Álgebra y Lógica Computacional

Carrera: Licenciatura en Sistemas de la Información

Prácticas para la clase

Responsable de asignatura:
Lucas Catalano

Equipo docente:
Pablo Chale
Hernán De La Vega
Virginia Figueroa
Jorge González
Abel Klobouk
Enrique Pires

1er cuatrimestre 2021

Contenidos

Álgebra y Lógica Computacional
1^{er} cuatrimestre 2021

Práctica 1

Responsable de asignatura:
Lucas Catalano

1 Lógica

Proposiciones

1. Decidir cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones y cuales no. En el caso de que lo sean dar, si fuera posible, su valor de verdad.
   (a) Existen hojas de árboles de color verde.
   (b) Universidad Nacional de Luján.
   (c) $x + 1 = 5$
   (d) Nungún valor real de x cumple que $x + 1 = 5$.
   (e) Todo valor real de x cumple que $x + 1 = 5$.
   (f) Existe algún valor real de x tal que cumple $x + 1 = 5$
   (g) ¿Qué edad tiene Juan?
   (h) ¿Juan tiene 25 años?
   (i) La Universidad Nacional de Luján se encuentra en la Provincia de Santa Fe.
   (j) $4 \leq 3$
   (k) $4 \leq 4$
   (l) $5 + 4 - 5$
   (m) Si Juan hubiese nacido en Malasia seguramente sería millonario.
   (n) Algún rombo tiene ángulos rectos.
   (o) Todos los rombos tienen ángulos rectos.
   (p) Ningún rombo tiene ángulos rectos.
   (q) Todos los perros son cuadrúpedos.
   (r) Todos los cuadrúpedos son perros.
   (s) Un extraterrestre.
   (t) ¿Usted es un extraterrestre?
   (u) Los extraterrestres existen.

2. Negar las siguientes proposiciones:
   (a) En UNLu, todos los estudiantes son menores de edad.
   (b) Existen mujeres que tienen el cabello corto.
   (c) Nungún intendente de Luján fue peronista.
   (d) Nunca volé a la Luna.
   (e) En Jáuregui hay muchas ardillas.
   (f) Todas las ardillas de Jáuregui son lindas.

3. Caracterice los triángulos isósceles, es decir, estudie propiedades necesarias y suficientes.

4. Caracterice los triángulos escalenos, es decir, estudie propiedades necesarias y suficientes.

Proposiciones compuestas y tablas de verdad

5. Sean P y Q dos proposiciones dadas. Utilizar ejemplos para estudiar la equivalencia o no equivalencia entre las siguientes proposiciones compuestas:

(a) $p \Rightarrow q$
(b) $q \Rightarrow p$
(c) $\neg(p \wedge \neg q)$
(d) $\neg p \vee q$
(e) $\neg p \Rightarrow q$
(f) $p \Rightarrow \neg q$
(g) $\neg p \Rightarrow \neg q$
(h) $\neg q \Rightarrow p$
(i) $q \Rightarrow \neg p$
(j) $\neg q \Rightarrow \neg p$

6. Para cada una de las proposiciones del ítem anterior, elaborar una tabla de verdad y justificar, así, la equivalencia o no equivalencia entre las mismas.

7. Confeccionar una tabla de verdad para las siguientes proposiciones compuestas:

(a) $(p \wedge q) \vee r$
(b) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
(c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$
(d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
(e) $(p \Rightarrow q) \wedge r$
(f) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$
(g) $p \Rightarrow (q \vee \neg p)$
(h) $p \vee ((q \wedge r) \vee q)$
(i) $(p \vee \neg q) \wedge (r \vee q)$
(j) $((p \vee q) \wedge r) \vee q$
(k) $p \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow (r \wedge p))$
(l) $\neg(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)$
(m) $q \wedge \neg q$
(n) $\neg p \Rightarrow p$
(o) $(\neg p \wedge q) \wedge (p)$
(p) $q \vee \neg q$
(q) $(\neg p \vee p) \Rightarrow p$
(r) $(\neg q \wedge q) \wedge p$
(s) $\neg(p \wedge q)$
(t) $\neg p \vee \neg q$

8. Sean p, q y r las proposiciones:
p : Estudio.
q : Juego tenis.
r : Apruebo Álgebra y Lógica Computacional.

(a) Escribir como fórmulas lógicas los siguientes enunciados:
i. p_1 : Si estudio, entonces aprobaré Álgebra y Lógica Computacional.
ii. p_2 : Si no juego tenis, entonces estudiaré.
iii. p_3 : Reprobé Álgebra y Lógica Computacional.

(b) A partir del item 8a escribir en forma de teorema el siguiente enunciado:
"Si estudio, entonces aprobaré Álgebra y Lógica Computacional. Si no juego tenis, entonces estudiaré. Reprobé Álgebra y Lógica Computacional. Por consiguiente, juego tenis."

9. Sean p, q, r y s las proposiciones:
p : Trabajo.
q : Ahorro.
r : Compraré una casa.
s : Podré guardar el coche en mi casa.

(a) Escribir como fórmulas lógicas los siguientes enunciados:

i. p_1 : Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa.
ii. p_2 : Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa.
iii. p_3 : Si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro.

(b) A partir del item 9a escribir en forma de teorema el siguiente enunciado:
"Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro."

10. A la inversa de los ejercicios 8 y 9 construya ejemplos para los siguientes teoremas:

(a) $[(\neg r \Rightarrow \neg p) \wedge p] \Rightarrow r$.
(b) $[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge r] \Rightarrow q$.
(c) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \wedge \neg r] \Rightarrow \neg(p \vee r)$.

Razonamientos lógicos

11. Demuestre la validez de los siguientes razonamientos:

(a) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \vee r) \\ \neg q \\ p \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ p \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \neg r \\ \hline \therefore\ \neg p \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{l} \neg r \Rightarrow \neg p \\ p \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

(e) $$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow \neg q \\ r \Rightarrow q \\ \hline \therefore\ \neg r \end{array}$$

(f) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \neg r \\ \hline \therefore\ \neg(p \vee r) \end{array}$$

(g) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow \neg q \\ r \\ \hline \therefore\ \neg p \end{array}$$

(h) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\ \neg q \Rightarrow \neg p \\ p \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

(i) $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \Rightarrow (r \wedge q) \\ r \Rightarrow (s \vee t) \\ \neg s \\ \hline \therefore\ t \end{array}$$

(j) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\ p \vee s \\ t \Rightarrow q \\ \neg s \\ \hline \therefore\ \neg r \Rightarrow \neg t \end{array}$$

(k) $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \neg r \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

(l) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ \neg q \Rightarrow p \\ \neg r \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

(m) $$\begin{array}{l} (p \vee q) \Rightarrow r \\ r \Rightarrow s \\ \hline \therefore\ \neg s \Rightarrow \neg q \end{array}$$

(n) $$\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee r \\ \neg q \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

12. Mostrar mediante un contraejemplo que ninguno de los siguientes razonamientos es válido; es decir, dé una asignación de valores de verdad a p, q y r de modo que tododas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.

(a) $[(p \wedge \neg q) \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))] \Rightarrow \neg r$.

(b) $$\begin{array}{l} (p \wedge q) \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \end{array}$$

(c) $[(r \vee \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow q)] \Rightarrow p$.

13. Usando las equivalencias lógicas de las página 6 simplifique las siguientes fórmulas:

(a) $p \vee [p \wedge (p \vee q)]$
(b) $q \wedge [(p \wedge (\neg r \vee q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge (r \vee t \vee \neg t))]$
(c) $[p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \wedge [(p \wedge r \wedge t) \vee t]$

Cuantificadores

14. Decidir si las sigientes proposiciones son *verdaderas* o *falsas* y escribir una justificación en ambos casos. Escribir la negación en cada caso.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
(b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$
(d) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

15. Sean $A = \{-3; 1; 5; 7; 12; 18\}$ y $B = \{-3; 5; 7\}$. Decidir si las siguientes proposiciones son *verdaderas* o *falsas*. Escribir la negación para cada caso.

(a) $\forall x \in A, x \in B$
(b) $\forall x \in B, x \in A$
(c) $\exists x \in A : x \in B$
(d) $\exists x \in B : x \in A$
(e) $\exists x \in A : x \in A$

Aplicaciones a circuítos y a computación

16. Grafique los circuitos asociados a las fórmulas del item 13 y a las simplificaciones obtenidas.

17. Determinar los valores de x e y después de la ejecución de cada una de las proposiciones siguientes de modo tal que el valor de x después de la ejecución de (a) se convierte en el valor de x para la proposición del apartado (b) y así sucesivamente. Inicialmente, las variables enteras x e y tienen los valores 3 y 8 respectivamente (Aclaración: La operación Div devuelve la parte entera de un cociente; por ejemplo, $8Div4 = 2$ y $9Div2 = 4$).

(a) Si $y - x = 5$, entonces $x := x - 2$
(b) Si $[(2y = x)$ y $(xDiv4 = 1)]$, entonces $x := 4y - 3$
(c) Si $[(x < 8)$ ó $(yDiv2 = 2)]$, entonces $x := 2y$, de lo contrario $y := 2x$
(d) Si $[(x < 20)$ y $(xDiv6 = 1)]$, entonces $y := y - x - 5$
(e) Si $[(x = 2y)$ o $(xDiv2 = 5)]$, entonces $y := y + 2$
(f) Si $[(xDiv3 = 3)$ e $(yDiv3 = 1)]$ entonces $y := x$
(g) Si $yx = 35$, entonces $x := 3y + 7$

18. Para cada segmento de programa contenido en los apartados siguientes, determinar el número de veces que se ejecuta la sentencia `x:=x+1`.

(a)
```
y:=1
Si y<2 o y>0 entonces
   x:=x+1
de lo contrario
   x:=x+2
```

(b)
```
y := 1
Hacer mientras [(y>0 e y<3) o y=3]
   Comienzo
   x:=x+1
   y:=y+1
   Fin
```

(c)
```
y:=1
Hacer mientras y>0 e y<4
   Comienzo
   Si y<2 entonces
     y:=y+1
   de lo contrario
     Comienzo
     y:=y+2
     x:=x+1
     fin
   Fin
```

19. ¿Cuántas veces se imprime el valor de x en el siguiente programa?
```
x:=10
y:=1
Hacer mientras y ≤ 7
   Comienzo
   z:=1
   Hacer mientras z≤y+3
     Comienzo
     Si [(x>8) o ((y>5) y (z<10))] entonces imprimir x
     z:=z+1
     Fin
   x:=x-1
   y:=y+1
   Fin
```

Tablas

- **Tautologías**

  - Adición:
    $p \Rightarrow (p \vee q)$
  - Simplificación:
    $(p \wedge q) \Rightarrow p$
  - Absurdo:
    $(p \Rightarrow Falso) \Rightarrow \neg p$
  - Modus ponens:
    $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
  - Modus tollens:
    $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
  - Transitividad:
    $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

- **Reglas de inferencia**

  - Adición:
    $$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$$
  - Simplificación:
    $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$
  - Silogismo disyuntivo:
    $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$
  - Silogismo hipotético:
    $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \Rightarrow r \end{array}$$
  - Conjunción:
    $$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore\ p \wedge q \end{array}$$
  - Modus ponens:
    $$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$
  - Modus tollens:
    $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore\ \neg p \end{array}$$

- **Equivalencias lógicas**

  - Doble negación:
    $\neg(\neg p) \equiv p$
  - Leyes conmutativas:
    $p \vee q \equiv q \vee p$
    $p \wedge q \equiv q \wedge p$
  - Leyes asociativas:
    $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
    $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$
  - Leyes distributivas:
    $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
    $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
  - Leyes de idempotencia:
    $p \vee p \equiv p$
    $p \wedge p \equiv p$
  - Leyes de De Morgan:
    $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
    $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
  - Contrarecíproco:
    $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Mas equivalencias:

- **Importante** $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

Aclaración: Llamaremos "1" a cualquier tautología (por ejemplo $p \vee \neg p$) y "0" a cualquier contradicción (por ejemplo $p \wedge \neg p$).

- Contradicción $p \wedge \neg p \equiv 0$
- Leyes de identidad y absorción.

$$(p \vee 0) \equiv p$$
$$(p \vee 1) \equiv 1$$
$$(p \wedge 0) \equiv 0$$
$$(p \vee \neg p) \equiv 1$$
$$(p \wedge 1) \equiv p$$
$$(p \wedge r) \vee p \equiv p$$
$$(p \vee r) \wedge p \equiv p$$

2 Ecuaciones

Resolver una ecuación quiere decir hallar el **conjunto** de todos los valores que al ser reemplazados en la incógnita hacen que la igualdad se satisfaga (***conjunto solución*** o simplemente ***solución***).
Observar que el *conjunto solución* podría ser el *conjunto vacío* (que se denota con el símbolo $\emptyset$), que una ecuación tenga como solución al conjunto vacío quiere decir que sabemos que ningún valor de la incógnita satisface la igualdad; obtener ese resultado es, también, haber resuelto la ecuación.

1. Resolver "mentalmente" (sin despejar la incógnita) las siguientes ecuaciones con incógnita real x:

   (a) $x - 3 = 0$
   (b) $x + 5 = 2$
   (c) $x - \pi = 0$
   (d) $x + \sqrt{2} = 3$
   (e) $2x + 1 = 5$
   (f) $2x + 1 = 0$
   (g) $x^2 = 16$
   (h) $4x + 1 = 3$
   (i) $x + 1 = x + 2$
   (j) $x + a = 0$
   (k) $\sqrt{x+2} = \sqrt{5}$
   (l) $x + b = 0$
   (m) $ax + b = 0$
   (n) $\sqrt{x} + 1 = 10$
   (o) $5x = 0$
   (p) $x + 1 = x + 1$

2. Para cada una de las siguientes ecuaciones con hasta dos incógnitas reales x e y hallar, cuando sea posible, al menos cinco pares (x, y) que pertenezcan a la solución (al conjunto solución).

   (a) $x + y = 15$
   (b) $x + y = 1$
   (c) $xy = 12$
   (d) $x + 2y = 3$
   (e) $x = y$
   (f) $\pi x = y$
   (g) $x^2 = y$
   (h) $x^2 = y^2$
   (i) $2x^2 = y^2$
   (j) $(x + 1)(y + 2) = 0$
   (k) $(x + y)(2x - y) = 0$
   (l) $x(x + y) = 0$
   (m) $(x + 5)0 = 2$
   (n) $(x + 5)0 = 0$

3. Decidir si los valores de x indicados pertenecen a la solución de la ecuación en cada caso:

   (a) $x = \frac{1}{2},\ 2x + 7 = 8$
   (b) $x = \frac{1}{3},\ 3x + 4 = 1$
   (c) $x = 3,\ (x - 4)(x - 3) = 0$
   (d) $x = -\sqrt{2},\ x^2 = 2$
   (e) $x = \sqrt{2},\ x^2 = 1$
   (f) $x = 3,\ \dfrac{1}{x-3} = 1$
   (g) $x = -4,\ \sqrt{x^2} = 4$
   (h) $x = 0,\ \dfrac{x}{x} = 0$
   (i) $x = 3,\ \dfrac{x-3}{x-3} = 1$
   (j) $x = 4,\ x^3 + 4x - 1 = 0$
   (k) $x = 4,\ \sqrt{3x-3} = \dfrac{3}{x-3}$
   (l) $x = -3,\ (x - 4)\sqrt{x-3} = 1$
   (m) $x = 3,\ (x - 4)\sqrt{x-3} = 0$
   (n) $x = \sqrt{2},\ x + \sqrt{x} = 2$

Algunos resultados útiles para resolver ecuaciones:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0, a = b \Leftrightarrow a.c = b.c$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^n = b^n \Leftrightarrow |a| = |b|$ para n un número par.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$ para n un número impar.
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_0^+, \quad a^2 = b \Leftrightarrow |a| = \sqrt{b}$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_0^+, \quad |a| = b \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + 2.a.b + b^2 = (a + b)^2$ (propiedad conocida como *Cuadrado del Binomio* o *Trinomio Cuadrado Perfecto*).
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (propiedad conocida como *Diferencia de Cuadrados*).
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c.(a + b) = c.a + c.b$ (propiedad conocida como *Distributiva del producto respecto de la suma*).
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \; ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (propiedad conocida como *Resolvente de la cuadrática*)

4. Utilizando ejemplos numéricos, estudiar la validez de cada uno de los resutados mostrados en el cuadro anterior.

5. Utilizando estrategias de resolución conocidas, resolver las siguientes ecuaciones (no realizar aproximaciones numéricas):

   (a) $(x + 4)\left(2x + \frac{1}{5}\right) = 0$

   (b) $\dfrac{2x + 1}{3} = \frac{5}{2}$

   (c) $x + \pi x = 2$

   (d) $\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{8}x + 1\right) = 0$

   (e) $x^3 = 2$

   (f) $x^4 = 16$

   (g) $\sqrt{5}x + \frac{\sqrt{\pi+2}-7}{12\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[12]{10}}$

   (h) $x^2 + 4 = 0$

   (i) $(x - 1)(x + 2) = 2$

   (j) $x^2 + x - 2 = 0$

   (k) $3x^2 - 5x = 2$

   (l) $3(x - 5)^2 - 5(x - 5) = 2$

   (m) $(x^2 + x - 2)(3x^2 - 5x) = 0$

   (n) $(-2x^2 + 4x + 6)(x - 3) = 0$

   (o) $\dfrac{x + 1}{3} = \frac{5}{2}$

   (p) $3x + \pi x = 2$

   (q) $x^4 = 7$

   (r) $(x + 1)(x + 9) = 2$

   (s) $2x^2 + 2x - 4 = 0$

   (t) $(-3x^2 + 3x + 7)(x + 1) = 0$

Entre los conjuntos numéricos más conocidos con los que trabajaremos en esta práctica se encuentran los Naturales ($\mathbb{N}$), los Enteros ($\mathbb{Z}$), los Racionales ($\mathbb{Q}$) y los Reales ($\mathbb{R}$).

- Los **Números Naturales** son aquellos que se usan para contar $(1, 2, 3, \dots)$.
- Los **Números Enteros** contienen a los Naturales, los opuestos de los Naturales y al cero $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$.
- Los **Números Racionales** son todos aquellos que pueden expresarse como un cociente de Números Enteros ($\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$).
- Los **Números Reales** son todos los valores que pueden ser alguna medida (por jemplo, la medida de un segmento). Este conjunto contiene a los Racionales, pero hay muchos otros, entre los más conocidos está $\sqrt{2}$ (que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno), π (que es la mitad de la longitud de una circunferencia de radio uno). Desde el punto de vista de la representación, los Números Reales son todos los números decimales (con una cantidad finita o infinita de decimales, incluyendo entre estos a los enteros).

Observar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

6. Resolver las siguientes ecuaciones con incógnitas en los conjuntos indicados en cada caso:

(a) $2x + 2 = 5, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$
(b) $2x + 2 = 5, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(c) $2x + 2 = 5, \quad \text{con } x \in \mathbb{Q}$
(d) $2x + 2 = 5, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$
(e) $x^2 = 16, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$
(f) $x^2 = 16, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(g) $x^2 = 16, \quad \text{con } x \in \mathbb{Q}$
(h) $x^2 = 16, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$
(i) $(x + \frac{1}{3})(x + 5)(x + \sqrt{7}) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$
(j) $(x + \frac{1}{3})(x + 5)(x + \sqrt{7}) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(k) $(x + \frac{1}{3})(x + 5)(x + \sqrt{7}) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{Q}$
(l) $(x + \frac{1}{3})(x + 5)(x + \sqrt{7}) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$
(m) $(x + \frac{1}{\sqrt{3}})(x - 5)(x + 2) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$
(n) $x^2 + 2 = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(o) $x^2 - 7 = -3\ , \quad \text{con } x \in \mathbb{Z}$
(p) $(x^2 + 1)(x + 3) = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$

7. Utilizando estrategias de resolución vistas hasta el momento, resolver las siguientes ecuaciones (no realizar aproximaciones numéricas). Luego, de ser posible, verificar los resultados obtenidos:

(a) $\dfrac{x+1}{x+1} = 0$
(b) $\dfrac{x}{x} = 0$
(c) $x\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1}$
(d) $\dfrac{x+2}{x-2} = 2$
(e) $x + 3 = \sqrt{x+3}$
(f) $\dfrac{x}{x} = 1$
(g) $\dfrac{x}{x+2} = -\dfrac{2}{x+2}$
(h) $\dfrac{x^2+3x}{x} = 0$
(i) $\sqrt{-2x-1} = x$
(j) $\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x-1)} = 1$
(k) $\dfrac{\sqrt{x}}{3} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

8. Explique en lenguaje coloquial por qué la ecuación $x = -\sqrt{x}$ tiene como solución al conjunto $\{0\}$.

Práctica 2

Responsable de asignatura:
Lucas Catalano

Llamamos *dominio natural* de una ecuación al subconjunto de los Números Reales "más grande" que podrían ser solución de la ecuación, es decir aquellos para los cuales es posible *evaluar* la expresión de la ecuación para obtener un valor de verdad (V o F).
En los casos en los que se proponga una ecuación y no se aclare cuál es su dominio, sobreentenderemos que el mismo es el *dominio natural*.

9. Hallar el dominio natural de las siguientes ecuaciones:

(a) $\dfrac{2}{x} = 3$

(b) $3 + x = \sqrt{x}$

(c) $x + 5 - \sqrt{5} = \dfrac{x}{2}$

(d) $\dfrac{2}{x+5} = 6$

(e) $1 = -\dfrac{x}{\sqrt{x} - 3}$

(f) $\dfrac{\sqrt{x}}{3} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

(g) $\sqrt{\dfrac{2}{x+4}} = -3$

(h) $\sqrt{-\dfrac{2}{x+4}} = \dfrac{2}{x}$

(i) $\dfrac{x-3}{2x+1} = 3$

(j) $-\dfrac{2}{x+4} = \dfrac{4}{x^2}$

(k) $\sqrt{2x+4} = \dfrac{1}{x}$

(l) $\sqrt[3]{x} = \dfrac{4}{x-3}$

(m) $\sqrt{x} = \dfrac{4}{x-3}$

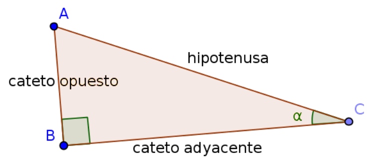
10. Resolver las ecuaciones del ítem anterior, a excepción de las 9k, 9l y 9m.

3 Trigonometría

Las siglas **(SC)** al comienzo de una consigna indica que la misma debe ser resuelta sin utilizar calculadora, computadora, ni ningún medio tecnológico.

Triángulos rectángulos

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama "hipotenusa" y los lados adyacentes al ángulo recto se llaman "catetos". Focalizando en uno de los ángulos agudos del triángulo (α), llamamos "cateto opuesto" al cateto que es lado opuesto al ángulo α y llamamos "cateto adyacente" al cateto que se encuentra adyacente a α.



Algunos resultados y definiciones muy importantes se aplican a este tipo de triángulos.

Teorema de Pitágoras
En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de la medida de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hiptenusa.
En nuestro caso,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Trigonometría. Definiciones básicas
Se definen las siguientes razones:
El cociente entre el *cateto opuesto* y la *hipotenusa* es el "Seno de α", es decir

$$\sin(\alpha) = \frac{AB}{AC}$$

El cociente entre el *cateto adyacente* y la *hipotenusa* es el "Coseno de α", es decir

$$\cos(\alpha) = \frac{BC}{AC}$$

El cociente entre el *cateto opuesto* y el *cateto adyacente* es la "Tangente de α", es decir

$$\tan(\alpha) = \frac{AB}{BC}$$

Observar que $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

1. Para un triángulo ABC rectángulo en B con las características indicadas en cada caso, calcular la medida de los lados y ángulos restantes:

   (a) $AB = 2$, $\angle BAC = 30^o$.

(b) $CA = 4$, $\angle BAC = 60^o$.

(c) $BC = 1,4$, $\angle BAC = 20^o$.

(d) $AC = \sqrt{3}$, $\angle BCA = 12^o$.

(e) $AC = \frac{3}{4}$, $\angle BAC = 70^o$.

2. **(SC)** Considere un triángulo ABC isósceles rectángulo en B tal que el lado BA mide $3cm$. Calcule el seno, coseno y tangente del ángulo $\angle BAC$.

3. **(SC)** Idem punto anterior pero con $AB = 5cm$.

4. **(SC)** Considere un triángulo ABC isósceles rectángulo en B. Calcule el seno, coseno y tangente del ángulo $\angle BAC$. ¿El valor del seno, coseno y tangente depende de la medida del lado?

5. **(SC)** Considere un triángulo ABC rectángulo en B tal que $AB = 2$ y $BC = 4$. Calcule el seno, coseno y tangente para los ángulos $\angle CAB$ y $\angle BCA$.

6. **(SC)** Sea ABC un triángulo rectángulo en B tal que $AB = 2BC$. Calcular el seno, coseno y tangente del ángulo $\angle BAC$.

7. Para un triángulo ABC rectángulo en B con las características indicadas en cada caso, calcular la medida de los lados y ángulos restantes:

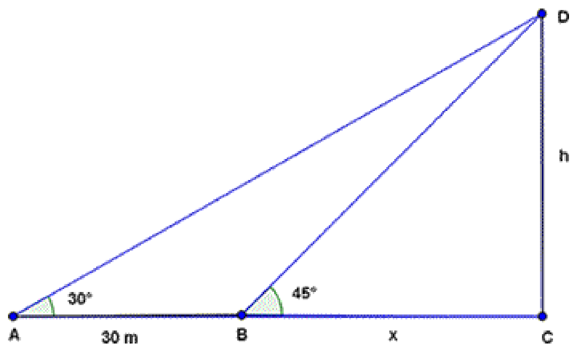
   (a) $AB = 2cm$, $BC = 4cm$.

   (b) $CA = 4$, $AB = \sqrt{2}$.

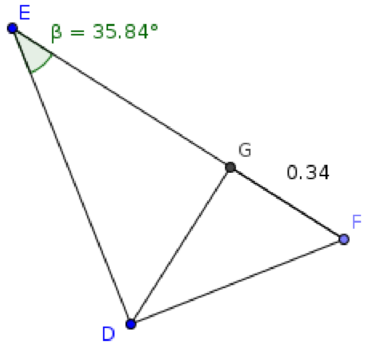
   (c) $BC = \frac{\sqrt{12}}{2}$, $CA = 12$.

8. Un ingeniero necesita estimar con cierta precisión la latura de un edificio. Para ello se sitúa a $25m$ de su base y calcula el ángulo de visión con respecto a la horizontal hasta la cima del edificio. Dicho ángulo tiene una amplitud de 37^o. ¿Cómo pueden utilizarse estos datos para obtener la altura buscada?

9. CD representa la altura de una torre. Nos situamos en el punto B y medimos el ánguo de elevación, luego nos alejamos hasta el punto A y nuevamente medimos el ángulo de elevación. Utilizando los datos obtenidos que se muestran en el diagrama calcule la altura de la torre.



10. Considere la siguiente figura en la que $\angle EDF = \angle EGD = 90^o$:



    (a) Calcule $\sin(\angle GFD)$.
    (b) Calcule $\cos(\angle GDF)$.
    (c) Calcule $\tan(\angle GDE)$.

11. Calcular los catetos de un triángulo rectángulo suponiendo conocidas las medidas de la hipotenusa y la de uno de los ángulos agudos (Plantear el problema para distintos casos de valores numéricos).

12. Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo suponiendo conocidas la medida de un cateto y la del ángulo opuesto (Plantear el problema para distintos casos de valores numéricos).

13. Calcular el cateto de un triángulo rectángulo suponiendo conocidas las medidas del otro cateto y la del ángulo adyacente. Calcular también la hipotenusa (Plantear el problema para distintos casos de valores numéricos).

14. Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo suponiendo conocidas las medidas de los catetos (Plantear el problema para distintos casos de valores numéricos).

15. Considere un triángulo rectángulo con hipotenusa de medida 1, y un ángulo agudo de medida 60^o. Calcular la medida de sus catetos.
    Sugerencia: Dibujar un triángulo equilátero y determinar su altura a partir de uno de sus vértices. Quedarán determinados dos triángulos rectángulos con ángulos agudos de medida 30^o y 60^o.

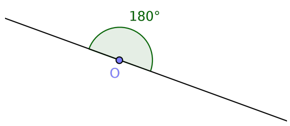
Medida de ángulos

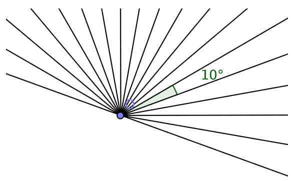
Los ángulos pueden medirse de varias maneras, una de ellas es la que utilizamos hasta el momento conocida como "medida con grados sexagesimales", la otra que utilizaremos es conocida como "medida en radianes".

Grados sexagesimales

Los grados sexagesimales son aquellos que utilizamos para medir los ángulos desde la escuela primaria, veamos cómo es que surge esta forma de medir.

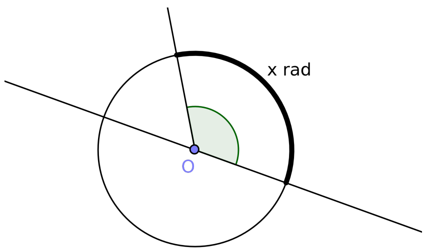
Consideremos un ángulo llano, dicho ángulo se define (arbitrariamente) de medida 180^o. Al dividirse en 180 ángulos iguales, obtenemos ángulos de medida 1^o.





Radianes

Otra manera de medir un ángulo es utilizando la medida "radial", esta se obtiene determinando una circunferencia centrada en el vértice del mismo con un **radio de medida 1** y considerando la longitud del arco que abarca el ángulo en cuestión. Esta longitud es la medida radial del ángulo y la unidad de medida es el "radian" (rad). A esta circunferencia se la llama "circunferencia trigonométrica".



16. Calcular la medida radial de un ángulo llano.
17. Calcular la medida radial de un ángulo que mide $45°$ (grados sexagesimales).
18. Exprese los siguientes ángulos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$ y muestre los resultados gráficamente:

(a) 20^o	(d) 180^o	(g) 90^o
(b) 0^o	(e) 270^o	(h) 35^o
(c) 30^o	(f) 60^o	(i) 10^o

19. Exprese los siguientes ángulos en grados sexagesimales y muestre los resultados gráficamente. Aproxime los valores obtenidos si es necesario:

(a) π
(b) $\frac{\pi}{2}$
(c) 0
(d) $1,9\pi$
(e) $\frac{3}{4}\pi$
(f) $\frac{\pi}{3}$
(g) $\frac{\pi}{4}$
(h) $\frac{1}{2}$
(i) $\frac{\pi}{6}$
(j) 5
(k) $\frac{5}{3}\pi$

20. Representar sobre cincunferencias trigonométricas cada uno de los arcos cuyas medidas son: π, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{9}{10}\pi$.

21. ¿A cuántos grados aproximadamente equivale 1 "radián"?

22. Transformar a "radianes" las siguientes medidas en grados:

$$0^o, 15^o, 135^o, 270^o$$

23. Transformar a grados sexagesimales las siguientes medidas radiales:

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5}{7}\pi$$

Circunferencia trigonométrica

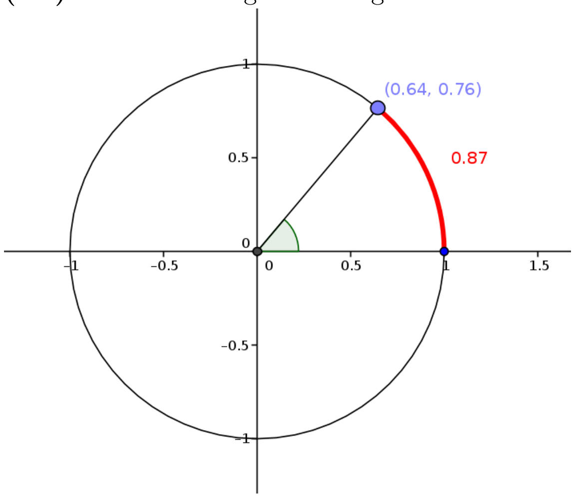
La circunferencia trigonométrica, y la forma de medir los ángulos usando radianes permite extender la noción de ángulo asumiendo que existen medidas de ánguos negativas y mayores a 2π.

ACLARACIÓN: los grados sexagesimales sólo miden ángulos geométricos, en este sentido nunca se debe escribir, por ejemplo -45^o o 720^o, en estos casos debemos utilizar la medida radial, es decir, $-\frac{\pi}{4}$ o 4π.

24. En el ejercicio 20 cambiar al signo de las medidas y representar los correspondientes arcos.

25. Para cada uno de los ángulos de los ítems 20 y 24, calcule las coordenadas (x, y) del punto que los prepresentan sobre la circunferencia trigonométrica. Luego indique el seno y el coseno en cada caso.

26. **(SC)** Considere el siguiente diagrama:



(a) Calcular aproximadamente $\sin(0,87)$.
(b) Calcular aproximadamente $\cos(0,87)$.
(c) Calcular aproximadamente $\sin(-0,87)$.
(d) Calcular aproximadamente $\cos(-0,87)$.
(e) Calcular aproximadamente $\sin(0,87+2\pi)$.
(f) Calcular aproximadamente $\sin(0,87-\pi)$.
(g) Calcular aproximadamente $\cos(\pi-0,87)$.
(h) Calcular aproximadamente $\cos(4\pi-0,87)$.
(i) Hallar todos los ángulos en el intervalo $[0,5\pi]$ cuyo coseno sea aproximadamente $0,64$.
(j) Hallar todos los ángulos en el intervalo $[-2\pi,\pi]$ cuyo seno sea aproximadamente $0,76$.

27. **(SC)** Examinar cómo varía el signo de $\cos(\theta)$ y el del $\sin(\theta)$, al variar θ entre 0 y 2π, y entre 0 y -2π ¿Qué signo tienen $\cos(3)$ y $\sin(3)$?

28. **(SC)** Despejar $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ de la expresión $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$ (no olvidar el doble signo $\pm$ cuando sea necesario).

29. **(SC)** Retomando lo realizado en la actividad 15, confeccionar una tabla de los valores $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ (estos son conocidos como **"ángulos notables"**).

30. **(SC)** Por "reducción al primer cuadrante" calcular $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{11}{6}\pi$ y para los valores opuestos (cambiados de signo).

31. **(SC)** Hallar los valores de θ para los cuales $\sin(\theta)=0$, $\sin(\theta)=1$, $\cos(\theta)=0$, $\cos(\theta)=1$ (Ejemplo: $\sin(\theta)=1$ para $\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots)$).

32. **(SC)** Mostrar que $\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$.

33. **(SC)** Calcular $\tan(\alpha)$ para $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi$.
Cambiar de signo la medida de los ángulos y repetir el cálculo.

34. **(SC)** Examinar cómo varía el signo de $\tan(\alpha)$ al variar α entre 0 y 2π, y entre 0 y -2π.

35. **(SC)** Calcular $\tan(\frac{3}{4}\pi), \tan(-\frac{\pi}{6}), \tan(\frac{5}{4}\pi), \tan(\frac{8}{3}\pi)$.

36. **(SC)** A partir de la circuferencia trigonométrica, verificar gráficamente que cada una cada una de las siguientes propiedades son correctas $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $-1 \le \cos(\alpha) \le 1$
(b) $-1 \le \sin(\alpha) \le 1$
(c) $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$
(d) $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$
(e) $\sin(\alpha)=-\sin(-\alpha)$
(f) $\sin(\alpha)=-\sin(\alpha-\pi)$
(g) $\cos(\pi-\alpha)=-cos(\alpha)$
(h) $\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$

37. Verificar con ejemplos numéricos que se cumplen cada una de las siguientes "identidades trigonométricas" $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(a) $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$
(b) $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$

38. A partir de los puntos 36 y 37, obtener identidades en donde uno de los miembros de la igualdad sea:

(a) $\sin(\alpha - \beta)$
(b) $\cos(\alpha - \beta)$
(c) $\sin(2\alpha)$
(d) $\cos(2\alpha)$
(e) $\sin(3\alpha)$
(f) $\cos(5\alpha)$

39. **SC** Utilizando el gráfico de la circunferencia trigonométrica y la tabla del *seno*, *coseno* y *tangente* para los "ángulos notables", hallar:

    (a) Todos los valores de ángulo α con $0 \leq \alpha < 3\pi$ tales que $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$.
    (b) Todos los valores de ángulo β con $-3\pi < \beta < \pi$ tales que $\cos(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
    (c) Todos los valores de ángulo γ con $-\pi < \gamma \leq 2\pi$ tales que $\tan(\gamma) = 1$.
    (d) Todos los valores de ángulo γ con $-\pi < \gamma \leq 2\pi$ tales que $\tan(\gamma) = -1$.
    (e) Todos los valores de α con $0 < \alpha < \pi$ tales que $\cos(\alpha) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
    (f) Todos los valores de β con $-4\pi < \beta < 3\pi$ tales que $\sin(\beta) > 1$.
    (g) Todos los valores de γ con $-4\pi < \gamma < 3\pi$ tales que $\sin(\gamma) \geq -1$.
    (h) Todos los valores de ϵ con $-2\pi < \epsilon < \pi$ tales que $\sin(\epsilon) \leq -1$.
    (i) Todos los valores de δ con $-\pi < \delta < 4\pi$ tales que $\sin(\delta) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

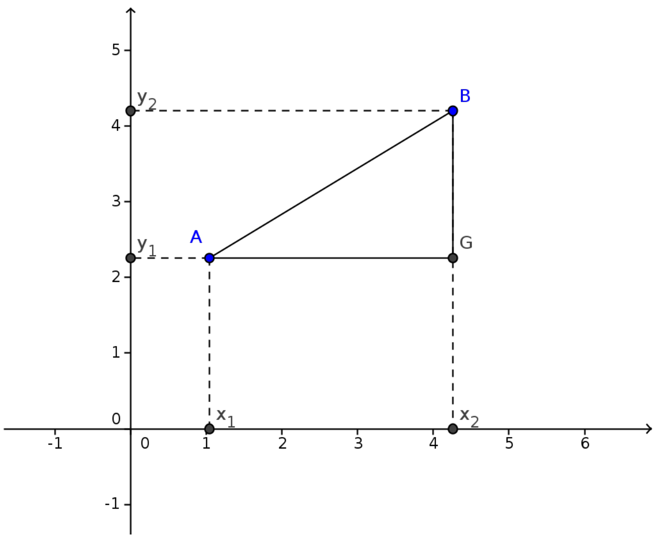
40. Resolver las siguientes ecuaciones:

    (a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, con $x \in [-2\pi; \pi]$
    (b) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, con $x \in [0; \frac{5}{4}\pi]$
    (c) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, con $x \in [-3\pi; \frac{19}{4}\pi]$
    (d) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, con $x \in (\pi; 6\pi]$
    (e) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, con $x \in [-2\pi; \frac{\pi}{2})$
    (f) $\tan(x) = 1$, con $x \in [0; 3\pi]$
    (g) $\tan(x) = -1$, con $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

4 Geometría analítica

Distancia entre puntos

Consideraremos a la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ a la medida del segmento que tiene por extremos a dichos puntos. El cálculo de esta distancia no es más que una aplicación del *Teorema de Pitágoras* como se muestra a continuación:



Dado que es un triángulo rectángulo vale que $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, y despejando d se obtiene la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1. Hallar la distancia entre los sigueintes pares de puntos:
   (a) $P_1 : (-2; 3)$ y $P_2 : (-5; 3)$
   (b) $P_3 : (-1; -2)$ y $P_4 : (-1; 4)$
   (c) $P_5 : (-6; 7)$ y $P_6 : (-3; 3)$
   (d) $P_7 : (-1; -2)$ y $P_8 : (5; 7)$
2. Hallar un punto que se encuentre a igual distancia de los puntos $P_1 : (-6, 2)$ y $P_2 : (4, -8)$.
3. Hallar el valor de k para que...
   (a) la distancia de $P_1 : (-1; 4)$ a $P_2 : (k; 1)$ sea igual a 5.
   (b) los puntos $P1 : (7; k)$ y $P_2 : (k; -3)$ estén a igual distancia del punto $P_3 : (k; k)$.
4. Hallar una expresión que represente todos los puntos cuya distancia a la recta definida por la ecuación $y = 3$ sea 2.
5. Calcular el perímetro de los siguientes triángulos y clasificarlos según la longitud de sus lados. ¿Alguno de ellos es un triángulo rectángulo?
   (a) $P_1 : (-2; 2)$, $P_2 : (1; 6)$, $P_3 : (6; -6)$
   (b) $P_4 : (-5; -2)$, $P_5 : (0; 6)$, $P_6 : (5; -2)$

Álgebra y Lógica Computacional
1^{er} cuatrimestre 2021

Práctica 4

Responsable de asignatura:
Lucas Catalano

Rectas

Los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas $(x; y)$ satisfacen una ecuación equivalente a una de la forma $ax + by = c$, con $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ conforman una *recta*.

6. Para cada uno de los siguientes items, graficar aproximadamente las rectas formadas por los puntos cuyas coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones:

   (a) $r_1 : x + y = 0$

   (b) $r_2 : -x + y = 0$

   (c) $r_3 : \frac{1}{2}x - 5 = y$

   (d) $r_4 : -x + 1 = y$

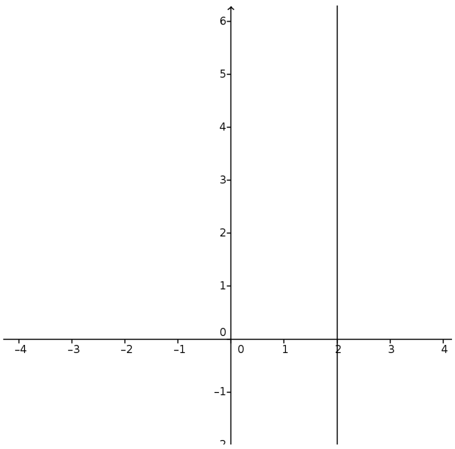
   (e) $r_5 : x - y = \pi$

   (f) $r_6 : x = 3$

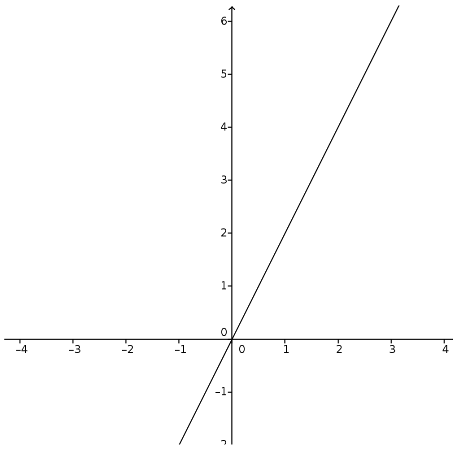
   (g) $r_7 : y = -2$

   (h) $r_8 : -x - y = 2$

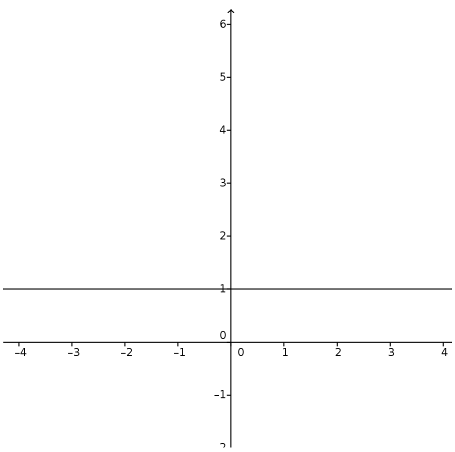
7. Hallar una ecuación que defina a las rectas graficadas a continuación:



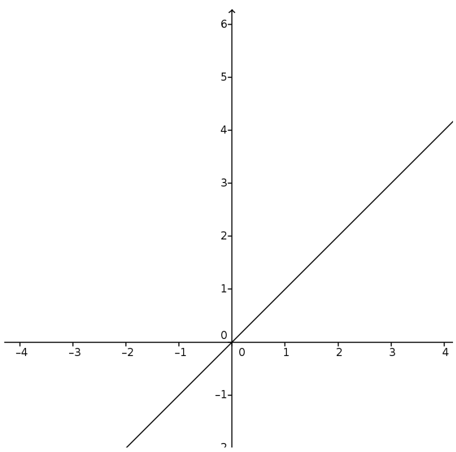
(a)



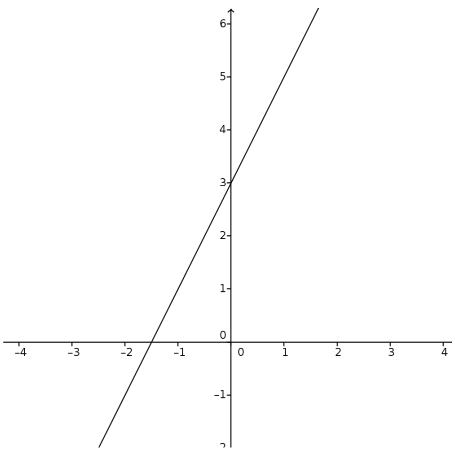
(c)

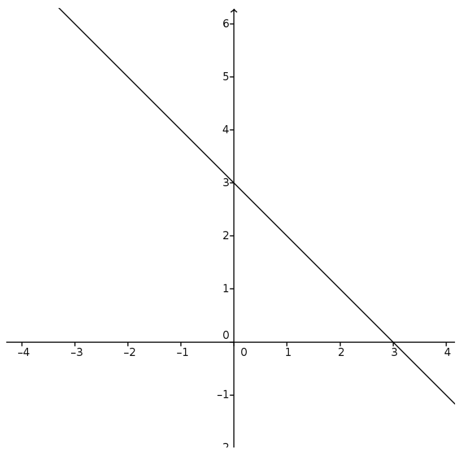


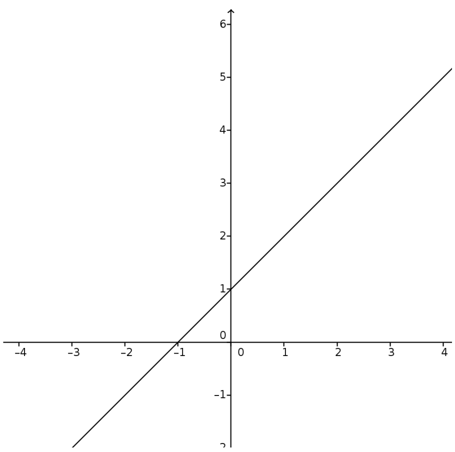
(b)

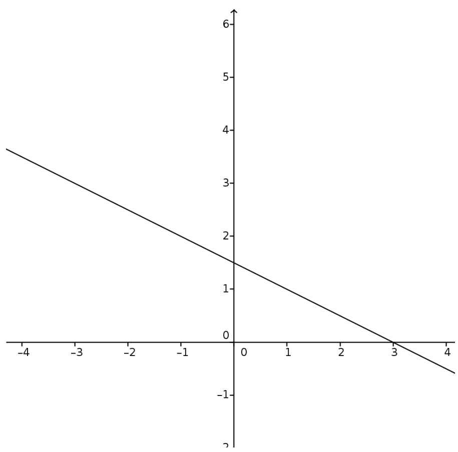


(d)

(e) 

(g) 

(f) 

(h) 

8. Decidir cuáles de las rectas definidas por las siguientes ecuaciones son paralelas entre sí y cuáles perpendiculares.

(a) $y = 4x - 6$

(b) $y = \frac{1}{3}x + 1$

(c) $y = -\frac{1}{4}x$

(d) $x - 3y = 1$

(e) $4y = 3x$

(f) $\frac{y}{4} - x = 0$

(g) $4x = 3y$

(h) $x = -\frac{4}{3}$

Parábolas

Los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas $(x;y)$ satisfacen una ecuación equivalente a una de la forma $ax^2 + bx + c = y$ ó $ay^2 + by + c = x$ con $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ conforman una *parábola.*

9. Para cada uno de los siguientes items, graficar aproximadamente las parábolas formadas por los puntos cuyas coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones:

(a) $p_1 : y = x^2$

(b) $p_2 : y = 2x^2$

(c) $p_3 : y = (x+1)(x-3)$

(d) $p_4 : y = (2x-4)(x-1)$

(e) $p_5 : y = x^2 + \frac{1}{4}$

(f) $p_6 : x^2 + 3x + y + 1 = 0$

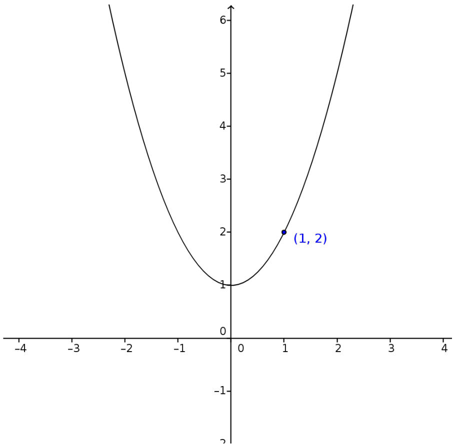
(g) $p_7 : -3x^2 - 3 - y = 0$

(h) $p_8 : \frac{1}{5}y^2 - 3 - x = 0$

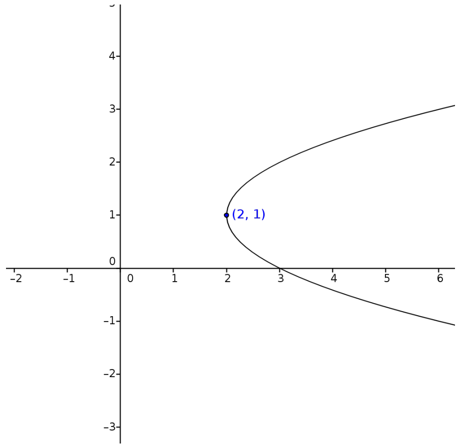
(i) $p_9 : x + y^2 = 0$

(j) $p_{10} : x^2 + 5y = 1$

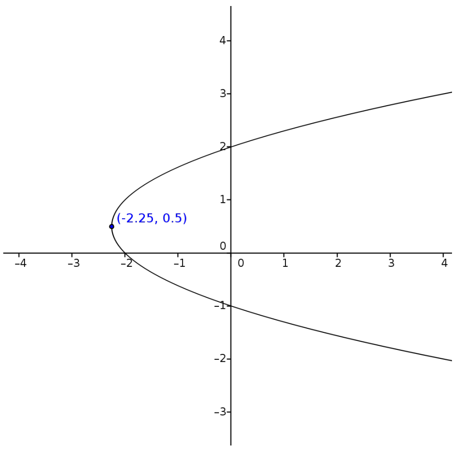
10. Hallar una ecuación que defina a las parábolas graficadas a continuación:



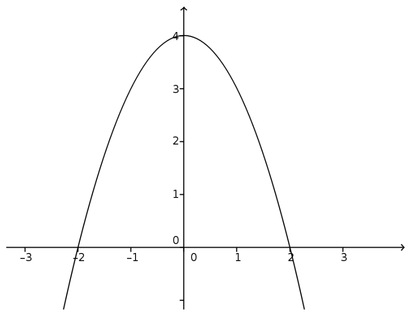
(a)



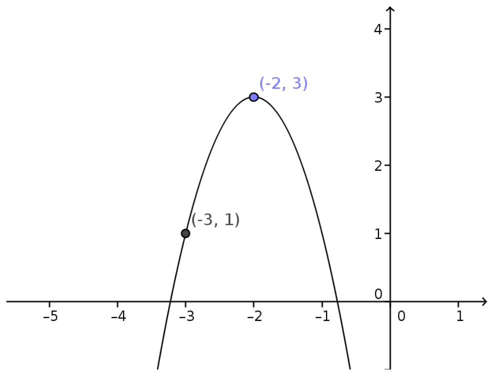
(d)



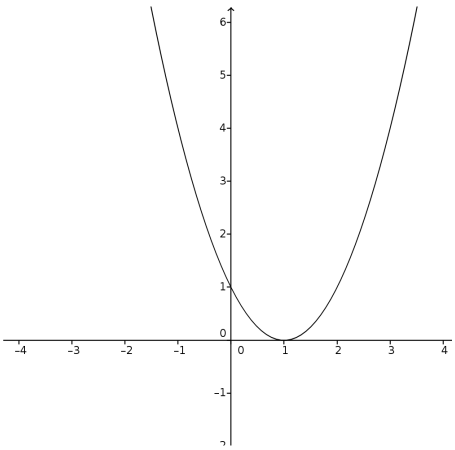
(b)



(e)



(f)



(c)

Circunferencias

Los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas $(x; y)$ satisfacen una ecuación equivalente a una de la forma $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ con x_0 e $y_0 \in \mathbb{R}$ y con $r \in \mathbb{R}_+$ conforman una *circunferencia* de centro $(x_0; y_0)$ y radio r.

11. Para cada uno de los siguientes items, graficar aproximadamente las circunferencias formadas por los puntos cuyas coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones:

    (a) $c_1 : x^2 + y^2 = 5$

    (b) $c_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1$

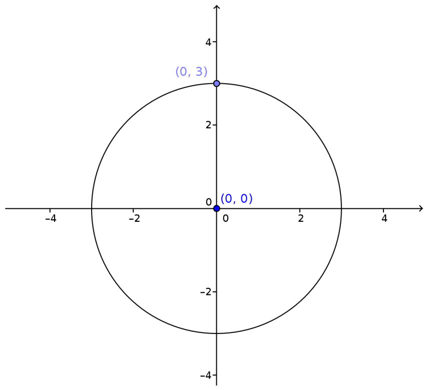
    (c) $c_3 : (x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 9$

    (d) $c_4 : x^2 + (y+\sqrt{2})^2 - 2 = 0$

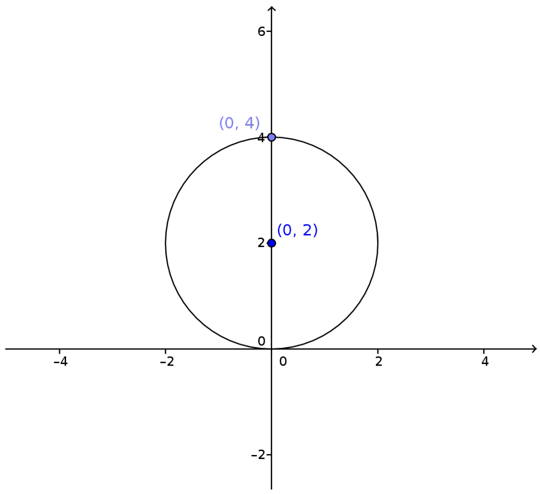
    (e) $c_5 : (x-2)^2 + (y+\pi)^2 = 5$

    (f) $c_6 : x^2 = -y^2 + 5$

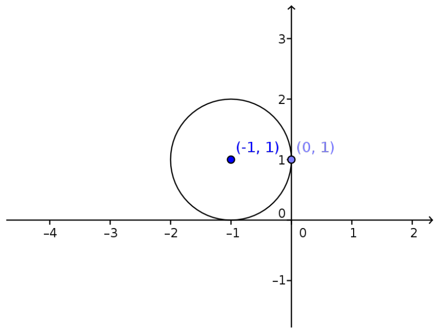
12. Hallar una ecuación que defina a las circunferencias graficadas a continuación:



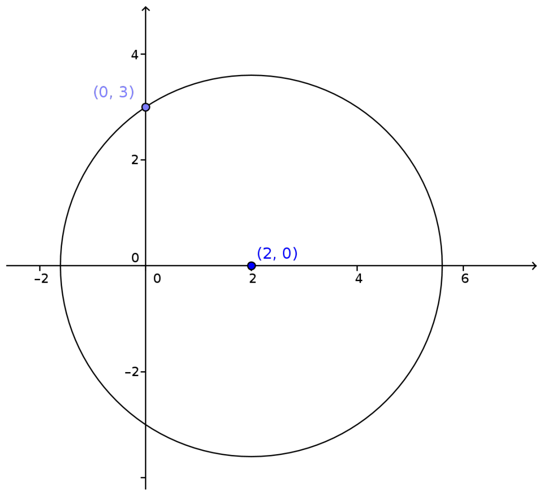
(a)



(b)



(c)



(d)

Elipse

> Los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas $(x;y)$ satisfacen una ecuación equivalente a una de la forma $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, con $a,\ b,\in\mathbb{R}_{\neq 0}$ y $x_0,\ y_0\in\mathbb{R}$ conforman una *elipse* con centro en el punto $(x_0;y_0)$, ysiendo a el radio en la dirección del eje x y b el radio en la dirección del eje y.

13. Para cada uno de los siguientes items, graficar aproximadamente las elipses formadas por los puntos cuyas coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones:

(a) $e_1:\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

(b) $e_2:\dfrac{(x-\frac{4}{3})^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(c) $e_3:\dfrac{(x+2)^2}{2}+\dfrac{(y+\sqrt{2})^2}{6}=1$

(d) $e_4:\dfrac{x^2}{4}+4y^2=1$

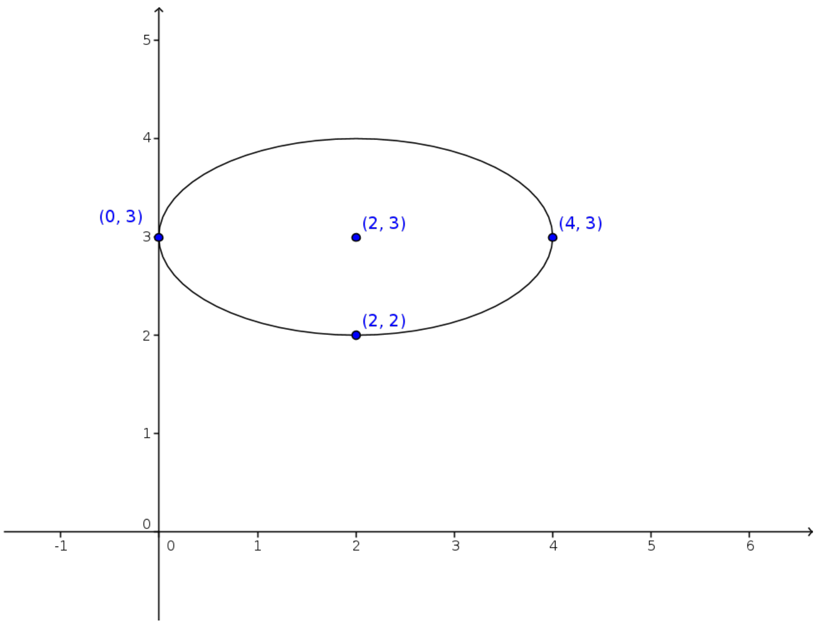
(e) $e_5:\dfrac{(-2+x)^2}{9}+\dfrac{(y+4)^2}{9}=2$

(f) $e_6:\dfrac{(3x+6)^2}{4}+y^2=1$

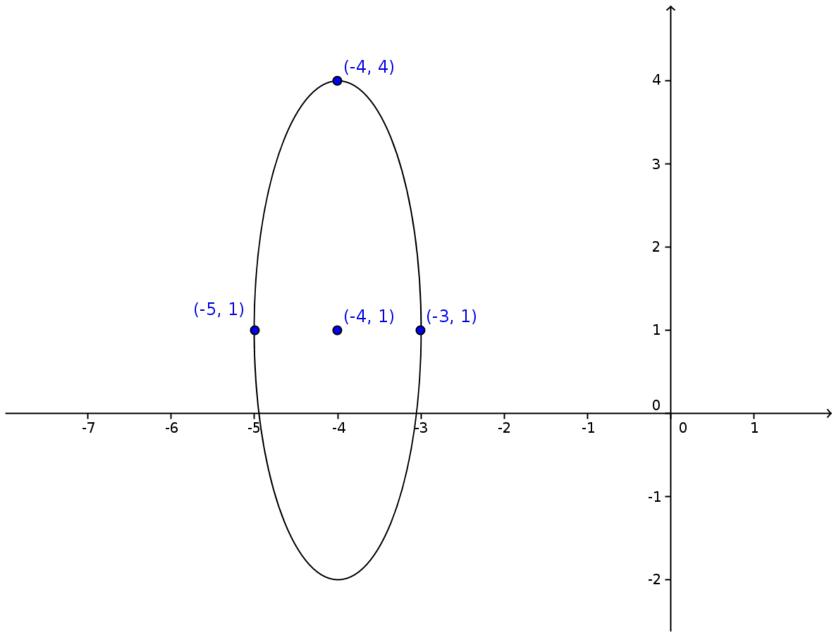
(g) $e_7:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{10}=1$

(h) $e_8:x^2+y^2=5$

14. Para cada uno de los siguientes gráficos, hallar alguna ecuación que la represente:



(a)



(b)

15. Para los ítems del punto 13, hallar gráfica y analíticamente las intersecciones con los ejes de coordenadas.

16. **(OPTATIVO)** Busque en internet o en bibliografía otra posible definición de *elipse* que utilice medidas y muestre la relación que hay con la definición dada en esta práctica. Busque, también, una manera de hallar los focos a partir de la fórmula dada al comienzo de la práctica.

17. **(OPTATIVO)** Utilizando una regla, seleccione puntos de los gráficos propuestos en el ítem 14 y mida para verificar que la definición obtenida en el punto 16 se cumple.

Hipérbola

Los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas $(x;y)$ satisfacen una ecuación equivalente a una de la forma $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ o bien $\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$, con $a,\ b, \in \mathbb{R}_{>0}$ y $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ conforman una *hipérbola* con "centro" en el punto $(x_0;y_0)$ y asíntotas que contienen al punto $(x_0;y_0)$ y tienen pendientes $\dfrac{b}{a}$ y $-\dfrac{b}{a}$.

18. Para cada uno de los siguientes items, graficar aproximadamente las hipérbolas formadas por los puntos cuyas coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones:

(a) $h_1 : \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

(b) $h_2 : \dfrac{(x-\frac{4}{3})^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

(c) $h_3 : \dfrac{(y+2)^2}{2} - \dfrac{(x+\sqrt{2})^2}{6} = 1$

(d) $h_4 : \dfrac{x^2}{4} - 4y^2 = 1$

(e) $h_5 : \dfrac{(-2+x)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{9} = 2$

(f) $h_6 : -\dfrac{(3x+6)^2}{4} + y^2 = 1$

(g) $h_7 : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{10} = 1$

(h) $h_8 : -x^2 + y^2 = 5$

19. Para los ítems del punto 18, hallar gráfica y analíticamente las intersecciones con los ejes de coordenadas.

Intereseccciones

Llamamos *intersección* entre dos curvas l y s al conjunto de los puntos de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que (x,y) es punto tanto de l como de s.

20. Graficar y hallar los puntos de intersección entre las gráficas de las curvas definidas por las siguientes ecuaciones.

(a) $\begin{cases} a_1: \ -3x+y=2 \\ b_1: \ x=4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} a_2: \ y=-2 \\ b_2: \ x=-3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} a_3: \ x^2+(y-3)^2=9 \\ b_3: \ x^2+y^2=1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} a_4: \ x^2+y-6=0 \\ b_4: \ 3y+x=0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} a_5: y+x=1 \\ b_5: 2x-1=y \end{cases}$

(f) $\begin{cases} a_6: y=4x-1 \\ b_6: x=\frac{1}{4}y \end{cases}$

(g) $\begin{cases} a_7: x^2-3=y \\ b_7: y=1 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} a_8: y^2+x=1 \\ b_8: x=5 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} a_9: x^2+(y+4)^2=3 \\ b_9: y=-2x+1 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} a_{10}: (x-1)^2+y^2=1 \\ b_{10}: (x+\frac{1}{2})^2+y^2=4 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} a_{11}: (x+1)^2+y^2-1=0 \\ b_{11}: y^2-2=x \end{cases}$

(l) $\begin{cases} a_{12}: (x-\frac{2}{3})^2+(y+2)^2=16 \\ b_{12}: (y+2)^2=x \end{cases}$

(m) $\begin{cases} a_{13}: x-3+(y+1)^2=16 \\ b_{13}: -\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1 \end{cases}$

(n) $\begin{cases} a_{14}: x^2+(y+1)^2=4 \\ b_{14}: \dfrac{(x-3)^2}{2}+\dfrac{(y+1)^2}{2}=2 \end{cases}$

21. Proponer:

(a) La expresión de dos rectas que se intersequen en el punto $(4;1)$.

(b) La expresión de dos parábolas que no se intersequen.

(c) La expresión de una recta y una parábola que se intersequen en dos puntos cuyas coordenadas x sean -2 y 4.

(d) La expresión de una recta y una circunferencia que tengan a $(1;3)$ como un punto de intersección.

(e) La expresión de una parábola y una circunferencia que tengan tres puntos en común.

(f) La expresión de una recta y una elipse que se intersequen en los puntos $(1;2)$ y $(0;-4)$.

(g) La expresión de una elipse y una hipérbola tales que tengan al punto $(1;2)$ como un punto de intersección.

Problema de aplicación

22. Considere una pantalla de computadora que tiene una resolución de 800×600. Los píxeles se identifican mediante su posición horizontal y vertical. El pixel de arriba a la izquierda es el que ocupa la posición $(1;1)$, el de su derecha el $(1;2)$ y asi sucesivamente.

(a) Desarrollar un pseudocódigo que grafique en la pantalla un cuarto de circunferencia de radio 50 con centro en el vértice superior izquierdo de la pantalla, es decir asumiendo que el centro estaría en el pixel $(0;0)$ (aunque esta posición no corresponda a ningún pixel realmente).

(b) Dibuje cómo quedaría la pantalla en el rectángulo de vértices $(1;47)$, $(1;52)$, $(8;47)$, $(8;52)$ (asuma que la pantalla tiene todos los píxels negros excepto los de la circunferencia que son de color blancos).

Álgebra y Lógica Computacional
1^{er} cuatrimestre 2021

Práctica 5

Responsable de asignatura:
Lucas Catalano

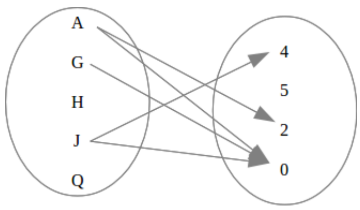
5 Relaciones y funciones

Relaciones

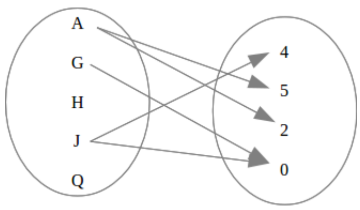
Una "relación" está conformada por dos conjuntos, uno llamado *conjunto de salida* y otro llamado *conjunto de llegada*, además existe una asignación entre sus elementos de forma tal que algunos (o todos) los elementos del conjunto de salida están relacionados con uno o más elementos del conjunto de llegada.
Si el conjunto de salida es A y el conjunto de llegada es B, entonces la relación r se denota $r : A \longrightarrow B$.
La relación r puede representarse mediante diferentes registros, algunos de ellos son:

- Tabla de valores.
- Diagrama de Venn (o de flechas).
- Fórmula.
- Gráfico cartesiano.

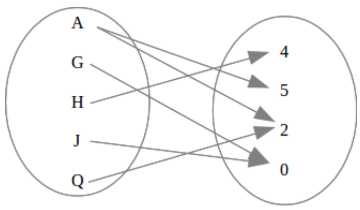
1. Dadas las siguientes relaciones entre conjuntos, si es posible, representarlas con los otros registros (fórmula, tabla, gráfico, etc.), si no es posibe explicar por qué.



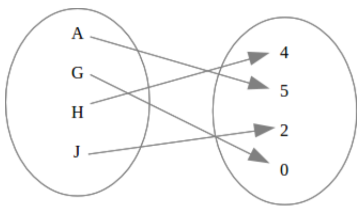
(a)



(b)



(c)



(d)

(e)

x	y
-1	3
0	5
1	6
2	5
3	1

(f)

x	y
-2	3
0	5
2	6
2	5
2	1

(g)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6

(h)

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

(i) $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que x, elemento del conjunto de salida, está relacionado con y del conjunto de llegada si $x + y = 4$.

(j) $t : [1;3) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que x, elemento del conjunto de salida, está relacionado con y del conjunto de llegada si $x^2 = y$.

Funciones

La relación $f : A \longrightarrow B$ es una *función* si y sólo sí se cumplen las siguientes condiciones:

- Para todo $x \in A$, x está relacionado con algún elemento de B.
- Para todo $x \in A$, x no está relacionado con más de un elemento de B.

Si $f : A \longrightarrow B$ es una función entonces A se llama *Dominio* ($Dom(f)$) y B se llama *Codominio* ($Codom(f)$) de f.

En una función, una forma de denotar que el elemento $x \in A$ está relacionado con el elemento $y \in B$ puede ser mediante la expresión $f(x) = y$.

Se llama *Imagen* de la función f ($Im(f)$) al conjunto de valores $y \in Codom(f)$ tales que existe algún $x \in Dom(f)$ que satisface $f(x) = y$.

Función real
Una función $f : A \longrightarrow B$ tal que $A, B \subseteq \mathbb{R}$ se denomina "función real".

2. Decidir si cada una de las relaciones del punto 1 son o no funciones. Justificar.

3. Decidir si cada una de las siguientes relaciones son o no funciones y justificar:

(a)

x	y
a	2
s	2
u	2
r	4

(b)

x	y
a	1
s	3
a	2
r	4

(c) $x \in \mathbb{R}$ en el conjunto de salida e $y \in \mathbb{R}$ en el conjunto de llegada relacionados según la fórmula $x - y = 10$.

(d) $x \in \mathbb{R}$ en el conjunto de salida e $y \in \mathbb{R}$ en el conjunto de llegada relacionados según la fórmula $x = y^2$.

(e) $x \in \mathbb{R}$ en el conjunto de salida e $y \in \mathbb{R}$ en el conjunto de llegada relacionados según la fórmula $x^2 + y^2 = 9$.

(f) $x \in \mathbb{R}$ en el conjunto de salida e $y \in \mathbb{R}$ en el conjunto de llegada relacionados según la fórmula $x = 3$.

(g) $x \in \mathbb{R}$ en el conjunto de salida e $y \in \mathbb{R}$ en el conjunto de llegada relacionados según la fórmula $y = 7$.

(h)

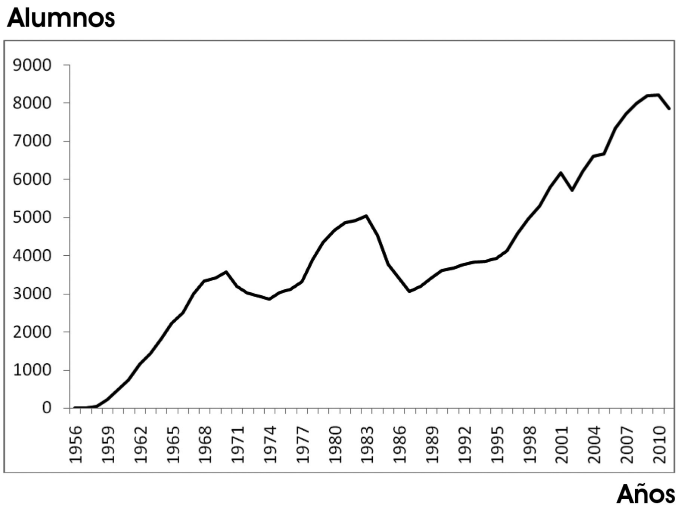
x	y
3	2
3	5
3	7
3	-2

(i)

x	y
2	3
4	3
7	3
-2	3

(j) $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $l(x) = y$
   i. y es el doble de x.
   ii. x es el doble de y.
   iii. x es el cuadrado de y.
   iv. y es el cuadrado de x.

4. A continuación se muestra un gráfico cartesiano extraído de la página web de una universidad.

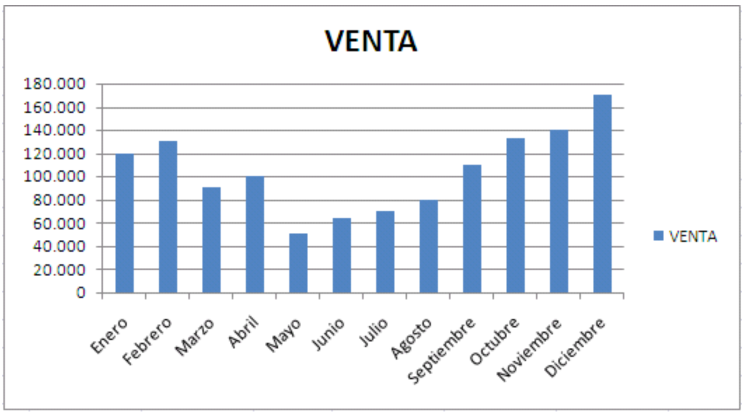


(a) Describir una posible relación representada en el gráfico. ¿Esa relación es una función?

(b) Si es una función, hallar el dominio, codominio e imagen.

(c) Hallar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, los máximos y los mínimos relativos y absolutos.

5. A continuación se muestra un gráfico confeccionado a partir de los datos obtenidos de libros contables de una empresa:



(a) Describir una posible relación representada en el gráfico. ¿Esa relación es una función?

(b) Si es una función, hallar el dominio, codominio e imagen.

(c) Hallar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, los máximos y los mínimos relativos y absolutos.

6. Considere $f : \mathbb{R}^0_+ \to \mathbb{R}$ una función cuya fórmula es la siguiente ¿Cuál debe ser el valor de a para que $f(0) = -1$?

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{a}$

(b) $f(x) = ax^2 + 3$

(c) $f(x) = \dfrac{10x}{\sqrt{a}}$

(d) $f(x) = \sqrt{a^2 + x}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + 8}$

7. En los casos en que sea posible, hallar alguna fórmula de una función que satisfaga:
   (a) La expresión de g es de la forma $g(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $g(0) = -2$ y $g(1) = 0$.
   (b) La expresión de f es de la forma $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, pasa por el origen de coordenadas y es decreciente.
   (c) La expresión de h es de la forma $h(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $h(1) = 0$, $h(0) = 0$.
   (d) La expresión de d es de la forma $d(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ con $d(1) = d(2) = 0$.

8. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas pueden ser utilizadas para definir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = y$? Justificar.
   (a) $y^2 + x^2 = 4$
   (b) $x^2 + 3y = 2$
   (c) $y^2 + x^2 - 6 = 6$
   (d) $y^2 + 3x - 5 = 0$
   (e) $6x - 7y = 0$

9. En cada caso, halle algún conjunto A para el cual $f : A \to \mathbb{R}$ con las siguientes fórmulas (o equivalentes) sea una función. Justificar.
   (a) $y^2 + x^2 = 4$
   (b) $x^2 + 3y = 2$
   (c) $y^2 + x^2 - 6 = 6$
   (d) $y^2 + 3x - 5 = 0$
   (e) $6x - 7y = 0$

10. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Hallar, si existen, los valores para los cuales las funciones f y g toman el mismo valor.
   (a) $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = x - 2$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = 3x + 8$
   (c) $f(x) = 3x^2 + 1$; $g(x) = -3x^2 + 1$
   (d) $f(x) = x - 3$; $g(x) = 3x + 1$
   (e) $f(x) = x^2$; $g(x) = x - 2$
   (f) $f(x) = sin(x)$; $g(x) = 1$
   (g) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$; $g(x) = x + 2$
   (h) $f(x) = (\sqrt[3]{x+8})^2$; $g(x) = -x^2 - 2$

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función.

- f es **inyectiva** si y sólo sí para todo $y \in B$, exíste a lo sumo un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- f es **sobreyectiva** (también llamada **suryectiva**) si y sólo si para todo $y \in B$ existe al menos un valor $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- f es **biyectiva** si y sólo sí es *inyectiva* y *sobreyectiva*.

Función Inversa
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva. Se llama "función inversa" de f a la función $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que si $f(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) = x$.

11. Decidir cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x$

(b) $f : (1; 4) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x$

(c) $f : (2; 3) \longrightarrow (2; 3)$ con $f(x) = x$

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x + 1$

(e) $f : [-1; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = -x$

(f) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

(g) $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

(h) $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ con $f(x) = x^2$

(i) $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(j) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = cos(x)$

(k) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1]$ con $f(x) = cos(x)$

(l) $f : [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1]$ con $f(x) = cos(x)$

(m) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(n) $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

(o) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = -2$

12. Para las funciones propuestas en el item anterior, en los casos en que sean biyectivas, hallar la inversa. Para los casos en que no son biyectivas, redefinirlas de forma tal que lo sean.

Dominio natural
Para una función real f, se denomina "dominio natural" al mayor conjunto A para el cual puede definirse $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

En ocaciones, para una función f, se escribe sólo la fórmula, omitiendo la expresión $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. En esos caso se sobreentiende que la función tiene como dominio al *dominio natural* y como codominio a $\mathbb{R}$.

Por ejemplo:
La expresión $f(x) = \dfrac{2}{x + \frac{1}{5}}$ debe entenderse como la función $f : \mathbb{R} - \{-\frac{1}{5}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{2}{x + \frac{1}{5}}$

Raices
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función real. $x \in A$ es una raíz de f si y sólo sí $f(x) = 0$.

13. Hallar el dominio natural y las interesecciones con los ejes cartesianos de las funciones cuya expresión es la siguiente:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x$

(d) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} x$

(e) $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

(f) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

(g) $g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ -x & x > 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

(h) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1 & x > 1 \end{cases}$

14. Hallar el dominio natural y graficar aproximadamente en un sistema de ejes cartesianos a cada una de las siguientes funciones reales.

(a) $f(x) = 2x$
(b) $f(x) = 2x + 1$
(c) $f(x) = \frac{1}{2}x$
(d) $g(x) = 4$
(e) $h(x) = \dfrac{x}{x}$
(f) $i(x) = x^2$
(g) $j(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 2 \\ 3x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$
(h) $k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } x < -1 \end{cases}$
(i) $l(x) = \dfrac{1}{x}$
(j) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ 3x & \text{si } x < 1 \end{cases}$
(k) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ -x & \text{si } x > 1 \end{cases}$
(l) $f(x) = \sqrt{x}$
(m) $f(x) = \sqrt{x} + 2$
(n) $f(x) = \sqrt{x} - 3$
(o) $f(x) = \sqrt{x+1}$
(p) $f(x) = \sqrt{x-4}$
(q) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$
(r) $f(x) = sen(x)$ con $x \in [-2\pi; 3\pi)$
(s) $f(x) = sen(x) + 2$ con $x \in [-2\pi; 3\pi)$
(t) $f(x) = cos(x)$ con $x \in [-\pi; 3\pi]$
(u) $f(x) = cos(x) - 2$ con $x \in [-\pi; 3\pi]$
(v) $f(x) = sen(x) + 2x$

15. Dadas las siguientes fórmulas de funciones definidas en $\mathbb{R}$,
$f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 3, \quad h(x) = x - 5$

 (a) Determine:
 - $f(g(2))$ y $g(f(2))$
 - $f(h(2))$ y $h(f(2))$
 - $g(h(2))$ y $h(g(2))$

 (b) Considerando la siguiente notación $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, determine las fórmulas de las siguientes funciones compuestas:
 - $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
 - $(f \circ h)(x)$ y $(h \circ f)(x)$
 - $(g \circ h)(x)$ y $(h \circ g)(x)$

 (c) Compare las fórmulas $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. ¿Son iguales? ¿Qué ocurre con los demás pares de fórmulas compuestas?

 (d) En general, ¿se puede afirmar que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para cualquier par de fórmulas f y g?

16. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x + 2$ y $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = \sqrt{x}$. Complete la secuencia propuesta a continuación, correspondiente a la composición de las fórmulas de las dos funciones, $(g \circ f)(x)$:

x	$f(x)$	$(g \circ f)(x)$
0	3	$\sqrt{3}$
1		
-2		
6		
-4		
-3		

 (a) ¿Fue posible aplicar ambas funciones para todos los valores de x en la tabla?

(b) Para los valores de x para los que no fue posible, ¿por qué no fue posible? Explíquelo en términos del conjunto imagen de la función f y del dominio de la función g.

Función compuesta
Al componer las fórmulas de cualquier par de funciones f y g: en caso de que todos los elementos del conjunto imagen de f (es decir, los elementos que se generan aplicando f a cada elemento de su dominio) pertenezcan al dominio de g, la composición entre ambas funciones resulta también una función y se denomina función compuesta. La función "g compuesta con f´´ tiene como dominio al dominio de f; como conjunto de llegada, al conjunto de llegada de g; y su fórmula es la fórmula compuesta $(g \circ f)(x)$.
Simbólicamente:
Dadas f y g dos funciones con $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$, tales que $Im(f) \subset C$, puede obtenerse la función $(g \circ f) : A \longrightarrow D / y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ a la que llamaremos función compuesta de g con f.

17. Considere las funciones definidas de su dominio natural en $\mathbb{R}$ definidas por las siguientes fórmulas:
   - $f(x) = 2x - 9$
   - $g(x) = x^2 + 3$
   - $h(x) = \dfrac{1}{x}$

   (a) Determine el dominio natural y el conjunto imagen de cada una de ellas.
   (b) Determine las fórmulas compuestas que se piden a continuación y analice si la composición de funciones define una nueva función. En aquellos casos en los que no fue posible definir una función compuesta, proponga una modificación en el dominio correspondiente de modo que sea posible hacerlo, y defina dicha función.
      i. $g(f(x))$
      ii. $h(f(x))$
      iii. $h(g(x))$

18. Considere un programa de computadora que poseé una base de datos con todos los números de DNI y apellidos de cada argentino vivo. El programa funciona de manera tal que al ingresar el número de DNI, el mismo devuelve el apellido de la persona con ese número de DNI, en el caso en que el número no corresponda a ningún argentino vivo, el programa devuelve el texto "nadie".

   (a) Considerando a este programa como una función matemática, hallar dominio, codominio, imagen.
   (b) ¿Es esta función inyectiva, sobreyectiva y o biyectiva? Justificar.
   (c) ¿Es posible que dicha función sea inversible? Justificar.

19. Graficar aproximadamente en un sistema de ejes cartesianos cada una de las siguientes funciones reales:
   (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$
   (b) $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x}$

20. Las siguientes funciones son del tipo usualmente conocido como *funciones lineales*, cuya expresión es de la forma $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : g(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Hallar, cuando sea posible, la expresión de g a partir de los datos en cada caso:

(a) $g(1) = 0, \quad g(0) = 2.$

(b) $(0; 3) \in$ gráfico de g.

(c) $g(1) = 3, \quad g(2) = 3 \quad \text{y} \quad g(0) = 2.$

21. Sabiendo que h es de la forma $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : h(x) = ax^2 + 3x + 1$ hallar, cuando sea posible, su expresión sabiendo que:

    (a) $h(1) = h(4) = 3$

    (b) $x = -1$ y $x = 2$ son los únicos valores del dominio que satisfacen la igualdad $h(x) = 0$

    (c) $x = 0$ es el único valor del dominio que satisface la igualdad $h(x) = 0$.

    (d) $h(1) = h(2) = h(3)$

22. Hallar los valores de x para los cuales la función f tome el valor 3:

    (a) $f(x) = 5x + 1$

    (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$

    (c) $f(x) = (x + 2)(3x - 7)$

    (d) $j(x) = \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 3 \\ x & \text{si } x < 3 \end{cases}$

23. Suponga que tiene un programa de computadora integrado a la coputadora de abordo de un automóvil que durante cada instante el programa registra la cantidad de combustible en el tanque.
    Durante un viaje que duró dos horas el conductor registra que cuando comenzó el viaje el tanque tenía 38 litros de combustible y al finalizar el viaje tenia 14 litros de combustible. Además, el conductor recuerda que 45 minutos después de haber partido, en el tanque habían 28 litros. Se sabe que durante el viaje el conductor no cargó combustible.

    Indique, con la mayor presición posible en qué momento del viaje el tanque del automóvil pudo haber tenido 30 litros de combustible. Justifique.

Continuidad para funciones reales
$f : A \longrightarrow B$ $(A, B \subseteq \mathbb{R})$ es continua en $x_0 \in A$ si y sólo sí para todo y "cercano" a $y_0 = f(x_0)$ existe x "cercano" a x_0 tal que $f(x) = y$.

Teorema de Bolzano
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función real. Si f es continua para todo $x \in [a; b]$ y $f(a).f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a; b)$ tal que $f(c) = 0$.

24. Decidir si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 5^x - x^3$ tiene al menos una raíz.

25. ¿Es posible asegurar que la función real de expresión $f(x) = x^5 - 3x + 7$ tiene al menos una raiz en el intervalo $[-3; 1]$?

26. Mostrar que la función $f(x) = x^4 - 5x - 7x^2 + 29x + 30$ tiene al menos cuatro raíces.

27. Considere el siguiente pseudocódigo y explique para qué sirve:

```
 x1:=0
 x2:=3
 error:=0.01
 hacer mientras (|x1-x2|>error)
 comienzo
 si ((x1∧2-2<0 y x2∧2-2>0) o (x1∧2-2>0 y x2∧2-2<0)) entonces
  x3:=(x1+x2)/2
  si (x3∧2-2<0 y x1∧2-2>0) entonces
    x2:=x3;
  sino
  x1:=x3
fin
resultado:=x3
```

28. ¿Qué modificaría en el pseudocódigo de punto 27 para que el programa fuera más general (o sea, sirviera para más casos)?

6 Inecuaciones

1. Resolver "mentalmente" las siguientes inecuaciones. En todos los casos considere $x \in \mathbb{R}$. Expresar el resultado como intervalo, unión de intervalos, conjunto vacío o $\mathbb{R}$.

   (a) $x > 3$
   (b) $3x \geq 1$
   (c) $x + 2x < -3$
   (d) $x + 3 > 0$
   (e) $x + \pi > 0$
   (f) $-x > 0$
   (g) $-x \leq 0$
   (h) $x^2 < 0$
   (i) $x^2 \leq 0$
   (j) $-x^2 > 0$
   (k) $x^2 + 1 > 0$
   (l) $x^4 > -2$

2. Resolver las siguientes inecuaciones en forma gráfica:

   (a) $2x - 4 \leq -3$
   (b) $x^2 + 1 > 6$
   (c) $x - 3 < 3x - 4$
   (d) $x^2 \leq -x^2$
   (e) $x^2 + x - 2 \leq -x^2 + 1$
   (f) $x + 3 \geq \frac{1}{3}x^2 + 4x$
   (g) $\frac{1}{2}(x-3)(x+\frac{1}{2}) > -x^2 + 4$
   (h) $x^2 > 1$
   (i) $x^2 \leq 1$
   (j) $2x + 1 < 4$
   (k) $-\frac{1}{2}x + 2 > 1$
   (l) $x - 2 > 2x + 3$
   (m) $x + 5 \geq 4x - 1$
   (n) $x^2 < 2$
   (o) $x^2 \geq 5$
   (p) $x^2 + 3 \leq 1$
   (q) $\sqrt{2}x - 3 > 4$
   (r) $x^2 - 3 < 2$
   (s) $x > x^2$

Algunas propiedades de las desigualdades:

- Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $a < b \Leftrightarrow a.c < b.c$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}^-$, entonces $a < b \Leftrightarrow a.c > b.c$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y sea $n \in \mathbb{N}$ par, entonces $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$
- Sean $a, b \in \mathbb{R}^-$ y sea $n \in \mathbb{N}$ par, entonces $a < b \Leftrightarrow a^n > b^n$
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ impar, entonces $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Las propiedades valen también si se intercambian los signos "$<$" y "$>$" por "$\leq$" y "$\geq$" respectivamente.
A menos que se indique lo contrario, las incógnitas serán valores reales o aquellos que se encuentren en el dominio natural de la expresión.

3. Resuelva las siguientes inecuaciones utilizando las propiedades mencionadas y, cuando sea posible, compare los resultados obtenidos con el punto anterior (2):

(a) $2x + 1 < 4$
(b) $-\frac{1}{2}x + 2 > 1$
(c) $x - 2 > 2x + 3$
(d) $x + 5 \geq 4x - 1$
(e) $x^2 < 2$
(f) $x^2 \geq 5$
(g) $x^2 + 3 \leq 1$
(h) $\sqrt{2}x - 3 > 4$
(i) $\sqrt{x-3} \leq \sqrt{-x+2}$
(j) $\dfrac{1}{x} > 3$
(k) $\dfrac{1}{x} < x$
(l) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq x$
(m) $-\dfrac{3-x}{2x} \leq 4x$
(n) $x^2 - 3 < 2$
(o) $x^3 \leq 8$
(p) $x > x^2$
(q) $\sqrt{x} > 2\sqrt{x}$
(r) $-\dfrac{x}{x^2} \geq 2$

4. Resuelva las siguientes inecuaciones en forma gráfica y utilizando las propiedades mencionadas:

   (a) $\dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{1}{x-2}$
   (b) $(x-6)(x+2) \geq 0$
   (c) $\dfrac{x-3}{x+5} < 0$
   (d) $(x-1)(1-x) \leq 0$

5. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la solución de la inecuación $2x - a \leq x + 3$ sea el intervalo $(-\infty, 7]$.

6. Sean las funciones f y g cuyas expresiones son $f(x) = -2x + 3$ y
   $g(x) = 4 + 2x$.
   Escribir en forma de intervalo los conjuntos A y B e interpretar los resultados geomÃ©tricamente:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$

7. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

   (a) $\forall x, x \in (2,3) \Longleftrightarrow x > 2$
   (b) $\forall x, x \in [2,3] \Longleftrightarrow 2 \leq x \leq 3$
   (c) $\forall x, x \in (-1,1) \Longleftrightarrow x^2 < 1$
   (d) $\forall x, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 > 0$
   (e) $\forall x, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \geq 0$
   (f) $\forall x, x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \Longleftrightarrow x^2 \leq 9$
   (g) $\forall x, x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \Longleftrightarrow x^2 \geq 9$
   (h) $\forall x, x \in (-3,3) \Longleftrightarrow x^2 > 9$
   (i) $\forall x, x \in (-3,3) \Longleftrightarrow x^2 < 9$

8. Considere dos funciones cuyas expresiones son $f(x) = \sqrt{2x - 14}$; $g(x) = \dfrac{x}{22 - 2x}$ y $h(x) = x^2 - 4x + 4$, se pide determinar:

   (a) $Dom(f) \cap Dom(g)$

(b) $Dom(f) \cup Dom(g)$

(c) $Dom(h) \cap Dom(g)$

(d) $Dom(g) \cup Dom(h)$

Interpretar graficamente.

9. A partir de la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ representar graficamente los siguientes arcos de curvas:

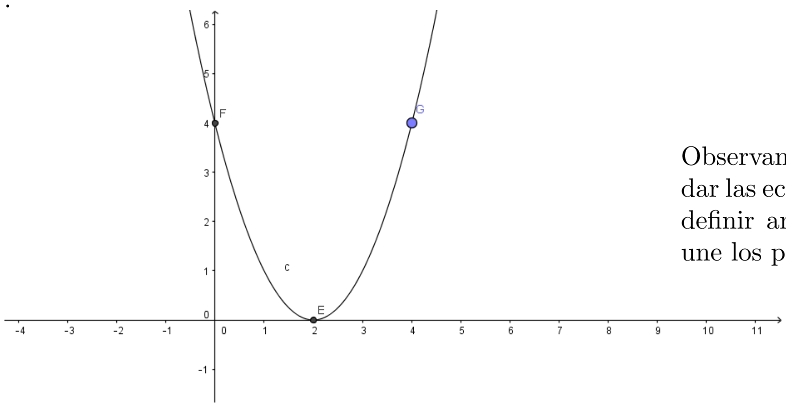
    (a) $x^2 + y^2 = 9 \wedge x \in [0, 3]$.

    (b) $x^2 + y^2 = 9 \wedge y \in [0, 3]$.

    (c) $x^2 + y^2 = 9 \wedge x \in [0, 3] \wedge y \in [0, 3]$.

    (d) $x^2 + y^2 = 9 \wedge x \in [-1, 1]$.

10. .



Observando el siguiente gráfico de una parábola, dar las ecuaciones e inecuaciones necesarias para definir analíticamente el arco de parábola que une los punto F y G.

7 Números Complejos

Definiciones. Forma binómica.

Hasta el momento, considerando sólo a los Números Reales, ecuaciones tan simples como $x^2 + 1 = 0$ tienen como solución al conjunto vacío. Por ello es que se propone la existencia de un nuevo número al que llamaremos *número imaginario* y lo denotaremos como i. Dicho número satisface que $i^2 = -1$; observar que ninguno de los números conocidos hasta el momento cumple tal condición.
A partir de aquí puede definirse un nuevo conjunto numérico, el de los Números Complejos ($\mathbb{C}$), como $\mathbb{C} = \{a+bi;\ a, b \in \mathbb{R}\}$; a es llamada *parte real* y b la *parte imaginaria* del número compejo. Observar que los Números Reales pueden ser considerados Complejos con parte imaginaria nula, es decir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
La suma y producto de números complejos se realiza de igual manera que la suma o productos de binomios.

- La suma y resta: $(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$.
- El producto: $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 i a_2 + b_1 b_2 i^2 =$
  $= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Podemos graficar a los Números Complejos en un plano cuyos ejes cartesianos representan (por convención) la parte real e imaginaria de forma tal que el complejo $a+bi$ es representado por el punto $(a; b)$.

1. Resolver las siguientes operaciones (aproxime cuando sea necesario).
   (a) $(1 + i)^4$
   (b) $(2 + i)(3 - 2i)^3$
   (c) $(2i)^5$
   (d) $(-\sqrt{2} + 2i)^4(3 - i)$

2. Resolver las siguientes operaciones siendo $z_1 = 1 + i$, $z_2 = i$ y $z_3 = 2 + 3i$:
   (a) $z_1^2 + 4$
   (b) $2z_2^2$
   (c) $z_1^2 + 5$
   (d) $(z_3^2 + 1)(z_1 - 3)$
   (e) $z_2 + (3 - 2i)$
   (f) $3z_1^2$
   (g) $2z_2 - i$
   (h) $z_3 + i$
   (i) z_3^3
   (j) z_2^3
   (k) z_1^3
   (l) $(z_1 + z_2)^2$
   (m) $(z_1 - 3z_2)^3$
   (n) $z_1 z_2 + z_3$
   (o) $z_1(z_2 + z_3)$

3. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, busque la manera de transformar la expresión $\frac{a+bi}{c+di}$ en una equivalente de la forma $e + fi$ con $e, f \in \mathbb{R}$. Suegerencia: observar que $(c + di)(c - di) \in \mathbb{R}$.

4. Realizar el cociente entre los siguientes complejos:
   (a) $z_1 = 4 + 5i$; $z_2 = i$
   (b) $z_1 = 1 + i$; $z_2 = -1 + 2i$
   (c) $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = 3 + 2i$
   (d) $z_1 = i$; $z_2 = 1 + i$
   (e) $z_1 = -7 + \sqrt{2}i$; $z_2 = \sqrt{2}i$
   (f) $z_1 = 1 + i$; $z_2 = i - 1$
   (g) $z_1 = 1 - 3i$; $z_2 = -2 + 6i$
   (h) $z_1 = 3i$; $z_2 = 7 - i$
   (i) $z_1 = 2+3i$; $z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{5}i$

Práctica 7

Forma polar

El *módulo* de un número complejo $z = a + bi$ pude entenderse como la "distancia" al origen $(0+0i)$ y se calcula como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. El *argumento* de un complejo no nulo es el ángulo que el punto que representa a dicho complejo forma con respecto al semieje real positivo en sentido horario y usualmente se denota $\theta = arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$, esto quiere decir que hay infinitos valores para el argumento de un complejo, para resolver esto, llamamos *valor principal* (y lo denotamos como Θ) al valor que pertenezca al intervalo $(-\pi;\pi]$. El argumento no está definido para el *cero*.
Llamamos *forma polar* de un complejo no nulo al par ordenado $(|z|, \Theta)$. Observar que este par ordenado define unívocamente a los números complejos distintos de cero.
A partir de las definiciones anteriores, se cumplen las siguientes relaciones:

- $a = |z| \cos\Theta$
- $b = |z| \sin\Theta$

5. Escribir los siguientes Números Complejos escritos en forma binómica en forma polar, graficarlos aproximadamente e indicar su parte real, imaginaria, módulo y argumento (aproximar valores cuando sea necesario):

(a) $1 + i$
(b) 1
(c) i
(d) -1
(e) $-i$
(f) $2 + i$
(g) $4 + 5i$
(h) $3 + 3i$
(i) $\sqrt{3}$
(j) $\frac{1}{2} + i$
(k) $4 + i$
(l) $\sqrt{2} - \frac{1}{4}i$

6. Escribir a los siguientes Números Complejos escritos en forma polar en forma binómica, graficarlos aproximadamente e indicar su parte real, imaginaria, módulo y argumento (aproximar valores cuando sea necesario):

(a) $(1, \pi)$
(b) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$
(c) $(2, 0)$
(d) $(5, -\frac{\pi}{2})$
(e) $(\frac{1}{2}, 4)$
(f) $(\frac{2}{3}, 0)$
(g) $(\sqrt{3}, \pi - 1)$
(h) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{3})$
(i) $(\frac{2}{5}, -\frac{\pi}{4})$
(j) $(10, -\frac{5\pi}{6})$
(k) (π, π)
(l) $(\sqrt{2}, 1)$

7. Muestre que cualquier Número Complejo $z = (\rho, \Theta)$ puede escribirse de la forma $z = \rho(\cos(\Theta) + i\sin(\Theta))$. A esta forma se la llama *Forma Trigonométrica del complejo.*

Las siguientes son dos fórmulas conocidas que involucran al Seno y al Coseno, son algunas de las llamadas *identidades trigonométricas* (fueron vistas en la práctica 3 - *Trigonometría*-):

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

8. A partir de la *forma trigonométrica* y de las fórmulas mencionadas anteriormente resuelva las siguientes operaciones:

(a) $[4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))].[\sqrt{7}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))]$

(b) $[\frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))].[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$

(c) $[\frac{3}{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))] : [\sqrt[3]{4}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))]$

(d) $[\pi(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))] : [2(\cos(0) + i\sin(0))]$

9. A partir de la *forma trigonométrica* y de las fórmulas mencionadas anteriormente muestre que si $z_1 = \rho_1(\cos(\Theta_1) + i\sin(\Theta_1))$ y $z_2 = \rho_2(\cos(\Theta_2) + i\sin(\Theta_2))$, entonces:

   (a) $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\Theta_1 + \Theta_2) + i\sin(\Theta_1 + \Theta_2))$.

   (b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\Theta_1 - \Theta_2) + i\sin(\Theta_1 - \Theta_2))$

   Concluir, basándose en los resultados vistos en estos últimos ítems, que:

   - $(|z_1|;\Theta_1).(z_2;\Theta_2) = (z_1.z_2;\Theta_1 + \Theta_2)$
   - $(|z_1|;\Theta_1) : (z_2;\Theta_2) = (z_1 : z_2;\Theta_1 - \Theta_2)$

10. Considere z_1 del ítem anterior. Calcular z_1^2, z_1^3 y z_1^4.

11. Deduzca una fórmula para obtener el resultado de z^n, siendo $z = (\rho, \Theta)$.

12. Calcular (aproximar valores cuando sea necesario):

   (a) $(1+i)^6$

   (b) $(2+2i)^{11}$

   (c) $i.(2-i).(3+i)^4$

   (d) $i.\dfrac{2-i}{3+i}$

   (e) i^3

   (f) i^4

   (g) i^5

   (h) i^{19}

   (i) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\right).(1+i)$

   (j) $\dfrac{1+i}{i}$

   (k) $\dfrac{1+i}{1-i}$

   (l) $\dfrac{2i}{\sqrt{2}+2i}$

   (m) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right).\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$

   (n) $\dfrac{i}{\frac{1}{4}+2i}$

   (o) $\dfrac{(1, \frac{\pi}{6})}{(2,\pi)^4}$

   (p) $\dfrac{(\rho_1,\Theta_1).(\rho_2,\Theta_2)}{(\rho_3,\Theta_3)^6}$

13. Resolver las siguientes ecuaciones con incógnita $z \in \mathbb{C}$ y graficar las soluciones en el *plano complejo*:

   (a) $z^2 = i$

   (b) $z^2 = 1$

   (c) $z^2 = 2+2i$

   (d) $z^3 = 5i$

   (e) $z^5 = 1$

   (f) $z^4 = 1$

   (g) $z^3 = 1$

   (h) $z^3 = 1+i$

   (i) $z+1 = 2z-(7+i)$

   (j) $z^2 + i = -1+3i$

   (k) $z^6 - (2,\pi) = 0$

   (l) $(1+i)z^3 = (2+i)$

   (m) $z^5 + (3i+1)^2 = 3-i$

   (n) $4i + z^3 = 1+5i$

   (o) $z^2 = -i$

   (p) $z^5 - i + 3 = 0$

   (q) $z^3 = 1$

   (r) $z^5 = |\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}| + i = 0$

   (s) $3 + z^2 = i$

   (t) $(3-i)z^3 + (1+i) = 0$

8 Sucesiones y Recursividad

Sucesiones

1. Escribir los primeros diez términos de las siguientes sucesiones:

   (a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = n \quad \forall n.$

   (b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 1 - 2n \quad \forall n.$

   (c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = (n-4)^2 \quad \forall n.$

   (d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = sen(n) \quad \forall n.$

   (e) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = sen(\pi n) \quad \forall n.$

   (f) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n.$

   (g) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = (\frac{1}{3}n - 4)^2 \quad \forall n.$

   (h) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = a_{n-1} + 1 \quad \forall n > 1$ y con $a_1 = 2.$

   (i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n > 2,\ a_1 = 1$ y $a_2 = 1.$

   (j) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n > 2,\ a_1 = 1$ y $a_2 = -3.$

   (k) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad \forall n > 2,\ a_1 = 1$ y $a_2 = 2.$

   (l) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 2 + n \quad \forall n\ par,\ a_n = -n^2 \quad \forall n\ impar.$

   (m) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \sum_{i=1}^{n} i$

   (n) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$

   (o) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \sum_{i=1}^{n}(1-i)$

   (p) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i$

   (q) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i$

   (r) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(i-2)i^2$

2. Para las sucesiones del ítem anterior, decidir cuáles son crecientes, cuáles decrecientes y cuáles ninguna de las dos.

3. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = n^2$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = -n^2$.
   Calcular $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en cada caso:

   (a) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

   (b) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} - \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

   (c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

   (d) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}.\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

   (e) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 2\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} + 3$

   (f) $c_n = \sqrt{a_n}$

   (g) $c_n = a_n + b_{n-1} \quad \forall n > 1$ y $c_1 = a_1 - b_4$

   (h) $c_n = \frac{3}{a_{n-1}} \quad \forall n > 1$ y $c_1 = \sqrt{2}$

   (i) $c_n = a_n - c_{n-1} \quad \forall n > 2,\ c_1 = a_3 + c_2$ y $c_2 = b_1 + a_2$

4. Escribir a las siguientes sucesiones utilizando el símbolo de sumatoria:

   (a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 2 + 4 + \cdots + 2n.$

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 1 - 4 + 9 - 16 + \cdots \pm n^2$

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 1$ si n es par, y $n = 0$ si n es impar.

5. Verificar que las siguientes sucesiones son iguales:

   (a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ con $a_0 = 1$ y $a_n = 1.2.\ \ldots\ .n$ para $n > 0$, y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ con $b_0 = 1$, y $b_n = b_{n-1}.n$ si $n > 0$.

   (b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 1 + 2 +\ \ldots\ + n$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_1 = 1$, y $b_n = b_{n-1} + n$ si $n > 1$.

   (c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 1 - 2 + 3 - 4 +\ \ldots\ \pm n$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_1 = 1$, y $b_n = b_{n-1} + (-1)^{n-1}n$ si $n > 1$.

6. Escribir a las siguientes sucesiones en forma recursiva:

   (a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 1 + 2^2 +\ \ldots\ + n^2$

   (b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 1 + 2^2 +\ \ldots\ + n^2$

   (c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = -1 + 2^2 - 3^2\ \ldots\ \pm n^2$

   (d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, ...

7. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = f(x-1).x$ si $x > 0$ y $f(x) = 1$ si $x <= 0$.

   (a) Calcular $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-3)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{10})$.

   (b) ¿Podría considerarse a esta función una generalización del *factorial* para los números reales? Justifique.

8. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 0$ si $x < 0$, $g(x) = f(x-1)$ si $x \geq 0$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = g(x-1) + 2$.
   Calcular $f(1)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(\frac{1}{3})$, $f(\sqrt{12})$, $g(1)$, $g(3)$, $g(-1)$, $g(\frac{1}{3})$, $g(\sqrt{12})$

9. Escriba el pseudocódigo "recursivo" de las siguientes funciones:

   (a) producto

   (b) potencia

   (c) factorial

Principio de Inducción

10. En una red de computadoras cuya arquitectura es "serial" y "dirigida", es decir que si las computadoras son enumeradas de la 1 a la n, la computadora i $(1 < i < n)$ está conectada sólo con las computadoras $i-1$ e $i+1$; sólo recibe información de la computadora $i-1$ y sólo envía información a la computadora $i+1$. Si usted sabe que:

    - La computadora 4 está infectada con un virus informático .
    - Si una computadora está infectada, entonces también infecta a la que le envía información.

    ¿Qué puede concluír sobre el estado de las n computadoras?

Sea $P(n)$ una proposición sobre un valor natural n (Por ejemplo $P(n) =$"*n es un número par*").

Si se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(n_0)$ es verdarera
- $P(k) \Rightarrow P(k+1) \;\; \forall k \geq n_0$

entonces $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

11. Muestre, utilizando el *Método de Inducción*, que:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}; \;\; \sum_{i=1}^{n} n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}; \;\; \sum_{i=1}^{n} n \leq n^2$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}; \quad n+1 > n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}; \quad 12n + 4 < n^3$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}; \;\; \sum_{k=1}^{n} (2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1} + 3$

(f) $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}; \quad n! > 2^n$

(g) Siendo $a > 0$, para todo número natural n se cumple que $(1+a)^n \geq 1 + a.n$