UNIDAD -6-: INT. DEFINIDA

INTEGRAL DEFINIDA:

Sea la función $f(x)$, definida $\forall x \in [a,b]$. Dividiendo $[a,b]$ en n subintervalos y tomando cualesquiera $(n-1)$ puntos intermedios; tales que: $x_0 = a$, $x_n = b$ se tiene:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

De modo que las longitudes están dadas por:

$\Delta x_1 = x_1 - x_0;\ \Delta x_2 = x_2 - x_1;\ \ldots;\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

En general: $\Delta x_i = \Delta x_{i-1}$ [Regularidad]

Tomando, la norma de la partición:

$\|\Delta\| = \text{Máx. } \Delta x_i;\ 1 \leq i \leq n$

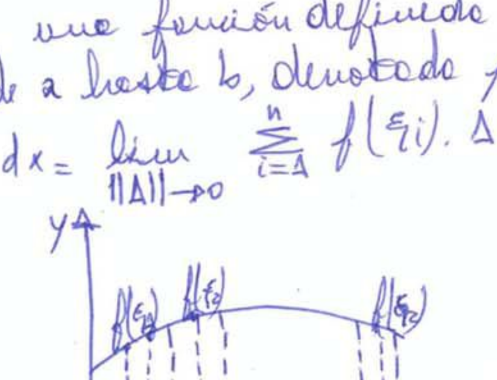
y/ $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ es un punto cualquiera del subintervalo, se genera la SUMA DE RIEMANN.

Se concluye:

Sea $f(x)$ una función cuyo dominio incluye al intervalo $[a,b]$; entonces f es integrable en $[a,b]$, en el sentido de RIEMANN si existe un Nº L, tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, con la condición: $\left| \left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right] - L \right| < \varepsilon$, para toda partición Δ tal que: $\|\Delta\| < \delta$ y para cualquier ξ_i, tal que: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; $1 \leq i \leq n$

Notación: $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = L \Rightarrow f$ es integrable.

Definición: Si f es una función definida en $[a,b]$; la integral definida de f desde a hasta b, denotada por: $\int_a^b f(x)\,dx$, está dada por: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, si $\exists$ el límite.-



1) $\int_a A f(x)\,dx = A\int_a f(x)\,dx$; $A = cte.$

2) $\int_a^b \left(f(x) + g(x) + h(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$

3) Si en el intervalo $[a, b]$; $\forall: a < b$, $f(x)$ y $\varphi(x)$ satisfacen la condición: $f(x) \leq \varphi(x)$, resulta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$; si: $\exists\, f(a)$.-

5) Si $a > b$ y $\exists: \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

6) Dada $f(x)$ continua en $[a, b]$ tal que: $a < c < b \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Tomando en cuenta que las longitudes de los subintervalos son constantes, las particiones se denominan regulares.-

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \Delta x. \Rightarrow \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \therefore n = \dfrac{b-a}{\Delta x}$

En consecuencia: $\|\Delta\| = \Delta x \therefore \lim\limits_{n \to \infty} \|\Delta\| = 0.$

En: $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ o bien: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x$.

Si $\|\Delta\| \to$ n: partic. $\to \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx =$ Area bajo la curva.-

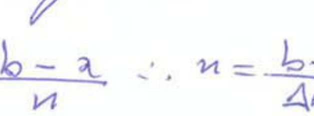
$\therefore f(\xi_1)\cdot\Delta x = f(x_1)\cdot\Delta x$

$f(\xi_2)\cdot\Delta x = f(x_2)\cdot\Delta x$

$\vdots$

$f(\xi_n)\cdot\Delta x = f(x_n)\cdot\Delta x$

1: Evaluar por definición: $\int_1^4 x^2\,dx$



Por definición: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{4-1}{n} = \dfrac{3}{n} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \dfrac{3}{n}}$

$\rightarrow \boxed{\xi_i = 1 + \dfrac{3i}{n}}$

$$\therefore f(x) = x^2 \Rightarrow f(\xi_i) = (\xi_i)^2 = \left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2 = \left(\frac{n+3i}{n}\right)^2$$

$$\therefore \int_1^4 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+3i}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}\cdot \sum_{i=1}^{n} (n+3i)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}\cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (n^2 + 6in + 9i^2)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}\cdot n^2 \cdot n + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}\cdot 6n \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}\cdot 9 \sum_{i=1}^{n} i^2$$

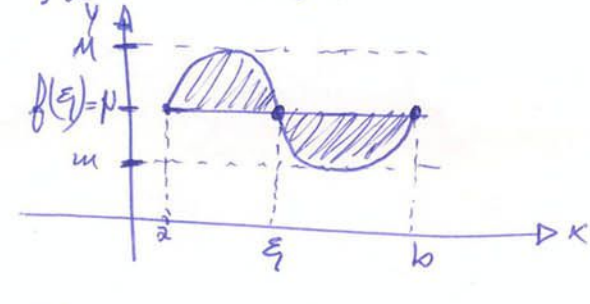
$$= \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{18}{n^2}\cdot \frac{n(n+1)}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{27}{n^3}\cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 3 + \lim_{n\to\infty} \left[\frac{18n^2}{2n^2} + \frac{9n}{n^2}\right] + \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}\left(1\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = 21$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^4 x^2\,dx = 21}$$

TEOREMA 1: TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$; existe un valor entre a y b; tal que: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$



$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$

$$(b-a)\cdot m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\,M$$

$$\Rightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M \Leftrightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

Por Prop. de la Integral Definida:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$\therefore$ Por ser $f(x)$ continua en $[a,b]$, $\exists\, \xi \in [a,b]$; $f(\xi) = \mu$

$$\Rightarrow \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

TEOREMA ②: Si $f(x)$ es continua, $\forall x$; $x \in [a,b] \Rightarrow$
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow$ tiene derivada en x y $F'(x) = f(x)$.

D/ Lo tiene:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

tal que:
$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$
$$= \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt}$$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \qquad (2)$$

Reempl. (2) en (1), previo a tomar límite:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Tomando en cuenta el T. del V. M.; $\exists\, \xi$; $x \le \xi \le x+\Delta x$, entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).(b-a)$

En consecuencia:
$$\frac{f(\xi)\,(\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x})}{\Delta x} = \frac{f(\xi).\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = f(\xi)$$

Tomando:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(\xi)$$

Es el teor. Fund. del Cálc. Integral (Siglo XVIII)
TEOREMA DE LA INT. DEF. (REGLA DE BARROW o NEWTON-LEIBNITZ)
Si $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$, tal que: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$
D/ $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y de $\int_a^x f(t)\,dt$; entonces:

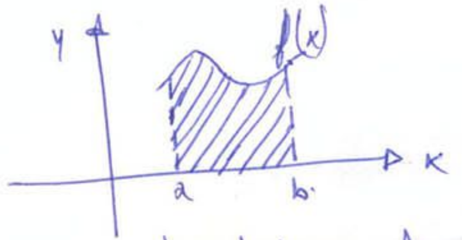
$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \;\therefore\; G(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C \Rightarrow G(a) = C$$

$$\Rightarrow G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + G(a) \Rightarrow G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + \underbrace{G(a)}_{=C} \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)}$$

• Si una curva continua está dada en coordenadas cartesianas por la ecuación: $y = f(x)$, tal que: $f(x) \geq 0$; el área del trapecio mixtilíneo limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas: $x = a$ y $x = b$ y por el segmento de abscisas: $x = a$ y $x = b$ está dado por el cálculo de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S$$



• Si la curva está dada en forma paramétrica: $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, el área del trapecio mixtilíneo está dado por:

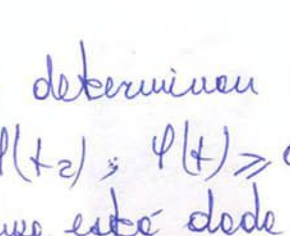
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

tal que: t_1 y t_2 se determinan a partir de las ecuaciones:

$a = \varphi(t_1)$ y $b = \varphi(t_2)$; $\psi(t) \geq 0$, $\forall t \in [t_1, t_2]$

• Si la curva continua está dada en coordenadas polares por una ecuación: $r = f(\varphi)$, el área del sector AOB, limitado por el arco de la curva y los dos radios polares OA y OB, correspondientes a los valores: $\varphi_1 = \alpha$ y $\varphi_2 = \beta$, está dado por:

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi$$



② Longitud del Arco de una Curva:

• Si un arco de curva está dado en coordenadas rectangulares la longitud s del mismo, correspondiente a una curva regular $y = f(x)$, comprendida entre dos puntos cuyas abscisas sean: $x = a$ y $x = b$, es igual a:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

longitud s del arco de la curva es igual a:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\, dt$$; $[t_1, t_2]$: Indica la variación total del parámetro t.-

⊙ Si la curva regular está dada por una ecuación $r = f(\varphi)$ en coordenadas polares r y φ, la longitud s del arco será:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\varphi$$, α y β indican los valores del ángulo polar en los puntos extremos del arco.-

③ <u>Volúmenes de cuerpos sólidos</u>:

(A) <u>Volumen de un cuerpo de Revolución</u>: Los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de un trapecio mixtilíneo, limitado por una curva: $y = f(x)$, el eje OX y dos verticales: $x = a$ y $x = b$, alrededor de los ejes OX y OY, se expresan mediante:

$$\boxed{\begin{aligned} V_X &= \pi \int_a^b y^2\, dx \\ V_Y &= 2\pi \int_a^b xy\, dx \end{aligned}} \quad (1)$$

⊙ El volumen de un cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje OY de la figura limitada por la curva: $x = g(y)$, el eje OY y las paralelas: $y = c$, $y = d$, se determina a partir de:

$$\boxed{V_Y = \pi \int_c^d x^2\, dy} \quad (2)$$

⊙ En general, los volúmenes de los cuerpos engendrados por la rotación de una figura, limitada por las ~~[illegible]~~ curvas: $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ (con: $f_1(x) \leq f_2(x)$) y por las rectas: $x = a$, $x = b$, alrededor de los ejes de coordenadas OX y OY, están dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} V_X &= \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx \\ V_Y &= 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)\, dx \end{aligned}} \quad (3)$$ (Desprendiéndose de (1))

En coord. polares:

$$V_p = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\varphi$$

VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCION:

Los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de un trapecio mixtilíneo, limitado por una curva $y = f(x)$, el eje OX y $x = a$ y $x = b$, alrededor de los ejes OX y OY, están dados por:

$$V_X = \pi \int_a^b y^2 \, dx \quad , \quad V_Y = 2\pi \int_a^b x y \, dx$$

① El volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje OY de la figura limitada por la curva: $x = g(y)$, el eje OY y las paralelas: $y = c$, $y = d \Rightarrow$

$$V_Y = \pi \int_c^d x^2 \, dy \quad ; \quad V_X = 2\pi \int_c^d x y \, dy$$

② En el caso general, los volúmenes de los cuerpos engendrados por la rotación de una figura limitada por las curvas: $y_1 = f_1(x)$; $y_2 = f_2(x)$, con: $f_1(x) \leq f_2(x)$ y por: $x = a$, $x = b$, alrededor de los ejes de coordenadas OX y OY, serán:

$$V_X = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx$$

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x \left(y_2 - y_1\right) dx$$

Ej: Hallar el volumen del toro, engendrado al girar el círculo: $x^2 + (y-b)^2 \leq a^2$; $b \geq a$, alrededor del eje OX.

$\Rightarrow$ De: $x^2 + (y-b)^2 \leq a^2 \Rightarrow (y-b) \leq \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

$y \leq b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$

$\therefore \; y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$

$y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$