Análisis Matemático I

Unidad Nº 1: Límites y Continuidad

Práctica 1.1: Límites de Sucesiones

1- A partir de la definición de límite de una sucesión, demostrar que:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $x_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{5}$; $x_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$

c. en (b), desde que valor de n se cumple: $\left|x_n - \dfrac{3}{5}\right| < 0.01$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$; $x_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$

2- Hallar los límites de las siguientes sucesiones:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+1).(n+2).(n+3)}{n^3}\right)$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}\right)$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

e. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right)$

3- Dada la sucesión, cuyo término general es: $x_n = \dfrac{3n-5}{9n+4}$, sabiendo que: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$, hallar el número de puntos x_n que caen fuera del intervalo:

$$L = \left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1000}\right);\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1000}\right)\right)$$

4- Indicar si, para n suficientemente grande, las sucesiones siguientes tienen límite:

a. $x_n = \dfrac{1}{2}\pi$

b. $x_n = \begin{cases} 1;\ n:\ par \\ \dfrac{1}{n};\ n:\ impar \end{cases}$

c. $x_n = \dfrac{1}{n}.\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

d. $x_n = n.\left[1-(-1)^n\right]$

5- Hallar los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2n^3}{2n^2+3}+\dfrac{1-5n^2}{5n+1}\right]$

b. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}$
c. $\lim_{n\to\infty} n^2.\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$
d. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$
e. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

6- Demostrar que las siguientes sucesiones son, respectivamente:

a. Creciente; si $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$

b. Decreciente; para $n \geq 10$; si $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$

7- Verificar la acotación de las sucesiones:

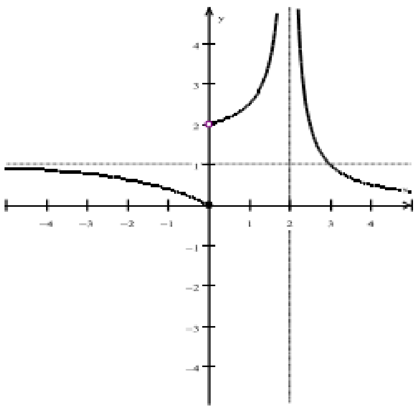
a. $x_n = \dfrac{5n^2}{n^2+3}$

b. $x_n = (-1)^n.\dfrac{2n}{n+1}.sen(n)$

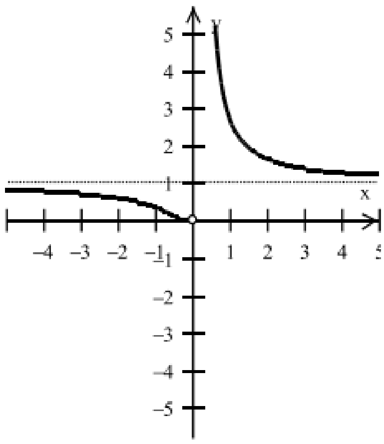
c. $x_n = n.\cos(n\pi)$

Práctica 1.2: Límites y Continuidad de Funciones

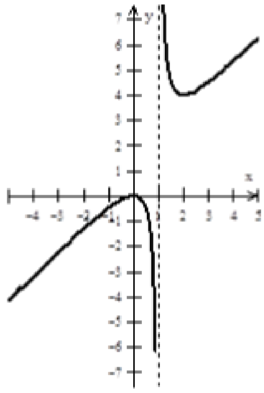
1- A partir de las gráficas de las siguientes funciones determinar dominio, imagen y hallar, si existen, los límites propuestos:



$\lim_{x\to+\infty} f(x)$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$\lim_{x\to2^+} f(x)$
$\lim_{x\to2^-} f(x)$
$\lim_{x\to2} f(x)$
$\lim_{x\to0^+} f(x)$
$\lim_{x\to0^-} f(x)$
$\lim_{x\to0} f(x)$



$\lim_{x\to+\infty} f(x)$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$\lim_{x\to0^+} f(x)$
$\lim_{x\to0^-} f(x)$
$\lim_{x\to0} f(x)$



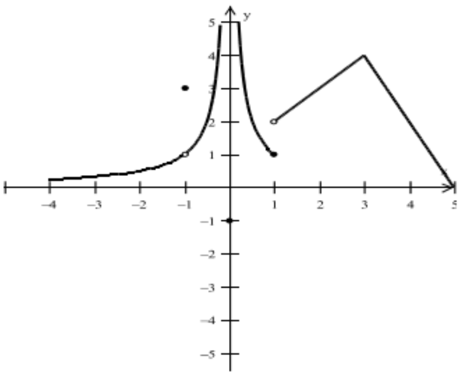
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$\lim_{x\to1^+} f(x)$
$\lim_{x\to1^-} f(x)$
$\lim_{x\to1} f(x)$

2- En cada caso, graficar una función que verifique las siguientes condiciones:

$a)$ *Función par,* $f(0)=2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$

$b)$ $f(1)=0$, $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-3^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-3^+} f(x)=-4$, $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=0$

3- A partir de la gráfica de la función hallar, si existen, los límites dados:



a) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$	b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$	c) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$	d) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$
$\lim_{x\to -1^-} f(x)$	$\lim_{x\to 0^-} f(x)$	$\lim_{x\to 1^-} f(x)$	$\lim_{x\to 3^-} f(x)$
$\lim_{x\to -1} f(x)$	$\lim_{x\to 0} f(x)$	$\lim_{x\to 1} f(x)$	$\lim_{x\to 3} f(x)$

4- Sea la función $f(x) = \dfrac{P(x)}{x+3}$, donde *P(x)* es un polinomio de grado 2:

- *f(x)* tiene una asíntota vertical
- (0, 0) es un punto de la gráfica de *f(x)*
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

5- Determinar los límites indicados:

a. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$

b. $\lim_{x\to 10} \dfrac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$

c. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

d. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^3} - 1}{x}$

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(5x)}{x^3}$

f. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

g. $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x$

h. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}}{x^2 - x}$

i. $\lim_{h\to 0} \dfrac{sen(a + 2h) - 2sen(a + h) + sen(a)}{h^2}$

j. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{tg(x) - tg(x_0)}{x - x_0}$

k. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{\pi - 2x}$

l. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$

m. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x.sen(x)} - 1}{x^2}$

n. $\lim_{t\to 0} \dfrac{1 - \cos(5t)}{1 - \cos(3t)}$

o. $\lim_{x\to 0} \dfrac{tg(x) - sen(x)}{x^3}$

p. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + px)}{x}$

q. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2^x + 3}{2^x - 3}$

r. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 1}{x}$

s. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$

t. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t + sen(t)}{t - sen(t)}$

u. $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1}$

v. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

w. $\lim_{x\to 1}\frac{x^{x}-1}{x.\ln(x)}$

x. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

y. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$

z. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{2}}\right)^{\frac{2x}{x^{2}+1}}$

A. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

B. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

C. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(2x)}{x}\right)^{x+1}$

D. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

E. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

F. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

G. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

6. Hallar los siguientes límites laterales:

A. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$

B. $\lim\limits_{x \to \alpha} e^{\frac{1}{x-\alpha}}$

C. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

D. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|}$

E. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|sen(x)|}{x}$

F. $\lim\limits_{x \to 1} f(x);\ f(x) = \begin{vmatrix} -2x+3; si : x \leq 1 \\ 3x-5; si : x > 1 \end{vmatrix}$

7. La población de un determinado país aumenta el 2% cada año. ¿Cuántas veces crecerá en un siglo?

8. Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones dadas:

C.

A. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1).(x-5)}$

B. $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{1-x}}$

C. $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$

D. $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

E. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

F. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 26x^2 + 25}$

G. $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3}$

9. En caso de existir, clasificar los Puntos de Discontinuidad de las funciones dadas en el ejercicio precedente.

10. Investigar la Continuidad o Discontinuidad de las siguientes funciones:

a. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x}; x \neq 0 \\ 1; x = 0 \end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x}-1}{x}; x \neq 0 \\ 3; x = 0 \end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases} x.sen\left(\dfrac{1}{x}\right); x \neq 0 \\ 0; x = 0 \end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}; x \neq 0 \\ 0; x = 0 \end{cases}$

e. $f(x)=\begin{cases} 4.3^{x}; x < 0 \\ 2a + x; x \geq 0 \end{cases}$

f. $f(x)=sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g. $f(x)=\dfrac{1}{x^{4}-26x^{2}+25}$; en [6,10] ; [-2,2] ; [-6,6]