Teoría de Números Trascendentes

Matías Palumbo

Universidad Nacional de Rosario

2/11/22

Definición

$\alpha \in \mathbb{C}$ es **algebraico** si existe $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \neq 0$ tal que $P(\alpha) = 0$.
Un número **trascendente** es un número no algebraico. Es decir, $\alpha \in \mathbb{C}$ es trascendente si no es raíz de ningún polinomio no nulo a coeficientes racionales.

Definición

$\alpha \in \mathbb{C}$ es **algebraico** si existe $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \neq 0$ tal que $P(\alpha) = 0$.
Un número **trascendente** es un número no algebraico. Es decir, $\alpha \in \mathbb{C}$ es trascendente si no es raíz de ningún polinomio no nulo a coeficientes racionales.

- Siglo XVII: Leonhard Euler conjetura que ciertos números de la forma $\log_a(b)$ son trascendentes.

Definición

$\alpha \in \mathbb{C}$ es **algebraico** si existe $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \neq 0$ tal que $P(\alpha) = 0$.
Un número **trascendente** es un número no algebraico. Es decir, $\alpha \in \mathbb{C}$ es trascendente si no es raíz de ningún polinomio no nulo a coeficientes racionales.

- Siglo XVII: Leonhard Euler conjetura que ciertos números de la forma $\log_a(b)$ son trascendentes.
- 1844: Liouville realiza la primera prueba formal de trascendencia.

Definición

$\alpha \in \mathbb{C}$ es **algebraico** si existe $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \neq 0$ tal que $P(\alpha) = 0$.
Un número **trascendente** es un número no algebraico. Es decir, $\alpha \in \mathbb{C}$ es trascendente si no es raíz de ningún polinomio no nulo a coeficientes racionales.

- Siglo XVII: Leonhard Euler conjetura que ciertos números de la forma $\log_a(b)$ son trascendentes.
- 1844: Liouville realiza la primera prueba formal de trascendencia.
- 1873: Hermite prueba la trascendencia de e.

Definición

$\alpha \in \mathbb{C}$ es **algebraico** si existe $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \neq 0$ tal que $P(\alpha) = 0$.
Un número **trascendente** es un número no algebraico. Es decir, $\alpha \in \mathbb{C}$ es trascendente si no es raíz de ningún polinomio no nulo a coeficientes racionales.

- Siglo XVII: Leonhard Euler conjetura que ciertos números de la forma $\log_a(b)$ son trascendentes.
- 1844: Liouville realiza la primera prueba formal de trascendencia.
- 1873: Hermite prueba la trascendencia de e.
- 1885: El Teorema de Lindemann-Wierstrass permite probar la trascendencia de π, y de ciertas funciones usuales en la matemática evaluadas en números algebraicos (por ejemplo, las funciones trigonométricas).

Definición

$\alpha \in \mathbb{C}$ es **algebraico** si existe $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \neq 0$ tal que $P(\alpha) = 0$.
Un número **trascendente** es un número no algebraico. Es decir, $\alpha \in \mathbb{C}$ es trascendente si no es raíz de ningún polinomio no nulo a coeficientes racionales.

- Siglo XVII: Leonhard Euler conjetura que ciertos números de la forma $\log_a(b)$ son trascendentes.
- 1844: Liouville realiza la primera prueba formal de trascendencia.
- 1873: Hermite prueba la trascendencia de e.
- 1885: El Teorema de Lindemann-Wierstrass permite probar la trascendencia de π, y de ciertas funciones usuales en la matemática evaluadas en números algebraicos (por ejemplo, las funciones trigonométricas).
- 1934/1935: Gelfond y Schneider prueban el séptimo de los Problemas de Hilbert: α^β es trascendente si $\alpha \notin \{0, 1\}$ y β es irracional, y ambos son algebraicos.

Definición

$\alpha \in \mathbb{C}$ es **algebraico** si existe $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \neq 0$ tal que $P(\alpha) = 0$.
Un número **trascendente** es un número no algebraico. Es decir, $\alpha \in \mathbb{C}$ es trascendente si no es raíz de ningún polinomio no nulo a coeficientes racionales.

- Siglo XVII: Leonhard Euler conjetura que ciertos números de la forma $\log_a(b)$ son trascendentes.
- 1844: Liouville realiza la primera prueba formal de trascendencia.
- 1873: Hermite prueba la trascendencia de e.
- 1885: El Teorema de Lindemann-Wierstrass permite probar la trascendencia de π, y de ciertas funciones usuales en la matemática evaluadas en números algebraicos (por ejemplo, las funciones trigonométricas).
- 1934/1935: Gelfond y Schneider prueban el séptimo de los Problemas de Hilbert: α^β es trascendente si $\alpha \notin \{0, 1\}$ y β es irracional, y ambos son algebraicos.
- 1966: Baker prueba la trascendencia de combinaciones lineales algebraicas de logaritmos.

Números Algebraicos

Observación

Los números algebraicos también pueden definirse en términos de polinomios a coeficientes enteros.

Números Algebraicos

Observación

Los números algebraicos también pueden definirse en términos de polinomios a coeficientes enteros.

Definición

El **grado** de un número algebraico α se define como

$$\deg(\alpha) = \min_{\substack{0\neq P\in\mathbb{Q}[x] \\ P(\alpha)=0}} \deg(P).$$

Es decir, el grado de α es el mínimo grado de los polinomios no nulos de $\mathbb{Q}[x]$ de los cuales α es raíz.

Definición

El **polinomio mínimo** de α es el único polinomio mónico $P \in \mathbb{Q}[x]$ que verifica $\deg(P) = \deg(\alpha)$ y $P(\alpha) = 0$.

Algunos ejemplos de números algebraicos y sus polinomios mínimos:

- Números racionales $p/q \longrightarrow P_1(x) = x - \frac{p}{q}$.
- Raíces de números racionales $\sqrt[n]{p/q} \longrightarrow P_2(x) = x^n - \frac{p}{q}$.
- ia, con $a \in \mathbb{Q} \longrightarrow P_3(x) = x^2 + a^2$.
- Número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow P_4(x) = x^2 - x - 1$.

Algunos ejemplos de números algebraicos y sus polinomios mínimos:

- Números racionales $p/q \longrightarrow P_1(x) = x - \frac{p}{q}$.
- Raíces de números racionales $\sqrt[n]{p/q} \longrightarrow P_2(x) = x^n - \frac{p}{q}$.
- ia, con $a \in \mathbb{Q} \longrightarrow P_3(x) = x^2 + a^2$.
- Número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow P_4(x) = x^2 - x - 1$.

Teorema

Si α es un número algebraico, $\sqrt[n]{\alpha}$ es algebraico para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $P(x)$ el polinomio mínimo de α. Luego, $Q(x) := P(x^n)$ es a coeficientes racionales, y $Q(\sqrt[n]{\alpha}) = P(\alpha) = 0$. $\square$

Algunos ejemplos de números algebraicos y sus polinomios mínimos:

- Números racionales $p/q \longrightarrow P_1(x) = x - \frac{p}{q}$.
- Raíces de números racionales $\sqrt[n]{p/q} \longrightarrow P_2(x) = x^n - \frac{p}{q}$.
- ia, con $a \in \mathbb{Q} \longrightarrow P_3(x) = x^2 + a^2$.
- Número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow P_4(x) = x^2 - x - 1$.

Teorema

Si α es un número algebraico, $\sqrt[n]{\alpha}$ es algebraico para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $P(x)$ el polinomio mínimo de α. Luego, $Q(x) := P(x^n)$ es a coeficientes racionales, y $Q(\sqrt[n]{\alpha}) = P(\alpha) = 0$. $\square$

Teorema

El conjunto de números algebraicos es un cuerpo con la suma y la multiplicación usual.

Más ejemplos inmediatos:

- $1 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{2}}$ es algebraico.
- $a + ib$ es algebraico si a y b son algebraicos.

En general, toda combinación de números algebraicos mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces n-ésimas resulta en un número algebraico.

Más ejemplos inmediatos:

- $1 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{2}}$ es algebraico.
- $a + ib$ es algebraico si a y b son algebraicos.

En general, toda combinación de números algebraicos mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces n-ésimas resulta en un número algebraico.

El cuerpo de los números algebraicos verifica una propiedad más fuerte: es **algebraicamente cerrado**.

Teorema

Toda raíz de un polinomio $P(x)$ a coeficientes algebraicos es un número algebraico.

El cuerpo de los números algebraicos es la **clausura algebraica** de $\mathbb{Q}$. Es decir, es el menor cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{Q}$. Por esta razón, se suele notarlo por $\overline{\mathbb{Q}}$.

Números trascendentes

Primeras observaciones:

Teorema

Si α y β son números trascendentes, entonces $\alpha + \beta$ es trascendente o $\alpha\beta$ es trascendente.

Demostración. Si suponemos que ambos $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ son números algebraicos, el polinomio $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ es a coeficientes algebraicos. Por lo tanto, sus raíces (α y β) son números algebraicos, contradiciendo lo supuesto. □

Números trascendentes

Primeras observaciones:

Teorema

Si α y β son números trascendentes, entonces $\alpha + \beta$ es trascendente o $\alpha\beta$ es trascendente.

Demostración. Si suponemos que ambos $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ son números algebraicos, el polinomio $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ es a coeficientes algebraicos. Por lo tanto, sus raíces (α y β) son números algebraicos, contradiciendo lo supuesto. $\square$

Teorema

El conjunto de números trascendentes es no numerable.

Números trascendentes

Primeras observaciones:

Teorema

Si α y β son números trascendentes, entonces $\alpha + \beta$ es trascendente o $\alpha\beta$ es trascendente.

Demostración. Si suponemos que ambos $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ son números algebraicos, el polinomio $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ es a coeficientes algebraicos. Por lo tanto, sus raíces (α y β) son números algebraicos, contradiciendo lo supuesto. □

Teorema

El conjunto de números trascendentes es no numerable.

Los primeros avances formales en la teoría de números trascendentes se atribuyen a Joseph Liouville, quien estudió los hoy denominados **números de Liouville**.

Definición

$\alpha \in \mathbb{R}$ es un **número de Liouville** si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe algún racional p/q, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q > 1$, tal que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Los números de Liouville se definen de manera que puedan ser muy bien aproximados mediante números racionales.

Definición

$\alpha \in \mathbb{R}$ es un **número de Liouville** si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe algún racional p/q, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q > 1$, tal que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Los números de Liouville se definen de manera que puedan ser muy bien aproximados mediante números racionales.

De la definición, si α es un número de Liouville, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un número racional p/q a distancia menor que $1/q^n$ de α. Como esta distancia depende exponencialmente de q, los ejemplos de números de Liouville se suelen construir como sumas infinitas de racionales p_n/q_n tales que $1/q_n$ tiende a 0 muy rápidamente (más rápidamente que $1/q^n$).

Por ejemplo,

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$$

es un número de Liouville.

Teorema

Todo número de Liouville es irracional.

Teorema

El conjunto de números de Liouville es no numerable y tiene medida de Lebesgue nula.

Teorema

Todo número de Liouville es irracional.

Teorema

El conjunto de números de Liouville es no numerable y tiene medida de Lebesgue nula.

Con el siguiente teorema, Liouville encontró una condición necesaria para que un número cualquiera sea algebraico, y por lo tanto una condición suficiente para su trascendencia.

Teorema

(Teorema de Liouville) Sea α un número algebraico irracional de grado n. Luego, existe $C > 0$ tal que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q > 0$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}.$$

Corolario

Todo número de Liouville es trascendente.

Teorema de Lindemann-Weierstrass

Propuesto por Lindemann en 1882 y probado por Weierstrass en 1885.

Definición

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ son **algebraicamente independientes** sobre $\mathbb{Q}$ si no existe ningún polinomio no nulo $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Teorema

(Teorema de Lindemann-Weierstrass) Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema de Lindemann-Weierstrass

Propuesto por Lindemann en 1882 y probado por Weierstrass en 1885.

Definición

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ son **algebraicamente independientes** sobre $\mathbb{Q}$ si no existe ningún polinomio no nulo $P \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Teorema

(Teorema de Lindemann-Weierstrass) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Consecuencias:

- e^{α} es trascendente para todo número algebraico $\alpha \neq 0$.
- $\ln(\alpha)$ es trascendente para todo número algebraico $\alpha \neq 0, 1$.
- $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sinh(\alpha)$, $\cosh(\alpha)$ y $\tanh(\alpha)$ (y sus inversas) son trascendentes si $\alpha \neq 0$ es algebraico. Veamos el caso de $\sin(\alpha)$:

Recordemos que

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si suponemos que $\sin(\alpha) = \beta$ es algebraico, de la definición obtenemos la ecuación

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} - 2i\beta = 0,$$

la cual contradice el Teorema de Lindemann-Weierstrass.

Recordemos que

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si suponemos que $\sin(\alpha) = \beta$ es algebraico, de la definición obtenemos la ecuación

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} - 2i\beta = 0,$$

la cual contradice el Teorema de Lindemann-Weierstrass.

- π es trascendente: si suponemos que π es algebraico, $i\pi$ lo es. Luego, por el Teorema de Lindemann-Weierstrass $e^{i\pi} = -1$ es trascendente, un absurdo.

Cuadratura del Círculo

Problema de cuadrar el círculo: construir con regla y compás un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado.

Definición

Un número $a \in \mathbb{R}$ es **construible** si, dada una unidad de medida, puede construirse con regla y compás un segmento de longitud a en un número finito de pasos.

Si consideramos el radio r del círculo como la unidad de medida, su área es de magnitud π. Luego, el problema de reduce a construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$.

En 1837, Pierre Wantzel descubre que todo número construible puede asociarse a un sistema de ecuaciones cuadráticas a coeficientes racionales, y prueba lo siguiente:

Teorema

(Teorema de Wantzel) Si α es un número construible, entonces es raíz de un polinomio a coeficientes racionales irreducible de grado 2^n, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Es decir, todo número construible es algebraico. $\sqrt{\pi}$ es trascendente (si fuera algebraico $\sqrt{\pi}^2 = \pi$ también lo sería), por lo que el problema de cuadrar el círculo es imposible. La teoría de números trascendentes fue fundamental en la prueba de esto último.

Teorema de Gelfond–Schneider

Gelfond y Schneider prueban independientemente en 1934 y 1935, respectivamente, el séptimo de los famosos Problemas de Hilbert:

Teorema

(Teorema de Gelfond-Schneider) Si α *y* β *son números algebraicos tales que* $\alpha \neq 0, 1$ *y* $\beta \notin \mathbb{Q}$*, entonces cualquier valor de* α^β *es trascendente.*

Teorema de Gelfond–Schneider

Gelfond y Schneider prueban independientemente en 1934 y 1935, respectivamente, el séptimo de los famosos Problemas de Hilbert:

Teorema

(Teorema de Gelfond-Schneider) Si α y β son números algebraicos tales que $\alpha \neq 0, 1$ y $\beta \notin \mathbb{Q}$, entonces cualquier valor de α^β es trascendente.

Consecuencias:

- $2^{\sqrt{2}}$ y $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ son números trascendentes.
- $\log_a(b)$ es trascendente si $a, b \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}^+$ son algebraicos y $a \neq 1$.
- La **constante de Gelfond** e^π es trascendente: $e^\pi = \left(e^{i\pi}\right)^{-i} = (-1)^{-i}$.
- i^i es trascendente. Notemos además que

$$i^i = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^i = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

El hecho que α es un número algebraico es fundamental. Si consideramos $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (trascendente por el mismo teorema) y $\beta = \sqrt{2}$, tenemos que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$$

El hecho que α es un número algebraico es fundamental. Si consideramos $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (trascendente por el mismo teorema) y $\beta = \sqrt{2}$, tenemos que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$$

Otro contraejemplo está dado por $\alpha = i^{-\sqrt{2}i}$ y $\beta = \sqrt{2}$:

$$\alpha^{\beta} = \left(i^{-\sqrt{2}i}\right)^{\sqrt{2}} = \left(i^{i}\right)^{-2} = \left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)^{-2} = e^{i\pi} = -1.$$

El hecho que α es un número algebraico es fundamental. Si consideramos $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (trascendente por el mismo teorema) y $\beta = \sqrt{2}$, tenemos que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$$

Otro contraejemplo está dado por $\alpha = i^{-\sqrt{2}i}$ y $\beta = \sqrt{2}$:

$$\alpha^{\beta} = \left(i^{-\sqrt{2}i}\right)^{\sqrt{2}} = \left(i^{i}\right)^{-2} = \left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)^{-2} = e^{i\pi} = -1.$$

También es indispensable que β sea algebraico: podemos considerar $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ algebraico tal que $\alpha \neq 1$, y $\beta = \log_{\alpha}(b)$ para algún $b \in \mathbb{R}^{+}$. Luego

$$\alpha^{\beta} = \alpha^{\log_{\alpha}(b)} = b.$$

Teorema de Baker

Baker prueba en 1966 un teorema sobre la trascendencia de logaritmos que generaliza el Teorema de Gelfond-Schneider.

Teorema

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *son números algebraicos no nulos y* $\ln(\alpha_1), \ldots, \ln(\alpha_n)$ *son linealmente independientes sobre* $\mathbb{Q}$*, entonces* $1, \ln(\alpha_1), \ldots, \ln(\alpha_n)$ *son linealmente independientes sobre* $\overline{\mathbb{Q}}$*.*

Corolario

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ *son tales que* $\alpha_k \neq 0$ *para* $k = 1, \ldots, n$*, entonces* $\beta_0 + \beta_1 \ln(\alpha_1) + \cdots + \beta_n \ln(\alpha_n)$ *es trascendente.*

Teorema de Baker

Baker prueba en 1966 un teorema sobre la trascendencia de logaritmos que generaliza el Teorema de Gelfond-Schneider.

Teorema

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *son números algebraicos no nulos y* $\ln(\alpha_1), \ldots, \ln(\alpha_n)$ *son linealmente independientes sobre* $\mathbb{Q}$*, entonces* $1, \ln(\alpha_1), \ldots, \ln(\alpha_n)$ *son linealmente independientes sobre* $\overline{\mathbb{Q}}$*.*

Corolario

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ *son tales que* $\alpha_k \neq 0$ *para* $k = 1, \ldots, n$*, entonces* $\beta_0 + \beta_1 \ln(\alpha_1) + \cdots + \beta_n \ln(\alpha_n)$ *es trascendente.*

Consecuencias:

- $\pi + \ln(\alpha)$ es trascendente si $\alpha \neq 0$ es algebraico:
  De la igualdad $e^{i\pi} = -1$ obtenemos $\pi = -i \ln(-1)$, y del teorema anterior $\pi + \ln(\alpha) = -i \ln(-1) + \ln(\alpha)$ es trascendente.

- $e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ es trascendente si $\alpha_i, \beta_i \neq 0$ son algebraicos.
- $e^{\alpha\pi+\beta}$ es trascendente si α y $\beta \neq 0$ son algebraicos:
  Se deduce del ítem anterior, ya que $e^{\alpha\pi+\beta} = e^{-i\alpha\ln(-1)}e^{\beta} = e^{\beta}(-1)^{-i\alpha}$.

Conjetura de Schanuel

El gran problema abierto en la teoría de números trascendentes es una conjetura que generalizaría la mayoría de los resultados vistos. Fue propuesta por Stephen Schanuel en la década del 60.

Notamos por $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ al cuerpo resultante de intersecar todos los cuerpos que contienen a $\mathbb{Q} \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Conjetura

(Conjetura de Schanuel) Sean $z_1, \ldots, z_n$ números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Luego, el **grado de trascendencia** *de $\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_n})$ sobre $\mathbb{Q}$ es al menos n, es decir, el máximo cardinal de un subconjunto de $\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_n})$ algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}$ es al menos n.*

$$¿\pi^e? \quad ¿e+\pi? \quad ¿\zeta(3)? \quad ¿\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(-\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)?$$

¡Muchas gracias!

Teorema de Lindemann-Weierstrass
Propuesto por Lindemann en 1882 y probado por Weierstrass en 1885.
Definición
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$ si no existe ningún polinomio no nulo $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.
Teorema
(Teorema de Lindemann-Weierstrass) Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.
Consecuencias:
e^{α} es trascendente para todo número algebraico $\alpha \neq 0$.
$\ln(\alpha)$ es trascendente para todo número algebraico $\alpha \neq 0, 1$.
$\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sinh(\alpha)$, $\cosh(\alpha)$ y $\tanh(\alpha)$ (y sus inversas) son trascendentes si $\alpha \neq 0$ es algebraico.