EPITA / S1 Corrigé + Barème Novembre 2017

NOM : .... PRENOM :.............................. GROUPE :........

Contrôle 1 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Réponses exclusivement sur le sujet

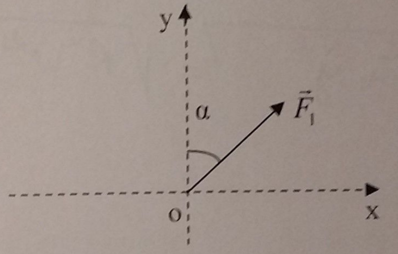
QCM (4 points)

Entourer la bonne réponse

1- La norme de la résultante $\vec{R}$ de deux vecteurs forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ (non nuls), colinéaires et de sens opposé est

0,5 a) $R=0$ b) $R=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$ c) $R=F_1+F_2$ d) $R=|F_1-F_2|$

2- Les composantes du vecteur force $\vec{F}_1$ sur le schéma ci-dessous sont :



0,5 a) $\vec{F}_1=\begin{pmatrix}F_1\\0\end{pmatrix}$ b) $\vec{F}_1=\begin{pmatrix}F_1.\sin(\alpha)\\F_1.\cos(\alpha)\end{pmatrix}$ c) $\vec{F}_1=\begin{pmatrix}F_1.\cos(\alpha)\\F_1.\sin(\alpha)\end{pmatrix}$

3- Le produit scalaire entre deux vecteurs colinéaires et de sens opposé est

0,5 a) strictement positif b) nul c) strictement négatif

4- La norme du vecteur $\vec{V}_3=\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2$, tel que : $(\vec{V}_1,\vec{V}_2)=\alpha$ est :

0,5 a) $V_3=V_1.V_2.|\sin(\alpha)|$ b) $V_3=V_1.V_2.\cos(\alpha)$ c) $V_3=\sqrt{V_1^2+V_2^2+2V_1.V_2.\cos(\alpha)}$

5- Le vecteur vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

0,5 a) $\vec{V}=\dot{\rho}.\vec{u}_\rho+\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ b) $\vec{V}=\dot{\rho}.\vec{u}_\rho+\rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ c) $\vec{V}=\rho\vec{u}_\rho+\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

6- Dans la base de **Frenet** l'abscisse curviligne élémentaire ds s'écrit :

0,5 a) $ds=R.\dot{\theta}$ b) $ds=dV.dt$ c) $ds=R.d\theta$

7- L'expression de l'abscisse curviligne s(t) est donnée par

0,5 a) $s(t)=\int_0^t a_T.dt$ b) $s(t)=\int_0^t v.dt$ c) $s(t)=\int_0^t a_N.dt$

8- L'équation de la trajectoire dont les équations horaires sont $\begin{pmatrix}x(t)=A\sin(\omega t)\\y(t)=B\cos(\omega t)\end{pmatrix}$

(Où A, B et ω sont des constantes positives $(A\neq B)$) est :

0,5 a) $x^2+y^2=1$ b) $x^2+y^2=A^2+B^2$ c) $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$

A. Zellagui

Exercice 1 (4 points)

Les équations horaires d'un mouvement en coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + R\sin(\omega.t) \\ y(t) = 2 + R\cos(\omega.t) \end{cases}$$ Où ω et R sont des constantes.

1-Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ en fonction du temps. Calculer sa norme.

1

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) = R\omega\cos(\omega t) \\ \dot{y}(t) = -R\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}_{\vec{u}_x, \vec{u}_y}$$

norme : $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{R^2\omega^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}$

$V = R\omega$.

2- Exprimer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction du temps. Calculer sa norme.

1

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x = a_x = -R\omega^2\sin(\omega t) \\ \dot{v}_y = a_y = -R\omega^2\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

norme : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{R^2\omega^4(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))}$

$= R\omega^2$

3.- Retrouver l'équation de la trajectoire y = f(x). Préciser sa nature et ses caractéristiques.

2

$$\begin{cases} x(t) = 1 + R\sin(\omega t) \Rightarrow x - 1 = R\sin(\omega t) \\ y(t) = 2 + R\cos(\omega t) \Rightarrow y - 2 = R\cos(\omega t). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = R^2\sin^2(\omega t) \text{ ①} \\ (y-2)^2 = R^2\cos^2(\omega t) \text{ ②} \end{cases}$$

① + ② $\Rightarrow$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = R^2$

il s'agit d'un cercle de rayon R et de centre (1

Exercice 2 (6 points)

Les composantes du vecteur position $\vec{OM}$ en coordonnées cartésiennes sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = ae^{\omega.t}\cos(\omega.t) \\ y(t) = ae^{\omega.t}\sin(\omega.t) \end{cases}$$ a et ω sont des constantes positives.

1- Ecrire le vecteur position $\vec{OM}$ en coordonnées polaires de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

1

$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho$ (en coords polaires)

avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 e^{2wt}\underbrace{(\cos^2(wt) + \sin^2(wt))}_{=1}}$

$= ae^{wt} \Rightarrow \underline{\vec{OM} = ae^{wt}\vec{u}_\rho}$.

2- Exprimer en coordonnées polaires le vecteur vitesse $\vec{V}$. Calculer la norme de $\vec{V}$. On donne $\dot{\theta} = \omega$.

1

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = awe^{wt}\vec{u}_\rho + ae^{wt}\underbrace{\dot{\vec{u}}_\rho}_{=\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$

$\vec{V} = awe^{wt}\vec{u}_\rho + awe^{wt}\vec{u}_\theta$.

<u>norme</u> : $V = \sqrt{a^2w^2e^{2wt} + a^2w^2e^{2wt}} = \sqrt{2}\,awe^{wt}$.

3- Exprimer en coordonnées polaires le vecteur accélération $\vec{a}$. Calculer la norme de $\vec{a}$

2

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(awe^{wt}(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)\right)$

$= aw^2e^{wt}(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta) + awe^{wt}(\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\vec{u}}_\theta)$

$= aw^2e^{wt}(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta) + awe^{wt}(w\vec{u}_\theta - w\vec{u}_\rho)$

$= aw^2(\cancel{\vec{u}_\rho} + \vec{u}_\theta + \vec{u}_\theta \cancel{- \vec{u}_\rho})e^{wt} = \underbrace{2aw^2e^{wt}}_{a_\theta}\vec{u}_\theta$

<u>norme</u> $a = |a_\theta| = 2aw^2e^{wt}$.

4- Exprimer les composantes a_T et a_N du vecteur accélération en base de Frenet. En déduire le rayon de courbure Rc.

$$\vec{a}_{\text{Frenet}} = \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\, a\omega e^{\omega t}\right) = \sqrt{2}\, a\omega^2 e^{\omega t} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R_c} = \dfrac{2a^2\omega^2 e^{2\omega t}}{R_c}. \end{cases}$$

2

Calcul de R_c :

$a_{\text{Frenet}} = a_{\text{polaire}}$ (la norme ne dépend pas de la base)

$\Rightarrow a_F^2 = a_{Pol}^2 \Rightarrow a_T^2 + a_N^2 = a_\theta^2$

$\Rightarrow 2a^2\cancel{\omega^4} e^{2\omega t} + \dfrac{4a^4\cancel{\omega^4} e^{4\omega t}}{R_c^2} = 4a^2\cancel{\omega^4} e^{2\omega t}.$

$\Rightarrow \dfrac{2a^2 e^{4\omega t}}{R_c^2} = e^{2\omega t}$ d'où $R_c^2 = 2a^2 e^{2\omega t}$

$R_c(t) = \sqrt{2}\, a e^{\omega t}.$

Exercice 3 Les parties I et II sont indépendantes (6 points)

I-1) Montrer que la vitesse en base de Frenet s'écrit $\vec{V} = R(t)\dot{\theta}.\vec{u}_T$.

1

on a : $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{R\,d\theta}{dt} = R\dot{\theta}(t)$. ($R$ = cst pendant dt)

$\vec{v}$ est colinéaire et de m̂ sens que $\vec{u}_T$.

$\vec{v} = R(t)\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_T$

I-2) En déduire l'écriture du vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base de Frenet.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\dot{\theta}\,\vec{u}_T\right).$$

$$= R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_T + R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_T}{dt} \quad \text{(R est considéré cst pendant dt).}$$

$$= R\ddot{\theta}\,\vec{u}_T + R\dot{\theta}\left(\dot{\theta}\,\vec{u}_N\right).$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + R\dot{\theta}^2\vec{u}_N = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

1

II- On considère un point matériel M qui se déplace dans un plan avec une accélération donnée en fonction du temps dans la base de Frenet par l'expression suivante :

$$\vec{a} = \alpha.\vec{u}_T + \beta t^2 \vec{u}_N \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes positives})$$

1) Déterminer les unités des constantes α et β. Justifier votre réponse.

$$[\alpha] = [a] = m s^{-2}$$

$$[\beta t^2] = [\beta]\cdot[t^2] = m s^{-2} \Rightarrow [\beta] = \frac{m s^{-2}}{s^2}$$

$$\text{d'où } [\beta] = m s^{-4}.$$

1

2) Calculer l'abscisse curviligne s(t) entre les instants $t_0 = 0$ et t. On donne : $v(t_0) = 0$ et $s(t_0) = 0$

$$s(t) = \int_0^t v\,dt \quad \text{avec} \quad \frac{dv}{dt} = \alpha \Rightarrow v = \int_0^t \alpha\,dt + v_0$$

$$\boxed{v = \alpha t}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t (\alpha t)\,dt = \frac{\alpha t^2}{2} + \overset{=0}{s_0} = \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$s(t) = \frac{\alpha t^2}{2}.$$

1,5

3) Montrer que le rayon de courbure de la trajectoire est donné par : $R_c = \frac{\alpha^2}{\beta}$

(1,5)

on a $a_N = \beta . t^2 = \frac{v^2}{R_c}$.

avec $v = \alpha . t \Rightarrow v^2 = \alpha^2 t^2$

d'où $\beta . t^2 = \frac{\alpha^2 t^2}{R_c} \Rightarrow \boxed{R_c = \frac{\alpha^2}{\beta}}$

C.Q.F.D