



Productos de Renta Fija y
Tasas de Interés
Hernán Reisin

QUANT UCEMA 2020
2020, Buenos Aires

Quien les habla



J.P.Morgan

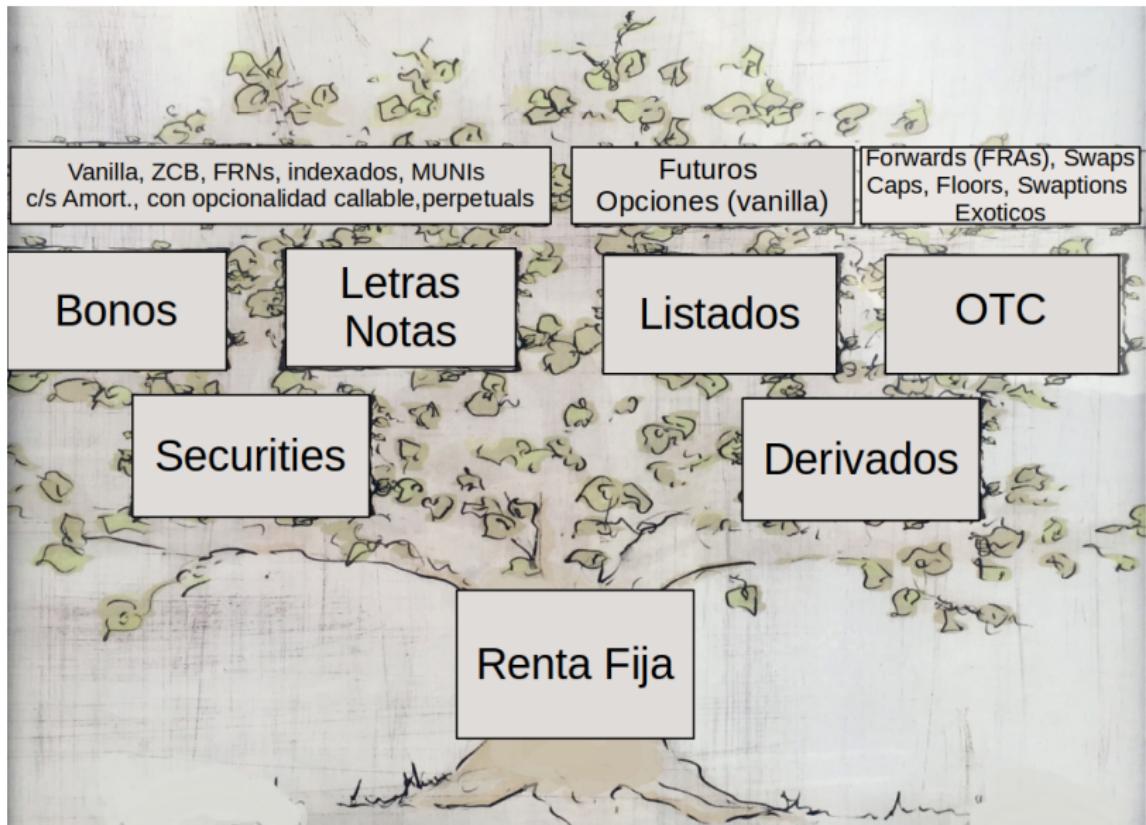
CRISIL
An S&P Global Company



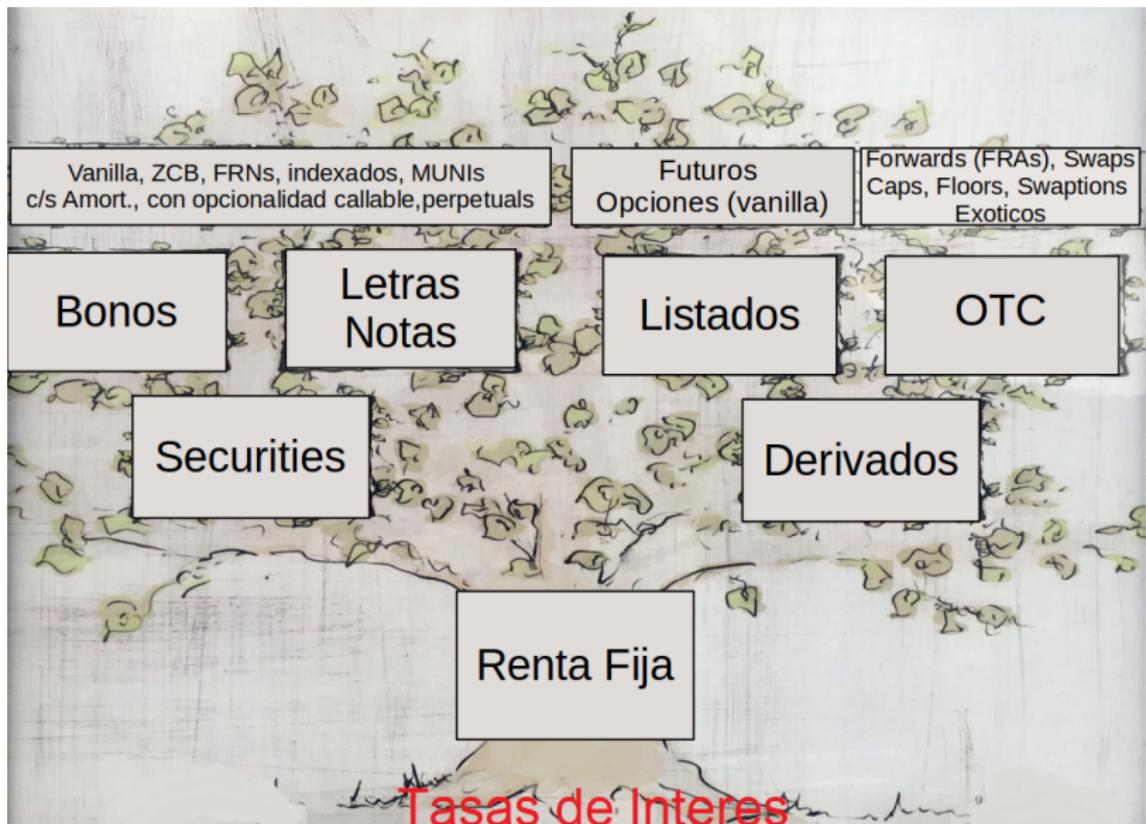
Disclaimer The views and opinions expressed here are those of the author and do not necessarily reflect the position of my current or former employer.

Introducción

Derivados de Tasa



Derivados de Tasa



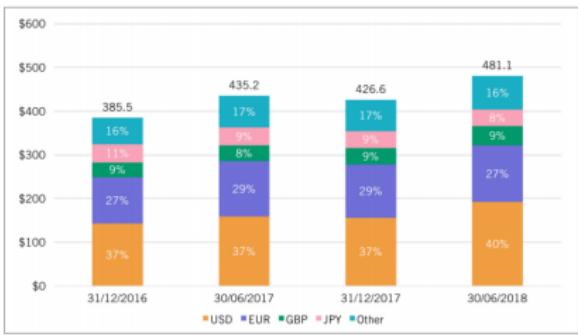
Tasas de Interés

Las tasas de interés subyacen a todos [estos/los] derivados.
En estos derivados la tasa de interés es el driver **dominante**

Derivados de Tasa



Source: BIS OTC Derivatives Statistics

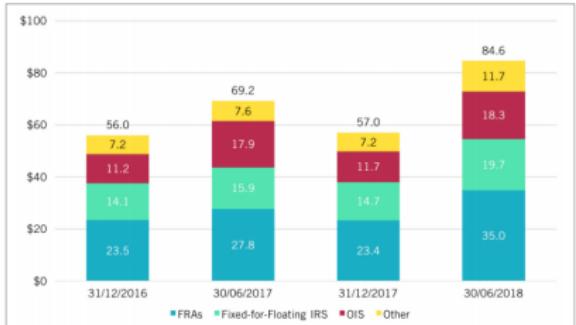


Source: BIS OTC Derivatives Statistics

<https://www.isda.org/a/gmGEE/Key-Trends-in-the-Size-and-Composition-of-OTC-Derivatives-Markets.pdf>

- ▶ El mercado global de derivados OTC tuvo $\sim U\$S600$ (US) trillions de notional outstanding a mediados de 2018.
- ▶ La mayor parte en derivados de tasa de interés (81%) y en contratos denominados en U\$S (40%).

Derivados de Tasa - US market



Source: DTCC and Bloomberg SDRs

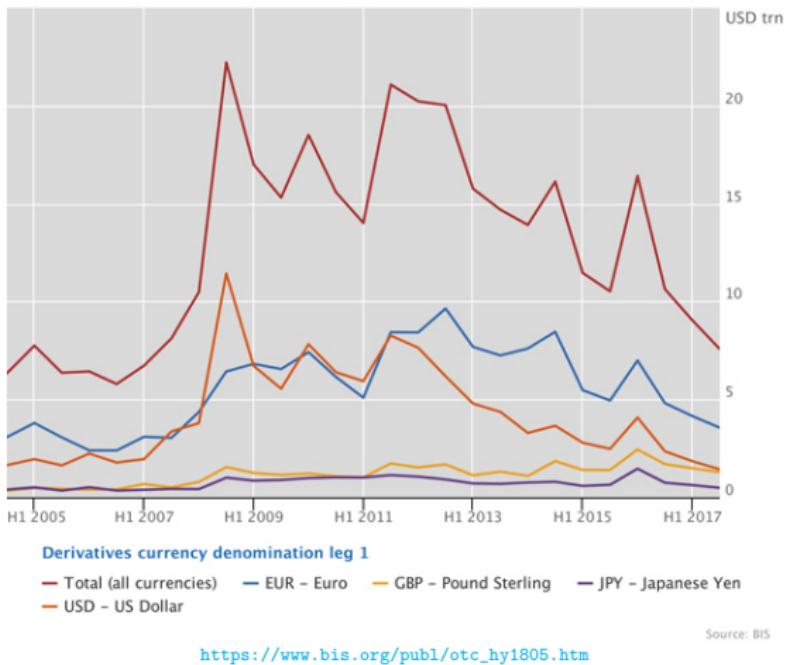


Source: DTCC and Bloomberg SDRs

<https://www.isda.org/a/gmGEE/Key-Trends-in-the-Size-and-Composition-of-UTC-Derivatives-Markets.pdf>

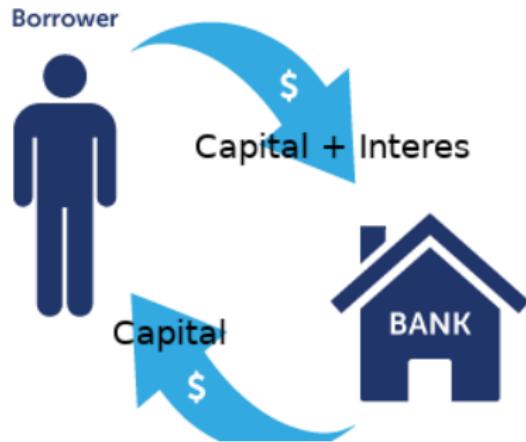
- ▶ El outstanding amount de derivados de tasa creció durante 2018 principalmente debido a trades a corto plazo como Forward Rate Agreements (FRA), Overnight Index Swaps (OIS) y Swaps fix-float.
- ▶ La mayor porción de contratos IRD corresponde a maturidades de corto plazo.

Derivados de Tasa



- A diferencia del outstanding amount el *gross market value* de OTC IRDs está en marcado descenso (en 2017 regresó a niveles del 2007).

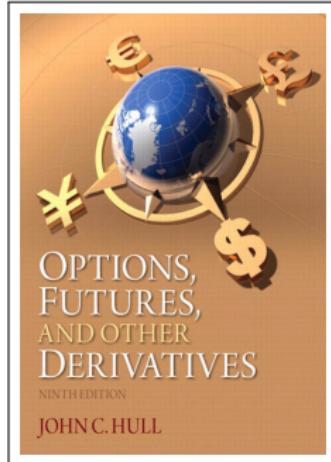
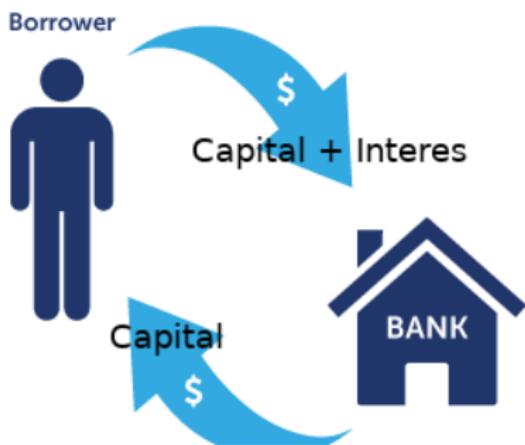
Generalidades acerca Interés



El interés es un incentivo al prestamista para ceder el uso de su capital a otro individuo. El rendimiento de ese dinero debe compensar el rendimiento que obtendría realizando otra inversión (el costo de oportunidad) o la depreciación por devaluación. Incluye además el pago de un “premium” al prestamista en compensación a éste por tomar el riesgo crediticio de no-devolución del préstamo.

El prestatario acepta el pago de un interés a cambio del derecho sobre el uso de ese capital. Ese interés será en última instancia una transferencia de parte del rendimiento que consiga el prestatario al disponer de ese capital prestado.

Generalidades acerca Interés



An interest rate in a particular situation defines the amount of money a borrower promises to pay the lender. For any given currency, many different types of interest rates are regularly quoted. These include mortgage rates, deposit rates, prime borrowing rates, and so on. The interest rate applicable in a situation depends on the credit risk. This is the risk that there will be a default by the borrower of funds, so that the interest and principal are not paid to the lender as promised. The higher the credit risk, the higher the interest rate that is promised by the borrower.

Risk Drivers de Tasas de Interés



- ▶ **Oferta y Demanda.** La tasa de interés es el costo de acceder a un préstamo de dinero (entre el entramado de individuos, institucionales, bancos, gobiernos, organismos supranacionales, etc.). Demanda vs. disponibilidad.
- ▶ **Política monetaria.** Gobiernos actúan intentando influir en las tasas de referencia fomentando o desfavoreciendo la oferta de dinero mediante emisión monetaria, recompra de securities (inyección de liquidez), suscripción de letras (e.g. LELIQ), regulación de la liquidez de la plaza (e.g. encajes bancarios).
- ▶ **Inflación.** Depreciación de la moneda y devaluación del poder de compra impactan en la oferta de dinero. El prestador ofrece a plazos más cortos o a cambio de mayor tasa de interés para compensar el riesgo de crédito.

Interés

Se determina sobre el principal de un préstamo o depósito como el producto de dicho nociónal (N) por la tasa de interés (r) por el número de días entre los pagos que ocurren en t_1 y t_2

$$c = N \times r \times \tau(t_1, t_2) \quad (1)$$

Usada para reportar tasas interbancarias (localmente la 'tasa nominal').

La tasa del interés r tiene unidades implícitas de $1/\text{tiempo}$. Si r es una tasa anual entonces τ se mide como una fracción de año. También suelen expresarse en *basis points*, 1 bp es 0.01 % per annum.

El plazo de la acumulación del interés sigue convenciones para el cómputo de la medida de tiempo (day count convention).

¿Cuáles son los factores aleatorios? N suele no serlo, la tasa r suele ser aleatoria, $\tau(t_1, t_2)$ el período debiera ser siempre determinístico (excepto algunas sutilezas, como los cambios de feriados)

Interés de Composición Simple

- El valor de la inversión al término del período de acumulación es

$$V(t_1) = V(t_0) + c_1 = V(t_0) + V(t_0) \times r \times \tau(t_0, t_1)$$

- El valor de la inversión al término del siguiente período de acumulación es

$$V(t_2) = V(t_1) + c_2 = V(t_1) + V(t_0) \times r \times \tau(t_1, t_2)$$

- Lo mismo ocurre para cualquier período de reinversión posterior

$$V(t_n) = V(t_{n-1}) + c_n = V(t_{n-1}) + V(t_0) \times r \times \tau(t_{n-1}, t_n)$$

- Podemos pensar el interés simple como el interés que resulta de reinvertir solo el capital y *cashear* los rendimientos provenientes del interés

$$V(t_n) = V(t_{n-1}) + V(t_0) \times r \times \tau(t_{n-1}, t_n)$$

- El valor nominal de la inversión a tiempo t_n puede resumirse por recursividad

$$V(t_n) = V(t_0) + \sum_{i=1}^n V(t_0) r \tau(t_{i-1}, t_i) = V(t_0) \left[1 + \sum_{i=1}^n r \tau(t_{i-1}, t_i) \right]$$

Interés de Composición Compuesta

- El valor de la inversión al término del período de acumulación es

$$V(t_1) = V(t_0) + c_1 = V(t_0) + V(t_0) \times r \times \tau(t_0, t_1)$$

(hasta aca es idéntico al caso anterior)

- El valor de la inversión al término del siguiente período de acumulación es

$$V(t_2) = V(t_1) + c_2 = V(t_1) + V(t_1) \times r \times \tau(t_1, t_2)$$

- Lo mismo ocurre para cualquier período de reinversión posterior

$$V(t_n) = V(t_{n-1}) + c_n = V(t_{n-1}) [1 + r \times \tau(t_{n-1}, t_n)]$$

- Podemos pensar el interés compuesto como el interés que resulta de reinvertir el capital *más* los rendimientos de interés

$$V(t_n) = V(t_{n-1}) [1 + r \times \tau(t_{n-1}, t_n)]$$

- El valor nominal de la inversión a tiempo t_n puede resumirse por recursividad

$$V(t_n) = V(t_0) \prod_{i=1}^n [1 + r \tau(t_{i-1}, t_i)]$$

Interés de Composición Compuesta - Frecuencia de composición

La tasa de interés puede medirse (o aplicarse) a distintos plazos. Si la tasa se compone anualmente entonces una tasa de interés del 20 % significa que al final del primer año \$100 valdrán $\$100 \times 1,2 = \120 .

Si el interés 20 % p.a. se compone semestralmente, significa que se gana 10 % cada 6 meses, por lo tanto \$100 valdrán $\$100 \times 1,1 \times 1,1 = \121 al final del primer año.

En general, si la composición tiene una frecuencia anual k , una inversión a m años tendrá un rendimiento de

$$V(t_0) \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{km}$$

Take away: la tasa se reporta anual pero su composición puede tener distintos plazos

Interés de Composición Contínua

- Volvamos al caso inicial de composición compuesta

$$V(t_2) = V(t_1) [1 + r \times \tau(t_1, t_2)]$$

pero consideremos que existen k períodos de pago entre tiempos t_1 y t_2 (frecuencia de composición).

- En el contexto de interés compuesto

$$V(t_2) = V(t_1) \left[1 + r \frac{\tau(t_1, t_2)}{k} \right]^k$$

- En el límite $k \rightarrow \infty$ llegamos a la composición continua

$$V(t_2) = V(t_1) \exp[r\tau(t_1, t_2)]$$

de la que despejamos la tasa de interés según

$$r = \frac{\ln(V(t_2)) - \ln(V(t_1))}{\tau(t_1, t_2)}, \quad (\text{recuerden esta fórmula})$$

En la práctica $k = 360 \sim \infty$

Convenciones de Mercado

Convenciones de Mercado



Holidays & Observances

Jan 01	New Year's Day
Jan 21	Martin Luther King Day
Feb 05	Chinese New Year
Feb 12	Lincoln's Birthday
Feb 14	Valentine's Day
Feb 18	President's Day
Mar 06	Ash Wednesday
Mar 10	Daylight Saving (begin)
Mar 17	St. Patrick's Day
Mar 20	Vernal equinox
Apr 01	April Fool's Day
Apr 20	Passover
Apr 21	Easter
Apr 24	Admin. Assistants Day
May 06	Ramadan begins
May 12	Mother's Day
May 27	Memorial Day
Jun 09	Pentecost
Jun 14	Flag Day
Jun 16	Father's Day
Jun 21	June Solstice
Jul 04	Independence Day
Sep 02	Labor Day
Sep 23	Autumnal equinox
Sep 30	Rosh Hashanah
Oct 14	Columbus Day
Oct 31	Halloween
Nov 03	Daylight Saving (end)
Nov 11	Veterans Day
Nov 28	Thanksgiving
Dec 22	Hanukkah begins
Dec 22	December Solstice
Dec 25	Christmas Day
Dec 26	Kwanzaa begins
Dec 31	New Year's Eve

January						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

February						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28		

March						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

April						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

May						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

June						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

July						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

August						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

September						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

October						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

November						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

December						
Su	M	Tu	W	Th	F	Sa
	1	2	3	4	5	6
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

2019 Calendar with Holidays by Vertex42.com

<https://www.vertex42.com/calendars/2019.html>

© 2016 Vertex42 LLC. Free to Print.

- ▶ Cómputo de la medida de tiempo $\tau(t_1, t_2)$, *day count convention*.
- ▶ Para valuar un derivado de tasas hay que generar un calendario en base a la convención de días laborables (especificado en el prospecto o contrato).
- ▶ La elección del calendario de feriados es en general afín a las monedas del instrumento.

Business Day Convention

The screenshot shows a web browser window for tradinghours.com/exchanges/tase. The page has a yellow sidebar on the left with various links and a chart. The main content area has a dark header bar with the question "When is the Tel-Aviv Stock Exchange Open?". Below it is a table titled "Upcoming Holidays" showing dates for Rosh Hashanah, Yom Kippur, and the Festival of Tabernacles. To the right is the "Trading Schedule" which details the opening session at 9:00 AM, auction times, and closing sessions at 5:14 PM and 5:15 PM. A "Real-Time Countdown" button is present. At the bottom, a section asks if the exchange closes for lunch, noting it does not, and provides information about the Tel-Aviv Stock Exchange's timezone (IDT).

Upcoming Holidays	
Rosh Hashanah	September 20, 2020
Yom Kippur	September 27, 2020
Yom Kippur	September 28, 2020
Festival of Tabernacles	October 4, 2020
Festival of Tabernacles	October 5, 2020
Festival of Tabernacles	October 6, 2020
Festival of Tabernacles	October 7, 2020
Festival of Tabernacles	October 8, 2020

[View all TASE holidays »](#)

Trading Schedule

Su/Mo/Tu/We/Th:

9:00 AM - 9:45 AM – Opening Session
9:45 AM - 9:46 AM – Opening Auction
Mo/Tu/We/Th:

9:45 AM - 5:14 PM – Trading Session
5:14 PM - 5:15 PM – Pre Close
5:15 PM - 5:25 PM – Closing Auction & end of trade
Su:

9:46 AM - 4:15 PM – Trading Session
4:14 PM - 4:15 PM – Pre Close
4:15 PM - 4:25 PM – Closing Auction & end of trade

[Real-Time Countdown »](#)

Does the Tel-Aviv Stock Exchange close for lunch?

The Tel-Aviv Stock Exchange does not close for lunch. Continuous trading begins at 9:45 AM and continues all day until the closing bell at 5:14 PM.

Tel-Aviv Stock Exchange Timezone

The Tel-Aviv Stock Exchange uses the Asia/Jerusalem timezone for all listed times. This timezone is currently +03:00. Referred to by its abbreviation IDT. Tel-Aviv does observe Daylight Saving Time (DST) and it currently is Daylight Saving Time.

Ajuste de fechas de pago



- ▶ **No-Adjustment.** Los feriados son ignorados. Pagos o débitos pueden ocurrir y efectivizarse en días feriados.
- ▶ **Previous / Following.** Los flujos correspondientes a un feriado se efectúan (y computan) el día laboral inmediato previo / posterior.
- ▶ **Modified Previous / Modified Following.** Los flujos de fondo se ajustan al día laboral previo/posterior más próximo, excepto que sea de otro mes. Si el potencial dia ajustado es de otro mes se aplica Following /Previus.
- ▶ **End of Month - No Adjustment.** Los pagos se supone que ocurren el último día calendario del mes, sin importar si no es laborable.
- ▶ **End of Month - Previous (Following).** Ídem el anterior pero se corre al día hábil previo (posterior) si el fin de mes es no laborable.

Unidad de tiempo

- ▶ El tiempo $\tau(t_1, t_2)$ entre dos fechas $t_1 = d_1/m_1/y_1$ y $t_2 = d_2/m_2/y_2$ se mide en unidades de años (*year fraction*).
- ▶ El **day count convention** salva la indeterminación acerca de qué significa la diferencia entre dos fechas: “ $t_2 - t_1$ ” y permite definir la medida de tiempo entre ellas
 - ▶ **Actual/365.** El año tiene 365 días

$$\tau(t_1, t_2) = \frac{\# \text{ de días transcurridos entre } t_1 \text{ y } t_2}{365}$$

- ▶ **Actual/360.** Idéntico al caso anterior pero el año tiene 360 días
- ▶ **30/360.** Los meses cuentan por 30 días, y los años por 360 días

$$\tau(t_1, t_2) = \frac{\min(d_2, 30) + (30 - d_1)^+}{360} + \frac{(m_2 - m_1 - 1)^+}{12} + y_2 - y_1$$

- ▶ **Actual/Actual.** Considera los días transcurridos según el año sea bisiesto o no

$$\tau(t_1, t_2) = \frac{\# \text{ días en año bisiesto}}{366} + \frac{\# \text{ días en año no bisiesto}}{365}$$

- ▶ **30/360 US, 30E/360, 30E/360 ISDA, Actual/365L,**

Resumen de Ajuste de fechas

- Los días t_1 y t_2 pueden ser modificados según el calendario de feriados y la convención de ajuste de días laborables

$$t_1 \rightarrow t_1^*, t_2 \rightarrow t_2^*$$

- La medida temporal se define por la convención de conteo de días (dcc).
- Se computa el cupón

$$c = N \times r \times \tau_{dcc, calendar[USD]}(t_1^*, t_2^*) \quad (2)$$

Ejemplo. Pago semestral entre $t_1 = 1$ Enero 2019 y $t_2 = 14$ de Junio de 2019, bajo calendario USD ajuste Mod-Follow. $t_1^* = 2$ Enero 2019 y $t_2^* = 17$ de Junio de 2019

$\tau(t_1, t_2)$	dcc
0.4583333	30/360
0.4547945	actual/actual
0.4611111	actual/360
0.4547945	actual/365

La diferencia es magnificada por el Nocial (e.g. millones de U\$S).

```
function dynamicSort(a) {
    var d = [];
    for (var i = 0; i < a.length; i++) {
        d[i] = -1;
    }
    for (var j = 0; j < a.length; j++) {
        for (var k = 0; k < a.length; k++) {
            if (a[j] > a[k]) {
                d[j] = d[j] + 1;
            }
        }
    }
    return d;
}

function use_array(a, b) {
    var c = -1;
    var d = dynamicSort(a);
    for (var e = 0; e < a.length; e++) {
        if (d[e] == b) {
            a.splice(e, 1);
            c = e;
        }
    }
    if (c != -1) {
        a.splice(c, 1);
    }
}

function remove(a, word, inp_array) {
    var b = -1;
    for (var i = 0; i < a.length; i++) {
        if (a[i] == word) {
            b = i;
        }
    }
    if (b != -1) {
        a.splice(b, 1);
    }
}

function remove_all(a, word) {
    var b = -1;
    for (var i = 0; i < a.length; i++) {
        if (a[i] == word) {
            b = i;
        }
    }
    if (b != -1) {
        a.splice(b, 1);
        remove_all(a, word);
    }
}
```

Coding Time

¿Qué es LIBOR?

LIBOR

LIBOR is short for *London Interbank Offered Rate*. It is an unsecured short-term borrowing rate between banks. LIBOR rates have traditionally been calculated each business day for 10 currencies and 15 borrowing periods. The borrowing periods range from one day to one year. LIBOR rates are used as reference rates for hundreds of trillions of dollars of transactions throughout the world. One popular derivatives transaction that uses LIBOR as a reference interest rate is an interest rate swap (see Chapter 7). LIBOR rates are published by the British Bankers Association (BBA) at 11:30 a.m. (UK time). The BBA asks a number of different banks to provide quotes estimating the rate of interest at which they could borrow funds just prior to 11:00 a.m. (UK time). The top quarter and bottom quarter of the quotes for each currency/borrowing-period combination are discarded and the remaining ones are averaged to determine the LIBOR fixings for a day. Typically the banks submitting quotes have a AA credit rating.¹ LIBOR is therefore usually considered to be an estimate of the short-term unsecured borrowing rate for a AA-rated financial institution.

In recent years there have been suggestions that some banks may have manipulated their LIBOR quotes. Two reasons have been suggested for manipulation. One is to make the banks' borrowing costs seem lower than they actually are, so that they appear healthier. Another is to profit from transactions such as interest rate swaps whose cash flows depend on LIBOR fixings. The underlying problem is that there is not enough interbank borrowing for banks to make accurate estimates of their borrowing rates for all the different currency/borrowing-period combinations that are used. It seems likely that over time the large number of LIBOR quotes that have been provided each day will be replaced by a smaller number of quotes based on actual transactions in a more liquid market.

Hull

- ▶ ¿Por qué se usaba LIBOR como tasa de referencia? Se suponía una tasa del costo de prestar dinero entre bancos-AA
- ▶ Plazos desde O/N hasta 12 meses, en varias monedas

Reemplazo de LIBOR

Before discussing solutions, let's review what we're trying to solve.

It became apparent after the financial crisis that LIBOR was being manipulated. Financial firms misstated their LIBOR submissions—often in collusion with each other—to make better returns on their swap books. During the financial crisis, they also submitted artificially low rates to avoid signaling financial weakness. Manipulation was possible because of the way LIBOR submissions were made. Banks were asked to estimate the rate at which they *could* borrow from other banks, not rates at which they *actually* borrowed. Their quotes were hypothetical—guesses if you will—and were therefore particularly easy to compromise.

At the same time, the way banks fund themselves has changed. The unsecured London interbank market, which LIBOR was designed to measure, was active when LIBOR was created, but that just isn't how banks finance themselves any more. The Fed estimates that on a typical day there are currently around six to seven actual market transactions—totaling about \$500 million—that could underpin one- and three-month U.S. dollar LIBOR across all of the panel banks. For the six-month tenor, there are only two or three transactions per day. At the one-year tenor the average is one transaction per day, and on many days there are none.⁴ That means that the majority of panelist submissions each day are based solely on “expert judgment.”

<https://www.newyorkfed.org/newsevents/speeches/2019/he1190226>

- ▶ Bancos en Londres y New York manipularon la tasa LIBOR (tasa de préstamos no-colateralizados), que es auto-reportada.
- ▶ Además eran trades ilíquidos “200 trillions of exposures calculated on transactions worth few hundred millions”

Reemplazo de LIBOR

LIBOR. But SOFR is an overnight rate—there's no such thing as three-month or six-month SOFR.

One solution to this difference is to use the daily SOFR for each day during the term, either averaged or compounded each day until the end of the period. ISDA has indicated that derivatives will fall back to this kind of average, and the SOFR floating rate notes issued recently use a similar approach. To facilitate this method, the New York Fed is preparing to produce a backward-looking compounded average alongside the daily SOFR.

<https://www.newyorkfed.org/newsevents/speeches/2019/he1190226>

- ▶ Secured Overnight Finance Rates (SOFR) es *benchmark* alternativo (pero es overnight, en tanto LIBOR era O/N hasta 1y)
- ▶ Es un repo-rate overnight colateralizado con letras del Tesoro de USA
- ▶ Basado en transacciones reales, aprox. 1 trillion USD por día
- ▶ Como las transacciones subyacentes están colateralizadas la tasa es casi *risk-free*

Reemplazo de LIBOR

Country	LIBOR Rate	New Risk-Free Rate	Transition Committee
United States	USD LIBOR	SOFR	Alternative Reference Rates Committee
United Kingdom	GBP LIBOR	SONIA	Sterling Working Group on Risk-Free Rates
Japan	TIBOR, JPY LIBOR and Euroyen TIBOR	TONA	Cross-Industry Committee on Japanese Yen Interest Rate Benchmarks
Europe	EURIBOR and EUR LIBOR	ESTER	European Money Markets Institute (EMMI) and Euro RFR Working Group
Canada	CDOR	CORRA	Canadian Alternative Reference Rate Working Group (CARR)
Switzerland	CHF LIBOR	SARON	The National Working Group on Swiss Franc Reference Rates
Australia	BBSW	RBA Cash Rate (AONIA)	Australian Financial Markets Association
Hong Kong	HIBOR	HONIA	Treasury Markets Association's Market Practices Committee

- ▶ La transición está programada para 2022
- ▶ SONIA es un-secured, O/N, sobre mercado líquido y activo.
- ▶ Euro short-term rate (ESTR) es O/N, también es casi una tasa risk-free

Bonos de Cupón Cero, Tasas Spot y Forward

Zero-Coupon Bonds

- ▶ Un bono es una forma *securitizada* de un préstamo.
- ▶ Los bonos son los instrumentos financieros principales en un mercado donde se comercie el valor tiempo del dinero.
- ▶ Un bono de cupón cero (*zero-coupon bond*, ZCB) con vencimiento en T (a.k.a. T-bond) es un contrato que le garantiza al poseedor el derecho de recibir una unidad monetaria a ser pagada en el tiempo de madurez T , sin pago intermedio alguno.



- ▶ Siendo $P(t, T)$ el valor del bono a tiempo t vale (en ausencia de default)

$$P(t, T) > 0, \text{ si } t < T$$

$$P(T, T) = 1$$

$$P(t, T) = 0, \text{ si } t > T$$

$P(t, T)$ es diferenciable en T

(¿qué pasaría ante default?)

Tasas spot simple

El valor de un ZCB es la cantidad que nos permite medir en cada momento el valor de un pago futuro. Esta relación de dinero entre dos tiempos distintos (el settlement y el vencimiento) tiene una tasa implícita asociada.

Todas las tasas spot pueden ser definidas en términos de precios de ZCB.

Recíprocamente, los precios de los ZCB pueden recuperarse a partir de una estructura de tasas de interés dada (term-structure que vamos a ver mas adelante). Así, dado un mercado de ZCB, podemos construir toda la curva de tasas asociada en forma biunívoca.

La **tasa de interés spot simple** (anualizada) a tiempo t para un horizonte T , es la tasa de retorno implícita en el precio de un ZCB

$$F(t, T) \doteq \frac{1}{T-t} \frac{P(T, T) - P(t, T)}{P(t, T)} = \frac{1}{T-t} \left(\frac{1}{P(t, T)} - 1 \right)$$

da lugar a

$$P(T, T) = P(t, T)[1 + F(t, T)(T - t)]$$

Tasas spot compuesta

Del mismo modo, la **tasa de interés *spot* continuamente compuesta** para el período $[t, T]$ es el log-retorno del ZCB que vence en T

$$R(t, T) \doteq \frac{\ln P(T, T) - \ln P(t, T)}{T - t} = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}$$

da lugar a

$$P(T, T) = P(t, T) \exp [R(t, T)(T - t)]$$

Tasas spot instantánea

Tasas spot compuesta

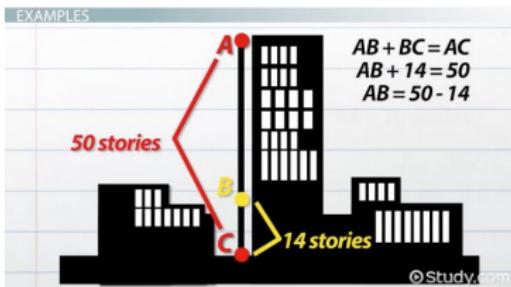
$$R(t, T) \doteq \frac{\ln P(T, T) - \ln P(t, T)}{T - t} = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}$$

Un préstamo por tiempo infinitesimal se realiza a la **tasa short instantánea**

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T)$$

Representa el yield de un bono que expira en un tiempo infinitesimal.... Existen bonos que expiran en un día pero no necesariamente representan las tasas de interés instantáneas. En la práctica debería tomarse como el yield de bonos líquidos cortos (e.g. $T = 1m$) como proxies de la tasa spot instantánea

Tasa Forward Simple



Postulado de suma de segmentos

Hacemos una inversión en t_0 , a tiempo S reinvertimos a la tasa vigente (a $t = S$) y en tiempo T cobramos la renta compuesta



$$N [1 + R(t_0, t_6)(t_6 - t_0)] = N + N R(t_0, t_3)(t_3 - t_0) + N R(t_3, t_6)(t_6 - t_3)$$

¿Está bien esta relación? Hoy es t_0 no t_3 , por lo tanto no conocemos $R(t_3, t_6)$... pero tenemos un buen estimador por no-arbitrage (tasas implícitas). El plazo $t_3 \rightarrow t_6$ comienza en el futuro, no podemos usar una tasa spot!

Tasa Forward Simple

La expresión correcta es

$$P(t_0, S) = P(t_0, T) [1 + F(t_0; S, T) (S - T)]$$

donde tasa implícita asociada al rendimiento de esta inversión se define **tasa forward simple (o simplemente compuesta)**

$$F(t_0; S, T) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t_0, S)}{P(t_0, T)} - 1 \right)$$

Esta tasa involucra tres puntos del tiempo: el momento en que se pacta la tasa (t_0), el momento en que se efectiviza el préstamo (S) y el vencimiento (T).

Así, el segundo término es el interés resultante de un préstamo forward a tiempo S y con horizonte T . Permite endeudarse en el futuro: si la inversión no ha de realizarse hasta dentro de varios períodos, se puede entrar en un contrato forward para endeudarse en el futuro, cuando se requieran los recursos para invertir.

En el límite se recupera la tasa spot simple

$$F(S; S, T) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(S, S)}{P(S, T)} - 1 \right) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{1}{P(S, T)} - 1 \right) \doteq F(S, T)$$

Tasa Forward Compuesta

Al igual que con las tasas spot, puede definirse la **tasa forward continuamente compuesta** como el log-retorno

$$R(t_0; S, T) = \frac{\ln(P(t_0, S)/P(t_0, T)) - \ln(1)}{S - T} = \frac{\ln P(t_0, S) - \ln P(t_0, T)}{S - T}$$

Cuando la duración del préstamo forward es muy pequeño obtenemos la **tasa forward instantánea**

$$f(t_0; T) = \lim_{T \rightarrow S^+} \frac{\ln P(t_0, S) - \ln P(t_0, T)}{S - T} = -\frac{\partial \ln P(t_0, T)}{\partial T}$$

Intuitivamente, la tasa forward instantánea $f(t_0; T)$ es una tasa forward a tiempo t para un préstamo futuro de muy corto plazo,

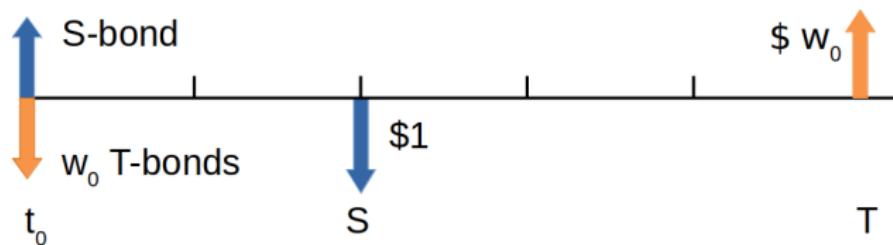
$$f(t_0, S) \simeq R(t_0, S, S + \delta T)$$

Lock-In de Tasa Forward Simple mediante ZCB

- ▶ Armamos un portafolio Π vendiendo en corto un S-bond y comprando $w_0 = P(t_0, S)/P(t_0, T)$ unidades de T-bond.
- ▶ El valor de este portfolio es

$$V_\Pi(t) = \frac{P(t_0, S)}{P(t_0, T)} P(t, T) - P(t, S)$$

Esta estrategia no tiene costo de entrada: $V_\Pi(t_0) = 0$



- ▶ El efecto neto de esta operación es la inversión forward de \$1 a tiempo S que resulta en un ingreso de $\$ \frac{P(t_0, S)}{P(t_0, T)}$ a tiempo T

Relación biunívoca entre ZCB y tasas

La definición de tasa spot simple conduce a la identidad

$$F(t_0, T) \doteq \frac{1}{T - t_0} \left(\frac{1}{P(t_0, T)} - 1 \right) \longleftrightarrow P(t_0, T) = \frac{1}{1 + F(t_0, T)(T - t_0)}$$

La definición de tasa spot compuesta conduce a la identidad

$$R(t_0, T) \doteq -\frac{\ln P(t_0, T)}{T - t_0} \longleftrightarrow P(t_0, T) = \exp[-R(t_0, T)(T - t_0)]$$

La definición de tasa forward instantánea conduce a la identidad

$$f(t_0, S) \doteq -\frac{\partial \ln P(t_0, T)}{\partial T} \longleftrightarrow P(t_0, T) = \exp \left[- \int_{t_0}^T f(t_0, u) du \right]$$

Por construcción todas estas relaciones son consistentes. Lo que establecen es una relación entre observables hoy (t_0) y tasas definidas en función de esos observables. **Pero no hay ninguna estocasticidad, no tienen ninguna utilidad para predecir** valores futuros (inciertos), e.g. $P(t, T)$, con $t > t_0$.