Biometría

Pruebas de hipótesis para una muestra

¿Qué es una prueba de hipótesis?

- Es un proceso para determinar la validez de una aseveración hecha sobre la población basándose en evidencia muestral
- Es una afirmación sobre la población, a nivel de sus parámetros:
  - Media
  - Variancia o desvío estándar
  - Proporción
- Debe plantearse antes de obtener la muestra
- La prueba de hipótesis es un procedimiento de toma de decisión, relacionada principalmente con la elección entre dos conjuntos posibles de valores del parámetro

Definiciones

Hipótesis de investigación: denotada por Hi expresa el objetivo del investigador.

Hipótesis estadísticas:

- La **hipótesis nula**, denotada por Ho, es el status quo o estado actual (lo que se cree hasta el momento) o la que asegura que no hay diferencias en la población. Es la hipótesis de no efecto.

- La **hipótesis alternativa**, denotada por H_1, es lo opuesto a la hipótesis nula, el cambio en la población que el investigador espera sea verdadero.

- **Nota:** Las hipótesis nula y alternativa se refieren ambas a la *misma* población.

Definiendo las Hipótesis

¿La aspirina reduce el peligro de cáncer?

Un estudio sugiere que tomando una aspirina cada día por medio durante 20 años puede reducirse el riesgo de enfermarse de cáncer de colon. Por otro lado, según la Sociedad Americana de Cáncer, el riesgo a sufrir de cáncer de colon es 1 en 20 en individuos mayores de 60 años.

- Ho :
- H_1 :

Traduzcamos las hipótesis a lenguaje estadístico, usando parámetros:

- Ho :
- H_1 :

Definiendo las Hipótesis

¿La incorporación de vitamina E a la dieta es efectiva?

Supongamos que se desea determinar la efectividad de incorporar vitamina E a la dieta de cerdos a fin de mejorar el aumento de peso, que actualmente es de 100g/día.

.

- Ho :
- H_1 :

Usando parámetros:

- Ho :
- H_1 :

Definiendo las Hipótesis

¿El debate cambió la intención de voto?

Una consultora, a una semana de las elecciones presidenciales, afirma que el candidato favorito obtiene el 50% de los votos. Este candidato tendrá un debate televisado con su rival. La hipótesis que deseamos testear es que el debate afectará la proporción de personas que votarán por el candidato favorito.

- Ho :
- H_1 :

Usando parámetros:

- Ho :
- H_1 :

Pasos en una Prueba de hipótesis: 1. Planteo de las hipótesis

1. Establecer la hipótesis nula en términos de igualdad

Ho: $\theta = \theta_0$	$\theta \geq \theta_0$	$\theta \leq \theta_0$

2. Establecer la hipótesis alternativa, que puede hacerse de tres maneras, dependiendo del interés del investigador

H_1: $\theta \neq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$\theta > \theta_0$
Prueba bilateral	unilateral izq	unilateral der

Resumiendo

- **Se plantean dos hipótesis o aseveraciones sobre valores de parámetros poblacionales**
- **Las dos hipótesis son incompatibles**
- **Las dos hipótesis se refieren a la misma población**

¿Cuál de las dos es válida?

Se debe decidir en base a evidencia muestral

Lógica de las pruebas de hipótesis

- Suponemos que Ho es verdadera

- Obtenemos una muestra y calculamos un estimados (promedio, desvío estándar o un porcentaje).

- Si tales estimaciones resultan ser "raras" o "inusuales" bajo la hipótesis nula, se dice que los datos son **estadísticamente significativos**, en cuyo caso la **hipótesis nula** será **rechazada**.

- La prueba resulta estadísticamente significativa cuando la **probabilidad** de obtener una estimación como la calculada en base a la muestra o aún más extrema sea muy pequeña si la hipótesis nula es cierta.

- Tal probabilidad se conoce como "**p de la prueba**" o "**p-valor"**.

Lógica de las pruebas de hipótesis

- **Condición de rechazo de Ho:** P-valor será considerado pequeño si resulta menor a una probabilidad fijada a priori (o **nivel de significación**) simbolizada como α

- Los valores más usuales de α son 0,01; 0,05 y 0,10.

- Alternativamente puede fijarse la condición de rechazo comparando un cierto valor crítico del estimador (que depende del nivel de significación) con la estimación obtenida de las observaciones muestrales.

Un ejemplo

- Se ha observado que el peso de los recién nacidos de madres fumadoras presentan menor peso al nacer. Se desea determinar si este hallazgo puede estar asociado a un menor desarrollo placentario. Se fija α en 0.01.
- Se sabe que el peso de la placenta de embarazos normales a término sigue una distribución normal con un promedio de **500g** y un desvío estándar de **50g.**
- Se determinó el peso de la placenta en **50** partos a término de madres fumadoras elegidas al azar y se obtuvo un promedio de **480g**.

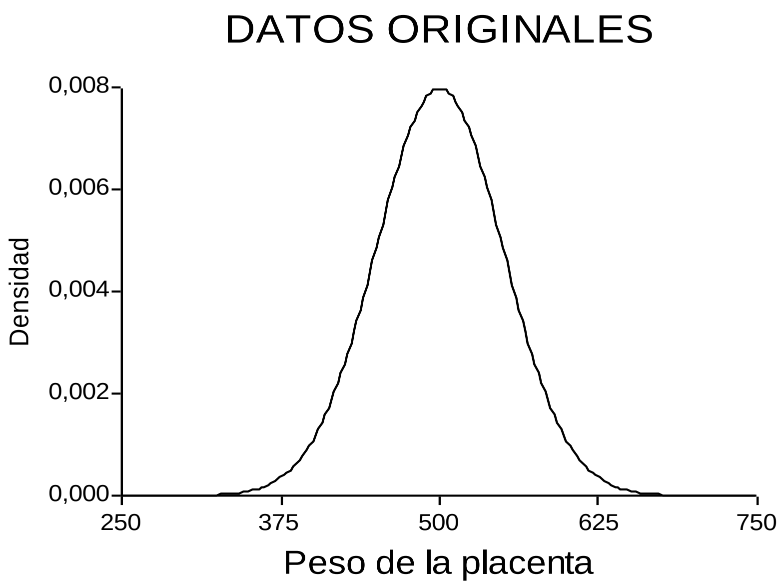
  - Hi:
  - Ho:
  - H_1:

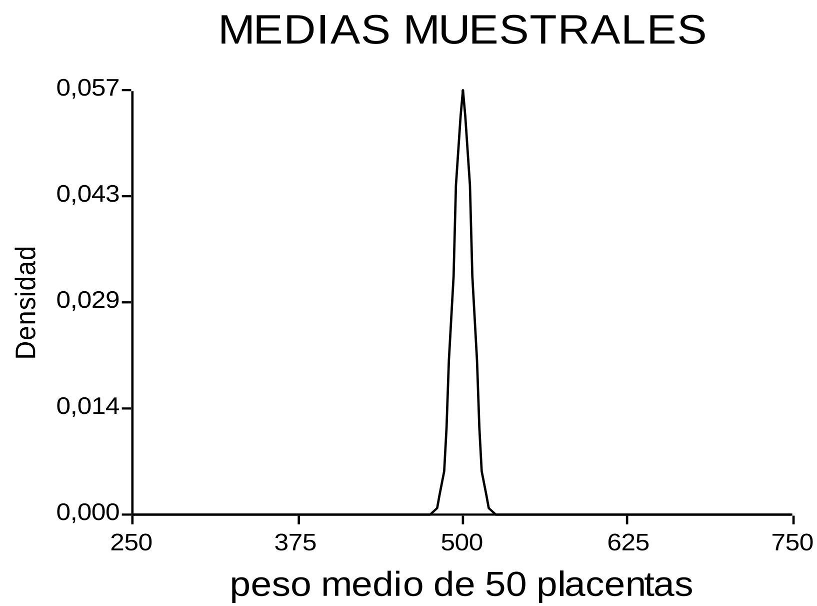
Razonamiento básico

1. Suponer que H_0 es cierta
2. Elegimos el estimador del parámetro en estudio y definimos su distribución muestral:

Parámetro	Estimador	Distribución
μ	$\bar{x}$	normal
p	$\hat{p}$	normal
σ	s	Chi-cuadrado

En este caso:





PROMEDIO μ =500
DESVÍO STD σ =50

PROMEDIO =500
ERROR STD $=50/\sqrt{50}=7$

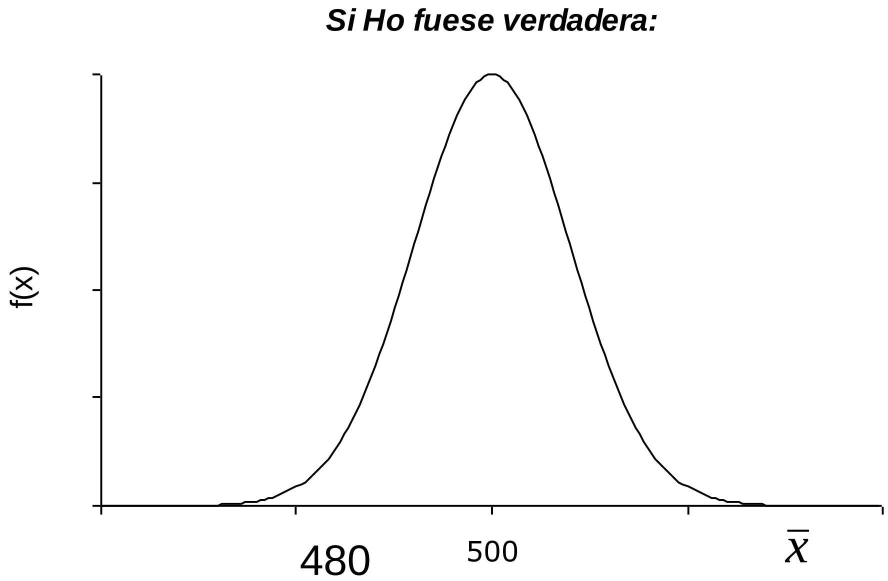
Razonamiento básico

3. Fijamos el **nivel de significación** α y la dirección de extremo de la prueba.
4. Establecemos la condición de rechazo de Ho, es decir bajo que probabilidades (o alternativamente valores muestrales) se debería rechazar la hipótesis nula
5. Contrastamos la muestra con la distribución teórica, calculamos el p-valor y concluimos.

En este caso:

- Los investigadores fijaron α en 0.01
- **Condición de rechazo:** Si la probabilidad de obtener una muestra con un promedio tan o más extremo que el observado, siendo Ho verdadera, fuese < a 0.01, se rechazará Ho.

En este caso:



Si las placentas de madres fumadoras tuvieran el mismo peso promedio que el resto (Ho verdadera, μ = 500 g)

... el resultado muestral observado sería improbable **(p-valor < 0.01).**

Sin embargo **ocurrió**.

Se rechaza que H0 sea verdadera!

$$P(\bar{x} < 480) = P(Z < -2.86) = F(-2.86) = 0.002$$

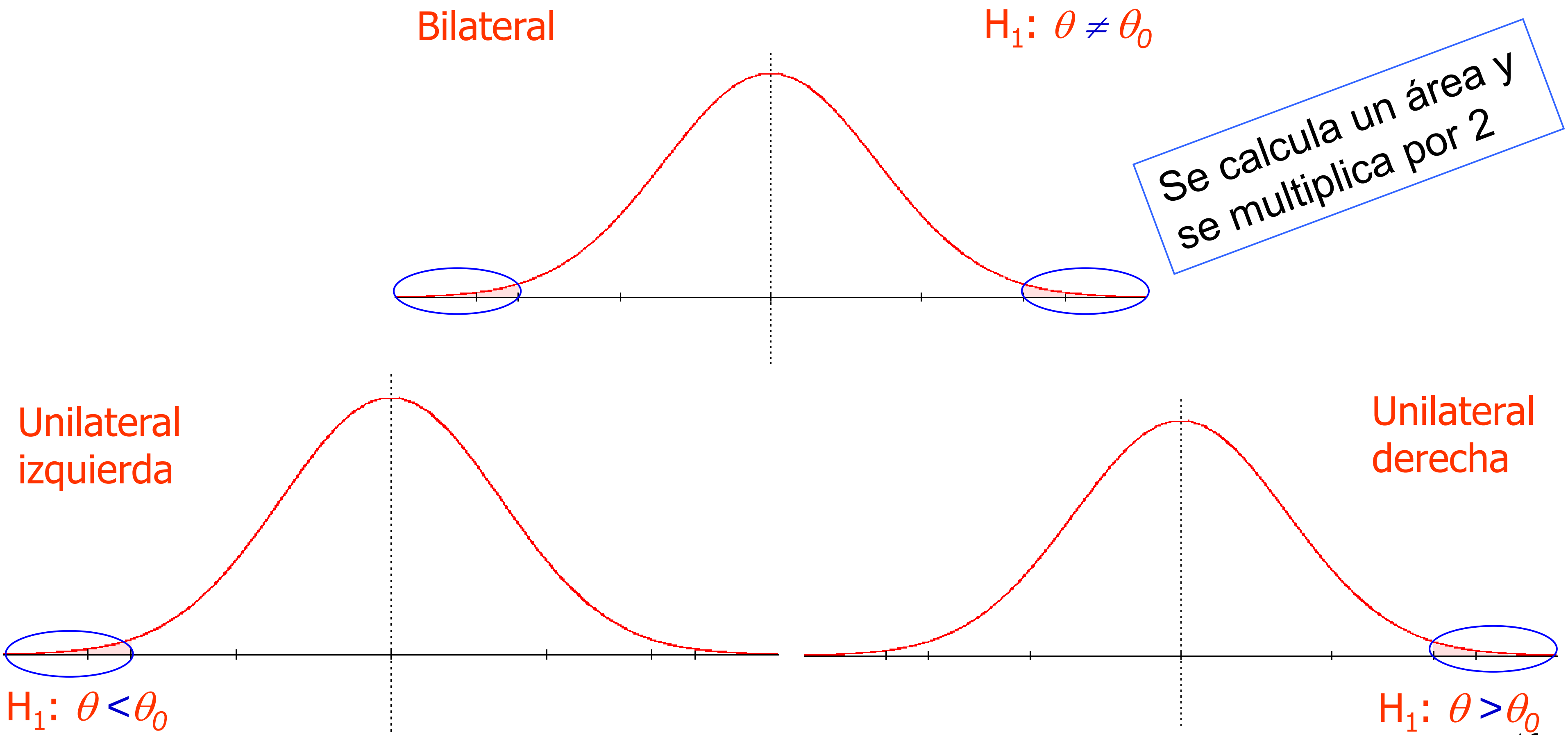
P-valor

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{480 - 500}{50 / \sqrt{50}} = -2.86$$

Conclusión:

Pruebas de hipótesis uni y bilaterales

El cálculo de p depende de la hipótesis alternativa

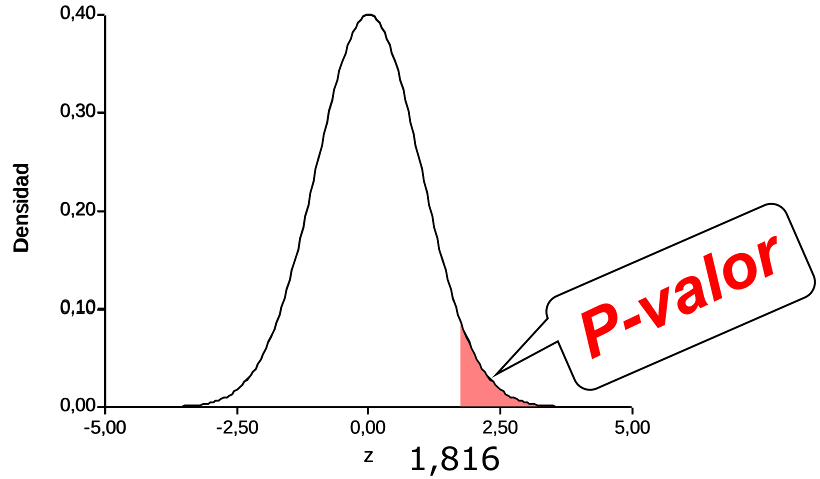


Otro ejemplo

- Debido a los constantes aportes de nutrientes que recibe la laguna de Chascomús, se cree que la composición de la ictiofauna está cambiando.
- Se llevó a cabo un relevamiento con el propósito de confirmar un aumento en la abundancia relativa de *Parapimelodus valenciennesi*, (porteño) que en la década del 90 constituía el 35% de la ictiofauna de la laguna.
- Se efectuaron lances en la laguna y se capturaron 300 ejemplares, de los cuales 120 eran porteños. Se fija α en 0.01.

  - H_i: la abundancia relativa de *P. valenciennesi* aumentó en la última década
  - Ho: $P_{\text{actual}} \leq 0,35$
  - H_1: $P_{\text{actual}} > 0,35$

- Estimador: $\hat{p}$
- Distribución muestral suponiendo Ho verdadera:



$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$

$$\hat{p} = \frac{120}{300} = 0,4$$

$$z = \frac{0,4 - 0,35}{\sqrt{0,35 \times 0,65/300}} = 1,816$$

- CR: **p-valor < 0.01**
- Cálculo de p-valor: 0,0347

- Conclusión: **No Rechazo Ho**

En resumen:

- Si se rechaza Ho:
  - la evidencia muestral contradice Ho
  - hay pruebas concluyentes contra Ho
  - la prueba es significativa

- Si no se rechaza Ho:
  - la evidencia muestral no contradice Ho (lo cual no prueba que sea verdadera)
  - No hay evidencias contra Ho
  - La prueba no es concluyente

Planteamos las Hipótesis

Asumimos Ho verdadera

Calculamos probabilidades

Rechazamos Ho

No Rechazamos Ho

Pb de error

Pb(Rechazar Ho/Ho es Verdadera)

Pb(No Rechazar Ho/Ho es Falsa)
Ha es verdadera

Error tipo I

Error tipo II

Riesgos al tomar decisiones

Ejemplo 1: Se juzga a un individuo por la *presunta* comisión de un delito

- H_0: Hipótesis nula
  - Es

Los datos pueden refutarla

Rechazarla por error tiene graves consecuencias

- H_1: Hipótesis alternativa
  - Es

No debería ser aceptada sin una gran evidencia a favor

Rechazarla por error tiene consecuencias consideradas menos graves que la anterior

Tipos de error al tomar una decisión

		Realidad	
		Inocente	**Culpable**
Veredicto	**Inocente**	OK	Error Menos grave
	Culpable	Error Muy grave	OK

Tipos de error al tomar una decisión

		Realidad	
		H_0 verdadera	**H_0 falsa**
Decisión basada en la muestra	**No rechazo Ho**	Decisión correcta Probabilidad $1-\alpha$	Error de tipo II Probabilidad β
	Rechazo Ho Acepto H1	Error de tipo I Probabilidad α (nivel de significación)	Decisión correcta Probabilidad $1-\beta$ (potencia)

Definiciones

α = *P(error tipo I) = P(rechazar Ho / Ho es verdadera)*

β = *P(error tipo II) = P(no rechazar Ho / Ho es falsa)*

1-β = Potencia = Poder o capacidad de la prueba estadística para detectar diferencias cuando estas realmente existen

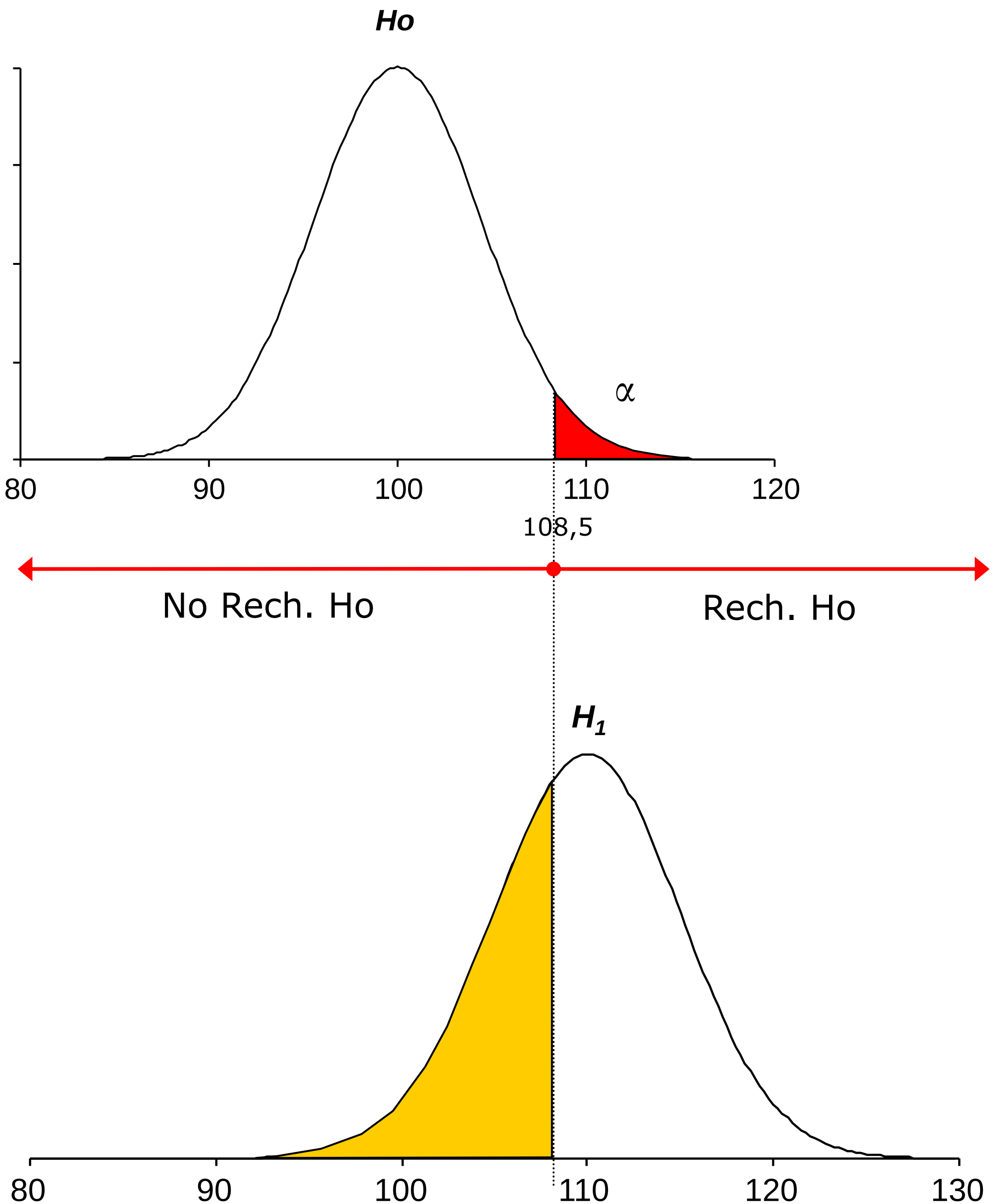
¿Y en términos del problema?

- ✓ Idealmente, desearíamos que ambas probabilidades error valgan cero, pero esto solo puede lograrse haciendo un censo
- ✓ Se elige controlar al menos al error tipo I, que es el más grave
- ✓ Para reducir β, hay que aumentar el tamaño muestral.

¿Se puede calcular la potencia de una prueba?

- Supongamos que se desea determinar la efectividad de incorporar vitamina E a la dieta de cerdos a fin de mejorar el aumento de peso, que actualmente es de **100g/día**, con un desvío de **20 g/día**.
- Se efectuará un ensayo con **15** cerdos alimentados con la nueva dieta. Se asume $\alpha = 0.05$.
- Si la nueva dieta produjera un aumento de **110 g/día** ¿cuan probable sería detectarlo mediante el ensayo?

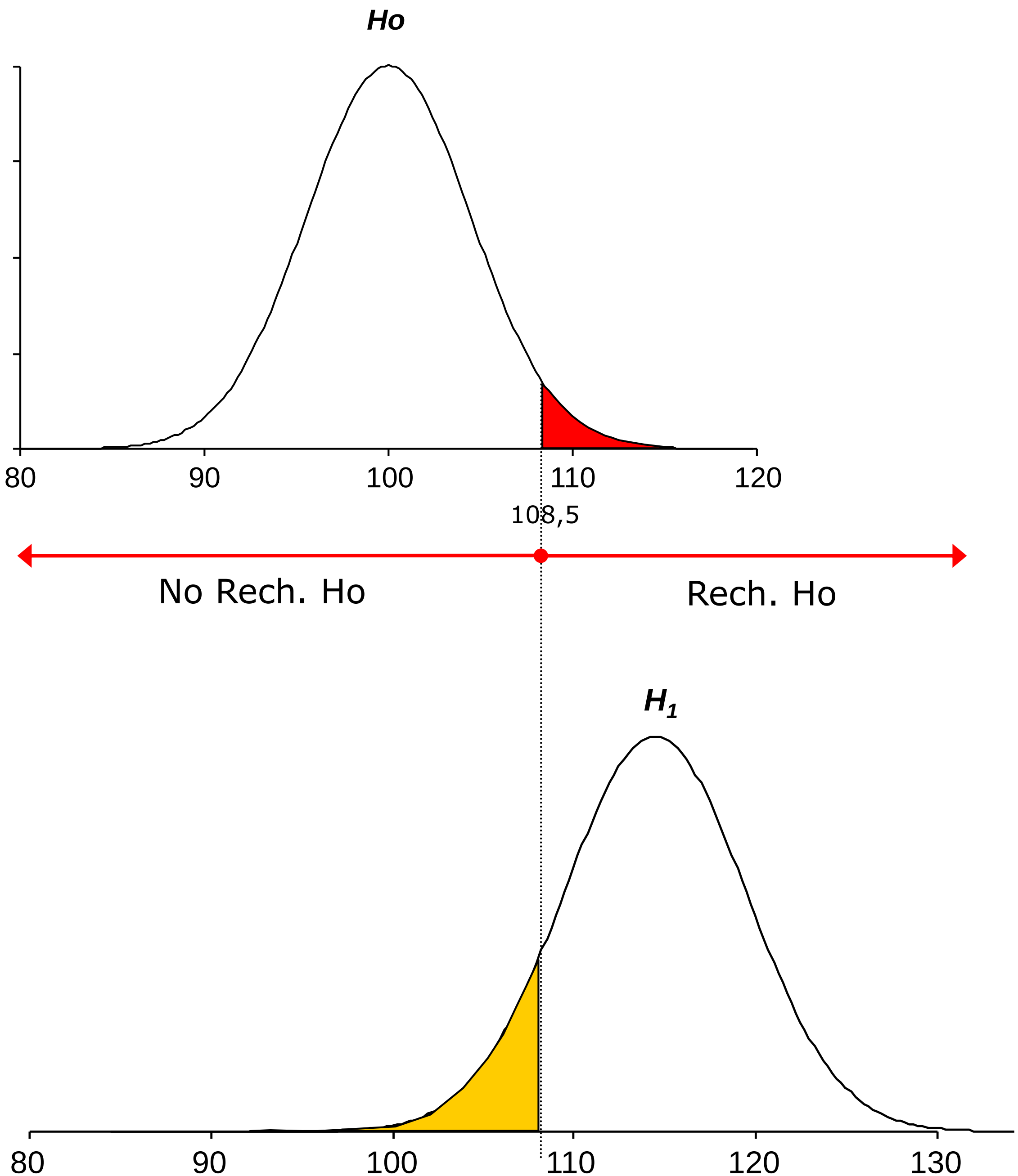
- Ho:
- H_1:



$$\text{Ho: } \mu_{vitE} \leq 100 \text{ gr/día}$$
$$\text{H}_1\text{: } \mu_{vitE} > 100 \text{ gr/día}$$

$$\text{Ho: } \mu_{vitE} = 100 \text{ gr/día}$$
$$\text{H}_1\text{: } \mu_{vitE} = 110 \text{ gr/día}$$

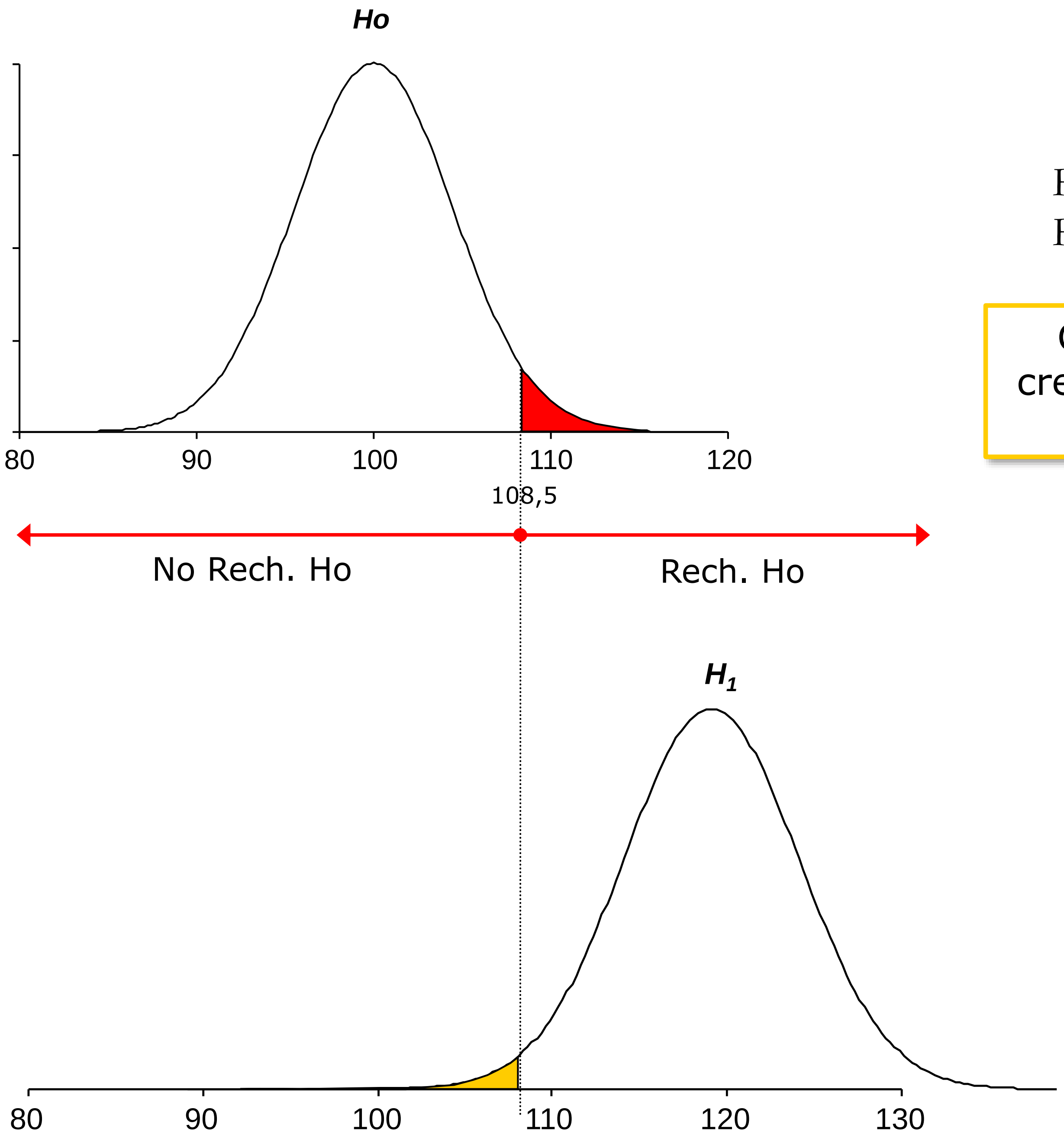
Con Vit E los cerdos crecen en promedio 110 gr por día



Ho: $\mu_{vitE} = 100$ gr/día

H_1: $\mu_{vitE} = 115$ gr/día

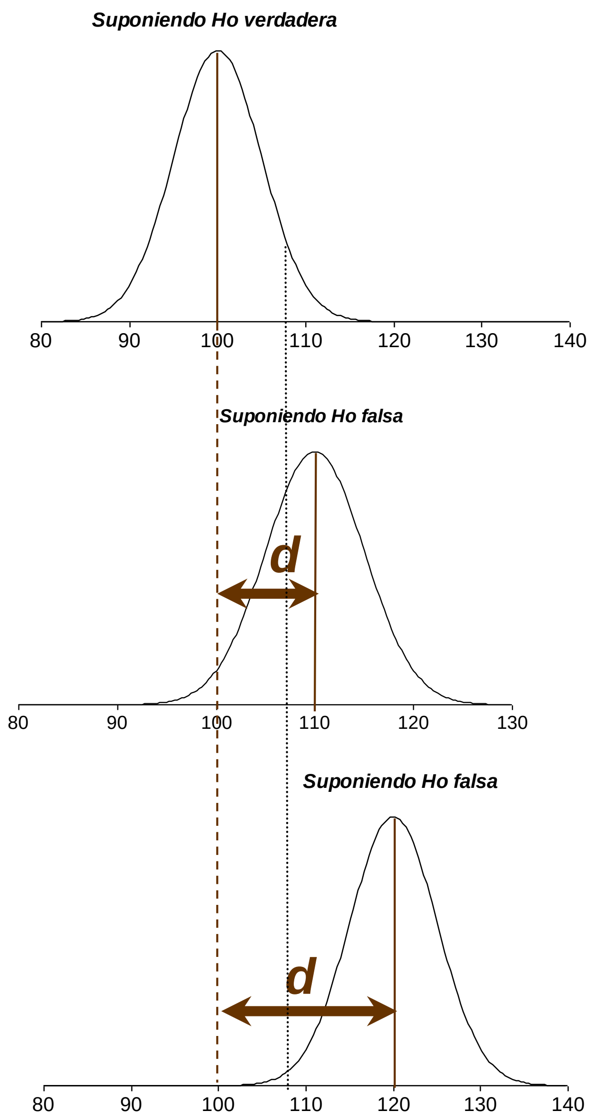
Con Vit E los cerdos crecen en promedio 115 gr por día



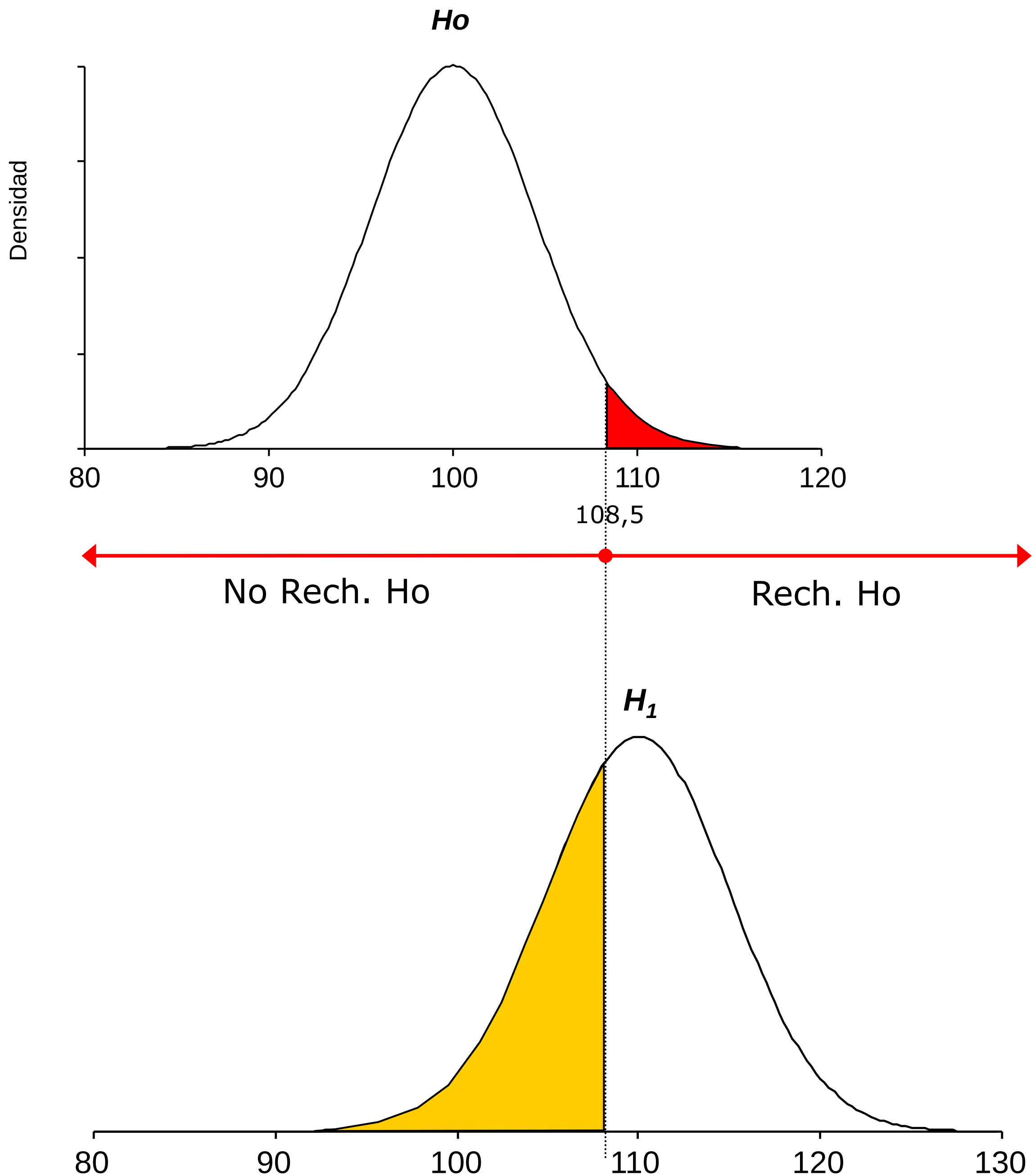
$$\text{Ho:}\ \mu_{vitE} = 100 \ \text{gr/día}$$
$$H_1\text{:}\ \mu_{vitE} = 120 \ \text{gr/día}$$

Con Vit E los cerdos crecen en promedio 120 gr por día

- Y si la nueva dieta produjera un aumento de 120 g/día ¿cuan probable sería detectarlo mediante el ensayo?

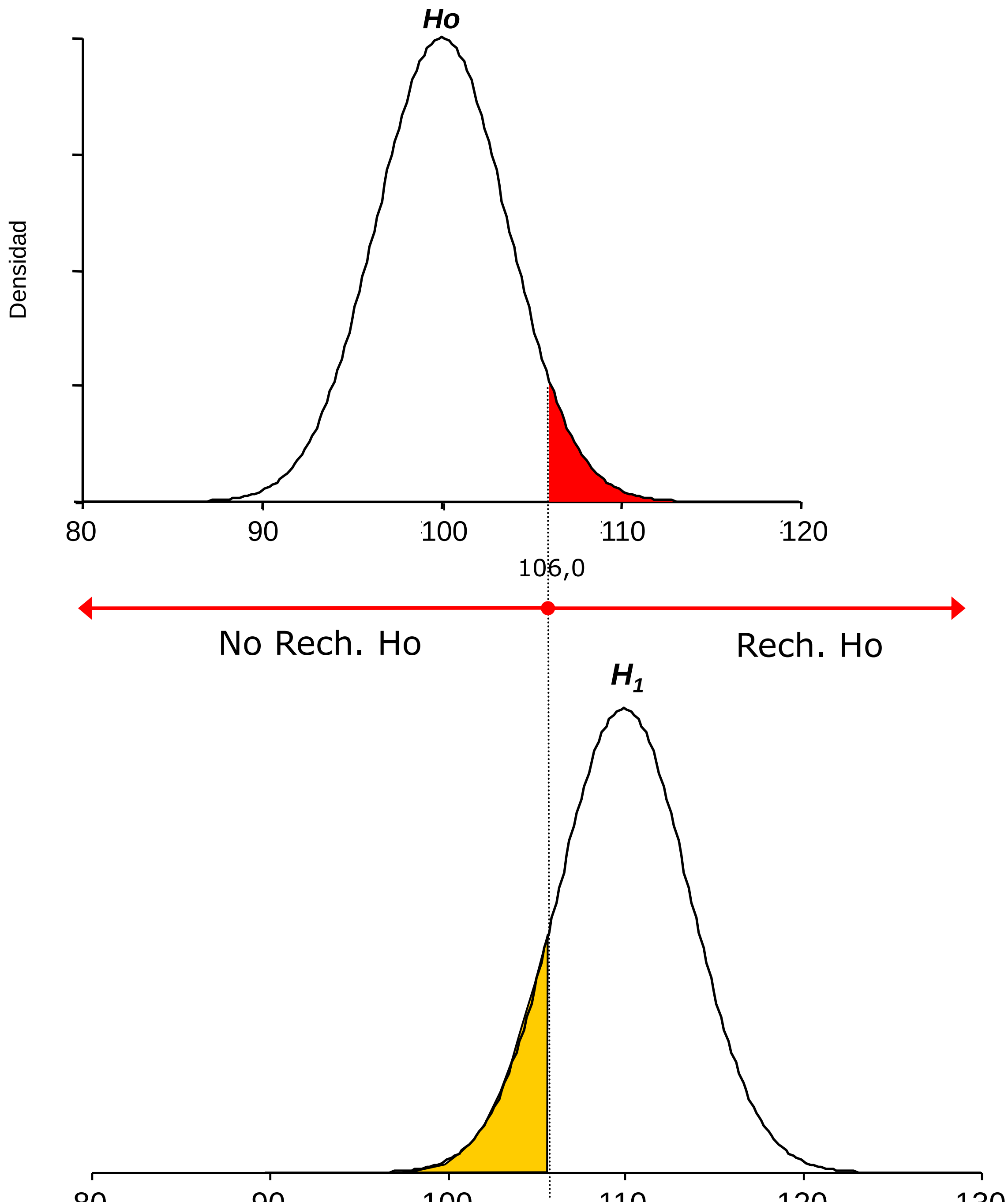


Cuanto mayor es la magnitud del efecto, mayor es la potencia



$$\text{Ho: } \mu_{vitE} = 100 \text{ gr/día}$$
$$\text{H}_1\text{: } \mu_{vitE} = 110 \text{ gr/día}$$

Con Vit E los cerdos crecen en promedio 110 gr por día



$$\text{Ho: } \mu_{vitE} = 100 \text{ gr/día}$$
$$H_1\text{: } \mu_{vitE} = 110 \text{ gr/día}$$

Con Vit E los cerdos crecen en promedio 110 gr por día

↑↑ n

Diseño experimental: cálculo del tamaño muestral

- PH para la media. Se requiere:
  - α
  - potencia 1- β
  - Variabilidad de x
  - magnitud del efecto que se desea detectar (d)

$$n = \left[\frac{\left(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}\right)\sigma}{d} \right]^2$$

- PH para la proporción. Se requiere:
  - α
  - potencia 1- β
  - magnitud del efecto que se desea detectar (d)

$$n = \left(\frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta}\sqrt{p_1 q_1}}{d} \right)^2$$

Observaciones

- Las hipótesis no se plantean después de observar los datos, sino antes.
- La hipótesis nula es conservadora, no especulativa; es la hipótesis del escéptico
- α debe ser pequeño y es fijado por el investigador
- La prueba de hipótesis se plantea de manera tal de controlar el error de tipo I
- Rechazar una hipótesis no prueba que sea falsa. Podemos cometer error de tipo I
- No rechazar una hipótesis no prueba que sea cierta. Podemos cometer error de tipo II
- No rechazar Ho no implica que Ho sea verdadera
- Si decidimos rechazar una hipótesis debemos mostrar la probabilidad de equivocarnos.
- Rechazar Ho refuta a la Ho. En cambio, no rechazarla no constituye evidencia a favor

Supuestos

Para que las conclusiones sean válidas, se deben verificar los supuestos de la prueba:

Para PH para una media con desvío poblacional conocido:

- muestra aleatoria y observaciones independientes
- distribución normal o tamaño de muestra suficientemente grande
- desvío poblacional conocido

Para PH para una media con desvío poblacional desconocido:

- muestra aleatoria y observaciones independientes
- distribución normal o tamaño de muestra suficientemente grande

Para PH para una proporción:

- muestra aleatoria y observaciones independientes
- tamaño de muestra suficientemente grande; $pn>5$ y $qn>5$