

# Tarea 1 - Macroeconomía II

Matias Vicuña Cofré

31 Marzo 2024

## 1 Parte 1: Proceso ARMA e Impulsos Respuesta

### 1.1 Parte 1.a)

Para comenzar con el proceso MA(4), la cual sigue la siguiente ecuación:

$$x_t = \epsilon_t + 0.9\epsilon_{t-1} + 0.7\epsilon_{t-2} + 0.4\epsilon_{t-3} + 0.9\epsilon_{t-1} - 0.1\epsilon_{t-4}; \quad \epsilon_t \sim N(0, 1)$$

Para lograr este proceso, generamos una muestra de 300 observaciones por 1000 columnas respectivamente (cada una de ellas es una serie en específico), el código generado para recrear una muestra de este tipo es el siguiente:

```
function data = Simulacion_MA(Nrows,Ncols,Ncoeff,seed)
% Determinamos la semilla de aleatorizacion
rng(seed);

% Definimos la dimensiones de la muestra
ma_process = zeros(Nrows,Ncols);

% Bucle para determinación del Modelo MA(q)
for i = 1:Nrows
    % Determinamos una muestra de  $\sim N(0,1)$ 
    epsilon = randn(Nrows+4,Ncols);

    for t = 5:Nrows
        for j = 1:Ncols
            ma_process(i,j) = epsilon(t,j) + Ncoeff(1)*epsilon(t-1,j)
            + Ncoeff(2)*epsilon(t-2,j) + Ncoeff(3)*epsilon(t-3,j)
```

```

        + Ncoeff(4)*epsilon(t-4,j);
    end
end
end

% Guardamos los datos
data = ma_process;
end

```

De esta forma, logramos generar la muestra aleatoria, a continuación visualizaremos una pequeña parte de la muestra.

```

>> disp(datos(1:20,1:10))
-0.6757    0.3961   -1.7477   -2.0742   -1.0048   -0.2013   -3.5807   -1.3281   -1.0340    2.4737
 0.5066   -0.6512    0.5600   -2.3387    1.2428   -1.0492    1.2052    1.9205    3.0493   -0.0012
 0.2450   -1.5571    1.5378    1.9558    1.5650   -1.5634    4.2367   -1.6245   -2.0394    0.4934
-1.6830   -3.2565   -1.7980   -0.8387   -1.1787   -2.9172   -0.9294   -0.1519   -0.3741   -1.5341
 0.0295    0.5054   -1.3508    0.7021   -0.6613   -0.9096   -1.6225    1.6920   -0.4397    0.3715
-1.5534   -0.3376   -1.7528    0.1093   -1.1533   -0.2617   -1.8160    0.2213    2.2160    1.9628
-1.4767    2.3142   -1.5716   -0.5597    0.7397    0.4720   -1.8654   -1.0943   -1.6468    1.1203
 0.4622   -0.3351    0.1860   -1.6102    0.3984   -1.2518   -2.4416    0.1659    2.9902    0.2462
 0.1736    1.8808   -1.0703   -0.7204   -0.0109    1.6514   -0.3280   -0.2792    2.7065    1.1887
 0.8889    3.6717   -1.9064   -0.8532    1.9092   -1.9214   -0.1249   -0.6592   -0.5817   -2.7236
-0.2135    0.9047    1.5150    1.0408    0.1431   -1.0886    1.6809   -0.0362    4.1590    3.4869
-1.6807   -2.8033   -1.2264   -3.1634    0.9821   -0.5655   -0.4145    1.5583    2.5482   -1.6553
-0.7611   -0.2138    0.8737   -2.3825   -0.6086   -0.5331   -1.1259    0.5122    0.7983   -1.3681
 0.3521   -2.1154    0.2075   -0.4751   -0.1638   -3.5684   -1.1450   -0.0719    1.1985    1.0294
-0.8821   -1.6676    0.6825    1.3436   -0.0342   -0.8990    0.3555    1.0376   -1.1913   -1.0773
-0.2544    0.8264   -2.6260    0.3603    1.2718    1.3005    1.6443   -2.3978   -0.0421   -1.6860
 0.3057    2.6152   -0.2967   -0.6171   -0.0117   -0.6023    3.6325   -4.8250   -1.5427   -1.3053
 1.8404    1.3352    1.3959    1.4858   -0.0236    0.1039   -0.2056   -0.5071    3.7154   -0.5168
 2.0156   -1.7098    0.6483   -0.4897   -0.4360    1.7543   -0.9724    1.7219   -2.0593   -1.3470
-2.9029    0.0733   -2.4904   -1.0839   -0.9574   -2.1319   -1.3228   -2.9769    0.5049    5.0753

```

Figure 1: Resumen de los datos aleatorios

## 1.2 Parte 1.b)

Ya realizada la simulación de los datos, ahora calculamos la media y la varianza de las esperanzas de cada serie en esta muestra, los resultados que se generan son los siguientes:

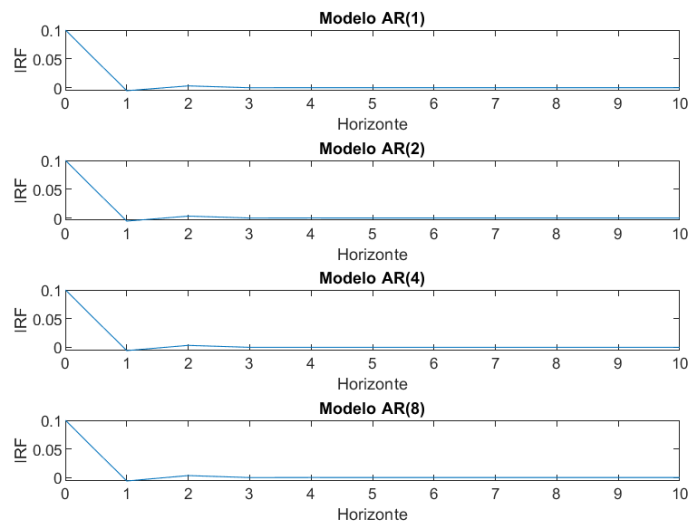
-----  
Tabla 1: Resultados de la Muestra  
-----

Esperanza promedio de las muestras: 0.010000  
Varianza promedio de las muestras: 2.450000  
-----

### 1.3 Parte 1.c)

Teniendo ya los primeros análisis de la muestra en particular, realizaremos el proceso de transformación de un modelo  $MA(q)$  a un  $AR(p)$ , de modo que luego poder trabajar con los datos en forma de  $VAR(p)$ , para esto se han creado dos funciones en particular: `Modelo-AR.m` que utilizar la estimación por MCO para los coeficientes, y la función `IRF-AR.m` para la transformación de los datos de forma de  $AR$  a  $VAR$  y posteriormente el calculo de los Impulsos Respuestas dependiendo de los rezagos.

Ahora se presentarán los resultados de las estimaciones de los IRF para cada tipo de rezago ( $p = 1, 2, 4$  y  $8$  respectivamente). \*Nota: Para mayor detalle, consultar código `PS1-Resolucion-MVC.m`



## 2 Parte 2: The Hodrick-Prescott Filter

El filtro se define de la siguiente forma:

$$\min_{\tau_t} \sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2$$

### 2.1 Parte 2.a)

La ecuación expresa el cambio que posee una secuencia temporal objetiva ( $y_t$ ) sobre el cambio en el tiempo de la tendencia del mismo periodo ( $\tau_t$ ), además de ello, considera un efecto del futuro en  $t=2$ , en donde se presenta una restricción medido por  $\lambda$ , el cual refleja los efectos de la tendencia del futuro sobre el periodo en cuestión, menos el efecto de la tendencia del periodo  $t$  sobre el pasado de la misma tendencia, todo ello medido sobre efectos de cambio al estar todas estas condiciones al cuadrado.

### 2.2 Parte 2.b)

Si  $\lambda = 0$  tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \min_{\tau_t} \sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \tau_t)^2 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau_t} = 2(y_t - \tau_t) = 0 \\ &\Rightarrow 2y_t - 2\tau_t = 0 \Rightarrow 2y_t = 2\tau_t \end{aligned}$$

$$y_t = \tau_t$$

De esta forma, al no tener activa la restricción, la tendencia se puede medir como la serie original en cuestión.

### 2.3 Parte 2.c)

Considerando la ecuación inicial:

$$\min_{\tau_t} \sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2$$

cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  el segundo término converge al infinito, para que tenga solución, debe de cumplirse que:

$$\tau_{t+1} - 2\tau_t + \tau_{t-1} = 0$$

iterando un periodo delante tenemos:

$$\tau_{t+2} - 2\tau_{t+1} + \tau_t = 0$$

Sea  $\tau_t = \lambda^t$

Polinomio característico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Solución de la ecuación en diferencias de segundo orden:

$$\tau_t = c_1 \lambda^t + c_2 t \lambda_2^t = c_1 \cdot 1^t + c_2 t \cdot 1^t \Rightarrow c_1 + c_2 t$$

Asumiendo que  $c_1 = 0 \wedge c_2 = \alpha$ :

$$\tau_t = \alpha t$$

## 2.4 Parte 2.d)

En el caso de tener la restricción activa, y con las condiciones de  $0 < \lambda < \infty$ , daremos ejemplos de las FCO de  $t = 1, 2, 3$  y 4, veremos los siguiente:

Para  $t = 1$ :

$$\min_{\tau_1} \sum_{t=1}^{T-1} (y_1 - \tau_1)^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau_1} = 0 \Rightarrow y_1 = \tau_1$$

Para  $t = 2$

$$\begin{aligned} \min_{\tau_2} \sum_{t=1}^{T-1} (y_2 - \tau_2)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_3 - \tau_2) - (\tau_2 - \tau_1)]^2 \\ FCO : \quad \frac{\partial}{\partial \tau_2} = 2(y_2 - \tau_2) + 2\lambda[\tau_3 - 2\tau_2 + \tau_1] \cdot (-2) = 0 \\ \Rightarrow y_2 = \tau_2(4\lambda - 1) - 2\lambda(\tau_1 + \tau_3) \end{aligned}$$

Para  $t = 3$

$$\begin{aligned} \min_{\tau_3} \sum_{t=1}^{T-1} (y_3 - \tau_3)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_3 - \tau_2) - (\tau_2 - \tau_1)]^2 + \lambda \sum_{t=3}^{T-1} [(\tau_4 - \tau_3) - (\tau_3 - \tau_2)]^2 \\ FCO : \quad \frac{\partial}{\partial \tau_3} = 2(y_3 - \tau_3) + 2\lambda[\tau_3 - 2\tau_2 + \tau_1] + 2\lambda[\tau_4 - 2\tau_3 + \tau_2] = 0 \\ \Rightarrow y_3 = \tau_3(1 + \lambda) - \lambda(\tau_1 - \tau_2 + \tau_4) \end{aligned}$$

Para  $t = 4$

$$\begin{aligned} \min_{\tau_4} \sum_{t=1}^{T-1} (y_4 - \tau_4)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_3 - \tau_2) - (\tau_2 - \tau_1)]^2 + \lambda \sum_{t=3}^{T-1} [(\tau_4 - \tau_3) - (\tau_3 - \tau_2)]^2 + \lambda \sum_{t=4}^{T-1} [(\tau_5 - \tau_4) - (\tau_4 - \tau_3)]^2 \\ FCO : \quad \frac{\partial}{\partial \tau_4} = 2(y_4 - \tau_4) + 2\lambda(\tau_4 - 2\tau_3 + \tau_2) \cdot (1) + 2\lambda(\tau_5 - \tau_4 + \tau_3) \cdot (-2) = 0 \\ \Rightarrow y_4 = \tau_4(1 - 5\lambda) - \lambda(\tau_2 - 3\tau_3 - \tau_5) \end{aligned}$$

## 2.5 Parte 2.e)

Para poder capturar la tendencia y el ciclo de la series, generamos la siguiente función en MATLAB:

```
function [trend, cycle] = HP_filter(y, lambda)
    % Condiciones Iniciales del filtro
    T = length(y);
    I = eye(T);

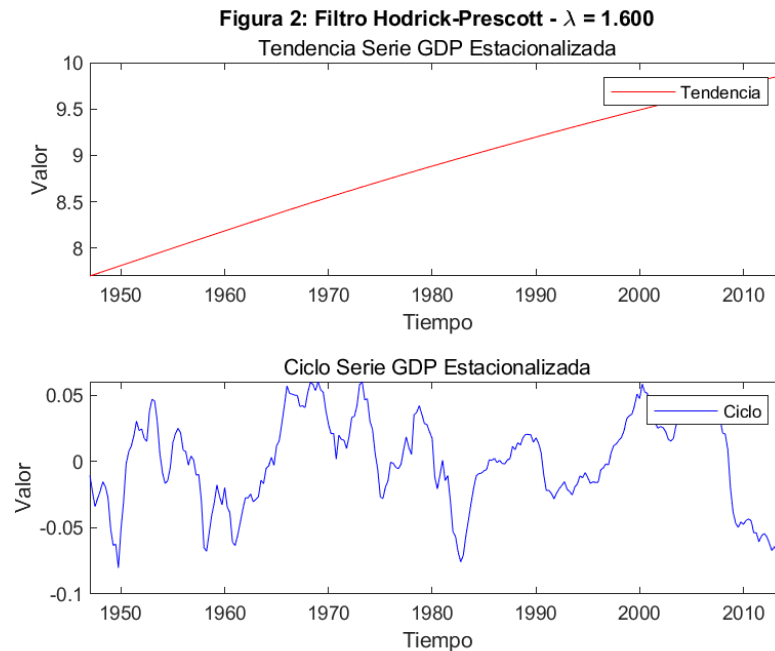
    % Generamos las Segundas Diferencias (Efecto de tendencia)
    D2 = diff(I,2);

    % Calculamos la tendencia y el ciclo de la serie
    trend = (I + lambda^2 * D2' * D2) \ y;
    cycle = y - trend;
end
```

De esta forma podemos capturar el ciclo y tendencia de una serie determinada.

## 2.6 Parte 2.f)

Usando los datos de la FRED de St.Louis Sobre el PIB linealizado desde el Q1 de 1947 al Q3 del 2014 tenemos lo siguiente, considerando un  $\lambda = 1600$  por frecuencia mensual:



Además de ello, tenemos los siguientes resultados estadísticos sobre la tendencia y el ciclo de la serie:

-----	
Tabla 2: Resultados de la Serie	
-----	
Aplicando el filtro Hodrick Prescott	
lambda = 1.600 (Serie Trimestral)	
-----	
Tendencia	
Esperanza:	8.858455
Varianza:	0.399956
-----	
Ciclo	
Esperanza:	-0.000000
Varianza:	0.001168
-----	



## 2.7 Parte 2.g)

Para poder observar la variación de la tendencia GDP entre los periodos de la crisis Sub Prime de EE.UU, consideraremos los periodos desde el primer trimestre del 2007 (Q1 2007) al primer periodo del 2010 (Q1 2010), puesto que los efectos mas relevantes de esta crisis, a pesar de ser persistente en un mayor rango de tiempo, en estos rangos es de gran impacto sobre el crecimiento real del producto estadounidense.

Es por ello que utilizaremos la formula básica de la variación trimestral, esta es:

$$\Delta\%X_t = \left( \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} \right) \cdot 100$$

Dónde  $t$  es el periodo en frecuencia trimestral.

Con ello ya descrito, visualizamos gráficamente la variación de la tendencia del GDP a continuación:

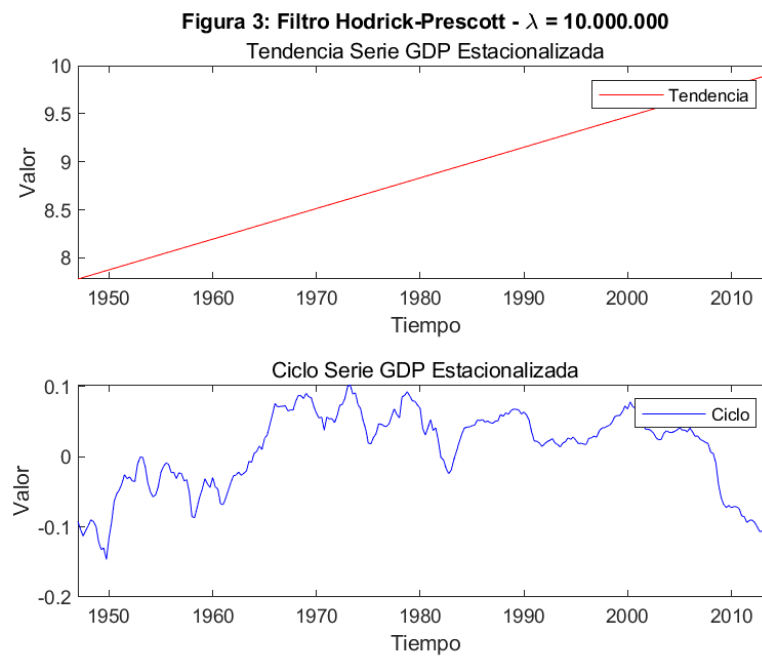


De esta forma podemos afirmar que, la disminución máxima relativa que hubo en la tendencia desde el periodo Q1 2007, fue desde el mismo Trimestre en cuestión, hasta aproximadamente Enero del 2009, posterior a esta fecha, la tendencia vuelve a tener un crecimiento positivo.

## 2.8 Parte 2.h)

Ahora, replicamos lo del apartado f), pero ahora con  $\lambda = 10.000.000$

Gráfica



Estadísticas

-----	
Tabla 3: Resultados de la Serie	
-----	
Aplicando el filtro Hodrick Prescott	
lambda = 10.000.000	
-----	
Tendencia	
Esperanza:	8.848463
Varianza:	0.384345
-----	
Ciclo	
Esperanza:	0.009991
Varianza:	0.003288
-----	