Experimental techniques for GW detection

Sistemi lineari e segnali

corso per il XXXVIII ciclo di dottorato in fisica

14 ore

Mateusz Bawaj mateusz.bawaj@unipg.it

Piano della lezione

1) segnale
2) trasformata Fourier
3) convoluzione, correlazione incrociata e autocorrelazione
4) spettri
5) sistemi lineari
6) filtri
7) matched filter

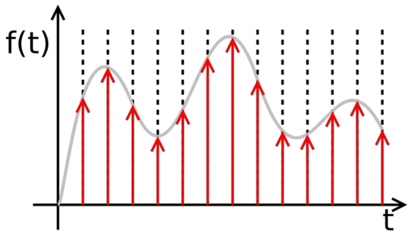
Caratterizzazione di segnali

classificazione per facilitare apprendimento dell’idea:

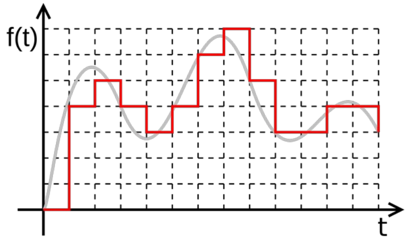
- segnali deterministici sono composti dai valori che possono essere previste o calcolate usando un modello matematico
- segnali casuali prendono valori non correlati con un modello conosciuto e devono essere modellizzati stocasticamente.

per usare il computer nelle analisi i segnali vengono campionati:

- discretizzazione temporale



- quantizzazione di ampiezza

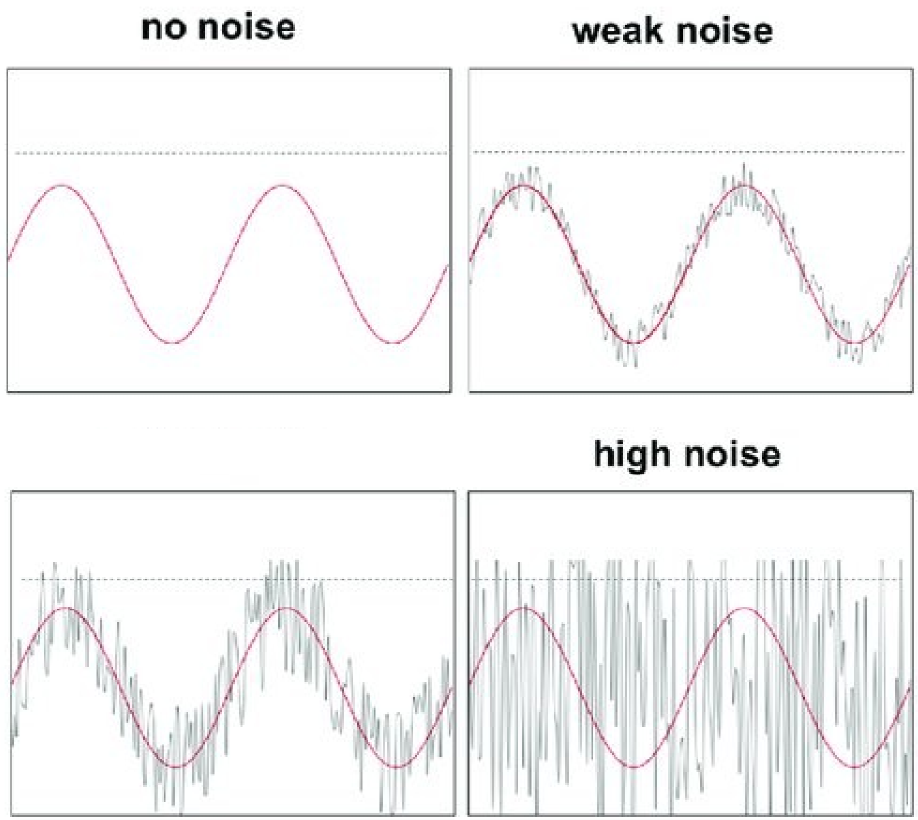


“Il Segnale” di William Powell Frith

Serie storica

approccio tradizionale

- Componente deterministica (informazione)
- Componente casuale (rumore)

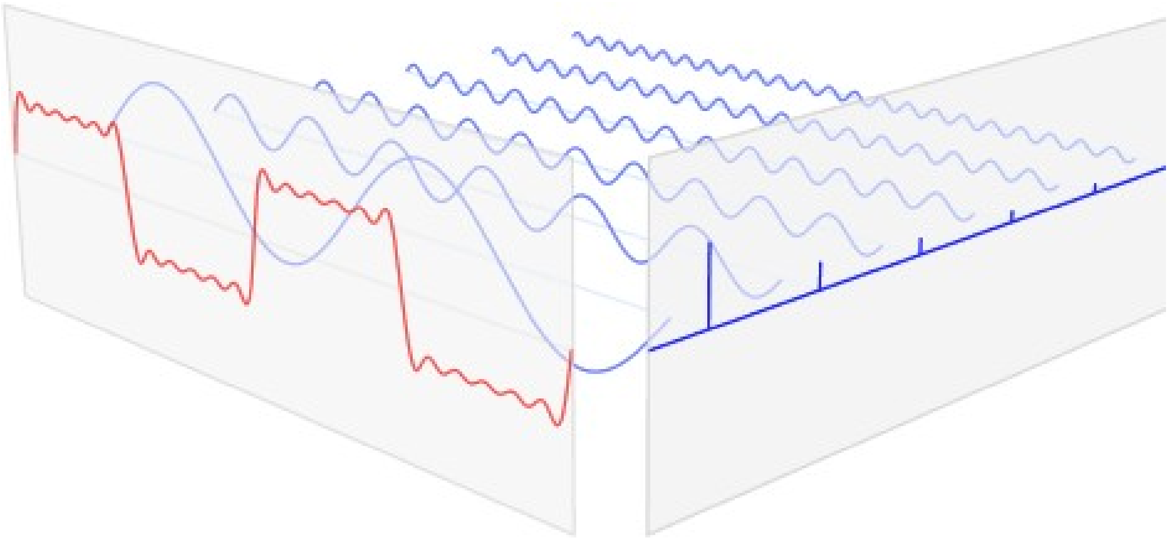


Trasformata di Fourier
continua

definizione:

$$S(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-\imath 2\pi f t} \, \mathrm{d}t$$

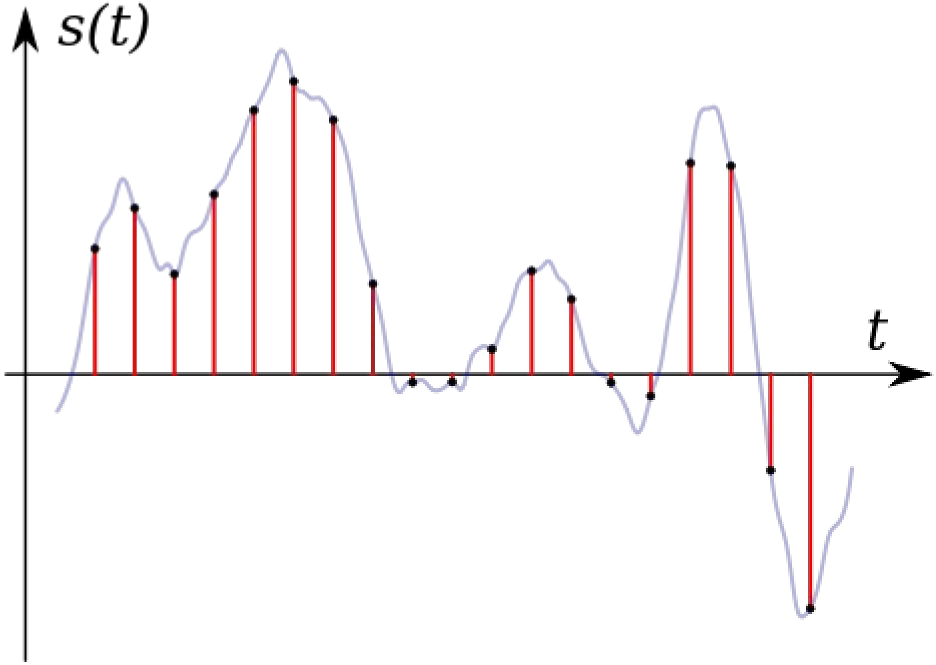
decomposizione di funzione *s(t)* nella base di funzioni armoniche



Trasformata di Fourier

discreta

definizione: $$S_k = \sum_{j=0}^{N-1} n(t_j) e^{2\pi\imath (t_j - t_{\rm start}) f_k}$$



Jupyter notebook da scaricare:

- 4.1 - Discrete Fourier Transform (scipy)

Trasformata inversa

ingenuo modo di filtrare. Se esiste la trasformata inversa possiamo rimuovere dallo spettro i componenti che non ci interessano e tornare nello spazio di tempo.

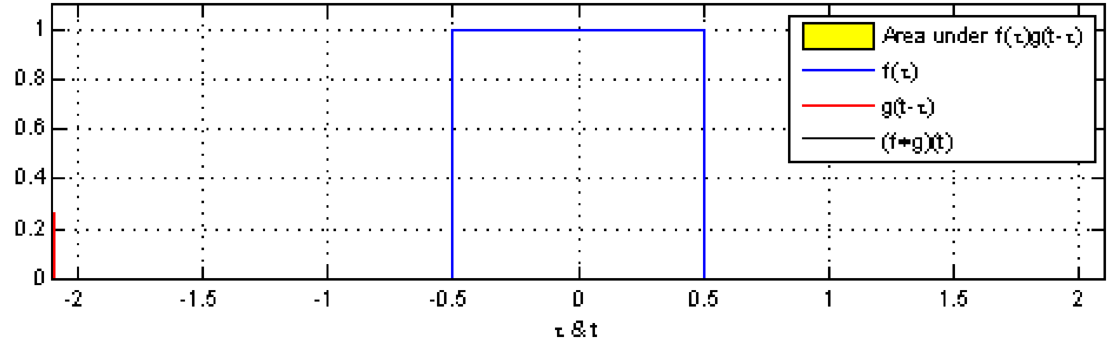
Jupyter notebook da scaricare:

- 4.2 - FFT & inverseFFT (filtering)

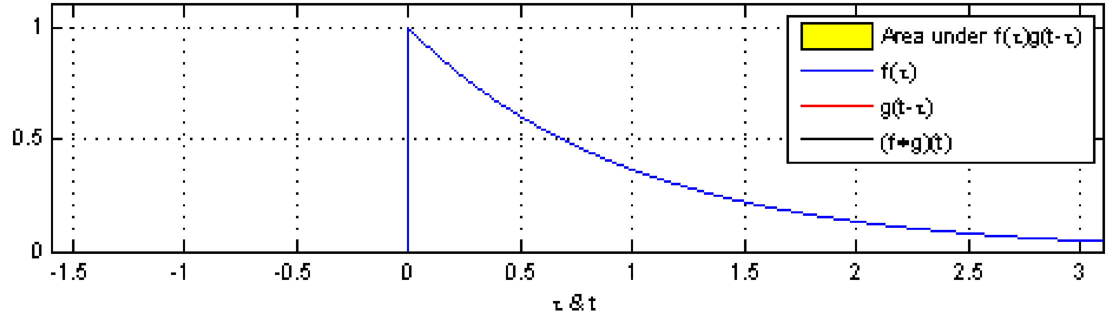
Convoluzione

definizione: $$s_1 * s_2(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(\tau - t)\,\mathrm{d}t$$

esempio grafico a)



b)



Jupyter notebook da scaricare:

- 4.4 - Convolution b

Correlazione incrociata e autocorrelazione

definizione:

$$s_1 * s_2(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(\tau + t)\,\mathrm{d}t$$

correlazione incrociata

definizione:

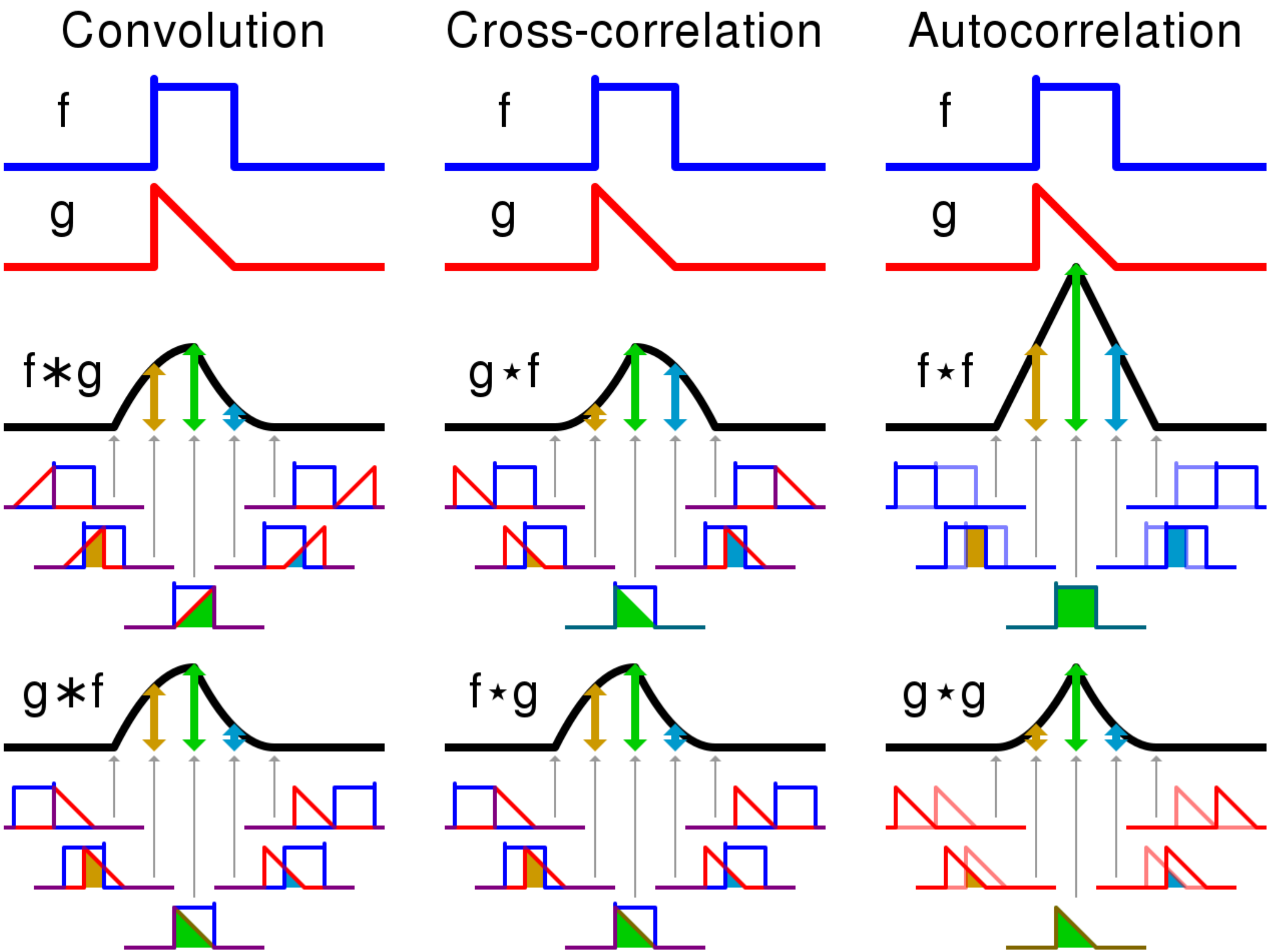
$$s * s(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(\tau + t)\,\mathrm{d}t$$

autocorrelazione

Jupyter notebook da scaricare:

- 4.5 - Cross-correlation
- 4.6 - Autocorrelation

Confronto


Convolution
Cross-correlation
Autocorrelation
f
g
f
g
f
g
f∗g
g⋆f
f⋆f
g∗f
f⋆g
g⋆g

Spettro di potenza

definizione: $$P_s(f) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s * s(\tau) e^{-\imath 2\pi f \tau} \, \mathrm{d}\tau$$

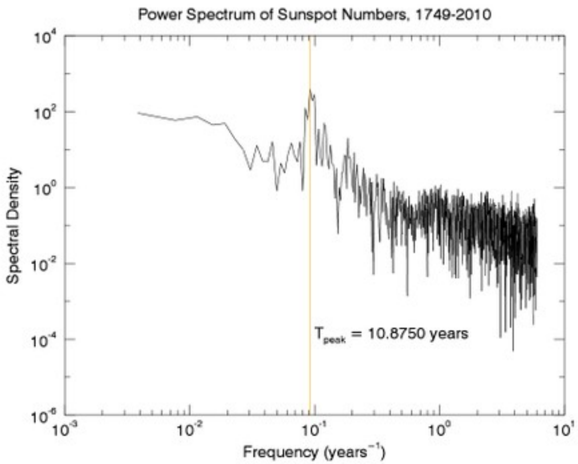
Teorema di Wiener-Khinchin (per processi stazionari)

single-sided power spectrum:

$$s^2(f) \equiv \begin{cases} 2P_s(f), & \text{if } f \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

dove valore quadratico medio:

$$\bar{s^2} = \int_0^{\infty} s^2(f) \, \mathrm{d}f$$



Spettro di ampiezza

lo spettro può essere espresso come:

$$s(f) \equiv \sqrt{s^2(f)}$$

N.B.:

- risultato della FFT è in questa forma
- area sotto lo spettro di ampiezza non ha un significato fisico

Jupyter notebook da scaricare:

- 4.7 - Power spectrum

Sistemi dinamici lineari stazionari

Linear Time Invariant (LTI)

- dinamico = evolve nel tempo;
- stazionario = parametri del sistema non dipendono dal tempo;
- lineare = sistema dipende linearmente dalle variabili di stato e dalle variabili di ingresso.

caratteristiche:

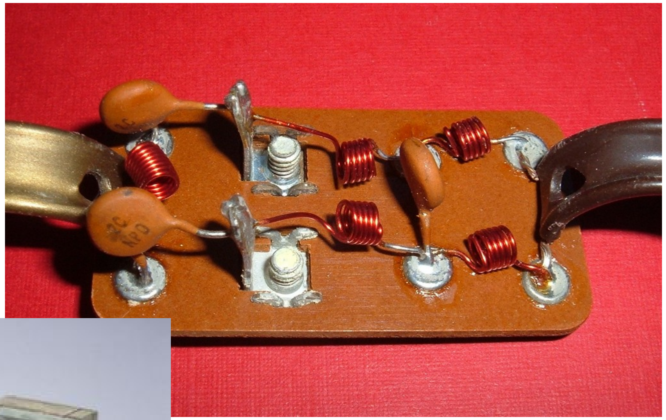
- stabilità
- raggiungibilità → se tutti sono soddisfatte esiste un controllore
- osservabilità

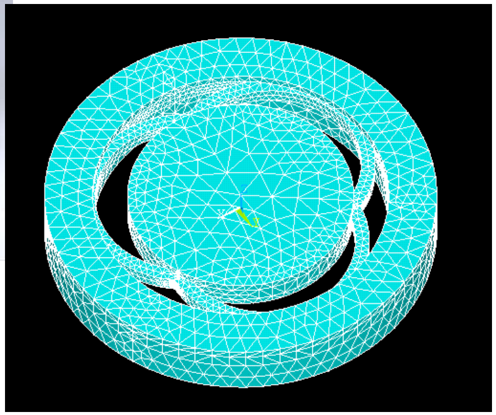
Sistemi dinamici lineari stazionari

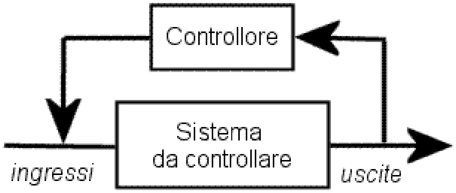
Linear Time Invariant (LTI)

campi di applicazione:

- filtri
- amplificatori
- trasduttori
- feedback loops







Sistemi dinamici lineari stazionari

teoria

premessa: consideriamo sistemi con un ingresso e una uscita (Single Input, Single Output – SISO)

$$s(t) \longrightarrow \boxed{\text{sistema}} \longrightarrow v(t)$$

per cui è definita la relazione lineare fra l'uscita e l'ingresso:

$$s(t) \rightarrow v(t)$$

proprietà importante (linearità):

$$s_1(t) + s_2(t) \rightarrow v_1(t) + v_2(t)$$

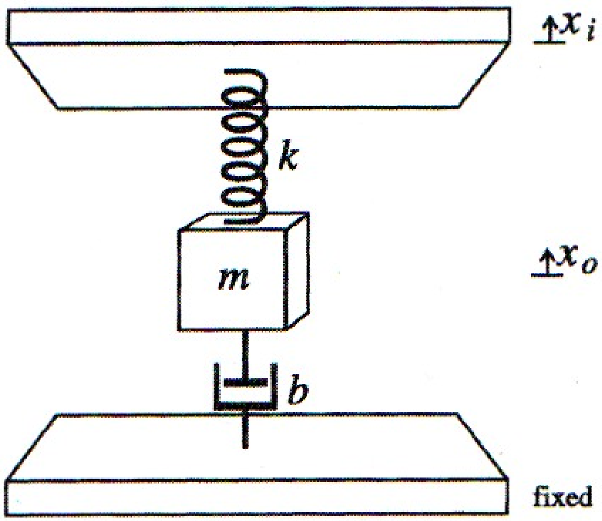
vincolo (invarianza nel tempo): la relazione fra uscita e ingresso non varia nel tempo ed è vera per ogni τ :

$$s(t-\tau) \rightarrow v(t-\tau)$$

Sistemi dinamici lineari stazionari

esempio – oscillatore attenuato unidimensionale

posizione d'appoggio (ingresso) – x_i
posizione della massa (uscita) – x_o
massa – m
costante elastica – k
attenuazione – b



descritto dall'equazione di moto:

$$m\ddot{x}_0 + k(x_0 - x_i) + b\dot{x}_0 = 0$$

Sistemi dinamici lineari stazionari

risposta impulsiva

la relazione fra uscita e ingresso può essere descritta come la traccia dell'uscita dopo l'eccitazione dell'ingresso con un impulso nel momento $\tau = 0$.

vincolo (causalità): lo stato dell'uscita prima del impulso è zero:

$$g(t) = 0 \qquad \text{per} \quad \tau < 0$$

nell'esempio dell'oscillatore la risposta impulsiva è:

$$g(\tau) = e^{-\tau/\tau_0}(f_0^2/f_d)\sin 2\pi f_d \tau$$

dove:

$$\tau_0 = \frac{2m}{b}, \quad f_0 \equiv \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}, \quad f_d \equiv \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}(1 - b^2/4km)}$$

Jupyter notebook da scaricare: 4.8 - Damped oscillator

Sistemi dinamici lineari stazionari
risposta al gradino

alternativamente possiamo esprimere la caratteristica del sistema attraverso la risposta al gradino *H(τ)*.

utile relazione fra *g* e *H*: $$g(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} H(\tau)$$

risposta impulsiva	risposta al gradino
• unità di misura: rapporto fra unità del segnale d'uscita e d'ingresso • utile per conoscere la risposta al segnale arbitrario (dalla linearità)	• unità di misura: rapporto fra unità del segnale d'uscita e d'ingresso diviso per unità del tempo • a volte più facile da calcolare

linearità: uscita di un sistema lineare è la convoluzione del segnale d'ingresso con la risposta impulsiva:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

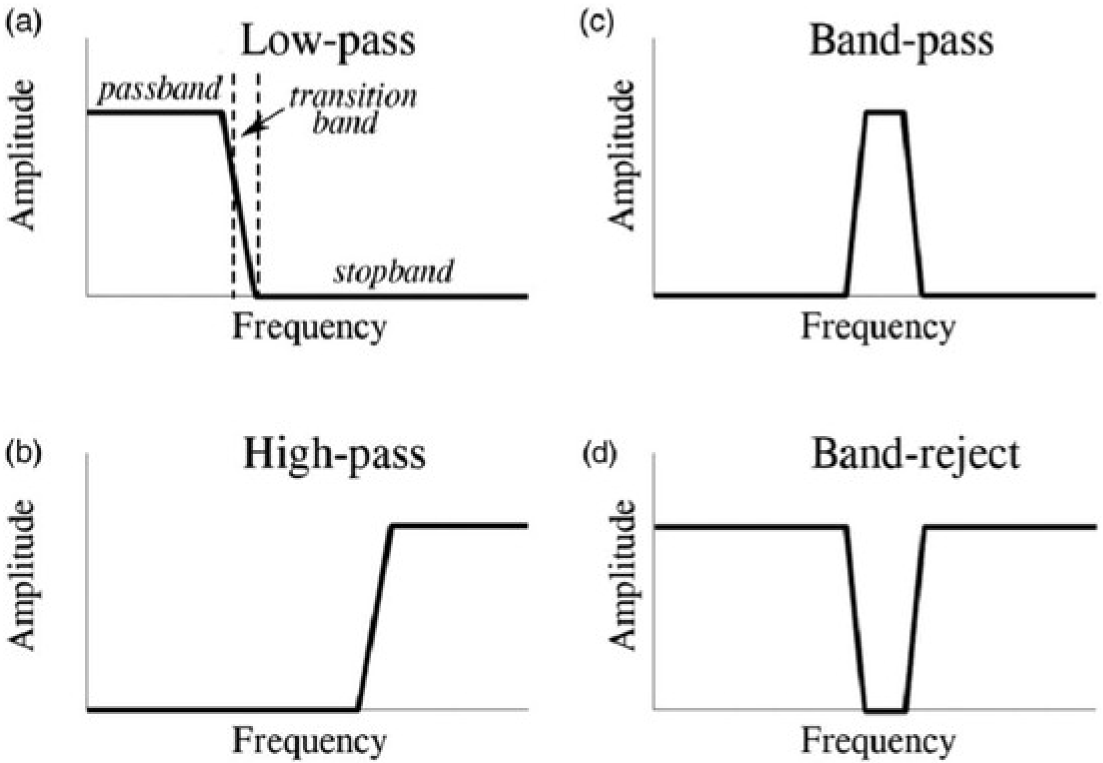
Filtri

tipologie

filtri sono un esempio di applicazione della teoria di sistemi LTI.

Classificazione in base alla funzione del filtro:

- passa basso (a)
- passa alto (b)
- passa banda (c)
- *notch* (d)

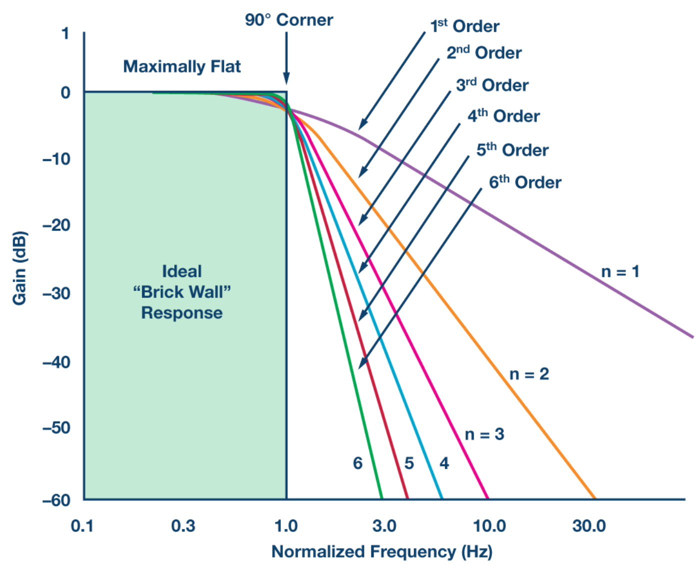


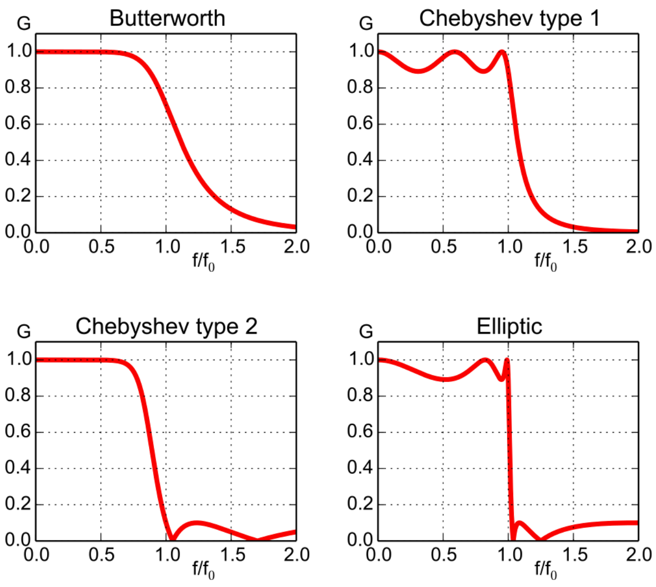
Filtri

ordine del filtro

classificazione in base alla ripidità della curva caratteristica. Ordine del filtro è pari al grado del polinomio che descrive la sua FdT e implica il numero di componenti necessari per la sua realizzazione (sia analogica che digitale).

Esistono diverse soluzioni per filtri di ordini superiori:





Filtri

filtri digitali e loro progettazione

filtri digitali processano segnali quantizzati, rappresentati sotto forma di serie di numeri. Lavorano nel dominio di tempo discreto. Per le funzioni discrete il minimo intervallo di tempo è ben noto (vedi theroema Nyquist-Shannon).

Filtri digitali sono distinti in base al tipo di risposta all'impulso:

- Infinite Impulse Response (IIR)
- Finite Impulse Response (FIR)

N.B. in base al tipo di risposta cambia anche l'implementazione del filtro.

Jupyter notebook da scaricare: 4.9 - IIR filter design

Sistemi dinamici lineari stazionari

risposta in frequenza

terzo modo di rappresentare la risposta del sistema è la trasformata Fourier della risposta impulsiva:

$$G(f) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-\imath 2\pi f \tau} \, \mathrm{d}\tau$$

N.B: funzione di variabile complessa. La parte reale rappresenta la risposta “in fase” invece la parte immaginaria la risposta “in quadratura”.

N.B: più completa rappresentazione si chiama funzione di trasferimento e viene calcolata usando la trasformazione di Laplace dove l’esponente puramente immaginario viene sostituito dall’esponente di frequenza complessa:

$$e^{-\imath 2\pi f \tau} \quad \rightarrow \quad e^{-s\tau}$$

Trasformata Z è l’analogo della trasformata di Laplace per le funzioni discrete.

Sistemi dinamici lineari stazionari

risposta in frequenza

per misurare la risposta in frequenza:

1) scegliere una frequenza *f*

2) applicare un segnale nella forma $e^{-\imath 2\pi f\tau}$ all'ingresso del sistema

3) misurare l'ampiezza e lo sfasamento del segnale all'uscita

4) variare la frequenza *f* e tornare al punto primo

dal teorema di convoluzione sappiamo che la trasformata Fourier dell'uscita è:

$$V(f) = S(f)G(f)$$

conveniente rispetto al calcolo dell'integrale di convoluzione

V(f) – transf. d'uscita, *S(f)* – trsnsf. d'ingresso, *G(f)* – transf. di risposta impulsiva

Sistemi dinamici lineari stazionari

trasformata di Laplace

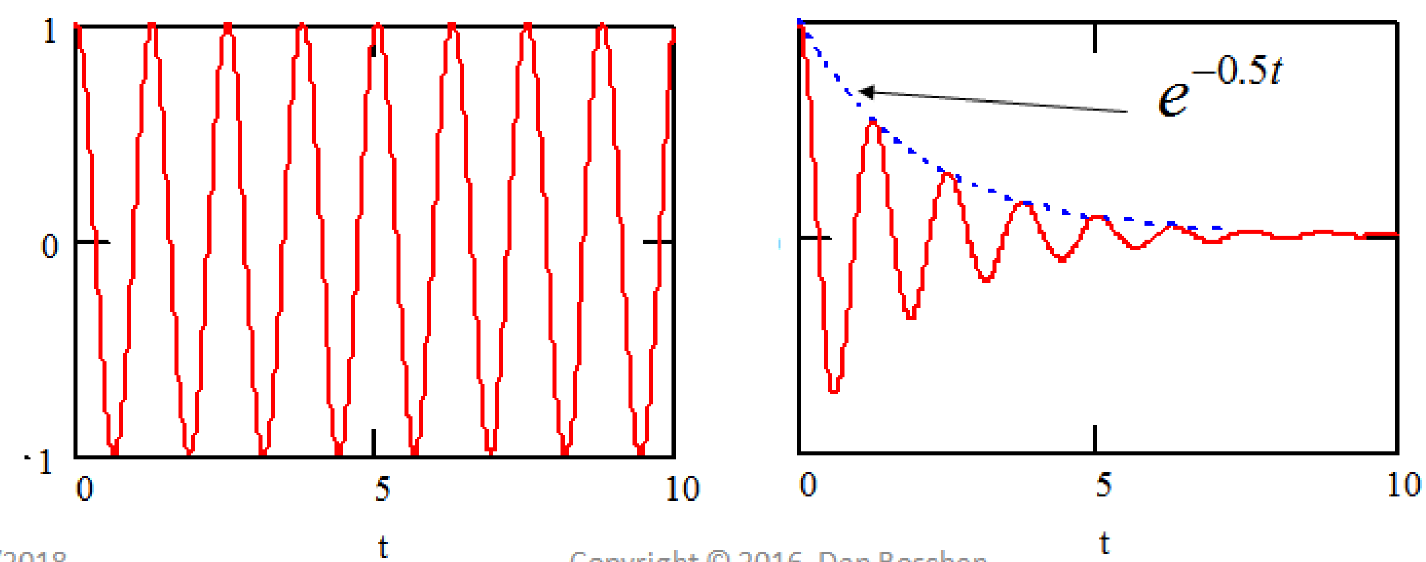
What is "s"?

s is a complex variable:

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$$

$\mathrm{Re}[e^{-st}],\ \sigma = 0, \omega = 5$ $\qquad$ $\mathrm{Re}[e^{-st}],\ \sigma = 0.5, \omega = 5$



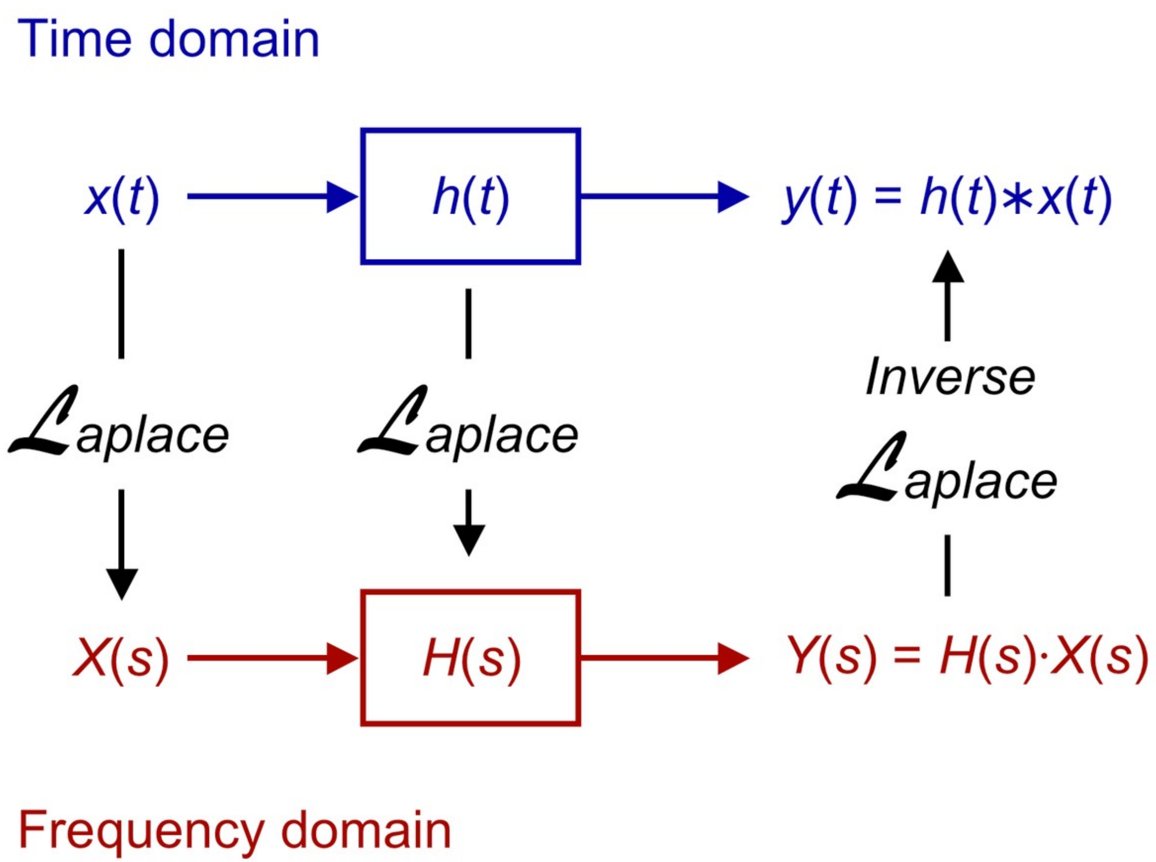
Sistemi dinamici lineari stazionari

funzione di trasferimento

nel caso generico: $$G(s) = \frac{V(s)}{S(s)}$$

uscita → Y

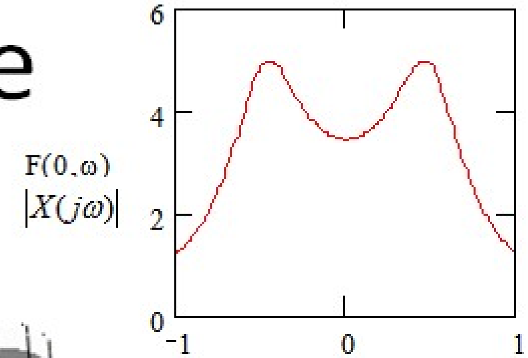
ingresso → X



Sistemi dinamici lineari stazionari

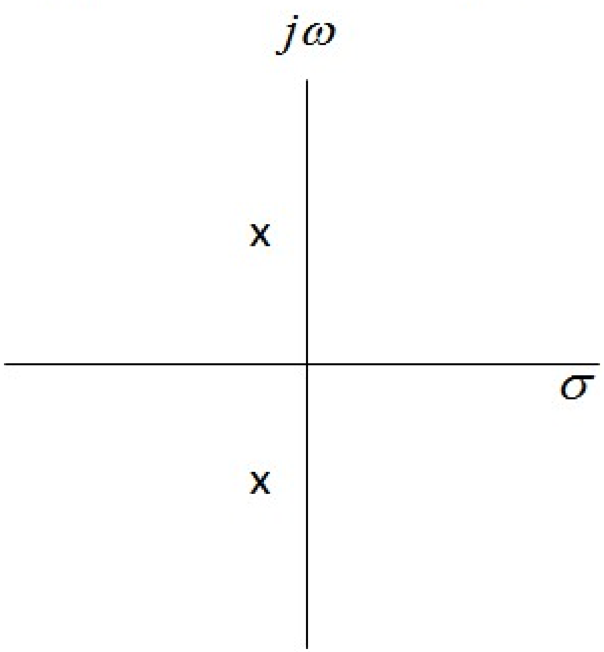
funzione di trasferimento

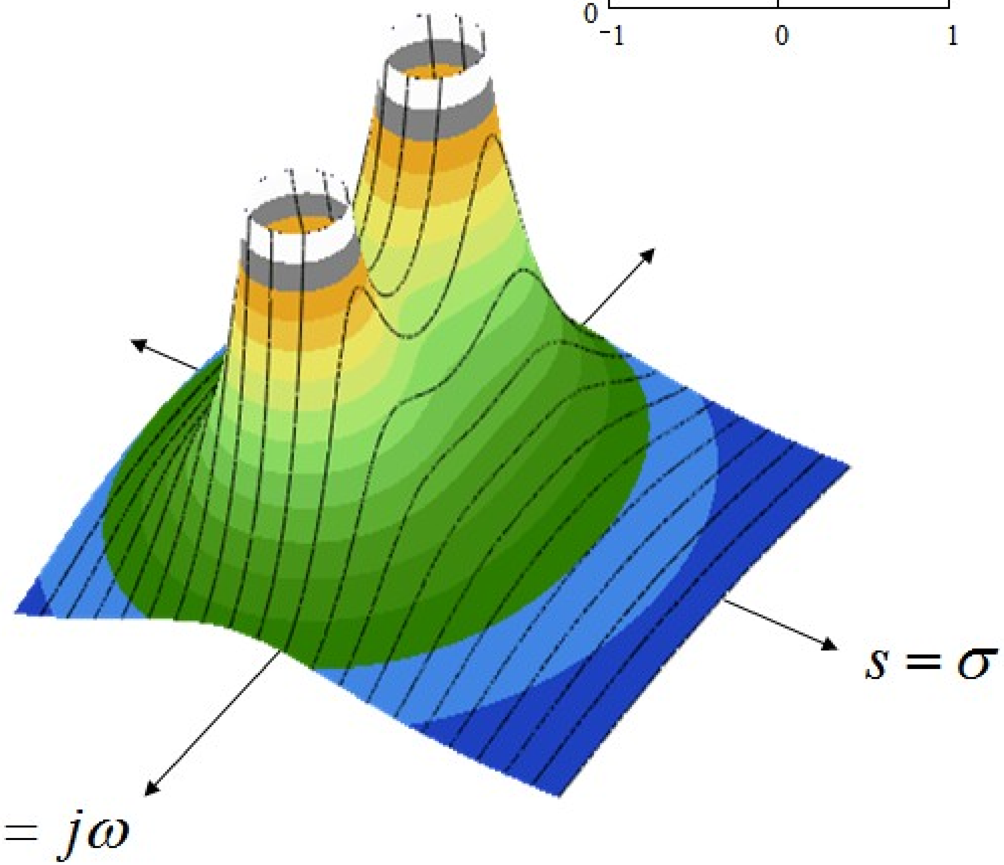
Filter Example



$$X(s) = \frac{1}{(s+.2+j.5)(s+.2-j.5)}$$

(poles at $s = -.2 \pm j.5$)



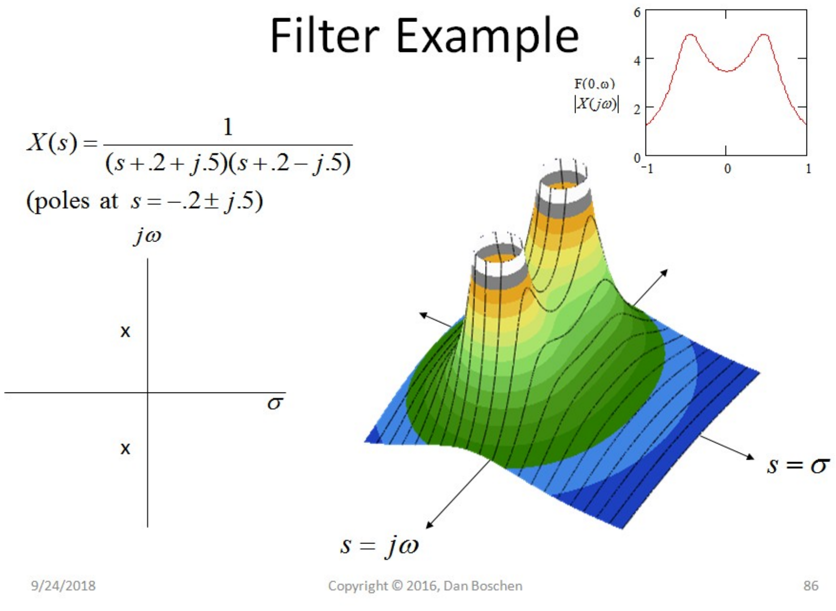


Sistemi dinamici lineari stazionari

funzione di trasferimento

funzione di trasferimento può essere espressa come rapporto tra polinomi sullo spazio di argomento complesso e.g.:

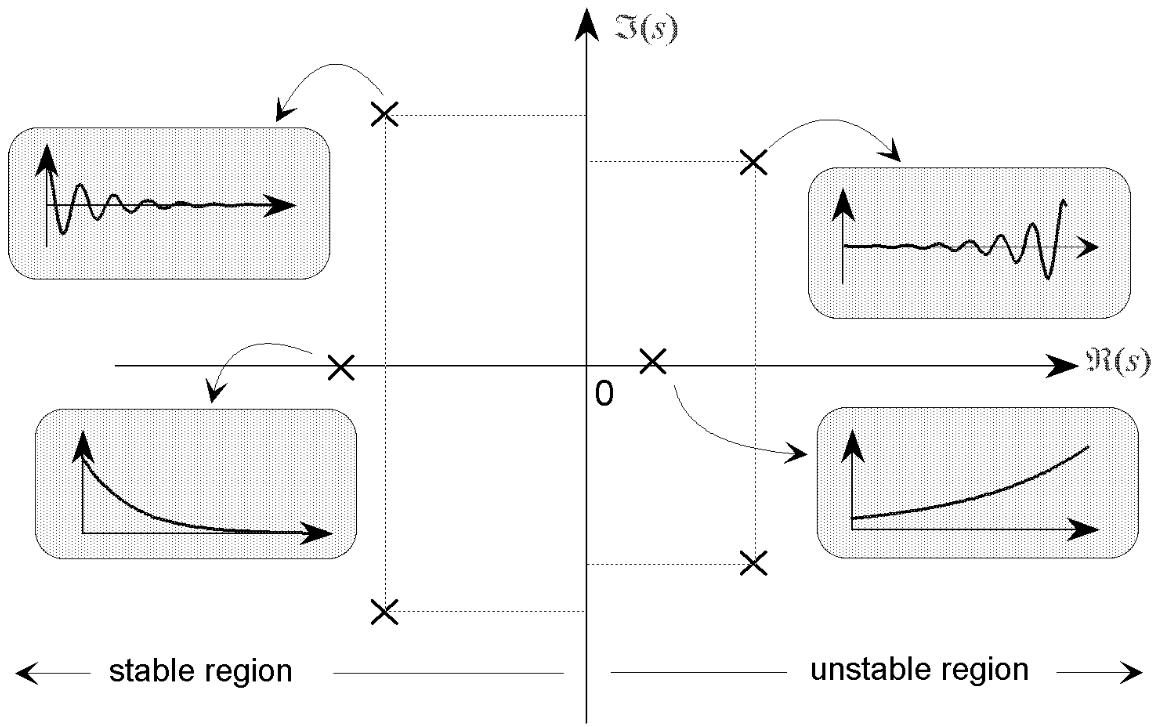
La forma della funzione di trasferimento si può visualizzare usando strumenti di python oppure approssimare posizionando i poli e gli zeri sul piano dell'argomento *Re*, *Im*.



Sistemi dinamici lineari stazionari

funzione di trasferimento

sul piano dell'argomento complesso *Re*, *Im* i poli corrispondono ai componenti della risposta del sistema. Analizzando la loro forma possiamo intuire la condizione di stabilità.



Sistemi dinamici lineari stazionari

funzione di trasferimento (visualizzazione)

ricordiamo che: $s = \imath 2\pi f$

la funziona di trasferimento diventa:

$$H(\imath 2\pi f) = R(2\pi f) + \imath X(2\pi f)$$

da cui l'ampiezza è:

$$|H| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

mentre la fase è:

$$\angle H = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$$

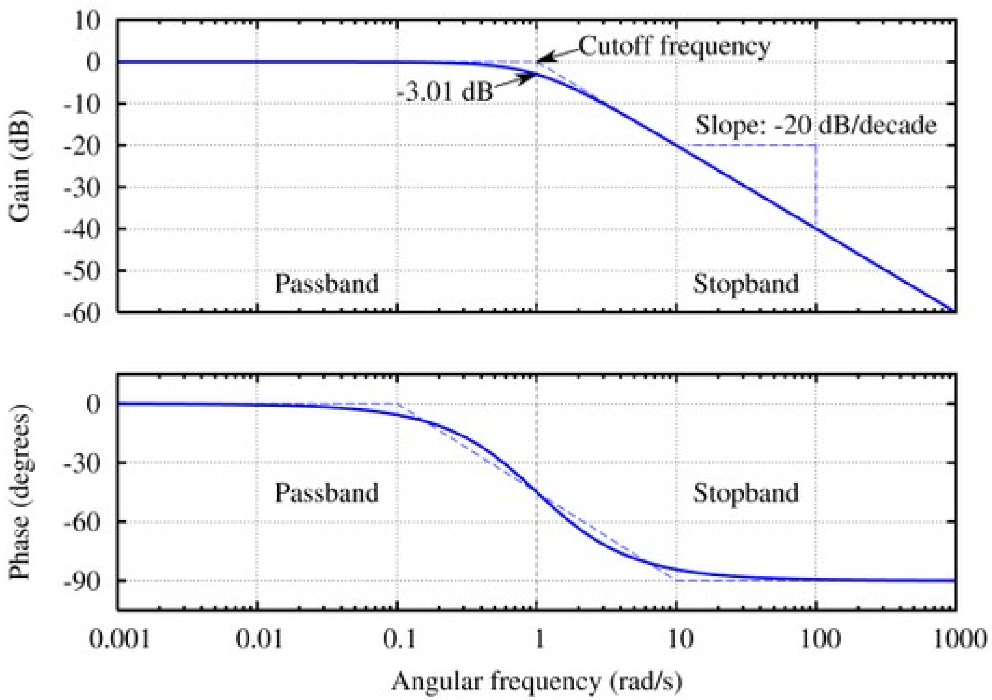


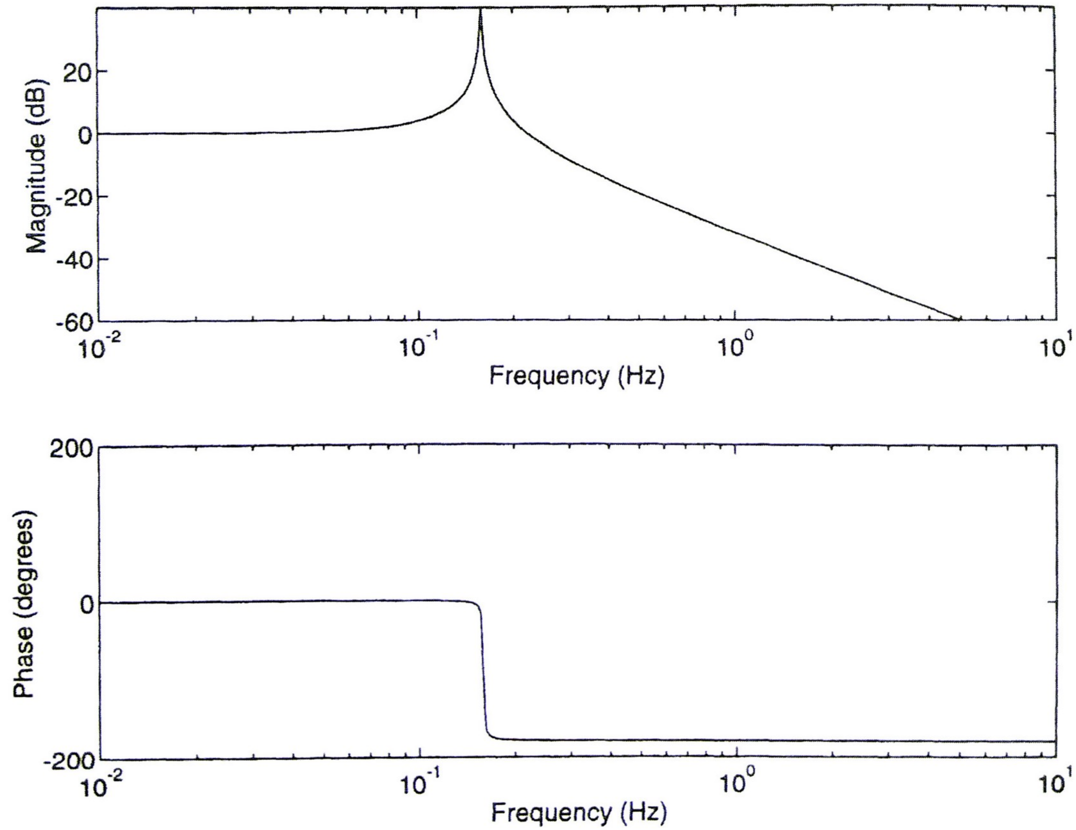
diagramma di Bode

Sistemi dinamici lineari stazionari

funzione di trasferimento

funzione di trasferimento dell'oscillatore meccanico

(referenza esercizio: 4.8 - Damped oscillator)



Jupyter notebook da scaricare: 4.10 - Transfer function

Sistemi dinamici lineari stazionari

matched template

nel caso OG abbiamo una serie temporale $v(t)$ e un segnale di breve durata nonché di bassa ampiezza.

in assenza del segnale la serie temporale $v(t)$ è un insieme di numeri casuali con la media 0 e con lo spettro di potenza conosciuto.

assumiamo che se vedessimo il segnale saremmo in grado di riconoscerlo (conosciamo la forma).

per questo costruiamo la sagoma del segnale $s(t)$ che possiamo confrontare con la serie temporale $v(t)$ usando la correlazione incrociata.

definiamo S/N – una grandezza numerica adimensionale che mette in relazione la potenza del segnale utile rispetto a quella del rumore in un sistema.

Sistemi dinamici lineari stazionari

rapporto segnale/rumore (S/N)

per la serie temporale senza rumore (composta di zeri) la correlazione incrociata (cross-correlation) del segnale gravitazionale con la sagoma avrebbe valore diverso da zero solo intorno al momento del segnale.

nel caso di una serie con il rumore gaussiano la correlazione incrociata con la sagoma può essere approssimata in assenza del segnale con il rumore gaussiano.

a questo punto la potenza del rumore è descritta:

$$N^2 \equiv \sqrt{\langle (v * s(\tau))^2 \rangle}$$

mentre la potenza del segnale:

$$S^2 \equiv |v * s(\tau)|$$

e S/N:

$$S/N \equiv \sqrt{S^2/N^2}$$

procedimento ottimale
nel caso di rumore bianco

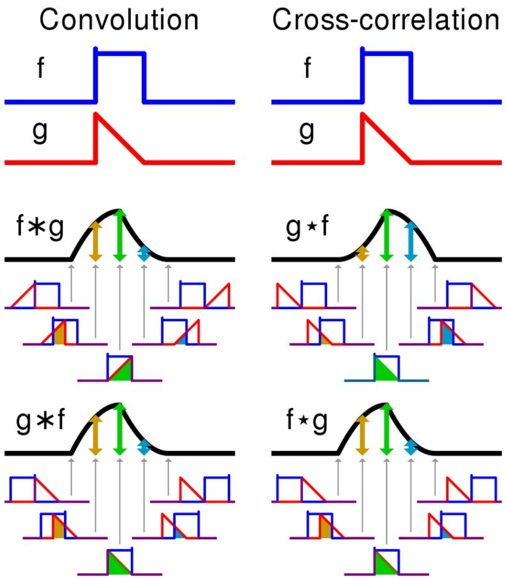
Correlazione incrociata e convoluzione

promemoria

definizione: $$s_1 * s_2(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(\tau + t)\, \mathrm{d}t$$ correlazione incrociata

definizione: $$s_1 * s_2(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(\tau - t)\, \mathrm{d}t$$ convoluzione

la convoluzione dà lo stesso risultato che la correlazione incrociata se la funzione s_2 viene invertita nel tempo.



Rilevamento dei segnali gravitazionali

matched filter

sfruttando assomiglianza fra la correlazione incrociata e la convoluzione possiamo ideare un filtro che esegue l'operazione di correlazione con la sagoma. Un filtro del genere viene chiamato *matched filter*.

per eseguire l'operazione della correlazione la risposta impulsiva del filtro deve essere uguale alla sagoma invertita nel tempo (vedi diap. 18):

$$g(\tau) = s(-\tau)$$

beneficiamo dall'immagine nel dominio delle frequenze: la trasformata Fourier di *s*:

$$G(f) = e^{-\imath 2\pi f t_0} S^*(f)$$

dove t_0 è la durata della serie temporale usata per calcolare la correlazione incrociata.

Rilevamento dei segnali gravitazionali

matched filter

nel caso di rumore non bianco

per ottimizzare il filtro nel caso di rumore non-bianco conviene dividere la sua funzione di trasferimento per lo spettro di rumore (whitening):

$$G(f) \propto \frac{e^{-\imath 2\pi f t_0} S^*(f)}{N^2(f)}$$

attenzione alla realizzabilità!

digitalizzazione, conservazione dei dati e post-analisi possono aiutare

Referenze

1) Saulson, P. R. “Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors” capitolo: 4, 15.1,

2) Robinet, F. et al. “Omicron: A Tool to Characterize Transient Noise in Gravitational-Wave Detectors.” SoftwareX, November 2020, 100620. https://doi.org/10.1016/j.softx.2020.100620

3) Omicron code: https://github.com/ElsevierSoftwareX/SOFTX_2020_128

4) Brown, Judith C. “Calculation of a Constant Q Spectral Transform.” The Journal of the Acoustical Society of America 89, no. 1 (January 1991): 425–34. https://doi.org/10.1121/1.400476