# *Trigonometría*

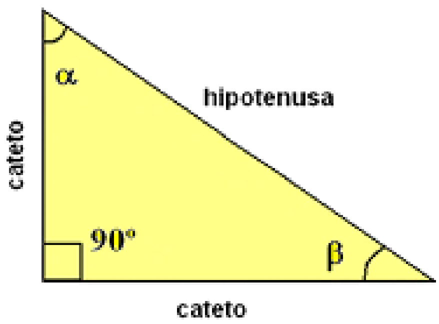
La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". Estudia la relación entre los lados y ángulos de los triángulos.

Se ocupa, por lo tanto, de las funciones asociadas a los ángulos, funciones trigonométricas (también pueden denominarse funciones circulares): seno, coseno, tangente, secante,…

## *Trigonometría de triángulos rectángulos*

Primero vamos a recordar algunas propiedades:

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
- En un triángulo rectángulo (es decir, que tiene un ángulo recto) la suma de los ángulos agudos es 90°. Es decir, los dos ángulos agudos son complementarios.

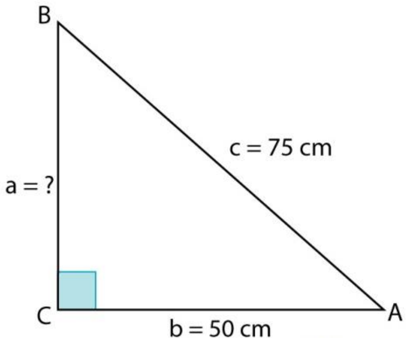



$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$$

- En un triángulo rectángulo la hipotenusa es el lado de mayor longitud.
- En todo triángulo rectángulo se verifica el teorema de Pitágoras: "En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos."

$$(Hipotenusa)^2 = (Cateto_1)^2 + (Cateto_2)^2$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular la medida del cateto **a** en el triángulo ABC de la figura.



*Solución:* Por Teorema de Pitágoras tenemos que: $c^2 = a^2 + b^2$, reemplazando por los valores conocidos queda $75^2 = a^2 + 50^2$

Resolviendo:

$$5625 = a^2 + 2500$$

$$5625 - 2500 = a^2$$

$$3125 = a^2$$

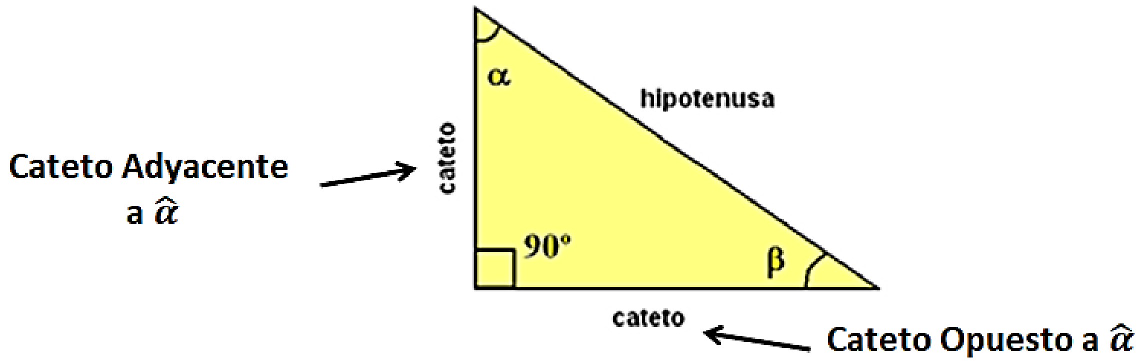
$$\sqrt{3125} = |a|$$

$$55{,}90 \cong |a|$$

$$\boxed{a \cong 55{,}90} \vee a \cong -55{,}90$$

## ***Razones trigonométricas:***

Las razones trigonométricas son relaciones entre los lados del triángulo y solo dependen de los ángulos de este. Las razones trigonométricas básicas son tres: seno, coseno y tangente.



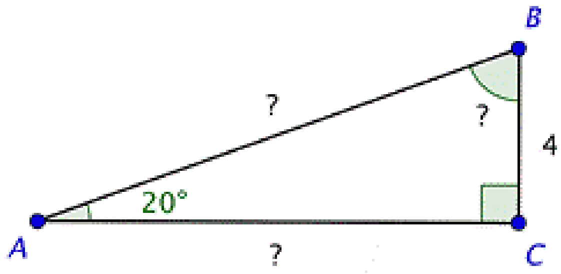

A continuación se indican las razones trigonométricas y una regla mnemotécnica para recordarlas:

$$\sin(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} \longrightarrow \text{SOH}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} \longrightarrow \text{CAH}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} \longrightarrow \text{TOA}$$

Ejemplo: Calcular la medida de los lados y ángulos restantes del siguiente triángulo rectángulo.




*Solución:* Identifiquemos primero qué es lo que debemos calcular:

$\overline{AB}$: Hipotenusa

$\overline{AC}$: Cateto adyacente (al ángulo de 20°)

$\hat{B}$: Ángulo interior (suma 90° con el ángulo de 20°)

Es fácil calcular que $\boldsymbol{\hat{B} = 70°}$

Para calcular la hipotenusa vamos a plantear:

$$\sin(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

$$\sin(20°) = \frac{4}{\overline{AB}}$$

$$\sin(20°) \cdot \overline{AB} = 4$$

$$\overline{AB} = \frac{4}{\sin(20°)}$$

$$\overline{AB} \cong 11{,}7$$

Nos queda calcular el lado $\overline{AC}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$$

$$\tan(20°) = \frac{4}{\overline{AC}}$$

$$\tan(20°) \cdot \overline{AC} = 4$$

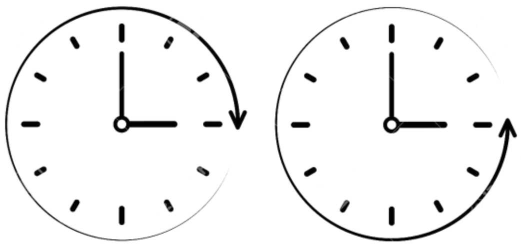
$$\overline{AC} = \frac{4}{\tan(20°)}$$

$$\overline{AC} \cong 10{,}99$$

## ***Sistemas de medición de ángulos***

A la hora de medir ángulos es muy probable que en la escuela primaria o secundaria hayamos aprendido el sistema sexagesimal. Este sistema se usa para medir tiempos (horas, minutos y segundos) y ángulos (grados). Es el sistema que utilizamos para medir ángulos (en un sentido geométrico) desde la primaria.

Este sistema de medición tiene sus limitaciones. Ya que sólo nos deja medir ángulos entre 0° y 360° y en sentido positivo (antihorario).



**Sentido horario** (negativo) **Sentido antihorario** (positivo)

Para trabajar con ángulos negativos (medidos en sentido horario) o con ángulos que superen los 360° debemos utilizar otro sistema de medición: Sistema circular o radial. En este sistema la unidad de medida es el **radián**.

Pero, ¿qué es un radián?

*Un **radián** es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma.*

Quiere decir que $1\, radián \cong 57{,}3°$ . A continuación vamos a explicar cómo funciona esta equivalencia en general.

Sabemos que para calcular la longitud de una circunferencia debemos resolver $2 \cdot \pi \cdot Radio$

Si queremos calcular la longitud de un arco de circunferencia debemos multiplicar a esta expresión por la proporción de circunferencia que queremos tomar y no queda:

$$\underbrace{\text{Longitud de arco de circunferencia}}_{R} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$= \frac{radián}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$\frac{R}{R} \cdot 180° = radián \cdot \pi$$

$$\boxed{180° = \pi\, rad}$$

Veamos ahora cómo pasar de un sistema a otro con algunos ejemplos.

<u>Ejemplo 1</u>: Expresar 20° en radianes.

Para ello plantearemos la siguiente regla de tres simples:

| | | |
|---|---|---|
| 180° | $\longrightarrow$ | $\pi\, rad$ |
| 20° | $\longrightarrow$ | ? |

Nos queda que $20° \approx \frac{20° \cdot \pi\, rad}{180°}$ y simplificando $20° \approx \frac{1}{9}\pi\, rad$. Podemos decir entonces que 20° equivale a $\frac{1}{9}\pi$ o podemos resolver esta expresión (considerando que $\pi$ es aproximadamente 3,14) y nos queda $\frac{1}{9}\pi \cong 0{,}35$.

Ejemplo 2: Expresar en grados sexagesimales a $1{,}9\pi$.

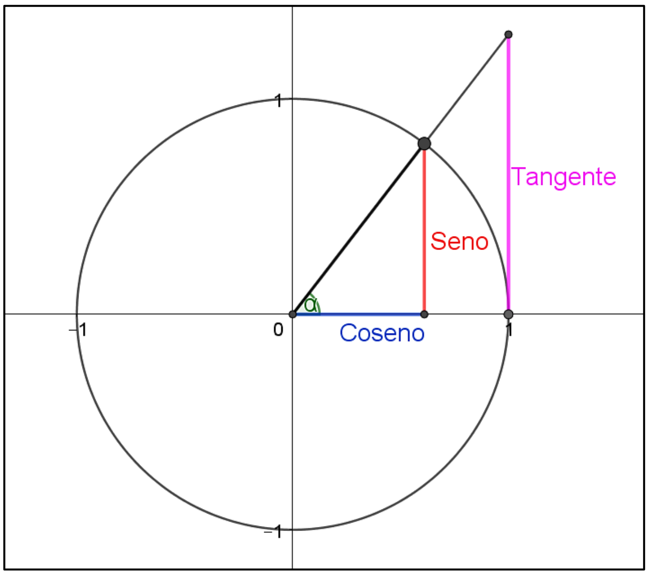
Considerando que π equivale a 180°, obtenemos:

$$1{,}9\pi \approx 1{,}9 \cdot 180° \rightarrow 1{,}9\pi \approx 342°$$

## ***Circunferencia trigonométrica***

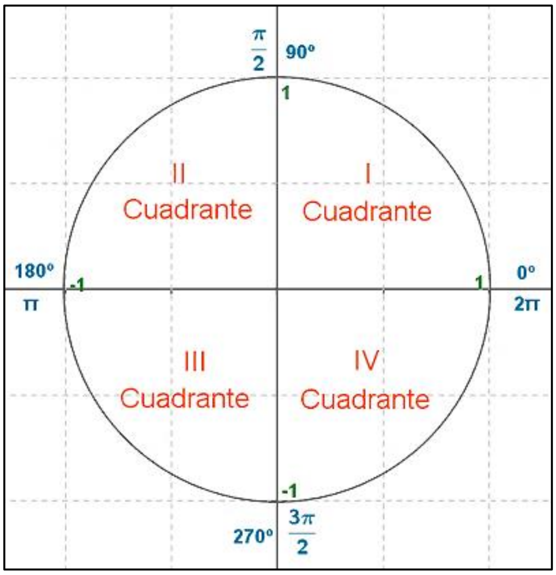
La **circunferencia trigonométrica o unitaria** es una circunferencia de radio uno, normalmente con su centro en el origen (0, 0) de un sistema de coordenadas cartesianas.

Para interpretar y extender las definiciones de las razones trigonométricas a cualquier ángulo, y no únicamente a los ángulos agudos, se representan las razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica.




Puede utilizar la siguiente plantilla de GeoGebra® para visualizar distintos ángulos y las razones trigonométricas que les corresponden: https://www.geogebra.org/m/rycptabv

Viene bien recordar, antes de continuar, la división en cuadrantes del plano cartesiano.




## ***Razones trigonométricas de ángulos notables***

A continuación se presenta una tabla con las razones trigonométricas de los ángulos notables:

| $\boldsymbol{\alpha}$ | $\mathbf{0}\,\boldsymbol{rad}$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}\,rad}$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}\,rad}$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}\,rad}$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\,rad}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha})$ | $0$ | $0{,}5$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha})$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0{,}5$ | $0$ |
| $\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha})$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | No definida |

## ***Ecuaciones trigonométricas***

Una ***ecuación trigonométrica*** es una ecuación en la que aparece una o más razones trigonométricas.

Por ejemplo: $\sin(x) = 1\,, \quad con\; x \in [0; 3\pi)$

Para resolver estas ecuaciones necesitaremos tener presentes algunas identidades y propiedades trigonométricas que resumimos en el siguiente cuadro:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$ | $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ | $\sin(\alpha) = -\sin(\alpha - \pi)$ |
| **Propiedades fundamentales** | $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ | $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + \pi)$ |
| | $\tan(\alpha) = -\tan(-\alpha)$ | $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ | $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$ <br> $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ |
| **Identidad pitagórica** | $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ | | |
| **Fórmulas de suma y resta de ángulos** | $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ <br> $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ <br> $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ <br> $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ | | |

Veamos ahora cómo resolver una ecuación:

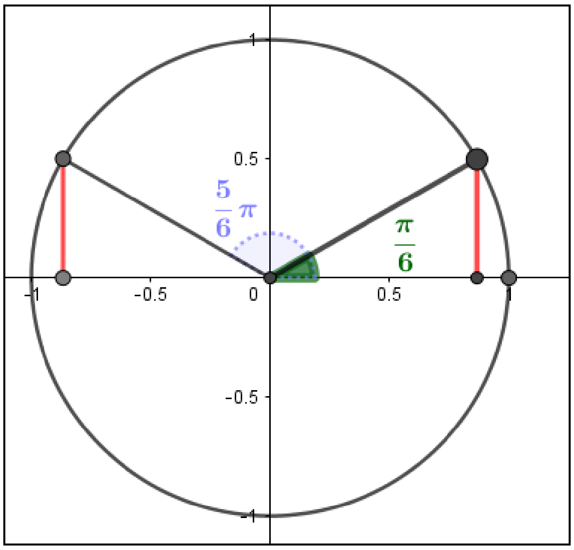
Ejemplo: Hallar todos los valores del ángulo $\alpha$ con $0 \leq \alpha < 3\pi$ tales que $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$.

*Solución*: Para resolver tendremos que considerar, en primer lugar, la **tabla de ángulos notables**. Debemos buscar cuál es el ángulo cuyo seno es $\frac{1}{2}$. Este es el ángulo $\frac{\pi}{6}$.

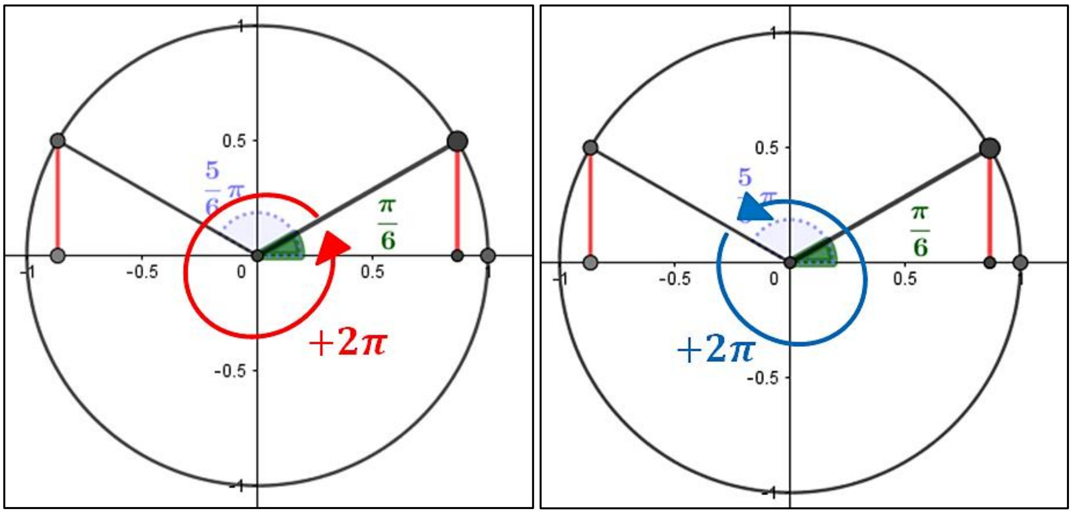
Como $0 \leq \alpha < 3\pi$ quiere decir que podemos dar una vuelta y media en sentido positivo (antihorario).

Sabemos que $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$, es decir que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

Gráficamente los ángulos hallados son:




Observemos que si damos una vuelta ($2\pi$) los ángulos colaterales con estos dos que hallamos tendrían el mismo seno y quedarían dentro de la vuelta y media permitida:




Nos quedaría que otras dos soluciones son $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13}{6}\pi$ y $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{17}{6}\pi$

Finalmente, nos queda que el conjunto solución es $S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5}{6}\pi;\frac{13}{6}\pi;\frac{17}{6}\pi\right\}$