SISTEMAS BIOLÓGICOS 2017

Trabajo práctico 4

1. Las células obtienen energía de los hidratos de carbono mediante un proceso bioquímico llamado *glicólisis*. En experimentos de laboratorio se observa que la glicólisis procede de manera oscilatoria. Un modelo sencillo, adimensionalizado, del fenómeno, es el siguiente[1]:

$$\dot{x} = -x + ay + x^2 y, \tag{1}$$
$$\dot{y} = b - ay - x^2 y, \tag{2}$$

donde x es la concentración de ADP (difosfato de adenosina) mientras que y es la de F6p (fructosa-6-fosfato). Los parámetros a y b son positivos. Grafique las nulclinas e identifique los equilibrios. Analize la dirección en que fluyen las trayectorias en la región alrededor del equilibrio. ¿Existe una región acotada del espacio de fases, alrededor del equilibrio, donde el flujo sea sólo *entrante* por la frontera? En tal caso, esa región atrapa el flujo de una región extensa. ¿Puede asegurarse que en su interior existe una órbita periódica? Encuentre las condiciones que deben satisfacer a y b para que, efectivamente, exista una oscilación. Resuelva numéricamente el sistema y muestre el ciclo límite y órbitas cercanas en el espacio de fases.

2. Considere el sistema

$$\dot{\theta}_1 = a - \sin\theta_1 + k\cos(\theta_2 - \theta_1), \tag{3}$$
$$\dot{\theta}_2 = a + \sin\theta_2 + k\cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{4}$$

donde $a, k \leq 0$. Encuentre y clasifique todos los puntos fijos. Muestre que, si a es suficientemente grande, el sistema tiene soluciones periódicas en el toro. ¿Qué tipo de bifurcación crea estas soluciones periódicas? Encuentre la curva en el espacio (a, k) en donde aparecen estas soluciones periódicas.[2]

3. Resuelva numéricamente el sistema de osciladores de fase acoplados

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{k}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i), \tag{5}$$

---

[1] E. E. Sel'kov, *Self-oscillations in glycolysis: A simple kinetic model*, Eur. J. Biochem. **4**, 79 (1968).

[2] La generalización de este sistema para muchas fases es un modelo de ondas de densidad de carga, Stogatz et al., PRL **61**, 2380 (1988) y Physica D **36**, 23 (1989).

para $N \approx 5$ osciladores. Grafique la fase y la frecuencia de todos ellos en función del tiempo (bueno, la fase no hace falta), y verifique que, para cada conjunto de frecuencias naturales ω_i, un acoplamiento k suficientemente fuerte produce la sincronización de fases (o sea, las frecuencias se hacen todas iguales). Verifique, cambiando las frecuencias naturales, que la frecuencia de sincronización es el promedio de las frecuencias naturales.[3]

[3] Bellamente implementado en B. Altunkaynak, *Synchronization of Coupled Phase Oscillators*, http://demonstrations.wolfram.com/SynchronizationOfCoupledPhaseOscillators.