

4. naloga – Populacijski modeli

Matic Debeljak

28. oktober 2020

1 Naloga

1. **Model epidemije:** populacijo razdelimo v tri razrede: (D) zdravi in dovzetni, (B) bolni in kliconosni, (I) imuni: nedovzetni in nekliconosni. Bolezen se širi s stiki med zdravimi in bolnimi. Bolnik preide s konstantno verjetnostjo med imune (ozdravi ali umre).

$$\dot{D} = -\alpha DB$$

$$\dot{B} = \alpha DB - \beta B$$

$$\dot{I} = \beta B$$

V epidemiji nas zanima njen vrh (maksimalno trenutno število obolelih), čas nastopa maksimuma in celotno število obolelih. S cepljenjem lahko vnaprej preselimo določen del populacije med imune. Kako vpliva delež cepljenih na parametre epidemije? Kako se spremeni potek epidemije, če obolele razdeliš na več stadijev okužbe? Poskusiš lahko s 3 stadiji: najprej so okuženi, a ne širijo epidemije (inkubacijska doba), potem so močno kužni, potem pa so v izolaciji in jim kužnost pade.

2. Preuči standardni deterministični **model zajci-lisice** (model Lotka-Volterra) v obliki

$$\dot{Z} = \alpha Z - \beta ZL$$

$$\dot{L} = -\gamma L + \delta ZL$$

- Nariši in preišči fazni diagram (brezdimenzijska oblika, zastojne točke, stabilnost . . .).
- Oglej si obhodne dobe v odvisnosti od začetnega stanja. Zadošča, da preiščeš stanja, v katerih ima ena komponenta ravnovesno vrednost.

3. Analiziraj fazni portret za **populacijski model laserja** s konstantnim črpanjem.

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -\alpha f + B_1 a f \\ \dot{a} &= -\beta a - B_2 a f + R\end{aligned}$$

Določi ravnovesno stanje v odvisnosti od moči črpanja. Kako se s tem parametrom spreminjata frekvenca in karakteristični čas relaksacijskih oscilacij?

2 Rezultati

2.1 Modeli epidemije

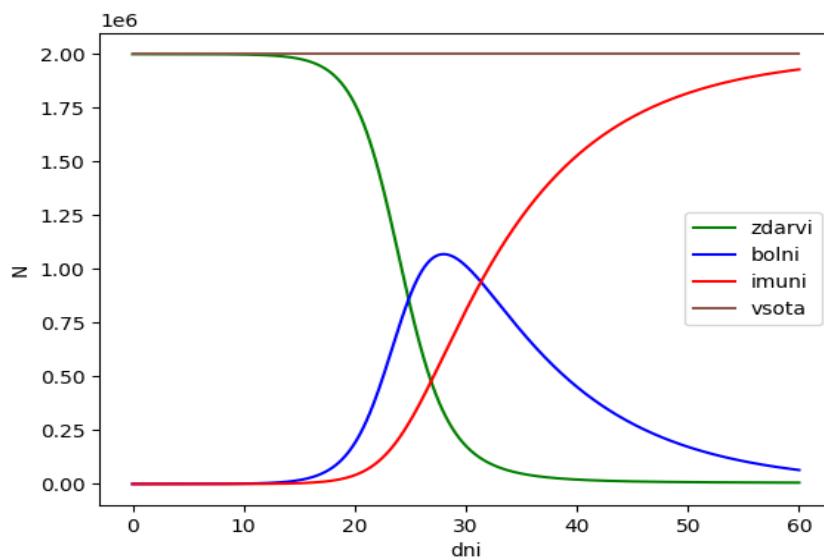
Epidemijo sem modeliral na več različnih načinov, vsak model ima svoj smisel in razlog zakaj se ga splača predstaviti.

2.1.1 Model 1: Osnovni model

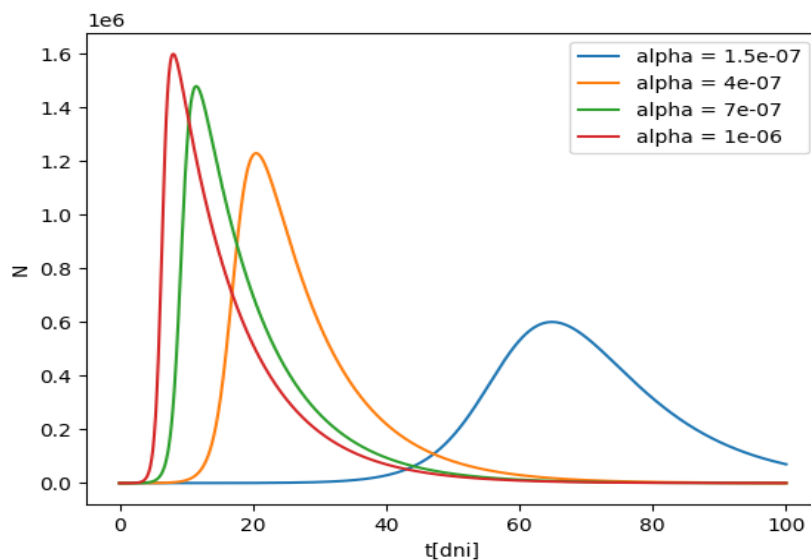
Za prvi model sem se odločil da vzamem kar tega, ki je bil podan v navodilih naloge in je opisan z naslednjimi diferencialnimi enačbami:

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -\alpha DB, \\ \dot{B} &= \alpha DB - \beta B, \\ \dot{I} &= \beta B,\end{aligned}$$

kjer parameter α določa verjetnost prenosa okužbe pri stiku kužne in dovzetne osebe, parameter β pa določa koliko časa je oseba bolna in je odvisen predvsem od bolezni katero modeliramo, zato sem ga držal kar konstantnega ($\beta = 0.1$). Da se prepričamo, da program dobro deluje ga poženemo in narišemo graf, ki prikazuje število zdravnih, bolnih, imunih in njihovo vsoto v odvisnosti od časa (slika 1). Opazimo, da se vsota vedno ohranja, kar se ujema z našim modelom (vsota desnih strani diferencialnih enačb = 0). Edini parameter, na katerega lahko vplivamo v tem modelu je α , možnost prenosa okužbe zmanjšujemo z držanjem socialne distance, boljše skrbi za higieno in minimiziranjem števila stikov. Vpliv spreminjanja parametra α na število bolnih je prikazan na sliki 2. Z zmanjšanjem α lahko torej poskrbimo, da se zmanjša maksimalno število hkrati bolnih ter da se epidemija razširi kasneje, kar omogoča boljšo pripravo zdravstvenih ustanov.



Slika 1: Prikaz števila zdravih, bolnih in imunih v odvisnosti od časa za model 1, pri začetnih vrednostih $D(0) = 2000000$, $B(0) = 10$, $I(0) = 0$ in $\alpha = 0.3e(-6)$



Slika 2: Prikaz števila bolnih v odvisnosti od časa za model 1, pri začetnih vrednostih $D(0) = 2000000$, $B(0) = 10$, $I(0) = 0$ in različnih vrednostih parametra α

2.1.2 Model 2: Imunost po nekaj časa izgine

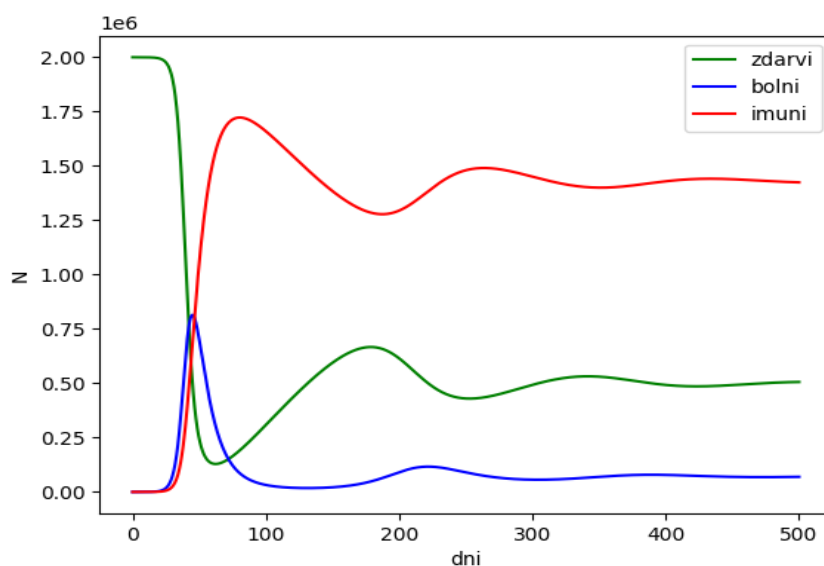
Model 2 se od modela 1 razlikuje po tem, da imuni ljudje po nekaj časa ($1/\gamma$) ponovno postanejo dovzetni za okužbo. Ta model opišemo kot:

$$\dot{D} = -\alpha DB + \gamma I,$$

$$\dot{B} = \alpha DB - \beta B,$$

$$\dot{I} = \beta B - \gamma I,$$

Potek epidemije je dokaj podoben kot pri modelu 1, le da se tokrat število bolnih ni nikoli 0, saj je vedno nekaj ljudi dovzetnih za bolezen



Slika 3: Prikaz števila zdravih, bolnih in imunih v odvisnosti od časa za model 2, pri začetnih vrednostih $D(0) = 2000000$, $B(0) = 10$, $I(0) = 0$, $\alpha = 0.2e(-6)$ in $\gamma = 0.005$

2.1.3 Model 3: Cepivo

Sedaj si zamislimo, da za to bolezen poznamo cepivo, ter da nam je pred izbruhom bolezni uspelo cepiti določeno število ljudi ($I(0)$), prav tako pa lahko vsak dan cepimo nekaj ljudi (γ). Enačbe za ta model so:

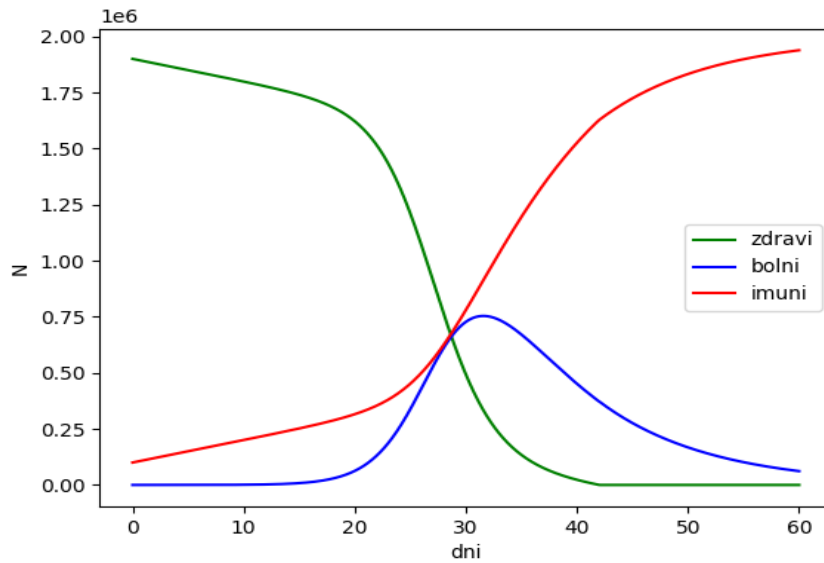
$$\dot{D} = -\alpha DB - \gamma,$$

$$\dot{B} = \alpha DB - \beta B,$$

$$\dot{I} = \beta B + \gamma,$$

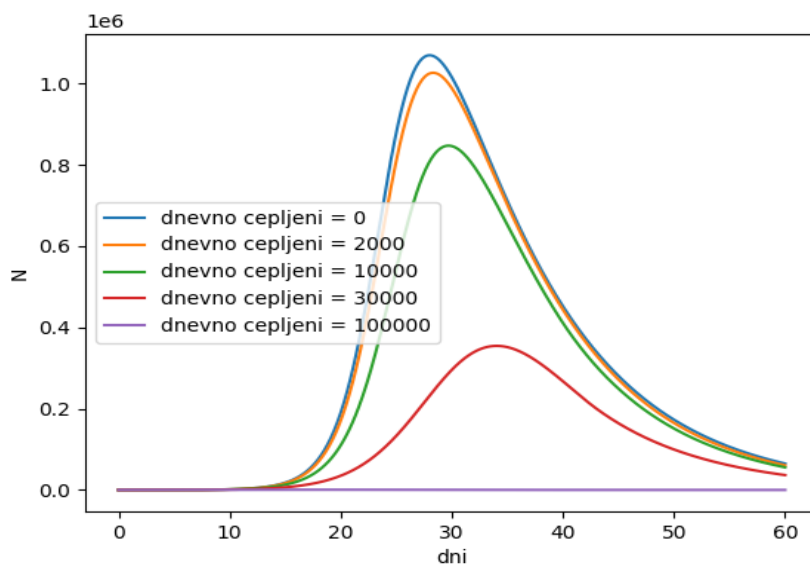
Seveda se moramo zavedati, da nam lahko zgornje enačbe napovejo negativno število dovzetnih ljudi, kar seveda ni vredno, zato moramo enačbe ko število dovzetnih pade na 0 spremeniti.

Potek epidemije prikazuje slika 4. Opazimo lahko da se pri enakem α kot v modelu 1 največje število hkrati bolnih ljudi zmanjša za približno 25%. Moramo pa se zavedati, da ta model ni najbolj realen saj je težko poznati cepivo, preden sploh poznamo bolezen, še težje pa bi bilo prepričati ljudi, da se cepijo proti bolezni, ki še ne obstaja.



Slika 4: Prikaz števila zdravih, bolnih in imunih v odvisnosti od časa za model 3, pri začetnih vrednostih $D(0) = 1900000$, $B(0) = 10$, $I(0) = 10000$, $\alpha = 0.3e(-6)$ in $\gamma = 10000$

Slika 5 pa prikazuje potek epidemije pri različnem številu dnevno cepljenih ljudi, če se cepljenje začne s prvim dnem epidemije. Za 20% zmanjšanje maksimalnega števila okuženih moramo cepiti 10000 ljudi dnevno, medtem ko 30000 dnevno cepljenih ljudi zmanjša maksimalno število bolnih za več kot 60%, a moramo se zavedati, da bi to število dnevno cepljenih ljudi težko doseči.



Slika 5: Prikaz števila bolnih v odvisnosti od časa za model 3, pri začetnih vrednostih $D(0) = 2000000$, $B(0) = 10$, $I(0) = 0$, $\alpha = 0.3e(-6)$ in različnem številu dnevno cepljenih

2.1.4 Model 4: Več stadijev bolezni in število smrti

Večina bolezni poteka v več obdobjih, najprej se oseba okuži, čez nekaj časa se bolezen razvije in oseba postane kužna, nato pa se oseba izolira in bolezen preboli. Če želimo epidemijo bolje opisati moramo zato bolezen razdeleiti v več stadijev in sicer obdobje okuženosti (B_1), ko še ne kažemo simptomov in nismo kužni, obdobje kužnosti (B_2), ko širimo bolezen in obdobje izolacije (B_3), ko smo še bolni a nimamo več stikov z zdravo populacijo. Ta model lahkoz enčabami opišemo kot:

$$\dot{D} = -\alpha DB_2$$

$$\dot{B}_1 = \alpha DB_2 - \beta B_1$$

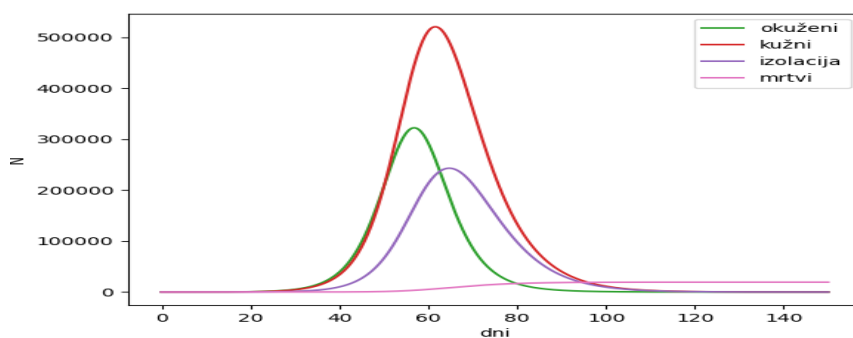
$$\dot{B}_2 = \beta B_1 - \gamma B_2$$

$$\dot{B}_3 = \gamma B_2 - \delta B_3 - \kappa B_3$$

$$\dot{I} = \delta B_3$$

$$\dot{M} = \kappa B_3$$

kjer razmerje med κ in δ predstavlja smrtnost virusa. S tem modelom smo zmanjšali število obolelih, ki prihajo v stik z zdravo populacijo, zato pričakujemo manjšo makismalno število kužnih oseb, to lahko opazimo na sliki 6. Ob smrtnosti virusa 1% umre v tej epidemiji nekaj manj kot 20000 ljudi.



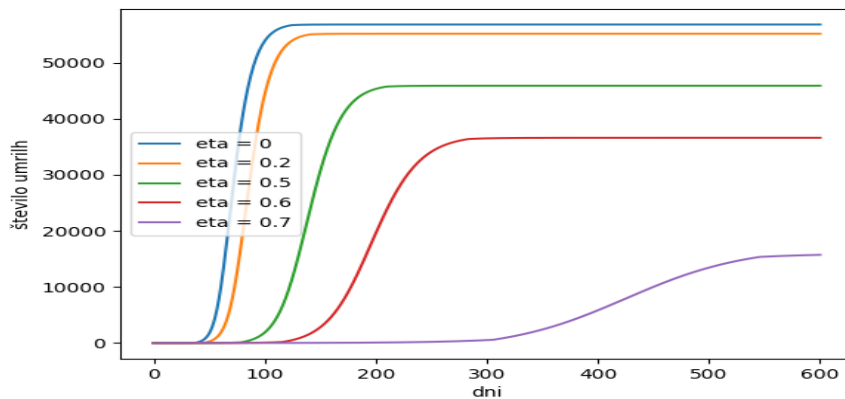
Slika 6: Prikaz števila bolnih v odvinosti od časa za model 4, pri začetnih vrednostih $D(0) = 2000000$, $B_1(0) = 10$, $B_2 = 10$, $B_3 = 10$, $I(0) = 0$, $M(0) = 0$, $\alpha = 0.3e(-6)$ in smrtnostjo 0.01.

2.1.5 Model 5: Testiranje in bližnji stiki

Eden od najboljših načinov nadzorovanja epidemije je s testiranjem ljudi in izolacijo bližnjih stikov okuženih. Ta dva ukrepa precej zmanjšata število ukuženih ki so v stiko s celotno populacijo.

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -\alpha DB_2 \\ \dot{B}_1 &= \alpha DB_2 - (\beta - \eta)B_1 - \eta B_1 \\ \dot{B}_2 &= (\beta - \eta)B_1 - \gamma B_2 \\ \dot{B}_{2,1} &= \eta B_1 - \gamma B_{2,1} \\ \dot{B}_4 &= \gamma B_2 + \gamma B_{2,1} - \delta B_3 - \kappa B_3 \\ \dot{I} &= \delta B_3 \\ \dot{M} &= \kappa B_3\end{aligned}$$

kjer $\beta - \eta$ predstavlja koliko procentov vseh ukuženih pošlejmo v karanteno že preden razvijejo okužbo. V tem modelu sem dodal še en pogoj in sicer, da če je v tretjem stadiju hkrati več kot 10000 ljudi hkrati se smrtnost poveča na 3%, saj veliko ljudi ne dobi dostopa do zdravstvene oskrbe. Število umrlih je torej zelo odvisno od procenta števila ljudi, ki jih je dodeljena karantena preden postanejo kužni. To prikazuje slika 7.



Slika 7: Prikaz števila umrlih v odvisnosti od časa za model 5, pri začetnih vrednostih $D(0) = 2000000$, $B_1(0) = 10$, $B_2 = 10$, $B_3 = 10$, $I(0) = 0$, $M(0) = 0$, $\alpha = 0.3e(-6)$ in različnimi η .

2.2 Model zajci-lisice (model Lotka-Volterra)

Odvisnosti populacije plena in plenilca lahko naivno opišemo z modelom Lotka-Volterra. In sicer:

$$\dot{Z} = \alpha Z - \beta ZL$$

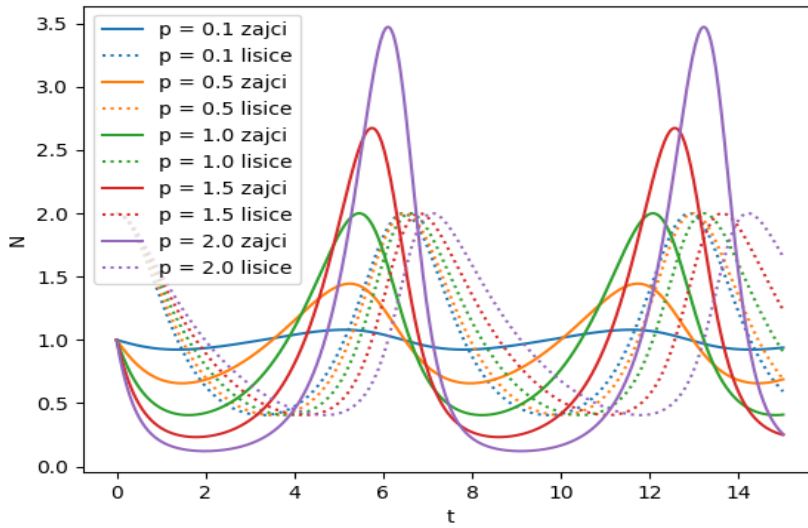
$$\dot{L} = \gamma L - \delta ZL,$$

Ta model lahko z uvedbo novih spremenljivk ($l = \frac{\beta}{\alpha}L$, $z = \frac{\delta}{\gamma}Z$, $\tau = t\sqrt{\alpha\gamma}$ in $p = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$) preoblikujemo v enoparametrični problem, ki je lažji za obravnavo:

$$\dot{z} = pz(1 - l)$$

$$\dot{l} = \frac{l}{p}(z - 1)$$

Slika 8 prikazuje kako se spreminja populacija lisic in zajcev v odvisnosti od parametra p , opazimo da je populacija zajcev močno odvisna od parametra p , medtem ko se populaciji lisic spremeni le perioda s katero se ponavlja.



Slika 8: Prikaz spreminjanja populacije lisic in zajcev pri $l(0) = 2$ in $z(0) = 1$ in različnimi p .

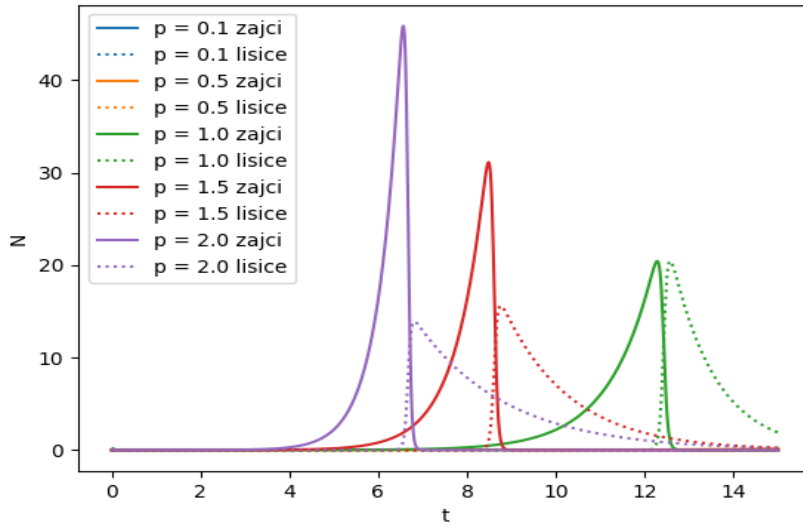
V temu modelu imamo tudi dve stacionarni točki in sicer $(z, l) = (0, 0)$ in $(z, l) = (1, 1)$, od modela pričakujemo okoli stacionarnih točk zanimivo obnašanje zato si pogledjmo obe točki:

- $(z, l) = (0, 0)$: Diferencialne enačbe se poenostavijo v:

$$\dot{z} \approx pz$$

$$\dot{l} \approx -\frac{l}{p}$$

rešitve za zgornje enačbo so $z(\tau) = z_0 e^{p\tau}$ in $l(\tau) = l_0 e^{-\tau/p}$. Tako obnašanje nam prikaže tudi naš model in sicer začetno naraščanje zajcev, nato pa ko je zajcev res veliko začnejo naraščati še lisice, a moramo se zavedati da takrt nismo več v okolici točke $(0, 0)$.



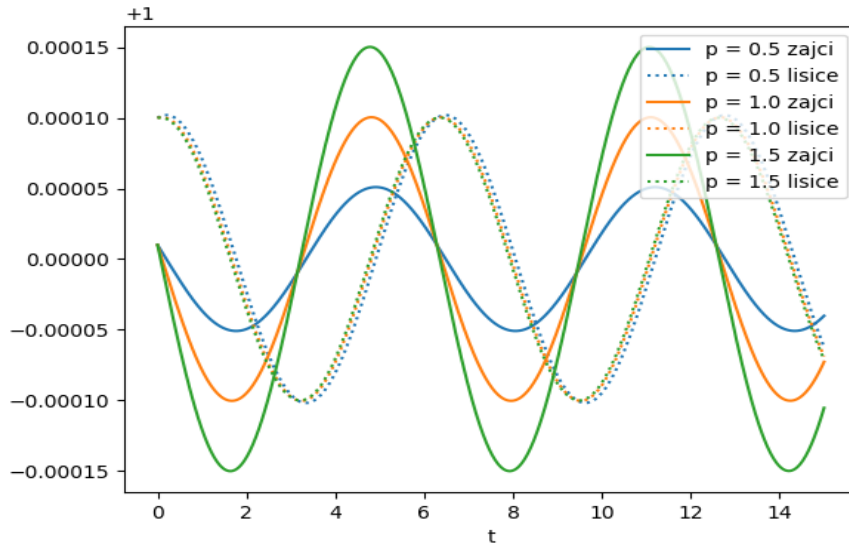
Slika 9: Prikaz spreminjanja populacije lisic in zajcev pri $l(0) = 0.0001$ in $z(0) = 0.0001$ in različnimi p .

- $(z, l) = (1, 1)$: V okolici te točke se diferencialne enačbe poenostavijo v:

$$\ddot{l} \approx -l$$

$$\ddot{z} \approx -z.$$

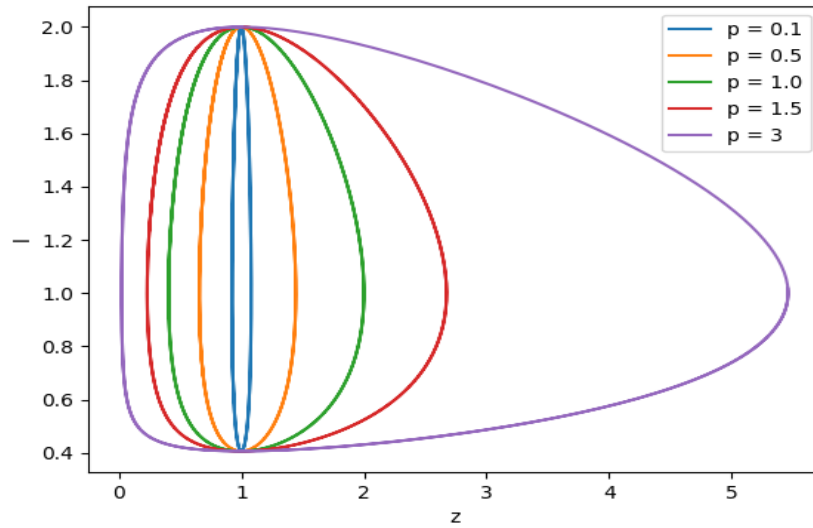
Rešitve teh dveh enačb je harmonično nihanje, ki se lepo prikaže na sliki 10.



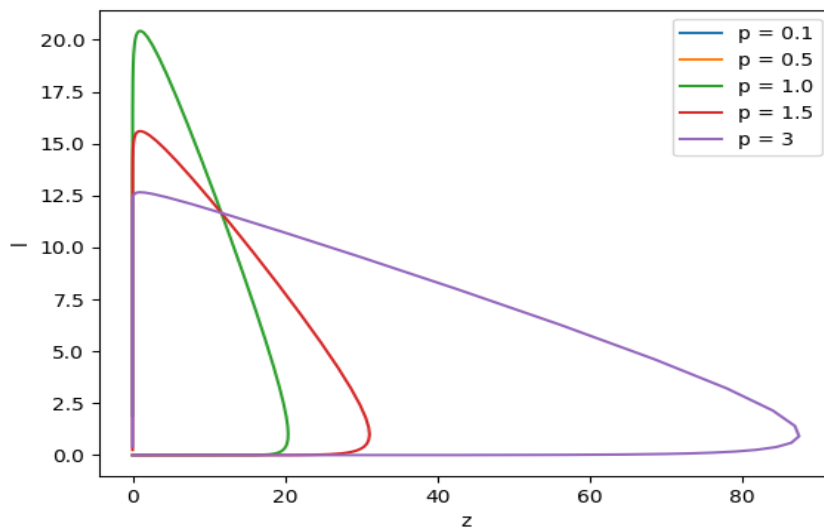
Slika 10: Prikaz spreminjanja populacije lisic in zajcev pri $l(0) = 1.0001$ in $z(0) = 1.0001$ in različnimi p .

2.2.1 Fazni diagrami

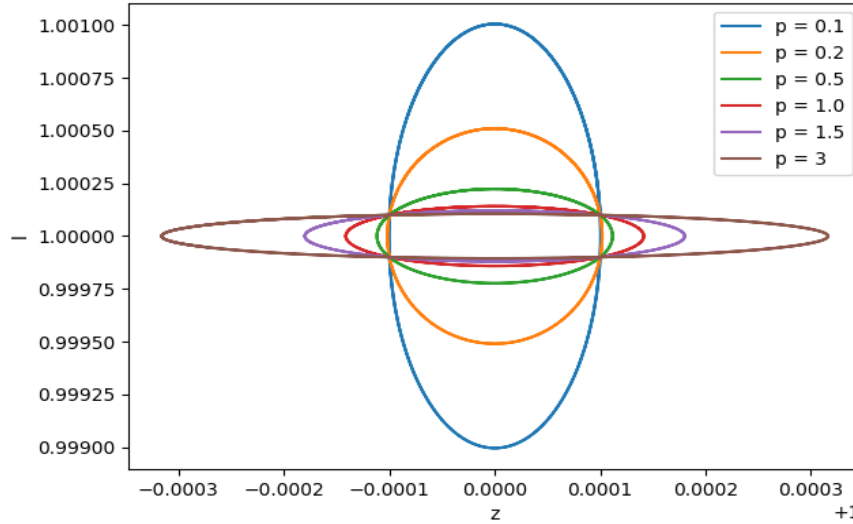
Zanimiv način predstavitve razvoja populacije plenilcev in plena je fazni diagram. Poglejmo si kako izgleda fazni diagram pri različnih začetnih pogojih. Pri $l(0) = 2$ in $z(0) = 1$ (slika 11) opazimo, da ima p velik vpliv na to kako izgleda fazni diagram, ter da pri $p \lesssim 3$ populacija zajcev skoraj izumre preden si spet upomore in hitro naraste. Medtem ko stacionarni točki $(0,0)$ ozroma pri začetnih pogojih $l(0) = 0.0001$ in $z(0) = 0.0001$ (slika 12) na faznem diagramu izgubimo bistveno informacijo in sicer v katero smer se premika populacija, torej ne moramo vedeti ali najprej naraste število zajcev ali lisic (to bi morda lahko rešili tako da bi na grafu označili vrstni red točk). Na sliki 13 pa opazimo elipse, ki predstavljajo harmonično nihanje v bližini stacioarne točke $(1,1)$.



Slika 11: Prikaz spreminjanja populacije lisic in zajcev pri $l(0) = 2$ in $z(0) = 1$ in različnimi p na faznem diagramu.



Slika 12: Prikaz spreminjanja populacije lisic in zajcev pri $l(0) = 0.0001$ in $z(0) = 0.0001$ in različnimi p na faznem diagramu.



Slika 13: Prikaz spreminjanja populacije lisic in zajcev pri $l(0) = 1.0001$ in $z(0) = 1.0001$ in različnimi p na faznem diagramu.

2.2.2 Obhodne dobe

Obhodne dobe so odvisne od začetnih pogojev $z(0)$, $l(0)$ in parametra p . Opazil sem nekaj vzorcev:

- če $\frac{z}{l} < 1$, se obhodna doba podaljšuje z naraščanjem p
- če $\frac{z}{l} > 1$, se obhodna doba krajša z naraščanjem p
- če $\frac{z}{l} > 1$, se obhodna doba podaljšuje z naraščanjem razmerja $\frac{z}{l}$
- če $\frac{z}{l} < 1$, se obhodna doba podaljšuje z manjšanjem razmerja $\frac{z}{l}$
- za obhodno dobo ni pomembno samo razmerje $\frac{z}{l}$ in parameter p ampak tudi vrednosti z in p . Naprimer začetno razmerje $5/1$ ima drugačno obhodno dobo kot začetno razmerje $10/2$.

3 Populacijski model laserja

Populacijski model lasarja lahko opišemo kot:

$$\dot{f} = -\alpha f + Baf$$

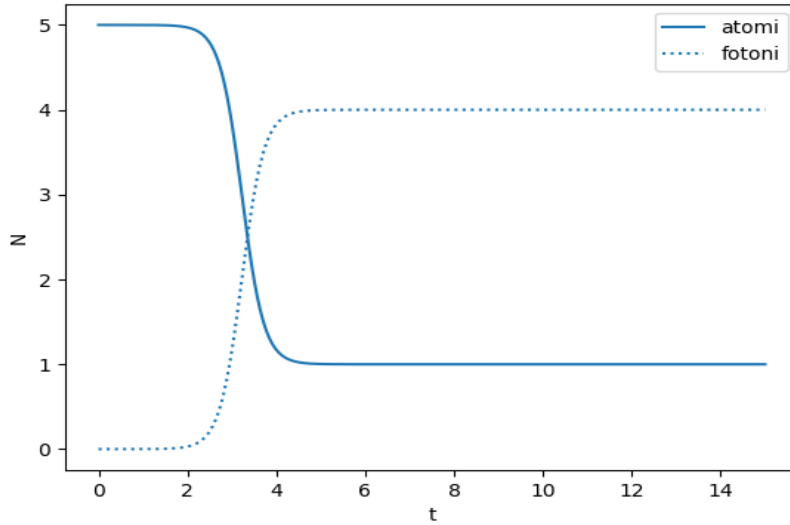
$$\dot{a} = -\beta a - Baf + R$$

t upeljavo novih spremenljivk ($A = \frac{\beta}{\alpha}a$, $F = \frac{B}{\beta}f$, $\tau = t\alpha\beta$, $p = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $r = \frac{BR}{\sqrt{\alpha^3\beta}}$) se ta sistem poenostavi na:

$$\dot{A} = r - pA(F + 1)$$

$$\dot{F} = \frac{F}{p}(A - 1)$$

Ta model ima dve stacionarni točki in sicer $(A, F)_1 = (\frac{r}{p}, 0)$ in $(A, F)_2 = (1, r/p - 1)$. V okolici prve točke dobimo rezultat prikazan na sliki 14.



Slika 14: Prikaz spreminjanja števila atomov in fotonov pri $A(0) = 5.0001$ in $z(0) = 0.0001$ p = 1 in r = 5.

V okolici druge točke pa se število fotonov in elektronov zelo hitro ustali.

4 Zaključek

Pri tej nalogi smo obranavali populacijske modele, ki so zelo uporabni za napovedovanje razvoja določenih stvari. Pri tem smo uporabljali numerično reševanje diferencialnih enačb. Naloga mi je bila všeč, še posebej prvi del, kjer smo lahko dodajali nove enačbe in poskušali čimbolje opisati epidemijo, morda se mi je zdela malo predolga (glede na ostale).