Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesina de Licenciatura en Matemática

Dinámica de Operadores Lineales en el Espacio de Hardy de Series de Dirichlet

Matías Andrés Palumbo

Director: Luis Santiago Muro

Codirector: Rodrigo Cardeccia

16 de octubre de 2024

Para Max,
mi compañero para siempre

Agradecimientos

Soy lo que soy y estoy donde estoy gracias a una mezcla mística y caótica de personas y sucesos. Algunos de estos sucesos pueden encontrarse en mi galería de fotos, otros en mi CV, otros en ambos, y otros en algún otro lado. En cuanto a las personas, muchas están cerca mío en el día a día y pueden dar fe de su participación en la mezcla mística en cuestión, pero aún así dejo por escrito algunas observaciones.

Gracias a mi familia, a mamá, papá, Belu y Martu por acompañarme desde el día cero.

Gracias a Ema, Sol, Clara y Emma por la buena onda constante.

Gracias a mis amigos matemáticos Diego, Val y Clara, por estar a lo largo de la carrera y durante todas las crisis existenciales que surgieron en el proceso.

Gracias a mis amigos científicos de la computación Ine, Kathy, Joa, Seba, Cata y Sofi, por ser parte del comienzo de esta aventura universitaria, y por seguir siendo parte al día de hoy.

Gracias a Santi y Rocha por la oportunidad de realizar este trabajo (y por toda su ayuda durante el proceso), y gracias al jurado por la revisión y correcciones.

Gracias a todos los compañeros con quienes compartí esta experiencia, y gracias a todos los profesores de la facultad de quienes tuve el placer de aprender.

Índice general

Introducción

La dinámica de operadores lineales, concebida como línea de investigación en 1982 con la tesis doctoral de Kitai [K82], consiste en el estudio de propiedades topológicas de las órbitas de operadores lineales, es decir, en el estudio de los conjuntos resultantes de componer el operador con sí mismo una cantidad infinita de veces. Si bien la dinámica en espacios de dimensión finita es previsiblemente simple, la situación es completamente diferente al analizar espacios de dimensión infinita. En este tipo de espacios, operadores aparentemente simples pueden derivar en comportamientos contraintuitivamente caóticos al iterar su aplicación.

El objetivo de esta tesina es analizar la dinámica de los operadores de multiplicación y composición en espacios de series de Dirichlet, esto es, series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

con coeficientes complejos. Estos operadores están asociados a una función particular φ (que naturalmente debe verificar ciertas propiedades de clausura dadas por el espacio) de manera que a cada elemento f se le asigna el elemento φf (en el caso de los operadores de multiplicación) ó $f \circ \varphi$ (en operadores de composición).

Una cuestión importante que abarcamos refiere a la íntima relación entre las series de Dirichlet y las series de potencias formales en infinitas variables, donde las finitas variables complejas $(z_1, \ldots, z_n)$ son reemplazadas por sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y los multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ (para cada $n \in \mathbb{N}$) toman el lugar de los índices usuales presentes en las series de potencias de funciones analíticas. La relación entre las series de Dirichlet y estas series de potencias se da a través de la descomposición en factores primos de los índices en las series de Dirichlet. Concretamente, esta identificación está enmarcada en un operador ideado por Harald Bohr [B13] en el siglo XX y comúnmente denominado *transformada de Bohr*. La transformada de Bohr será de suma importancia en la prueba de varios de los resultados originales incluidos en esta tesina.

En el Capítulo 1, comenzamos con un repaso de los temas del análisis funcional más relevantes en el resto del trabajo. Esto incluye resultados básicos sobre espacios normados, de Banach y de Hilbert, así como también una introducción a los espacios vectoriales topológicos y espacios de Fréchet. El capítulo termina con las nociones elementales de la dinámica de operadores lineales, donde introducimos los conceptos de operador hipercíclico y operador caótico. Estas son las dos propiedades que estudiaremos en los operadores de multiplicación y composición más adelante.

El Capítulo 2 se dedica a presentar el trasfondo teórico de los temas que atraviesa esta tesina. Concretamente, las series de Dirichlet, funciones holomorfas en infinitas variables y su relación vía la transformada de Bohr. Enunciamos además propiedades útiles de los espacios de Hardy en el polidisco $\mathbb{D}^n$, así como también ciertos espacios análogos de series de Dirichlet y series de potencias formales.

Los Capítulos 3 y 4 son el núcleo central de la tesina. En el Capítulo 3 analizamos los operadores de multiplicación hipercíclicos y caóticos en el espacio de Hilbert $\mathfrak{P}_2$ de series de potencias en infinitas variables. Utilizamos resultados existentes en finitas variables (como por ejemplo, resultados de Godefroy y Shapiro [GS91]) para dar una caracterización original de estos operadores en el espacio en cuestión. Adicionalmente, damos una caracterización similar en el espacio de Hilbert $\mathscr{H}_2$ de series de Dirichlet, siendo la transformada de Bohr una herramienta crucial.

El Capítulo 4 se avoca al estudio de los operadores de composición en $\mathscr{H}_2$. Presentamos en detalle una caracterización de estos operadores probada originalmente por Gordon y Hedenmalm [GH99] y refinada por Queffélec y Seip [QS15]. Luego de caracterizar estos operadores, presentamos un resultado de Bayart [B04] donde se analiza su hiperciclicidad.

Se incluye también una sección con comentarios finales, donde se mencionan algunos interrogantes abiertos que presentan oportunidades para trabajo futuro.

Capítulo 1

Preliminares

Detallamos a continuación los tipos de espacios más importantes con los que trataremos. Comenzamos con los conceptos más elementales, a partir de los cuales construimos espacios más sofisticados (como los espacios de Fréchet) con propiedades que resultarán útiles más adelante.

1.1. Espacios Normados

Comencemos recordando la noción de espacio métrico. Las demostraciones que se omiten en esta sección pueden encontrarse en [BS10].

Definición 1.1. Un **espacio métrico** es un conjunto X junto con una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ (denominada **métrica** o **distancia**) que verifica lo siguiente:

1. d es *conmutativa*, es decir, $d(x, y) = d(y, x)$ para $x, y \in X$,
2. d es *no degenerada*, es decir, $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
3. d verifica la *desigualdad triangular*, es decir, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para $x, y, z \in X$.

Se suele notar mediante el par (X, d) al espacio métrico dado por el conjunto X y la distancia d.

Definición 1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es **convergente** si existe $x \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ de manera que $d(x_n, x) < \varepsilon$ si $n \geq N$. En dicho caso, se dice que la sucesión **converge** a x.

Una sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una **sucesión de Cauchy** si dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $m, n \geq N$.

Definición 1.3. Un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente. En dicho caso, se dice que d es una **métrica completa**.

Teorema 1.4. *Todo subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo.*

Demostración. Sea S es un subespacio cerrado de un espacio métrico completo (X, d). Consideremos una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S. Como X es completo, la sucesión es convergente en X, y como S es cerrado el límite está en S. Por lo tanto, toda sucesión de Cauchy en S converge a un elemento de S, por lo que S es completo. $\square$

Uno de los teoremas más importantes válidos en espacios métricos completos es el *Teorema de Categorías de Baire*, el cual, como veremos más adelante, tiene útiles consecuencias en la teoría de operadores lineales acotados.

Teorema 1.5. *(Teorema de categorías de Baire) Sea (X, d) un espacio métrico completo. Luego, toda intersección numerable de conjuntos abiertos y densos es densa.*

Los *espacios normados* son casos particulares de espacios métricos que admiten una noción de "distancia al origen".

Definición 1.6. Un **espacio normado** consiste de un espacio vectorial X sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (en nuestro caso $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) junto con una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, denominada **norma**, que verifica lo siguiente:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$ (*subaditividad*),
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$.

Definición 1.7. Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una función $p : X \to \mathbb{R}$ es una **seminorma** en X si verifica lo siguiente:

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para cada $x, y \in X$,
2. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ para cada $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,

Claramente toda norma es una seminorma, y sus propiedades nos permiten probar rápidamente lo siguiente.

Proposición 1.8. *Sea X un espacio vectorial y p una seminorma en X. Luego:*

1. $p(0) = 0$.

2. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ *para cada* $x, y \in X$.

3. $p(x) \geq 0$ *para cada* $x \in X$.

Demostración. Para cualquier $x \in X$, calculamos

$$p(0) = p(0x) = 0p(x) = 0.$$

Por otro lado, dado $y \in X$, por subaditividad tenemos que

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y),$$

es decir, $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$. Intercambiando x por y obtenemos la segunda propiedad.

Por último, fijando $y = 0$ y aplicando el ítem anterior obtenemos $0 \leq |p(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. $\square$

Observación 1.9. En vista de las propiedades anteriores, todo espacio normado tiene estructura de espacio métrico definiendo la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$ para $x, y \in X$. Decimos que la topología de este espacio métrico es *inducida por la norma*. La función norma es continua con respecto a esta topología, ya que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon$ tal que si $\|x - y\| < \delta$ entonces, de la Proposición 1.8 obtenemos

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \varepsilon.$$

Más aún, se puede ver que las operaciones asociadas al espacio vectorial (concretamente, la suma $+ : X \times X \to X$ y el producto por escalar $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$) son continuas considerando a la topología producto en $X \times X$.

1.1.1. Operadores Lineales Acotados

Detallamos los conceptos básicos de la teoría de operadores lineales acotados, ya que serán necesarios en los Capítulos 3 y 4 cuando estudiemos operadores puntuales.

Definición 1.10. Sean X e Y espacios normados con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente. Un operador lineal $A : X \to Y$ es **acotado** si existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\|A(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \tag{1.1}$$

para todo $x \in X$. La **norma de operador** de A se define por

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Es decir, $\|A\|$ es la menor constante que verifica la ecuación (1.1).

El conjunto de operadores lineales acotados entre dos espacios normados X e Y forma un espacio vectorial, el cual notamos por $\mathcal{L}(X, Y)$. Además, como pudo haber indicado la terminología, la función que a cada operador lineal acotado A le asigna la norma $\|A\|$ es una norma en $\mathcal{L}(X, Y)$ (es decir, $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio normado). También se suele notar $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Teorema 1.11. *Sean X e Y espacios normados, y $A : X \to Y$ un operador lineal. Luego, son equivalentes:*

1. *A es acotado.*
2. *A es continuo.*
3. *A es continuo en $x = 0$.*

1.1.2. Espacios de Banach

Definición 1.12. Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo, es decir, un espacio normado tal que la métrica inducida por la norma es completa.

Un **álgebra de Banach** es un espacio de Banach X junto con una operación bilineal asociativa (denominada **producto**) que verifica

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

para cada $x, y \in X$. El álgebra se dice **unitaria** si existe $0 \neq e \in X$ tal que $ex = xe = x$ para cada $x \in X$. Un elemento $x \in X$ es **invertible** si existe $y \in X$ tal que $xy = yx = e$.

Algunos ejemplos clásicos de espacios de Banach son los siguientes:

- $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con las normas euclídeas.
- Los espacios ℓ^p de sucesiones p-sumables ($1 \leq p < \infty$), con la norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

  para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. El espacio de Banach ℓ^∞ de sucesiones acotadas se define a través de la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

- El espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ de funciones continuas en un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$) equipado con la norma

$$\|f\| = \max_{x\in\mathbb{K}^n} |f(x)|.$$

- El espacio $L^p(S)$ de funciones p-integrales sobre S, junto con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

  El espacio $L^\infty(S)$ de funciones esencialmente acotadas en S también es un espacio de Banach. Si S es de medida positiva, está equipado con la norma

$$\|f\|_\infty = \operatorname{sup\,ess} |f| = \inf\{C \geq 0 \,:\, |f(x)| \leq C \text{ para casi todo } x\}.$$

El Teorema de Categorías de Baire (Teorema 1.5) es fundamental en la demostración de los siguientes resultados clásicos en la teoría de operadores lineales acotados entre espacios de Banach.

Teorema 1.13. *Sean X e Y espacios de Banach, y $A : X \to Y$ un operador lineal acotado sobreyectivo. Luego, A es una aplicación abierta, es decir, $A(U)$ es abierto para cada abierto U en X.*

Teorema 1.14. *Sean X e Y espacios de Banach, y $A : X \to Y$ un operador lineal acotado biyectivo. Luego, el operador inverso A^{-1} es acotado.*

Teorema 1.15. *Sean X e Y espacios de Banach y $A : \mathrm{dom}(A) \to Y$ un operador lineal, donde $\mathrm{dom}(A) \subset X$ es un subespacio vectorial de X. Luego, A es acotado si y solo si el conjunto*

$$\mathrm{graf}(A) = \{(x, A(x)) \in X \times Y \,:\, x \in \mathrm{dom}(A)\},$$

*denominado **gráfico** de A, es un subespacio vectorial cerrado de $X \times Y$.*

Teorema 1.16. *Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach. Luego, $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach con la norma de operador.*

Definición 1.17. Dado un espacio normado X, el **espacio dual** de X es el espacio de Banach $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, el cual notamos por X^*. Llamamos **funcional lineal** (acotado) a cada elemento de X^*.

Definición 1.18. Sean X e Y espacios normados y $A : X \to Y$ un operador lineal acotado. Dado $y^* \in Y^*$, el **operador dual** de A, denotado $A^* : Y^* \to X^*$, se define a través de la expresión $A^*y^* = y \circ A$, es decir,

$$A^*(y^*)(x) = y^*(A(x))$$

para cada $x \in X$.

Teorema 1.19. *Sea X un espacio de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal acotado. Luego, el operador dual A^* es acotado, y $\|A^*\| = \|A\|$.*

1.1.3. Espacios de Hilbert

Ciertos espacios normados admiten estructura adicional a través de una operación denominada *producto interno*. Esta operación permite dar sentido a la noción de ortogonalidad entre elementos del espacio, y, en caso de tratarse de un espacio de Banach, existe una fuerte relación entre el espacio y su espacio dual.

Definición 1.20. Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Un **producto interno** sobre X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ que verifica lo siguiente, dados $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
5. $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

Un **espacio con producto interno** es un espacio vectorial que admite un producto interno.

Observación 1.21. Todo espacio con producto interno tiene estructura de espacio normado a través de la norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lema 1.22. *Sea X un espacio con producto interno y sean $x, y \in X$. Luego, x e y satisfacen la* ***desigualdad de Cauchy-Schwarz***

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Observación 1.23. El producto interno es continuo con respecto a la topología inducida por la norma. En efecto, si $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ en X, de la continuidad de la norma $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ e $\|y_n\| \longrightarrow \|y\|$. Luego, aplicando la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz calculamos

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y \rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n \rangle - \langle x, y_n - y \rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\ &= \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Al ser convergente, la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por cierta constante $M > 0$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2M}$ y $\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ si $n > N$. En dicho caso tenemos

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|M + \|x\|\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y así $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$.

Como mencionamos antes, podemos dar una noción de *ortogonalidad* en un espacio vectorial arbitrario con producto interno.

Definición 1.24. Sea X un espacio con producto interno. Dos elementos $x, y \in X$ son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$.

Definición 1.25. Un **espacio de Hilbert** es un espacio con producto interno completo.

Claramente todo espacio de Hilbert H es un espacio de Banach. La propiedad célebre de los espacios de Hilbert yace en la existencia de una identificación entre los elementos de H y los funcionales lineales continuos en H (es decir, los elementos del espacio dual H^*).

Teorema 1.26. *(Teorema de Representación de Riesz) Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Para cada funcional lineal acotado $f \in H^*$ existe un único vector $v_f \in H$ tal*

$$f(x) = \langle x, v_f\rangle$$

para cada $x \in H$. Más aún, $\|v_f\| = \|f\|$.

Observación 1.27. Los operadores duales $A^* : H^* \to H^*$ en espacios de Hilbert se suelen denominar *operadores adjuntos.* A través de la identificación que provee el Teorema de Representación de Riesz, estos operadores verifican

$$\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

para cada $x, y \in H$.

Definición 1.28. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador lineal acotado $A \in \mathcal{L}(H)$ es **unitario** si $A^*A = AA^* = I$. Es decir, si $A^* = A^{-1}$.

1.2. Espacios Vectoriales Topológicos

Los *espacios vectoriales topológicos* generalizan a los espacios normados y a su vez mantienen ciertas propiedades interesantes.

Definición 1.29. Un **espacio vectorial topológico** es un espacio vectorial X junto con una topología τ de manera que:

1. Todo conjunto de la forma $\{x\}$, con $x \in X$, es cerrado,
2. Las operaciones asociadas al espacio vectorial (suma y producto por escalar) son continuas con respecto a τ.

La primera condición es fundamental para probar que, por ejemplo, todo espacio vectorial topológico es Hausdorff. Se puede puede consultar [R91] para un análisis más detallado de los espacios vectoriales topológicos.

Observación 1.30. En un espacio vectorial topológico X, dado $a \in X$ podemos definir el **operador de traslación** $T_a(x) = a + x$ asociado a a. Similarmente, dado $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo definimos el **operador de multiplicación** $M_\lambda(x) = \lambda x$ asociado a λ. Estos operadores son biyectivos, con inversas dadas por T_{-a} y $M_{\frac{1}{\lambda}}$ respectivamente. Más aún, de la continuidad de las operaciones en X podemos afirmar que son homeomorfismos de X en sí mismo.

Esto último tiene una consecuencia interesante: todo espacio vectorial topológico es *invariante por traslaciones* (o simplemente *invariante*). Esto es, $E \subset X$ es abierto si y solo si $a + E = \{a + x : x \in E\}$ es abierto para cada $a \in X$. En otras palabras, la topología del espacio queda completamente determinada por cualquier base local en algún punto. En este caso, los abiertos del espacio serán precisamente las uniones de traslaciones de elementos de dicha base local.

Definición 1.31. Sea X un espacio vectorial topológico sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una **base de Schauder** en X es una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tales que para todo $x \in X$ existe una única sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ de manera que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n b_n.$$

Teorema 1.32. *Sea X un espacio vectorial topológico con base de Schauder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Luego, los operadores lineales dados por*

$$P_N\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n b_n,$$

con $n \in \mathbb{N}$, son continuos y están uniformemente acotados en norma por cierta constante $C > 0$.

Corolario 1.33. *Sea X un espacio vectorial topológico con base de Schauder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para $n \in \mathbb{N}$, sea b_n^* el **funcional coordenado** de la componente n-ésima, es decir, el funcional lineal que a cada $x \in X$ le asigna la coordenada asociada a b_n. Luego, b_n^* es continuo.*

Demostración. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, aplicando la desigualdad triangular y utilizando la constante $C > 0$ dada en el Teorema 1.32, calculamos

$$\begin{aligned} |b_n^*(x)|\|b_n\| &= |\alpha_n|\|b_n\| \\ &= \|\alpha_n b_n\| \\ &= \|P_n(x) - P_{n-1}(x)\| \\ &\leq \|P_n(x)\| + \|P_{n-1}(x)\| \\ &\leq 2C\|x\|. \end{aligned}$$

Es decir, b_n^* es acotado y $\|b_n^*\| \leq \frac{2C}{\|b_n\|}$. □

1.2.1. Espacios de Fréchet

Ciertas familias de seminormas sobre un espacio vectorial X nos permiten generar topologías convenientes sobre el espacio. Las familias numerables de seminormas son de particular interés, dando lugar a los denominados *espacios de Fréchet.*

Definición 1.34. Un espacio vectorial topológico X es **localmente convexo** si existe una base local del origen con elementos convexos.

Definición 1.35. Se dice que una familia $\mathcal{P}$ de seminormas sobre un espacio vectorial X **separa puntos** si para cada $0 \neq x \in X$ existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.

Definición 1.36. Dado un espacio vectorial topológico X sobre $\mathbb{K}$, para $A \subset X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ definimos

$$\lambda A = \{\lambda a \,:\, a \in A\}.$$

Un subconjunto $E \subset X$ es **acotado** si para cada entorno V del origen existe $s > 0$ tal que $E \subset tV$ para todo $t > s$. E es **balanceado** si $\lambda E \subset E$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, con $|\lambda| \leq 1$.

Teorema 1.37. *Sea X un espacio vectorial topológico. Luego:*

1. *Todo entorno del origen contiene un entorno balanceado del origen.*
2. *Todo entorno convexo del origen contiene un entorno convexo y balanceado del origen.*

Teorema 1.38. *Sea $\mathcal{B}$ una base local de un espacio vectorial topológico X con elementos convexos y balanceados. Luego, para cada $B \in \mathcal{B}$ existe una seminorma continua p_B tal que $B = \{x \in X \,:\, p_B(x) < 1\}$. Más aún, la familia $\{p_B \,:\, B \in \mathcal{B}\}$ separa puntos.*

Teorema 1.39. *Sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas que separa puntos sobre un espacio vectorial X. Para cada $p \in \mathcal{P}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto*

$$V(p,n) = \left\{x \in X \,:\, p(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Sea $\mathcal{B}$ la colección de intersecciones finitas de los conjuntos $V(p,n)$. Luego, $\mathcal{B}$ es una base local convexa en el origen para una topología τ en X de manera que X es un espacio localmente convexo, y además se verifica lo siguiente:

1. *Cada seminorma $p \in \mathcal{P}$ es continua,*
2. *Un subconjunto $E \subset X$ es acotado si y solo si todo $p \in \mathcal{P}$ es acotada en E.*

Decimos que la topología τ en X es ***generada*** *por la familia de seminormas $\mathcal{P}$.*

Definición 1.40. Una métrica d sobre un espacio vectorial X (es decir, una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica las propiedades de la Definición 1.1) es **invariante** si

$$d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Definición 1.41. Un F**-espacio** es un espacio vectorial topológico cuya topología es inducida por una métrica completa e invariante.

Observación 1.42. Los Teoremas 1.13 y 1.15 siguen siendo válidos en el caso de operadores lineales entre F-espacios (considerando la noción de continuidad dada por la topología de los F-espacios en lugar de la noción de operador acotado).

Definición 1.43. Un **espacio de Fréchet** es un F-espacio localmente convexo.

Teorema 1.44. *Un espacio vectorial topológico X es un espacio de Fréchet si y solo si su topología es generada por una familia numerable de seminormas y el espacio es completo con respecto a esta familia.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio vectorial topológico cuya topología τ es generada una familia numerable de seminormas, llamémosla $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. De las propiedades de la seminorma, tenemos que toda bola de la forma

$$B_n(x,r) = \{y \in X \,:\, p_n(x-y) < r\},$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $r > 0$, es un conjunto convexo. Por lo tanto, X es localmente convexo.

Consideremos ahora la función $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ definida de la siguiente manera:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}. \tag{1.2}$$

Veamos que d es una métrica en X. Primero que nada, claramente $d(x,y)$ es conmutativa y absolutamente convergente para todo $x, y \in X$. Además, dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, como X es Hausdorff existen elementos básicos disjuntos de τ (considerando la base dada por el Teorema 1.39 y la Observación 1.30) que contienen a x e y respectivamente. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n(x-y) > 0$ y por lo tanto $d(x,y) > 0$.

Por otro lado, consideremos la función $f(t) = \frac{t}{1+t}$ en $\mathbb{R}^+$. Su derivada es $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$, por lo que f es creciente. Luego, dados $x, y, z \in X$, de la subaditividad de las seminormas p_n tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} &\le \frac{p_n(x-z)+p_n(z-y)}{1+p_n(x-z)+p_n(z-y)} \\
&= \frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)+p_n(z-y)} + \frac{p_n(z-y)}{1+p_n(x-z)+p_n(z-y)} \\
&\le \frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)} + \frac{p_n(z-y)}{1+p_n(z-y)}.
\end{aligned}$$

Esto, en conjunto con la convergencia absoluta en todo punto de la serie definida en la ecuación (1.2), nos permite obtener que

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(z-y)}{1+p_n(z-y)} \\
&= d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}$$

Por último, notemos que d es invariante por definición. En base a esto y lo anterior, X es un espacio vectorial topológico localmente convexo que admite una métrica completa e invariante, es decir, X es un espacio de Fréchet.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio de Fréchet. Consideremos una métrica completa e invariante en X que induce una topología τ. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea U_n un entorno convexo y balanceado del origen contenido en $B(0, \frac{1}{n})$ (cuya existencia nos asegura el Teorema 1.37). Utilizando los Teoremas 1.38 y 1.39, obtenemos una base local convexa y balanceada para τ, con la cual podemos construir una familia numerable $\mathcal{P}$ de seminormas continuas que generan una topología τ' en X.

Resta ver que $\tau = \tau'$. En efecto, como p es τ-continua para toda $p \in \mathcal{P}$, tenemos que

$$V(p, k) = p^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{n}\right) \in \tau'.$$

Es decir, $\tau' \subset \tau$. Recíprocamente, dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $U_n = V(p, 1)$ para cierta seminorma $p \in \mathcal{P}$, y por lo tanto $U_n \in \tau$. Luego $\tau \subset \tau'$, quedando probado el teorema. $\square$

Algunos ejemplos de espacios de Fréchet son los siguientes:

- El espacio $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones complejas, donde la k-ésima seminorma está dada por
$$p_k((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = |z_k|.$$
- El espacio $H(\mathbb{C})$ de funciones enteras junto con las seminormas
$$p_k(f) = \sup\{|f(z)| \,:\, |z| \leq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1.3. Operadores Hipercíclicos

Las principales propiedades que estudiamos de la dinámica de operadores lineales son las nociones de *hiperciclicidad* y *caoticidad*, introducidas a continuación. Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [BM09] y [GEP11].

Definición 1.45. Sea X un espacio vectorial topológico sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (nuevamente, en nuestro caso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, la **T-órbita** de $x \in X$ es el conjunto

$$O(x, T) = \{T^n(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

donde T^n refiere a la composición de T con sí mismo n veces.

El operador T es **hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que la órbita $O(x, T)$ es densa en X. En dicho caso, se dice que el vector x es **hipercíclico** para T. El conjunto de todos los vectores hipercíclicos para T se nota por $HC(T)$.

Notemos que el espacio X debe ser separable para que tenga sentido la noción de hiperciclicidad. Más aún, de acuerdo al siguiente teorema no vamos a encontrar ningún operador hipercíclico en espacios (no triviales) de dimensión finita.

Teorema 1.46. *Sea $X \neq \{0\}$ un espacio vectorial topológico de dimensión finita. Luego, no existen operadores hipercíclicos sobre X.*

Demostración. Supongamos que T es un operador hipercíclico en $\mathbb{K}^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in HC(T)$. Luego, $\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$ es un conjunto linealmente independiente (pues en caso contrario el subespacio generado por $O(x, T)$ tendría dimensión menor que n y no podría ser denso). Por lo tanto, $\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$.

Por otro lado, para cada $\alpha > 0$, existe una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $T^{n_k}(x) \longrightarrow \alpha x$ si $k \longrightarrow \infty$. Luego $T^{n_k}(T^i(x)) = T^i(T^{n_k}(x)) \longrightarrow \alpha T^i(x)$ para cada $i < n$, y como $\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$ es base obtenemos que $T^{n_k}(z) \longrightarrow \alpha z$ para todo $z \in \mathbb{K}^n$. Por lo tanto, el determinante de la matriz asociada a T^{n_k} tiende a α^n, esto es, el determinante de αI, la matriz asociada a la transformación $z \mapsto \alpha z$.

De lo anterior, podemos concluir que para todo $\alpha > 0$ existe una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$|\det(T^{n_k})| = |\det(T)^{n_k}| = |\det(T)|^{n_k} \longrightarrow \alpha^n$$

si $k \longrightarrow \infty$. Es decir, el conjunto $\{|\det(T)|^k : k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}^+$, una clara contradicción. $\square$

Otro ejemplo de operadores no hipercíclicos son los operadores contractivos en espacios de Banach. Esto es, aquellos operadores $T \in \mathcal{L}(X)$ tales que $\|T\| \leq 1$. En efecto, para cualquier vector $x \in X$ podemos calcular rápidamente

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|x\|.$$

Es decir, la órbita $O(x,T)$ no puede aproximar a ningún vector de norma mayor a $\|x\|$, por lo que T no puede ser hipercíclico.

Esta observación tiene como consecuencia inmediata el siguiente resultado:

Proposición 1.47. *Sea X un espacio de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Luego, $\|T\| > 1$.*

Si bien la noción de operador hipercíclico está bien definida en cualquier espacio vectorial topológico, en adelante vamos a suponer que el espacio en cuestión es un F-espacio (separable).

Presentamos algunas herramientas útiles para probar la hiperciclicidad de un operador.

Teorema 1.48. *(Criterio de transitividad de Birkhoff) Sea X un F-espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$. Luego, son equivalentes:*

1. *T es hipercíclico.*
2. *T es **topológicamente transitivo**, es decir, para cada par de abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Corolario 1.49. *Sea X un F-espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador invertible. Luego, T es hipercíclico si y solo si T^{-1} es hipercíclico.*

Definición 1.50. Sea $f : E \to E$ una función continua sobre un espacio métrico (E,d). Se dice que $x \in E$ es un **punto periódico** de f si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Notamos por $\mathrm{Per}(f)$ al conjunto de puntos periódicos de f.

Definición 1.51. Sea $f : E \to E$ una función continua sobre un espacio métrico (E,d). Luego, f es **caótica** (en el sentido de Devaney [D21]) si:

1. f es topológicamente transitiva,
2. $\mathrm{Per}(f)$ es denso.

Observación 1.52. Del Teorema 1.48, todo operador caótico es hipercíclico.

Teorema 1.53. *(Criterio de Godefroy-Shapiro) Sea X un F-espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si los conjuntos*

$$\bigcup_{|\lambda|<1} \ker(T - \lambda I) \qquad y \qquad \bigcup_{|\lambda|>1} \ker(T - \lambda I)$$

generan un subespacio denso en X, entonces T es hipercíclico. Si además el conjunto

$$\bigcup_{\lambda \in e^{2\pi i \mathbb{Q}}} \ker(T - \lambda I)$$

genera un subespacio denso en X (donde $e^{2\pi i \mathbb{Q}}$ denota el conjunto de raíces de la unidad), entonces T es caótico.

En otras palabras, el Teorema 1.53 establece que si un operador tiene "muchos" autovalores tanto pequeños como grandes en módulo (o autovalores lo suficientemente "independientes" como para generan un subespacio denso), entonces el operador necesariamente debe ser hipercíclico. Si además el operador tiene "muchos" autovectores asociados a autovalores que son raíces de la unidad, el operador resulta caótico.

Introducimos ahora el concepto de *cuasifactores*. Esencialmente, los cuasifactores son aplicaciones que en cierto sentido relacionan operadores en diferentes espacios. A través de ellos podremos probar automáticamente propiedades de dinámica de un operador, dado que el operador relacionado también verifique la propiedad.

Definición 1.54. Sean X y X_0 espacios topológicos, y sean $T : X \to X$ y $T_0 : X_0 \to X_0$ funciones continuas. Se dice que T_0 es un **cuasifactor** de T si existe una función continua $J : X \to X_0$ con imagen densa tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \big\downarrow J & & \big\downarrow J \\ X_0 & \xrightarrow{T_0} & X_0 \end{array}$$

conmuta, es decir, $T_0 \circ J = J \circ T$. Si J es un homeomorfismo, se dice que T y T_0 son **factores** o **topológicamente conjugadas**, y en dicho caso $T = J^{-1} \circ T_0 \circ J$.

Si los espacios tienen estructura de manera que T y T_0 son operadores lineales, y J puede elegirse lineal, se dice que T_0 es un **cuasifactor lineal** de T. En dicho caso, si J es un homeomorfismo se dice que T y T_0 son **linealmente conjugadas**.

Observación 1.55. Como mencionamos antes, la utilidad de la Definición 1.54 yace en que la hiperciclicidad se preserva a través de cuasifactores lineales. En efecto, si T_0 es un cuasifactor lineal de T y x es un vector hipercíclico para T, tenemos que

$$J(O(x,T)) = \{JT^n(x) \, : \, n \in \mathbb{N}\} = \{T_0^n(J(x)) \, : \, n \in \mathbb{N}\} = O(J(x), T_0).$$

Como J es continua y $O(x,T)$ es denso, $J(x)$ resulta ser un vector hipercíclico para T_0.

Los cuasifactores también preservan caoticidad: si suponemos que $\mathrm{Per}(T)$ es denso en X y consideramos $x \in \mathrm{Per}(T)$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(x) = x$, luego

$$T_0^k(J(x)) = JT^k(x) = J(x),$$

es decir $J(x) \in \mathrm{Per}(T_0)$. Esto significa que $J(\mathrm{Per}(T)) \subset \mathrm{Per}(T_0)$, y por lo tanto $\mathrm{Per}(T_0)$ es denso en X_0.

Capítulo 2

Series de Dirichlet y Funciones Holomorfas

2.1. Series de Dirichlet

El principal concepto matemático con el que tratamos en esta tesina es el de la *serie de Dirichlet*. Estudiadas en primer lugar por, naturalmente, Dirichlet, estas series son de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Las *series de Dirichlet generales* incluyen como caso particular a las series de Dirichlet, y son aquellas series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números reales no negativos, que además tiende al infinito. Si $\lambda_n = \log(n)$ estamos ante una serie de Dirichlet regular.

Inicialmente, Dirichlet solo consideró valores reales para la variable s. El matemático Johan Jensen fue quien publicó los primeros resultados donde las series de Dirichlet generales eran vistas como funciones en el plano complejo, comenzando a desbloquear su potencial y dando inicio a una línea de investigación profundamente interesante con fuertes implicaciones en la teoría analítica de números.

El primer interrogante que surge en el estudio de las series de Dirichlet refiere a su región de convergencia. Como un primer ejemplo relacionado, recordemos que toda serie de potencias converge en discos, y el máximo disco en el cual la serie converge es también el máximo disco en el cual converge absolutamente (y el máximo disco tal que la serie converge uniformemente en cualquier disco de radio menor). El cambio de variable $z = e^{-s}$ nos permite comparar las series de potencias en la variable e^{-s} con las series de Dirichlet generales con coeficientes $\lambda_n = n$. Si $s = \sigma + it$, bajo este cambio de variable tenemos

$$e^{-\sigma}e^{-it} = e^{-s} = z = |z|e^{i\arg(z)}.$$

Esto quiere decir que el cambio de variable transforma $|z|$ en $e^{-Re(s)}$. Luego, si z pertenece a un disco de radio r entonces $|z| = e^{-Re(s)} < r$, o equivalentemente $Re(s) > -\log(r)$. Es decir, el cambio $z = e^{-s}$ transforma series de potencias convergentes en discos en series de Dirichlet generales (con $\lambda_n = n$) convergentes en semiplanos de la forma $Re(s) > \theta$. Además, los semiplanos maximales de convergencia, convergencia absoluta y convergencia uniforme coinciden. Llamamos *abscisa* al valor θ que define a un semiplano de la forma $Re(s) > \theta$.

Volviendo al interrogante sobre la región de convergencia de las series de Dirichlet, vemos que si bien estas series también convergen en semiplanos de la forma $Re(s) > \theta$, las abscisas que definen semiplanos de convergencia absoluta y uniforme no siempre coinciden con la abscisa del semiplano de convergencia de la serie. La siguiente definición da inicio a nuestro estudio sobre la convergencia de las series de Dirichlet.

El contenido de este capítulo, a menos que se especifique lo contrario, puede encontrarse en [DGMS19].

Definición 2.1. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, definimos

$$\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} \, : \, Re(s) > \theta\}.$$

También solemos notar $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}_0$.

Notamos por $\mathscr{D}$ al conjunto de todas las series de Dirichlet. Dada $f \in \mathscr{D}$, la **abscisa de convergencia** de f es

$$\sigma_c(f) = \text{ínf}\{\theta \in \mathbb{R} \, : \, f \text{ converge en } \mathbb{C}_\theta\}.$$

Observación 2.2. La abscisa de convergencia de una serie de Dirichlet f no necesariamente es finita. Si f es convergente en todo $\mathbb{C}$ tenemos que $\sigma_c(f) = -\infty$, mientras que si f diverge en todo punto tenemos $\sigma_c(f) = \infty$.

El siguiente lema es clave en la prueba de existencia de la abscisa de convergencia para toda serie de Dirichlet.

Lema 2.3. *Sea $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$. Si una serie de Dirichlet $f \in \mathscr{D}$ converge en $s_0 \in \mathbb{C}$, luego converge en la región*

$$\{s \in \mathbb{C} \, : \, Re(s) > Re(s_0), \; |\arg(s - s_0)| < \alpha\},$$

donde consideramos $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$.

Demostración. Primero que nada, recordemos la fórmula de Abel para números $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, donde si $A_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = A_N b_N + \sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k-1}).$$

Sea $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, y supongamos que $s_0 = 0$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, dado $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n \right| \leq \varepsilon \cos(\alpha)$$

si $N_0 \leq N < M$. Consideremos ahora $s = \sigma + it$ en el conjunto angular

$$S = \{s \in \mathbb{C} \,:\, Re(s) > 0,\ |\arg(s)| < \alpha\}.$$

De la fórmula de Abel tenemos que

$$\sum_{n=N}^{M} a_n n^{-s} = \left(\sum_{n=N}^{M} a_n\right) M^{-s} + \sum_{n=N}^{M-1} \left(\sum_{k=N}^{n} a_k\right) \left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right),$$

y luego

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n n^{-s}\right| \leq \varepsilon \cos(\alpha) M^{-\sigma} + \sum_{n=N}^{M-1} \varepsilon \cos(\alpha) |n^{-s} - (n+1)^{-s}|.$$

Notemos además que

$$|n^{-s} - (n+1)^{-s}| = \left|\int_n^{n+1} \frac{s}{x^{s+1}} dx\right| \leq \int_n^{n+1} \frac{|s|}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{|s|}{\sigma}(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}).$$

Combinando las últimas dos desigualdades obtenemos

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n n^{-s}\right| \leq \varepsilon \cos(\alpha) \frac{|s|}{\sigma} \left(M^{-\sigma} + \sum_{n=N}^{M-1} (n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma})\right) = \varepsilon \cos(\alpha) \frac{|s|}{\sigma} N^{-\sigma}.$$

Observando que $\frac{\sigma}{|s|} = \cos(\arg(s)) \geq \cos(\alpha)$, concluimos que para cada $s \in S$ vale

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n n^{-s}\right| \leq \varepsilon N^{-\sigma} < \varepsilon,$$

quedando probada la convergencia si $s_0 = 0$.

Si $s_0 \neq 0$, de lo probado recién tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(u+s_0)}$, convergente en $u = 0$, resulta convergente uniformemente en el conjunto angular $S = \{s \in \mathbb{C} \,:\, Re(u) > 0,\ |\arg(u)| < \alpha\}$. Mediante el cambio de variable $s = u + s_0$ vemos que

$$S = \{s \in \mathbb{C} \,:\, Re(s) > Re(s_0),\ |\arg(s - s_0)| < \alpha\}$$

y que f converge uniformemente en S, como queríamos probar. $\square$

Teorema 2.4. *Si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D}$ es una serie de Dirichlet no divergente en todo punto, luego $\sigma_c(f) < \infty$, f converge en el semiplano $\mathbb{C}_{\sigma_c(f)} = \{s \in \mathbb{C} \,:\, Re(s) > \sigma_c(f)\}$ y f diverge en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} \,:\, Re(s) < \sigma_c(f)\}$. Además, la función límite*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

es holomorfa en $\mathbb{C}_{\sigma_c(f)}$.

Demostración. Si f converge en $s_0 = \sigma_0 + it_0$ luego converge en el semiplano $\mathbb{C}_\theta$ para cualquier $\theta > \sigma_0$. En efecto, cualquier elemento de $\mathbb{C}_\theta$ está contenido en alguna región angular con centro en s_0, y el Lema 2.3 nos asegura la convergencia en esta región. Es decir, existe un semiplano donde f converge puntualmente, y por lo tanto existe la abscisa de convergencia.

Similarmente, cualquier conjunto compacto contenido en un semiplano de convergencia de f está contenido en alguna región angular en donde f converge uniformemente por el Lema 2.3. Esto implica que las sumas parciales de f, que son funciones holomorfas, convergen uniformemente en compactos contenidos en semiplanos de convergencia, y por lo tanto f es holomorfa allí. □

Definición 2.5. Sea $f \in \mathscr{D}$. La **abscisa de convergencia absoluta** de f es

$$\sigma_a(f) = \text{ínf}\{\theta \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ converge absolutamente en } \mathbb{C}_\theta\}.$$

Observación 2.6. Notemos que si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D}$, $\sigma_a(f)$ no es más que $\sigma_c(g)$, donde

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-s}.$$

Nos preguntamos ahora cómo se relacionan las abscisas de convergencia y convergencia absoluta. En primer lugar, toda serie absolutamente convergente de funciones a valores complejos es convergente, por lo que para toda $f \in \mathscr{D}$ se verifica

$$-\infty \leq \sigma_c(f) \leq \sigma_a(f) \leq \infty.$$

En el siguiente resultado vemos que, si bien estas abscisas no necesariamente coinciden, no puede haber una distancia arbitrariamente larga entre ellas.

Teorema 2.7. *Para cada $f \in \mathscr{D}$ se verifica $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$. Más aún,*

$$\sup\{\sigma_a(f) - \sigma_c(f) \,:\, f \in \mathscr{D}\} = 1.$$

Demostración. Sea $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D}$, y supongamos que f converge en $s_0 = \sigma_0 + it$. Luego, la sucesión $(|a_n n^{-s_0}|)_{n\in\mathbb{N}} = (|a_n| n^{-\sigma_0})_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por cierta constante $M > 0$, y para cada $\varepsilon > 0$ se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n n^{-(s_0+1+\varepsilon)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-(\sigma_0+1+\varepsilon)} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\varepsilon} < \infty.$$

Es decir, $\sigma_a(f) \leq \sigma_0 + 1 + \varepsilon$, y de la arbitrariedad de ε y s_0 obtenemos

$$\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1.$$

Resta encontrar una serie de Dirichlet f que verifique $\sigma_a(f) = \sigma_c(f) + 1$. Consideremos

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}.$$

Esta serie no es convergente en $s = 0$. En cambio, si $s \in \mathbb{R}^+$ la sucesión $(n^{-s})_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, por lo que $f(s)$ es convergente y luego $\sigma_c(f) = 0$.

Por otro lado, analizar la convergencia absoluta de f no es más que analizar la convergencia de la función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Esta serie es claramente divergente para $s = 1$ y converge en $\mathbb{C}_1$, por lo que $\sigma_a(f) = 1$.
□

La tercera abscisa que nos interesa en el estudio de las series de Dirichlet refiere a la convergencia uniforme en semiplanos.

Definición 2.8. Sea $f \in \mathscr{D}$. La **abscisa de convergencia uniforme** de f es

$$\sigma_u(f) = \text{ínf}\{\theta \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ converge uniformemente en } \mathbb{C}_\theta\}.$$

Similarmente a la relación entre las abscisas de convergencia y convergencia absoluta, para toda serie de Dirichlet f tenemos $\sigma_c(f) \leq \sigma_u(f)$. Por otro lado, si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, para $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}$ y $M > N$ (con $M, N \in \mathbb{N}$) calculamos

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n n^{-(\sigma_a(f)+\varepsilon+it)} \right| \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n| n^{-(\sigma_a(f)+\varepsilon)}. \tag{2.1}$$

La serie en el lado derecho de la desigualdad es convergente, y por lo tanto de Cauchy. Además, dado $s \in \mathbb{C}_{\sigma_a(f)+\varepsilon}$, la desigualdad

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n n^{-s} \right| \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n| n^{-\sigma_a(f)-\varepsilon}$$

implica que la sucesión en el lado izquierdo de (2.1) es uniformemente de Cauchy en $\mathbb{C}_{\sigma_a(f)+\varepsilon}$. De la arbitrariedad de ε, f converge uniformemente en todo semiplano de la forma $\mathbb{C}_\theta$, con $\theta > \sigma_a(f)$, es decir, $\sigma_u(f) \leq \sigma_a(f)$.

En resumen, toda serie de Dirichlet f verifica

$$-\infty \leq \sigma_c(f) \leq \sigma_u(f) \leq \sigma_a(f) \leq \infty. \tag{2.2}$$

El Teorema 2.7 en conjunto con la ecuación (2.2) nos aseguran que la distancia entre la abscisa de convergencia y convergencia uniforme de una serie de Dirichlet es a lo sumo 1. Es decir,

$$\sup\{\sigma_u(f) - \sigma_c(f) \,:\, f \in \mathscr{D}\} \leq 1.$$

Más aún, al igual que con la convergencia absoluta, esta cota es ajustada.

Teorema 2.9.

$$\sup\{\sigma_u(f) - \sigma_c(f) \,:\, f \in \mathscr{D}\} = 1.$$

Este resultado puede parecer contraintuitivo, ya que el Lema 2.3 asegura la convergencia uniforme de una serie de Dirichlet en toda región angular contenida en algún semiplano de convergencia. La dificultad de la demostración del Teorema 2.9 consiste en encontrar una serie de Dirichlet f que desafíe esta intuición y no converja uniformemente en ningún semiplano $\mathbb{C}_\theta$, con $\sigma_c(f) < \theta \leq \sigma_c(f) + 1$. Una serie con esta característica resulta ser

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathfrak{p}_n^{-s},$$

donde $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de los números primos. Los detalles de la demostración pueden encontrarse en [DGMS19].

La relación entre las abscisas de convergencia uniforme y absoluta de una serie de Dirichlet es mucho más difícil de descifrar. Bohr se dedicó por años a analizar el valor exacto del supremo

$$S = \sup\{\sigma_a(f) - \sigma_u(f) \,:\, f \in \mathscr{D}\}.$$

De lo visto anteriormente, claramente $S \leq 1$. El valor exacto resulta ser incluso menor.

Teorema 2.10.
$$\sup\{\sigma_a(f) - \sigma_u(f) \,:\, f \in \mathscr{D}\} = \frac{1}{2}.$$

El proceso mediante el cual Bohr encuentra el valor de S es altamente no trivial e incluye en su desarrollo varios resultados profundos en la teoría de series de Dirichlet. Si bien a continuación presentamos uno de estos resultados (que será de utilidad en los siguientes capítulos), para un análisis más profundo puede consultarse [DGMS19], donde se dedica gran parte del texto a presentar en detalle la demostración del Teorema 2.10.

El resultado en cuestión que presentamos relaciona la convergencia uniforme de una serie de Dirichlet con ciertas propiedades de la función holomorfa que define. Con el fin de enunciarlo, introducimos una nueva abscisa.

Definición 2.11. Sea $f \in \mathscr{D}$. La **abscisa de acotación** de f es

$$\sigma_b(f) = \text{ínf}\{\theta \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ está acotada en } \mathbb{C}_\theta\}.$$

Como una primera observación, notemos que $\sigma_b(f) \leq \sigma_u(f)$ para cada $f \in \mathscr{D}$. En efecto, si $\theta > \sigma_u(f)$, $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ y $N \in \mathbb{N}$, luego

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-Re(s)} \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-\theta}.$$

Es decir, toda suma parcial de la serie f está acotada en $\mathbb{C}_\theta$. Como f converge uniformemente en $\mathbb{C}_\theta$, esto implica que la función límite $f(s)$ está acotada en $\mathbb{C}_\theta$ y por lo tanto $\sigma_b(f) \leq \theta$. De la arbitrariedad de θ concluimos que $\sigma_b(f) \leq \sigma_u(f)$.

Bohr demostró que estas abscisas coinciden en cualquier caso. La clave para probar esto yace en el siguiente resultado, ampliamente conocido como el Teorema de Bohr.

Teorema 2.12. *Sea $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet no divergente en todo punto tal que su función límite se extiende analíticamente a una función acotada en $\mathbb{C}_+$. Luego, f converge uniformemente en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, es decir, $\sigma_u(f) \leq 0$.*

Teorema 2.13. *Para cada $f \in \mathscr{D}$ se verifica $\sigma_b(f) = \sigma_u(f)$.*

Demostración. Sea $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathscr{D}$. Suponemos que la serie converge en algún punto, pues en caso contrario $\sigma_u(f) = \sigma_b(f) = \infty$. Habiendo visto que $\sigma_b(f) \leq \sigma_u(f)$, resta robar que $\sigma_u(f) \leq \sigma_b(f)$.

Sea $\theta > \sigma_b(f)$. Luego f está acotada en $\mathbb{C}_\theta$, y por lo tanto la función

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s-\theta} = f(s+\theta),$$

claramente convergente, está acotada en $\mathbb{C}_+$. Del Teorema 2.12, g converge uniformemente en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, y equivalentemente f converge en $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$. Esto implica que $\sigma_u(f) \leq \theta$, y de la arbitrariedad de θ tenemos que $\sigma_u(f) \leq \sigma_b(f)$. □

Es posible definir el producto de dos series de Dirichlet formales, dándole cierta estructura de álgebra a $\mathscr{D}$. Este producto está dado mediante la fórmula

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{mn=k} a_n b_m\right) k^{-s}.$$

El Teorema 2.13 nos permite probar que el producto de dos series de Dirichlet uniformemente convergentes en un semiplano es también converge uniformemente en dicho semiplano.

Proposición 2.14. *Sean $f, g \in \mathscr{D}$. Luego, $\sigma_u(fg) \leq \max\{\sigma_u(f), \sigma_u(g)\}$.*

Demostración. Notemos $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$. Veamos primero que $\sigma_a(fg) \leq \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$.

Sea $\theta > \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$ y $s \in \mathbb{C}_\theta$. Notamos por $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de sumas parciales del producto fg tomando módulo en cada término, esto es,

$$S_N = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{mn=k} |a_n b_m|\right) |k^{-s}|.$$

Claramente esta sucesión es creciente, y además está acotada. En efecto,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{mn\leq N} |a_n n^{-s}||b_m m^{-s}| \\ &\leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} |a_n n^{-s}||b_m m^{-s}| \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n n^{-s}|\right)\left(\sum_{m=1}^{N} |b_m m^{-s}|\right) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n n^{-s}|\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m m^{-s}|\right) < \infty. \end{aligned}$$

De lo anterior, la expresión en serie de Dirichlet de fg converge absolutamente en $\mathbb{C}_\theta$, y luego en dicho semiplano se verifica

$$\begin{aligned} (fg)(s) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{mn=k} a_n b_m\right) k^{-s} \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right) \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{-s}\right) \\ &= f(s)g(s). \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\sigma_u(fg) \leq \text{máx}\{\sigma_u(f), \sigma_u(g)\}$. Sea $\varepsilon > 0$, y consideremos $\vartheta = \text{máx}\{\sigma_u(f), \sigma_u(g)\} + \varepsilon$. Luego, del Teorema 2.13 f y g están acotadas en $\mathbb{C}_\theta$. Esto, en conjunto con la igualdad $(fg)(s) = f(s)g(s)$ válida en $\mathbb{C}_\theta$, implica que fg tiene una expresión como serie de Dirichlet que se extiende analíticamente a una función acotada en $\mathbb{C}_\theta$. Aplicando el teorema Teorema 2.12 a la función $h(s) := (fg)(s + \vartheta)$ obtenemos que $\sigma_u(h) \leq 0$, y por lo tanto $\sigma_u(fg) \leq \vartheta$. De la arbitrariedad de ε concluimos que $\sigma_u(fg) \leq \text{máx}\{\sigma_u(f), \sigma_u(g)\}$.

□

2.1.1. Unicidad de Coeficientes

Las series de Dirichlet generales también poseen abscisas de convergencia, convergencia uniforme y convergencia absoluta, las cuales notamos de igual manera que en el caso de las series de Dirichlet usuales (se puede consultar [HR15] para un análisis más detallado). La existencia de una abscisa de convergencia absoluta es la clave del siguiente lema, que a su vez nos permite probar la unicidad de coeficientes en el desarrollo de toda serie de Dirichlet general convergente en algún punto.

Lema 2.15. *Sea $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ una serie de Dirichlet general no divergente en todo punto, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_k = 0$ si $k < m$ (es decir, podemos escribir $f(s) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$). Luego, $e^{\lambda_m s} f(s) \longrightarrow a_m$ uniformemente si $Re(s) \longrightarrow \infty$.*

Demostración. Sea $\theta > \sigma_a(f)$. Si $s \in \mathbb{C}_\theta$ obtenemos

$$e^{\lambda_m s} f(s) = a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{(\lambda_m - \lambda_n)s}.$$

Recordemos que por definición $\lambda_n > \lambda_m$ si $n > m$. Luego

$$|a_n e^{(\lambda_m - \lambda_n)s}| \leq |a_n e^{(\lambda_m - \lambda_n)\theta}|.$$

Además, como $\theta > \sigma_a(f)$, la serie

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n e^{(\lambda_m - \lambda_n)\theta}|$$

converge para θ suficientemente grande. Por lo tanto, del test M de Weierstrass tenemos que la serie

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n e^{(\lambda_m - \lambda_n)s}| = \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| e^{(\lambda_m - \lambda_n)Re(s)}$$

converge uniformemente en $\mathbb{C}_\theta$. Notando que para cada $n > m$, $a_n e^{(\lambda_m - \lambda_n)s} \longrightarrow 0$ uniformemente si $Re(s) \longrightarrow \infty$, concluimos que vale el límite

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| e^{(\lambda_m - \lambda_n)x} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \lim_{x \to \infty} |a_n| e^{(\lambda_m - \lambda_n)x} = 0$$

con $x \in \mathbb{R}^+$. Luego,

$$e^{\lambda_m s} f(s) = a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{(\lambda_m - \lambda_n)s} \longrightarrow a_m$$

uniformemente si $Re(s) \longrightarrow \infty$. □

Teorema 2.16. *Los coeficientes en el desarrollo una serie de Dirichlet general no divergente en todo punto son únicos. Es decir, si f es una serie de Dirichlet general no divergente en todo punto de manera que*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta_n s},$$

luego:

1. *Si $\alpha_n = \beta_m$ entonces $a_n = b_m$.*
2. *Si no existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_m$, entonces $a_n = 0$.*
3. *Si no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_m$, entonces $b_m = 0$.*

Demostración. Sea f una función holomorfa con dos desarrollos como serie de Dirichlet general:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta_n s}.$$

Consideremos el menor entre los primeros coeficientes no nulos de cada expresión; llamémoslos a_{n_0} y b_{n_0}. Luego, $\alpha_{n_0} = \beta_{n_0}$. En efecto, si $\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}$ supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha_{n_0} < \beta_{n_0}$. Del Lema 2.15 tenemos que $e^{\alpha_{n_0} s} f(s) \longrightarrow a_{n_0}$ si $Re(s) \longrightarrow \infty$. Pero también

$$e^{\alpha_{n_0} s} f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(\alpha_{n_0} - \beta_n)s}. \tag{2.3}$$

Esta expresión tiende a 0 si $Re(s) \longrightarrow \infty$, ya que $\alpha_{n_0} < \beta_{n_0}$ (y luego $\alpha_{n_0} < \beta_n$ para cada $n > n_0$). Así, $a_{n_0} = 0$. Esto es una contradicción, y por lo tanto $\alpha_{n_0} = \beta_{n_0}$. En el caso $\alpha_{n_0} > \beta_{n_0}$ podemos multiplicar por $e^{\beta_{n_0} s}$ en lugar de $e^{\alpha_{n_0} s}$ en la ecuación (2.3), y obtenemos $b_{n_0} = 0$, nuevamente una contradicción. Continuando, aplicando nuevamente el Lema 2.15, de la unicidad del límite cuando $Re(s) \longrightarrow \infty$ también podemos concluir que $a_{n_0} = b_{n_0}$.

Consideremos ahora la función $f_1(s) = f(s) - a_{n_0} = f(s) - b_{n_0}$. Elegimos nuevamente el menor entre los primeros coeficientes no nulos en cada expresión para $f_1(s)$; llamémoslos α_{n_1} y β_{n_1}. Análogamente a lo anterior, tenemos que $a_{n_1} = b_{n_1}$ y $\alpha_{n_1} = \beta_{n_1}$.

Repetimos este proceso infinitas veces, en cada paso considerando la función $f_{k+1}(s) = f_k(s) - a_{n_k}$ $(k > 1)$. Así, obtenemos que los únicos coeficientes no nulos en ambas expresiones para $f(s)$ son exactamente aquellos a_n, b_m tales que $\alpha_n = \beta_m$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$, y en dicho caso $a_n = b_m$. Es decir, el desarrollo como serie de Dirichlet general para $f(s)$ es único. □

2.1.2. Algunos Espacios de Series de Dirichlet

Introducimos el espacio $\mathscr{H}_\infty$ de series de Dirichlet acotadas, que jugará un rol importante en el Capítulo 3.

Definición 2.17. Notamos por $\mathscr{H}_\infty$ al conjunto de series de Dirichlet convergentes en $\mathbb{C}_+$ cuya función límite es acotada. Es decir,

$$\mathscr{H}_\infty = \left\{ f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D} \,:\, f \text{ es convergente y acotada en } \mathbb{C}_+ \right\}.$$

Teorema 2.18. *$\mathscr{H}_\infty$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\|f\|_{\mathscr{H}_\infty} = \sup_{Re(s)>0} f(s).$$

Más aún, es un álgebra de Banach unitaria con el producto usual entre series de Dirichlet, y un elemento $f \in \mathscr{H}_\infty$ es invertible si y solo si $|f(s)| \geq \delta > 0$ para cierto $\delta > 0$ (o equivalentemente, si $a_1 \neq 0$).

Observación 2.19. El Teorema 2.12 nos permite dar una caracterización adicional de $\mathscr{H}_\infty$. Concretamente, supongamos que $f \in \mathscr{D}$ converge en algún semiplano $\mathbb{C}_\theta$ con $\theta > 0$, y se extiende analíticamente a una función g acotada en $\mathbb{C}_+$. Del Teorema 2.12 tenemos que $\sigma_u(f) \leq 0$, y además $f = g$ en $\mathbb{C}_+$ ya que son funciones analíticas que coinciden en $\mathbb{C}_\theta$. Por lo tanto, $f \in \mathscr{D}$. Esto quiere decir que una serie de Dirichlet f es un elemento de $\mathscr{H}_\infty$ si y solo si su función límite tiene una extensión analítica a una función acotada en $\mathbb{C}_+$ (aunque a priori solo converja en un semiplano estrictamente contenido en $\mathbb{C}_+$).

Otro espacio del que haremos uso, estudiado por Bonet [B18], es el espacio de series de Dirichlet uniformemente convergentes en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Es decir, el espacio compuesto por las series de Dirichlet $f \in \mathscr{D}$ tales que $\sigma_u(f) \leq 0$.

Definición 2.20. Notamos por $\mathscr{H}_\infty^+$ al conjunto de las series de Dirichlet uniformemente convergentes en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Observación 2.21. Del Teorema 2.13, toda serie $f \in \mathscr{H}_\infty$ está acotada en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Esto implica además que $\mathscr{H}_\infty \subset \mathscr{H}_\infty^+$.

Teorema 2.22. *$\mathscr{H}_\infty^+$ es un espacio de Fréchet con la topología generada por la familia de seminormas $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde*

$$p_n(f) = \sup_{s\in\mathbb{C}_{1/n}} |f(s)|.$$

Proposición 2.23. *$\mathscr{H}_\infty^+$ tiene una base Schauder dada por $\{n^{-s}\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

2.2. Funciones Holomorfas en Finitas Variables

Comenzamos el estudio de la teoría de funciones holomorfas recordando el caso de finitas variables. Las demostraciones omitidas en esta sección pueden encontrarse en [DGMS19].

Definición 2.24. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Una función $f : U \to \mathbb{C}$ es **holomorfa** si para cada $z \in U$ existe un vector $w_z \in \mathbb{C}^n$ de manera que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - w_z \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Se suele notar $\nabla f(z) := w_z$.

Observación 2.25. Al igual que en el caso de funciones diferenciables en varias variables reales, cada componente de una función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa como función de una variable compleja. En efecto, dado $(a_1, \ldots, a_n) \in U$ y $j \in \{1 \ldots, n\}$, basta considerar la función

$$f_j(z) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Es fácil ver que la Definición 2.24 implica que f_j es holomorfa en

$$\pi_j(U) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, (a_1, \ldots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in U\},$$

y además $f'(z) = \nabla f(a_1, \ldots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \ldots, a_n)$.

Definición 2.26. Sea $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, con $r_j > 0$ para $j = 1, \ldots, n$. Un **polidisco** n-dimensional es un conjunto de la forma

$$r\mathbb{D}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_j| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Una gran cantidad de resultados clásicos sobre funciones de una variable compleja se generalizan a funciones en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$. Presentamos algunos de los más importantes.

Teorema 2.27. *Toda función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ es continua.*

Demostración. Dada $f : U \to \mathbb{C}$, podemos definir la función

$$\rho(h) = \frac{f(z+h) - f(z) - \nabla f(z) \cdot h}{\|h\|}$$

para h suficientemente pequeño, y además $\rho(0) = 0$. Luego ρ es continua en $h = 0$, y

$$\lim_{h \to 0} f(z+h) - f(z) = \lim_{h \to 0} \rho(h)\|h\| + \nabla f(z) \cdot h = 0.$$

□

Teorema 2.28. *Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en $r\mathbb{D}^n$ que convergen uniformemente en compactos de $r\mathbb{D}^n$ a una función $f : r\mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$. Luego, f es holomorfa.*

Corolario 2.29. *El espacio $H_\infty(r\mathbb{D}^n)$ de funciones holomorfas y acotadas en $r\mathbb{D}^n$ es un espacio de Banach.*

El siguiente resultado refiere a la analiticidad de una función holomorfa en n variables, es decir, a la convergencia de cierta representación de la función como una serie de potencias (que también se denomina *serie monomial* al trabajar con más de una variable). Si bien las nociones de función holomorfa y analítica siguen siendo equivalentes en n variables, debemos cambiar ligeramente la notación, ya que los términos de la serie ahora estarán indexados en $\mathbb{N}_0^n$ en lugar de $\mathbb{N}_0$. Estos multiíndices se suelen notar por $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, y dado $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.

Teorema 2.30. *Una función $f : r\mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ (con $r = (r_1, \ldots, r_n)$) es holomorfa si y solo si es analítica en $z_0 = 0$, es decir, si existe una familia de coeficientes $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ tal que para cada $z \in r\mathbb{D}^n$ se verifica*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha z^\alpha.$$

Más aún, la serie monomial de f converge uniformemente en cada compacto de $r\mathbb{D}^n$, y los coeficientes quedan únicamente determinados a través de la fórmula

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1| = \rho_1} \cdots \int_{|\zeta_n| = \rho_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}} d\zeta_n \cdots d\zeta_1,$$

con $\rho_j \in (0, r_j)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

2.3. Funciones Holomorfas en Infinitas Variables

Estudiamos ahora las funciones holomorfas en infinitas variables. Las variables ahora serán elementos de c_0, el espacio de sucesiones convergentes a cero. c_0 es un espacio de Banach con la norma usual dada por

$$\|z\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n|,$$

para una sucesión $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Esto se puede deducir fácilmente de la completitud de $\mathbb{C}$ y del hecho de que, dadas sucesiones $z_n = (z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\lim_{n \to \infty} \|z_n - z\| = 0$$

implica que $z_{n_k} \longrightarrow z_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, el sustituto en infinitas variables para el polidisco $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$ es

$$B_{c_0} = \left\{ z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0 \ : \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n| < 1 \right\},$$

la bola unitaria en c_0. Vamos a trabajar principalmente con funciones con dominio en B_{c_0}.

Damos a continuación una definición general de función holomorfa con dominio en cualquier abierto de un espacio normado. Luego particularizamos sobre ciertos espacios de funciones acotadas.

Definición 2.31. Sea X un espacio normado y $U \subset X$ un abierto. Una función $f : U \to \mathbb{C}$ es **holomorfa** si para cada $x \in U$ existe un único funcional lineal continuo $x^* \in X^*$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - x^*(h)}{\|h\|} = 0.$$

En dicho caso se nota $df(x) := x^*$, y $df(x)$ se denomina **diferencial** de f en x. Notamos por $H(U)$ al conjunto de funciones holomorfas en U.

Proposición 2.32. *La restricción de una función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$ a cualquier subespacio vectorial de dimensión finita es holomorfa.*

Demostración. Si W es un subespacio vectorial de dimensión finita de X con base $\{e_1, \dots, e_n\}$, luego W es isomorfo a $\mathbb{C}^n$, y la función $f_{|U \cap W}$ es holomorfa con

$$\nabla f_{|U \cap W}(x) = df(x)(e_1, \dots, e_n).$$

□

Definición 2.33. Sea X un espacio normado y $U \subset X$ un abierto. El espacio $H_\infty(U)$ está compuesto por las funciones holomorfas y acotadas en U, es decir,

$$H_\infty(U) = \left\{ f \in H(U) \,:\, \|f\|_\infty := \sup_{x \in U} |f(x)| < \infty \right\},$$

Como ya mencionamos, las funciones holomorfas definidas en B_{c_0} van a jugar un rol importante en este trabajo. El siguiente teorema nos va a permitir darle cierta estructura al espacio de funciones acotadas en la bola unitaria de un espacio normado X, a la cual denotamos B_X. Como en otros resultados de esta sección, los detalles de la demostración pueden encontrarse en [DGMS19].

Teorema 2.34. *Sea X un espacio normado y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $H_\infty(B_X)$ que converge a $f : B_X \to \mathbb{C}$ uniformemente en cada compacto de B_X. Luego, $f \in H_\infty(B_X)$ y $\|f\|_\infty \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$.*

Corolario 2.35. *$H_\infty(B_X)$ es un espacio de Banach para cualquier espacio normado X.*

Similarmente al caso de n variables, toda función holomorfa en B_{c_0} está asociada a una única serie monomial, en este caso con coeficientes indexados en el conjunto

$$\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}_0^n,$$

el cual puede identificarse con el espacio de todas las sucesiones de números naturales con finitas componentes no nulas. Sin embargo, la gran diferencia entre finitas e infinitas variables yace en que la serie monomial asociada a una función holomorfa en B_{c_0} *no siempre resulta convergente*. Es decir, las funciones holomorfas en infinitas variables no necesariamente son analíticas.

Dicho esto, para cualquier función $f \in H_\infty(B_{c_0})$ existen valores en los cuales la serie monomial es convergente. Basta considerar el espacio

$$B_{c_{00}} = \{z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_{c_0} \,:\, z_n = 0 \text{ a partir de cierto } N \in \mathbb{N}\}$$

de sucesiones eventualmente nulas. Dado $z = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots) \in B_{c_{00}}$, tenemos que $z \in \mathbb{D}^n$ y la restricción de f al subespacio n-dimensional $\mathbb{D}^n \simeq \mathbb{D}^n \times \{0\} \times \cdots$ es una función holomorfa, de donde resulta convergente la serie monomial en z.

Lo anterior da lugar al siguiente teorema:

Teorema 2.36. *Sea $f : B_{c_0} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Luego, existe una única familia de coeficientes $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ tal que para cada $z \in B_{c_{00}}$ se verifica*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha.$$

Más aún, los coeficientes están determinados a través de la fórmula

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n, 0, \dots)}{\zeta_1^{\alpha_1 + 1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n + 1}} d\zeta_n \cdots d\zeta_1,$$

con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n \subset \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ y $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0,1)^n$.

Existe una caracterización del espacio $H_\infty(B_{c_0})$ en términos de las restricciones de sus elementos a finitas variables. Este resultado nos va a resultar de extrema utilidad en el Capítulo 3.

Teorema 2.37. *Sea $f : B_{c_0} \to \mathbb{C}$ una función. Luego, son equivalentes:*

1. *$f \in H_\infty(B_{c_0})$.*
2. *f es continua, $f_{|\mathbb{D}^n}$ es holomorfa para cada $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_{|\mathbb{D}^n}\|_\infty < \infty.$$

Si vale alguna de las afirmaciones, se verifica además

$$\|f\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_{|\mathbb{D}^n}\|_\infty.$$

2.4. Espacios de Hardy

Los contenidos de esta y la siguiente sección pueden encontrarse con mayor detalle en [DGMS19]. Algunos comentarios adicionales pueden encontrarse en [R87] y [GEP11].

2.4.1. Espacios de Hardy en Polidiscos

Definición 2.38. Dado $1 \leq p < \infty$, el **espacio de Hardy** $H_p(\mathbb{D}^n)$ consiste de las funciones holomorfas $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{D}^n)} = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(rw)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde consideramos la medida normalizada de Lebesgue en $\mathbb{T}^n$.

Teorema 2.39. *Para cada $1 \leq p < \infty$, $H_p(\mathbb{D}^n)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{H_p(\mathbb{D}^n)}$. Más aún, se verifica*

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{D}^n)} = \lim_{r \to 1^-} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(rw)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}}$$

y $H_2(\mathbb{D}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}^n} f(rw) \overline{g(rw)} dw.$$

Teorema 2.40. *Sea $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{D}^n)$. Luego, $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$ si y solo si*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_\alpha|^2 < \infty.$$

En dicho caso

$$\|f\|_{H_2(\mathbb{D}^n)} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

y si $g(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha z^\alpha \in H_2(\mathbb{D}^n)$ tenemos la fórmula

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \overline{b_\alpha}.$$

Demostración. Notamos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ y $e^{i\theta} = (e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} |f(rw)|^2 dw &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha (re^{i\theta})^\alpha \right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha r^n (e^{i\theta})^\alpha \right|^2 d\theta \\
&= \int_{[0,2\pi]^n} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha r^n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (e^{i\theta})^\alpha \right|^2 d\theta \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_\alpha|^2 r^{2n}.
\end{aligned}$$

En la última igualdad utilizamos la identidad de Parseval en $L^2(\mathbb{T}^n)$ para la base ortonormal $\left\{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{\pm i\alpha\theta}\right\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$. Tomando el supremo de r sobre $(0,1)$ obtenemos

$$\|f\|_{H_2(\mathbb{D}^n)} = \sup_{0<r<1} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_\alpha|^2 (r^\alpha)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

el cual es finito si y solo si $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$.

Similarmente, del teorema de Parseval obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} f(rw)\overline{g(rw)}dw &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha r^n (e^{i\theta})^\alpha\right)\overline{\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha r^n (e^{i\theta})^\alpha\right)}d\theta \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha \overline{b_\alpha} r^{2n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle f,g\rangle = \sup_{0<r<1}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha\overline{b_\alpha}r^{2n}\right) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha\overline{b_\alpha}.$$

□

Observación 2.41. Los espacios de Hardy $H_p(\mathbb{D}^n)$ pueden identificarse isométricamente con cierto subespacio cerrado del espacio de funciones complejas $L^p(\mathbb{T}^n)$. Concretamente, para cada $f \in H_p(\mathbb{D}^n)$ se puede probar que el límite radial

$$\tilde{f}(w) := \lim_{r\to 1^-} f(rw)$$

existe para casi todo $w \in \mathbb{T}^n$. El subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{T}^n)$ compuesto de todos los límites radiales de funciones en $H_p(\mathbb{D}^n)$ resulta en una identificación isométrica entre f y $\tilde{f}$, de la que resulta la igualdad

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{D}^n)} = \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} = \left(\int_{\mathbb{T}^n} |\tilde{f}(w)|^p dw\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pueden consultarse [K04] y [DGMS19] para un análisis detallado al respecto.

2.4.2. El Espacio de Hardy de Series de Dirichlet

Un espacio importante con el que trabajamos en este y los próximos capítulos es un análogo al espacio $H_2(\mathbb{D}^n)$ dentro del conjunto de series de Dirichlet. Lo introducimos a continuación.

Definición 2.42. Notamos por $\mathscr{H}_2$ al conjunto de todas las series de Dirichlet cuyos coeficientes son cuadrado-sumables. Esto es,

$$\mathscr{H}_2 = \left\{ f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D} \,:\, \|f\|^2_{\mathscr{H}_2} := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Teorema 2.43. *$\mathscr{H}_2$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por*

$$\langle f,g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b_n}$$

para $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \in \mathscr{H}_2$.

Observación 2.44. Todo elemento $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_2$ verifica $\sigma_a(f) \leq \frac{1}{2}$. En efecto, si $Re(s) > \frac{1}{2}$ y

$$k_s(w) := \zeta(w + \bar{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\bar{s}} n^{-w}$$

tenemos que $\|k_s\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \zeta(2Re(s))$, y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz calculamos

$$|f(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-Re(s)} \leq \|f\|_{\mathscr{H}_2} \|k_s\|_{\mathscr{H}_2} < \infty.$$

La notación, igual a aquella reservada para los funcionales de evaluación, se debe a que la función k_s es el **núcleo reproductivo** en s, esto es, es el único elemento de $\mathscr{H}_2$ que verifica

$$f(s) = \langle f, k_s \rangle$$

para cada $f \in \mathscr{H}_2$.

También vamos a hacer uso de otro espacio similar, esta vez compuesto de series de potencias en infinitas variables.

Definición 2.45. Sea $\mathfrak{P}$ el conjunto de todas las series de potencias formales. Notamos por $\mathfrak{P}_2$ al subconjunto de $\mathfrak{P}$ compuesto por las series monomiales cuyos coeficientes son cuadrado-sumables. Esto es,

$$\mathfrak{P}_2 = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \in \mathfrak{P} : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha|^2 < \infty \right\}.$$

Teorema 2.46. $\mathfrak{P}_2$ *es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha \overline{d_\alpha}$$

para $f = \sum c_\alpha z^\alpha, g = \sum d_\alpha z^\alpha \in \mathfrak{P}_2$.

La siguiente sección explora la relación entre $\mathscr{H}_2$ y $\mathfrak{P}_2$.

2.5. La Transformada de Bohr

Como mencionamos en la introducción, a principios del siglo XX Harald Bohr [B13] introdujo una aplicación entre el espacio $\mathscr{D}$ de series de Dirichlet y el espacio $\mathfrak{P}$ de series de potencias formales en infinitas variables. Esta aplicación identifica los términos en cada serie a través del Teorema Fundamental de la Aritmética.

Recordando que notamos por $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la sucesión de números primos, dado un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ tenemos que

$$\mathfrak{p}^\alpha = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{\alpha_n}$$

es la factorización de un número natural. Según la identificación que ideó Bohr, el término asociado al multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en una serie de potencias en infinitas variables se corresponde con el término asociado al índice $n = \mathfrak{p}^\alpha \in \mathbb{N}$ en una serie de Dirichlet (y viceversa).

Definición 2.47. La **transformada de Bohr** $\mathfrak{B} : \mathfrak{P} \to \mathscr{D}$ se define de la siguiente manera:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \overset{\mathfrak{B}}{\longmapsto} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

donde $n = \mathfrak{p}^\alpha$ y $a_n = c_\alpha$. Su inversa $\mathfrak{B}^{-1}$ está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \overset{\mathfrak{B}^{-1}}{\longmapsto} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha,$$

donde $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ es tal que $\mathfrak{p}^\alpha = n$ y $c_\alpha = a_n$.

Observación 2.48. Análogamente a $\mathscr{D}$, $\mathfrak{P}$ admite estructura de álgebra mediante el producto

$$\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right)\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \left(\sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_\beta d_\gamma\right) z^\alpha.$$

Ya mencionamos que $\mathfrak{B}$ es biyectiva. Es fácil ver que también resulta ser lineal y multiplicativa, y por lo tanto es un isomorfismo de álgebras entre $\mathscr{D}$ y $\mathfrak{P}$.

En lo que respecta a los Capítulos 3 y 4, la utilidad de la transformada de Bohr yace en que nos permite identificar isométricamente ciertos subespacios de $\mathfrak{P}$ y $\mathscr{D}$. En lo siguiente, consideramos a $H_\infty(B_{c_0})$ como un subconjunto de $\mathfrak{P}$ asociando a cada función su serie monomial (no necesariamente convergente).

Teorema 2.49. *La transformada de Bohr es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Banach $H_\infty(B_{c_0}) \subset \mathfrak{P}$ y $\mathscr{H}_\infty \subset \mathscr{D}$.*

Teorema 2.50. *La transformada de Bohr es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Hilbert $\mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}$ y $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{D}$ (y por lo tanto, un operador unitario entre dichos espacios).*

Capítulo 3

Operadores de Multiplicación

En este capítulo estudiamos la hiperciclicidad de los denominados *operadores de multiplicación* en ciertos espacios de funciones. Vamos a ver que los resultados más interesantes no refieren a estos operadores, sino a sus operadores adjuntos.

Definición 3.1. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ y una función holomorfa $\varphi \in H(\Omega)$, notamos por M_φ al **operador de multiplicación** por φ en $H(\Omega)$, el cual se define mediante la formula

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

para $f \in H(\Omega)$.

Esta definición es completamente análoga en el caso de espacios de series de Dirichlet y de series de potencias en infinitas variables, siempre trabajando con los productos definidos en el capítulo anterior.

Concretamente, en este capítulo analizamos los operadores de multiplicación en los siguientes espacios:

- El espacio de Hardy $H_2(\mathbb{D}^n)$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}^n$,
- El espacio $\mathscr{H}_2$ de series de Dirichlet con coeficientes cuadrado-sumables,
- El espacio $\mathfrak{P}_2$ de series de potencias con coeficientes cuadrado-sumables.

En cada uno de estos casos, primero caracterizamos a los **multiplicadores**, esto es, a las funciones φ tales que la multiplicación por φ es cerrada en el espacio en cuestión, y por lo tanto definen operadores de multiplicación. Luego, estudiamos el operador adjunto de multiplicación con el objetivo de encontrar condiciones que nos permitan caracterizar su hiperciclicidad.

3.1. Operadores de Multiplicación en $H_2(\mathbb{D}^n)$

Los principales resultados de esta sección se deben a Godefroy y Shapiro [GS91]. La prueba del Teorema 3.4 utiliza también elementos de Grosse-Erdmann y Peris [GEP11].

Definición 3.2. Dado $\lambda \in \mathbb{D}^n$, notamos por $k_\lambda : H_2(\mathbb{D}^n) \to \mathbb{C}$ al **funcional de evaluación** en λ, es decir, $k_\lambda(f) = f(\lambda)$ para $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$.

Observación 3.3. Los funcionales de evaluación en $H_2(\mathbb{D}^n)$ son continuos. En efecto, supongamos que $f_N \longrightarrow f$ en $H_2(\mathbb{D}^n)$ si $N \longrightarrow \infty$. Sea $\lambda \in \mathbb{D}^n$. Si $(a_\alpha^{(N)})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ y $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ son los coeficientes de las series de potencias asociadas a f_N y f respectivamente, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} |k_\lambda(f_N) - k_\lambda(f)| &= |f_N(\lambda) - f(\lambda)| \\ &= \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} (a_\alpha^{(N)} - a_\alpha)\lambda^\alpha \right| \\ &\leq \|f_N - f\|_{H_2(\mathbb{D}^n)} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} |\lambda^\alpha|^2. \end{aligned}$$

Notemos además que

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} |\lambda^\alpha|^2 = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{\infty} |\lambda_1^{\alpha_1}|^2 \cdots |\lambda_n^{\alpha_n}|^2 = \prod_{i=1}^{n} \frac{|\lambda_i|^2}{1-|\lambda_i|^2} < \infty,$$

por lo que $|k_\lambda(f_N) - k_\lambda(f)| \longrightarrow 0$ si $N \longrightarrow \infty$.

Teorema 3.4. *Sea $\varphi \in H_\infty(\mathbb{D}^n)$. Luego, φ define un operador de multiplicación acotado $M_\varphi : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$, y*

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}^n} |\varphi(z)|.$$

Demostración. Dada $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$, es claro que φf es holomorfa en $\mathbb{D}^n$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|\varphi f\|_{H_2(\mathbb{D}^n)} &= \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |(\varphi f)(rw)|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}^n} |\varphi(z)| \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(rw)|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\varphi\|_\infty \|f\|_{H_2(\mathbb{D}^n)}. \end{aligned}$$

Es decir, $\varphi f \in H_2(\mathbb{D}^n)$ para toda función $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$, por lo que el operador $M_\varphi : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ está bien definido. Más aún, M_φ es acotado y $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Por otro lado, sea $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$ una función no nula, y sea $z \in \mathbb{D}^n$ tal que $f(z) \neq 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$|\varphi(z)|^k |f(z)| = |M_\varphi^k(f)(z)| = |k_z(M_\varphi^k(f))| \leq \|M_\varphi^k\| \|f\| \|k_z\| \leq \|M_\varphi\|^k \|f\| \|k_z\|.$$

Aplicando raíz k-ésima y tomando límite cuando $k \longrightarrow \infty$, obtenemos

$$|\varphi(z)| = \lim_{k\to\infty} |\varphi(z)| \sqrt[k]{f(z)} \leq \lim_{k\to\infty} \|M_\varphi\| \sqrt[k]{\|f\|\|k_z\|} = \|M_\varphi\|.$$

Por lo tanto $\|\varphi\|_\infty \leq \|M_\varphi\|$, lo que nos faltaba probar. □

Teorema 3.5. *Sea $\varphi \in H_\infty(\mathbb{D}^n)$. Luego, $M_\varphi : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ no es hipercíclico.*

Demostración. Supongamos que $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$ es un vector hipercíclico para M_φ, y sea $g \in H_2(\mathbb{D}^n)$. Luego, existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{n_k} f \longrightarrow g$ en $H_2(\mathbb{D}^n)$. En particular, $\varphi(z)^{n_k} f(z)$ converge puntualmente a $g(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}^n$.

Por otro lado, del Teorema 3.4 y la Proposición 1.47 tenemos que $\|\varphi\|_\infty > 1$. Consideremos $z \in \mathbb{D}^n$ tal que $|\varphi(z)| > 1$ y $f(z) \neq 0$ (f es un vector hipercíclico de un operador de multiplicación, por lo que $f \not\equiv 0$). Luego la sucesión $\varphi(z)^n f(z)$ diverge, una clara contradicción. □

Pasamos ahora a caracterizar la hiperciclicidad y caoticidad de los operadores adjuntos de multiplicación en $H_2(\mathbb{D}^n)$, para lo cual hacemos uso de los siguientes lemas. Para simplificar la notación, en diversas ocasiones identificamos (a través del Teorema de Representación de Riesz) funcionales lineales continuos en $H_2(\mathbb{D}^n)$ con elementos de $H_2(\mathbb{D}^n)$.

Lema 3.6. *Si $\Lambda \subset \mathbb{D}^n$ contiene un abierto, entonces $\operatorname{span}\{k_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es denso en $H_2(\mathbb{D}^n)$.*

Demostración. Sea $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$ tal que $\langle k_\lambda, f\rangle = 0$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Sea $U \subset \Lambda$ un abierto no vacío, $p \in U$ y $q \in \mathbb{D}^N$. Consideremos la función compleja

$$g(z) = f((1-z)p + zq).$$

Al ser composición de funciones holomorfas, g es holomorfa en un entorno del intervalo $[0, 1]$. Además, como $g(0) = f(p) = 0$ y U es abierto, existe $t \in (0, 1]$ tal que $g(z) = 0$ para todo $z \in [0, t)$. Del principio de identidad de funciones holomorfas (ver [R87]), tenemos que $g \equiv 0$ y por lo tanto $g(1) = f(q) = 0$. De la arbitrariedad de $q \in \mathbb{D}^n$ concluimos que $f \equiv 0$, y así $\operatorname{span}\{k_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es denso en $H_2(\mathbb{D}^n)$. □

Lema 3.7. *Sea $\varphi \in H_2(\mathbb{D}^n)$ y $\Lambda \subset \mathbb{D}^n$. Luego, para cada $\lambda \in \Lambda$, k_λ es autovector de M_φ^* asociado al autovalor $\overline{\varphi(\lambda)}$.*

Demostración. Dada $f \in H_2(\mathbb{D}^n)$, calculamos

$$\langle M_\varphi^*(k_\lambda), f\rangle = \langle k_\lambda, \varphi f\rangle = \varphi(\lambda) f(\lambda) = \langle k_\lambda, \varphi(\lambda) f\rangle = \langle \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda, f\rangle.$$

□

Teorema 3.8. *Sea $\varphi \in H_\infty(\mathbb{D}^n)$ no constante. Luego, son equivalentes:*

1. $M_\varphi^* : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ *es hipercíclico.*
2. $M_\varphi^* : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ *es caótico.*
3. $\varphi(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Demostración.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Supongamos que $\varphi(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$. Luego, como $\mathbb{D}^n$ es abierto necesariamente $\varphi(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ y $\varphi(\mathbb{D}^n) \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}) \neq \emptyset$. Tenemos entonces que los conjuntos

$$\varphi^{-1}(\mathbb{D}) = \{\lambda \in \mathbb{D}^n : |\varphi(\lambda)| < 1\} \quad \text{y} \quad \varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}) = \{\lambda \in \mathbb{D}^n : |\varphi(\lambda)| > 1\}$$

son abiertos no vacíos, y aplicando el Lema 3.6 obtenemos que los conjuntos

$$\operatorname{span}\{k_\lambda : \lambda \in \varphi^{-1}(\mathbb{D})\} \quad \text{y} \quad \operatorname{span}\{k_\lambda : \lambda \in \varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})\}$$

son densos en $H_2(\mathbb{D}^n)$. Por último, del Lema 3.7 y del Criterio de Godefroy-Shapiro (Teorema 1.53) concluimos que M_φ^* es hipercíclico.

(1) $\Longrightarrow$ (3). Supongamos que M_φ^* es hipercíclico y $\varphi(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Entonces, necesariamente $\varphi(\mathbb{D}^n) \subset \mathbb{D}$ o bien $\varphi(\mathbb{D}^n) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. En el primer caso, aplicando el Teorema 3.4 tenemos que

$$\|M_\varphi^*\| = \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty \leq 1,$$

una clara contradicción a la Proposición 1.47. Por otro lado, si la imagen de φ está contenida fuera del disco, la función $\frac{1}{\varphi}$ está bien definida en $\mathbb{D}^n$, es holomorfa y su imagen está contenida en $\bar{\mathbb{D}}$. Mediante un razonamiento análogo al caso anterior obtenemos entonces que $M_{\frac{1}{\varphi}}^*$ no es hipercíclico, pues $\|M_{\frac{1}{\varphi}}^*\| \leq 1$. Sin embargo, esto contradice el Corolario 1.49, ya que $M_{\frac{1}{\varphi}}^*$ es el operador inverso de M_φ^*. Por lo tanto, $\varphi(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Supongamos que $\varphi(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$. Probamos anteriormente que en este caso M_φ^* es hipercíclico. Resta ver que $\mathrm{Per}(M_\varphi^*)$ es denso. Sea $G \subset \mathbb{D}^n$ un conjunto abierto tal que $\varphi(G) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$. Como $\varphi(G)$ es abierto (al ser φ analítica y no constante) esta intersección contiene un arco no trivial de $\mathbb{T}$, el cual a su vez contiene infinitas raíces de la unidad (es decir, números de la forma $e^{2\pi i p/q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$). Sea F el conjunto de raíces de la unidad de $\varphi(G)$, y sea $E = \varphi^{-1}(F)$.

Como además $\varphi(G)$ es relativamente compacto (y lo es todo abierto de $\mathbb{D}^n$), E contiene un punto de acumulación z_0, y por lo tanto $\varphi(z_0)$ es un punto de acumulación de F. Tenemos entonces que existe una sucesión $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rectas complejas en $\mathbb{C}^n$ que pasan por z_0 y tales que:

- φ restringida a $\mathbb{D}^n \cap L_k$ (vista como función analítica de una variable) es no constante,
- $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_k$ es denso en $\mathbb{C}^n$.

En efecto, consideremos una base $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{D}^n$. Del principio de identidad de funciones holomorfas, como φ es no constante en $\mathbb{D}^n$ lo es en cada abierto U_k, y luego para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $w_k \in U_k$ tal que $\varphi(w_k) \neq \varphi(z_0)$. Consideramos como L_k a la recta parametrizada por la función $tz_0 + (1-t)w_k$ $(t \in \mathbb{C})$, que une z_0 con w_k. Fijado $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{|_{\mathbb{D}^n \cap L_k}}$ es una aplicación abierta y así $\varphi(\mathbb{D}^n \cap L_k)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene a $\varphi(z_0)$. Luego, $\varphi(\mathbb{D}^n \cap L_k)$ interseca a un arco no trivial de $\mathbb{T}$, y por lo tanto z_0 es un punto de acumulación de $E \cap L_k$.

Ahora, sea $g \in H_2(\mathbb{D}^n)$ tal que $\langle g, k_\lambda \rangle = 0$ para cada $\lambda \in E$ (es decir, $g(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in E$). En particular g se anula en $E \cap L_k$, y al contener este conjunto un punto de acumulación, por el principio de identidad de funciones holomorfas en una variable g se anula en $\mathbb{D}^n \cap L_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por último, como $\mathbb{D}^n \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_k$ es denso en $\mathbb{D}^n$ tenemos que $g \equiv 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) es inmediato (ver Observación 1.52).

$\square$

La demostración original del teorema anterior, detallada por Godefroy y Shapiro, contiene un error enmendado posteriormente por Bonilla y Grosse-Erdmann [BGE06]. Concretamente, en [GS91] Godefroy y Shapiro afirman que φ es constante en $L \cap \mathbb{D}^n$ solo para una cantidad finita de rectas complejas que pasan por z_0. Sin embargo, este no es el caso, por ejemplo, para $n = 3$ y $\varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3$. La función φ es constante en una cantidad no numerable de rectas complejas a través del origen (más específicamente, en toda recta contenida en el plano $z_3 = 0$).

3.2. Operadores de Multiplicación en $\mathfrak{P}_2$ y $\mathscr{H}_2$

En esta sección estudiamos las propiedades que caracterizan a los multiplicadores en $\mathfrak{P}_2$ y $\mathscr{H}_2$. Luego, similarmente a la sección anterior, caracterizamos las funciones que definen operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos en $\mathfrak{P}_2$. Por último, hacemos uso de la transformada de Bohr para probar un resultado análogo sobre los operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos en $\mathscr{H}_2$.

Comenzamos enunciando un teorema probado por Hedenmalm, Lindqvist y Seip [HLS97] que caracteriza a los multiplicadores en $\mathscr{H}_2$ y provee información útil sobre la norma de los operadores que definen. Observemos que en el enunciado, la función que define al operador se presupone como una función holomorfa en $\mathbb{C}_{1/2}$. Esto se debe a que los elementos de $\mathscr{H}_2$ definen funciones holomorfas en $\mathbb{C}_{1/2}$ (ver Observación 2.44), por lo que debemos asegurar que el producto resultante del operador sea una función holomorfa en este dominio.

Teorema 3.9. *Una función $f \in H(\mathbb{C}_{1/2})$ define un operador de multiplicación en $\mathscr{H}_2$ si y solo si $f \in \mathscr{H}_\infty$. En dicho caso,*

$$\|M_f\| = \|f\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{C}_+} |f(s)|.$$

Enunciamos a continuación un resultado sobre los operadores de multiplicación en $\mathfrak{P}_2$.

Teorema 3.10. *Sea $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$. Luego, φ define a un operador de multiplicación $M_\varphi : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$, con $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_{H_\infty(B_{c_0})}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.9, $\mathfrak{B}\varphi \in \mathscr{H}_\infty$ define un operador de multiplicación $M_{\mathfrak{B}\varphi}$ en $\mathscr{H}_2$, cuya norma coincide con $\|\mathfrak{B}\varphi\|_{\mathscr{H}_\infty}$. Dada $f(z) = \sum d_\alpha z^\alpha \in \mathfrak{P}_2$, recordando el Teorema 2.50 tenemos que $\mathfrak{B}f \in \mathscr{H}_2$ y $M_{\mathfrak{B}\varphi}(\mathfrak{B}f) \in \mathscr{H}_2$. Luego, utilizando el hecho de que $\mathfrak{B}$ es una isometría multiplicativa calculamos

$$\|M_{\mathfrak{B}\varphi}(\mathfrak{B}f)\|_{\mathscr{H}_2} = \|\mathfrak{B}^{-1} M_{\mathfrak{B}\varphi}(\mathfrak{B}f)\|_{\mathfrak{P}_2} = \|\mathfrak{B}^{-1}(\mathfrak{B}\varphi\, \mathfrak{B}f)\|_{\mathfrak{P}_2} = \|\varphi f\|_{\mathfrak{P}_2} < \infty.$$

Luego, φ define un operador de multiplicación en $\mathfrak{P}_2$. Por otro lado, de las igualdades anteriores y del Teorema 3.9 obtenemos

$$\begin{aligned}
\|M_\varphi\| &= \sup_{0 \neq f \in \mathfrak{P}_2} \frac{\|\varphi f\|_{\mathfrak{P}_2}}{\|f\|_{\mathfrak{P}_2}} \\
&= \sup_{0 \neq f \in \mathfrak{P}_2} \frac{\|M_{\mathfrak{B}\varphi}(\mathfrak{B}f)\|_{\mathscr{H}_2}}{\|\mathfrak{B}f\|_{\mathscr{H}_2}} \\
&= \sup_{0 \neq g \in \mathscr{H}_2} \frac{\|M_{\mathfrak{B}\varphi}(g)\|_{\mathscr{H}_2}}{\|g\|_{\mathscr{H}_2}} \\
&= \|M_{\mathfrak{B}\varphi}\| \\
&= \|\mathfrak{B}\varphi\|_{\mathscr{H}_\infty} \\
&= \|\varphi\|_{H_\infty(B_{c_0})}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.11. *Sea $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$. Luego, valen las siguientes igualdades para los operadores de multiplicación $M_\varphi : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$ y $M_{\mathfrak{B}\varphi} : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$:*

- $M_{\mathfrak{B}\varphi} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \circ M_\varphi$.
- $M^*_{\mathfrak{B}\varphi} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \circ M^*_\varphi$.

Demostración. Dada $f \in \mathfrak{P}_2$, calculamos

$$M_{\mathfrak{B}\varphi}(\mathfrak{B}f) = \mathfrak{B}\varphi\, \mathfrak{B}f = \mathfrak{B}(\varphi f) = \mathfrak{B}M_\varphi(f).$$

Aunque no lo precisamos, notemos que esto vale más generalmente para cualquier serie de potencias formal, considerando los operadores sobre los espacios más amplios $\mathfrak{P}$ y $\mathscr{D}$.

Por otro lado, dada $g \in \mathscr{H}_2$, aplicando lo recién probado y utilizando el Teorema 2.50 calculamos

$$\begin{aligned}
\langle M^*_{\mathfrak{B}\varphi}(\mathfrak{B}f), g\rangle_{\mathscr{H}_2} &= \langle \mathfrak{B}f, M_{\mathfrak{B}\varphi}(g)\rangle_{\mathscr{H}_2} \\
&= \langle \mathfrak{B}f, \mathfrak{B}M_\varphi(\mathfrak{B}^{-1}g)\rangle_{\mathscr{H}_2} \\
&= \langle f, M_\varphi(\mathfrak{B}^{-1}g)\rangle_{\mathfrak{P}_2} \\
&= \langle M^*_\varphi(f), \mathfrak{B}^{-1}g\rangle_{\mathfrak{P}_2} \\
&= \langle \mathfrak{B}M^*_\varphi(f), g\rangle_{\mathscr{H}_2}.
\end{aligned}$$

Es decir, $M^*_{\mathfrak{B}\varphi} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \circ M^*_\varphi$. □

Observación 3.12. En adelante, dada $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$ notamos por φ_n a la restricción de φ a las primeras n variables, esto es, $\varphi_n = \varphi_{|\mathbb{D}^n}$. Del Teorema 2.37, φ_n es holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, $\varphi_n \in H_\infty(\mathbb{D}^n)$ y $\|\varphi_n\|_{H_\infty(\mathbb{D}^n)} \leq \|\varphi\|_{H_\infty(B_{c_0})}$. En efecto,

$$\|\varphi_n\|_{H_\infty(\mathbb{D}^n)} = \sup_{z\in\mathbb{D}^n} |\varphi_n(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}^n\times\{0\}\times\cdots} |\varphi(z)| \leq \sup_{z\in B_{c_0}} |\varphi(z)| = \|\varphi\|_{H_\infty(B_{c_0})} < \infty.$$

También vamos a hacer uso de la inclusión $i : H_2(\mathbb{D}^n) \hookrightarrow \mathfrak{P}_2$, la cual a cada función

$$h(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in H_2(\mathbb{D}^n)$$

le asigna su única serie de potencias asociada.

Lema 3.13. *Sean $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego,*

$$i(M^*_{\varphi_n}(h)) = M^*_\varphi(i(h))$$

para cada $h \in H_2(\mathbb{D}^n)$.

Demostración. Sea $h \in H_2(\mathbb{D}^n)$ y $\beta \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. Sean $(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}}$ y $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ los coeficientes de las series de potencias asociadas a h y φ, respectivamente. Observemos que

$$\varphi(z)z^\beta = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^{\alpha+\beta} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c'_\alpha z^\alpha,$$

donde $c'_\alpha = 0$ si $\alpha \neq \gamma + \beta$ para algún $\gamma \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, y $c'_{\gamma+\beta} = c_\gamma$. Además,

$$\varphi_n(z)z^\beta = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c'_\alpha z^\alpha.$$

Ahora, si $\beta \notin \mathbb{N}_0^n$, utilizando el hecho de que la familia $\{z^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{P}_2$ y que $M_{\varphi_n}^*$ es un operador en $H_2(\mathbb{D}^n)$ concluimos que

$$\langle i(M_{\varphi_n}^*(h)), z^\beta\rangle_{\mathfrak{P}_2} = 0,$$

$$\langle M_\varphi^*(i(h)), z^\beta\rangle_{\mathfrak{P}_2} = \langle i(h), \varphi z^\beta\rangle_{\mathfrak{P}_2} = 0.$$

Si $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, por un lado calculamos

$$\langle i(M_{\varphi_n}^*(h)), z^\beta\rangle_{\mathfrak{P}_2} = \langle M_{\varphi_n}^*(h), z^\beta\rangle_{H_2(\mathbb{D}^n)} = \langle h, \varphi_n z^\beta\rangle_{H_2(\mathbb{D}^n)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha \overline{c'_\alpha}.$$

Por otro lado, recordando que $b_\alpha = 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}_0^n$ (pues $h \in H_2(\mathbb{D}^n)$) calculamos

$$\langle M_\varphi^*(i(h)), z^\beta\rangle_{\mathfrak{P}_2} = \langle i(h), \varphi z^\beta\rangle_{\mathfrak{P}_2} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} b_\alpha \overline{c'_\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha \overline{c'_\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$\langle i(M_{\varphi_n}^*(h)), z^\beta\rangle_{\mathfrak{P}_2} = \langle M_\varphi^*(i(h)), z^\beta\rangle_{\mathfrak{P}_2}$$

para cada $\beta \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, es decir, $i(M_{\varphi_n}^*(h)) = M_\varphi^*(i(h))$. □

En el siguiente resultado, logramos caracterizar a los operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos y caóticos en $\mathfrak{P}_2$ de una manera similar al Teorema 3.8, esto es, a través de la imagen de la función que lo define. Adicionalmente, relacionamos el operador de multiplicación asociado a una función $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$ con los operadores asociados a las restricciones de esta función a finitas variables. Curiosamente, la hiperciclicidad en finitas variables es un fenómeno más fuerte que en infinitas variables.

Teorema 3.14. *Sea $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$ no constante. Son equivalentes:*

1. $M_\varphi^* : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$ *es hipercíclico.*
2. $M_\varphi^* : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$ *es caótico.*
3. $\varphi(B_{c_0}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
4. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_{\varphi_n}^* : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ es hipercíclico.*
5. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $M_{\varphi_n}^* : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ es hipercíclico.*

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (3). Si suponemos que $M_\varphi^* : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$ es hipercíclico y $\varphi(B_{c_0}) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, al ser B_{c_0} conexo tenemos que $\varphi(B_{c_0}) \subset \mathbb{D}$ ó $\varphi(B_{c_0}) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. En el primer caso, aplicando el Teorema 3.10 obtenemos

$$\|M_\varphi^*\| = \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_{H_\infty(B_{c_0})} \leq 1,$$

una contradicción a la Proposición 1.47.

Por otro lado, si $\varphi(B_{c_0}) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ luego $\varphi(z) \neq 0$ para todo $z \in B_{c_0}$, por lo que la función $\frac{1}{\varphi}$ está bien definida, es holomorfa en B_{c_0} y su imagen está contenida en $\bar{\mathbb{D}}$. Mediante un razonamiento análogo al primer caso obtenemos que $M_{\frac{1}{\varphi}}^*$ no es hipercíclico, pues $\|M^*_{\frac{1}{\varphi}}\| \leq 1$. Sin embargo, al ser $M^*_{\frac{1}{\varphi}}$ el operador inverso de M^*_φ esto contradice el Corolario 1.49, por lo que $\varphi(B_{c_0}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

(3) $\Longrightarrow$ *(4)*. Como φ es holomorfa es una aplicación abierta, y como $\varphi(B_{c_0}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, necesariamente

$$\varphi(B_{c_0}) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset \quad \text{ y } \quad \varphi(B_{c_0}) \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existen $b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}, c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B_{c_0}$ tales que $|\varphi(b)| < 1$ y $|\varphi(c)| > 1$.

Consideremos ahora los elementos de B_{c_0} correspondientes a las primeras k componentes de b y c, notados por $b^{(k)}$ y $c^{(k)}$ respectivamente ($k \in \mathbb{N}$). Claramente $b^{(k)} \longrightarrow b$ y $c^{(k)} \longrightarrow c$ en B_{c_0} si $k \longrightarrow \infty$. Como φ es continua, esto implica que $\varphi(b^{(k)}) \longrightarrow \varphi(b)$ y $\varphi(c^{(k)}) \longrightarrow \varphi(c)$ en $\mathbb{C}$ si $k \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(b^{(n)})| < 1$ y $|\varphi(c^{(n)})| > 1$.

Por último, notemos que $\varphi(b^{(n)}) = \varphi_n(b_1, \ldots, b_n)$ y $\varphi(c^{(n)}) = \varphi_n(c_1, \ldots, c_n)$. Luego,

$$|\varphi_n(b_1, \ldots, b_n)| < 1 \quad \text{ y } \quad |\varphi_n(c_1, \ldots, c_n)| > 1.$$

Como φ_n es continua y $\mathbb{D}^n$ es conexo, necesariamente $\varphi_n(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, y del Teorema 3.8 concluimos que $M^*_{\varphi_n}$ es hipercíclico.

(4) $\Longrightarrow$ *(5)*. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{n_0}(\mathbb{D}^{n_0}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, sea $z_0 \in \mathbb{D}^{n_0}$ tal que $|\varphi_{n_0}(z_0)| = 1$ y sean $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ los coeficientes de la serie de potencias asociada a φ.

Consideremos $n > n_0$. Completando las coordenadas de z_0 con $n - n_0$ ceros obtenemos un vector $\tilde{z}_0 \in \mathbb{D}^n$ tal que

$$\varphi_n(\tilde{z}_0) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha \tilde{z}_0^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{n_0}} c_\alpha z_0^\alpha = \varphi_{n_0}(z_0).$$

Es decir $|\varphi_n(\tilde{z}_0)| = 1$ y luego $\varphi_n(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$. Del Teorema 3.8, $M^*_{\varphi_n}$ es hipercíclico.

(5) $\Longrightarrow$ *(1)*. Sean U, V dos abiertos no vacíos en $\mathfrak{P}_2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que son bolas de radio $\varepsilon > 0$ centradas en ciertos polinomios (no perdemos generalidad ya que los polinomios son densos en $\mathfrak{P}_2$). Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ y $I \subset \mathbb{N}_0^N$ finito tal que

$$U = \left\{ h \in \mathfrak{P}_2 \ : \ \left\| h - \sum_{\alpha\in I} c_\alpha z^\alpha \right\|_{\mathfrak{P}_2} < \varepsilon \right\},$$

$$V = \left\{ h \in \mathfrak{P}_2 \ : \ \left\| h - \sum_{\alpha\in I} c'_\alpha z^\alpha \right\|_{\mathfrak{P}_2} < \varepsilon \right\}.$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M^*_{\varphi_n}$ es hipercíclico si $n \geq n_0$. Luego, del Teorema 1.48 $M^*_{\varphi_n}$ es topológicamente transitivo para todo $n \geq n_0$.

Tomemos $n > \text{máx}\{N, n_0\}$. Consideremos ahora la inclusión $i : H_2(\mathbb{D}^n) \to \mathfrak{P}_2$ y los abiertos $\tilde{U} = i^{-1}(U)$ y $\tilde{V} = i^{-1}(V)$. Al ser $M^*_{\varphi_n}$ topológicamente transitivo, existe $g \in \tilde{U}$ tal que $M^{*\,k}_{\varphi_n}(g) \in \tilde{V}$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Aplicando el Lema 3.13 a la función $M^{*\,k-1}_{\varphi_n}(g)$ obtenemos que M^*_φ es topológicamente transitivo, pues $i(g) \in U$ y

$$M^{*\,k}_\varphi(i(g)) = i(\underbrace{M^{*\,k}_{\varphi_n}(g)}_{\in\tilde{V}}) \in V.$$

Luego, del Teorema 1.48 M_φ^* es hipercíclico.

(3) $\Longrightarrow$ *(2)*. Si $\varphi(B_{c_0}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, de lo recién probado y del Teorema 3.8 tenemos que $M_{\varphi_n}^* : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ es caótico para todo n mayor que cierto n_0. Sea U un abierto no vacío de $\mathfrak{P}_2$. Notemos que $i^{-1}(U)$ es un abierto de $H_2(\mathbb{D}^n)$, y al ser $M_{\varphi_n}^*$ caótico existe $g \in i^{-1}(U)$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_{\varphi_n}^{*N}(g) = g$. Del Lema 3.13 obtenemos

$$i(g) = i(M_{\varphi_n}^{*N}(g)) = M_\varphi^{*N}(i(g)).$$

Por lo tanto, para cada abierto no vacío $U \subset \mathfrak{P}_2$ existe un punto periódico de M_φ^* en $U \cap i(H_2(\mathbb{D}^n))$ para algún $n \geq n_0$, y así M_φ^* es caótico.

(2)$\Longrightarrow$ *(1)* es inmediato. □

Ahora, apliquemos la transformada de Bohr con el objetivo de utilizar las equivalencias del Teorema 3.14 para probar un resultado similar en $\mathscr{H}_2$. La herramienta fundamental que nos permite hacer esto es el siguiente lema.

Lema 3.15. *Sea $\psi \in \mathscr{H}_\infty$. Luego, $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ es hipercíclico (resp. caótico) si y solo si $M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^* : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$ es hipercíclico (resp. caótico).*

Demostración. Del Lema 3.11 tenemos que

$$M_\psi^* \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \circ M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*.$$

Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{P}_2 \arrow[r, "M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*"] \arrow[d, "\mathfrak{B}"] & \mathfrak{P}_2 \arrow[d, "\mathfrak{B}"] \\ \mathscr{H}_2 \arrow[r, "M_\psi^*"] & \mathscr{H}_2 \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y los operadores M_ψ^* y $M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*$ son cuasifactores lineales a través de $\mathfrak{B}$ (recordar la Definición 1.54). Como vimos en la Observación 1.55, la hiperciclicidad se preserva a través de cuasifactores, por lo que si $M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*$ es hipercíclico luego M_ψ^* lo es (y lo mismo vale para caoticidad).

Recíprocamente, si M_ψ^* es hipercíclico, la hiperciclicidad de $M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*$ se deduce del mismo lema aplicando $\mathfrak{B}^{-1}$ a izquierda y derecha en cada lado de la igualdad. Así, obtenemos

$$\mathfrak{B}^{-1} \circ M_\psi^* = M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^* \circ \mathfrak{B}^{-1}.$$

Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_2 \arrow[r, "M_\psi^*"] \arrow[d, "\mathfrak{B}^{-1}"] & \mathscr{H}_2 \arrow[d, "\mathfrak{B}^{-1}"] \\ \mathfrak{P}_2 \arrow[r, "M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*"] & \mathfrak{P}_2 \end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que si M_ψ^* es hipercíclico (resp. caótico) entonces $M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*$ lo es. □

También es de utilidad el siguiente resultado de Bayart [B02], que nos permitirá utilizar resultados sobre el espacio más general $\mathscr{H}_\infty^+$ en el estudio de $\mathscr{H}_\infty$.

Teorema 3.16. *(Bayart) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathscr{H}_\infty$. Luego, existen una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $f \in \mathscr{H}_\infty$ tal que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en $\mathscr{H}_\infty^+$.*

Observación 3.17. Análogamente a la Observación 3.12, en el siguiente teorema precisamos referirnos a cierta "restricción" de una serie de Dirichlet. Dada

$$\psi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s} \in \mathscr{H}_\infty,$$

notamos por ψ_n a la función definida de la siguiente manera:

$$\psi_n(s) = \sum_{\substack{k=\mathfrak{p}^\alpha \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} a_k k^{-s}.$$

Es decir, ψ_n es la serie resultante de ψ al dejar solo los términos cuyo índice corresponde al producto de a lo sumo los primeros n números primos.

Recordando el Teorema 2.37, notemos que $\psi_n \in \mathscr{H}_\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $\mathfrak{B}^{-1}$ lleva ψ_n en la función

$$\mathfrak{B}^{-1}\psi_n(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_{\mathfrak{p}^\alpha} z^\alpha,$$

la cual es un elemento de $H_\infty(B_{c_0})$ al serlo $\mathfrak{B}^{-1}\psi$. Además, de las expresiones obtenidas tenemos que $\mathfrak{B}^{-1}\psi_n = (\mathfrak{B}^{-1}\psi)_n$.

A continuación, finalmente caracterizamos a los operadores adjuntos de multiplicación que son hipercíclicos en $\mathscr{H}_2$.

Teorema 3.18. *Sea $\psi \in \mathscr{H}_\infty$ no constante. Son equivalentes:*

1. *$M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ es hipercíclico.*
2. *$M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ es caótico.*
3. *$\psi(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*
4. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*
5. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (3). Del Lema 3.15 tenemos que $M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*$ es hipercíclico, y de la Proposición 1.47 se verifica que $\|M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*\| > 1$. Aplicando el Teorema 3.10 calculamos

$$\sup_{s\in\mathbb{C}_+} |\psi(s)| = \|\psi\|_{\mathscr{H}_\infty} = \|\mathfrak{B}^{-1}\psi\|_{H_\infty(B_{c_0})} = \|M_{\mathfrak{B}^{-1}\psi}^*\| > 1.$$

Suponiendo que $\psi(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, como $\mathbb{C}_+$ es conexo entonces $\psi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Por otro lado, si $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, $\psi(s) \longrightarrow a_1$ uniformemente si $Re(s) \longrightarrow \infty$ por el Lema 2.15. Por lo tanto $|a_1| \geq 1$, y del Teorema 2.18 tenemos que está bien definida la función $\frac{1}{\psi} \in \mathscr{H}_\infty$ y el operador $M_{\frac{1}{\psi}}^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$. Luego, del Teorema 3.9

$$\left\|M_{\frac{1}{\psi}}^*\right\| = \left\|\frac{1}{\psi}\right\|_{\mathscr{H}_\infty} \leq 1.$$

Por lo tanto $M^*_{\frac{1}{\psi}}$ no es hipercíclico. Sin embargo, esto contradice la hiperciclicidad de M^*_ψ, ya que $M^*_{\frac{1}{\psi}}$ es su operador operador inverso (ver Corolario 1.49).

(3)$\Longrightarrow$(4). Consideremos la sucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}_\infty$. Recordemos que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_n(s) = \sum_{\substack{k=\mathfrak{p}^\alpha \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} a_k k^{-s}.$$

Esta sucesión es acotada por $\|\psi\|_{\mathscr{H}_\infty}$. En efecto,

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|_{\mathscr{H}_\infty} &= \|\mathfrak{B}^{-1}\psi_n\|_{H_\infty(B_{c_0})} \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}^n} |\mathfrak{B}^{-1}\psi(z)| \\ &\leq \sup_{z\in B_{c_0}} |\mathfrak{B}^{-1}\psi(z)| \\ &= \|\mathfrak{B}^{-1}\psi\|_{H_\infty(B_{c_0})} \\ &= \|\psi\|_{\mathscr{H}_\infty}\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, del Teorema 3.16 existe una subsucesión $(\psi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y cierta función $g \in \mathscr{H}_\infty$ tal que $(\psi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a g en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Es decir, $(\psi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a g en $\mathscr{H}_\infty^+$, y al ser los funcionales coordenados en $\mathscr{H}_\infty^+$ continuos (ver Corolario 1.33), los coeficientes de cada función ψ_{n_k} tienden a los coeficientes del límite g. Tenemos entonces que $g = \psi$, ya que los coeficientes de ψ_{n_k} tienden a los coeficientes de ψ.

Por otro lado, como ψ es holomorfa y $\psi(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, existen abiertos $U, V \subset \mathbb{C}_+$ tales que $\psi(U) \subset \mathbb{D}$ y $\psi(V) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Sean $z \in U$ y $w \in V$. Claramente $\psi_{n_k}(z) \longrightarrow \psi(z)$ y $\psi_{n_k}(w) \longrightarrow \psi(w)$ si $k \longrightarrow \infty$. Luego, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_{n_j}(z) \in \mathbb{D}$ y $\psi_{n_j}(w) \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Como ψ_{n_j} es continua y $\mathbb{C}_+$ es conexo, concluimos que $\psi_{n_j}(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

(1)$\Longrightarrow$(5). Claramente $\mathfrak{B}^{-1}\psi \in H_\infty(B_{c_0})$. Del Lema 3.15 y el Teorema 3.14, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{B}^{-1}\psi)_n(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

Fijemos $n \geq n_0$. Luego, por el Teorema 3.8 el operador

$$M^*_{(\mathfrak{B}^{-1}\psi)_n} : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$$

es hipercíclico. Utilizando (entre otros) el Lema 3.11, el Teorema 3.9 y la Observación 3.17, calculamos

$$\begin{aligned}1 &< \|M^*_{(\mathfrak{B}^{-1}\psi)_n}\| \\ &= \sup_{0\neq f\in H_2(\mathbb{D}^n)} \frac{\|M^*_{(\mathfrak{B}^{-1}\psi)_n}(f)\|_{H_2(\mathbb{D}^n)}}{\|f\|_{H_2(\mathbb{D}^n)}} \\ &\leq \sup_{0\neq f\in\mathfrak{P}_2} \frac{\|M^*_{\mathfrak{B}^{-1}\psi_n}(f)\|_{\mathfrak{P}_2}}{\|f\|_{\mathfrak{P}_2}} \\ &= \|M^*_{\mathfrak{B}^{-1}\psi_n}\|_{\mathfrak{P}_2} \\ &= \|\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}M^*_{\mathfrak{B}^{-1}\psi_n}\|_{\mathfrak{P}_2} \\ &= \|\mathfrak{B}^{-1}M^*_{\psi_n}\mathfrak{B}\| \\ &= \|M^*_{\psi_n}\| \\ &= \|\psi_n\|_{\mathscr{H}_\infty}.\end{aligned}$$

Un razonamiento análogo a la primera implicación nos permite obtener que $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

(5) $\Longrightarrow$ *(4)* es trivial.

(4) $\Longrightarrow$ *(1)*. Basta probar que se verifica la cuarta equivalencia del Teorema 3.14. Una vez probada, el Lema 3.15 nos permitirá concluir que M_ψ^* es hipercíclico.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ y $s_0 \in \mathbb{C}_+$ tal que $|\psi_n(s_0)| = 1$. Consideremos $z_0 = (\mathfrak{p}_1^{-s_0}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{-s_0})$, donde $\mathfrak{p}_j$ denota al j-ésimo número primo. Sean $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ los coeficientes de la serie de Dirichlet ψ. Al aplicar la transformada de Bohr a ψ, notemos $a_\alpha = a_k$ si $k = \mathfrak{p}^\alpha$ (con $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$). Observemos por otro lado que dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$z_0^\alpha = \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j^{-\alpha_j s_0} = \left(\prod_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j^{\alpha_j} \right)^{-s_0} = (\mathfrak{p}^\alpha)^{-s_0}.$$

Teniendo esto en cuenta, calculamos

$$\mathfrak{B}^{-1}\psi_n(z_0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z_0^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha (\mathfrak{p}^\alpha)^{-s_0} = \sum_{\substack{k = \mathfrak{p}^\alpha \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} a_k k^{-s_0} = \psi_n(s_0).$$

Como fue mencionado en la Observación 3.17, $\mathfrak{B}^{-1}\psi_n$ es holomorfa en $\mathbb{D}^n$, por lo que las igualdades anteriores tienen sentido no solo formalmente, sino que las series convergen. Así $|\mathfrak{B}^{-1}\psi_n(z_0)| = 1$, y luego $\mathfrak{B}^{-1}\psi_n(\mathbb{D}^n) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ como buscábamos probar.

(1) $\Longrightarrow$ *(2)* se deduce directamente del Lema 3.15.

(2) $\Longrightarrow$ *(1)* es inmediato. $\square$

Capítulo 4

Operadores de Composición

Analicemos ahora los operadores de composición en el espacio

$$\mathscr{H}_2 = \left\{ f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \ : \ \|f\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

En general y sin analizar cuestiones de dominio, el **operador de composición** inducido por una función Φ se nota por C_Φ y actúa de la siguiente manera:

$$C_\Phi(f) = f \circ \Phi.$$

4.1. Caracterización en $\mathscr{H}_2$

La motivación detrás de esta sección es caracterizar a las funciones holomorfas cuyo operador de composición asociado en $\mathscr{H}_2$ está bien definido. Esto es, aquellas funciones Φ tales que $f \circ \Phi \in \mathscr{H}_2$ para cada $f \in \mathscr{H}_2$. El interés en los operadores de composición entre espacios de funciones surge en 1925, cuando Littlewood [L25] prueba que cualquier función analítica $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ induce un operador de composición acotado en $H_p(\mathbb{D})$, y en particular este operador es una contracción si $\varphi(0) = 0$. El resultado es conocido como el Principio de Subordinación de Littlewood:

Teorema 4.1. *(Principio de Subordinación de Littlewood) Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y $1 \leq p < \infty$. Luego, el operador de composición definido por $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ es un operador continuo de $H_p(\mathbb{D})$ en sí mismo, y*

$$(1 - |\varphi(0)|^2)^{-1/p} \leq \|C_\varphi\| \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \right)^{1/p}.$$

En particular, C_φ es una contracción si y solo si $\varphi(0) = 0$.

La caracterización de los operadores de composición en $\mathscr{H}_2$ no permite tanta generalidad sobre la función que lo induce como el Teorema 4.1. Como una primera observación, recordemos que toda serie $f \in \mathscr{H}_2$ converge a una función analítica en $\mathbb{C}_{1/2}$, y por lo tanto es necesario que $f \circ \Phi$ sea analítica en $\mathbb{C}_{1/2}$ para que Φ defina un operador de composición en $\mathscr{H}_2$. Esto nos permite restringir la clase de funciones admisibles a funciones holomorfas de la forma $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$.

Notemos por $\mathscr{D}_c$ al conjunto de series de Dirichlet no divergentes en todo punto, es decir, al conjunto de series de Dirichlet para las cuales existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que la serie es convergente en $\mathbb{C}_\theta$. Gordon y Hedenmalm [GH99] prueban en 1999 el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *Una función analítica $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ induce un operador de composición acotado $C_\Phi : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ si y solo si:*

1. *Φ es de la forma $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, con $c_0 \in \mathbb{N}_0$ y $\varphi \in \mathscr{D}_c$,*
2. *Φ tiene una extensión analítica a $\mathbb{C}_+$ (también notada por Φ) de manera que:*
   - *$\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 > 0$,*
   - *$\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$.*

Además, C_Φ es una contracción si y solo si $c_0 > 0$.

El teorema anterior no brinda información sobre la abscisa de convergencia de φ; sólo afirma que la serie converge en algún semiplano y puede ser extendida analíticamente a $\mathbb{C}_+$. En 2015, Queffélec y Seip [QS15] logran refinar el resultado de Gordon y Hedenmalm demostrando que φ converge uniformemente en $\mathbb{C}_+$ ó $\mathbb{C}_{1/2}$. En este refinamiento, Queffélec y Seip además reemplazan Φ por φ en las condiciones del segundo ítem. El resultado en cuestión es el siguiente:

Teorema 4.3. *Una función analítica $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ induce un operador de composición acotado $C_\Phi : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ si y solo si:*

1. *Φ es de la forma $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, con $c_0 \in \mathbb{N}_0$ y $\varphi \in \mathscr{D}_c$,*
2. *φ tiene una extensión analítica a $\mathbb{C}_+$ de manera que:*
   - *$\sigma_u(\varphi) \leq 0$ y $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 > 0$,*
   - *$\sigma_u(\varphi) \leq \frac{1}{2}$ y $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$.*

Además, C_Φ es una contracción si y solo si $c_0 > 0$.

El objetivo principal de este capítulo es demostrar el Teorema 4.3. Vamos a entrelazar ideas del artículo original de Gordon y Hedenmalm [GH99] y del artículo de Queffélec y Seip [QS15], así como también comentarios presentes en el libro de Martine y Hervé Queffélec [QQ20] sobre el tema.

Observación 4.4. El Teorema 1.15 asegura la continuidad de todo operador de composición en $\mathscr{H}_2$. En efecto, notemos primero que los funcionales de evaluación k_s en $\mathscr{H}_2$ (definidos análogamente a la Definición 3.2) son continuos, ya que si $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ y $f_N \longrightarrow f$ en $\mathscr{H}_2$ (con coeficientes $a_n^{(N)}$ y a_n respectivamente), de la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} |k_s(f_N) - k_s(f)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(N)} - a_n) n^{-s} \right| \\ &\leq \|f_N - f\|_{\mathscr{H}_2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2Re(s)} \\ &= \|f_N - f\| \zeta(2Re(s)), \end{aligned}$$

donde ζ es la función zeta de Riemann. Por hipótesis, esta última expresión tiende a cero si $N \longrightarrow \infty$ (y $\zeta(2Re(s))$ converge ya que $2Re(s) > 1$).

Ahora, si $C_\Phi : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ está bien definido, $f_N \longrightarrow f$ en $\mathscr{H}_2$ y $C_\Phi(f_N) \longrightarrow g$, tenemos primero que $f_N(s)$ converge a $f(s)$ para todo $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. Al ser f y Φ continuas, $f_N(\Phi(s)) \longrightarrow f(\Phi(s))$ para todo $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. Luego, por unicidad del límite $g(s) = f(\Phi(s))$ para todo $s \in \mathbb{C}_{1/2}$, es decir, $g \equiv C_\Phi(f)$.

4.1.1. Un Resultado Preliminar

Como un primer paso hacia la demostración del Teorema 4.3, caracterizamos a las funciones cuya composición con un elemento de $\mathscr{H}_2$ resulta en una serie de Dirichlet convergente, aunque no necesariamente un elemento de $\mathscr{H}_2$. En este caso, los candidatos iniciales son las funciones analíticas $\Phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_{1/2}$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

Lema 4.5. *Sea $c \in \mathbb{R}$. Si $n^c \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $c \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{C}$ una función suave. Consideremos las diferencias k-iteradas $(\Delta^k f)(n)$ para $n \in \mathbb{N}$, definidas inductivamente a través de $(\Delta^0 f)(n) = f(n)$ y $(\Delta^{k+1} f)(n) = (\Delta^k g)(n)$, donde $g(n) = f(n+1) - f(n)$. Esta definición da lugar a la fórmula

$$(\Delta^k f)(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(n+j) = \int_{[0,1]^k} f^{(k)}(n + t_1 + \cdots + t_k) dt_1 \cdots dt_k. \quad (4.1)$$

De las hipótesis, claramente c no es un entero negativo. Supongamos ahora que $c \notin \mathbb{N}_0$. Sea k un entero mayor que c y consideremos $f(t) = t^c$. Notemos que $(\Delta^k f)(n)$ es un entero para todo $k, n \in \mathbb{N}$, y por otro lado $f^{(k)}(t) = c(c-1)\cdots(c-k+1)t^{c-k}$. Como $k > c$, de la expresión integral en la ecuación (4.1) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} (\Delta^k f)(n) = 0. \quad (4.2)$$

Además, como c no es un entero $f^{(k)}$ tiene signo constante, y la expresión integral implica que $(\Delta^k f)(n) \neq 0$. Al ser $(\Delta^k f)(n)$ también un entero, esto quiere decir que $|(\Delta^k f)(n)| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, una clara contradicción al límite en (4.2). □

Lema 4.6. *Para $k \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{G}(k)$ el semigrupo multiplicativo generado por el conjunto $\left\{1 + \frac{j}{k} \,:\, j \in \mathbb{N}\right\}$. Es decir,*

$$\mathcal{G}(k) = \left\{ \prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{n_j}{k}\right) \,:\, N, n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si $m, n \in \mathbb{N}$ son coprimos, luego

$$\mathcal{G}(m) \cap \mathcal{G}(n) \subset \mathbb{N}.$$

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \mathcal{G}(m) \cap \mathcal{G}(n)$. Claramente $\alpha \in \mathbb{Q}$ y $\alpha > 0$. Sea p/q su representación como fracción irreducible. Como elemento de $\mathcal{G}(m)$, α también admite representación como una fracción con denominador m^j para algún $j \in \mathbb{N}$, y como elemento de $\mathcal{G}(n)$ admite representación como una fracción con denominador n^k para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\alpha = \frac{p}{q} = \frac{p_1}{m^j} = \frac{p_2}{n^k},$$

para $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$. Al ser p/q irreducible, q divide a m^j y a n^k. Como m y n son coprimos, necesariamente $q = 1$ y luego $\alpha \in \mathbb{N}$. □

Lema 4.7. *Sea $\varphi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_\nu$ una función analítica no constante de la forma $\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$ (es decir, $\varphi \in \mathscr{D}_c$). Luego, $Re(c_1) > \nu$.*

Demostración. Sea $N \geq 2$ el primer índice tal que $c_N \neq 0$. Tenemos entonces que

$$\varphi(s) = c_1 + c_N N^{-s} + O((N+1)^{-Re(s)})$$

para $Re(s) \longrightarrow \infty$. En efecto, del Lema 2.15 tenemos que

$$(N+1)^s \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n n^{-s} \longrightarrow c_{N+1}$$

uniformemente si $Re(s) \longrightarrow \infty$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $\vartheta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| (N+1)^s \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n n^{-s} \right| - |c_{N+1}| \leq \left| (N+1)^s \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n n^{-s} - c_{N+1} \right| < \varepsilon$$

para todo $s \in \mathbb{C}_\vartheta$, y por lo tanto

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n n^{-s} \right| \leq C(N+1)^{-Re(s)},$$

con $C = |c_{N+1}| + \varepsilon > 0$.

Ahora, fijemos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $c_N N^{it_0} = -|c_N|$. Luego, si $s = \sigma + it_0$ tenemos que $c_N N^{-s} = -|c_N| N^{-\sigma}$, y en este caso calculamos, para σ suficientemente grande (pues $(N+1)^{-\sigma} = o(N^{-\sigma})$ si $\sigma \longrightarrow \infty$),

$$Re(c_1) = Re(\varphi(s)) + |c_N| N^{-\sigma} + O((N+1)^{-\sigma}) \geq Re(\varphi(s)) > \nu.$$

□

Lema 4.8. *Sea $k \in \mathbb{N}$, y sea $\Phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_\nu$ una función analítica de la forma $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, con $c_0 \in \mathbb{N}_0$ y $\varphi \in \mathscr{D}_c$. Luego $k^{-\varphi} \in \mathscr{D}_c$, con $\sigma_u(k^{-\varphi}) \leq \sigma_u(\varphi)$ y $\sigma_a(k^{-\varphi}) \leq \sigma_a(\varphi)$. Más aún, lo mismo vale para $k^{-\Phi}$ a través de la expresión*

$$k^{-\Phi(s)} = k^{-c_0 s} k^{-\varphi(s)}.$$

Demostración. Supongamos que

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}.$$

Recordemos que del Teorema 2.7, toda serie de Dirichlet que converge en algún semiplano $\mathbb{C}_\theta$ converge absolutamente en $\mathbb{C}_{\theta+1}$. Tomando $\vartheta > \sigma_a(\varphi)$ y $s \in \mathbb{C}_\vartheta$, para

$k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} k^{-\varphi(s)} &= k^{-c_1} \exp\left(-\log(k) \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-s} \right) \\ &= k^{-c_1} \prod_{n=2}^{\infty} \exp\left(-\log(k) c_n n^{-s} \right) \\ &= k^{-c_1} \prod_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-c_n \log(k))^j}{j!} n^{-js} \right). \end{aligned}$$

Notemos que $n^{-js} = (n^j)^{-s}$. Distribuyendo los productos y reordenando la serie, llegamos a la igualdad

$$k^{-\varphi(s)} = k^{-c_1} \sum_{m=1}^{\infty} d_m m^{-s}.$$

En esta igualdad, agrupamos en cada d_m todos los términos acompañados del factor m^{-s} luego de distribuir el producto. Estos términos son exactamente aquellos en los que $n^j = m$. Como hay finitas formas de escribir un número natural como potencias de otros números, los coeficientes d_m están bien definidos.

Por otro lado, tenemos

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{(-c_n \log(k))^j}{j!} \right| n^{-js} \right) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|c_n| \log(k))^j}{j!} n^{-js} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m m^{-s}$$

para ciertos $D_m \geq 0$ (definidos análogamente a d_m) y $s \in \mathbb{C}_\vartheta$. Además, por la forma en que construimos las series se verifica $|d_m| \leq D_m$, y

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m m^{-s} = \exp\left(\log(k) \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n^{-s} \right) < \infty.$$

Es decir, la expresión en serie de $k^{-\varphi(s)}$ converge absolutamente en $\mathbb{C}_\vartheta$, y por lo tanto $k^{-\varphi} \in \mathscr{D}_c$ con $\sigma_a(k^{-\varphi}) \leq \sigma_a(\varphi)$.

Veamos ahora que $\sigma_u(k^{-\varphi}) \leq \sigma_u(\varphi)$. Fijado $\vartheta > \sigma_u(\varphi)$, del Teorema 2.13 φ está acotada en $\mathbb{C}_\vartheta$ por una constante $M > 0$. Por otro lado, si $\theta < Re(s) \leq \vartheta$ tenemos que

$$Re(\varphi(s)) = Re(\Phi(s)) - c_0 Re(s) > \nu - c_0 \vartheta,$$

y por lo tanto $|k^{-\varphi(s)}| = k^{-Re(\varphi(s))} \leq \text{máx}\{k^M, k^{c_0\vartheta - \nu}\}$ si $s \in \mathbb{C}_\theta$, es decir, $k^{-\varphi}$ está acotada en $\mathbb{C}_\theta$. De lo anterior, tenemos además que la función $f(s) = k^{-\varphi(s+\theta)}$ es una serie de Dirichlet convergente en algún semiplano que se extiende a una función holomorfa y acotada en $\mathbb{C}_+$. Aplicando el Teorema 2.12 concluimos que $\sigma_u(f) \leq 0$, y así $\sigma_u(k^{-\Phi}) \leq \theta$. □

Teorema 4.9. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una función analítica $\Phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_{1/2}$ define un operador de composición $C_\Phi : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{D}_c$ si y solo si es de la forma*

$$\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s),$$

donde $c_0 \in \mathbb{N}_0$ y $\varphi \in \mathscr{D}_c$.

Demostración. Supongamos que $C_\Phi(f) = f \circ \Phi \in \mathscr{D}_c$ para cada $f \in \mathscr{H}_2$. En particular, $k^{-s} \circ \Phi = k^{-\Phi(s)} \in \mathscr{D}_c$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Notamos

$$k^{-\Phi(s)} = \sum_{n=N(k)}^{\infty} a_n^{(k)} n^{-s},$$

donde $N(k) \in \mathbb{N}$ es el índice del primer coeficiente no nulo de $k^{-\Phi(s)}$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$, y notemos por α_k al número complejo tal que $a_{N(k)}^{(k)} = e^{\alpha_k}$.

Ahora, si $\vartheta > \sigma_c(k^{-\Phi(s)})$ la función $g(s) = \log(N(k))s - \log(k)\Phi(s)$ es continua en $\mathbb{C}_\vartheta$. Por otro lado, aplicando el Lema 2.15 tenemos que

$$N(k)^s k^{-\Phi(s)} = e^{g(s)} \longrightarrow a_{N(k)}^{(k)}$$

uniformemente si $Re(s) \to \infty$. En base a esto, podemos elegir ϑ suficientemente grande de modo que

$$g(\mathbb{C}_\vartheta) \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Z}} (U(k) + 2\pi i r) := \bigcup_{r\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(r),$$

donde $U(k)$ es un entorno suficientemente pequeño de α_k de manera que $\mathcal{O}(r) \cap \mathcal{O}(s) = \emptyset$ si $r \neq s$.

Sin embargo, como g es continua y $\mathbb{C}_\vartheta$ es conexo necesariamente $g(\mathbb{C}_\vartheta)$ también lo es, por lo que existe $r_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $g(\mathbb{C}_\vartheta) \subset \mathcal{O}(r_0)$. Luego, vale el siguiente límite uniformemente:

$$\lim_{Re(s)\to\infty} s\log(N(k)) - \Phi(s)\log(k) = \alpha_k + 2\pi i r_0 \tag{4.3}$$

Dividiendo por $s\log(k)$ (para $k > 1$) obtenemos

$$\lim_{Re(s)\to\infty} \frac{\Phi(s)}{s} = \frac{\log(N(k))}{\log(k)}$$

uniformemente.

De lo anterior, podemos concluir que el número real

$$c_0 := \frac{\log(N(k))}{\log(k)} = \lim_{Re(s)\to\infty} \frac{\Phi(s)}{s}$$

no depende de k. Observando que $N(k) = k^{c_0} \in \mathbb{N}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y aplicando el Lema 4.5, tenemos que $c_0 \in \mathbb{N}_0$.

Sea ahora $\varphi(s) = \Phi(s) - c_0 s$. Buscamos probar que $\varphi \in \mathscr{D}_c$. De la expresión para $k^{-\Phi(s)}$ obtenemos

$$N(k)^s k^{-\Phi(s)} = k^{c_0 s} k^{-\Phi(s)} = k^{-\varphi(s)} = \sum_{n=k^{c_0}}^{\infty} a_n^{(k)} \left(\frac{n}{k^{c_0}}\right)^{-s}.$$

Para simplificar la notación, fijado k llamemos $\tilde{a}_j = a_{k^{c_0}+j}^{(k)}$. Podemos reescribir esta última expresión para $k^{-\varphi(s)}$ de la siguiente manera:

$$k^{-\varphi(s)} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \left(1 + \frac{1}{k^{c_0}}\right)^{-s} + \tilde{a}_2 \left(1 + \frac{2}{k^{c_0}}\right)^{-s} + \cdots := \tilde{a}_0 + h(s).$$

Aplicando logaritmo y recordando la ecuación (4.3), llegamos a la expresión

$$-\varphi(s)\log(k) = \log(\tilde{a}_0) + \log\left(1 + \frac{h(s)}{\tilde{a}_0}\right) + 2\pi i r_1 \tag{4.4}$$

para cierto $r_1 \in \mathbb{Z}$ y en cierto dominio donde el logaritmo de la expresión $1 + \frac{h(s)}{\tilde{a}_0}$ defina una función holomorfa (r_1 está fijo para todo punto en cierto semiplano por el argumento mencionado antes de la ecuación (4.3)). Concretamente, para que suceda esto basta con que se verifique la desigualdad $|h(s)| < |\tilde{a}_0|$, pues en dicho caso

$$\left|Re\left(\frac{h(s)}{\tilde{a}_0}\right)\right| \leq \left|\frac{h(s)}{\tilde{a}_0}\right| < 1$$

y luego

$$Re\left(1 + \frac{h(s)}{\tilde{a}_0}\right) = 1 + Re\left(\frac{h(s)}{\tilde{a}_0}\right) > 0.$$

Veamos que nuevamente podemos elegir ϑ suficientemente grande de modo que esta desigualdad valga en $\mathbb{C}_\vartheta$. En efecto, del Lema 2.15 tenemos que

$$\lim_{Re(s)\to\infty} k^{c_0 s} k^{-\Phi(s)} = a^{(k)}_{k^{c_0}} = \tilde{a}_0$$

uniformemente. Pero $k^{c_0 s}k^{-\Phi(s)} = k^{-\varphi(s)} = \tilde{a}_0 + h(s)$. Luego, necesariamente $h(s) \longrightarrow 0$ uniformemente si $Re(s) \longrightarrow \infty$, y por lo tanto existe $\vartheta > 0$ tal que $|h(s)| < |\tilde{a}_0|$ si $s \in \mathbb{C}_\vartheta$.

Expandamos ahora en la ecuación (4.4) la serie de Taylor de $\log(1+z)$ alrededor de $z = 0$. Llegamos a la expresión

$$-\varphi(s)\log(k) = \log(\tilde{a}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\tilde{a}_0^{-n} h(s)^n + 2\pi i r, \tag{4.5}$$

válida si $s \in \mathbb{C}_\vartheta$. Por otro lado, del Teorema 2.7 podemos suponer que $h(s)$ es absolutamente convergente en $\mathbb{C}_\vartheta$ ya que ϑ es arbitrariamente grande, y luego podemos reordenar la serie de Taylor en la ecuación (4.5) al expandir en cada término la expresión

$$h(s)^n = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_j \left(1 + \frac{j}{k^{c_0}}\right)^{-s}\right]^n.$$

Esto resulta en que $\varphi(s)$ converge absolutamente en $\mathbb{C}_\vartheta$ y es de la forma

$$\varphi(s) = \beta_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n_1,\dots,n_q=1}^{\infty} \beta_{n_1,\dots,n_q}\left(1 + \frac{n_1}{k^{c_0}}\right)^{-s} \cdots \left(1 + \frac{n_q}{k^{c_0}}\right)^{-s},$$

donde $\beta_0, \beta_{n_1,\dots,n_q} \in \mathbb{C}$. En otras palabras, $\varphi(s)$ es una serie de Dirichlet general convergente donde las bases de los exponentes son elementos del semigrupo multiplicativo $\mathcal{G}(k^{c_0})$. Más aún, esto vale para cada $k > 1$, pues $\varphi(s)$ no depende de k. Luego, del Lema 4.6 tenemos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}(k^{c_0}) \subset \mathbb{N}.$$

De la unicidad de coeficientes para series de Dirichlet generales (Teorema 2.16) concluimos que los únicos exponentes con coeficientes no nulos en estas expresiones son números naturales. Esto es, $\varphi(s) \in \mathscr{D}_c$, como buscábamos probar.

Recíprocamente, supongamos que $\Phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_{1/2}$ es una función holomorfa de la forma

$$\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s},$$

donde $c_0 \in \mathbb{N}_0$ y φ converge en algún semiplano. Veamos que $f \circ \Phi \in \mathscr{D}_c$ para cada $f \in \mathscr{H}_2$.

Primero que nada, del Lema 4.8 tenemos que

$$k^{-\Phi(s)} = k^{-c_0 s - c_1} \sum_{n=1}^{\infty} d_{n,k} n^{-s}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, con $\sigma_a(k^{-\Phi}) \leq \sigma_a(\varphi)$. Sea ahora $f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s} \in \mathscr{H}_2$. Similarmente a la demostración del Lema 4.8, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-\Phi(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-c_0 s - c_1} \sum_{n=1}^{\infty} d_{n,k} n^{-s} = \sum_{k,n=1}^{\infty} a_k d_{n,k} k^{-c_1} (n k^{c_0})^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} e_m m^{-s}$$

para ciertos $e_m \in \mathbb{C}$. Estos coeficientes surgen de agrupar todos los (finitos) términos correspondientes a índices $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $nk^{c_0} = m$. Análogamente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k^{-c_0 s - Re(c_1)} \prod_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|c_n| \log(k))^j}{j!} n^{-js} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k^{-c_0 s - Re(c_1)} \exp\left(\log(k) \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n^{-s} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m m^{-s} \tag{4.6}$$

para ciertos $E_m \geq 0$, con $|e_m| \leq E_m$.

Analizamos la convergencia de estas series. Supongamos primero que $c_0 \neq 0$. Consideremos $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n^{-Re(s)} < M$$

para cada $s \in \mathbb{C}_{\gamma_1}$ y para cierto $M > 0$. Por otro lado, consideremos $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ de manera que $M - c_0\gamma_2 - Re(c_1) < -\sigma_a(f)$, y sea $\gamma > \text{máx}\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Ahora, para $s \in \mathbb{C}_\gamma$, utilizando la ecuación (4.6) calculamos

$$\sum_{m=1}^{\infty} E_m m^{-Re(s)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k^{M - c_0 Re(s) - Re(c_1)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k^{M - c_0\gamma - Re(c_1)} < \infty.$$

Por lo tanto $\sum_{m=1}^{\infty} E_m m^{-s} \in \mathscr{D}_c$, y luego $\sum_{m=1}^{\infty} e_m m^{-s} = f \circ \Phi \in \mathscr{D}_c$.

Si $c_0 = 0$, del Lema 4.7 tenemos que $Re(c_1) > 1/2$. Utilizando el hecho de que $\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n^{-Re(s)} \longrightarrow 0$ uniformemente cuando $Re(s) \longrightarrow \infty$ (ver Lema 2.15) podemos concluir que en cierto semiplano suficientemente remoto se verifica la desigualdad

$$\sum_{m=1}^{\infty} E_m m^{-Re(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k^{-Re(c_1)} \exp\left(\log(k) \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n^{-Re(s)}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

para cierto $\varepsilon > 0$. Como $\sigma_a(f) \leq 1/2$ (pues $f \in \mathscr{H}_2$), la serie del lado derecho de la desigualdad es convergente, y al igual que en el caso anterior concluimos que $f \circ \Phi \in \mathscr{D}_c$. □

4.1.2. El Resultado Principal: Primera Parte

En esta sección demostramos una parte del Teorema 4.3. Para simplificar notación, denotamos $\mathscr{D}_{\theta,\nu}$ al conjunto de funciones analíticas $\varphi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_\nu$ de la forma $\varphi(s) = c_0 s + \psi(s)$, con $c_0 \in \mathbb{N}_0$ y $\psi \in \mathscr{D}_c$. Bajo esta notación, las funciones Φ que según el Teorema 4.3 inducen operadores de composición en $\mathscr{H}_2$ verifican $\Phi \in \mathscr{D}_{1/2,1/2}$ (en conjunto con la condición que refiere a cierta extensión analítica a $\mathbb{C}_+$).

La implicación a demostrar en este capítulo es la siguiente:

> Si una función analítica $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ induce un operador de composición acotado en $\mathscr{H}_2$ (y del Teorema 4.9, $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s) \in \mathscr{D}_{1/2,1/2}$), luego φ se extiende analíticamente a $\mathbb{C}_+$ de manera que:
>
> 1. $\sigma_u(\varphi) \leq 0$ y $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 > 0$,
> 2. $\sigma_u(\varphi) \leq \frac{1}{2}$ y $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$.

En la prueba hacemos uso de algunos resultados clásicos que enunciamos a continuación.

Un primer resultado refiere al concepto de *familia normal*.

Definición 4.10. Sea U un abierto en $\mathbb{C}$. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas es una **familia normal** en U si toda sucesión de funciones en $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión convergente uniformemente en compactos de U (y por lo tanto holomorfa en U). Los límites de una familia normal se suelen denominar **límites normales**.

Paul Montel [M27] caracterizó a los conjuntos de funciones holomorfas en un abierto U que forman familias normales.

Teorema 4.11. *(Teorema de Montel) Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas definidas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es normal si y solo si es localmente uniformemente acotada. Es decir, si para cada $z_0 \in U$ existe un entorno V de z_0 y $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in V$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Otro resultado, ampliamente utilizado en el análisis complejo y probado por Hadamard en el siglo XIX, se conoce como el Teorema de las Tres Líneas:

Teorema 4.12. *(Teorema de las Tres Líneas de Hadamard) Sea f una función acotada definida en el conjunto*

$$\Omega_{a,b} = \{z = x + iy \, : \, a \leq x \leq b\},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. *Supongamos que* f *es continua en* $\Omega_{a,b}$ *y analítica en el interior de* $\Omega_{a,b}$. *Sea*

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x+iy)|.$$

Luego, $\log(M(x))$ *es convexa en* $[a, b]$. *Es decir, para cada* $t \in [0, 1]$ *se verifica*

$$M(ta + (1-t)b) \leq M(a)^t M(b)^{1-t}.$$

En este caso, se dice que $M(x)$ *es* ***logarítmicamente convexa*** *en* $[a, b]$.

Haremos uso también del Teorema de Herglotz, otro resultado célebre del análisis que refiere a una representación integral para funciones armónicas positivas.

Teorema 4.13. *(Teorema de Herglotz) Sea* $f : H \to \mathbb{R}$ *una función armónica en el semiplano superior*

$$H = \{z = x + iy \,:\, y > 0\}$$

(es decir, $f(z) = f(x+iy)$ *es armónica vista como función de* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*). Luego,* f *es positiva si y solo si*

$$f(x+iy) = cy + \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) d\mu(t),$$

donde $c \geq 0$,

$$P_a(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + t^2}, \quad a > 0$$

es el ***núcleo de Poisson*** *de* $\mathbb{C}_+$ *en* a, *y* μ *es una medida no negativa tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty.$$

Vamos a utilizar además una versión del Teorema de Aproximación de Kronecker, un profundo resultado en la teoría de aproximación demostrado por Kronecker en el siglo XIX.

Teorema 4.14. *(Teorema de Aproximación de Kronecker) Sean* $x_1, \ldots, x_n$ *números reales linealmente independientes sobre* $\mathbb{Z}$, *es decir, números reales distintos tales que si* $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ *luego*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0 \implies m_1 = \cdots = m_n = 0.$$

Sean además $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{T}$ *y* $\varepsilon > 0$. *Definimos*

$$A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}^+ \,:\, \max_{1 \leq j \leq n} |e^{ix_j t} - w_j| < \varepsilon\}.$$

Luego, el conjunto A_ε *es no vacío para cada* $\varepsilon > 0$, *y por lo tanto la función* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^n$ *definida por*

$$h(t) = (e^{ix_1 t}, \ldots, e^{ix_n t})$$

tiene imagen densa.

Precisamos los siguientes lemas sobre ciertas propiedades que verifican los elementos de $\mathscr{D}_{\theta,\nu}$.

Lema 4.15. *Sea $\varphi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$ con $c_0 = 0$ (es decir, φ tiene expresión como serie de Dirichlet convergente en algún semiplano). Luego, $\sigma_u(\varphi) \leq \theta$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos $\theta = \nu = 0$, pues en caso contrario podemos considerar la función $\varphi(s+\theta) - \nu$. Ahora, si $h : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{R}$ es cierta función armónica definida en $\mathbb{C}_+$, podemos definir la función $\tilde{h}(x+iy) = h(y+ix)$ en $H = \{x+iy \,:\, y > 0\}$. Del Teorema 4.13, h es positiva si y solo si

$$h(x+iy) = cx + \int_{\mathbb{R}} P_x(y-t)d\mu(t),$$

para cierta constante $c \geq 0$ y cierta medida no negativa μ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty.$$

Por otro lado, derivando la función $f(\sigma,t) = \sigma P_\sigma(t)$ obtenemos que es creciente con respecto a σ:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma,t) = \frac{1}{\pi}\frac{2\sigma(\sigma^2+t^2) - 2\sigma^3}{(\sigma^2+t^2)^2} = \frac{2t^2\sigma}{\pi(\sigma^2+t^2)^2} > 0.$$

Luego, si $\sigma \leq \tau$ entonces

$$P_\sigma(t) \leq \frac{\tau}{\sigma}P_\tau(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Integrando obtenemos

$$h(\sigma+it) \leq \frac{\tau}{\sigma}h(\tau+it).$$

Recordemos que φ está acotada por cierta constante $M > 0$ en algún semiplano $\mathbb{C}_\vartheta$, con $\vartheta > 0$. Consideramos ahora la función $h(s) = Re(\sqrt{\varphi(s)})$, bien definida y positiva pues $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, y claramente armónica. Notemos que aplicar raíz cuadrada lleva $\mathbb{C}_+$ al conjunto

$$A = \left\{re^{i\theta} \,:\, r > 0,\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \{x+iy \,:\, x,y \in \mathbb{R},\ x > |y|\}.$$

Luego, para cada $s \in \mathbb{C}_+$ se verifica $\sqrt{|\varphi(s)|} = |\sqrt{\varphi(s)}| \leq \sqrt{2}h(s)$. Si $0 < \sigma \leq \vartheta$, en base a esto calculamos

$$\sqrt{|\varphi(\sigma+it)|} \leq \sqrt{2}h(\sigma+it) \leq \sqrt{2}\frac{\vartheta}{\sigma}h(\vartheta+it) \leq \sqrt{2}\frac{\vartheta}{\sigma}\sqrt{|\varphi(\vartheta+it)|} \leq \sqrt{2M}\frac{\vartheta}{\sigma},$$

y por lo tanto φ está acotada en $\mathbb{C}_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Del Teorema 2.12 y el Teorema 2.13 obtenemos $\sigma_u(\varphi) \leq \varepsilon$, y de la arbitrariedad de ε concluimos que $\sigma_u(\varphi) \leq 0$.

□

Lema 4.16. *Sea $\Phi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$ de la forma $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ ($\varphi \in \mathscr{D}_c$). Luego:*

1. *Si φ es constante, el valor que asume pertenece a $\overline{\mathbb{C}_{\nu - c_0\theta}}$.*
2. *Si φ es no constante, φ lleva $\mathbb{C}_\theta$ en $\mathbb{C}_{\nu - c_0\theta}$.*

3. Si φ es no constante, para todo $\vartheta > \theta$ existe $\varepsilon > 0$ tal que φ lleva $\mathbb{C}_\vartheta$ en $\mathbb{C}_{\nu+\varepsilon-c_0\theta}$.

Demostración. En la demostración del Lema 4.8 vimos que la función $2^{-\varphi}$ está acotada en $\mathbb{C}_\theta$. Además, si $\vartheta > \theta$ y $s \in \partial\mathbb{C}_\vartheta$ tenemos que

$$Re(\varphi(s)) = Re(\Phi(s)) - c_0 Re(s) > \nu - c_0 Re(s) = \nu - c_0\vartheta,$$

y así $|2^{-\varphi(s)}| < 2^{c_0\vartheta-\nu}$. Del principio de módulo máximo para funciones acotadas en dominios no acotados, obtenemos $|2^{-\varphi(s)}| \leq 2^{c_0\vartheta-\nu}$ en $\mathbb{C}_\vartheta$. Haciendo tender ϑ a θ llegamos a $|2^{-\varphi(s)}| \leq 2^{c_0\theta-\nu}$ en $\mathbb{C}_\theta$. Esto quiere decir que $Re(\varphi(s)) \geq \nu - c_0\theta$ en $\mathbb{C}_\theta$, quedando probado (1). Ahora, si φ es no constante es una aplicación abierta, por lo que necesariamente vale la desigualdad estricta $|2^{-\varphi(s)}| < 2^{c_0\theta-\nu}$. Así $Re(\varphi(s)) > \nu - c_0\vartheta$ en $\mathbb{C}_\theta$, quedando probado (2).

Veamos ahora que si φ es no constante y $\vartheta > \theta$, φ lleva $\mathbb{C}_\vartheta$ en $\mathbb{C}_{\nu+\varepsilon-c_0\theta}$ para algún $\varepsilon > 0$. Sea $F(s) = 2^{-\varphi(s)}$, y para $x \geq \theta$ definimos el número real

$$M(x) = \sup\{|F(s)| \,:\, Re(s) > x\},$$

bien definido por el Teorema 2.13.

Vimos en la prueba de (1) y (2) que $M(\theta) \leq 2^{c_0\theta-\nu} := m$. Por otro lado, como φ es no constante y $\varphi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu-c_0\theta}$, del Lema 4.7 tenemos que $Re(c_1) > \nu - c_0\theta$, donde

$$\varphi(s) = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-s}.$$

Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $Re(c_1) \geq \nu + \varepsilon - c_0\theta$. Además, como $\sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-s} \longrightarrow 0$ uniformemente si $Re(s) \longrightarrow \infty$, para $\sigma > \theta$ suficientemente grande tenemos que

$$Re(\varphi(s)) \geq \nu + \frac{\varepsilon}{2} - c_0\theta$$

si $s \in \mathbb{C}_\sigma$, y por lo tanto $M(\sigma) < m$ (y claramente $M(x) < m$ si $x > \sigma$). Resta ver que $M(x) < m$ para cualquier $x > \theta$, no sólo para x suficientemente grande. A este fin, aplicamos el Teorema 4.12 para obtener que M es una función logarítmicamente convexa en $[\theta, \infty)$. Luego, si $\vartheta \in (\theta, \sigma)$ con $\vartheta = (1-\lambda)\theta + \lambda\sigma$ y $0 < \lambda < 1$, obtenemos

$$M(\vartheta) \leq M(\theta)^{1-\lambda} M(\sigma)^\lambda < m^{1-\lambda} m^\lambda = m.$$

Un razonamiento análogo al final de la prueba de (2) nos permite concluir que $\varphi(\mathbb{C}_\vartheta) \subset \mathbb{C}_{\nu+\varepsilon-c_0\theta}$. □

Estudiamos a continuación el concepto de *caracter* y su relación con las series de Dirichlet. La noción de caracter es fundamental en la demostración del teorema principal.

Definición 4.17. Un **caracter** es una función multiplicativa $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{T}$. Es decir, una función χ con dominio en $\mathbb{N}$ que satisface $|\chi(n)| = 1$ y $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Notamos por $\mathcal{M}$ al conjunto de todos los caracteres.

Observación 4.18. En varios de los siguientes resultados vamos a necesitar otorgarle estructura de espacio con medida a $\mathcal{M}$. La medida que utilizaremos se puede construir de la siguiente forma.

En primer lugar, consideramos a $\mathbb{T}$ como un grupo abeliano compacto con la multiplicación. Este grupo, al igual que todo grupo abeliano localmente compacto, admite cierta medida invariante por traslaciones a izquierda denominada *medida de Haar*, la cual es única una vez normalizada la medida de $\mathbb{T}$ (se puede consultar [QQ20] para más información sobre la medida de Haar). En el caso de $\mathbb{T}$ la medida de Haar coincide con la medida de Lebesgue, ya que ambas son invariantes por traslaciones a izquierda.

Ahora, consideramos el producto numerable de copias de $\mathbb{T}$, notémoslo $\Gamma = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}$. Le otorgamos a este espacio la medida producto considerando la medida de Haar μ en cada copia de $\mathbb{T}$. Esta medida producto es la única medida $\tilde{m}$ en Γ que verifica

$$\tilde{m}(B) = \prod_{j\in J} \mu(B_j)$$

para cada $B = \prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$, con $B_n = \mathbb{T}$ salvo para finitos índices en J.

Por último, la medida utilizada en $\mathcal{M}$ surge de identificar unívocamente los elementos de $\mathcal{M}$ con los de Γ. La identificación surge de observar que todo caracter, al ser multiplicativo, queda completamente determinado por los valores que asume en los números primos. Definimos la aplicación $\phi : \mathcal{M} \to \Gamma$ dada por

$$\phi(\chi) = (\chi(\mathfrak{p}_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

En efecto, dado $\chi \in \mathcal{M}$ claramente $\phi(\chi) \in \Gamma$, y recíprocamente, para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ podemos definir un caracter de manera que $\chi(p) = x_p$ para cada p primo. En base a esto, la medida que consideramos en $\mathcal{M}$ está dada por

$$m(A) = \tilde{m}(\phi(A)),$$

para cada conjunto $A \subset \mathcal{M}$ tal que $\phi(A)$ es $\tilde{m}$-medible.

Sea $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D}_c$. Dado un caracter $\chi \in \mathcal{M}$, definimos

$$f_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}.$$

Esta operación, denominada "*twisting*", tiene como resultado nueva serie de Dirichlet cuya abscisa de convergencia no necesariamente coincide con la de f. Sin embargo, vemos que las series de Dirichlet de la forma $f : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_\nu$ (esto es, series de Dirichlet convergentes en $\mathbb{C}_\theta$ cuya imagen está contenida en algún semiplano) sí preservan cierta abscisa de convergencia.

Extendemos la definición de f_χ a funciones $f : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_\nu$ de la forma $f(s) = c_0 s + g(s)$, con $g \in \mathscr{D}_c$. En ese caso definimos

$$f_\chi(s) = c_0 s + g_\chi(s).$$

Como ejemplo particular de un caracter, dado $\tau \in \mathbb{R}$ consideremos la función $\chi(n) = n^{-i\tau}$. Sea $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D}_c$. Las funciones f_χ asociadas a caracteres de esta forma se denominan *traslaciones verticales* de f, y se notan también por f_τ. La terminología se debe a que

$$f_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-i\tau} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(s+i\tau)} = f(s + i\tau).$$

También nos referiremos como "traslaciones verticales" a funciones de la forma f_τ, con $f(s) = c_0 s + g(s)$, aunque en estos casos no se verifique $f_\tau(s) = f(s + i\tau)$.

El Lema 4.15 y el Lema 4.16 son resultados extremadamente útiles en lo que respecta a los contenidos de este capítulo, ya que facilitan el estudio de las funciones en $\mathscr{D}_{\theta,\nu}$. Más específicamente, con este tipo de funciones podremos hacer uso de ciertos resultados fuertes sobre el comportamiento de las series de Dirichlet en su semiplano de convergencia uniforme (como por ejemplo el Teorema 2.13).

Presentamos a continuación otras propiedades de utilidad, esta vez referidas a las traslaciones verticales de funciones $\Phi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$ y su relación con Φ_χ, para caracteres $\chi \in \mathcal{M}$.

Teorema 4.19. *Sea $\Phi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$. Luego, el conjunto $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ de traslaciones verticales de φ es una familia normal en $\mathbb{C}_\theta$.*

Demostración. Si Φ es constante el resultado es trivial. Si Φ es no constante y es de la forma $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ (con $\varphi \in \mathscr{D}_c$), del Lema 4.16 $\varphi(\mathbb{C}_\theta) \subset \mathbb{C}_{\nu - c_0\theta}$. Luego, del Lema 4.15 resulta que φ converge uniformemente en $\mathbb{C}_\theta$ y por lo tanto está acotada en cualquier semiplano contenido en $\mathbb{C}_\theta$, por el Teorema 2.13. Ahora, dado $s_0 \in \mathbb{C}_\theta$ consideramos $\theta < \vartheta < Re(s_0)$, un entorno V de s_0 contenido en $\mathbb{C}_\vartheta$ y $V \subset K \subset \mathbb{C}_\vartheta$, con K compacto. Tenemos entonces que para cada $s_1 \in V$,

$$|\Phi_\tau(s_1)| \leq c_0|s_1| + |\varphi(s_1 + i\tau)| \leq c_0 \sup_{s\in K}|s| + \sup_{s\in\mathbb{C}_\vartheta}|\varphi(s)| := M.$$

Es decir, la familia $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ es localmente uniformemente acotada, y del Teorema de Montel (Teorema 4.11) es una familia normal en $\mathbb{C}_\theta$. □

Proposición 4.20. *Sea $\chi \in \mathcal{M}$. Luego, existe una sucesión de traslaciones verticales $(\tau_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $f \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$ de la forma $f(s) = c_0 s + g(s)$, la función f_χ en $\mathbb{C}_\theta$ es exactamente el límite normal (es decir, con respecto a la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{C}_\theta$) de las traslaciones verticales $(f_{\tau_N})_{N\in\mathbb{N}}$ de f. Además, $f_\chi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$ (y por lo tanto $\sigma_u(g_\chi) \leq \theta$).*

Demostración. Podemos ignorar la parte lineal de $f(s)$. Supongamos que $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ y cierta sucesión de series de Dirichlet $(g_{\tau_N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge a una función holomorfa en $\mathbb{C}_\theta$. Como $\mathbb{T}$ es compacto y $n^{-i\tau_N} \in \mathbb{T}$ para todo $n, N \in \mathbb{N}$, fijado $n \in \mathbb{N}$ existe una subsucesión $(\tau_N^{(n)})_{N\in\mathbb{N}}$ de $(\tau_N)_{N\in\mathbb{N}}$ convergente a cierto límite $\chi(n)$ si $N \longrightarrow \infty$. Luego, la subsucesión $(\tau_N^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ verifica que $n^{-i\tau_N^{(N)}} \longrightarrow \chi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y además $\chi \in \mathcal{M}$. Tomando $\vartheta > \theta$ y $\varepsilon > 0$, de la convergencia uniforme de g en $\mathbb{C}_\vartheta$ existe N_ε tal que

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n n^{-i\tau_N^{(N)}} n^{-s} \right| \leq \varepsilon$$

si $s \in \mathbb{C}_\vartheta$ y $q > p > N_\varepsilon$. Tomando límite cuando $N \longrightarrow \infty$ obtenemos

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n \chi(n) n^{-s} \right| \leq \varepsilon,$$

válido si $s \in \mathbb{C}_\vartheta$ y $q > p > N_\varepsilon$. Es decir, $\sigma_u(g_\chi) \leq \theta$, pues g_χ converge uniformemente en $\mathbb{C}_\vartheta$, con $\vartheta > \theta$. Claramente esto significa que g_χ es convergente en $\mathbb{C}_\theta$ y es una función analítica en $\mathbb{C}_\theta$.

Si h denota al límite de $(g_{\tau_N^{(N)}})_{N\in\mathbb{N}}$, veamos ahora que $h = g_\chi$. Dado $\vartheta > \sigma_a(g)$ y $s \in \mathbb{C}_\vartheta$, tenemos que $n^{-i\tau_N^{(N)}} \longrightarrow \chi(n)$ si $N \longrightarrow \infty$, $|a_n n^{-s-i\tau_N^{(N)}}| \leq |a_n| n^{-Re(s)}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-Re(s)} < \infty.$$

Del teorema de convergencia dominada (aplicado para cada $s \in \mathbb{C}_\vartheta$) concluimos que

$$h(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s-i\tau_N^{(N)}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \lim_{N\to\infty} n^{-i\tau_N^{(N)}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s} = g_\chi(s),$$

y por extensión analítica $h = g_\chi$ en $\mathbb{C}_\theta$, es decir, g_{τ_N} converge a g_χ en $\mathbb{C}_\theta$.

Recíprocamente, dado $\chi \in \mathcal{M}$ y $N \in \mathbb{N}$, aplicamos el Teorema de Aproximación de Kronecker (Teorema 4.14) a $\{-\log(\mathfrak{p}_1), \ldots, -\log(\mathfrak{p}_k)\}$, donde $k \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande de manera que todo natural menor a N se pueda descomponer como factorización de los primeros k números primos. Así, existe $\tau_N \in \mathbb{R}$ tal que $|\chi(\mathfrak{p}_j) - \mathfrak{p}_j^{-i\tau_N}| < \frac{1}{N}$ para cada $j < k$. Esto implica que existe una sucesión $(\tau_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de manera que

$$\lim_{N\to\infty} \mathfrak{p}_k^{-i\tau_N} = \chi(\mathfrak{p}_k)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, si $n = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r} \in \mathbb{N}$, luego

$$\lim_{N\to\infty} n^{-i\tau_N} = \lim_{N\to\infty} \mathfrak{p}_1^{-\alpha_1 i\tau_N} \cdots \mathfrak{p}_r^{-\alpha_r i\tau_N} = \chi(\mathfrak{p}_1)^{\alpha_1} \cdots \chi(\mathfrak{p}_r)^{\alpha_r} = \chi(n).$$

Razonando análogamente a lo anterior concluimos que la sucesión $(g_{\tau_N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge a g_χ.

Resta ver que $f_\chi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$. Dado $\chi \in \mathcal{M}$, existe una sucesión $(f_{\tau_N})_{n\in\mathbb{N}}$ de traslaciones verticales que convergen a f_χ, y por lo tanto $f_\chi(\mathbb{C}_\theta) \subset \overline{\mathbb{C}_\nu} \cup \{\infty\}$. En efecto, dado $s \in \mathbb{C}_\theta$, al tratarse de traslaciones verticales tenemos que $f_{\tau_N}(s) \in \mathbb{C}_\nu$ para todo $N \in \mathbb{N}$, y por lo tanto

$$\lim_{N\to\infty} f_{\tau_N}(s) = f_\chi(s) \in \overline{\mathbb{C}_\nu} \cup \{\infty\}.$$

Si $c_0 > 0$, f_χ es no constante y por lo tanto es una aplicación abierta. Esto implica necesariamente que $f_\chi(\mathbb{C}_\theta) \subset \mathbb{C}_\nu$. Si $c_0 = 0$ y g es constante, por hipótesis el valor que asume es un elemento de $\mathbb{C}_\nu$. Si g no es constante, el argumento es análogo al caso $c_0 > 0$. $\square$

Observación 4.21. Si bien nos enfocamos en elementos de $\mathscr{D}_{\theta,\nu}$, en vista de las demostraciones es evidente que tanto el Teorema 4.19 como la Proposición 4.20 son resultados válidos para series de Dirichlet no divergentes en todo punto, siempre y cuando nos encontremos en un semiplano de convergencia uniforme.

Proposición 4.22. *Sea $\chi \in \mathcal{M}$, $f, g \in \mathscr{D}_c$ y $\varphi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$ de la forma $\varphi(s) = c_0 s + \psi(s)$ ($\psi \in \mathscr{D}_c$). Luego:*

1. *Si $\sigma_a(f) \leq \theta$ y $\sigma_u(g) \leq \theta$, entonces $(fg)_\chi = f_\chi g_\chi$ en $\mathbb{C}_\theta$.*
2. *$(n^{-c_0 s})_\chi = \chi(n)^{c_0} n^{-c_0 s}$.*
3. *Si $\sigma_u(n^{-\psi}) \leq \vartheta$, entonces $(n^{-\varphi(s)})_\chi = \chi(n)^{c_0} n^{-\varphi_\chi(s)}$ en $\mathbb{C}_\vartheta$.*

Demostración. Si

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s},$$

calculamos

$$\begin{aligned}
(fg)_\chi(s) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{mn=k}^{\infty} a_n b_m k^{-s} \right)_\chi \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{mn=k}^{\infty} a_n b_m \right) \chi(k) k^{-s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{mn=k}^{\infty} a_n b_m \chi(n)\chi(m) n^{-s} m^{-s} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \chi(m) m^{-s} \right) \\
&= f_\chi(s) g_\chi(s).
\end{aligned}$$

Veamos que esta igualdad es válida en $\mathbb{C}_\theta$. De la Proposición 2.14, el producto fg converge uniformemente en $\mathbb{C}_\theta$. Luego, la Proposición 4.20 nos asegura que tanto $(fg)_\chi$ como g_χ convergen uniformemente en $\mathbb{C}_\theta$ (si bien fg y f no son necesariamente elementos de $\mathscr{D}_{\theta,\nu}$ para algún ν, el resultado es válido; ver la Observación 4.21). Notemos además que f_χ converge absolutamente en $\mathbb{C}_\theta$, pues $\sigma_a(f) \leq \theta$. Todo esto implica que los cálculos anteriores son válidos en un semiplano $\mathbb{C}_\vartheta$ de convergencia absoluta de $(fg)_\chi$, f_χ y g_χ, con $\vartheta > \theta$. Por extensión analítica concluimos que $(fg)_\chi = f_\chi g_\chi$ en $\mathbb{C}_\theta$.

La segunda afirmación se deduce del hecho de que $n^{-c_0 s} = (n^{c_0})^{-s}$ y de la multiplicatividad de χ.

En cuanto a la última afirmación, recordemos primero que el Lema 4.8 nos asegura la convergencia de $n^{-\psi(s)}$ en algún semiplano. Notemos además que $n^{-\varphi(s)} = n^{-c_0 s} n^{-\psi(s)}$. Consideramos una sucesión $(\psi_{\tau_N})_{N\in\mathbb{N}}$ de traslaciones verticales que tiene a ψ_χ como límite normal. Si

$$n^{-\psi(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s},$$

para cada $N \in \mathbb{N}$ tenemos

$$(n^{-\psi})_{\tau_N}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-(s+i\tau_N)} = n^{-\psi(s+i\tau_N)},$$

es decir $(n^{-\psi})_{\tau_N} = n^{-\psi_{\tau_N}}$. Tomando límite cuando $N \longrightarrow \infty$ obtenemos que $(n^{-\psi})_\chi = n^{-\psi_\chi}$ en $\mathbb{C}_\theta$ (para esto es fundamental que $\sigma_u(\psi) \leq \theta$). Por último, juntando lo anterior con la regla del producto obtenida en (1) calculamos

$$(n^{-\varphi})_\chi(s) = (n^{-c_0 s} n^{-\psi(s)})_\chi = \chi(n)^{c_0} n^{-c_0 s - \psi_\chi(s)} = \chi(n)^{c_0} n^{-\varphi_\chi(s)},$$

válido en $\mathbb{C}_\theta$. $\square$

Lema 4.23. *Sea $\Phi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$ de la forma $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$. Luego, $Re(\varphi)$ está acotada superiormente en $\mathbb{C}_\vartheta$ para cada $\vartheta > \theta$.*

Demostración. Sea $\vartheta > \theta$. Del Lema 4.8, $2^{-\varphi} \in \mathscr{D}_c$. Vimos además que $2^{-\varphi}$ está acotada en $\mathbb{C}_\theta$ (ver Lema 4.16) o equivalentemente que $Re(\varphi)$ está acotada inferiormente en $\mathbb{C}_\theta$. Luego, del Teorema 2.13 la serie de Dirichlet asociada a $2^{-\varphi}$ converge uniformemente en $\mathbb{C}_\vartheta$.

Supongamos que $Re(\varphi)$ no está acotada superiormente en $\mathbb{C}_\vartheta$. Consecuentemente $Re(\varphi(s_n)) \longrightarrow \infty$ para cierta sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \sigma_n + i\tau_n$ y $\sigma_n > \vartheta$. Como $Re(\varphi(s)) \longrightarrow Re(c_1)$ si $Re(s) \longrightarrow \infty$, necesariamente $\sigma_n \leq C$ a partir de cierto $n \in \mathbb{N}$. Ahora, notando que $\sigma_u(\varphi) \leq \theta < \vartheta$ podemos aplicar la Proposición 4.20 y tomar una subsucesión $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de partes imaginarias de los elementos de la sucesión (s_n), de manera que $\varphi_{\tau_{n_k}} \longrightarrow \varphi_\chi$ para cierto caracter χ. Así, $\sigma_{n_k} \longrightarrow \sigma \in [\theta, C]$ si $k \longrightarrow \infty$. Aplicando la Proposición 4.22 tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} (2^{-\varphi})_{\tau_{n_k}}(\sigma_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} 2^{-\varphi(s_{n_k})} = 0$$

y por otro lado

$$\lim_{k\to\infty} (2^{-\varphi})_{\tau_{n_k}}(\sigma_{n_k}) = (2^{-\varphi})_\chi(\sigma) = 2^{-\varphi_\chi(\sigma)}.$$

Es decir, $2^{-\varphi_\chi(\sigma)} = 0$, claramente una contradicción. Por lo tanto, $Re(\varphi)$ está acotada superiormente en $\mathbb{C}_\vartheta$. □

Corolario 4.24. *Las afirmaciones del Lema 4.16 y Lema 4.23 son válidas reemplazando φ por φ_χ, para cualquier caracter $\chi \in \mathcal{M}$.*

Demostración. Dada $\Phi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$ y un caracter $\chi \in \mathcal{M}$, de la Proposición 4.20 tenemos que $\Phi_\chi \in \mathscr{D}_{\theta,\nu}$. Podemos aplicar los lemas en cuestión a la función Φ_χ. □

Lema 4.25. *Sea $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s) \in \mathscr{D}_{\theta,1/2}$ no constante, $f \in \mathscr{H}_2$ y $\chi \in \mathcal{M}$. Luego,*

$$(f \circ \Phi)_\chi(s) = f_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi(s),$$

con $s \in \mathbb{C}_\theta$ y $\chi^{c_0}(n) = \chi(n)^{c_0}$.

Demostración. Observemos que la igualdad del enunciado tiene sentido, ya que $\Phi_\chi \in \mathscr{D}_{\theta,1/2}$ por la Proposición 4.20. Como además $f_{\chi^{c_0}} \in \mathscr{H}_2$ si $f \in \mathscr{H}_2$, tenemos que $f_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi$ es una función analítica en $\mathbb{C}_\theta$ al igual que $(f \circ \Phi)_\chi$.

Veamos ahora que para cada $\vartheta > \theta$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $Re(\Phi(s)) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ si $Re(s) > \vartheta$. En efecto, si $c_0 = 0$ luego $\Phi = \varphi$ es no constante y el resultado queda demostrado aplicando el tercer apartado del Lema 4.16. Si $c_0 > 0$ y $s \in \mathbb{C}_\vartheta$, nuevamente del Lema 4.16 obtenemos

$$Re(\Phi(s)) = c_0 Re(s) + \varphi(s) \geq c_0 Re(s) + \frac{1}{2} - c_0\theta \geq \underbrace{c_0(\vartheta - \theta)}_{=\varepsilon} + \frac{1}{2}.$$

Utilizando esto calculamos

$$\|n^{-\Phi}\|_{H_\infty(\mathbb{C}_\vartheta)} = \sup_{s\in\mathbb{C}_\vartheta} |n^{-\Phi(s)}| = \sup_{s\in\mathbb{C}_\vartheta} n^{-Re(\Phi(s))} \leq n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Luego, si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|n^{-\Phi}\|_{H_\infty(\mathbb{C}_\vartheta)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \leq \|f\|_{\mathscr{H}_2} \zeta(1+2\varepsilon) < \infty.$$

Esto implica que $f_N \circ \Phi$ converge uniformemente a $f \circ \Phi$ en $\mathbb{C}_\vartheta$, donde $f_N(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$ es una suma parcial de f. Por otro lado, de la Proposición 4.22 tenemos que

$$(f_N \circ \Phi)_\chi(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n (n^{-\Phi(s)})_\chi = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi(n)^{c_0} n^{-\Phi_\chi(s)} = ((f_N)_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi)(s).$$

en $\mathbb{C}_\theta$.

Para poder tomar límite cuando $N \longrightarrow \infty$ a ambos lados y obtener el resultado, resta probar que la operación de twisting es continua con respecto a la topología en $\mathbb{C}_\vartheta$ inducida por la norma $\|n^{-\Phi}\|_{\mathscr{H}_\infty(\mathbb{C}_\vartheta)}$. En efecto, sea $\chi \in \mathcal{M}$ y $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a g en $\mathbb{C}_\vartheta$ tal que $((g_N)_\chi)_{N\in\mathbb{N}}$ converge a cierta función h. Veamos que $h = g_\chi$.

Sea $K \subset \mathbb{C}_\vartheta$ compacto, $\varepsilon > 0$ y $(\tau_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión de traslaciones verticales cuyo límite normal es χ para cada función. Consideremos además $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(g_{N_0})_\chi - h\|_K < \varepsilon, \quad \|g_{N_0} - g\|_{\mathbb{C}_\vartheta} < \varepsilon,$$

y $N_1 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\|g_{\tau_{N_1}} - g_\chi\|_K < \varepsilon, \quad \|(g_{N_0})_{\tau_{N_1}} - (g_{N_0})_\chi\|_K < \varepsilon.$$

En base a esto calculamos

$$\|g_\chi - h\|_K \leq \|g_\chi - g_{\tau_{N_1}}\|_K + \|g_{\tau_{N_1}} - (g_{N_0})_{\tau_{N_1}}\|_K + \|(g_{N_0})_{\tau_{N_1}} - (g_{N_0})_\chi\|_K + \|(g_{N_0})_\chi - h\|_K.$$

Observando que $\|g_{\tau_{N_1}} - (g_{N_0})_{\tau_{N_1}}\|_K \leq \|g_{\tau_{N_1}} - (g_{N_0})_{\tau_{N_1}}\|_{\mathbb{C}_\vartheta}$ y utilizando las desigualdades anteriores, concluimos que $\|g_\chi - h\|_K < 4\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$ y para cada compacto $K \subset \mathbb{C}_\vartheta$. Es decir, $f_\chi = g$.

Finalmente, tomemos límite cuando $N \longrightarrow \infty$. Obtenemos entonces

$$(f \circ \Phi)_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n)^{c_0} n^{-\Phi_\chi(s)} = (f)_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi.$$

De la arbitrariedad de ϑ, el resultado vale para $s \in \mathbb{C}_\theta$. □

Lema 4.26. *Sea Φ una función analítica en $\mathbb{C}_{1/2}$ tal que para cada $n \in \{2,3\}$, $n^{-\Phi}$ tiene una extensión analítica Φ_n a un conjunto abierto y simplemente conexo Ω que contiene a $\mathbb{C}_{1/2}$. Luego, Φ tiene una extensión analítica a Ω.*

Demostración. Calculamos

$$\frac{\Phi_n'(s)}{\Phi_n(s)} = -\log(n)\Phi'(s)$$

para $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. El lado izquierdo de la igualdad provee una extensión meromorfa de Φ' a Ω. Sea $s_0 \in \Omega$, y sea k_n el orden del cero de Φ_n en s_0. Notemos por $\rho(s_0)$

al residuo de Φ' en s_0. Calculando residuos en ambos lados de la igualdad anterior obtenemos, para $n \in \{2, 3\}$,

$$k_n = -\rho(s_0)\log(n).$$

Esto implica que $\rho(s_0) = 0$, pues en caso contrario

$$\frac{\log(2)}{\log(3)} = \frac{k_2}{k_3}$$

sería un número racional. Por lo tanto, la extensión de Φ a Ω es analítica, y como Ω es simplemente conexo esta extensión provee una extensión analítica para Φ. □

Enunciamos a continuación dos lemas cuyas demostraciones omitimos. El desarrollo del Lema 4.27, que utiliza un resultado de Menchoff [KS89], puede encontrarse en [QQ20], mientras que el Lema 4.28 se debe a Wintner [W44] y Kahane [K73].

Lema 4.27. *Sea $f \in \mathscr{H}_2$. Luego, para casi todo caracter $\chi \in \mathcal{M}$ (con respecto a la medida descripta en la Observación 4.18) f_χ se extiende analíticamente a $\mathbb{C}_+$. Más aún, $\sigma_c(f_\chi) \leq 0$.*

Lema 4.28. *Sea*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n^{-s-\frac{1}{2}},$$

donde $\mathfrak{p}_n$ denota el n-ésimo número primo. Luego:

1. *Existe un conjunto denso $M \subset \mathcal{M}$ tal que para todo $\chi \in M$ se verifica $\sigma_c(f_\chi) = \frac{1}{2}$ y f_χ no puede extenderse analíticamente a ningún conjunto que contenga estrictamente a $\mathbb{C}_{1/2}$ (decimos en este caso que la recta $Re(s) = \frac{1}{2}$ es una **frontera natural** para f_χ).*
2. *Para casi todo caracter $\chi \in \mathcal{M}$, la recta $Re(s) = 0$ es una frontera natural para f_χ.*

Gordon y Hedenmalm [GH99] mencionan que los enunciados originales de Wintner y Kahane no abarcan completamente la generalidad de este caso, ya que analizan únicamente las series de Dirichlet con coeficientes en $\{1, -1\}$ en contraposición con los caracteres (que asumen valores en $\mathbb{T}$). Sin embargo, aseguran que las demostraciones de Wintner y Kahane se ajustan fácilmente a este caso.

Estamos en condiciones de probar la primera parte del Teorema 4.3.

Demostración del Teorema 4.3 (primera parte). Supongamos que $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ genera un operador de composición acotado $C_\Phi : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$, y sea $f \in \mathscr{H}_2$. Del Lema 4.25, para cada $\chi \in \mathcal{M}$ tenemos que

$$(f \circ \Phi)_\chi(s) = f_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi(s) \tag{4.7}$$

para todo $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. Por otro lado, como $f \circ \Phi \in \mathscr{H}_2$, del Lema 4.27 $(f \circ \Phi)_\chi \in \mathscr{H}_2$ converge en $\mathbb{C}_+$ para casi todo caracter χ, y del Lema 4.26 lo mismo sucede para Φ_χ. Además, si $c_0 > 0$, el conjunto de caracteres χ tales que $\sigma_c(f_{\chi^{c_0}}) \leq 0$ también tiene medida completa. Esto se debe a que la aplicación $z \mapsto z^{c_0}$ aumenta medida en $\mathbb{T}$ y por lo tanto $\chi \mapsto \chi^{c_0}$ aumenta medida en $\mathcal{M}$. Luego, dicha aplicación preserva conjuntos de medida completa. Notemos que no poseemos información adicional si

$c_0 = 0$, ya que en dicho caso $f_{\chi^{c_0}} = f$ y lo único que conocemos de esta función es que es holomorfa en $\mathbb{C}_{1/2}$.

Supongamos primero que $c_0 > 0$, y sea $\chi \in \mathcal{M}$ tal que $(f \circ \Phi)_\chi$, $f_{\chi^{c_0}}$ y Φ_χ se extienden analíticamente a $\mathbb{C}_+$ (esto se verifica para casi todo caracter). Buscamos probar que $\Phi_\chi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ en $\mathbb{C}_+$. Una vez probado esto, el Lema 4.16 nos permitirá concluir que $\varphi_\chi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, y así lo mismo sucede para $(\varphi_\chi)_{\chi^{-1}} = \varphi$ lleva $\mathbb{C}_+$ en $\mathbb{C}_+$. Por último, del Lema 4.15 obtendremos que $\sigma_u(\varphi) \leq 0$.

Notemos primero que, al ser Φ no constante, $\Phi_\chi(\mathbb{C}_+)$ es un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Sea

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C}_+ \,:\, \Phi_\chi(s) \in \mathbb{C}_+\} = {\Phi_\chi}^{-1}(\mathbb{C}_+),$$

el cual es claramente un abierto de $\mathbb{C}_+$. Como sabemos que Φ_χ lleva $\mathbb{C}_{1/2}$ en $\mathbb{C}_{1/2}$ (al ser un límite normal de traslaciones verticales de Φ; ver Proposición 4.20), tenemos que $\mathbb{C}_{1/2} \subset \Omega$, y además existe una componente conexa Ω_0 de Ω que contiene a $\mathbb{C}_{1/2}$. Por extensión analítica, entonces, la ecuación (4.7) es válida en Ω_0. Ahora, suponiendo que $\Omega \neq \mathbb{C}_+$ lo mismo sucede para Ω_0, y podemos tomar un punto $s_0 \in \mathbb{C}_+$ que pertenece a $\partial\Omega_0$. Podemos suponer también que $\Phi'_\chi(s_0) \neq 0$, y equivalentemente que Φ_χ es una aplicación conforme alrededor de s_0. Luego, necesariamente $\Phi_\chi(s_0) \in \partial\mathbb{C}_+$, pues Φ_χ lleva puntos de frontera en puntos de frontera, en un entorno de s_0. Esto quiere decir que $f_{\chi^{c_0}}$ tiene una extensión analítica que cruza un segmento pequeño del eje imaginario. Concretamente, esta extensión está dada por $(f \circ \Phi)_\chi \circ {\Phi_\chi}^{-1}$, donde ${\Phi_\chi}^{-1}$ refiere a la aplicación inversa de Φ_χ vista como aplicación conforme de cierto entorno de s_0 a un entorno de $\Phi_\chi(s_0)$. En resumen, si Φ_χ no lleva $\mathbb{C}_+$ en $\mathbb{C}_+$, luego $f_{\chi^{c_0}}$ se extiende analíticamente a través de cierto segmento del eje imaginario (y esto sucede para cada $f \in \mathscr{H}_2$).

Luego de considerar el caso $c_0 = 0$, vamos a ver que existe $f \in \mathscr{H}_2$ de manera que para casi todo $\chi \in \mathcal{M}$, f_χ no se extiende a ninguna región mayor que $\mathbb{C}_+$. Esto nos permitirá llegar a una contradicción.

Analicemos el caso $c_0 = 0$. Primero que nada, como $\Phi(\mathbb{C}_{1/2}) = \varphi(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2}$, del Lema 4.15 tenemos que $\sigma_u(\varphi) \leq \frac{1}{2}$. Por otro lado, la ecuación (4.7) se simplifica y resulta en la siguiente igualdad, válida en $\mathbb{C}_{1/2}$:

$$(f \circ \Phi)_\chi(s) = f \circ \Phi_\chi(s). \tag{4.8}$$

Sea $\chi \in \mathcal{M}$ perteneciente al conjunto de medida completa de caracteres tales que $(f \circ \Phi)_\chi$ y Φ_χ se extienden analíticamente a $\mathbb{C}_+$. Buscamos probar que Φ_χ lleva $\mathbb{C}_+$ en $\mathbb{C}_{1/2}$, ya que nuevamente el Lema 4.16 nos permitirá concluir que lo mismo sucede para $\Phi = \varphi$.

Los siguientes pasos son análogos al caso $c_0 > 0$. Consideramos el conjunto

$$\Gamma = \{s \in \mathbb{C}_+ \,:\, \Phi_\chi(s) \in \mathbb{C}_{1/2}\} = {\Phi_\chi}^{-1}(\mathbb{C}_{1/2}),$$

el cual contiene a $\mathbb{C}_{1/2}$. Llamando Γ_0 a la componente conexa de Γ que contiene a $\mathbb{C}_{1/2}$, por extensión analítica obtenemos que la ecuación (4.8) vale en Γ_0. Suponiendo que $\Gamma \neq \mathbb{C}_+$, existe $\tilde{s}_0 \in \mathbb{C}_+ \cap \partial\Gamma_0$ tal que $\Phi'_\chi(\tilde{s}_0) \neq 0$. Luego, $\Phi_\chi(\tilde{s}_0) \in \partial\mathbb{C}_{1/2}$ y f tiene una extensión analítica a través de cierta región de la recta compleja $Re(s) = \frac{1}{2}$.

Damos ejemplos de dos funciones en $\mathscr{H}_2$ que tienen a $\mathbb{C}_+$ y $\mathbb{C}_{1/2}$ como frontera natural, respectivamente. Esto nos permite llegar a una contradicción para todo $c_0 \in \mathbb{N}_0$.

Consideremos la función

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathfrak{p}_n^{-s}, \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}_n}\log(\mathfrak{p}_n)}.$$

Del Lema 4.27, f_χ es convergente en $\mathbb{C}_+$ para casi todo $\chi \in \mathcal{M}$, y en el dominio de convergencia su derivada es

$$f'_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}_n}\log(\mathfrak{p}_n)} \chi(\mathfrak{p}_n)(-\log(\mathfrak{p}_n))\mathfrak{p}_n^{-s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \chi(\mathfrak{p}_n)\mathfrak{p}_n^{-s-\frac{1}{2}}.$$

Aplicando el Lema 4.28 obtenemos que para casi todo χ, $-f'_\chi$ tiene a la recta $Re(s) = 0$ como frontera natural, y por lo tanto lo mismo sucede para f'_χ. Llegamos entonces a una contradicción en el caso $c_0 > 0$, siendo f'_χ un contraejemplo. Es decir, $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 > 0$. Esto a su vez implica que $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ por el Lema 4.16, y por último que $\sigma_u(\varphi) \leq 0$, del Lema 4.15.

En cuanto al caso $c_0 = 0$, del Lema 4.28 existe $\chi \in \mathcal{M}$ tal que f'_χ tiene a la recta $Re(s) = \frac{1}{2}$ como frontera natural (más aún, esto vale en un conjunto denso de caracteres). Esto implica que f_χ tiene la misma frontera natural, pues si pudiera extenderse analíticamente a un conjunto que contiene estrictamente a $\mathbb{C}_{1/2}$ podríamos aplicar el principio de identidad de funciones holomorfas (al ser $\mathbb{C}_{1/2}$ simplemente conexo) y concluir que su derivada f'_χ también debería extenderse analíticamente. Llegamos entonces a una contradicción en el caso $c_0 = 0$, y al igual que en el caso anterior podemos concluir que $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$. □

4.1.3. El Resultado Principal: Segunda Parte

En esta sección probamos la segunda implicación del Teorema 4.3:

> Sea $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s) \in \mathscr{D}_{1/2,1/2}$ (es decir, $c_0 \in \mathbb{N}_0$ y $\varphi \in \mathscr{D}_c$) una función analítica que se extiende analíticamente a $\mathbb{C}_+$ de manera que:
>
> 1. $\sigma_u(\varphi) \leq 0$ y además $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 > 0$,
> 2. $\sigma_u(\varphi) \leq \frac{1}{2}$ y $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$.
>
> Luego, Φ induce un operador de composición acotado en $\mathscr{H}_2$. Más aún, C_Φ es una contracción si y solo si $c_0 > 0$.

Enunciamos dos resultados de utilidad, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [QQ20].

Teorema 4.29. *Para cada $b > 0$ existe una constante $C_b > 0$ tal que si $f \in \mathscr{H}_2$, luego*

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 P_b(t)dt \leq C_b \|f\|_{\mathscr{H}_2},$$

donde $P_b(t)$ denota el núcleo de Poisson de $\mathbb{C}_+$ en b, definido en el Teorema 4.13.

Lema 4.30. *Sea $f \in \mathscr{H}_2$ convergente uniformemente en $\mathbb{C}_+$. Sea $u \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $u \geq 0$ y $\|u\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. Definimos $u_a(t) = \frac{1}{a}u(\frac{t}{a})$ para $a > 0$. Luego,*

$$\|f\|^2_{\mathscr{H}_2} = \lim_{a\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(it)|^2 u_a(t)dt.$$

Demostración del Teorema 4.3 (segunda parte). Supongamos primero que $f \in \mathscr{H}_2$ es un polinomio de Dirichlet, esto es,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{N} b_n n^{-s}.$$

Del Teorema 4.9, $C_\Phi(f) \in \mathscr{D}_c$. Más aún, $C_\Phi(f) \in H_\infty(\mathbb{C}_+)$ (y consecuentemente $C_\Phi(f) \in \mathscr{H}_\infty$) pues por hipótesis $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, y luego

$$|f(\Phi(s))| \leq \sum_{n=1}^{N} |b_n| n^{-Re(\Phi(s))} \leq \sum_{n=1}^{N} |b_n|.$$

Ahora, para analizar la norma $\|C_\Phi(f)\|_{\mathscr{H}_2}$ en detalle introducimos la aplicación conforme

$$T_a(s) = \frac{a-s}{a+s}, \quad a > 0,$$

la cual aplica $\mathbb{C}_+$ en $\mathbb{D}$ y tiene inversa dada por

$$T_a{}^{-1}(z) = a\frac{1-z}{1+z}.$$

En particular, notemos que

$$T_a{}^{-1}(e^{iu}) = a\frac{1-e^{iu}}{1+e^{iu}} = a\frac{e^{-\frac{iu}{2}}}{e^{-\frac{iu}{2}}}\frac{1-e^{iu}}{1+e^{iu}} = a\frac{e^{-\frac{iu}{2}} - e^{\frac{iu}{2}}}{e^{-\frac{iu}{2}} + e^{\frac{iu}{2}}} = -ia\tan\left(\frac{u}{2}\right).$$

Aplicando el cambio de variables $t = a\tan(\frac{u}{2})$, $u = 2\arctan(\frac{t}{a})$ obtenemos, para una función arbitraria $h \in H_\infty(\mathbb{C}_+)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(T_a{}^{-1}(e^{iu}))du = \frac{1}{a\pi}\int_{\mathbb{R}} h(-it)\frac{1}{1+(\frac{t}{a})^2}dt = \int_{\mathbb{R}} h(it)P_a(t)dt. \tag{4.9}$$

Supongamos ahora que $c_0 > 0$. Para $a, b, \varepsilon > 0$ definimos $\Phi_\varepsilon(s) = \Phi(s+\varepsilon)$, $\omega = T_b \circ \Phi_\varepsilon \circ T_a{}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y $F = f \circ T_b{}^{-1}$. Similarmente a lo anterior $F \in H_\infty(\mathbb{D})$, ya que $|F(z)| \leq \sum_{n=1}^{N} |b_n|$. En base a esto, $F \in H_2(\mathbb{D})$. Aplicando la ecuación (4.9) a $h = |f|^2$ obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{iu})|^2 du = \int_{\mathbb{R}} |f(it)|^2 P_b(t)dt. \tag{4.10}$$

Por otro lado, el Principio de Subordinación de Littlewood (Teorema 4.1) aplicado al operador de composición en $H_2(\mathbb{D})$ inducido por ω nos permite asegurar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(F\circ\omega)(e^{iu})|^2 du \leq \frac{1+|\omega(0)|}{1-|\omega(0)|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{iu})|^2 du.$$

Utilizando la ecuación (4.9) en ambos lados de la desigualdad, en conjunto con el hecho de que $F \circ \omega = f \circ \Phi_\varepsilon \circ T_a{}^{-1}$, obtenemos finalmente

$$\int_{\mathbb{R}} |(f\circ\Phi_\varepsilon)(it)|^2 P_a(t)dt \leq \frac{1+|\omega(0)|}{1-|\omega(0)|}\int_{\mathbb{R}} |f(it)|^2 P_b(t)dt. \tag{4.11}$$

Ahora, notemos que f y $f \circ \Phi_\varepsilon$ tienen expresiones como series de Dirichlet uniformemente convergentes en $\mathbb{C}_+$. En efecto, si

$$(f \circ \Phi)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_N n^{-s}$$

entonces

$$(f \circ \Phi_\varepsilon)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_N n^{-s-\varepsilon},$$

y como $f \circ \Phi \in \mathscr{H}_\infty$, el Teorema 2.13 nos asegura que la serie anterior converge uniformemente en $\mathbb{C}_+$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Fijando $b = c_0 a$, tomemos límite cuando $a \longrightarrow \infty$ en la ecuación (4.11), con el objetivo de aplicar el Lema 4.30. Observemos primero que

$$P_a(t) = \frac{a}{\pi(a^2 + t^2)} = \frac{1}{a} u\left(\frac{t}{a}\right), \quad u(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)},$$

y además

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{\pi} \arctan(t)\Big|_0^T = 1.$$

Por otro lado,

$$\omega(0) = (T_{c_0 a} \circ \Phi_\varepsilon \circ {T_a}^{-1})(0) = \frac{1 - \frac{\Phi_\varepsilon(a)}{c_0 a}}{1 + \frac{\Phi_\varepsilon(a)}{c_0 a}} = \frac{-\frac{c_0\varepsilon + \varphi(a+\varepsilon)}{c_0 a}}{2 + \frac{c_0 \varepsilon + \varphi(a+\varepsilon)}{c_0 a}} \longrightarrow 0$$

si $a \longrightarrow \infty$. Recordando la identificación isométrica entre $H_2(\mathbb{D})$ y cierto subespacio de $L_2(\mathbb{T})$ (ver Observación 2.41), y aplicando el Lema 4.30, obtenemos

$$\|f \circ \Phi_\varepsilon\|_{\mathscr{H}_2} \leq \|f\|_{\mathscr{H}_2}$$

para cada polinomio de Dirichlet. Para justificar la desigualdad buscada haciendo tender ε a 0, notemos que si $(f \circ \Phi)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ luego $(f \circ \Phi_\varepsilon)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\varepsilon} n^{-s}$, y así $\|f \circ \Phi_\varepsilon\|_{\mathscr{H}_2} \longrightarrow \|f \circ \Phi\|_{\mathscr{H}_2}$ si $\varepsilon \longrightarrow 0$. Llegamos entonces a la desigualdad

$$\|f \circ \Phi\|_{\mathscr{H}_2} \leq \|f\|_{\mathscr{H}_2}.$$

Esta desigualdad es válida, por aproximación, para toda función en $\mathscr{H}_2$. En efecto, si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \in \mathscr{H}_2$ y $f_N(s) = \sum_{n=1}^{N} b_n n^{-s}$, $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_N - f_M\|_{\mathscr{H}_2} < \varepsilon$ si $N, M > N_0$. En dicho caso, de lo probado anteriormente obtenemos

$$\|C_\Phi(f_N - f_M)\|_{\mathscr{H}_2} \leq \|f_N - f_M\|_{\mathscr{H}_2} < \varepsilon.$$

Es decir, $(C_\Phi(f_N))_{N \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{H}_2$, y por lo tanto converge a una función $g \in \mathscr{H}_2$. Necesariamente $g = C_\Phi(f)$, ya que $f_N \circ \Phi$ converge puntualmente a $f \circ \Phi$ en $\mathbb{C}_{1/2}$. Por lo tanto, de lo probado para polinomios de Dirichlet obtenemos

$$\|C_\Phi(f)\|_{\mathscr{H}_2} = \lim_{N \to \infty} \|C_\Phi(f_N)\|_{\mathscr{H}_2} \leq \|f\|_{\mathscr{H}_2}.$$

Es decir, C_Φ es un operador acotado en $\mathscr{H}_2$, y en particular es una contracción.

Supongamos ahora que $c_0 = 0$. Definimos la aplicación $S(s) = s - \frac{1}{2}$. La hipótesis $\Phi(\mathbb{C}_+) = \varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ y el siguiente diagrama indican que la transformación $\omega = T_b \circ S \circ \Phi \circ {T_a}^{-1}$ aplica $\mathbb{D}$ en sí mismo:

$$\mathbb{D} \xrightarrow{{T_a}^{-1}} \mathbb{C}_+ \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}_{1/2} \xrightarrow{S} \mathbb{C}_+ \xrightarrow{T_b} \mathbb{D}$$

Además, $\omega(0) = T_b(\Phi(a) - \frac{1}{2})$. Ahora, si f es un polinomio de Dirichlet y $F = f \circ S^{-1} \circ {T_b}^{-1}$, tenemos que $F \circ \omega = f \circ \Phi \circ {T_a}^{-1}$. Del Teorema 4.1 obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(f \circ \Phi \circ {T_a}^{-1})(e^{iu})|^2 du \leq \frac{1 + |\omega(0)|}{1 - |\omega(0)|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(f \circ S^{-1} \circ {T_b}^{-1})(e^{iu})|^2 du.$$

La ecuación (4.9) aplicada en ambos lados de la desigualdad y el Teorema 4.29 resultan en la expresión

$$\int_{\mathbb{R}} |(f \circ \Phi)(it)|^2 P_a(t)dt \leq \frac{1 + |\omega(0)|}{1 - |\omega(0)|}\int_{\mathbb{R}} \left|f\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 P_b(t)dt \leq C_b\frac{1 + |\omega(0)|}{1 - |\omega(0)|}\|f\|_{\mathscr{H}_2}$$

para cierta constante $C_b > 0$.

Tomemos límite cuando $a \longrightarrow \infty$. Si $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$, recordando el Lema 2.15 tenemos que

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1 + |\omega(0)|}{1 - |\omega(0)|} = \frac{1 + T_b(c_1 - \frac{1}{2})}{1 - T_b(c_1 - \frac{1}{2})} := D_b.$$

Aplicando el Lema 4.30 y nuevamente utilizando las funciones Φ_ε para asegurar la convergencia uniforme de Φ_ε en $\mathbb{C}_+$, llegamos a

$$\|f \circ \Phi\|_{\mathscr{H}_2} \leq C_b D_b \|f\|_{\mathscr{H}_2}.$$

Análogamente al caso $c_0 > 0$, por aproximación esta desigualdad se extiende a todo el espacio $\mathscr{H}_2$.

Por último, veamos que C_Φ no es una contracción si $c_0 = 0$. Dado $b \in \mathbb{C}_{1/2}$, recordemos el núcleo reproductivo de $\mathscr{H}_2$ en b dado por $k_b(s) = \zeta(s + \overline{b})$, el cual verifica, para $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_2$,

$$\langle f, k_b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-b} = f(b).$$

Por otro lado,

$$\|k_b\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2Re(b)} = \zeta(2Re(b)).$$

Además, visto como el funcional de evaluación en b, k_b verifica $C_\Phi^*(k_b) = k_{\Phi(b)}$. En efecto,

$$C_\Phi^*(k_b)(f) = k_b(f \circ \Phi) = f(\Phi(b)) = k_{\Phi(b)}(f)$$

para cada $f \in \mathscr{H}_2$.

Tomando $a > \frac{1}{2}$, utilizando lo anterior calculamos

$$\zeta(2Re(\Phi(a))) = \|k_{\Phi(a)}\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \|C_\Phi^*(k_a)\|_{\mathscr{H}_2}^2 \leq \|C_\Phi\|^2 \|k_a\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \|C_\Phi\|^2 \zeta(2a).$$

Ahora, si $a \longrightarrow \infty$ luego $Re(\Phi(a)) \longrightarrow Re(c_1)$ y $\zeta(2a) \longrightarrow 1$, y obtenemos

$$\|C_\Phi\| \geq \sqrt{\zeta(2Re(c_1))} > 1,$$

pues $\zeta(1,\infty) \subset (1,\infty)$. Esto último se deduce del Lema 4.7 y del hecho de que $\zeta(s)$ es decreciente en $(1,\infty)$, tiende a infinito cuando $s \longrightarrow 1^+$ y tiende a 1 cuando $s \longrightarrow \infty$. □

4.2. Hiperciclicidad y Caoticidad

Ahora que caracterizamos a los operadores de composición en $\mathscr{H}_2$, nuevamente surge el interrogante sobre su dinámica. Bayart [B04] demuestra que ningún operador de composición en $\mathscr{H}_2$ es hipercíclico y por lo tanto tampoco caótico. Para presentar la demostración hacemos uso del siguiente lema, donde al igual que en el capítulo anterior, notamos por Φ^n a la composición de Φ n veces con sí misma:

Lema 4.31. *Sea $\Phi \in \mathscr{D}_{1/2,1/2}$ una función que induce un operador de composición acotado en $\mathscr{H}_2$ (es decir, Φ verifica el Teorema 4.3). Supongamos que $c_0 = 0$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Phi^n(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ para todo $n \geq 2$.*

Demostración. Por hipótesis, Φ admite una extensión analítica a $\mathbb{C}_+$ tal que $\sigma_u(\Phi) \leq \frac{1}{2}$ y $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$. Aplicando el tercer apartado del Lema 4.16, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Phi(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$.

Probemos el resultado por inducción en $n \geq 2$. En primer lugar,

$$\Phi^2(\mathbb{C}_+) = \Phi(\Phi(\mathbb{C}_+)) \subset \Phi(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}.$$

Ahora, si $\Phi^k(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ para todo $k < n$ calculamos

$$\Phi^n(\mathbb{C}_+) = \Phi^{n-1}(\Phi(\mathbb{C}_+)) \subset \Phi^{n-1}(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \Phi^{n-1}(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}.$$

□

Teorema 4.32. *Ningún operador de composición $C_\Phi : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ es hipercíclico (y por lo tanto tampoco caótico).*

Demostración. Si $C_\Phi : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ es un operador de composición, luego $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s) \in \mathscr{D}_{1/2,1/2}$ verifica la caracterización del Teorema 4.3 y en particular tiene una extensión analítica a $\mathbb{C}_+$. Si $c_0 > 0$, C_Φ es una contracción, y de la Proposición 1.47 no es hipercíclico. Supongamos entonces que $c_0 = 0$.

Consideremos nuevamente el núcleo reproductivo k_b de $\mathscr{H}_2$ en $b \in \mathbb{C}_{1/2}$, el cual verifica

$$\langle f, k_b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-b} = f(b)$$

para $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_2$, y además $\|k_b\|^2_{\mathscr{H}_2} = \zeta(2Re(b))$. Dado $s \in \mathbb{C}_+$ y $n \in \mathbb{N}$ calculamos

$$|C^n_\Phi(f)(s)|^2 = |f(\Phi^n(s))|^2 = |\langle f, k_{\Phi^n(s)} \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|k_{\Phi^n(s)}\|^2 = \|f\|^2 \zeta(2Re(\Phi^n(s))).$$

Veamos que esto implica que el conjunto

$$D = \{C_\Phi^n(f) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

no es denso en $\mathscr{H}_2$, y por lo tanto que C_Φ no es hipercíclico.

Del Lema 4.31, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Phi^n(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ para cada $n \geq 2$. Luego, en este caso $\zeta(2Re(\Phi^n(s))) \leq \zeta(1+2\varepsilon)$, y llegamos a la desigualdad

$$|C_\Phi^n(f)(s)|^2 \leq \|f\|^2 \max\{\zeta(2Re(\Phi(s))), \zeta(1+2\varepsilon)\} := \|f\|^2 C(s), \tag{4.12}$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, notemos que si D fuera denso en $\mathscr{H}_2$ para cierta $f \in \mathscr{H}_2$, necesariamente el conjunto

$$\{k_s(C_\Phi^n(f)) \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \{f(\Phi^n(s)) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en $\mathbb{C}$ para cada $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. En efecto, dado $z_0 \in \mathbb{C}$, una sucesión $(C_\Phi^{n_k}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en D converge en $\mathscr{H}_2$ a la función constante $g(s) = z_0 \in \mathscr{H}_2$, y por lo tanto converge puntualmente en $\mathbb{C}_{1/2}$ a la misma función. Esto implica que la sucesión $(k_s(C_\Phi^{n_k}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g(s) = z_0$.

Esta última observación resulta en una contradicción, ya que en la desigualdad (4.12) $f(\Phi^{n_k}(s))$ está acotado en módulo por una constante que no depende de k, y luego la sucesión $(k_s(C_\Phi^{n_k}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ no puede aproximar números de módulo mayor a esta constante. Por lo tanto, C_Φ no es hipercíclico. $\square$

Comentarios Finales

En esta tesina, concentramos el estudio de la dinámica de operadores lineales en los espacios $\mathscr{H}_2$ y $\mathfrak{P}_2$, ambos espacios de Hilbert. La estructura de espacio de Hilbert nos dio una cantidad considerable de herramientas a la hora de realizar los cálculos, particularmente al tratar con los operadores adjuntos de multiplicación, donde la definición equivalente de operador adjunto a través del producto interno fue extremadamente útil.

En cuanto a trabajo futuro, podemos abordar el estudio de estos mismos operadores en espacios no tan amigables como $\mathscr{H}_2$ y $\mathfrak{P}_2$. El caso más cercano es el de los espacios de Hardy, que en infinitas variables se denotan $H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$ y están compuestos por las funciones holomorfas $f : \ell_2 \cap B_{c_0} \to \mathbb{C}$ que verifican

$$\|f\|_{H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(rw_1, \dots, rw_n, 0, \dots)|^p d(w_1, \dots, w_n) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Los espacios de Hardy de series de Dirichlet se suelen notar por $\mathscr{H}_p$, y se definen a través de la transformada de Bohr:

$$\mathscr{H}_p = \mathfrak{B} H_p(\ell_2 \cap B_{c_0}).$$

Bayart [B02] caracterizó a los multiplicadores en los espacios $\mathscr{H}_p$. Una posible oportunidad para trabajo futuro es caracterizar a los operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos en estos espacios, y a su vez analizar mediante el uso de la transformada de Bohr resultados análogos para $H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$.

En cuanto a operadores de composición, Bayart [B02] también caracterizó a estos operadores en los espacios $\mathscr{H}_p$. Otro posible camino para trabajo futuro es analizar si la no hiperciclicidad de C_Φ en $\mathscr{H}_2$ es en realidad válida en $\mathscr{H}_p$ para todo $1 \leq p < \infty$. Adicionalmente, se puede estudiar la imagen a través de $\mathfrak{B}^{-1}$ de los operadores de composición en $\mathscr{H}_p$, los cuales en general no son operadores de composición en $H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$. Sería interesante caracterizar a los operadores $T \in \mathcal{L}(H_p(\ell_2 \cap B_{c_0}))$ cuya imagen a través de $\mathfrak{B}$ es un operador de composición en $\mathscr{H}_p$.

Por último, podemos no sólo restringirnos a operadores hipercíclicos y caóticos, sino también comenzar a estudiar otras propiedades de la dinámica de operadores lineales. Algunos ejemplos son las siguientes:

- *Recurrencia.* Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es **recurrente** si para todo abierto $U \subset X$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap T^{-k}(U) \neq \emptyset$ ($T^{-k}(U)$ denota la preimagen de U iterada k veces). La recurrencia de un operador está caracterizada por la existencia de un conjunto denso de puntos $x \in X$ para los cuales existe una sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ de manera que $T^{n_k}(x) \longrightarrow x$ si $k \longrightarrow \infty$.

- *Hiperciclicidad frecuente.* Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es **frecuentemente hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que para cada abierto no vacío $U \subset X$, el conjunto

  $$N(x,U) := \{n \in \mathbb{N} \,:\, T^n(x) \in U\}$$

  verifica

  $$\underline{\mathrm{dens}}(N(x,U)) := \liminf_{N\to\infty} \frac{|N(x,U) \cap [1,N]|}{N} > 0,$$

  donde $\underline{\mathrm{dens}}(A)$ es la **densidad inferior** del conjunto A.

Ya existen resultados interesantes sobre ambas propiedades, por ejemplo en el artículo de Costakis et al. [C13] sobre operadores recurrentes, y en el artículo de Bayart y Grivaux [BG06], donde fue introducida la noción de operador frecuentemente hipercíclico en conjunto con un número de criterios relacionados a la propiedad.

Bibliografía

[B02] Bayart F. «Hardy Spaces of Dirichlet Series and Their Composition Operators». En: *Monatshefte fur Mathematik* 136 (2002), págs. 203-236. DOI: 10.1007/s00605-002-0470-7.

[B04] Bayart F. «Common Hypercyclic Vectors for Composition Operators». En: *Journal of Operator Theory* 52.2 (2004), págs. 353-370. DOI: 10.2307/24715635.

[B13] Bohr H. «Ueber die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variablen in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^{-s}}$». En: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1913 (1913), págs. 441-488. URL: eudml.org/doc/58885.

[B18] Bonet J. «The Frechet Schwartz Algebra of Uniformly Convergent Dirichlet Series». En: *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 61.4 (2018), págs. 933-942. DOI: 10.1017/S0013091517000438.

[BG06] Bayart F. y Grivaux S. «Frequently Hypercyclic Operators». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 358.11 (2006), págs. 5083-5117. ISSN: 00029947. URL: jstor.org/stable/3845415.

[BGE06] Bonilla A. y Grosse-Erdmann K. «On a Theorem of Godefroy and Shapiro». En: *Integral Equations and Operator Theory* 56 (oct. de 2006), págs. 151-162. DOI: 10.1007/s00020-006-1423-7.

[BM09] Bayart F. y Matheron E. *Dynamics of Linear Operators*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9780-521-51496-5.

[BS10] Bühler T. y Salamon D. A. *Functional Analysis*. Mathematical Series Classification. 2010.

[C13] Manoussos A. Costakis G. y Parissis I. «Recurrent Linear Operators». En: *Complex Analysis and Operator Theory* 8.8 (2013), págs. 1601-1643. ISSN: 1661-8262. DOI: 10.1007/s11785-013-0348-9.

[D21] Devaney R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Oct. de 2021. ISBN: 9780429280801. DOI: 10.1201/9780429280801.

[DGMS19] Maestre M. Defant A. García D. y Sevilla-Peris P. *Dirichlet Series and Holomorphic Functions in High Dimensions*. 1.ª ed. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2019. ISBN: 978-1-108-47671-3.

[GEP11] Grosse-Erdmann K.G. y Peris Manguillot A. *Linear Chaos*. Universitext. Springer, 2011. ISBN: 9781447121695. URL: `books.google.com.ar/books?id=l6sjkgEACAAJ`.

[GH99] Gordon J. y Hedenmalm H. «The Composition Operators on the Space of Dirichlet Series with Square Summable Coefficients.» En: *Michigan Mathematical Journal* 46.2 (1999), págs. 313-329. DOI: `10.1307/mmj/1030132413`.

[GS91] Godefroy G. y Shapiro J. H. «Operators with Dense, Invariant, Cyclic Vector Manifolds». En: *Journal of Functional Analysis* 98.2 (1991), págs. 229-269. ISSN: 0022-1236. DOI: `10.1016/0022-1236(91)90078-J`.

[H96] Hadamard M. «Sur les fonctions entières». En: *Bulletin de la S.M.F.* 24 (1896), págs. 184-199.

[HLS97] Lindqvist P. Hedenmalm H. y Seip K. «A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$». En: *Duke Mathematical Journal* 86.1 (1997), págs. 1-37. DOI: `10.1215/S0012-7094-97-08601-4`.

[HR15] Hardy G.H. y Riesz M. *The General Theory of Dirichlet's Series*. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. Cambridge University Press, 1915. URL: `books.google.com.ar/books?id=TAQK0AEACAAJ`.

[K04] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. 3.ª ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004.

[K73] Kahane J.P. «Sur les séries de Dirichlet $\sum_1^\infty \pm n^{-s}$». En: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 276 (1973), págs. 39-42.

[K82] Kitai C. *Invariant Closed Sets for Linear Operators*. University of Toronto, 1982. URL: `books.google.com.ar/books?id=hJQ9NwAACAAJ`.

[KS89] Kashin B.S. y Saakyan A.A. *Orthogonal Series*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1989.

[L25] Littlewood J.E. «On Inequalities in the Theory of Functions». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 23 (1925), págs. 481-519. DOI: `doi:10.1112/plms/s2-23.1.481`.

[M00] Munkres J. R. *Topología*. 2.ª ed. Prentice Hall, 2000. ISBN: 84-205-3180-4.

[M27] Montel P. *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*. 1927.

[QQ20] Queffélec H. y Queffélec M. *Diophantine Approximation and Dirichlet Series*. Texts and Readings in Mathematics. Springer Singapore, 2020. ISBN: 978-981-15-9350-5. DOI: `10.1007/978-981-15-9351-2`.

[QS15] Queffélec H. y Seip K. «Approximation numbers of composition operators on the H2 space of Dirichlet series». En: *Journal of Functional Analysis* 268.6 (2015), págs. 1612-1648. ISSN: 0022-1236. DOI: `10.1016/j.jfa.2014.11.022`.

[R87] Rudin W. *Real and Complex Analysis*. 3.ª ed. McGraw-Hill, 1987. ISBN: 0-07-054234-1.

[R91] Rudin W. *Functional Analysis*. 2.ª ed. McGraw-Hill, 1991. ISBN: 0-07-054236-8.

[VGP22] Galicer D. Fernández Vidal T. y Sevilla-Peris P. *Multipliers for Hardy spaces of Dirichlet series*. 2022. arXiv: `2205.07961 [math.CV]`.

[W44] Wintner A. «Random factorizations and Riemann's hypothesis». En: *Duke Mathematical Journal* 11.2 (1944), págs. 267-275. DOI: `10.1215/S0012-7094-44-01122-1`.