Biometría

Clase 4

Probabilidades

Probabilidad

- Ejemplo: Tiramos una moneda 10 veces y las 10 veces sale cara
- Pregunta: ¿Creeríamos que se trata de una moneda equilibrada?
- Respuesta: No
- Razón: Si se tratase de una moneda equilibrada, la probabilidad de obtener 10 caras en 10 tiros sería menor a 0.1% (según la teoría de probabilidades)
- **Las probabilidades constituyen la herramienta fundamental para evaluar la confiabilidad de conclusiones estadísticas (permiten hacer inferencia!)**

Experimento aleatorio o ensayo:

es un proceso o acción cuyo resultado es incierto

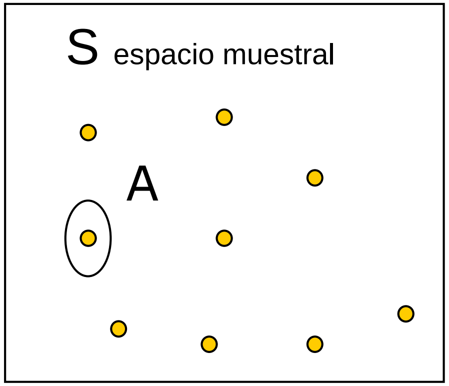
- Es posible repetirlo un número indefinido de veces, sin cambiar esencialmente las condiciones. Por **repetición** se entiende cada una de las veces que se realiza el experimento
- En cada repetición se pueden conocer **todos** los resultados posibles, aunque no pueda predecirse un resultado en particular.
- A medida que el experimento se repite, los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, cuando el experimento se repite un "gran" número de veces, aparece un modelo definido de regularidad.
  - EA1: Tirar una moneda
  - EA2: Arrojar un dado
  - EA3: Tratar a un paciente con una nueva droga
  - EA4: Medir el diámetro a la altura del pecho de un árbol

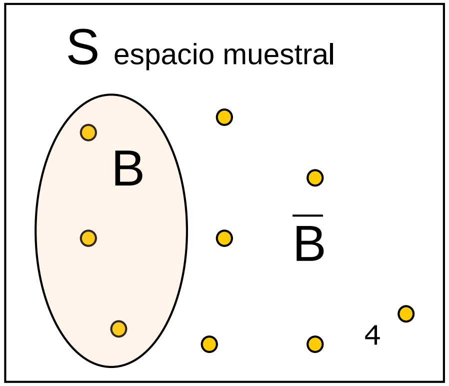
- Espacio muestral: Realizado un determinado experimento aleatorio se llama espacio muestral S al conjunto de todos los resultados posibles
  - EA1: Tirar una moneda S=
  - EA2: Arrojar un dado S=
  - EA3: Tratar a un paciente con una nueva droga

    S=
  - EA4: Medir el diámetro a la altura del pecho de un árbol

    S=

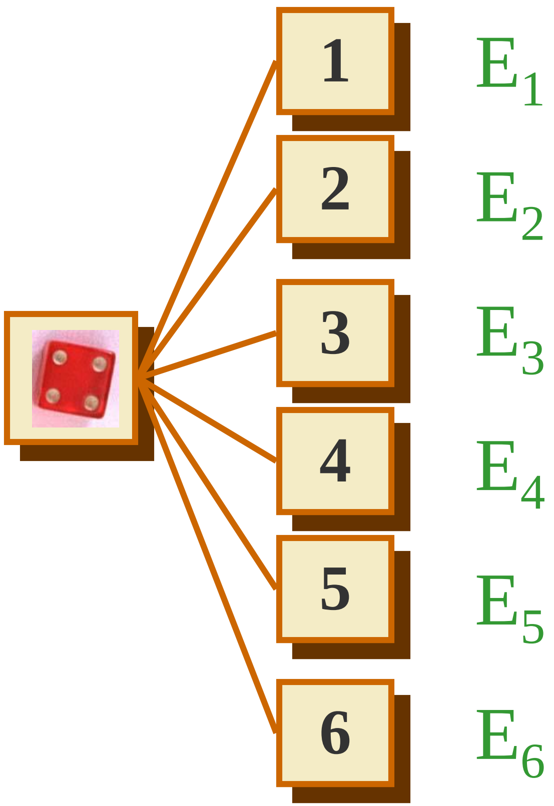
- Suceso o evento: Es un subconjunto de resultados posibles, es decir, es un subconjunto del espacio muestral. Puede ser:
  - Simple
  - Compuesto





Ejemplo: Tirar un dado

Eventos simples:

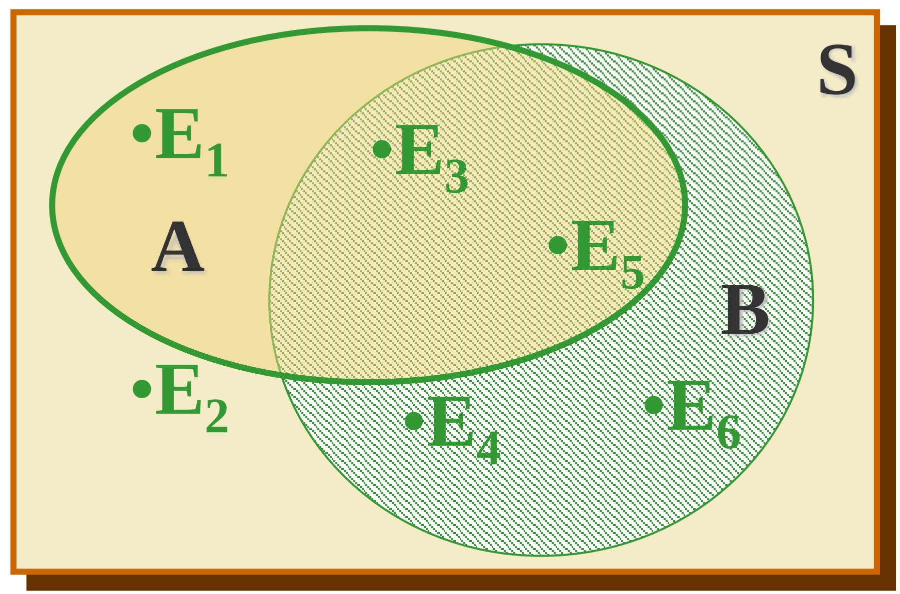


Eventos compuestos:

- –A: un número impar
- –B: un número > 2

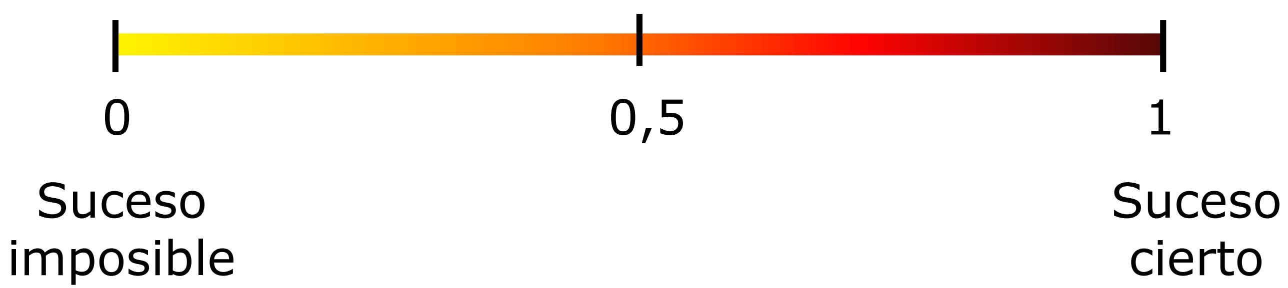
$$A = \{E_1, E_3, E_5\}$$

$$B = \{E_3, E_4, E_5, E_6\}$$



Probabilidad

- Nos permite cuantificar la incertidumbre en la ocurrencia de un suceso
- La probabilidad de un suceso A indica “cuan a menudo” ocurre A y se denota P(A)
- P(A) debe estar entre 0 y 1



- Si un evento nunca puede ocurrir, P(A) = 0.
- Si un evento ocurre siempre que se realiza el experimento, P(A) = 1.

Cálculo de probabilidades

Enfoque clásico o de Laplace

- Las probabilidades se calculan a través de un razonamiento abstracto pues no es necesario arrojar el dado ni extraer una carta para calcular las probabilidades anteriores (son *a priori*)
- Si un experimento aleatorio admite cierta cantidad de resultados posibles, *todos igualmente probables*, la probabilidad de ocurrencia de un suceso A es el cociente entre la cantidad de casos favorables a A y el total de casos posibles

$$P(A) = \frac{CF}{CP}$$

Enfoque clásico: CF/CP

- EA1: Tirar una moneda

  P (cara)=

- EA2: Arrojar un dado

  P (3)=

  P (impar)=

  P (>2)=

- EA3: Tratar a un paciente con una nueva droga

  P (mejora)=

- EA4: Medir el diámetro a la altura del pecho de un árbol

  P (>10 cm)=

Cálculo de probabilidades

Enfoque frecuencista

- Las probabilidades se calculan a partir de la realización de gran cantidad de repeticiones del experimento aleatorio (son *a posteriori*)
- Si un experimento aleatorio es repetido un cierto número de veces (n), y si algún evento resultante, A, ocurre F veces, la frecuencia relativa de la ocurrencia de A, F/n, es aproximadamente igual a la probabilidad de ocurrencia de A siempre y cuando la cantidad de repeticiones sea lo suficientemente grande

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f}{n}$$

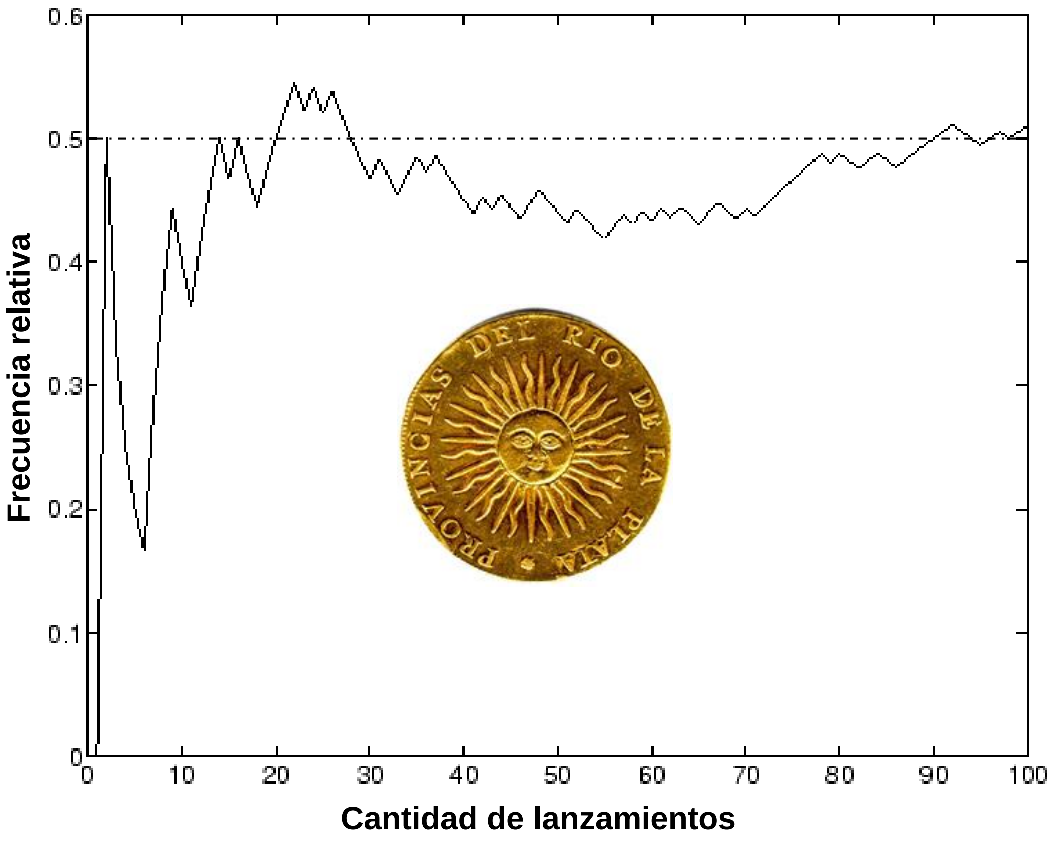
Convergencia estocástica de la frecuencia relativa a la probabilidad

Experimento: arrojar una moneda y registrar el resultado.

-Éxito: cara

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{FA_A}{n}$$

-Frecuencia relativa



Cálculo de probabilidades

Enfoque subjetivo

- La probabilidad subjetiva mide la confianza que un individuo tiene en la certeza de una proposición determinada.
- Este concepto no depende de la repetibilidad de proceso alguno (de hecho, al aplicar este concepto de probabilidad, se puede calcular la probabilidad de un evento que sólo puede ocurrir una única vez)

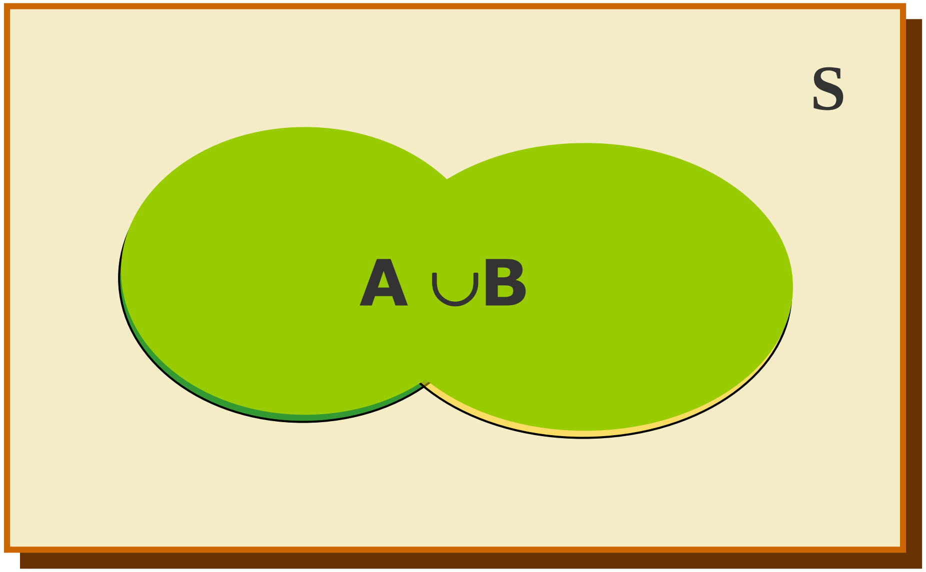
Axiomas de probabilidad (Kolmogorov)

- Se define el número P(A), llamado probabilidad de A, tal que:
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo A
  2. $P(S) = 1$
  3. Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Cuando a cada elemento del espacio muestral $S = \{s_1,\ldots\ldots,s_n\}$ correspondiente a un experimento aleatorio E se le asigna un número $p_i = P(s_i)$ tal que $\sum p_i = 1$ se obtiene el **espacio de probabilidades** asociado a E que se indica $P = \{p_1,\ldots\ldots\ldots,p_n\}$.

Relaciones entre eventos
Unión

La **unión** de dos eventos A y B implica que, cuando se lleva a cabo el experimento, pueden ocurrir **o** A, **o** B, **o** ambos.

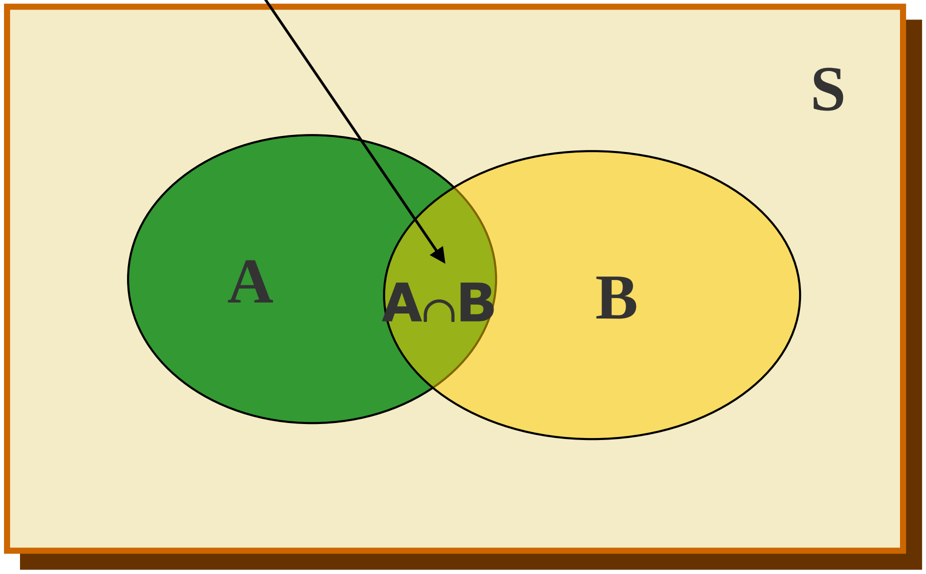
Se denota $\mathbf{A \cup B}$ **(A o B)**



Relaciones entre eventos: Intersección

La **intersección** de dos eventos A y B implica que, cuando se lleva a cabo el experimento, ocurren tanto A como B.

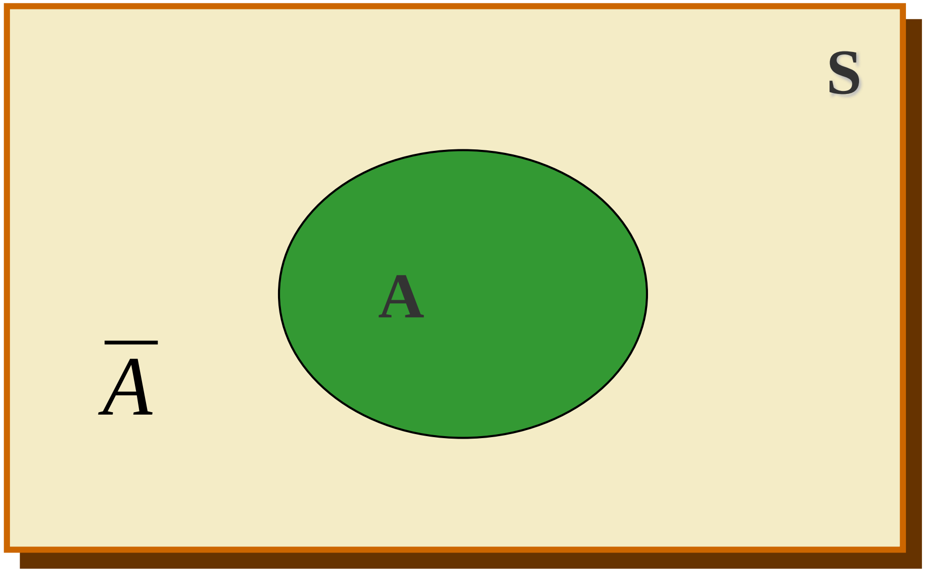
Se denota **A ∩ B** **(A y B)**



Relaciones entre eventos: Complemento

El **complemento** de un evento consiste en todos los resultados del experimento que no resultan en el evento A.

Se denota $\overline{A}$ **(no A)**



Operaciones con probabilidades

Se cuenta con un mazo de 40 cartas españolas. Si se extrae una carta al azar, calcular la probabilidad de que:

- Sea de oro $P(oro) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
- Sea un 7 $P(7) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
- Sea el 7 de oro $P(7\,de\,oro) = \frac{1}{40} = 0{,}025$
- Sea de oro o de espada

$$P(oro\ o\ espada) = \frac{20}{40} = P(oro) + P(espada) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40}$$

- Sea oro o sea un siete $P(oro\ o\ 7) = P(oro) + P(7) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} = \frac{14}{40}$

$$= P(oro) + P(7) - P(oro \cap 7) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

Calculando probabilidades de uniones: Regla de la suma

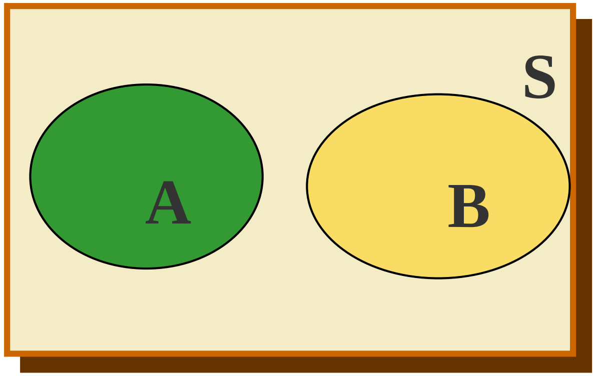
- Sucesos mutuamente excluyentes o incompatibles:

  Dos sucesos A y B en un espacio muestral S son mutuamente excluyentes o incompatibles cuando no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir en la misma repetición del experimento aleatorio.
- En términos de conjuntos esto significa que su intersección es vacía, o sea:

$$A \cap B = \varnothing$$

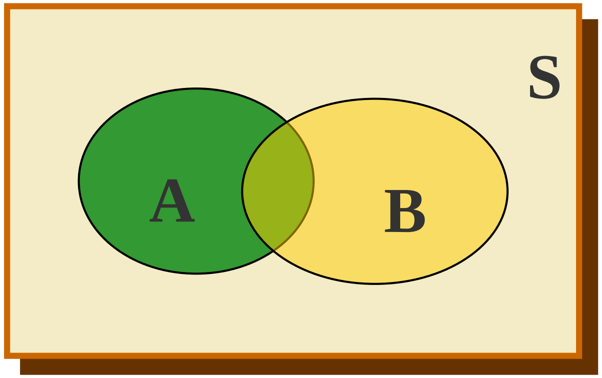
Regla de la suma

- Si los sucesos son incompatibles:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Si los sucesos son compatibles:

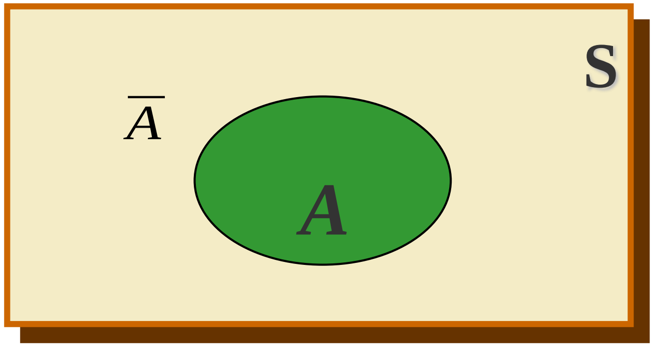


$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Calculando probabilidades de complementos

- Ya que **P(A ∪ $\overline{\text{A}}$) =1** se deduce:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



Operaciones con probabilidades

De un mazo de 40 cartas españolas se extraen dos cartas al azar,

a) con reposición b) sin reposición

Calcular la probabilidad de que:

- Las dos sean de oro $P(1°oro\ y\ 2°oro) =$

$$= \frac{10}{40} x \frac{10}{40} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

$$= \frac{10}{40} x \frac{9}{39} = \frac{3}{52} = 0{,}0577$$

- La primera sea de oro y la segunda de espada

$P(1°oro\ y\ 2°espada) =$

$$= \frac{10}{40} x \frac{10}{40} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

$$= \frac{10}{40} x \frac{10}{39} = \frac{5}{78} = 0{,}0641$$

Calculando probabilidades de intersecciones

Sucesos independientes:

- Dos sucesos A y B son independientes cuando ninguno de ellos da información con respecto al otro.
- Por lo tanto, la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad de ocurrencia del otro.

Regla del producto

- Si los sucesos son independientes:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

- Si los sucesos son dependientes:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B / A)}$$

Probabilidad condicional

- es la probabilidad de que ocurra un suceso A dado que ya ocurrió un suceso B, o sea la probabilidad de A condicional a B. Se denota P(A/B)

- Se deduce que

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$, siempre que P(B) $\neq$ 0

Redefiniendo independencia

- Podemos redefinir independencia en términos de las probabilidades condicionales:

Dos eventos A y B son **independientes** sí y solo sí

$$\mathbf{P(A|B) = P(A)} \quad \text{o} \quad \mathbf{P(B|A) = P(B)}$$

Caso contrario, son **dependientes.**

Reglas de probabilidad

Eventos complementarios

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Regla de la suma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Regla del producto

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A / B)$$

Probabilidad condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Eventos incompatibles

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eventos independientes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

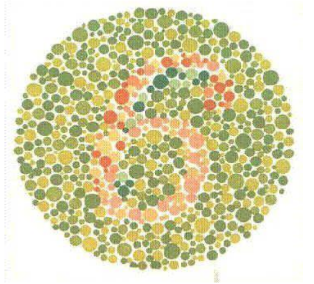
$$P(A \mid B) = P(A) \qquad P(B \mid A) = P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Ruleta


PLAYER'S SUITE
0
1 2 3
4 5 6
7 8 9
10 11 12
13 14 15
16 17 18
19 20 21
22 23 24
25 26 27
28 29 30
31 32 33
34 35 36
1-18
ODD
EVEN
19-36
1st 12
2nd 12
3rd 12
Roulette
Pay Table

Tablas de contingencia o de doble entrada

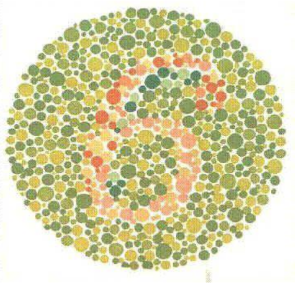


DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

	Varón	Mujer	Total
Daltónico	40	2	**42**
No daltónico	470	488	**958**
Total	**510**	**490**	**1000**

- Suponiendo que el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande, es posible calcular probabilidades…

Tablas de contingencia o de doble entrada



DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

	Varón	Mujer	Total
Daltónico	40	2	**42**
No daltónico	470	488	**958**
Total	**510**	**490**	**1000**

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

	Varón	Mujer	Total
Daltónico	0.04	0.002	**0.042**
No daltónico	0.47	0.488	**0.958**
Total	**0.51**	**0.49**	**1**

$P(V) =$

$P(D) =$

Probabilidades marginales

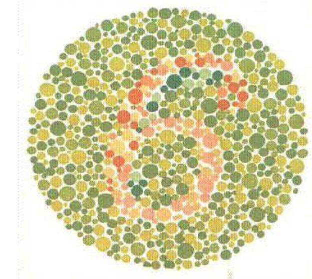
$P(V \cap D) =$

Probabilidad conjunta

$P(V/D) =$

Probabilidad condicional

Tablas de contingencia o de doble entrada

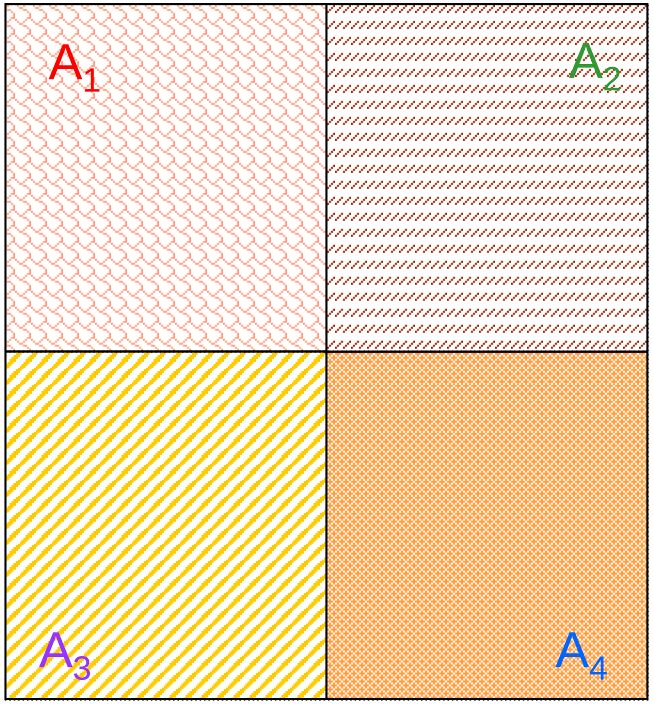


DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

	Varón	Mujer	Total
Daltónico	0.04	0.002	**0.042**
No daltónico	0.47	0.488	**0.958**
Total	**0.51**	**0.49**	**1**

- Si un individuo es daltónico ¿cuán probable es que sea mujer?
- De los daltónicos, ¿qué proporción son varones?
- La condición de daltonismo, ¿es independiente del sexo?
- ¿Qué porcentaje de individuos son mujeres o son daltónicos?

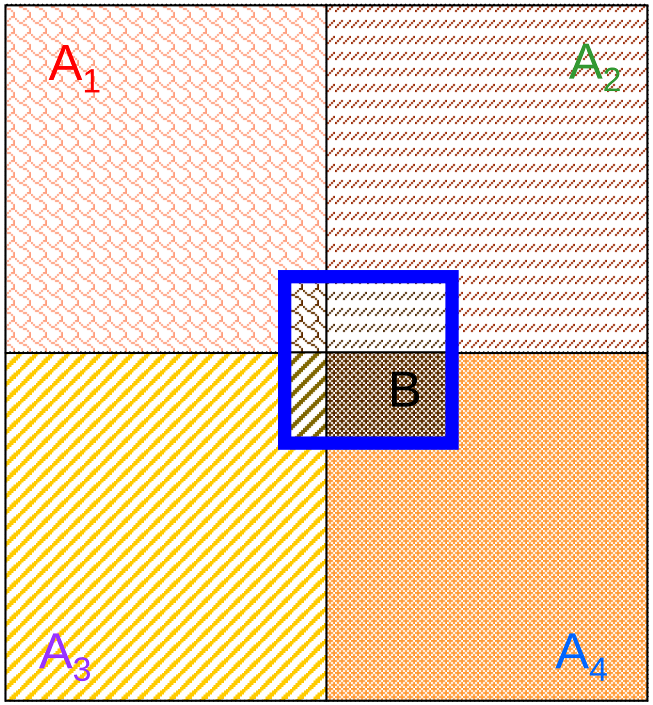
Sistema exhaustivo y excluyente de sucesos



Sea una colección de sucesos

A_1, A_2, A_3, A_4…

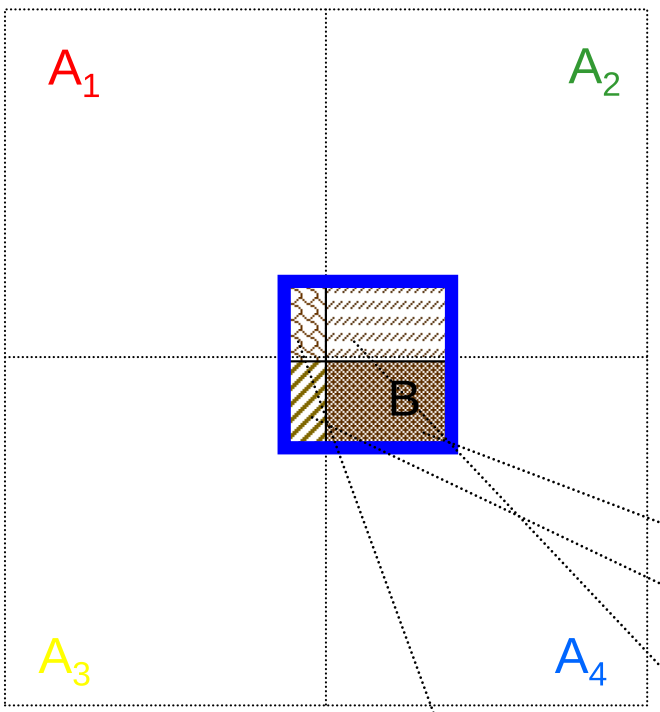
incompatibles entre sí y tales que la unión de todos ellos forma el espacio muestral



Todo suceso B, puede ser descompuesto en componentes de dicho sistema.

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$$

Teorema de la probabilidad total



Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

… podemos calcular la probabilidad de B.

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + (B \cap A_4)$$

$$= P(B|A_1)\, P(A_1) + P(B|A_2)\, P(A_2) + \ldots$$

Ejemplo: En un aula el 70% de los alumnos son mujeres. De ellas el 10% son fumadoras. De los varones, son fumadores el 20%.

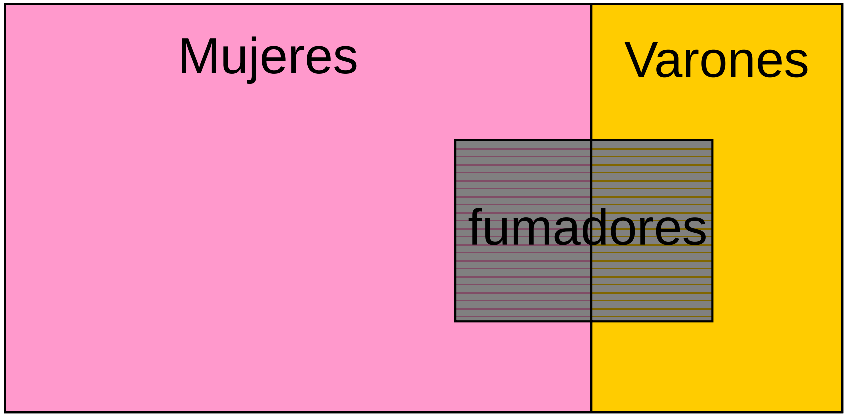
¿Qué porcentaje de fumadores hay en total?

- P(F) =

Teorema Prob. Total
Varones y mujeres forman un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos

- $P(F) = P(F \cap M) + P(F \cap V)$
- $P(F) = P(M)\,P(F|M) + P(V)\,P(F|V)$

$$\mathbf{P(F) = 0,7 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2}$$

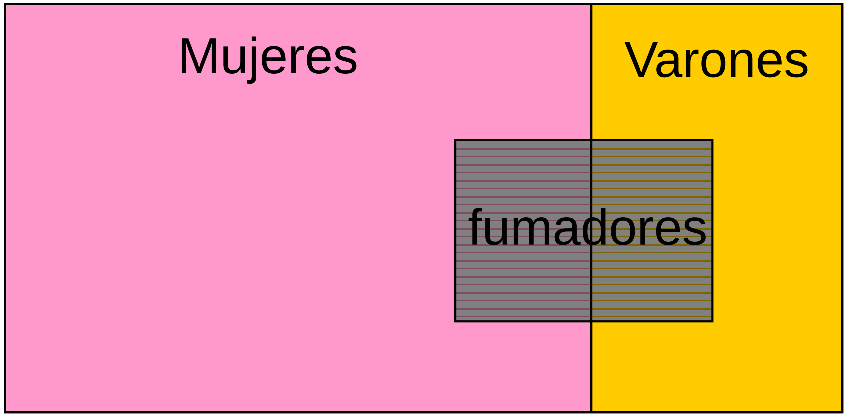


Ejemplo: En un aula el 70% de los alumnos son mujeres. De ellas el 10% son fumadoras. De los varones, son fumadores el 20%.

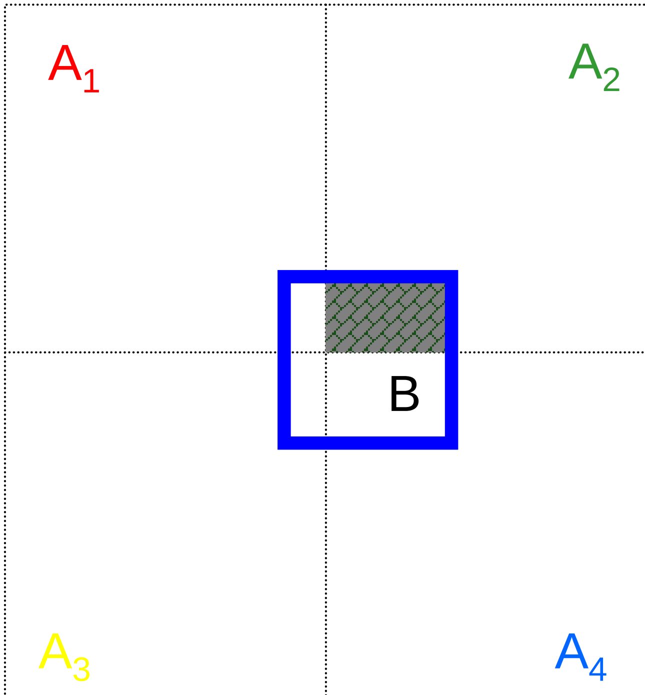
- ¿Se elije a un individuo al azar y resulta fumador. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un varón?
  - **P(V|F) =**

Teorema de Bayes:

Permite la estimación de probabilidades desconocidas (probabilidades a posteriori) a partir de nueva información (el suceso condicional)



Teorema de Bayes

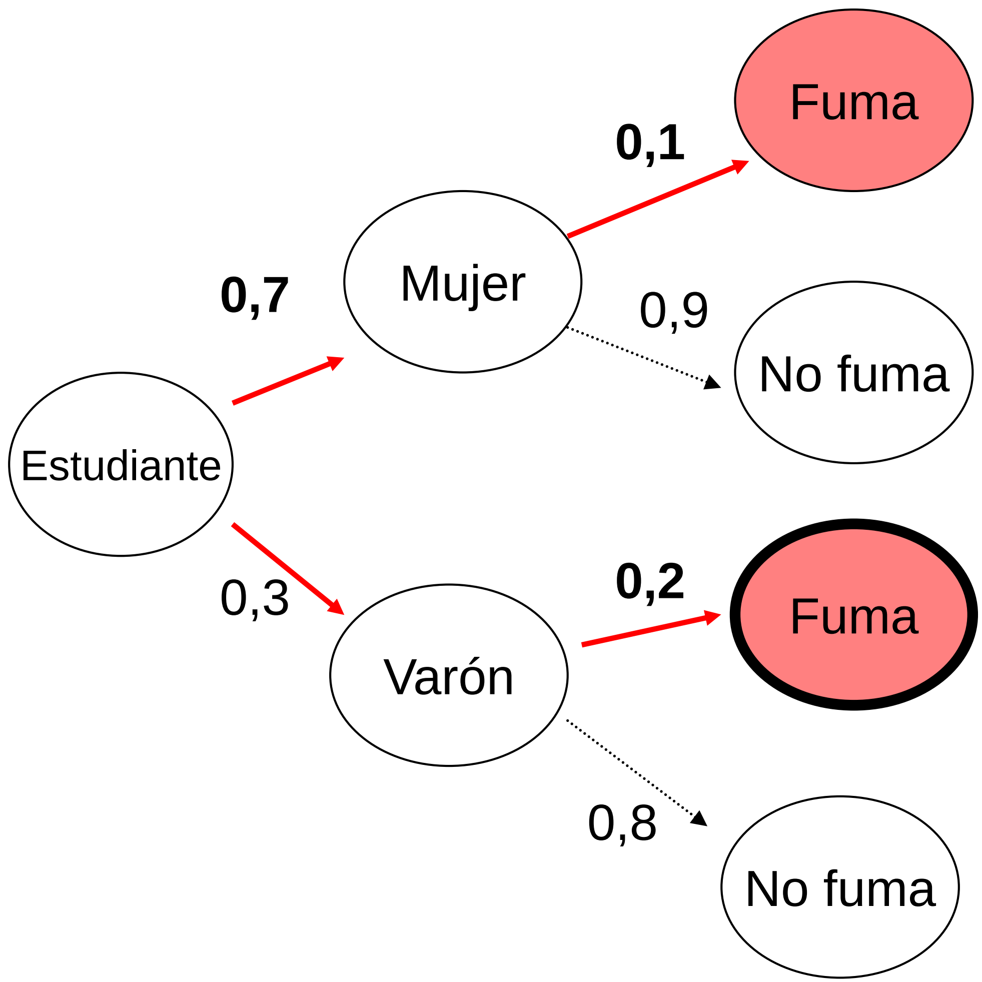


Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

…si ocurre B, podemos calcular la probabilidad (*a posteriori*) de ocurrencia de cada A_i.

$$\mathrm{P(Ai} \,|\, \mathrm{B)} = \frac{\mathrm{P(B} \cap \mathrm{A_i)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum\left[P(A_i)P(B/A_i)\right]}$$

Expresión del problema en forma de árbol



Teorema probabilidad total

P(F) = 0,7x0,1 + 0,3x0,2

Teorema de Bayes

P(V | F) = P(V∩F) / P(F)

P(V | F) = 0,3x0,2 / P(F)