **47**. Máximo en $x = \ln 2$.

Sesión 17

Regla de L'Hopital

Temas

- ✓ Regla de L'Hopital.
- ✓ Aplicaciones de la Regla de L'Hopital a otras formas indeterminadas.

Capacidades

- ▷ Conocer y comprender la regla de L´Hopital.
- ▷ Calcular límites de formas indeterminadas, usando la regla de L'Hopital.

17.1 Introducción

Johann Bernoulli
Suizo. (1667-1748)

La regla de L'Hopital se atribuye al matemático francés Guillaume François Antoine, Marqués de L'Hopital, quien dio a conocer el método en su obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692), el primer texto que se ha escrito sobre cálculo, influenciado por las lecturas que realizaba de sus profesores, Johann Bernoulli, Johann Bernoulli y Leibniz. Este método permite calcular ciertos límites que con los procedimientos estudiados en Cálculo I, es difícil determinar.

Esta regla, llamada también, regla de L'Hopital-Bernouilli, es utilizada para determinar límites de formas indeterminadas del tipo: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, y se puede aplicar también a otros casos indeterminados.

17.2 Formas indeterminadas

En algunas aplicaciones del Cálculo se requiere calcular por ejemplo, límites del tipo $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $f(a) = g(a) = 0$. El cálculo de estos límites no es inmediato.

Nota 17.1 Cuando una función, para cierto valor de la variable independiente, toma una de las formas:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \infty-\infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^\infty, \qquad 1^\infty$$

se dice que es *indeterminada*.

Observación. En Cálculo I, se trató algunas técnicas para calcular límites de algunas formas indeterminadas. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

Sin embargo, con las técnicas tratadas no es posible determinar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Notar que, para $x = 0$, la función $\frac{\sin x}{x}$ es indeterminada. Pero, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ existe y es igual a 1.

Otros ejemplos de límites de formas indeterminadas son:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{2x-4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-1}{\ln(e^x+x)}$$

La Regla de L'Hopital proporciona un método para calcular límites de formas indeterminadas de los tipos:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

que se puede extender a las otras formas indeterminadas.

17.3 Regla de L'Hopital. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Teorema 17.1 Regla de L'Hôpital (forma débil).
Sean f y g son funciones derivables en $x = a$, tales que $f(a) = g(a) = 0$. Si $g'(a) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Demostración
Como $f(a) = g(a) = 0$, se tiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}$$

Como f y g son derivables en a, y como $g'(a) \neq 0$, entonces:

- $g(x)$ es no nulo en una vecindad de $x = a$.
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \right) = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ ∎

Ejemplo 17.1 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

Nota 17.2 Observar los gráficos de $y = \frac{\sin x}{x}$ e $y = \cos x$, en las cercanías de $x = 0$, en el siguiente dibujo.

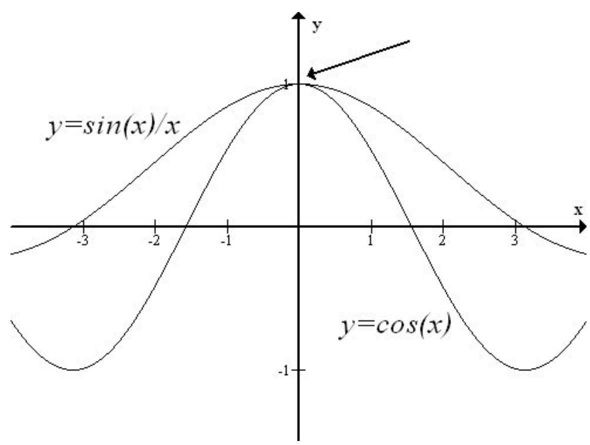


Gráfico de $y = \frac{\sin x}{x}$ *e* $y = \cos x$

Teorema 17.2 Regla de L'Hopital, primera generalización.
Sean f y g funciones derivables en una vecindad del punto $x = a$, tal que $g'(x)$ es distinta de cero en esa vecindad.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite del lado derecho sea un número real, o bien $+\infty$, o $-\infty$.

Nota 17.3 En esencia, la regla de L'Hopital dice que, si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x = a$, entonces, con algunas restricciones, este cuociente tiene el mismo límite que en $x = a$ que el cuociente de las derivadas $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, siempre que este último límite exista (finito o infinito).

Ejemplo 17.2 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

Ejemplo 17.3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{2x-4} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x-1}}{2} = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo 17.4 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2+x^3} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{\cos x}{2x+3x^2}}_{\textit{no es indeterminada}} \overset{[\frac{1}{0}]}{=} \infty$

Ejercicio 17.1 Calcular $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_{1/2}^{t} \dfrac{x^2-1}{x\,\ln x^{3/2}} dx.$

Nota 17.4 ***Aplicación reiterada de la regla de L'Hopital***. Si el cuociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ resulta indeterminado, entonces se puede aplicar nuevamente la regla de l'Hopital por segunda vez (o tercera vez, etc.) siempre que se cumplan las condiciones. Es decir:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Ejemplo 17.5

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x} &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi \sin \pi x} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\pi x \, \sin \pi x} \\ &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\pi \sin \pi x + \pi^2 x \cos \pi x} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \end{aligned}$$

17.4 Regla de L'Hopital. Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 17.3 Regla de L'Hopital, segunda generalización.
Sean f y g funciones derivables en una vecindad de a, tales que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Si $g'(x)$ no se anula en la vecindad de a entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite del lado derecho sea un número real, o bien $+\infty$, *o* $-\infty$.

Nota 17.5 El teorema anterior dice que, la regla de L'Hopital también se puede aplicar cuando $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Nota 17.6 La Regla de H'Hopital también se cumple cuando x tiende a $+\infty$, $-\infty$ o ∞, tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 17.6

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x^3}{x^3-2x+5} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x+9x^2}{3x^2-2} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2+18x}{6x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \frac{18}{6} = 3$$

Ejemplo 17.7

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x+1} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2}}_{\textit{no es indeterminada}} \overset{[\frac{\infty}{2}]}{=} +\infty$$

Nota 17.7 Resumiendo, la Regla de L'Hopital se puede enunciar como sigue:

> Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en una vecindad de a, tal que que $g'(x) \neq 0$ cerca de a.
>
> Si para $x = a$, siendo a un número real, o $+\infty$ o $-\infty$, el cuociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada del tipo: $[\frac{0}{0}]$ o $[\frac{\infty}{\infty}]$, entonces
>
> $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> siempre que el limite del segundo lado exista, o bien sea $+\infty$ o $-\infty$

17.5 Otras formas indeterminadas

Por medio de *arreglos algebraicos*, es posible aplicar la regla de L'Hopital a otras formas indeterminadas:

17.5.1 Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Si para $x = a$, la función $f(x) \cdot h(x)$ toma la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, la función se escribe en la forma:

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}} \quad \text{tomando la forma} \quad \frac{0}{0}$$

o bien:

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{tomando la forma} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

y luego se aplica la regla de L'Hopital.

Ejercicio 17.2 Probar que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec 3x\ \cos 5x) = -\dfrac{5}{3}$

Ejercicio 17.3 Calcular $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$

17.5.2 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty = \lim_{x\to a} g(x)$ entonces se dice que $f(x)-g(x)$ tiene la forma $\infty-\infty$. Para calcular $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ se transforma la expresión $f(x)-g(x)$ en una fracción de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que se pueda aplicar la regla de L'Hopital.

Ejemplo 17.8

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &\overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\cos x+\sin x}\\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-x\sin x + 2\cos x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

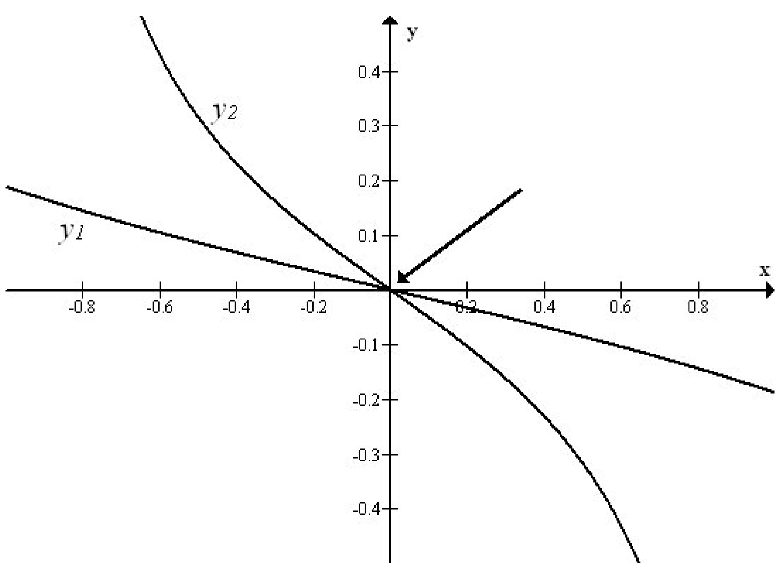


Gráfico de $y_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ *e* $y_2 = \frac{-\sin x}{-x\sin x+2\cos x}$

Ejercicio 17.4 *Probar que* $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - e^{2x}) = -\infty.$ Sugerencia: Factorizar.

17.5.3 Formas indeterminadas 0^0, 1^∞, ∞^0

Si una función de la forma $f(x)^{h(x)}$ toma una de las siguientes formas indeterminadas, cuando $x \to a$:

$$0^0, \qquad 1^\infty, \qquad \infty^0$$

entonces, para calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{h(x)}$, se procede como sigue:

- Sea $y = f(x)^{h(x)}$
- Se aplica logaritmo natural a ambos lados:

  $$\ln y = \ln f(x)^{h(x)}$$

  obteniendo:

  $$\ln y = h(x)\ln f(x)$$

  donde $h(x)\ln f(x)$ tiene la forma indeterminada:

  $$0 \cdot \infty$$

  o bien $\infty \cdot 0$.
- Determinando $\lim\limits_{x\to a} \ln y = \lim\limits_{x\to a} \ln f(x)^{h(x)}$ usando un método ya tratado, se obtiene $L = \lim\limits_{x\to a} \ln y$.
- Luego:

  $$\lim_{x\to a} f(x)^{h(x)} = \lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} e^{\ln y} = e^{\left(\lim\limits_{x\to a} \ln y\right)} = e^L$$

Ejemplo 17.9 Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
Solución

La función x^x toma la forma 0^0 cuando $x \to 0^+$.

- Sea $y = x^x$.

  $\ln y = x\ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ es de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$, cuando $x \to 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$
- Luego: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = 0$
- Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$

Ejercicio 17.5 Probar que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

17.6 Autoevaluación

Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} x\cot x$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x}-1)$

d) $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t^2+4)}{\ln(t-1)}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\ x-x}{x-\sin\ x}$

f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin\ x)}{(\pi-2x)^2}$

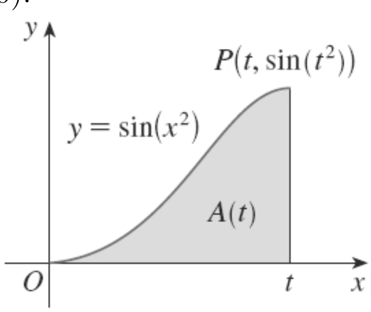
g) $\lim_{u\to 3}\frac{1}{u-3}\int_3^u\frac{\sin x}{x}dx$

h) $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}(1-x)dx$

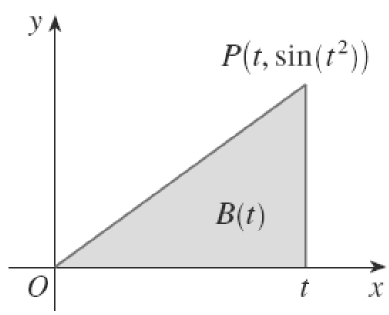
Respuestas: a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 2 f) $-\frac{1}{8}$ g) 0.047 h) 0

17.7 Desafío

Las siguientes figuras muestran dos, A y B regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $t=\sin(x^2)$ de 0 a t, y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O, P y $(t,0)$.



Area $A(t)$



Area $B(t)$

Calcular

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{A(t)}{B(t)}$$

Teorema de L'hôpital

1° CASO

Forma 0/0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}_{F\ 0/0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}_{F\ 0/0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

2° CASO

Forma ∞/∞

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}_{F\ \infty/\infty} = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}}_{F\ 0/0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{g'(x)}{(g(x))^2}}{\frac{f'(x)}{(f(x))^2}}$$

3° CASO

Forma $0.\pm\infty$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

Hay que llevarlo al 1° o 2° caso

4° CASO

Forma $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x) \right) =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x) \cdot g(x)} \cdot f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) \cdot f(x) \cdot g(x) = \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right)}{\frac{1}{g(x) \cdot f(x)}} =$$

Luego aplicar L'hôpital

5°, 6° y 7° CASOS

Formas 0^0, ∞^0, 1^∞

Sea $L = \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{g(x) . \ln f(x)}_{\substack{\text{Se reduce al 3°Caso} \\ 0^0 \;/\; 1^\infty \;/\; \infty^0}} \Rightarrow L = e^{\lim_{x \to x_0} g(x) . \ln f(x)}$$

Teorema *Diferenciabilidad implica continuidad*

Si $f(x)$ es una función diferenciable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$.

Demostración:

Suponiendo que: $f(x)$ es una función diferenciable en el punto $x = a$.

Se sabe que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{existe, e igual} \quad f'(a)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) - f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \; h = f'(a) \,.\, 0 = 0$$

(Límite del producto = Producto de los Límites)

Entonces,

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = \lim_{h \to 0} [f(a + h) - f(a)] + f(a) = 0 + f(a) = f(a).$$

(Límite de la Suma = Suma de los Límites)

Tomando: $x = a + h$, entonces: $h = x - a$, así el resultado anterior puede escribirse como:

$$\lim_{(x-a) \to 0} f(x) = f(a).$$

De tal modo:

$$\lim_{h \to 0} f(x) = f(a),$$

En consecuencia: $f(x)$ es continua en $x = a$.

Teorema de Rolle

Sea y=f(x) una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y derivable en (a,b). Si f(a)=f(b) entonces existe al menos un x_o□(a,b) en el que f'(x_o)=0

En la escena se ha dibujado la función $f(x)=-0.5(x-1)^2+3$ en el intervalo [-1,3]

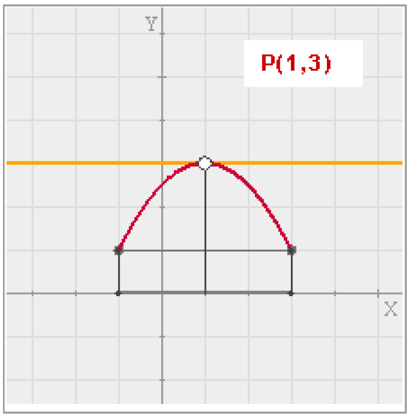
Esta función es, continua y derivable desde -1 a 3.

Además f(-1)=f(3)=1

Cumple por tanto las condiciones del teorema de Rolle, y en efecto hay una valor en el interior del intervalo en el que la derivada se anula y la recta tangente es horizontal.

Para calcular este valor de x, derivamos la función:

f'(x)=-x+1=0, luego x=1, y en efecto 1□(-1,3).



Teorema de Lagrange o del valor medio

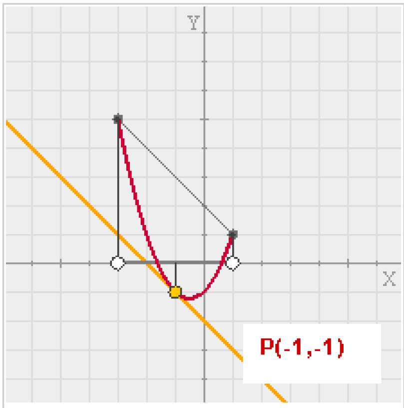
Sea y=f(x) una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y derivable en (a,b).
Entonces existe al menos un c□(a,b) en el que
f'(x_o)=[f(b)-f(a)]/(b-a)

Observemos que lo que el teorema dice es que existe un punto en el interior del intervalo (a,b) donde la recta tangente a la curva es paralela a la que une los extremos A y B de la curva.

En la escena se ha dibujado la función $f(x)=x^2+x+1$, continua en el intervalo [-3,1] y derivable en (-3,1).

En este caso la pendiente de la recta AB es 1:
f(b)-f(a)=f(-3)-f(1)=7-3=4; b-a=1-(-3)=4

El punto de la curva donde la derivada es 1, es:
f'(x)=2x+1=1, por tanto **x=1**, es el valor buscado.



Teorema del valor medio de Cauchy

Sean f y g dos funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b).
Si f'(x) y g'(x) no se anulan simultáneamente en un mismo punto del intervalo, g'(x)□0 en (a,b) y g(b)□g(a), entonces existe un punto c □(a,b) tal que

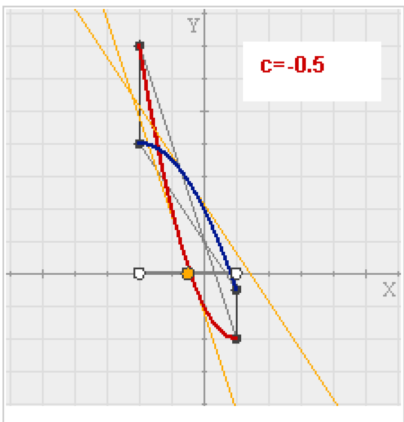
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En la escena se han dibujado las funciones f (rojo) y g (azul) en el intervalo [-2,1]

$f(x)=x^2-2x-1$ $\qquad g(x)=-0.5x^2-2x+2$

Ambas son continuas en [-2,1] y derivables en (-2,1), además f´y g' no se anulan simultáneamente en un mismo punto, g' no se anula en (-2,1) y g(b)□g(a).
Cumplen pues las condiciones de este teorema.

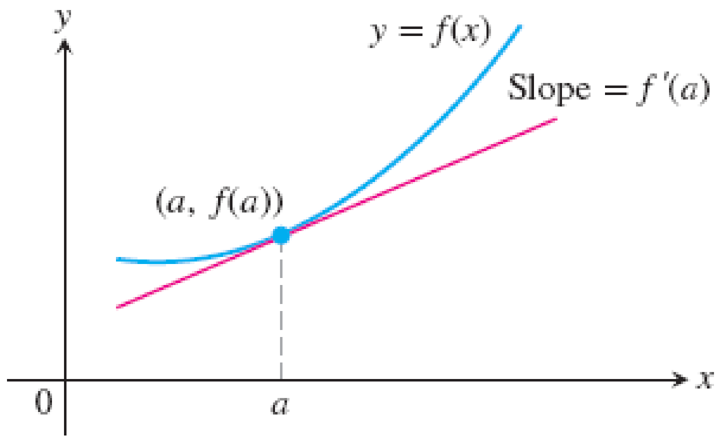
Calculamos el punto,
f(-2)-f(1)=7-(-2)=9 $\qquad$ f'(x)=2x-2
g(-2)-g(1)=4-(-0.5)=4.5 $\qquad$ g'(x)=-x-2
El valor buscado, debe cumplir:
9·(-x-2)=4.5·(2x-2)
-9x-18=9x-9
y resolviendo la ecuación obtenemos **x=-0.5**
que efectivamente pertenece al intervalo (-2,1).



5. Aproximación de funciones: polinomios de Taylor y teorema de Taylor.

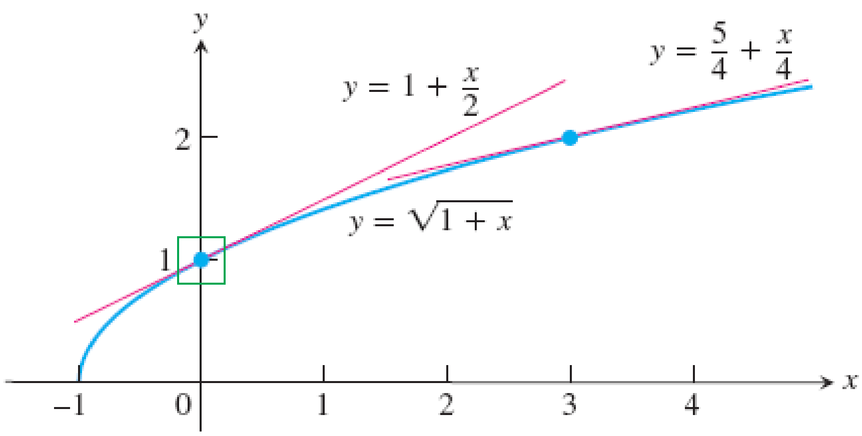
Algunas veces podemos aproximar funciones complicadas mediante otras funciones más simples (con las que es más simple trabajar) que dan la exactitud adecuada en ciertas aplicaciones. Comenzaremos estudiando el proceso de *linealización* que ofrece la derivada y continuaremos estudiando *polinomios de Taylor*.

Como sabemos, la tangente a $y=f(x)$ en un punto $x=a$, donde la función f es derivable, pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$ y tiene por ecuación $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.



Entonces, la recta tangente es la gráfica de la función lineal $L(x):=f(a)+f'(a)(x-a)$. Observa que, donde esta recta permanezca *cerca* de la gráfica de f, $L(x)$ ofrecerá una *buena* aproximación de $f(x)$. A la función $L(x)$ se le llama *linealización* de la función f en el punto a. La aproximación $f(x)\approx L(x)$ se llama *aproximación lineal* de f en el punto a. Observa que $L(a)=f(a)$ y que $L'(a)=f'(a)$.

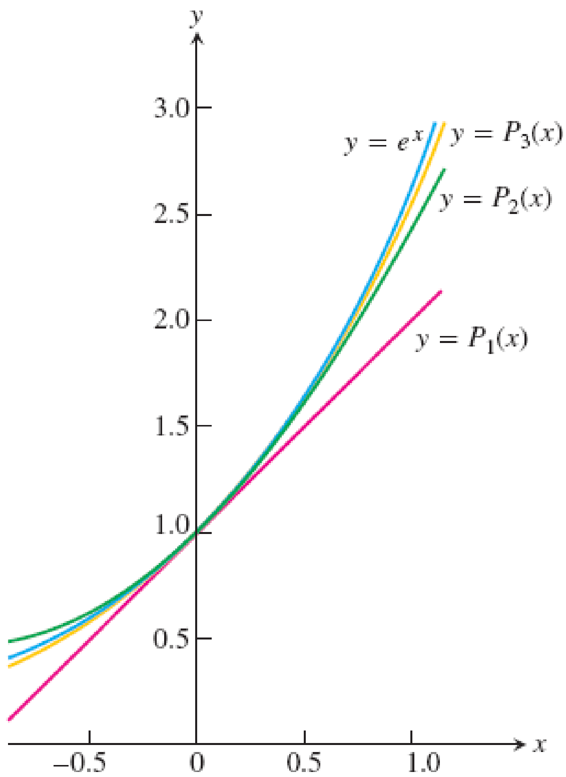
EJEMPLO. Un cálculo sencillo muestra que la aproximación lineal de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ en el punto $a=0$ viene dada por $y=1+\dfrac{x}{2}$. De forma similar se puede obtener que la aproximación lineal de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ en el punto $a=3$ viene dada por $y=\dfrac{5}{4}+\dfrac{x}{4}$.



Entonces $\sqrt{x+1} \approx 1+\dfrac{x}{2}$ si x está *cerca* de $a=0$. Por ejemplo, si usamos esta aproximación obtenemos que $\sqrt{1.2} \approx 1.10$. Observa que $\sqrt{1.2} = 1.095445$, con lo cual el error es menor que 10^{-2}. Sin embargo, si nos alejamos de $a=0$ esta aproximación pierde precisión y no es esperable que produzca buenos resultados, por ejemplo, cerca de $a=3$. Aquí debemos usar la otra linealización es decir, $\sqrt{x+1} \approx \dfrac{5}{4}+\dfrac{x}{4}$. Observa que si usamos la primera obtenemos $\sqrt{3.2} \approx 2.10$, mientras que con la segunda aproximación obtenemos $\sqrt{3.2} \approx \dfrac{5}{4}+\dfrac{2.2}{4} = 1.8$. Recuerda que $\sqrt{3.2} = 1.78885$.

Este proceso de aproximación se puede generalizar, siempre que la función f tenga suficientes derivadas, usando polinomios en lugar de la aproximación lineal $L(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$.

EJEMPLO. Consideremos la función exponencial $f(x) = e^x$ y el punto $a=0$. Entonces la aproximación lineal en $a=0$ es, $L(x) = 1+x$, puesto que $f(0)=1$ y $f'(0)=1$. Por comodidad denotaremos, en adelante a la función $L(x)$ por $P_1(x)$, puesto que se trata de un polinomio de grado 1. Observa que $P_1(0)=1$ y $P_1'(0)=1$. Buscamos ahora un polinomio de grado dos $P_2(x)$, de forma que $P_2(0)=1$, $P_2'(0)=1$ y $P_2''(0) = f''(0) = 1$. No es difícil comprobar que $P_2(x) = 1+x+\dfrac{x^2}{2}$. Continuando este proceso, buscamos ahora un polinomio de grado tres $P_3(x)$, de forma que $P_3(0)=1$, $P_3'(0)=1$, $P_3''(0)=1$ y $P_3'''(0) = f'''(0) = 1$. No es difícil comprobar que $P_3(x) = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.



Cada una de estas funciones: $y = P_1(x)$, $y = P_2(x)$, e $y = P_3(x)$ *mejora* la aproximación de la función exponencial $f(x) = e^x$. De hecho, si aproximamos el valor de $e \approx 2.71828$, que se obtiene para $x = 1$, obtenemos los siguientes resultados:

$$e \approx P_1(1) = 2, \quad e \approx P_2(1) = 2.5, \quad e \approx P_3(1) = 2.66667.$$

Los polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$ se llaman *polinomios de Taylor* de la función exponencial de ordenes 1, 2 y 3, respectivamente. En general tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Sea f una función con derivadas de orden k, para $k = 0,1,\ldots N$, en un intervalo que contiene al punto a en su interior. Para cada $n = 0,1,\ldots N$, el polinomio

$$P_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama *polinomio de Taylor de f de orden n alrededor de a.*

OBSERVACIÓN. El polinomio de Taylor $P_n(x)$ y todas sus derivadas hasta el orden n coinciden con las de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, es decir,

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad P_n''(a) = f''(a), \quad P_n'''(a) = f'''(a), \quad \ldots, \quad P_n^{n)}(a) = f^{n)}(a).$$

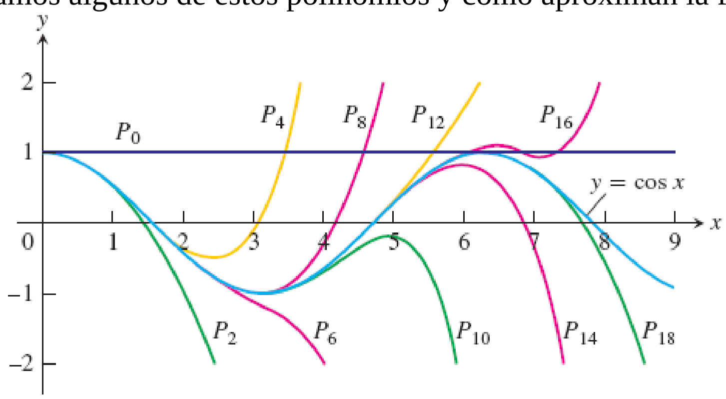
EJEMPLO. Vamos a calcular los diferentes polinomios de Taylor de la función coseno $f(x) := \cos x$, centrados en $a = 0$. Las sucesivas derivadas de la función coseno son

$$\begin{array}{cc} f(x) = \cos x, & f'(x) = -\operatorname{sen} x, \\ f''(x) = -\cos x, & f'''(x) = \operatorname{sen} x, \\ \vdots & \vdots \\ f^{2n)}(x) = (-1)^n \cos x, & f^{2n+1)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x. \end{array}$$

Como $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, tenemos que $f^{2n)}(0) = (-1)^n$ y $f^{2n+1)}(0) = 0$. Puesto que $f^{2n+1)}(0) = 0$ los polinomios de órdenes $2n$ y $2n+1$ son idénticos, es decir,

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A continuación dibujamos algunos de estos polinomios y cómo aproximan la función coseno.



Ahora responderemos a la siguiente pregunta: ¿Cómo de buena es la aproximación de una función $f(x)$ por el polinomio de Taylor $P_n(x)$ en un intervalo dado? La respuesta a esta cuestión está en el teorema de Taylor que enunciamos a continuación.

TEOREMA (TAYLOR). Supongamos que la función $f: x \in [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$ tiene derivadas f', $f'', \dots, f^{n)}$ que son continuas en $[a,b]$ y que $f^{n)}$ es derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.

OBSERVACIÓN. El teorema de Taylor es una generalización del teorema del valor medio de Lagrange. Cuando aplicamos el teorema de Taylor usualmente dejamos fijo el punto a y tratamos b como variable. La fórmula de Taylor es más fácil de escribir en esta situación si cambiamos la variable b por la variable x que usamos normalmente. Con este cambio de notación el teorema de Taylor afirma que si la función f tiene *suficientes derivadas* en un intervalo I que contiene al punto a en su interior y $x \in I$, entonces existe $c \in I(a,x)$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

donde $R_n(x) := \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Es importante recalcar que el punto c que aparece en la expresión de $R_n(x)$ depende del punto x. Es decir, para cada $x \in I$, existe $c \in I(a,x)$ que verifica la igualdad anterior, que se le llama *fórmula de Taylor de la función f de orden n alrededor de a.* La expresión $R_n(x)$ se le llama *resto de Taylor de orden n.*

EJEMPLO. Vamos a calcular e con un error menor que 10^{-6}. De la fórmula de Taylor (centrada en $a=0$) de la función exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in I(0,x)$$

obtenemos, para $x=1$, que $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + R_n(1)$, con $R_n(1) = \dfrac{e^c}{(n+1)!}$ y $c \in (0,1)$. Entonces tenemos que $\left| e - \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)\right| = |R_n(1)| = \dfrac{e^c}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$. Suponemos que nosotros conocemos que $e < 3$, con lo cual $e^c < 3$ porque $c < 1$. Ahora es fácil comprobar que $\dfrac{3}{10!} < 10^{-6}$. Entonces, basta tomar $n = 9$ en la fórmula anterior para obtener

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 2.718282$$

Con un error menor que 10^{-6}.

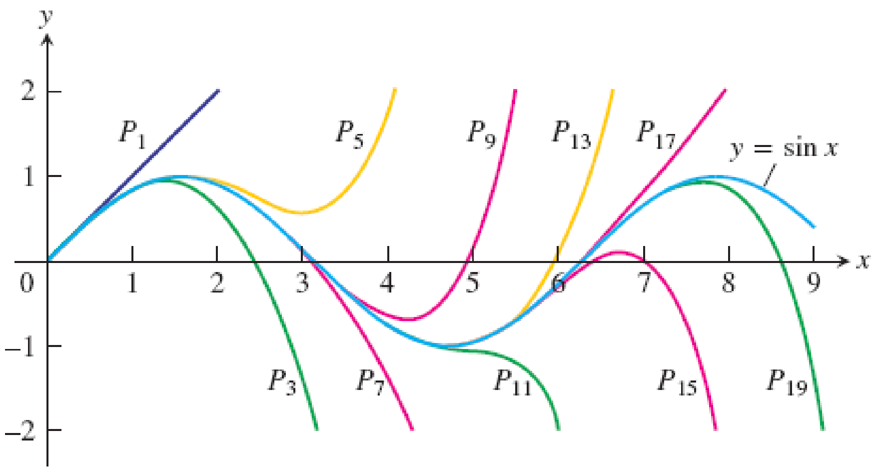
EJEMPLO. Para la función seno $f(x) := \operatorname{sen} x,$ tenemos que las sucesivas derivadas son

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x, & f'(x) = \cos x, \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x, & f'''(x) = -\cos x, \\ \vdots & \vdots \\ f^{2n)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x, & f^{2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x. \end{array}$$

Como $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$ tenemos que $f^{2n)}(0) = 0$ y $f^{2n+1)}(0) = (-1)^n$. Puesto que $f^{2n)}(0) = 0$ los polinomios de órdenes $2n+1$ y $2n+2$ son idénticos, es decir,

$$P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A continuación dibujamos algunos de estos polinomios y cómo aproximan la función seno.



Entonces, la fórmula de Taylor para la función seno es

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - (-1)^n \frac{\cos c}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \quad c \in I(0,x).$$

En particular tenemos que $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos c}{5!} x^5$, con $c \in I(0,x)$. El error que se comete al aproximar $\operatorname{sen} x$ por $x - \frac{x^3}{3!}$ está acotado por $\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| = \left| \frac{\cos c}{5!} x^5 \right| \le \frac{|x|^5}{5!}$ puesto que $|\cos c| \le 1$ para cualquier valor de c. Entonces, el error será menor que $3 \cdot 10^{-4}$ si se verifica que $\frac{|x|^5}{5!} < 3 \cdot 10^{-4}$, lo que significa que $|x| < \sqrt[5]{360 \cdot 10^{-4}} \approx 0.514$.

OBSERVACIÓN. En las condiciones del teorema de Taylor, para una función f que tiene suficientes derivadas en un intervalo I que contiene al punto a en su interior y $x \in I$, sabemos que existe

$c \in I(a,x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$, donde $R_n(x) := \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Como antes, si escribimos

$$P_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

tenemos la igualdad $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde $R_n(x) := \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Nos preguntamos ahora qué ocurre en la igualdad $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, cuando $x \to a$, es decir, cuando x está próximo al valor a (y dejamos fijo el grado n del polinomio). O bien, cuando $n \to \infty$, es decir, cuando aumentamos el grado del polinomio de Taylor, pero dejamos fijo el valor de x. Observa que, de la continuidad de la derivada $f^{n+1)}$ se verifica que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a) = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Es decir, cuando $x \to a$, la diferencia entre el polinomio de Taylor $P_n(x)$ y $f(x)$ converge a cero más rápidamente que la potencia $(x-a)^n$ tiende a 0. Esto significa que $P_n(x)$ está muy próximo a $f(x)$ cuando x está cerca de a.

Si existe una constante positiva M tal que $\left|f^{n+1)}(z)\right| \le M$ para todo $z \in [a,x]$, entonces el resto de Taylor está acotado por $\left|R_n(x)\right| = \left|\dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \le M\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$. Se puede probar que

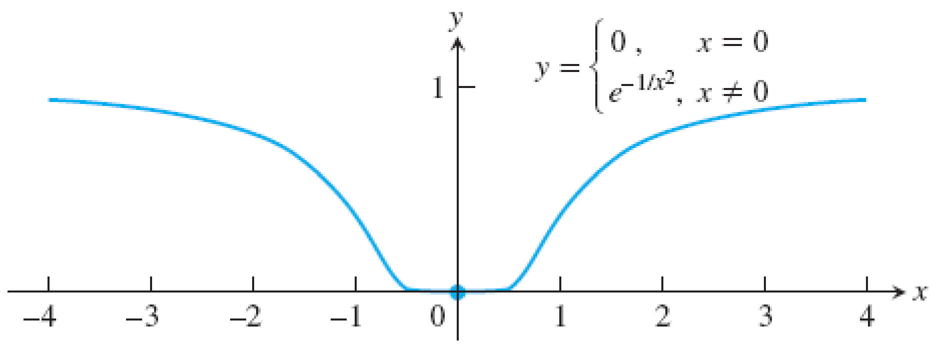
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

independientemente del valor $|x-a|$. Con estas hipótesis de acotación para las derivadas de la función f se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, esto es,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \\ &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

En este caso decimos que *la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, que se llama *serie de Taylor de la función* f *alrededor del punto* a, es convergente a la función o que la función f coincide con la suma de su serie de Taylor.

EJEMPLO. Existen funciones para las que su serie de Taylor no converge a la función. Por ejemplo, consideremos la función de Cauchy $f(x):=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$



Es posible comprobar que $f^{n)}(0)=0$, para todo $n=0,1,\ldots$ Esto significa que su serie de Taylor de f centrada en $a=0$ es

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n+\cdots=0.$$

Esta serie converge para todo x, (su suma vale siempre 0) pero converge a $f(x)$ sólo para $x=0$.

EJERCICIO 1. Calcula los polinomios de Taylor de orden 1, 2 y 3 alrededor del punto a para las siguientes funciones f.

1. $f(x)=\log(x+1),\quad a=0.$
2. $f(x)=\frac{1}{x+1},\quad a=0.$
3. $f(x)=\frac{1}{x},\quad a=2.$
4. $f(x)=\operatorname{sen} x,\quad a=\frac{\pi}{4}.$
5. $f(x)=\sqrt{x+1},\quad a=0.$
6. $f(x)=\sqrt{x},\quad a=4.$

EJERCICIO 2. Calcula los polinomios de Taylor de grado 4 de las funciones que se indican a continuación alrededor del punto dado.

(1) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ alrededor de $a=0.$
(2) $f(x)=\frac{x}{1+x}$ alrededor de $a=1.$
(3) $f(x)=\log x$ alrededor de $a=1.$
(4) $f(x)=x^3-2x^2+3x-5$ alrededor de $a=2.$

EJERCICIO 3. ¿Para qué valores de x se puede remplazar $\operatorname{sen} x$ por $x-\frac{x^3}{6}$ con un error menor que $5\cdot 10^{-4}$?

EJERCICIO 4. El polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f(x)$ dos veces derivable en $x=a$ se llama *aproximación cuadrática* de f en el punto a. Para las siguientes funciones calcula la linealización (el polinomio de Taylor de orden 1) y la aproximación cuadrática en el punto $a=0$.

1. $f(x)=\log(\cos x)$.
2. $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $f(x)=\cosh x$.
5. $f(x)=\operatorname{sen} x$.
6. $f(x)=\tan x$.

EJERCICIO 5. Si remplazamos $\cos x$ por $1-\dfrac{x^2}{2}$ y $|x|<0.5$, ¿qué estimación se puede dar del error?

EJERCICIO 6. Cuando $0\le x\le 0.01$, demuestra que e^x se puede remplazar por $1+x$ con un error menor que el $0.6\,\%$ de x. Usa que $e^{0.01}=1.01$.

EJERCICIO 7. ¿Para qué valores de $x>0$ se puede remplazar $\log(1+x)$ por x con un error menor que el 1% de x?

EJERCICIO 8. Usa un desarrollo de Taylor de la función $\log(1+x)$ para calcular $\log(1.2)$ con un error menor que $\varepsilon=0.01$.

EJERCICIO 9. Considera la función $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$, definida para $x>0$.

a) Halla los polinomios de Taylor de grados 2 y 3 de f alrededor de $a=1$.
b) Aproxima el valor de $f(1.1)$ usando el polinomio de Taylor anterior de grado 2 y estima el error cometido.