Dinámica de Operadores de Multiplicación en el Espacio de Hardy de Series de Dirichlet

Matías Andrés Palumbo

Universidad Nacional de Rosario

Trabajo en conjunto con:

Santiago Muro (Universidad Nacional de Rosario)

Rodrigo Cardeccia (Instituto Balseiro)

Operadores Hipercíclicos y Caóticos

Notamos por $\mathcal{L}(X)$ al conjunto de operadores lineales continuos $T : X \to X$.

Definición

Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, la T-**órbita** de $x \in X$ es el conjunto

$$O(x,T) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

donde T^n refiere a la composición de T con sí mismo n veces.
El operador T es **hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que la órbita $O(x,T)$ es densa en X.

Operadores Hipercíclicos y Caóticos

Notamos por $\mathcal{L}(X)$ al conjunto de operadores lineales continuos $T : X \to X$.

Definición

Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, la T-**órbita** de $x \in X$ es el conjunto

$$O(x,T) = \{T^n(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

donde T^n refiere a la composición de T con sí mismo n veces.
El operador T es **hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que la órbita $O(x,T)$ es densa en X.

Algunos ejemplos de operadores hipercíclicos:

Operadores Hipercíclicos y Caóticos

Notamos por $\mathcal{L}(X)$ al conjunto de operadores lineales continuos $T : X \to X$.

Definición

Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, la T-**órbita** de $x \in X$ es el conjunto

$$O(x,T) = \{T^n(x) \, : \, n \in \mathbb{N}\},$$

donde T^n refiere a la composición de T con sí mismo n veces.
El operador T es **hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que la órbita $O(x,T)$ es densa en X.

Algunos ejemplos de operadores hipercíclicos:

- Los operadores de traslación $T_a(f)(z) = f(z+a)$ en el espacio de funciones enteras $H(\mathbb{C})$.

Operadores Hipercíclicos y Caóticos

Notamos por $\mathcal{L}(X)$ al conjunto de operadores lineales continuos $T : X \to X$.

Definición

Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, la T-**órbita** de $x \in X$ es el conjunto

$$O(x, T) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

donde T^n refiere a la composición de T con sí mismo n veces.
El operador T es **hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que la órbita $O(x, T)$ es densa en X.

Algunos ejemplos de operadores hipercíclicos:

- Los operadores de traslación $T_a(f)(z) = f(z + a)$ en el espacio de funciones enteras $H(\mathbb{C})$.
- Algunos operadores adjuntos de multiplicación M_φ^* en $H_2(\mathbb{D})$, donde $M_\varphi(f) = \varphi f$.

Definición

Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Un elemento $x \in X$ es un **punto periódico** de T si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = x$. Notamos por $\mathrm{Per}(T)$ al conjunto de puntos periódicos de T.

El operador T es **caótico** si:

1. T es hipercíclico,
2. $\mathrm{Per}(T)$ es denso.

Definición

Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Un elemento $x \in X$ es un **punto periódico** de T si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = x$. Notamos por $\mathrm{Per}(T)$ al conjunto de puntos periódicos de T.
El operador T es **caótico** si:

1. T es hipercíclico,
2. $\mathrm{Per}(T)$ es denso.

- Todo operador caótico es hipercíclico.

Definición

Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Un elemento $x \in X$ es un **punto periódico** de T si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = x$. Notamos por $\mathrm{Per}(T)$ al conjunto de puntos periódicos de T.
El operador T es **caótico** si:

1. T es hipercíclico,
2. $\mathrm{Per}(T)$ es denso.

- Todo operador caótico es hipercíclico.
- No existen operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita.

Definición

Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Un elemento $x \in X$ es un **punto periódico** de T si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = x$. Notamos por $\mathrm{Per}(T)$ al conjunto de puntos periódicos de T.

El operador T es **caótico** si:

1. T es hipercíclico,
2. $\mathrm{Per}(T)$ es denso.

- Todo operador caótico es hipercíclico.
- No existen operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita.
- La hiperciclicidad y caoticidad de operadores $T : X \to X$ y $T_0 : X_0 \to X_0$ se preserva a través de homeomorfismos $J : X \to X_0$ con imagen densa tales que conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "J"] & X \arrow[d, leftrightarrow, "J"] \\ X_0 \arrow[r, "T_0"] & X_0 \end{tikzcd}$$

En dicho caso, T y T_0 son **factores**.

Series de Dirichlet

Definición

Una **serie de Dirichlet** es una serie de la forma

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Notamos por $\mathscr{D}$ al conjunto de todas las series de Dirichlet.

Series de Dirichlet

Definición

Una **serie de Dirichlet** es una serie de la forma

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Notamos por $\mathscr{D}$ al conjunto de todas las series de Dirichlet.

Un ejemplo conocido es la **función zeta de Riemann**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

convergente si $Re(s) > 1$.

En general, las series de Dirichlet convergen en semiplanos de la forma

$$\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} \, : \, Re(s) > \theta\}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Existen **abscisas** asociadas a cada serie $f \in \mathscr{D}$.

En general, las series de Dirichlet convergen en semiplanos de la forma

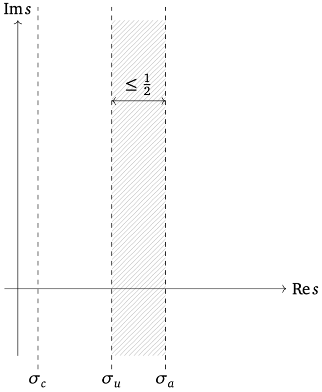
$$\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} \,:\, Re(s) > \theta\}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Existen **abscisas** asociadas a cada serie $f \in \mathscr{D}$.

Un ejemplo es la **abscisa de convergencia**

$$\sigma_c(f) = \text{ínf}\{\theta \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ converge en } \mathbb{C}_\theta\}.$$

Existen abscisas relacionadas a las regiones de convergencia absoluta (σ_a) y uniforme (σ_u) de estas series.



En general, las series de Dirichlet convergen en semiplanos de la forma

$$\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} \,:\, Re(s) > \theta\}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Existen **abscisas** asociadas a cada serie $f \in \mathscr{D}$.

Un ejemplo es la **abscisa de convergencia**

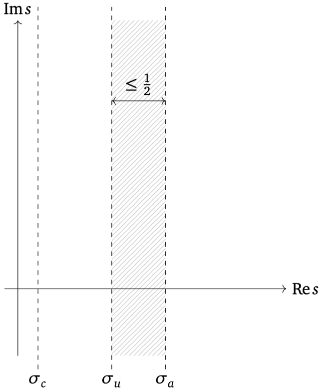
$$\sigma_c(f) = \text{ínf}\{\theta \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ converge en } \mathbb{C}_\theta\}.$$

Existen abscisas relacionadas a las regiones de convergencia absoluta (σ_a) y uniforme (σ_u) de estas series.

$$-\infty \leq \sigma_c(f) \leq \sigma_u(f) \leq \sigma_a(f) \leq \infty$$

$$\sup\{\sigma_a(f) - \sigma_c(f) \,:\, f \in \mathscr{D}\} = 1$$

$$\sup\{\sigma_a(f) - \sigma_u(f) \,:\, f \in \mathscr{D}\} = \frac{1}{2}$$



El espacio de Hardy-Hilbert $\mathscr{H}_2$ de series de Dirichlet es

$$\mathscr{H}_2 = \left\{ f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D} \,:\, \|f\|^2_{\mathscr{H}_2} := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Los elementos de $\mathscr{H}_2$ son funciones holomorfas en $\mathbb{C}_{1/2}$.

El espacio de Hardy-Hilbert $\mathscr{H}_2$ de series de Dirichlet es

$$\mathscr{H}_2 = \left\{ f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{D} \,:\, \|f\|_{\mathscr{H}_2}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Los elementos de $\mathscr{H}_2$ son funciones holomorfas en $\mathbb{C}_{1/2}$.

Es relevante también el espacio de series de Dirichlet acotadas en $\mathbb{C}_+ := \mathbb{C}_0$:

$$\mathscr{H}_\infty = \left\{ f \in \mathscr{D} \,:\, \|f\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{C}_+} |f(s)| < \infty \right\}.$$

Operadores de Multiplicación en $\mathscr{H}_2$

El **operador de multiplicación** asociado a una función φ se nota por M_φ y actúa de la siguiente manera:

$$M_\varphi(f) = \varphi f.$$

Para que $M_\varphi \in \mathcal{L}(X)$ esté bien definido debe valer $\varphi f \in X$ para cada $f \in X$.

Operadores de Multiplicación en $\mathscr{H}_2$

El **operador de multiplicación** asociado a una función φ se nota por M_φ y actúa de la siguiente manera:

$$M_\varphi(f) = \varphi f.$$

Para que $M_\varphi \in \mathcal{L}(X)$ esté bien definido debe valer $\varphi f \in X$ para cada $f \in X$.

Son de interés los operadores **adjuntos** de multiplicación $M_\varphi^* \in \mathcal{L}(X^*)$, donde

$$M_\varphi^*(x^*)(f) = x^*(M_\varphi(f))$$

para $x^* \in X^*$ y $f \in X$. En espacios de Hilbert, los operadores adjuntos se identifican con operadores en $\mathcal{L}(X)$.

Operadores de Multiplicación en $\mathscr{H}_2$

El **operador de multiplicación** asociado a una función φ se nota por M_φ y actúa de la siguiente manera:

$$M_\varphi(f) = \varphi f.$$

Para que $M_\varphi \in \mathcal{L}(X)$ esté bien definido debe valer $\varphi f \in X$ para cada $f \in X$.

Son de interés los operadores **adjuntos** de multiplicación $M_\varphi^* \in \mathcal{L}(X^*)$, donde

$$M_\varphi^*(x^*)(f) = x^*(M_\varphi(f))$$

para $x^* \in X^*$ y $f \in X$. En espacios de Hilbert, los operadores adjuntos se identifican con operadores en $\mathcal{L}(X)$.

Teorema (Hedenmalm-Lindqvist-Seip)

Una función φ define un operador de multiplicación en $\mathscr{H}_2$ si y solo si $\varphi \in \mathscr{H}_\infty$. En dicho caso,

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{C}_+} |\varphi(s)|.$$

Los operadores de multiplicación en $\mathscr{H}_2$ **no son hipercíclicos**, sin embargo lo siguiente indica posibles resultados interesantes sobre sus operadores adjuntos.

Godefroy y Shapiro (1991) caracterizan a los operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos y caóticos en ciertos espacios de Hilbert de funciones analíticas:

Los operadores de multiplicación en $\mathscr{H}_2$ **no son hipercíclicos**, sin embargo lo siguiente indica posibles resultados interesantes sobre sus operadores adjuntos.

Godefroy y Shapiro (1991) caracterizan a los operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos y caóticos en ciertos espacios de Hilbert de funciones analíticas:

Teorema (Godefroy-Shapiro)

Sea H un espacio de Hilbert de funciones holomorfas sobre $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ tal que los funcionales de evaluación $f \mapsto f(z)$ son continuos. Sea $M_\varphi \in \mathcal{L}(X)$ un operador de multiplicación, con $\varphi \in H(\Omega)$ no constante y $\|M_\varphi\| = \sup_{z\in\Omega} |\varphi(z)|$. Son equivalentes:

1. *M_φ^* es hipercíclico.*
2. *M_φ^* es caótico.*
3. *$\varphi(\Omega) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*

Los operadores de multiplicación en $\mathscr{H}_2$ **no son hipercíclicos**, sin embargo lo siguiente indica posibles resultados interesantes sobre sus operadores adjuntos.

Godefroy y Shapiro (1991) caracterizan a los operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos y caóticos en ciertos espacios de Hilbert de funciones analíticas:

Teorema (Godefroy-Shapiro)

Sea H un espacio de Hilbert de funciones holomorfas sobre $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ tal que los funcionales de evaluación $f \mapsto f(z)$ son continuos. Sea $M_\varphi \in \mathcal{L}(X)$ un operador de multiplicación, con $\varphi \in H(\Omega)$ no constante y $\|M_\varphi\| = \sup_{z\in\Omega} |\varphi(z)|$. Son equivalentes:

1. M_φ^* *es hipercíclico.*
2. M_φ^* *es caótico.*
3. $\varphi(\Omega) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Damos una caracterización análoga de los operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos/caóticos M_φ^* en $\mathscr{H}_2$. Expandimos esta caracterización a los operadores asociados a la restricción de φ a *finitos primos*.

Si $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$, la restricción en cuestión es

$$\psi_n(s) = \sum_{\substack{k=\mathfrak{p}^\alpha \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} a_k k^{-s}.$$

ψ_n es la serie resultante de ψ *al dejar solo los términos cuyo índice corresponde al producto de a lo sumo los primeros n números primos.*

Si $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$, la restricción en cuestión es

$$\psi_n(s) = \sum_{\substack{k=\mathfrak{p}^\alpha \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} a_k k^{-s}.$$

ψ_n es la serie resultante de ψ *al dejar solo los términos cuyo índice corresponde al producto de <u>a lo sumo</u> los primeros n números primos.*

Teorema

Sea $\psi \in \mathscr{H}_\infty$ no constante. Son equivalentes:

1. $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ *es hipercíclico.*
2. $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ *es caótico.*
3. $\psi(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
4. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*
5. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*

Teorema

Sea $\psi \in \mathscr{H}_\infty$ no constante. Son equivalentes:

1. $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ *es hipercíclico.*
2. $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ *es caótico.*
3. $\psi(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
4. *Existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
5. *Existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$, $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Es decir, para que un operador $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ sea hipercíclico basta con que algún operador resultante de restringir ψ a "finitos primos" sea hipercíclico.

Teorema

Sea $\psi \in \mathscr{H}_\infty$ no constante. Son equivalentes:

1. $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ *es hipercíclico.*
2. $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ *es caótico.*
3. $\psi(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
4. *Existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
5. *Existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$, $\psi_n(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Es decir, para que un operador $M_\psi^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ sea hipercíclico basta con que algún operador resultante de restringir ψ a "finitos primos" sea hipercíclico.

Consideremos $\psi(s) = \frac{1}{2} + 2^{-s}$. M_ψ^* es hipercíclico, pues $\psi(1) = 1 \in \mathbb{T}$.

Del resultado anterior, cualquier serie $f \in \mathscr{H}_\infty$ que coincida con ψ al restringirla a los primeros k primos también induce un operador hipercíclico.

Un ejemplo es

$$f(s) = \psi(s) + \sum_{n=1}^{\infty} (3^n)^{-s-2}.$$

Herramientas en la Demostración

Fue crucial trabajar con la **transformada de Bohr**, una aplicación ideada por Harald Bohr que relaciona

(series de Dirichlet) $\mathscr{D} \longleftrightarrow \mathfrak{P}$ **(series de potencias en infinitas variables)**

Herramientas en la Demostración

Fue crucial trabajar con la **transformada de Bohr**, una aplicación ideada por Harald Bohr que relaciona

(series de Dirichlet) $\mathscr{D} \longleftrightarrow \mathfrak{P}$ **(series de potencias en infinitas variables)**

Las series de potencias en infinitas variables son de la forma

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha$$

(con $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}_0^n$) y están asociadas a funciones holomorfas en

$$B_{c_0} = \left\{ z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0 \, : \, \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n| < 1 \right\}.$$

La transformada de Bohr está basada en **la factorización en números primos de los números naturales**.

Si $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de números primos y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, la expresión

$$\mathfrak{p}^\alpha := \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{\alpha_n}$$

es la factorización de un número natural.

La transformada de Bohr está basada en **la factorización en números primos de los números naturales**.

Si $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de números primos y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, la expresión

$$\mathfrak{p}^\alpha := \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{\alpha_n}$$

es la factorización de un número natural.

Bohr identifica

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \longleftrightarrow n = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{\alpha_n} = \mathfrak{p}^\alpha$$

$$(0, 2, 1) \longleftrightarrow 45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \longleftrightarrow \sum_{\substack{n=1 \\ n=\mathfrak{p}^\alpha}}^{\infty} c_\alpha n^{-s}$$

La transformada de Bohr $\mathfrak{B}$ nos permitió estudiar los operadores de multiplicación inicialmente en espacios de funciones en infinitas variables, y luego trasladar ciertos resultados a series de Dirichlet.

La transformada de Bohr $\mathfrak{B}$ nos permitió estudiar los operadores de multiplicación inicialmente en espacios de funciones en infinitas variables, y luego trasladar ciertos resultados a series de Dirichlet.

Caracterizamos a los operadores adjuntos de multiplicación hipercíclicos en

$$\mathfrak{P}_2 := H_2(B_{c_0} \cap \ell_2) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \,:\, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha|^2 < \infty \right\},$$

donde los multiplicadores vienen dados por funciones $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$ (holomorfas y acotadas en B_{c_0}).

Es relevante el espacio de Hardy

$$H_2(\mathbb{D}^n) = \left\{ f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \,:\, \|f\|^2_{H_2(\mathbb{D}^n)} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_\alpha|^2 < \infty \right\}.$$

Dada $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$, notamos por $\varphi_n \in H_\infty(\mathbb{D}^n)$ a la restricción de φ a $\mathbb{D}^n$ (primeras n variables).

Teorema

Sea $\varphi \in H_\infty(B_{c_0})$ no constante. Son equivalentes:

1. $M_\varphi^* : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$ *es hipercíclico.*
2. $M_\varphi^* : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$ *es caótico.*
3. $\varphi(B_{c_0}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
4. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_{\varphi_n}^* : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ es hipercíclico.*
5. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $M_{\varphi_n}^* : H_2(\mathbb{D}^n) \to H_2(\mathbb{D}^n)$ es hipercíclico.*

Los operadores de multiplicación $M_\varphi \in \mathcal{L}(\mathfrak{P}_2)$ y $M_{\mathfrak{B}\varphi} \in \mathcal{L}(\mathscr{H}_2)$ son factores a través de $\mathfrak{B}$, por lo que se preserva la hiperciclicidad/caoticidad.

Más Allá de $\mathscr{H}_2$

Abordamos un estudio similar en los espacios de Hardy ($1 \leq p < \infty$, no únicamente $p = 2$) de series de Dirichlet y funciones holomorfas en infinitas variables.

Más Allá de $\mathscr{H}_2$

Abordamos un estudio similar en los espacios de Hardy ($1 \leq p < \infty$, no únicamente $p = 2$) de series de Dirichlet y funciones holomorfas en infinitas variables.

- En infinitas variables: $H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$ está compuesto por funciones holomorfas $f : \ell_2 \cap B_{c_0} \to \mathbb{C}$ que verifican

$$\|f\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(rw_1, \dots, rw_n, 0, \dots)|^p d(w_1, \dots, w_n) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Más Allá de $\mathscr{H}_2$

Abordamos un estudio similar en los espacios de Hardy ($1 \leq p < \infty$, no únicamente $p = 2$) de series de Dirichlet y funciones holomorfas en infinitas variables.

- En infinitas variables: $H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$ está compuesto por funciones holomorfas $f : \ell_2 \cap B_{c_0} \to \mathbb{C}$ que verifican

$$\|f\|_p := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(rw_1, \ldots, rw_n, 0, \ldots)|^p d(w_1, \ldots, w_n) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- En series de Dirichlet: se define $\mathscr{H}_p := \mathfrak{B} H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$.

Más Allá de $\mathscr{H}_2$

Abordamos un estudio similar en los espacios de Hardy ($1 \leq p < \infty$, no únicamente $p = 2$) de series de Dirichlet y funciones holomorfas en infinitas variables.

- En infinitas variables: $H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$ está compuesto por funciones holomorfas $f : \ell_2 \cap B_{c_0} \to \mathbb{C}$ que verifican

$$\|f\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(rw_1, \dots, rw_n, 0, \dots)|^p d(w_1, \dots, w_n) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- En series de Dirichlet: se define $\mathscr{H}_p := \mathfrak{B} H_p(\ell_2 \cap B_{c_0})$.

Ya generalizamos la caracterización en $\mathscr{H}_2/\mathfrak{P}_2$ a operadores $M_\varphi^* : \mathscr{H}_p^* \to \mathscr{H}_p^*$ y $M_\varphi^* : H_p(B_{c_0} \cap \ell_2)^* \to H_p(B_{c_0} \cap \ell_2)^*$.

Es un problema abierto la caracterización de $\mathscr{H}_p^*$ y $H_p(B_{c_0} \cap \ell_2)^*$.

Gracias!