Introducción a los métodos estadísticos

bayesianos en Ecología Pablo Inchausti

Programa del curso:

- 1. Introducción general
- 2. Elementos básicos del análisis bayesiano
- 3. Análisis bayesiano I
- 4. Análisis bayesiano II
- 5. Modelos bayesianos jerárquicos

4. Análisis bayesiano II

Práctico 03

- a. Proporciones y la distr Beta.
- b. GLM de proporciones
- c. Conteos con "exceso" de ceros
- d. GLM para conteos con "exceso" de ceros

a. Proporciones y la distr Beta.

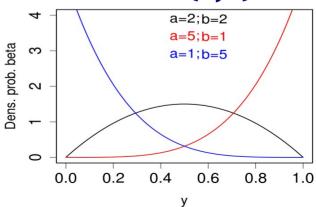
Las proporciones son valores reales en [0,1] que surgen a partir de datos binarios o conteos, o como registros continuos (Douma & Weldon 2019).

- 1) Suelen ser modeladas como datos binarios agrupados o como tasas (conteos/esfuerzo) con un offset.
- 2) Deben ser modeladas usando la distr Beta (a,b).

$$Pr(Y \le y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1} (1-y)^{b-1}$$

$$E(Y) = \frac{a}{a+b} = \mu_Y \quad \sigma_Y^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$
(la media y la varianza NO son

independientes)



Y~Beta(a,b) se re-expresa como Beta(μ_{v} , ϕ)

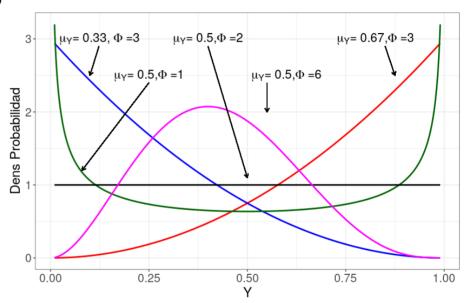
donde:
$$E(Y) = \mu_Y$$
 $\sigma_Y^2 = \frac{\mu_Y(1 - \mu_Y)}{(\phi + 1)}$ $\phi = a + b$ usando la función

de enlace logit(μ_v)=X β

$$logit(\mu_Y) \equiv \log(\frac{\mu_Y}{1 - \mu_Y})$$

Como la función de enlace no está definida en {0,1},

se hace:
$$Y^* = \frac{Y(n-1)+1/2}{n}$$



La distr Beta también puede modelar var. de respuesta reales acotadas en [min, max]: $Y^* = \frac{Y - min(Y)}{max(Y) - min(Y)}$

$$V^* = \frac{Y - min(Y)}{M}$$

b. GLM de proporciones

Oñatibia et al. (2008): efecto del pastoreo de ovejas sobre la cobertura de comunidades herbáceas en paisajes (# y tamaño de parches, distancia entre parches) en 3 zonas de diferente productividad primaria.

```
> DF=read.csv ("Plant cover Pr03.csv", header=T)
```

```
> summarv(DF)
                                                             Nb.patches
                                                                           Totalcover
    Prod
             Gr.pressure
                              patch.size
                                          inter.patch.dist
                                          Min. :16.8
High
      :20
            Min.
                   :0.000
                           Min.
                                  :14.5
                                                           Min.
                                                                  :122
                                                                         Min.
                                                                                :0.294
                           1st Qu.:21.4
                                                           1st Qu.:153
Low
      :19
            1st Ou.:0.095
                                          1st Ou.:23.0
                                                                         1st Ou.:0.452
Medium:14
                           Median :30.7
            Median :0.211
                                          Median :25.6
                                                           Median :167
                                                                        Median :0.522
            Mean
                   :0.226 Mean
                                  :30.7
                                          Mean
                                                 :26.8
                                                           Mean
                                                                  : 180
                                                                         Mean
                                                                               :0.522
            3rd Ou.:0.334
                           3rd Qu.:37.8
                                          3rd Qu.:29.5
                                                           3rd Ou.:207
                                                                         3rd 0u.:0.579
            Max.
                   :0.551
                            Max.
                                  :56.3
                                          Max.
                                                 :48.7
                                                           Max.
                                                                  : 247
                                                                                :0.722
                                                                         Max.
```

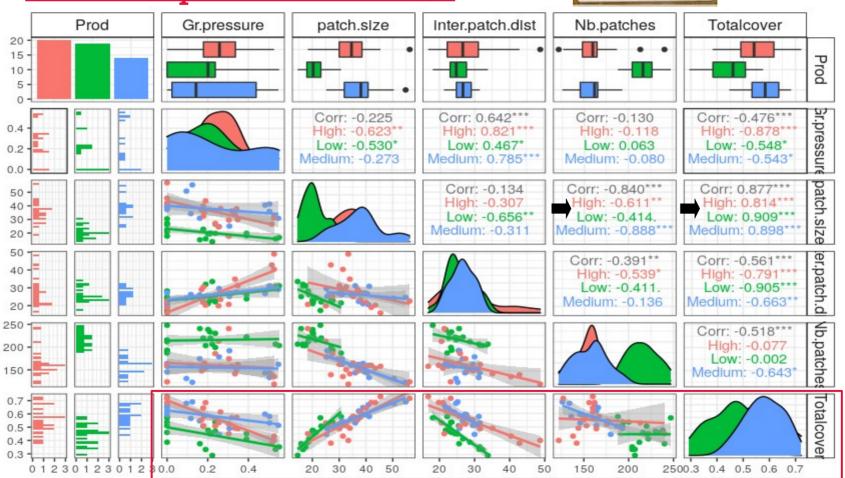
```
DF.s=data.frame(scale(DF[ c("Gr.pressure","patch.size","inter.patch.dist")], scale=T, center=T),

Totalcover=DF$Totalcover, Prod=DF$Prod)

← estandardización
```



Conclusions



ggpairs(data=DF,mapping lower=list(continuous method="lm")))+theme wrap("smooth" aes(col bw()+etc Prod)

Modelo estadístico:

Totalcover~Beta(μ_{Y} , ϕ) con logit(μ_{Y})=X β .



Las vars explicativas a considerar:

Gr.pressure*Prod, patch.size*Prod + inter.patch.dist.

Es posible incluir vars explicativas en el parámetro ϕ empleando la función de enlace adecuada: $\log(\phi) = X\beta$.

<u>Útil para explicitar la ecuación de un modelo complej</u>o:

```
formula.m1=bf(Totalcover~Gr.pressure*Prod + patch.size*Prod+inter.patch.dist)+ lf(phi~1)
```

formula.m2=bf(Totalcover~Gr.pressure*Prod + patch.size*Prod+inter.patch.dist)+ lf(phi~Gr.pressure*Prod + patch.size*Prod+inter.patch.dist)

Ajustaremos ambos modelos y haremos una selección.

Veamos primero las distr previas que hay que especificar...

```
> get prior(formula.ml, data=DF.s,family='Beta')
               prior
                         class
                                                coef group resp dpar
               (flat)
                                                         ¿Nivel de referencia
               (flat)
                                         Gr.pressure
                                  Gr.pressure:ProdLow
               (flat)
                                                                  de Prod?
                             b Gr.pressure:ProdMedium
               (flat)
               (flat)
                                     inter.patch.dist
               (flat)
                                          patch.size
                                                         ¿Significado de
                                             ProdLow
               (flat)
               (flat)
                                  ProdLow:patch.size
                                                         estos parámetros?
               (flat)
                                          ProdMedium
                               ProdMedium:patch.size
               (flat)
 student t(3, 0, 2.5) Intercept
 student t(3, 0, 2.5) Intercept
                                                                 phi
```

En los GLM, las dist previas se definen en las escalas en las que el modelo es lineal: $logit(\mu_Y)$ y $log(\phi)$.

Consideremos:

Para los efectos de las vars. explicativas: Normal(0,0.5)→ 95% de los valores estarían en [-1;1] en escala logit (recordemos que vars. explicativas fueron estandarizadas).

Para el intercepto: $logit(0.5)=0 \rightarrow se$ espera que la cobertura visual promedio sea de 50%, con sd=(logit(0.8)-logit(0.2))/4=0.693 (Wan et al 2004) ya que la cobertura estaría en un rango [20%;80%].

Como no se especifica la distr previa para ϕ , se acepta la dist. previa "débilmente informativa" propuesta por brms.

```
Examinen las dist
```

Los dos modelos que vamos a ajustar:

Examinen los valores de Rhat y de ESS de cada modelo **OK** ? Para hacer selección de modelos, hay que añadir LOO...

Un poco arbitrariamente, yo eligiría m1 por su simplicidad, sin que por ello m2 sea "inadecuado".

> summary (m1) Interpretemos los parámetros:

```
Family: beta
Links: mu = logit; phi = log
Formula: Totalcover ~ Gr.pressure * Prod + patch.size * Prod + inter.patch.dist
phi ~ 1
Data: DF.s (Number of observations: 53)
Draws: 3 chains, each with iter = 3000; warmup = 1000; thin = 1;
total post-warmup draws = 6000
```

Population-Level Effects:

	Estimate	Est.Error	l-95% CI	u-95% CI	Rhat	Bulk_ESS	$Tail_ESS$
Intercept	0.10	0.02	0.07	0.13	1.00	2318	3604
phi_Intercept	7.36	0.22	6.92	7.77	1.00	3577	3539
Gr.pressure	0.06	0.03	0.01	0.11	1.00	1771	2328
ProdLow	0.09	0.04	0.02	0.17	1.00	3073	3374
ProdMedium	0.03	0.02	-0.02	0.07	1.00	2189	3085
patch.size	0.35	0.02	0.31	0.39	1.00	1864	2944
inter.patch.dist	-0.21	0.01	-0.23	-0.18	1.00	2383	3347
Gr.pressure:ProdLow	-0.07	0.03	-0.12	-0.01	1.00	1917	2804
Gr.pressure:ProdMedium	-0.07	0.03	-0.12	-0.02	1.00	1942	2856
ProdLow:patch.size	0.13	0.04	0.05	0.21	1.00	2044	3052
ProdMedium:patch.size	-0.06	0.03	-0.12	-0.01	1.00	1809	2630

Ponu1	ation	-Level	Effects:
ropu	астоп	-rever	LIIECLS.

•	Estimate	Est.Error
Intercept	0.10	0.02
phi Intercept	7.36	0.22
Gr.pressure	0.06	0.03
ProdLow	0.09	0.04
ProdMedium	0.03	0.02
patch.size	0.35	0.02
inter.patch.dist	-0.21	0.01
Gr.pressure:ProdLow	-0.07	0.03
Gr.pressure:ProdMedium	-0.07	0.03
ProdLow:patch.size	0.13	0.04
ProdMedium:patch.size	-0.06	0.03

Con las vars explicativas estandarizadas, podemos evaluar su efecto relativo para cada nivel de Gr.pressure.

Hay que obtener las ecuaciones...!

High: 0.10 + 0.06Gr +0.35patch -0.21inter Medium: (0.10+0.03)+(0.06-0.07)Gr+(0.35-0.06)patch-0.21inter

Low: (0.10+0.09)+(0.06-0.07)Gr+(0.35+0.13)patch-0.21inter

High: 0.10+0.06Gr+0.35patch-0.21inter

Medium: 0.13- 0.01Gr+ 0.29patch-0.21inter

Low: 0.19- 0.01Gr+ 0.48patch-0.21inter



En todo GLM que usa función de enlace logit, se puede utilizar la "regla de 4" (Gelman et al 2014) para el efecto máximo de cada var. explicativa numérica.

Esto viene del max de la derivada de la función inverso logit

High: 0.10+0.06Gr+0.35patch-0.21inter

Medium: 0.13 - 0.01Gr+ 0.29patch -0.21inter

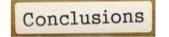
Low: 0.19 - 0.01Gr + 0.48patch -0.21inter

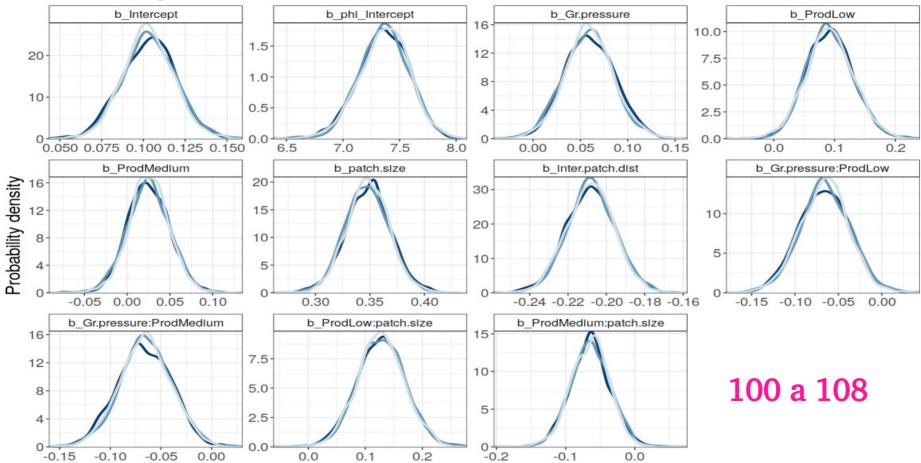


Medium: para patch $0.29/4=0.072 \rightarrow \text{un cambio de una}^{> sd(DF\$patch)}_{[1]}$ induce un aumento máx de 0.072 en la TotalCover promedio.

```
> post.ml=as draws df(m1,variable = c("^b "), regex = T)
# A draws_df: 2 iterations, 1 chains, and 11 variables podemos obtener las dist posteriores.
  b_Intercept b_phi_Intercept b_Gr.pressure b_ProdLow b_ProdMedium b_patch.size b_inter.patch.dist b_Gr.pressure:ProdLow
        0.11
                        6.8
                                   0.014
                                             0.12
                                                       0.0537
                                                                     0.35
                                                                                      -0.18
                                                                                                         -0.033
                                   0.052
                                             0.13
                                                      -0.0039
                                                                     0.34
                                                                                      -0.21
                                                                                                         -0.036
```

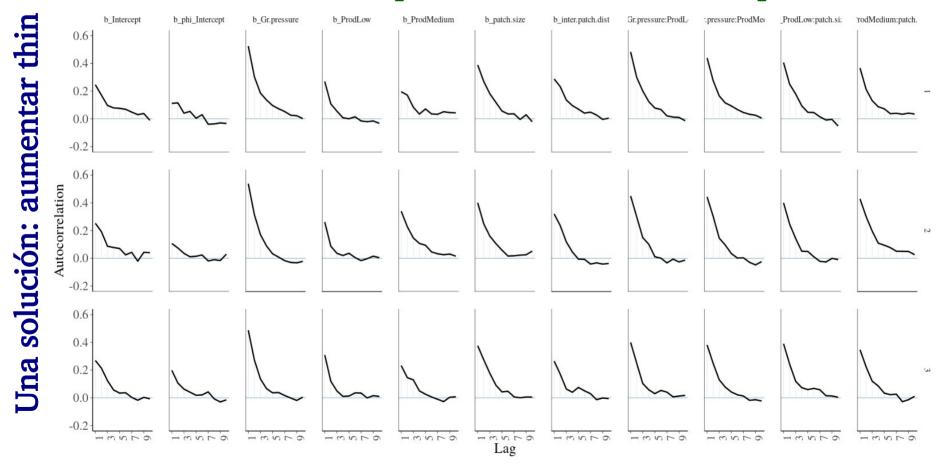
Convergencia de las cadenas:



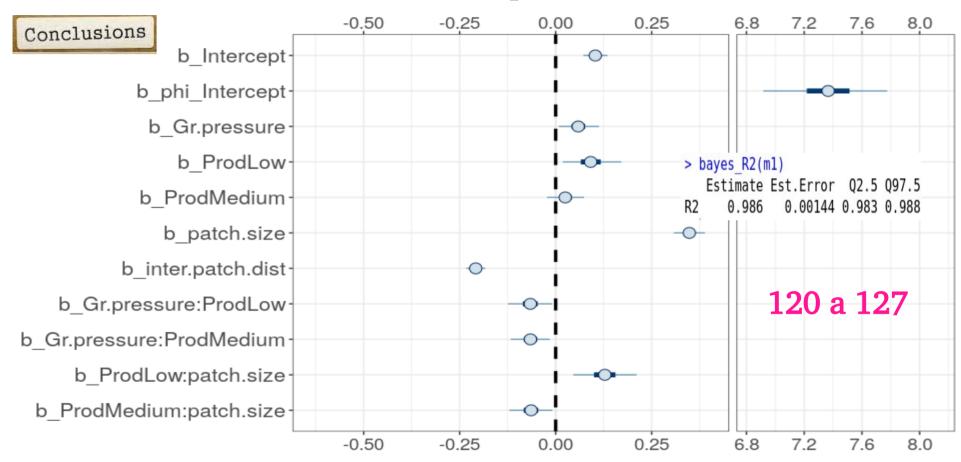


111 a 117

Autocorrelación de los parámetros "muestrados" por cadena:



Medias e IntCred de los parámetros del modelo:



Análisis de residuos:

- 1) Distribución predictiva posterior de m1
- post.dist.m1=posterior_predict(m1, ndraws=1000)
- 2) Randomized quantile residuals

- 3) Convierte RQR a Normal
- res.m1=data.frame(res=qnorm(residuals(qres.m1)))
- 4) Crea un DF con la información necesaria para los gráficos

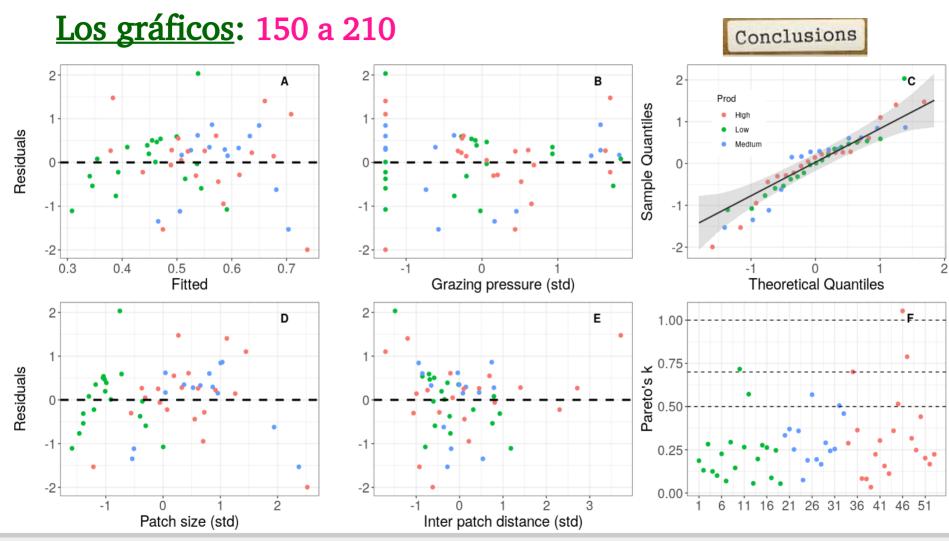
```
res.m1=cbind(res.m1,

DF.s[,c("Gr.pressure","patch.size","inter.patch.dist","Prod")],

fitted=fitted(m1, ndraws=1000)[,1], # average of fitted values

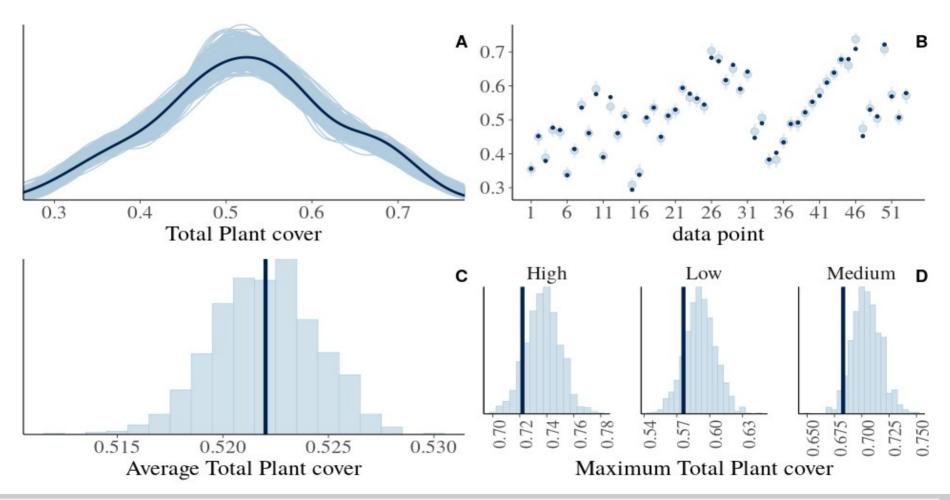
pareto=loo(m1, pointwise=T)$diagnostics$pareto k)
```





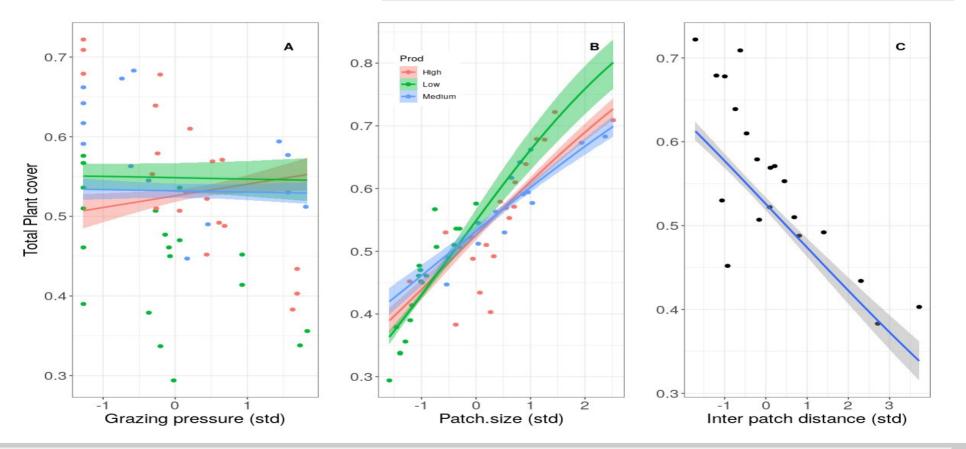
pp-check, a partir de la distr. predictiva posterior:

```
ppc.density=ppc_dens_overlay(y=DF.s$Totalcover,yrep=post.dist.m1, trim = F,
                             size = 0.5, alpha = 1) +
        xlab("Total Plant cover")+
        theme(axis.text = element text(size=16),
            axis.title=element text(size=18),
            legend.position = "none")
                                                                    Coding Time
ppc.mean = ppc stat(y=DF.s$Totalcover,yrep=post.dist.m1,
                      stat = "mean", binwidth = 0.001) + etc
ppc.interv=ppc intervals(y=DF.s$Totalcover,yrep=post.dist.m1)+ etc
ppc max Prod=ppc stat grouped(y=DF.s$Totalcover,yrep=post.dist.m1,
          group = DF.s$Prod,stat = "max",binwidth=0.005) + etc
plot grid(ppc.density, ppc.interv, ppc.mean, ppc max Prod, ncol=2,
         labels = LETTERS[1:4], align="hv", label x=0.95, label y=0.95)
```



> names(m1.cond.eff)

Curvas condicionales:



c) Conteos con exceso de ceros

Es bastante frecuente que los datos ecológicos de conteos tengan muchos ceros: ← ¿exceso de ceros?

Esto NO es una maldición o defecto de los datos, sino un aspecto de los mismos a ser modelado.



Cualquier "exceso" es respecto a una expectativa previa.

Los datos no saben que tienen ajustarse a la distr Poisson frecuentemente usada para modelar conteos.

Esta distr tiene un sólo parámetro (media=var) para ajustar la tendencia central y la variabilidad de los datos.

(en otra medida, lo mismo ocurre para la distr BiNeg)

Los modelos de mezcla (mixture models) permiten modelar directamente datos con "exceso de ceros".

Zero Inflated: dos tipos de ceros → verdaderos (ausente) + falsos (presente pero no observada).(Lambert 1992)

Zero Augmented (hurdle): procesos diferentes dictan la presencia y dada presencia, la abundancia. (Mullahy 1986)

La distinción entre ZI y ZA puede ser sutil y se realiza en base al diseño y a los objetivos del estudio.

Los modelos de mezcla se componen de dos partes:

- 1. Los conteos → Poisson o BiNeg, link=log.
- 2. Los ceros → Binomial, link=logit.

El ZIPoisson (podría ser ZIBi-) se puede visualizar como:

a. $Z \sim Binomial(1,\pi)$ b. $Y \sim Poisson(\mu*Z)$

$$Pr(Y_{i}=0|X_{i})=\pi_{i}+(1-\pi)*e^{-\mu} \quad \log it(\pi)=X\beta$$

$$Y \sim ZIP(\pi,\mu) \quad Y$$

$$1-\pi \quad Y \quad Pr(Y_{i}=y_{i}|X_{i})=(1-\pi)[\frac{\mu^{y_{i}}e^{-y_{i}}}{y_{i}!}] \quad \log(\mu)=X\beta$$

$$E(Y_{i})=(1-\pi)\mu \quad Var(Y_{i})=(1-\pi)(\mu+\pi\mu^{2})$$

Las var. explicativas que determinan logit(π) y log (μ) pueden o no ser las mismas .

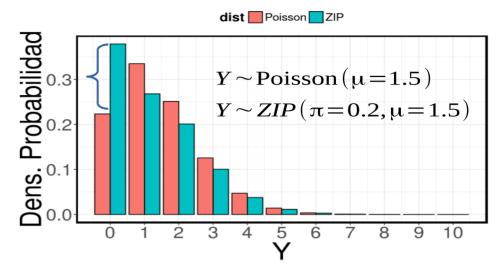
Esencialmente, los modelos de mezcla ZI y ZA son "dos GLM anidados" formando un solo modelo.

Comparación entre
Poisson y ZI-Poisson:

Outro Deplica (0.2)

Outro Deplica (0.3)

Outro Depl



ZA o Modelos condicionales: los ceros son modelados como distr. Binomial y el resto de los valores por una distr. Poisson (o Bi-) truncada.

ZA-Poisson
$$Y = 0$$

$$1-\pi Y | Y>0$$

$$Pr(Y=0|X)=\pi \quad \log it(\pi)=X\beta$$

$$Pr(Y=0|X)=\pi \quad \log it(\pi)=X\beta$$

$$Pr(Y=0|X)=\pi \quad \log it(\pi)=X\beta$$

$$Pr(Y=0|X)=\pi$$
 $logit(\pi)=X\beta$

$$logit(\pi) = X \beta$$

$$Pr(Y_i = y_i | X_i) = \frac{(1-\pi)}{(1-e^{-\mu})} \frac{\mu^{y_i} e^{-y_i}}{y!}$$

d. GLM para conteos con "exceso" de ceros

Ej. efecto de la precipitación y la densidad sobre la fecundidad de un paseriforme en una isla en California (Sofaer et al 2014).



```
> DF1=read.csv("warblers Pr03.csv",header=T)
```

> summary(DF1)

2 1 1				
Year	NumFledged	BreedingDensity	Precip	
Min. :2003	Min. :0.0	Min. :3.43	Min. : 9.1	
1st Qu.:2004	1st Qu.:0.0	1st Qu.:4.93	1st Qu.:18.5	<pre>> table(DF1\$NumFledged)</pre>
Median :2005	Median :0.0	Median :4.95	Median :20.6	table (2. 24.tam. coagea)
Mean :2006	Mean :1.4	Mean :5.23	Mean :30.4	0 1 2 3 4 5 6
3rd Qu.:2007	3rd Qu.:3.0	3rd Qu.:5.59	3rd Qu.:39.2	95 3 28 32 19 2 2
Max. :2009	Max. :6.0	Max. :6.32	Max. :62.0	33 3 23 32 23 2 2
> DF1\$Year=as.f	actor(DF1\$Year	·)		

> table(DF1\$NumFledged==0)/length(DF1\$NumFledged)

FALSE TRUE 0.475 0.525

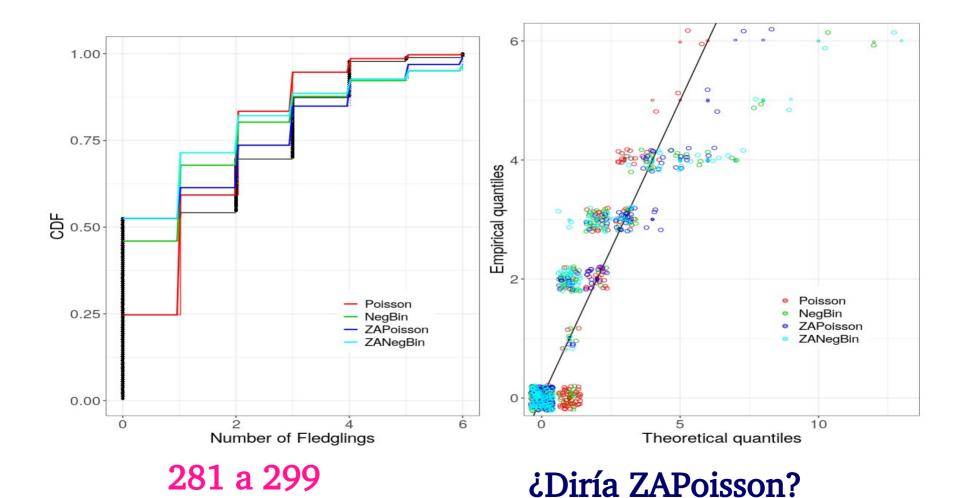


Sin ninguna justificación, vamos ajustar modelos ZA.

Distr. probabilidades de la var respuesta:

```
\textbf{poiss=fitdist(DF1\$NumFledged,"pois")} \qquad Y \sim Poisson(\mu_{Y})
negbin=fitdist(DF1$NumFledged,"nbinom") Y \sim Binomial negativa(\mu_v, \phi)
ZAP = fitdist(DF1$NumFledged, "ZAP", discrete=T, Y \sim Zero\ Aug\ .\ Poisson(\mu_V, \pi)
        start = list(mu=mean(DF1$NumFledged),
                 sigma=mean(DF1$NumFledged == 0)))
ZANBI = fitdist(DF1$NumFledged, "ZANBI", Y \sim \text{Zero Aug. Binomial Neg}(\mu_V, \phi, \pi)
         start = list(mu=mean(DF1$NumFledged),
                 sigma=(mean(DF1$NumFledged)^2)/
                     (var(DF1$NumFledged)-mean(DF1$NumFledged)),
                 nu=mean(DF1$NumFledged == 0)),
         method = "mge", optim.method = "L-BFGS-B",
         lower = c(0.01, Inf), upper = c(0, Inf))
```

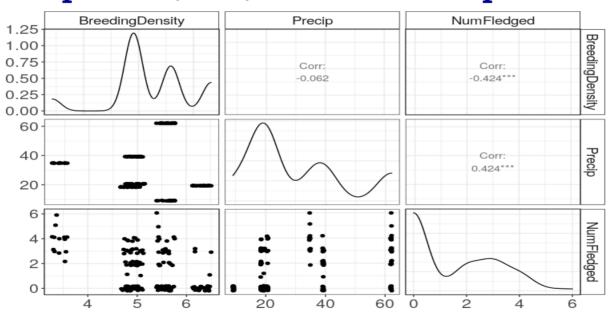
Estos comandos sólo estiman los parámetros de las distr. de probabilidades necesarios para los gráficos.



Introducción a los métodos estadísticos bayesianos en Ecología

Modelo estadístico: $Y \sim Zero Aug. Poisson(\mu_Y, \pi)$ con log(μ_Y)=Xβ, logit(π)=Xβ

Se puede (o no) incluir vars explicativas en cada parte.



¿Qué otros gráficos exploratorios se podrían hacer?

ggpairs(DF1[,c("BreedingDensity","Precip","NumFledged")], lower = list(continuous = wrap("points", position=position_jitter(height=0.2, width=0.2)))) +etc

302-308

Usando las fórmulas para ver las distr previas a especificar:

> get_prior(formula=formula.m4,data=DF1s,family='hurdle_poisson')

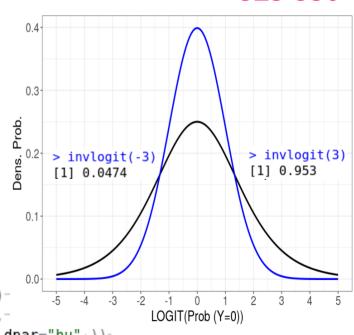
	prior	class	coef	group	resp	dpar
	(flat)	b				
	(flat)	b	BreedingDensity			
	(flat)	b	Precip			
student_t(3,	-2.3, 2.5)	Intercept				
	(flat)	b				hu
	(flat)	b	BreedingDensity			hu



Precip



323-330



(flat)

logistic(0, 1) Intercept

hu

hu

Vamos a ajustar los siguientes dos modelos:

```
m3=brm(formula=formula.m3,data=DF1s,family='hurdle_poisson',prior=prior.m3, \dots \d
```



Y para compararlos: m3=add_criterion(m3, criterio="loo") m4=add_criterion(m4, criterio="loo")

```
> loo_compare(m3,m4)
    elpd_diff se_diff
m4    0.0    0.0
m3 -31.3    6.6
```

¿Interpretación?

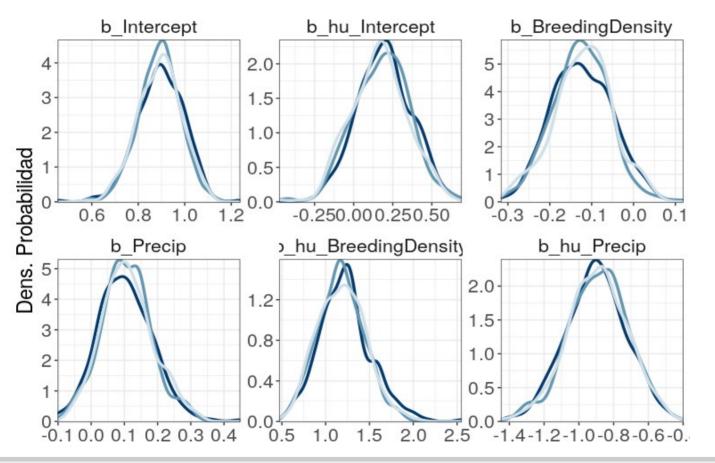
Importancia relativa de las vars explic.?

Population-Level Effects:

total post-warmup draws = 1000

roputation-Level L	illects.						
	Estimate	Est.Error	l-95% CI	u-95% CI	Rhat	Bulk_ESS	Tail_ESS
Intercept	0.89	0.09	0.70	1.06	1.00	859	956
hu_Intercept	0.18	0.18	-0.15	0.51	1.00	1032	920
BreedingDensity	-0.12	0.07	-0.26	0.02	1.00	908	826
Precip	0.11	0.08	-0.04	0.27	1.00	1018	920
hu_BreedingDensity	1.19	0.28	0.69	1.79	1.00	896	947
hu_Precip	-0.89	0.17	-1.25	-0.56	1.00	920	942

Examinemos la convergencia del modelo m4:



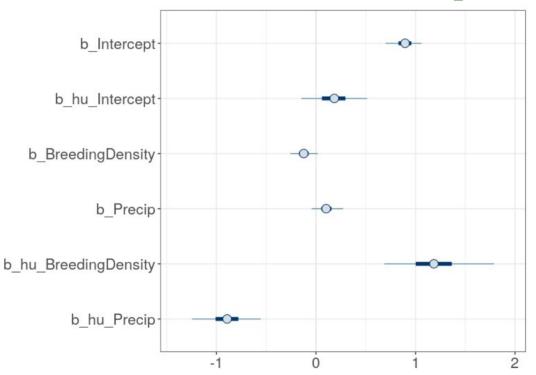
350-358



Miren los "trace plots" y autocorrelaciones

361-379

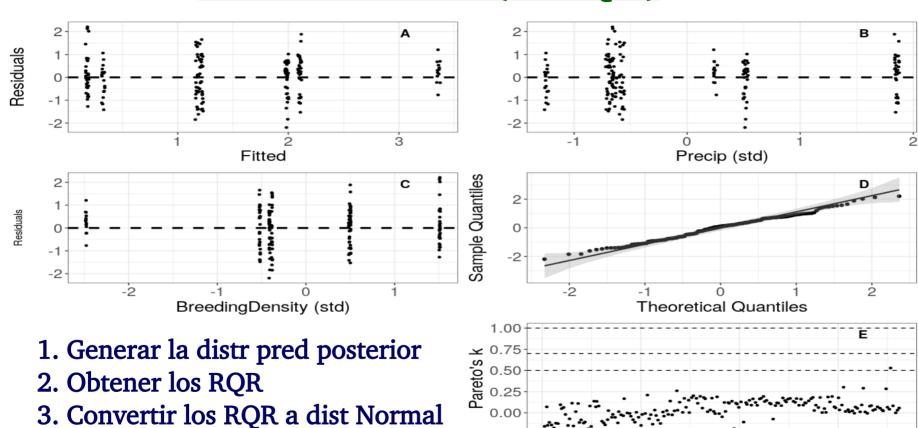
Medias e IntCred 95% de los parámetros:



mcmc_plot(m4, regex_pars = "^b", type="intervals", prob_outer = 0.95)+ + etc

Análisis de residuos (con RQR!)

410 a 455



4. Generar un DF con todo (403 a 408)

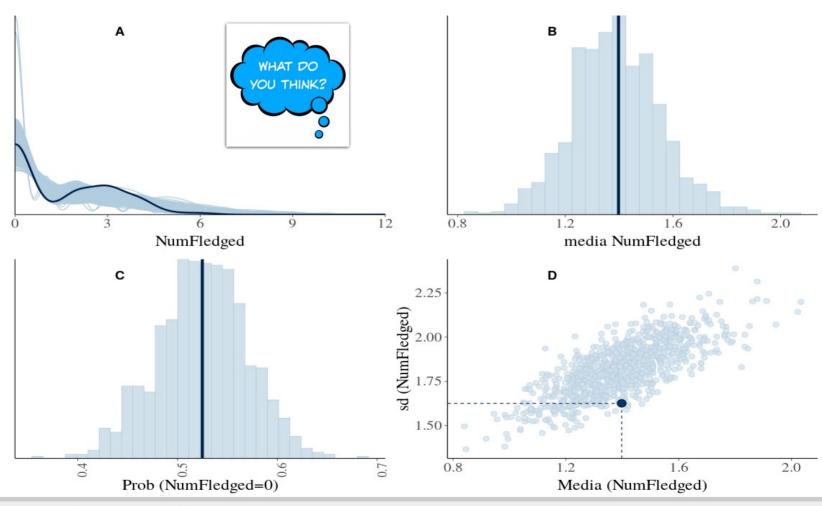
100

50

150

Uso de los posterior-predictive checks:

```
ppc.density.m4=ppc dens overlay(y=DF1s$NumFledged,yrep=dist.pred.post.m4,
               trim = F, size = 0.5, alpha = 1) + etc
ppc.mean.m4=ppc stat(y=DF1s$NumFledged,yrep=dist.pred.post.m4, stat =
                     "mean", binwidth = 0.05) + etc
             cero=function (x)\{sum(x==0)/length(x)\}
ppc ceros.m4=ppc stat(y=DF1s$NumFledged,yrep=dist.pred.post.m4,stat = cero)+
 xlab("Prob (NumFledged=0)") + etc
ppc media sd.m4=ppc stat 2d(y=DF1s$NumFledged,yrep=dist.pred.post.m4,
stat = c("mean", "sd")) + etc
plot grid(ppc.density.m4, ppc.mean.m4,ppc ceros.m4,ppc media sd.m4, ncol=2,
     labels = LETTERS[1:4], align="hv", label x=0.35, label y=0.95)
```



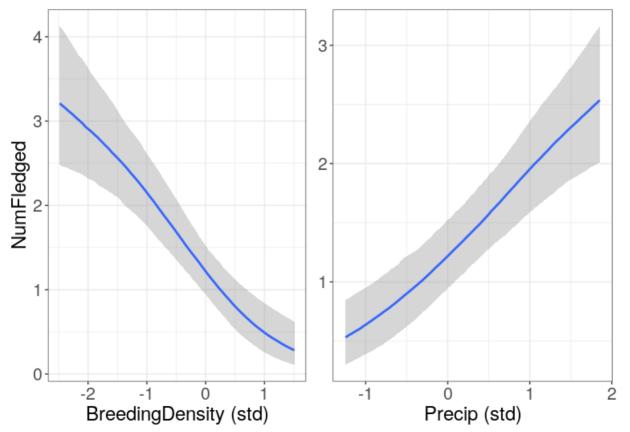
Introducción a los métodos estadísticos bayesianos en Ecología

Práctico 03

Diapo 36/38

Curvas condicionales:

m4.cond.eff=conditional_effects(m4) -- names(m4.cond.eff) -# nombre de los efectos conditionales --



488 a 503

4. Análisis bayesiano II

Práctico 03

- a. Proporciones y la distr Beta.
- b. GLM de proporciones
- c. Conteos con "exceso" de ceros
- d. GLM para conteos con "exceso" de ceros