SISTEMAS BIOLÓGICOS
Práctica 1 - Modelos de una sola población

1. Considerar un mapeo logístico con retraso

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left[1 - \frac{N(t-T)}{K}\right]. \tag{1}$$

Resolver numéricamente el sistema, utilizando diversos valores de los parámetros y las condiciones iniciales. (Por ejemplo, $T = 1$, $K = 10$, $r = 0.3$, 1.2 y 2.0, y con $N(t) = 2$, $\; -T < t \leq 0$.) Observar la existencia de los distintos regímenes: monótono, oscilatorio amortiguado y oscilatorio sostenido. Verificar la validez de los resultados obtenidos analíticamente de manera aproximada:

$$N(t) \approx 1 + c\, e^{\frac{\epsilon t}{1+\pi^2/4}} e^{it\left[1 - \frac{\epsilon\pi}{2(1+\pi^2/4)}\right]}, \tag{2}$$

donde T es un poco mayor que el valor crítico $T_c = \pi/2r$, $T = T_c + \epsilon$. Verificar que tanto la amplitud de las oscilaciones es independiente de la condición inicial, como que su período es independiente de r y aproximadamente $4T$.

2. Dada una especie con ciclo de vida anual, por ejemplo un insecto, en la que cada individuo produce r descendientes y luego muere. La población evoluciona de acuerdo a:

$$N_{t+1} = r\, N_t. \tag{3}$$

Simular el sistema, suponiendo que r obedece a una distribución de Poisson con media 1.7, comenzando con un solo individuo, y observar lo que pasa.

3. Considerar una población de animales costeros, que viven entre las líneas de mareas alta y baja ("intertidal"). Estas poblaciones son particularmente vulnerables al efecto de tormentas severas, que las afectan de distinto modo según su intensidad y el estado de la marea. Supongamos que puede modelar el sistema mediante una evolución determinista entre eventos desastrosos que ocurren al azar:

   (a) Crecimiento logístico entre desastres: $\dot{N} = rN(1 - N/K)$.

   (b) Si ocurre un desastre a tiempo t, inmediatamente la población se ve reducida en una fracción p: $N(t^+) = pN(t)$.

   (c) Los tiempos entre desastres siguen una distribución exponencial con media $1/\lambda$ (es decir la ocurrencia de desastres es un proceso de Poisson, con tasa λ).

Analizar el comportamiento del sistema y encontrar una condición que caracterice la posibilidad del sistema de recuperarse de un desastre.

4. **Efecto Allee**

El efecto Allee da cuenta de un fenómeno, descripto por W.C. Allee, asociado a la existencia de un número crítico mínimo de individuos para garantizar la supervivencia de la especie. Se supone que a partir de cierto umbral, el tamaño poblacional es tan reducido que los individuos no se reproducen al no encontrarse con otros individuos de la misma población. Una manera de modelar este efecto es por medio de la siguiente ecuación.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left[1 - \frac{N}{K}\right]\left[\frac{N}{A} - 1\right]. \tag{4}$$

Analizar sus equilibrios y la estabilidad de los mismos. Qué la hace diferente de la logística?

5. **Modelo Beverton Holt**

El modelo Beverton - Holt es un mapeo cuya solución es análoga a la de la ecuación logística. El mapeo tiene la forma

$$N_{t+1} = \frac{R_0 N_t}{1 + N_t/M}. \tag{5}$$

y su solución es

$$N_t = \frac{KN_0}{N_0 1 + (K - N_0)R_0^{-t}}. \tag{6}$$

con $K = (R_0 - 1)M$

Buscar los puntos de equilibrio y estudiar la solución numéricamente.