SISTEMAS BIOLÓGICOS
Práctica 2 - Poblaciones interactuantes

1. **Control de plagas**

   Un método de control de plagas o pestes consiste en liberar una cantidad de insectos estériles en una población. Si se mantiene una población n de insectos estériles en una población N de insectos fértiles, un modelo simple para la evolución de la población fértil es:
$$\frac{dN}{dt} = \left[\frac{aN}{N+n} - b\right] N - kN(N+n), \tag{1}$$
   donde $a > b > 0$ y $k > 0$ son parámetros constantes. Discutir las suposiciones subyacentes. Determinar el número crítico de insectos estériles n_c que erradicaría la peste, y mostrar que es menos de un cuarto de la capacidad de carga.

   Suponer que se hace sólo una suelta de insectos estériles, y que estos tienen la misma tasa de mortalidad que los fértiles. Escribir ecuaciones apropiadas para $N(t)$ y $n(t)$, y mostrar que no es posible erradicar una plaga con una sola suelta de estériles.

   Si una fracción γ de los insectos nace estéril, un modelo posible es:
$$\frac{dN}{dt} = \left[\frac{aN}{N+n} - b\right] N - kN(N+n), \qquad \frac{dn}{dt} = \gamma N - bn. \tag{2}$$
   Encontrar una condición sobre γ que asegura la erradicación de la plaga, y discutir el realismo del resultado.

2. **Competencia cíclica**

   Analizar el sistema que represneta un caso de competencia cíclica. Encontrar los estados estacionarios y estudiar su estabilidad
$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= n_1(1 - n_1 - \alpha n_2 - \beta n_3), \\ \frac{dn_1}{dt} &= n_2(1 - \beta n_1 - n_2 - \alpha n_3), \\ \frac{dn_3}{dt} &= n_3(1 - \alpha n_1 - \beta n_2 - n_3), \end{aligned} \tag{3}$$
   con $0 < \beta < 1 < \alpha$ y $\alpha + \beta > 2$

3. **Destrucción del hábitat y coexistencia**

   Analizar el modelo de coexistencia competitiva jerarquizado definido por:
$$\begin{aligned} \frac{dp_a}{dt} &= -c_a xy + e_a y - c_b xz + e_b z, \\ \frac{dp_b}{dt} &= c_a xy - e_a y + c_a zy, \\ \frac{dv}{dt} &= c_b xz - e_b z - c_a zy, \end{aligned} \tag{4}$$
   donde x representa la fracción de zonas vacías, y la de zonas ocupadas por el competidor superior (A) y z la de zonas ocupadas por el competidor inferior (B). Además, c_i son tasas de colonización y e_i son tasas de extinción de cada competidor. Finalmente, $x + y + z = h$, la fracción de zonas habitables. Estudiar los distintos comportamientos como función de h, y en particular construir un diagrama de fases con las fracciones A y B en función de h.

4. **Metapoblaciones de presa y depredador**

   Formular y analizar un modelo de presa-depredador en base a ecuaciones metapoblacionales

5. **Ecuación de Fisher en Dominios acotados**

   La ecuación de Fisher se puede escribir de manera general como
$$\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} + au(\xi) - bu^2(\xi) = 0. \tag{5}$$
   Nos interesa resolver esta ecuación con condiciones de contorno de Dirichlet en un recinto de ancho $2w$,

   Las soluciones de (5) se pueden escribir en términos de ecuaciones de Jacobi elípticas. Se sabe que $y = \mathrm{sn}^2(\xi, k)$ satisface
$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + 4\left(1 + k^2\right) y - 6k^2 y^2 = 2. \tag{6}$$

Podemos proponer

$$u_i\left(\xi\right) = \alpha\,\mathrm{sn}^2\left(\beta\xi+\delta,k\right)+\gamma, \tag{7}$$

y obtener $\alpha,\beta,\delta,\gamma$ derivando (7). Por consideraciones de simetría, el máximo de $u_i\left(\xi\right)$ debe estar en $\xi=0$, y esto nos permite evaluar δ como la mitad del período de sn^2.

Usando propiedades de estas funciones podemos escribir (7) como

$$u_i\left(\xi\right) = \alpha\,\mathrm{cd}^2\left(\beta\xi,k\right)+\gamma, \tag{8}$$

Derivando (8) dos veces, y usando propiedades de las funciones elípticas, sustituyendo en (5), tenemos:

$$\begin{aligned} 4\beta^2(k^2+1)-a+2b\gamma &= 0,\\ 6k^2\beta^2-b\alpha &= 0,\\ 2\alpha\beta^2(1-k^2)+\gamma(a-\gamma b) &= 0. \end{aligned}$$

Y podemos obtener mediante álgebra

$$\gamma = \alpha\left[\frac{-\left(k^2+1\right)+\sqrt{1-k^2+k^4}}{3k^2}\right].$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\tfrac{3a}{2b}\right)k^2\left(1-k^2+k^4\right)^{-1/2}\\ \beta^2 &= \left(\tfrac{a}{4}\right)\left(1-k^2+k^4\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{9}$$

La solución ahora es

$$u_i\left(\xi\right) = (a/b)\left[\,f_\alpha\left(k\right)\mathrm{cd}^2\left(\sqrt{a}f_\beta\left(k\right)\xi,k\right)+f_\gamma\left(k\right)\right] \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f_\alpha\left(k\right) &= (3/2)\,k^2\left(k'^2+k^4\right)^{-1/2}\\ f_\beta\left(k\right) &= (1/2)\left(k'^2+k^4\right)^{-1/4}\\ f_\gamma\left(k\right) &= (1/2)\left[1-\left(k^2+1\right)\left(k'^2+k^4\right)^{-1/2}\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Donde $k'^2=1-k^2$.

Mediante esta expresión obtenida usando las condiciones de borde

$$\begin{aligned} &\mathrm{cn}^2\left(\left(a/4\right)\left(1-k^2+k^4\right)^{-1/2}w/\sqrt{D},k\right) = \\ &\frac{\left[\left(\left(k^2+1\right)-\left(1-k^2+k^4\right)^{1/2}\right)(1-k^2)\right]}{k^2(2-k^2+(1-k^2+k^4)^{1/2})}. \end{aligned} \tag{12}$$

y

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{a}{b}\left[\,f_\alpha\left(k\right)+f_\gamma\left(k\right)\right]\\ &= \frac{a}{2b}\left(k^2-\,k'^2+(k'^2+k^4)^{1/2}\right)(k'^2+k^4)^{-1/2} \end{aligned} \tag{13}$$

podemos hallar el máximo de la función u_m en base a los parámetros hallados.

La dependencia del pico con k está en (13) mientras que la dependencia del ancho del dominio $2w$ respecto de k se obtiene invirtiendo (12)

$$\begin{aligned} w &= \tfrac{\sqrt{D}}{(a/4)(1-k^2+k^4)^{-1/2}}\\ &\mathrm{cn}^{-1}\left(\left(\tfrac{\left[\left(\left(k^2+1\right)-\left(1-k^2+k^4\right)^{1/2}\right)(1-k^2)\right]}{k^2(2-k^2+(1-k^2+k^4)^{1/2})}\right)^{1/2}|k\right). \end{aligned} \tag{14}$$