SISTEMAS BIOLÓGICOS 2017

Trabajo práctico 3

1. Considere un modelo estocástico de una población con sólo nacimientos, y analice el tiempo necesario para que alcance $n = 1000$ individuos, t_{1000}. Realice 1000 simulaciones y construya un histograma que represente la distribución probabilidad de t_{1000}. Hágalo para una tasa de natalidad $r = 1$, y tres condiciones iniciales, $n_0 = 1$, 5 y 100. Observe que, naturalmente, los valores medios son diferentes; pero también las varianzas. ¿Por qué?[1]

2. El siguiente sistema[2] representa la dinámica poblacional de una especie sometida a una cosecha (o recolección, o caza):

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - cf(x), \tag{1}$$

donde c es una tasa de recolección, y $f(x)$ una función fenomenológica que representa la dependencia de esta actividad con la población. En general, es una función que crece lentamente desde $f(0) = 0$ (si hay poco, cosecho poco), y satura cuando $x \to \infty$. Sin pérdida de generalidad, y para permitir algún cálculo analítico de quien así lo prefiera, tomemos:

$$f(x) = \frac{x(t)^2}{x(t)^2 + 1}. \tag{2}$$

Analice el comportamiento de esta población cuando se la somete a distintas tasas de recolección. Es decir, estudie el comportamiento del equilibrio x^* con la tasa c, para distintos valores de K (grafique $x^*(c)$ para varios K). Observe los distintos regímenes. Interprete los fenómenos que se observan para K chico o grande (por ejemplo, K entre 1 y 30, $c = 0 \ldots 10$). ¿Cuántos equilibrios hay? ¿Cuántas cuencas de atracción? ¿Qué pasa cuando se incrementa c lentamente desde 0? ¿Qué pasa cuando, intentando desfacer el entuerto, se lo reduce?[3]

La variable x puede representar también una variable abiótica, tal como el fósforo u otro nutriente en un lago. Se obtienen conclusiones similares, con una "catástrofe" que separa un régimen oligotrófico (bueno para los bichos del lago) de uno eutrófico (malo). Imagine lo que podría pasar en el Lago Nahuel Huapi cuando falle el Colector Cloacal.

---

[1] Referencia: Renshaw, *Modelling population dynamics in space and time.*

[2] Referencia: *Catastrophic shifts in ecosystems*, Scheffer: Nature, **413**, 591-596 (2001).

[3] Se trata de una *transición de primer orden* (es decir, discontinua), con biestabilidad y un fenómeno de *histéresis*, similar a la transición termodinámica líquido-vapor.

3. Considere un sistema con reproducción y competencia intraespecífica, del tipo:

$$A \xrightarrow{b} A + A$$
$$A + A \xrightarrow{d} 0$$

Simule la evolución de la población usando el algoritmo de Gillespie. Usando distintos valores de las tasas b y d observe los distintos comportamientos, tanto transitorios como asintóticos. Para una elección de b y d que permita un estado estacionario positivo (por ejemplo, $b = 0{,}3$, $d = 0{,}01$ da un valor medio estacionario $\langle x \rangle = 30$), use múltiples realizaciones para calcular la distribución estacionaria $P(x)$. Para una elección de b y d que lleve a la extinción, use múltiples realizaciones para calcular la distribución del tiempo de extinción.

4. Considere el sistema de la figura, que muestra una pequeña red de expresión genética con dos genes que interactúan mediante activación y represión. Escriba las ecuaciones cinéticas para las concentraciones de los mRNA y de las proteínas. Analice los equilibrios y la dinámica del sistema. Puede usar expresiones genéricas para las funciones g de activación y represión. Puede usar aproximaciones para esclavizar algunas variables a otras para simplificar el análisis. ¿Existe algún régimen de oscilaciones de los productos A y B?