Resolveremos aquí, los ejercicios 11)i), 11)m) y 11)n) de la Práctica 1 y dejaremos dos nuevos ejercicios para que sean resueltos por los alumnos. Recomendamos fuertemente leer los apuntes tomados en clase y el apunte teórico de esta unidad (que les enviamos el primer día de clases). Además es imprescindible tener a mano la tabla de inferencias y equivalencias lógicas, ya que estas reglas serán usadas en la resolución de los ejercicios.
También puede ocurrir que el alumno encuentre otros caminos distintos de los que se muestran aquí para resolver estos ejercicios ya que en la mayoría de los casos no hay una única forma de hacerlo.

Ejercicio 11) i) Probar la validez del siguiente razonamiento lógico:

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ p \Rightarrow (r \wedge q) \\ r \Rightarrow (s \vee t) \\ \neg s \\ \hline \therefore\ t \end{array}$$

Resolución:

- Si tomamos la primera de las premisas $(p \wedge q)$ y aplicamos la regla de *"simplificación"* que aparece en la tabla de reglas de inferencia, obtenemos:

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

- Ahora tomemos la segunda de las premisas $(p \Rightarrow (r \wedge q))$, más el resultado que obtuvimos recién, y usando *"Modus Ponens"* llegamos a que:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow (r \wedge q) \\ p \\ \hline \therefore\ r \wedge q \end{array}$$

- Aplicamos nuevamente *"simplificación"* al resultado anterior y obtenemos:

$$\begin{array}{c} r \wedge q \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

- Nuevamente *"Modus Ponens"* con el resultado anterior y la tercer premisa:

$$\begin{array}{c} r \Rightarrow (s \vee t) \\ r \\ \hline \therefore\ s \vee t \end{array}$$

- Por último, aplicando la regla *"silogismo disyuntivo"* entre lo que obtuvimos en el paso anterior y la cuarta premisa, llegamos al resultado que buscábamos:

$$\begin{array}{c} s \vee t \\ \neg s \\ \hline \therefore\ t \end{array}$$

Ejercicio 11) m) Probar la validez del siguiente razonamiento lógico:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \Rightarrow r \\ r \Rightarrow s \\ \hline \therefore\ \neg s \Rightarrow \neg q \end{array}$$

Aclaración: Este ejercicio es un poco distintos a los demás items del ejercicio 11, ya que será de suma importancia usar ciertas equivalencias lógicas para resolverlo (no solamente reglas de inferencias).

Resolución:

- En la tabla de "Equivalencias Lógicas" vemos que $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Si aplicamos esta regla a la primer premisa, obtenemos:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv \neg(p \vee q) \vee r$$

- Otra equivalencia lógica (conocida como una de la leyes de De Morgan) que se encuentra en la tabla, dice que $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. Entonces:

$$\neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$

- Usamos ahora, sobre el resultado anterior, otra equivalencia lógica (una de las leyes distributivas) que dice que $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (A \vee C)$

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

- Ahora usamos *"simplificación"* a la fórmula $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$:

$$\begin{array}{c} (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\ \hline \therefore\ \neg q \vee r \end{array}$$

- Aplicamos nuevamente la primer equivalencia lógica que usamos en la resolución de este ejercicio:

$$\neg q \vee r \equiv q \Rightarrow r$$

- Aplicamos la regla de inferencia "silogismo hipotético" entre el último resultado y la segunda premisa y obtenemos:

$$\begin{array}{c} q \Rightarrow r \\ r \Rightarrow s \\ \hline \therefore\ q \Rightarrow s \end{array}$$

- Por último, usamos la equivalencia lógica llamada *"contrarecíproco"* a la fórmula $q \Rightarrow s$ y llegamos al resultado que buscábamos:

$$\neg s \Rightarrow \neg q$$

Ejercicio 11) n) Probar la validez del siguiente razonamiento lógico:

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \vee r \\ \neg q \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

Aclaración: En este ejercicio también usaremos varias equivalencias lógicas.

Resolución:

- Una de las equivalencias lógicas llamada regla de "Adición" dice que de A se deduce $A \vee B$. Es decir, si una premisa es válida, entonces seguro es válida esa premisa más cualquier otra. Lo que nos va servir en este caso (por algo que veremos enseguida) es agregarle a $\neg q$ la premisa $\neg p$. Concretamente:

$$\begin{array}{c} \neg q \\ \hline \therefore\ \neg q \vee \neg p \end{array}$$

- Otra de las leyes de De Morgan, dice que $\neg A \vee \neg B \equiv \neg(A \wedge B)$. Entonces:

$$\neg q \vee \neg p \equiv \neg(q \wedge p)$$

- Usando la *"propiedad conmutativa"* que figura en la tabla de equivalencias lógicas ($A \wedge B \equiv B \wedge A$) tenemos, a partir de $\neg(q \wedge p)$, que vale:

$$\neg(p \wedge q)$$

- Ahora, usando *"silogismo disyuntivo"* con la premisa $(p \wedge q) \vee r$ y el resultado anterior, llegamos a lo que buscábamos:

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \vee r \\ \neg(p \wedge q) \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

Proponemos ahora, que el alumno resuelva estos dos nuevos ejercicios:

Ejercicio 1) Probar la validez del siguiente razonamiento lógico:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow r \\ (r \Rightarrow q) \vee s \\ \neg s \\ \hline \therefore \; p \Rightarrow q \end{array}$$

Ejercicio 2) Probar la validez del siguiente razonamiento lógico:

$$\begin{array}{c} (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \\ \neg q \\ p \vee r \\ \hline \therefore \; r \end{array}$$

Ejercicios resueltos : (11)

....

$$\text{(j)}\quad \begin{array}{l} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\ p \vee s \\ t \Rightarrow q \\ \neg s \\ \hline \therefore\ \neg r \Rightarrow \neg t \end{array}$$

Solución:

Enumeramos las premisas

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) & (1) \\ p \vee s & (2) \\ t \Rightarrow q & (3) \\ \neg s & (4) \\ \hline \therefore\ \neg r \Rightarrow \neg t & (5) \end{array}$$

Silogismo Diyuntivo

$$\begin{array}{ll} p \vee s & (2) \\ \neg s & (4) \\ \hline \therefore\ p & (6) \end{array}$$

Modus Ponens

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) & (1) \\ p & (6) \\ \hline \therefore\ q \Rightarrow r & (7) \end{array}$$

Silogismo Hipotético

$$\begin{array}{ll} t \Rightarrow q & (3) \\ q \Rightarrow r & (7) \\ \hline \therefore\ t \Rightarrow r & (8) \end{array}$$

Equivalencia Contrarecíproco

$$(8) \qquad (t \Rightarrow r) \equiv (\neg r \Rightarrow \neg t) \qquad (5)$$

....

$$\text{(k)}\quad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \neg r \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Solución:

Enumeramos las premisas

$$\begin{array}{ll} p \vee q & (1) \\ \neg p \vee r & (2) \\ \neg r & (3) \\ \hline \therefore\ q & (4) \end{array}$$

Silogismo Diyuntivo

$$\begin{array}{ll} \neg p \vee r & (2) \\ \neg r & (3) \\ \hline \therefore\ \neg p & (5) \end{array}$$

Silogismo Diyuntivo

$$\begin{array}{ll} p \vee q & (1) \\ \neg p & (5) \\ \hline \therefore\ q & (4) \end{array}$$

. . . .

(1) $$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ \neg q \Rightarrow p \\ \neg r \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Solución:

Enumeramos las premisas

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow r & (1) \\ \neg q \Rightarrow p & (2) \\ \neg r & (3) \\ \hline \therefore\ q & (4) \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow r & (1) \\ \neg r & (3) \\ \hline \therefore\ \neg p & (5) \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{ll} \neg q \Rightarrow p & (1) \\ \neg p & (5) \\ \hline \therefore\ \neg(\neg q) & (6) \end{array}$$

Equivalencia Doble negación

(6) $\quad \neg(\neg q) \equiv q \quad$ (4)

Resolución del ejercicio 13 (a) - Práctica 1

$p \vee [p \wedge (p \vee q)]$

Por ley distributiva podemos escribir: $p \vee [(p \wedge p) \vee (p \wedge q)]$

Por leyes de idempotencia $p \wedge p \equiv p$, luego nos queda:

$p \vee [p \vee (p \wedge q)]$

Por ley asocitiva: $(p \vee p) \vee (p \wedge q)$

Por leyes de idempotencia: $p \vee (p \wedge q)$

Por leyes de absorción, queda finalmente p.

Resolución del ejercicio 13 (b) - Práctica 1

$q \wedge [(p \wedge (\neg r \vee q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge (r \vee t \vee \neg t))]$

Las expresiones $q \vee \neg q$ y $t \vee \neg t$ son tautologías por lo que siempre serán verdaderas, decimos entonces que equivalen a 1.

Nos queda:

$q \wedge [(p \wedge (\neg r \vee 1)) \vee (\neg q \wedge (r \vee 1))]$

Las expresiones: $\neg r \vee 1$ y $r \vee 1$ también son tautologías por lo que equivalen a 1.

$q \wedge [(p \wedge 1) \vee (\neg q \wedge 1)]$

Nos quedan las equivalencias: $p \wedge 1 \equiv p$ y $\neg q \wedge 1 \equiv \neg q$

Luego queda, $q \wedge [p \vee \neg q]$

Por propiedad distributiva: $(q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)$

Como $q \wedge \neg q \equiv 0$ por ser una contradicción y resultar siempre falsa, nos queda:

$(q \wedge p) \vee 0$

Luego por leyes de idempotencia y absorción resulta la simplificación: $q \wedge p$.

Álgebra y Lógica Computacional
UNLu

14. Decidir si las siguientes proposiciones son *verdaderas* o *falsas* y escribir una justificación en ambos casos. Escribir la negación en cada caso.

    a. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
    La afirmación es *falsa*.
    JUSTIFICACIÓN
    si $x = 0$ ocurre que $x^2 = 0$.
    NEGACIÓN
    $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$.

    b. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
    La afirmación es *verdadera*.
    JUSTIFICACIÓN
    Tomo un valor de x, por ejemplo $x = 5$. En ese caso, $x^2 = 25 > 0$.
    NEGACIÓN
    $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

    c. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0$
    La afirmación es *falsa*
    JUSTIFICACIÓN
    Si se considera, por ejemplo, $x = 2$ ocurre que $x^2 = 4 > 0$
    NEGACIÓN
    $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

    d. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$
    La afirmación es *verdadera*.
    JUSTIFICACIÓN
    Tomando $x = 0$, $x^2 = 0 \leq 0$
    NEGACIÓN
    $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$

Ejercicio 15 - Práctica 1

Dados los conjuntos $A = \{-3; 1; 5; 7; 12; 18\}$ y $B = \{-3; 5; 7\}$ tenemos que analizar si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas.

a. $\forall x \in A, x \in B$ esta expresión simbólica debe leerse como: "Para todo elemento x que pertenece al conjunto A, se verifica que también pertenece al conjunto B". Es evidente que esta proposición es FALSA, dado que el 12, por ejemplo, es un elemento del conjunto A y sin embargo no es un elemento del conjunto B.

b. $\forall x \in B, x \in A$ esta expresión es muy parecida a la anterior pero ahora resulta VERDADERA, ya que afirma que "todo elemento que pertenezca al conjunto B también estará en el conjutno A". Esto es así, los tres elementos que contiene el conjunto B, están también dentro del conjunto A.

c. $\exists x \in A : x \in B$ en esta proposición aparece el símbolo $\exists$, el cual debe leerse como "existe". Esta expresión afirma que "existe por lo menos un elemento x que pertenece al conjunto A tal que pertenece también al conjunto B". Esto es VERDADERO, ya que tenemos el 5 que pertenece al conjunto A y también está en el conjunto B.

d. $\exists x \in B : x \in A$ esta afirmación también es VERDADERA. Existen elementos que pertencen al conjunto B y además están en el conjunto A, como el -3 por ejemplo.

e. $\exists x \in B : x \in A$ esta proposicin también resulta VERDADERA. Existen elementos que pertenecen al conjunto A tales que están también en el conjunto A (de hecho, son TODOS).

Nos queda negar a las proposiciones anteriores, quedarían así:

a. $\exists x \in A : x \notin B$
b. $\exists x \in B : x \notin A$
c. $\forall x \in A, x \notin B$
d. $\forall x \in B, x \notin A$
e. $\forall x \in A, x \notin A$