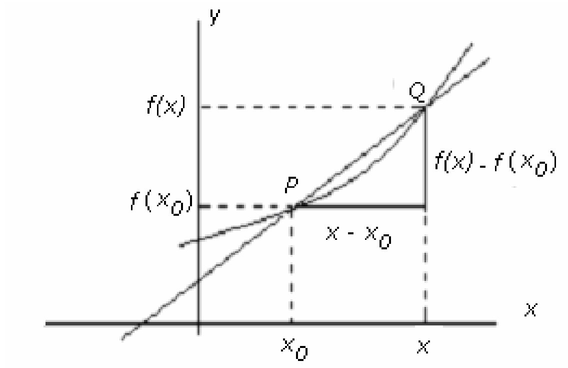
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

A continuación se obtiene la interpretación geométrica del concepto de derivada de una función en un punto, $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

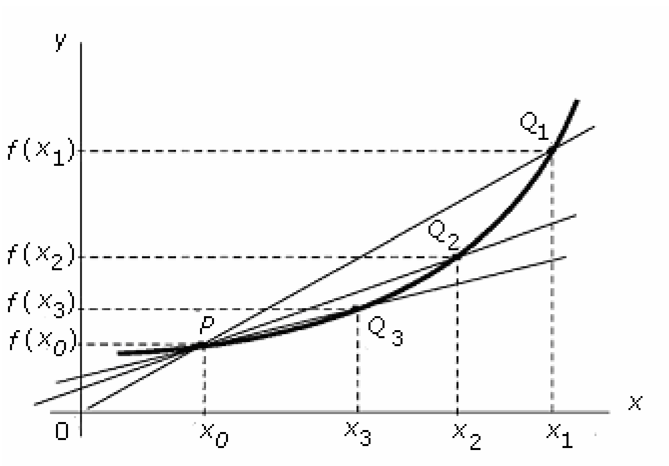
Si dibujamos la gráfica de $y = f(x)$ podemos observar en la siguiente figura que el cociente incremental $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ es la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$ a la curva $y = f(x)$, que pasa por los puntos $P = (x_o, f(x_o))$ y $Q = (x, f(x))$, es decir, $m_{\overline{PQ}} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.



Repitiendo este proceso con sucesivos puntos Q_1, Q_2, ..., Q_i, ... cada vez más próximos al punto $P = (x_o, f(x_o))$ se deduce que:

- la recta tangente a la curva en el punto P es la recta límite de una series de rectas secantes a dicha curva que pasan por el punto P y otros puntos Q_1, Q_2, Q_3... que van aproximándose a P.

- la pendiente de la recta tangente será el límite, si existe, de las pendientes de las rectas secantes a la curva que pasan por los puntos $\overline{PQ_1}$, $\overline{PQ_2}$,..., cuando Q_i está cada vez más próximo a P.



Cuando $x \to x_o$, es decir, $Q_i \to P$, si existe $\lim\limits_{Q_i \to P} m_{\overline{PQ_i}} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ nos da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en *P*.

Por tanto, teniendo en cuenta que $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, se concluye que la derivada de *f* en el punto x_o es la pendiente a la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en *P*.

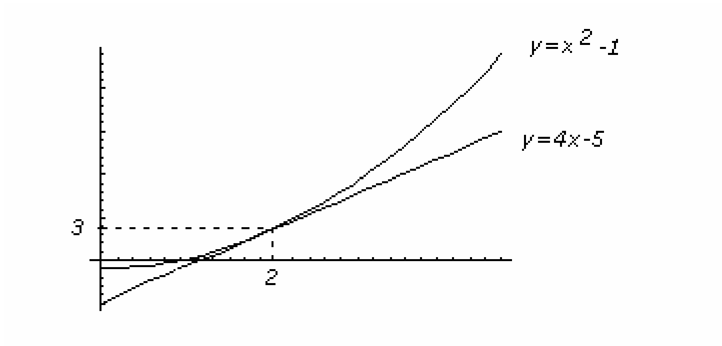
La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto x_o, conocida su pendiente, se puede escribir de la forma:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

Ejemplo 5: Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ en el punto $x = 2$.

La pendiente es $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 1 - 3}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4$

La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, es decir, $y - 3 = 4(x - 2)$, y operando queda $y = 4x - 5$.



2.1.5 Teoremas sobre derivadas

Aunque dada la ecuación de una función es posible obtener su respectiva función derivada utilizando la definición, para algunas funciones este procedimiento resulta sumamente tedioso. Surge entonces la necesidad de simplificar este proceso, lo cual puede lograrse al estudiar los teoremas sobre derivadas.

Teorema 1

La derivada de una función constante es cero.

Prueba:
Ejercicio para el estudiante.

Ejemplo 1

1. Si $f(x) = 8$ entonces $f'(x) = 0$.
2. Si $f(x) = 5\sqrt{2}$ entonces $f'(x) = 0$.
3. Si $f(x) = \frac{4}{5+\sqrt{2}}$ entonces $f'(x) = 0$.

Teorema 2

Si $f(x) = x$ entonces f es derivable sobre $\mathbb{R}$ y $D_x f(x) = D_x x = 1$.

Prueba:
Ejercicio para el estudiante.

Ejemplo 2

1. $D_y y = 1$
2. $D_n n = 1$
3. $D_t t = 1$

Teorema 3

Si $f(x) = x^n$ con $n \in Q$ y x pertenece al conjunto A en el que x^n está bien definida, entonces f es derivable en A y $D_x x^n = n\, x^{n-1}$.

Prueba:
Al final del capítulo.

Ejemplo 3

1. Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.
2. Si $f(x) = x^5$ entonces $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$.
3. $D_x\left(x^{-3}\right) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$.
4. $D_x\left(\frac{1}{x^5}\right) = D_x x^{-5} = -5x^{-6}$.
5. $D_x\left(\sqrt{x}\right) = D_x\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $D_x\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
7. $D_x\left(x^{-\frac{1}{4}}\right) = \dfrac{-1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1} = \dfrac{-1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$
8. $D_x\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right) = D_x\left(x^{-\frac{3}{4}}\right) = \dfrac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

Teorema 4

Si la función f es derivable sobre un intervalo K y c es un número real, entonces la función g para la que $g(x) = c\, f(x)$ es derivable sobre K, además $D_x[c\, f(x)] = c\, D_x f(x)$.

Prueba:
Ejercicio para el estudiante utilizando la definición de derivada de una función.

Este teorema afirma que la derivada del producto de una constante por una función derivable, es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Ejemplo 4

1. Si $f(x) = 5x$ entonces $f'(x) = 5\, D_x x = 5 \cdot 1 = 5$.
2. Si $f(x) = -2x^3$ entonces $f'(x) = -2\, D_x x^3 = -2(3x^2) = -6x^2$.
3. $D_x\left(\dfrac{2}{7}\sqrt{x}\right) = \dfrac{2}{7}\, D_x\sqrt{x} = \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{7\sqrt{x}}$.
4. $D_x\left(\dfrac{-5}{4}x^{-3}\right) = \dfrac{-5}{4} \cdot -3x^{-4} = \dfrac{15}{4x^4}$.
5. $D_z\left(2z^{\frac{-3}{7}}\right) = 2\left(\dfrac{-3}{7} \cdot z^{\frac{-10}{7}}\right) = \dfrac{-6}{7} \cdot z^{\frac{-10}{7}}$.

■ Teorema 5

Si f y g son dos funciones derivables sobre un intervalo K, entonces la función $h = f + g$ es derivable sobre K y además $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$, para $x \in K$.

Prueba:
Al final del capítulo.

Se tiene entonces que la derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de las funciones.
También:

$D_x[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x)] = D_x f_1(x) + D_x f_2(x) + D_x f_3(x) + ... + D_x f_n(x)$
donde $f_1, f_2, ..., f_n$ son funciones derivables sobre un intervalo K.

■ Ejemplo 5

1. $D_x[x^3 + x^7] = D_x x^3 + D_x x^7 = 3x^2 + 7x^6.$

2. $D_x[2x^{\frac{7}{2}} + x^{-1}] = D_x 2x^{\frac{7}{2}} + D_x x^{-1} = 2D_x x^{\frac{7}{2}} + D_x x^{-1} = 2 \cdot \dfrac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} - x^{-2} = 7\sqrt{x^5} - \dfrac{1}{x^2}.$

3. $D_x[\sqrt[3]{x} + 2x^3 + 5x] = D_x x^{\frac{1}{3}} + D_x 2x^3 + D_x 5x = \dfrac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} + 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 6x^2 + 5.$

Si f y g son funciones derivables sobre un intervalo K entonces la función $f - g$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x \in K$ se tiene que $D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$.

■ Ejemplo 6

1. $D_x[5x^2 - 5] = D_x 5x^2 - D_x 5 = 10x - 0 = 10x.$
2. $D_x\left[\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \sqrt{x}\right] = D_x[3x^{-1} - 2x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}] = -3x^{-2} + 4x^{-3} + \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

■ Teorema 6

Si f y g son funciones derivables sobre un intervalo K entonces la función $H = f \cdot g$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x \in K$ se tiene que $D_x[f(x) \cdot g(x)] = f(x) D_x g(x) + g(x) D_x f(x)$.

Prueba:
Al final del capítulo.
Puede decirse que la derivada del producto de dos funciones, es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda función por la derivada de la primera.

■ Ejemplo 7

1. $D_x[\sqrt[3]{x}(2x^2+x)] = \sqrt[3]{x}D_x(2x^2+x) + (2x^2+x)D_x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}(4x+1) + (2x^2+x)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2. $D_x[(4x^3-5x^2+6)(\sqrt{x}+2x)] = (4x^3-5x^2+6)D_x(\sqrt{x}+2x) + (\sqrt{x}+2x)D_x(4x^3-5x^2+6) =$

   $$(4x^3-5x^2+6)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\right) + (\sqrt{x}+2x)(12x^2-10x+0).$$

3. $D_x[(ax^3-bx^2+c)(5x^{-3}+kx)]$, con a, b, c, k constantes.

   $$= (ax^3-bx^2+c)D_x(5x^{-3}+kx) + (5x^{-3}+kx)D_x(ax^3-bx^2+c)$$

   $$= (ax^3-bx^2+c)(-15x^{-4}+k) + (5x^{-3}+kx)(3ax^2-2bx).$$

■ Teorema 7

Si f y g son dos funciones derivables y si $g(x) \neq 0$ sobre un intervalo K entonces la función $h = \dfrac{f}{g}$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x \in K$ y se tiene que $D_x\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)D_xf(x) \; - \; f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}$

Prueba:
Al final del capítulo.

Puede decirse que la derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

■ Ejemplo 8

1. $D_x\left(\dfrac{5x^2-x+1}{x^3+4x^2}\right)$

   $$= \frac{(x^3+4x^2)D_x(5x^2-x+1) - (5x^2-x+1)D_x(x^3+4x^2)}{[x^3+4x^2]^2}$$

   $$= \frac{(x^3+4x^2)(10x-1+0) - (5x^2-x+1)(3x^2+8x)}{[x^3+4x^2]^2}$$

   $$= \frac{10x^4 - x^3 + 40x^3 - 4x^2 - 15x^4 - 40x^3 + 3x^3 + 8x^2 - 3x^2 - 8x}{[x^3+4x^2]^2}$$

   $$= \frac{-5x^4+2x^3+x^2-8x}{[x^3+4x^2]^2} \quad \text{con } x \neq 0,\ x \neq -4$$

2. $D_x\left(\dfrac{\sqrt{x}+5}{4x^2+2}\right)$

$$= \frac{(4x^2+2)D_x(\sqrt{x}+5)-(\sqrt{x}+5)D_x(4x^2+2)}{[4x^2+2]^2}$$

$$= \frac{(4x^2+2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-(\sqrt{x}+5)(8x)}{[4x^2+2]^2}$$

$$= \frac{2x^2+1-\sqrt{x}\cdot 8x(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+1-8x(x+5\sqrt{x})}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2}$$

$$= \frac{1-6x^2-40x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2} \quad \text{con } x>0$$

3. $D_x\left(\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x}-2}\right) = \dfrac{(\sqrt[3]{x}-2)\cdot 2-2x\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)}{(\sqrt[3]{x}-2)^2}$

$$= \frac{2\sqrt[3]{x}-4-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[3]{x}-2)^2}$$

$$= \frac{6\sqrt[3]{x}-12-2\sqrt[3]{x}}{3(\sqrt[3]{x}-2)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt[3]{x}-12}{3(\sqrt[3]{x}-2)^2} \quad \text{con } x\neq 8$$

2.1.6 Derivada de una función compuesta (Regla de la cadena)

Si consideramos las ecuaciones $y=u^3,\ u=5x^2+8$ entonces puede escribirse "y" como $y=(5x^2+8)^3$.

En igual forma, si $y=\sqrt{u},\ u=4x^2+5x+2$ entonces puede expresarse "y" como $y=\sqrt{4x^2+5x+2}$.

En general, si $y=f(u),\ u=g(x)$ entonces $y=f(g(x))$.

Las ecuaciones anteriores dan en forma explícita las siguientes funciones:

$f=\{(u,y)/\ y=f(u)\}$

$g=\{(x,u)/\ u=g(x)\}$

$h=\{(x,y)/\ y=f(g(x))\}$

La función h para la cual $h = f(g(x))$ recibe el nombre de función compuesta y se escribe $h = (fog)(x) = f(g(x))$.

Observe que los elementos del dominio de h son los x que pertenecen al dominio de la función g, tales que $g(x)$ pertenezca al dominio de f.

Ilustraremos lo anterior con el siguiente diagrama:

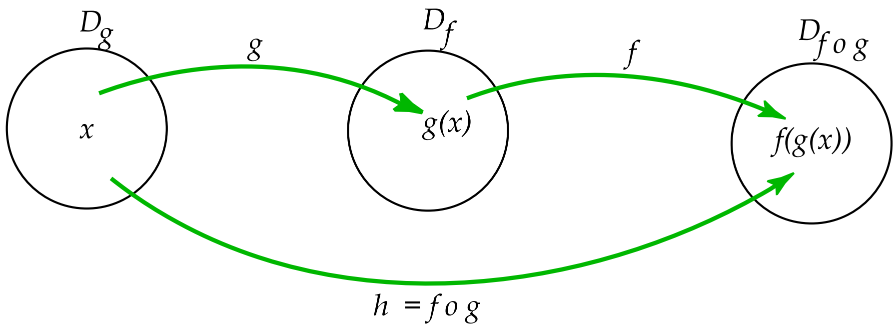


Figura 2.11: Dominio de una función compuesta

Otros ejemplos de funciones compuestas son:

1. $h(x) = \sqrt[3]{6x-4} = f(g(x))$ donde $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = 6x - 4$
2. $h(x) = e^{3x^2+1} = f(g(x))$ donde $f(x) = e^x$ y $g(x) = 3x^2 + 1$

Determinaremos ahora la derivada de una función compuesta.

■ **Teorema 1**

Si la función $g = \{(x, y)/\ y = g(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S_1 y si la función $f = \{(u, y)/\ y = f(u)\}$ es derivable sobre un intervalo S_2 tal que $S_2 = \{g(x)/\ x \in S_2\}$, entonces la función compuesta
$f(g) = \{(x, y)/\ y = f(g(x))\}$ es derivable sobre S_1 y $D_x[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, para $x \in S_1$.
Esta fórmula recibe el nombre de Regla de la Cadena.

Demostración:
Al final del capítulo.

■ **Ejemplo 1**

1. $D_x[f(3x^2 + 1)] = f'(3x^2 + 1) \cdot D_x(3x^2 + 1) = f'(3x^2 + 1) \cdot 6x$

2. $D_x[f(\sqrt{x})] = f'(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ con $x > 0$

3. $D_x[f\left(\dfrac{2}{x}\right)] = f'\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot D_x\left(\dfrac{2}{x}\right) = f'\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot \dfrac{-2}{x^2}$

Corolario:

Si la función $g = \{(x,u)/\ u = g(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S_1 y si $[g(x)]^p$ y $[g(x)]^{p-1}$ están definidas para $x \in S_2$ con $S_2 \subseteq S_1$, $(p \in Q)$, entonces la función $g^k = \{(x,y)/\ y = [g(x)]^p\}$ es derivable sobre S_2 y además $D_x[g(x)^p] = p(g(x))^{p-1} \cdot D_x g(x)$, para $x \in S_2$.

Este teorema es una aplicación inmediata de la regla de la cadena en la forma $D_x y = D_u y \cdot D_x u$ con $y = u^p$, $u = g(x)$ y $D_u y = p \cdot u^{p-1}$.

Ejemplo 2

1. $D_x(5x+3)^4$

   En este caso $u = 5x+3$ por lo que

   $D_x[(5x+3)^4]$

   $= 4(5x+3)^3 \cdot D_x(5x+3)$

   $= 4(5x+3)^3 \cdot 5$

   $= 20(5x+3)^3$

2. $D_x[(3x^4+5x^2+4)^{-2}]$

   $= -2(3x^4+5x^2+4)^{-3} \cdot D_x(3x^4+5x^2+4)$

   $= -2(3x^4+5x^2+4)^{-3} \cdot (12x^3+10x)$

3. $D_x\sqrt{5x^2+4}$

   $= D_x(5x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

   $= \dfrac{1}{2} \cdot (5x^2+4)^{\frac{-1}{2}} \cdot (10x+0)$

   $= \dfrac{5x}{\sqrt{5x^2+4}}$

4. $D_x\sqrt[4]{6x^4+7x^2}$

   $= D_x(6x^4+7x^2)^{\frac{1}{4}}$

   $= \dfrac{1}{4} \cdot (6x^4+7x^2)^{\frac{-3}{4}} \cdot (24x^3+14x)$

$$= \frac{12x^3 + 7x}{2\sqrt[4]{(6x^4 + 7x^2)^3}}$$

5. $D_x\sqrt{5x + \sqrt{6x^2 + 1}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5x + \sqrt{6x^2 + 1}}} \cdot \left(5 + \frac{12x}{2\sqrt{6x^2 + 1}}\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5x + \sqrt{6x^2 + 1}}} \cdot \left(\frac{5\sqrt{6x^2 + 1} + 6x}{\sqrt{6x^2 + 1}}\right)$$

Ejercicios:

Determine la derivada de las funciones con ecuaciones:

1.) $f(x) = 6x^3 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^3 + 1}}$ 2.) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{5x^2 + 1}{2x}}$

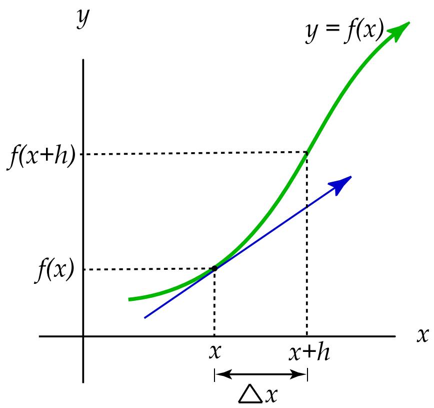


Figura 2.12: Gráfica de $f(x)$ y la recta tangente

2.1.8 Derivadas de orden superior

Si f es una función diferenciable, es posible considerar su función derivada como:

$f' = \{(x, y)/\ y = D_x f(x)\}$ para x en el dominio M de f.

Si para algunos valores $x \in M$ existe el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ se dice que existe la segunda derivada de la función f que se denota por $f''(x)$ o $D_x^2 f(x)$, que equivale a $D_x[D_x f(x)]$. O sea, la segunda derivada de la función f se obtiene derivando la primera derivada de la función.

Ejemplo 1

1. Si $f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$ entonces:

   $f'(x) = 15x^2 + 12x - 5$ y

   $f''(x) = 30x + 12$

2. Si $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$ entonces:

   $g'(x) = \dfrac{(x-1)(2x+3) - (x^2+3x)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ y derivando nuevamente

   $g''(x) = \dfrac{(x-1)^2(2x-2) - (x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4}$

   $= \dfrac{(x-1)[(x-1)(2x-2) - (x^2-2x-3)]}{(x-1)^4}$

   Por tanto $g''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$

Similarmente podemos decir que la derivada de $D_x^2 f(x)$ respecto a "x" es la tercera derivada de f respecto a "x" que se denota $D_x^3 f(x)$ o $f'''(x)$.

La derivada de la tercera derivada es la cuarta derivada $D_x^4 f(x)$ y así podríamos continuar sucesivamente hasta la enésima derivada de f que se denota por $D_x^n f(x)$ o $f^{(n)}(x)$. Generalmente se habla del orden de la derivada; así la primera derivada es la derivada de primer orden, la segunda es la de segundo orden, la enésima derivada es la derivada de orden n.

Ejemplo 2

1. Determinar $g''(x)$ si $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$, donde $D_g = \mathbb{R}$.

   Solución:

   Obtenemos primero $g'(x)$

   $g'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

   Luego:

   $g''(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+3} - (x+1) \cdot \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}}{\sqrt{(x^2+2x+3)^2}}$ y se tiene que:

   $g''(x) = \dfrac{2}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$

2. Determinar $f'''(x)$ si $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{2}{5}} + x$

   Solución:

Se tiene que:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{5}x^{\frac{-3}{5}} + 1$$

$$f''(x) = \frac{-4}{9}x^{\frac{-5}{3}} + \frac{24}{25}x^{\frac{-8}{5}}$$

Por último:

$$f'''(x) = \frac{20}{27}x^{\frac{-8}{3}} - \frac{192}{125}x^{\frac{-13}{5}}$$

3. Si $y = \sqrt{x}$ determinar $D_x^n y$.

En este caso debemos dar una forma general para la derivada de orden n, partiendo de las regularidades que se presentan en las primeras derivadas que calculemos.

Así:

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$$

$$y'' = \frac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2^2}x^{\frac{-(2\cdot 2-1)}{2}}$$

$$y''' = \frac{3}{8}x^{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{2^3}x^{\frac{-(2\cdot 3-1)}{2}}$$

$$y^{iv} = \frac{-15}{16}x^{\frac{-7}{2}} = \frac{-15}{2^4}x^{\frac{-(2\cdot 4-1)}{2}}$$

$$y^{v} = \frac{105}{32}x^{\frac{-9}{2}} = \frac{105}{2^5}x^{\frac{-(2\cdot 5-1)}{2}}$$

.
.
.

$$y^n = \frac{(-1)^{n+1} 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n}x^{\frac{-(2n-1)}{2}} \quad \text{para } n \geq 2.$$

Ejercicios.

1. Obtener $D_u^n w$ si $w = \dfrac{1}{1+2u}$.

Una aplicación de la segunda derivada

Anteriormente hemos estudiado que si $s = s(t)$ nos indica la distancia de una partícula al origen en un tiempo t, entonces $D_t s(t)$ es la velocidad en el tiempo t.

Al calcular la derivada de la velocidad respecto al tiempo, es decir, al calcular $D_t v(t)$ se obtiene la aceleración instantánea en el tiempo t. Si denotamos esta aceleración por $a(t)$ se tiene que $a(t) = D_t^2 s(t)$, es decir, la aceleración es la segunda derivada de la distancia respecto al tiempo.

Ejemplo 3

Sea $s = \dfrac{32}{12+t^2}$ con $t \geq 0$, la ecuación que determina la distancia en el tiempo t (en segundos) de una partícula al origen en un movimiento rectilíneo. Determinar el tiempo, la distancia, y la velocidad en cada instante en que la aceleración es nula.

Solución:

Si $s = \dfrac{32}{12+t^2}$ entonces la velocidad v está dada por:

$v(t) = \dfrac{-64t}{(12+t^2)^2} = s'(t)$ y la aceleración es $a = \dfrac{192t^2 - 768}{(12+t^2)^3} = v'(t)$

Averiguemos el tiempo en que la aceleración se hace cero:

$a(t) = 0 \iff 192t^2 - 768 = 0 \iff t^2 = 4 \iff t = 2$

Luego, la distancia recorrida cuando $t = 2$ es $s = 2$ metros y la velocidad en $t = 2$ es $v = \dfrac{-1}{2}$m/seg.

Ejemplo 4

Si $y = f(x)$ es la ecuación de una curva, se sabe que $f'(x)$ determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en un punto (x, y).

Se tiene que $D_x^2 y$ es la razón de cambio de la pendiente de la recta tangente respecto a x. Más adelante utilizaremos la segunda derivada de una función para determinar los extremos relativos de una función y para determinar la concavidad de la gráfica de una función.

Ejemplo 5

1. Determinar la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica de la curva con ecuación $y = x^4 + x^3 - 3x^2$, en los que la razón de cambio de la pendiente es cero.

   Solución:

   Se tiene que $y' = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ da la pendiente de la recta tangente a la curva.

   Además $y'' = 12x^2 + 6x - 6$ determina la razón de cambio de la pendiente.

   Debemos averiguar los valores de x en los que esta razón de cambio es cero;

   Entonces $y'' = 0 \iff 6(2x-1)(x+1) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ó $x = 1$

   Luego, cuando $x = \dfrac{1}{2}$ la pendiente es $y' = 12\left(\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{6}{2} - 6 = 0$ y cuando $x = -1$ la pendiente y' también es cero.

2. Determinar la razón de cambio de la pendiente en $(3,27)$ para la curva con ecuación $y=(2x-3)^3$.

   Solución:

   La razón de cambio de la pendiente está dada por la segunda derivada de la función, así:

   $D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x[6(2x-3)^2] = 12(2x-3)\cdot 2 = 24(2x-3)$

   En el punto con coordenadas $(3,27)$ la razón de cambio de la pendiente es:
   $24(2\cdot 3-3) = 24(6-3) = 72$

   Luego $D_x^2 y = 72$ en $(3,27)$.

2.1.9 Derivada de la función logarítmica

Vamos a estudiar la derivada de la función f definida por $f(x)=\log_a x$, donde $x\in\mathbb{R}^+$ y $a\in\mathbb{R}^+$ tal que $0<a<1$ ó $a>1$

Teorema 1

Si $a>0$ y $a\neq 1$, y si $x>0$, entonces la función $\log_a = \{(x,y)/\ y=\log_a x,\ x\in]0,+\infty[\}$ es derivable sobre su dominio $]0,+\infty[$ y $D_x \log_a x = \dfrac{1}{x}\log_a e,\ x>0$.

Demostración:
Al final del capítulo.

Ejemplo 1

1. $D_x \log_2 x = \dfrac{1}{x}\log_2 e$
2. $D_x \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{1}{x}\log_{\frac{1}{2}} e$

Teorema 2

Sea $a>0$ y $a\neq 1$, si la función $g=\{(x,u)/\ u=g(x)\}$ es derivable y $g(x)\neq 0$ sobre un conjunto M, entonces la función F definida por $F(x)=\log_a|g(x)|,\ x\in M$, es derivable sobre M y $D_x\log_a|u| = F(x) = \log_a|u| = \dfrac{1}{u}(\log_a e)D_x u,\ x\in M$

Demostración:
Al final del capítulo.

Ejemplo 2

1. $D_x\log_3(5x^2+1) = \dfrac{1}{5x^2+1}\log_3 e(10x) = \dfrac{10x}{5x^2+1}\log_3 e$

2. $D_x \log_2 \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \log_2 e \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\log_2 e}{2x}, \quad x > 0$

3. $D_x \quad \log_5 \left(\dfrac{x+1}{x^2+3} \right)$

$= \dfrac{1}{\frac{x+1}{x^2+3}} \quad \log_5 e \cdot \dfrac{x^2+3}{1-(x+1)(2x)} \cdot (x^2+3)^2$

$= \dfrac{3-2x-x^2}{(x+1)(x^2+3)} \quad \log_5 e, \quad x > -1$

En particular si la base de los logaritmos es e entonces el $\log_e x$ se denota por $\ln x$, y:

1. $D_x \ln x = \dfrac{1}{x} \log_e e = \dfrac{1}{x} \cdot 1 = \dfrac{1}{x}$, es decir $D_x \ln x = \frac{1}{x}$

2. Si $g(x)$ es una función derivable con $g(x) \neq 0$ entonces:
$D_x \ln |g(x)| = \dfrac{1}{g(x)} D_x(g(x))$

Ejemplo 3

1. $D_x \ln 5x = \dfrac{1}{5x} D_x(5x) = \dfrac{1}{5x} \cdot 5 = \dfrac{1}{x}$

2. $D_x \ln(\sqrt{x+1} + x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+x} D_x(\sqrt{x+1} + x)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+x} \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + 1 \right), \quad x > -1.$

3. $D_x \ln^2 x = D_x[\ln x]^2 = 2[\ln x] \cdot D_x \ln x = 2 \ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2 \ln x}{x}$

4. $D_x \ln^4(x^2+5) = D_x[\ln(x^2+5)]^4$

$= 4[\ln(x^2+5)]^3 \cdot \dfrac{1}{x^2+5}(2x)$

$= \dfrac{8x \cdot \ln^3(x^2+5)}{x^2+5} \quad x \in \mathbb{R}.$

5. $D_x[\ln(3x+1) - 4x] = \dfrac{3}{3x+1} - 4 = \dfrac{-12x-1}{3x+1}, \quad x > \dfrac{-1}{3}.$

6. $D_x \left(\dfrac{2}{\ln(x+1)} \right)$

$= D_x \left(2[\ln(x+1)]^{-1} \right)$

$= -2[\ln(x+1)]^{-2} \cdot \dfrac{1}{x+1}$

$$= \frac{-2}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Ejercicios.

1. Si $\ln 50 = 3.912$ calcule, utilizando diferenciales, un valor aproximado a tres decimales de $\ln(50.4)$.

2.1.10 Derivada de la función exponencial

La función exponencial de base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, tiene como dominio $\mathbb{R}$ y como ámbito $]0, +\infty[$.

En el teorema siguiente se dará la derivada de la función exponencial.

■ **Teorema 1**

$D_x a^x = a^x \ln a$

Prueba: Al final del capítulo.

■ **Ejemplo 1**

1. $D_x 2^x = 2^x \ln 2$

2. $D_x 4^x = 4^x \ln 4$

3. $D_x \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} = \frac{-\ln 2}{2^x}$

4. $D_x \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln \frac{3}{4}$

Observe que si la base de la función exponencial es e, entonces $D_x e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1$ de donde $D_x e^x = e^x$.

■ **Teorema 2**

Si $a > 0$, con $a \neq 1$, y si $g = \{(x,y)/\ y = g(x)\}$ es derivable sobre M entonces la función compuesta $f(x) = a^{g(x)}$ es derivable sobre M y $D_x a^{g(x)} = a^{g(x)} \ln a\ \ D_x g(x)$, para $x \in M$.

Prueba:
Ejercicio al estudiante.

Igual que el caso anterior, si la base de la función exponencial es e, entonces $D_x e^{g(x)} = e^{g(x)} \ln e\ \ D_x g(x)$ de donde $D_x e^{g(x)} = e^{g(x)}\ D_x g(x)$.

Ejemplo 2

1. $D_x 2^{5x} = D_x 2^{5x} \cdot D_x 5x = 2^{5x}(\ln 2) \cdot 5 = 5(2^{5x} \ln 2)$

2. $D_x 3^{(x^2+1)} = D_x 3^{(x^2+1)} \cdot D_x(x^2+x) = 3^{(x^2+1)}(\ln 3)(2x+1)$

3. $D_x 4^{\sqrt{x}} = 4^{\sqrt{x}} \ln 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4^x \ln 4}{2\sqrt{x}}$

4. $D_x e^{2x} = e^{2x} D_x(2x) = 2e^{2x}$

5. $D_x e^{5x+1} = 5e^{5x+1}$

Ejercicios.

I Determine la derivada de cada una de la funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2 \pi^{-4x}$
2. $g(x) = 3\ e^{x^2}$
3. $h(t) = \dfrac{t^3}{e^{2t} + t}$
4. $h(x) = \ln\left(\dfrac{2 - 5\ e^x}{2 + 5\ e^{3x}}\right)$
5. $f(x) = \left(x^2 + e^{-x^3}\right) \ln(1 + 2^{-x})$

II

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $y = 3\ e^{-2x}$ tal que sea paralela a la recta con ecuación $x + y = 2$.

2. Determinar la ecuación de la recta tangente trazada a la curva con ecuación $y = e^{\frac{1}{2}x}$ en el punto de su intersección con el eje Y.

3. La dependencia entre la cantidad x de sustancia obtenida en cierta reacción química y el tiempo t de reacción se expresa por la ecuación $x = A(1 - e^{-kt})$. Determinar la velocidad de reacción.

2.1.11 Derivadas de la funciones trigonométricas

A continuación se presentan las derivadas de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

1. $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$

   Prueba: Al final del capítulo.

Utilizando esta como guía, junto con el teorema sobre derivada de un cociente de funciones, se pueden realizar las respectivas demostraciones sobre las derivadas de las funciones trigonométricas.

En general, aplicando la regla de la cadena para funciones compuestas, se cumple que $D_x[seng(x)] = \cos g(x) \cdot D_x g(x)$.

Ejemplo 1

a. $D_x[\operatorname{sen} 6x] = \cos 6x \cdot D_x 6x = 6\ \cos 6x$

b. $D_x \operatorname{sen} \sqrt[3]{x} = \cos \sqrt[3]{x} \cdot D_x \sqrt[3]{x} = \dfrac{\cos \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c. $D_x[\operatorname{sen} e^{4x}] = \cos e^{4x} \cdot D_x e^{4x} = \cos e^{4x} \cdot e^{4x} \cdot 4 = 4e^{4x} \cos e^{4x}$

d. $D_x(\operatorname{sen}^4 x) = D_x[(\operatorname{sen} x)^4] = 4(\operatorname{sen} x)^3 \cdot \cos x = 4 \operatorname{sen}^3 x\ \cos x$

Ejercicios.

Determine la primera derivada de cada una de las funciones con ecuaciones:

a. $f(x) = \operatorname{sen}(5x^3 - 2x^2 + 4)$

b. $g(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2x}{\ln\ 2}\right)$

c. $h(x) = \operatorname{sen}^2(3x)$

2. $D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$

Prueba: Ejercicio para el estudiante.

En general, si $u = g(x)$ aplicando la regla de la cadena se tiene que $D_x[\cos u] = -\operatorname{sen} u \cdot D_u$

Ejemplo 2

a. $D_x[\cos(8x^3)] = -\operatorname{sen}(8x^3 \cdot D_x(8x^3) = -24x^2\ \operatorname{sen}(8x^3))$

b. $D_x\left(\cos\left(\dfrac{3}{e^x}\right)\right) = D_x[\cos(3\ e^{-x})] = -\operatorname{sen}(3\ e^{-x}) \cdot (3\ e^{-x} \cdot -1) = 3\ e^{-x}\ \operatorname{sen}(3\ e^{-x})$

c. $D_x(\cos^3 x) = D_x[(\cos x)^3] = 3(\cos x)^2(-\operatorname{sen} x) = -3\ \cos^2 x\ \operatorname{sen} x$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si:

a. $f(x) = \cos \sqrt[5]{x^2}$

b. $f(x) = \cos\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)$

c. $f(x) = \sqrt{\cos x}, \quad x \in \left]n\pi, \dfrac{2n+1}{2}\pi\right[, \quad n \in Z$

d. $f(x) = 4\ \cos 3^x$

3. $D_x \tan x = sec^2 x, \quad \text{con} \quad x \neq (2n+1)\ \frac{\pi}{2}, \quad n \in Z$

Prueba: Ejercicio para el estudiante.

En general, su $u = g(x)$ entonces aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x \tan u = \sec^2\ u \cdot D_x u$.

■ **Ejemplo 3**

a. $D_x \tan\left(\dfrac{2}{x}\right) = \sec^2\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot D_x\left(\dfrac{2}{x}\right) = \sec^2\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{-2}{x}\right) = \dfrac{-2}{x^2}\ \sec^2\left(\dfrac{2}{x}\right), \ x \neq 0$

b. $D_x \tan(\ln\ x) = \sec^2(\ln\ x) D_x \ln\ x = \dfrac{\sec^2(\ln\ x)}{x}, \quad x > 0$

c. $D_x\sqrt{\tan x} = \dfrac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \sec^2 x = \dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si

a. $f(x) = e^{\tan x}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{\tan 2x}$

c. $f(x) = \tan^3(2x)$

4. $D_x[\cot x] = -\csc^2 x, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} n, \quad n \in Z$

Prueba: Ejercicio para el estudiante.

Si $u = f(x)$, aplicando la derivada para la composición de funciones se obtiene que $D_x(\cot u) = -\csc^2 u\ D_x u$.

■ **Ejemplo 4**

a. $D_x(\cot 5x) = -\csc^2\ 5x \cdot 5 = -5\ \csc^2 5x$

b. $D_x(\cot^3 5x) = D_x[(\cot 5x)^3] = 3(\cot 5x)^2 \cdot -\csc^2\ 5x \cdot 5$

c. $D_x\left(\dfrac{2}{\cot x}\right) = \dfrac{-2(-\csc^2\ x)}{(\cot x)^2} = \dfrac{2\ \csc^2\ x}{(\cot x)^2}$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si

a. $f(x) = \cot(5^x)$
b. $f(x) = 2\sqrt[3]{\cot x}$
c. $f(x) = \cot(5x^2 + 5\ \ln\ x)$

5. $D_x(\sec x) = \sec x\ \tan x,\quad x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2},\quad n \in Z$

Prueba: Ejercicio para el estudiante.

Si $u = g(x)$, aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x(\sec u) = \sec u\ \tan u\ D_x u$.

■ **Ejemplo 5**

a. $D_x[\sec(2x^2)] = \sec(2x^2)\ \tan(2x^2) D_x(2x^2) = 4x\ \sec(2x^2)\ \tan(2x^2)$
b. $D_x(e^{\sec x}) = e^{\sec x}\ \sec x\ \tan x$
c. $D_x \sec\left(\dfrac{2}{x}\right) = \sec\left(\dfrac{2}{x}\right)\ \tan\left(\dfrac{2}{x}\right)\ D_x\left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{-2}{x^2}\sec\left(\dfrac{2}{x}\right)\ \tan\left(\dfrac{2}{x}\right)\quad x \neq 0$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si

a. $f(x) = \sec\left(\dfrac{2x-4}{x}\right)$
b. $f(x) = \sec\sqrt[3]{x^2+1}$
c. $f(x) = \dfrac{3x}{\sec 4x}$

6. $D_x[\csc x] = -\csc x\ \cot x,\quad x \neq n\pi,\quad n \in Z.$

Prueba: Ejercicio para el estudiante

Si $u = g(x)$, aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x(\csc u) = -\csc u\ \cot u\ D_x u$.

■ **Ejemplo 6**

a. $D_x[\csc(2+x^2)] = -\csc(2+x^2)\ \cot(2+x^2)\ D_x(2+x^2) = -2x\ \csc(2+x^2)\ \cot(2+x^2)$
b. $D_x[\csc(2^x)] = -\csc 2^x\ \cot 2^x\ D_x 2^x = -\csc 2^x\ \cot 2^x\ \ln\ 2 = -2x\ \ln\ 2\ \csc 2^x\ \cot 2^x$
c. $D_x \ln\ (\csc x) = \dfrac{1}{\csc x} \cdot (-\csc x\ \cot x) = -\cot x$

2.1.15 Funciones implícitas y su derivada

Al considerar la función con ecuación $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$, es posible determinar $f'(x)$ con los teoremas enunciados anteriormente, ya que f es una función dada implícitamente en términos de la variable independiente x.

Sin embargo, existen funciones que no están definidas en forma explícita, ejemplos de las cuales son las siguientes:

$3x^2y^2 - 5xy^3 + x = 5, \quad x^2 - x = 5xy^2 - y^4$

Estas ecuaciones no pueden ser resueltas explícitamente para "y" en términos de "x". Se dice que la función f está definida implícitamente por las ecuaciones:

$3x^2[f(x)]^2 - 5x[f(x)]^3 + x = 5$ y $x^2 - x = 5x[f(x)]^2 - [f(x)]^4$, respectivamente.

Note que ambas expresiones son de la forma general $f(x, y) = 0$.

Interesa ahora determinar la derivada de una función dada en forma implícita.

Consideremos cada una de las ecuaciones anteriores:

a. $3x^2[f(x)]^2 - 5x[f(x)]^3 + x = 5$

Observe que $3x^2[f(x)]^2$ involucra un producto de funciones y que para derivar $[f(x)]^2$ se debe utilizar la regla de la cadena.

Se tiene entonces derivando:

$$3x^2 \cdot 2[f(x)] \cdot D_x f(x) + 6x\,[f(x)]^2 - \left[5x \cdot 3[f(x)]^2 \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^3\right] + 1 = 0$$

$$6x^2 f(x) \cdot D_x f(x) + 6x[f(x)]^2 - 15x[f(x)]^2 \cdot D_x f(x) - 5[f(x)]^3 + 1 = 0$$

Despejando $D_x f(x)$ se tiene que:

$$D_x f(x) = \frac{5[f(x)]^3 - 6x[f(x)]^2 - 1}{6x^2 f(x) - 15x[f(x)]^2}$$

Sustituyendo "y" por $f(x)$ se obtiene:

$$D_x y = \frac{5y^3 - 6xy^2 - 1}{6x^2 y - 15xy^2}$$

b. $x^2 - x = 5x[f(x)]^2 - [f(x)]^4$ derivando

$2x - 1 = 5x \cdot 2f(x) \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^2 - 4[f(x)]^3 \cdot Dxf(x)$

$2x - 1 = 10xf(x) \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^2 - 4[f(x)]^3 \cdot D_x f(x)$

$2x - 1 - 5[f(x)]^2 = (10x\, f(x) - 4[f(x)]^3) \cdot D_x f(x)$

de donde $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - 5[f(x)]^2}{10x\, f(x) - 4[f(x)]^3}$

y sustituyendo $y = f(x)$ se tiene:

$$D_x y = y' = \frac{2x - 1 - 5y^2}{10xy - 4y^3}$$

El proceso realizado en estos dos ejemplos recibe el nombre de derivación implícita, y puede ser utilizado únicamente bajo el supuesto de que la ecuación dada especifica una función. En caso de que no sea así, aunque se realicen las operaciones, el resultado carece de sentido.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + 9 = 0$ no puede ser satisfecha por ningún valor real de "x" y "y". Al realizar el procedimiento anterior se obtiene que $2x + 2y \cdot D_x y + 0 = 0$ de donde $D_x y = \dfrac{-x}{y}$, fórmula que parece tener significado para "x" y "y" siempre que $y \neq 0$, aunque de hecho no puede existir derivada ya que la ecuación dada no especifica ninguna función f.

La derivación implícita determina una fórmula para $D_x f(x)$, que es válida para toda función derivable f tal que $f(x)$ esté definida implícitamente por una ecuación dada.

Ejemplo 1

1. Suponiendo que existe una función derivable f tal que $f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$, calcular $D_x y$.

   Solución:

   Derivando implícitamente se obtiene:

   $3x^2 + 3y^2 \cdot D_x y - 6x + 6y \cdot D_x y = 0$

   $(3y^2 + 6y) \cdot D_x y = 6x - 3x^2$

   $$D_x y = \frac{6x - 3x^2}{3y^2 + 6y} = \frac{2x - x^2}{y^2 + 2y}$$

   Note que hemos trabajado como si $y = f(x)$.

2. En cada caso determinar una ecuación para la recta tangente y una ecuación para la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P. Graficar la curva, la recta tangente y la recta normal.

a. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0, \quad P(1,3).$

b. $y^2 = 4ax; \quad P(a, 2a), \quad a > 0.$

Solución:

a. Primero obtenemos $D_x y$ que nos da la pendiente de la recta tangente: $2x+2y \cdot D_x y - 4 + 6 \cdot D_x y - 0 = 0$ de donde $D_x y = \dfrac{2-x}{y+3}$

Evaluando $D_x y$ en $P(1,3)$ se tiene que $m_t = \dfrac{1}{6}$.

Luego $y = \dfrac{1}{6}x + b$. Sustituyendo $(1,3)$ se obtiene que $b = \dfrac{17}{6}$ por lo que la ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{17}{6}$.

La pendiente de la recta normal es $m_N = -6$ de donde la ecuación de esta recta es: $y = -6x + b_1$; sustituyendo nuevamente en $(1,3)$ se obtiene que $b_1 = 9$.

La ecuación de la recta normal es: $y = -6x + 9$.

La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$ puede escribirse como $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$ que representa la ecuación de una circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio 6.

La representación gráfica de la curva y las rectas es la siguiente:

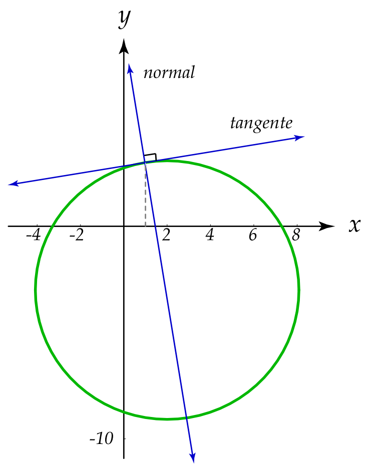


Figura 2.28: Gráfica de $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$

b. Dada la ecuación $y^2 = 4ax$ obtenemos $D_x y$. como $2y \cdot D_x y = 4a$ entonces $D_x y = \dfrac{2a}{y}$

Evaluando en $P(a, 2a)$ se tiene que $D_x y = \dfrac{2a}{2a} = 1$.

Luego, la pendiente de la recta tangente es $m_T = 1$ y la ecuación es $y = x+b$. Sustituyendo $(a, 2a)$ en esta ecuación se obtiene que $b = a$ por lo que finalmente la ecuación de la recta tangente es $y = x+a$.

La pendiente de la recta normal es $m_N = -1$ y la respectiva ecuación es: $y = -x + b$. Sustituyendo (x, y) por $(a, 2a)$ se obtiene que $b = 3a$ por lo que la ecuación de la recta normal es $y = -x + 3a$.

La representación gráfica de la curva, las recta tangente y de la recta normal es la siguiente:

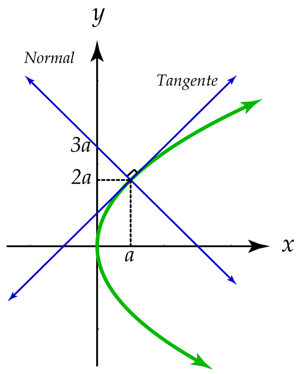


Figura 2.29: Gráfica de $y^2 = 4ax$

Ejercicios.

1. Probar que las rectas tangentes en el origen a las curvas con ecuaciones $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$, $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, son perpendiculares entre sí.

2. En cada caso:

   a. Determinar $D_x y$ en términos de "x" y "y" utilizando la derivación implícita.

   b. Despejar "y" en términos de "x" y demostrar que cada solución y su derivada satisfacen la ecuación obtenida en a.

   i $x^2 - 2xy = 5$

   ii $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, a constante.

   iii $2x^2 - 3xy - 4y^2 = 5$

3. Determinar la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $x - y = \sqrt{x + y}$ en el punto $(3, 1)$.

Derivada de segundo orden para una función dada en forma implícita

Especificaremos en los ejemplos siguientes el procedimiento que se sigue para determinar $D_x^2 y$.

Ejemplo 2

Sea la ecuación $x^3 - xy + y^3 = 0,$ obtenemos primero $D_x y$ en la forma siguiente:

$3x^2 - (x \cdot D_x y + y) + 3y^2 \cdot D_x y = 0$

de donde $D_x y = \dfrac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$

ahora $D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x\left(\dfrac{y - 3x^2}{3y^2 - x}\right)$

$$D_x^2 y = \frac{(3y^2 - x)(D_x y - 6x) - (y - 3x^2)(6yD_x y - 1)}{(3y^2 - x)^2}$$

se sustituye $D_x y,$ y se obtiene:

$$D_x^2 y = \frac{(3y^2 - x)\left(\frac{y-3x^2}{3y^2-x} - 6x\right) - (y - 3x^2)\left(6y \cdot \frac{y-3x^2}{3y^2-x} - 1\right)}{(3y^2 - x)^2}$$

Simplificando:

$D_x^2 y = \dfrac{2xy\,(27xy - 27(x^3 + y^3) - 2)}{(3y^2 - x)^3}$ pero de la ecuación original $x^3 + y^3 = xy$ por lo que: $27xy - 27xy - 2 = -2,$
y $D_x^2 y = \dfrac{-4xy}{(3y^2 - x)^3}$

■ Ejemplo 3

Determinar $D_x^2 y$ si $ax^2 + 2xy + by^2 = 1$

Primero calculamos $D_x y$

$2ax + 2x \cdot D_x y + 2y + 2by \cdot D_x y = 0$

$$D_x y = \frac{-2ax - 2y}{2x + 2by} = \frac{-ax - y}{x + by}$$

Luego:

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x\left(\frac{-ax - y}{x + by}\right)$$

$$D_x^2 y = \frac{(x + by)(-a - D_x y) - (-ax - y)(1 + b \cdot D_x y)}{(x + by)^2}$$

$$D_x^2 y = \frac{(abx - x)D_x y - aby + y}{(x + by)^2}$$

$D_x^2 y = \dfrac{(ab - 1)(x \cdot D_x y - y)}{(x + by)^2}$ sustituyendo $D_x y$ se tiene:

$$D_x^2 y = \frac{(ab - 1)\left(x \cdot \frac{-ax-y}{x+by} - y\right)}{(x + by)^2}$$

$$D_x^2 y = \frac{-(ab - 1)(ax^2 + 2xy + by^2)}{(x + by)^2}$$

$D_x^2 y = \dfrac{-(ab - 1)(1)}{(x + by)^3} = \dfrac{1 - ab}{(x + by)^3}$ pues $ax^2 + 2xy + by^2 = 1$ en la ecuación original.

(1) Derivada Lateral:

Se definen las Derivadas Laterales de una función a izquierda y derecha; de modo que si ambas derivadas coinciden, entonces, existe la Derivada.

Esto significa:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \; ; \; f'_+(x): \text{Deriv. Lat. por Der.}$$

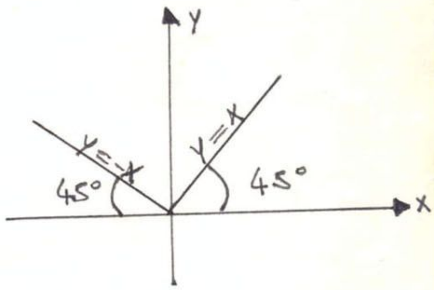
$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \; ; \; f'_-(x): \text{Deriv. Lat. por Izq.}$$

Entonces: Si: $\exists \; f'(x)\big]_{x=x_0} \Rightarrow \exists: f'_+(x)\big]_{x=x_0} \text{ y } f'_-(x)\big]_{x=x_0}$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

Luego: Si: $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \Rightarrow \nexists \; f'(x_0)$

Ejemplo: Sea: $y = f(x) = |x|$; $x_0 = 0$



1) Si: $x \geq 0$: $f(x) = |x| = x$

2) Si: $x \leq 0$: $f(x) = |x| = -x$

$$\therefore 1) \; f'_+(x_0) = f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0+\Delta x|}{\Delta x}$$

$$f'_+(0) = \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 1 \Rightarrow \boxed{f'_+(0) = 1}$$

$$2) \; f'_-(x_0) = f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0+\Delta x| - 0}{\Delta x}$$

$$f'_-(0) = -\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = -1 \Rightarrow \boxed{f'_-(0) = -1}$$

$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow \nexists \; f'(0)$: La Función no es derivable en: $x = 0$.-

as, si la primera condición se cumple, resulta que la derivada de la función inversa: $x = f^{-1}(y)$, será:

$$\boxed{x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'_x}}$$

Ejemplo: $y = 0,1x + e^{\frac{x}{2}}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0,1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + e^{\frac{x}{2}}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{5} + e^{x/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dy} = x'_y = \frac{10}{1 + 5e^{x/2}}}$$

② Derivadas de Funciones Paramétricas:

Sea un sistema paramétrico: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

Se tiene que: $y'_x = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dt}{dt}\right) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\Rightarrow \boxed{y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

Ejemplo: $\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \;; \text{ con: } \frac{dy}{dt} = \frac{(a(1-t^2))'(1+t^2) - a(1-t^2)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2at(1+t^2) - a(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2at - \cancel{2at^3} - 2at + \cancel{2at^3}}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}}$$

$$dt \qquad (1+t^2)^2 \qquad (1+t^2)^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-4a^2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = \frac{-2t}{1-t^2} = \frac{2t}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{t^2-1}}$$

③ Derivadas de Funciones Implícitas Propiamente Dichas:

Si la derivada a buscar es tal que la dependencia entre x e y está dada en forma implícita, es decir:

$$F(x,y) = 0$$

Deberá hallarse: $y'_x = \frac{dy}{dx} = y'$, calculando: $\frac{d}{dx}F(x,y)$ e igualando este resultado a 0, obteniendo finalmente y'; por despeje.

Entonces: De: $\frac{d}{dx}F(x,y) = 0 \Rightarrow y' = g(y,x)$

Ejemplo: Hallar y' de la siguiente función implícita:

$$y^3 = \frac{x-y}{x+y} \quad ; \quad 3y^2y' = \frac{(x-y)'(x+y) - (x-y)(x+y)'}{(x+y)^2}$$

$$3y^2y' = \frac{(1-y')(x+y) - (x-y)(1+y')}{(x+y)^2}$$

$$3y^2y' = \frac{\cancel{x} + y - y'x - \cancel{y'y} - \cancel{x} - xy' + y + \cancel{yy'}}{(x+y)^2}$$

$$3y^2y' = \frac{2(y - y'x)}{(x+y)^2}$$

$$3y^2(x+y)^2\,y' = 2y - 2y'x$$

$$[3y^2(x+y)^2 + 2x]\,y' = 2y.$$

$$\therefore \boxed{y' = \frac{2y}{(3y^2(x+y)^2 + 2x)}}$$

③ Derivadas de Ordenes Superiores:

Dada una función: $y = f(x)$; se define la derivada de segundo orden de la misma como la derivada de la derivada de primer orden; esto es:

$$\boxed{y'' = (y')' \Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}}$$

generalizando el concepto:

$$\boxed{y^{(n)} = \frac{d^{(n)}y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

Ej: $y = \ln(\cos(x))$

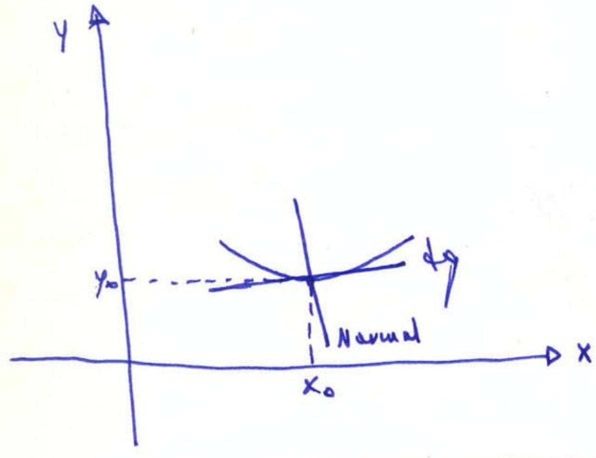
$$y' = \frac{d}{dx}\left[\ln(\cos(x))\right] = \frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\operatorname{sen}(x)) = -\operatorname{tg}(x)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\operatorname{tg}(x)\right) = -\sec^2(x)$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(y'') = -2\sec^2(x)\cdot\operatorname{tg}(x)$$

——— ⓧ ———

Recta Tangente y Normal a una Curva:



Ecuación de la Recta que pasa por un Punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = f'(x_0)$$

$$\rightarrow \boxed{y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)} \rightarrow \text{Ec. Recta Tang.}$$

Geométricamente, por Cond. de Perpendicularidad

$$m_N = -\frac{1}{m_t}$$

$$\Rightarrow \boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)} \rightarrow \text{Ec. Recta Normal}$$