Análisis Matemático I

Unidad Nº 7: Series

Práctica 7.1: Series de Sucesiones

1. Escribir el término general de cada una de las siguientes series:

a) 1 + (1/3) + (1/5) +.......................
b) (1/2) + (1/6) + (1/12) + ...
c) (2/5) + (4/8) + (6/11) + ...
d) 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +.....................
e) (1/2) + (1/4) + (1/6) + ...
f) 1 – 4 + 9 – 16 + ...
g) (3/4) + (4/9) + (5/16) + ...
h) 1 + (1/2) + 3 + (1/4) + 5 + (1/6) + ...

2. Escribir cada serie con la cantidad de sumandos que se especifican:

a) $a_n = 1 – (1/n)$; $n = 7$
b) $a_n = 1 + (-1)^n/n$; $n = 6$
c) $a_n = (3n-2)/(n^2 +1)$; $n = 5$
d) $a_n = (1/2)^n$; $n = 6$
e) $a_n = [(n+1)/(2n-1)]^n$; $n = 7$
f) $a_n = 1 + (-1)^n$; $n = 8$

3. Mediante las sumas parciales de las siguientes series, analizar la convergencia de las series

dadas por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a) $a_n = 1$
b) $a_n = 2 - 2+ 2 – 2 +$ ....
c) $a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +$ ....
d) $a_n = (-1)^n$
e) $a_n = 4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0 +$ .... + 0

4. Determinar las sumas parciales de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\right] - \left[\frac{1}{n+1}\right]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{2n-1}\right]^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{3n-1}\right]^{2n-1}$

5. Es condición suficiente que si en una serie $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$: diverge

Por tanto en cuáles de los siguientes casos se puede usar la condición:

a) 1 + 1 + 1 +.....................

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$

6. ¿Cuáles de las siguientes series son geométricas? De las que lo sean decir si convergen o divergen y calcular su suma cuando sea posible.

$a)\sum_{i=1}^{\infty} i^3$ $\quad c)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^3+1}$ $\quad e)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ $\quad g)\sum_{i=2}^{\infty} 5^i$

$b)\sum_{k=2}^{\infty} k2^k$ $\quad d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ $\quad f)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{3^k}$ $\quad h)\sum_{n=3}^{\infty} n^n$

7. Hallar todos los valores de x para los cuales las siguientes series geométricas convergen y, para esos valores, calcular su suma.

$a)\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k$ $\quad d)\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k x^{3k}$

$b)\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ $\quad e)\sum_{k=0}^{\infty} (3-x)^k$

$c)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k+1}}$ $\quad f)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k 5^{k+1}}{3^{2k}}$

8. En las siguientes series geométricas, analizar para qué valor de x converge:

a) $1 + n + n^2 + n^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$
b) $1 - n^2 + n^4 - n^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
c) $1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - n^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
d) $n - n^3 + n^5 - n^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

9. Analizar si algunas de las series resultan geométricas y, en tal caso, determinar la razón. Determinar la suma si existe y estudiar la convergencia.

a) 1 + 2 + 4 + 8 + ...
b) (1/3) + (-1/3) + (1/3) + (-1/3) + ...
c) 1 – 2 + 4 – 8 + 16 - ....
d) 6 + 4 + 3 + (3/2) + (3/4) + (3/8) + ...

10. Analizar la convergencia de las siguientes series, justificando la respuesta:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n.(n+1)}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n+1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{(2n-1)^2} \right]^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{3n+1} \right]^{n/2}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{(3n-1)^2} \right]^{2n-1}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2-1} \right]$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

11. Probar si las siguientes series convergen absolutamente, condicionalmente o divergen

$a)\ \sum (-1)^k \dfrac{1}{k+1}$

$b)\ \sum (-1)^{k+1} \dfrac{3k}{k^2-1}$

$c)\ \sum (-1)^k \dfrac{\sqrt[3]{k^2}+2k+2}{k^5+\sqrt{k}}$

$d)\ \sum (-1)^{3k} \dfrac{3k+2k^{-1}}{4k^2+k^{\frac{3}{2}}}$

$e)\ \sum (-1)^{k-1} \sqrt[k]{\dfrac{k^2+1}{5k^3+2}}$

$f)\ \sum (-1)^k \dfrac{\ln(k+1)}{3^k}$

$g)\ \sum (-1)^{k+3} \dfrac{(2k)!}{k}$

$h)\ \sum (-1)^k \dfrac{(k+1)^2}{(k^2+4)^3}$

12. Analizar la convergencia de las siguientes series alternadas:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \left(\dfrac{1}{n^2} \right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \left(\dfrac{1}{2n-1} \right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \left(\dfrac{1}{2n} \right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \left(\dfrac{n}{n+1} \right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \left(\dfrac{1}{1+n^2} \right)$

13. Formar la diferencia de las series divergentes:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n ; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siendo: $a_n = \dfrac{1}{2n-1} ; b_n = \dfrac{1}{2n}$ Ahora, investigar la convergencia.

14. Formar el producto de las siguientes series:

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n.\sqrt{n}} ; \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ analizar si la nueva serie es convergente y justificar la respuesta.

Análisis Matemático I

Unidad Nº 7: Series

Práctica 7.2: Series de Funciones

1. Determinar la convergencia de las series de funciones:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1).x^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n.n^3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!.x^n}$

2. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

$a) \sum (-1)^k \frac{x^k}{2k^3}$

$b) \sum \frac{k}{e^k} (2x)^k$

$c) \sum (-1)^k \frac{k!}{k^k} x^k$

$d) \sum (-1)^k \frac{\ln k}{4^k} x^k$

$e) \sum (-1)^k \frac{(3x)^k}{(2k)!}$

$f) \sum \frac{(-3x)^k}{7^k}$

$g) \sum \frac{(-3)^{2k}}{(2k+1)!} \quad x^k$

3. Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias. Estudiar la convergencia en los extremos de cada intervalo:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1).(x+1)^n}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}.x^n}{n}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.x^n$

4. Desarrollar en series de funciones o series de potencias:

a) $f(x) = 1/(1+x)$

b) $f(x) = 1/(1-x)$

c) $f(x) = 1/(1+x^2)$

d) $f(x) = \ln(1+x)$

e) $f(x) = \ln(1-x)$

f) $f(x) = arctg(x)$

5. Desarrollar en series de potencia de (x-1) las funciones:

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = 1/x$

6. ¿Con qué exactitud se calculará $\pi/4$ si se emplea la serie:

$$arctg(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

tomando la suma de sus cinco primeros términos con $x=1$?

7. ¿Cuántos términos hay que considerar de la serie que representa a *cos* (x), para calcular:

cos(28º) con exactitud de hasta 0,001?