

7. naloga – Naključna števila in integracije z metodo Monte Carlo

Matic Debeljak

17. november 2020

1 Naloga

1. Telseu, ki ga omejuje ploskev,

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|} = 1,$$

določi maso ter vztrajnsotni moment

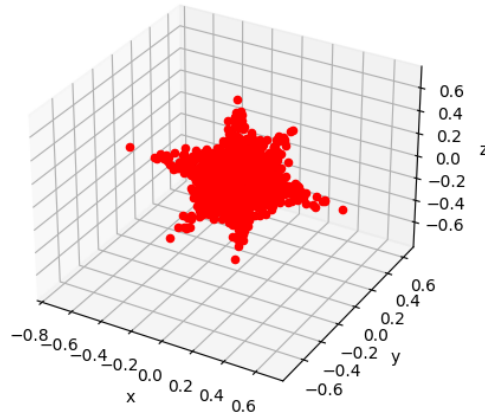
- če je gostota konstantna,
 - če se gostota spreminja z razdaljo od središča kot $\rho = r^p$, kjer je r razdalja od središčatelesa. Kakšen učinek ima vrednost parametra p ?
2. V krogli se rojevajo žarki gama. Njihova povprečna prosta pot v snovi, iz katere je krogla, je enaka radiju krogle. Kolikšen delež fotonov uide iz krogle? Kako se verjetnost pobega spreminja z razmerjem povprečne proste poti in radija krogle?
 3. Model nevtronskega reflektorja: tok nevtronov vpada pravokotno na ploščo, v kateri se nevtroni sipljejo in nič ne absorbirajo, pri čemer je njihova prosta pot enaka polovici debeline plošče. V poenostavljenem modelu privzamemo, da se sipljejo samo naprej in nazaj, in to z enako verjetnostjo. Kakšna je porazdelitev po številu sipanj? Kolikšna je prepustnost reflektorja? Oцени natančnost. Nekoliko bolj realen je model z izotropnim sipanjem. Z njim preveri, koliko so rezultati poenostavljenega modela uporabni. Razišči še kotno porazdelitev odbitih in prepuščenih nevtronov ter odvisnost prepustnosti od debeline plošče v modelu z izotropnim sipanjem.

2 Rezultati

2.1 Prva naloga

2.1.1 Konstantna gostota: $\rho(x, y, z) = \rho_0$

Najprej si za lažjo predstavo to telo narišem tako da naključno izberem 10^5 točk v enotski kocki ($T_i = (x_i, y_i, z_i)$, kjer $x_i \sim U(-1, 1)$, $y_i \sim U(-1, 1)$ in $z_i \sim U(-1, 1)$) in narišem te ki ustrezajo pogoju (slika 1).



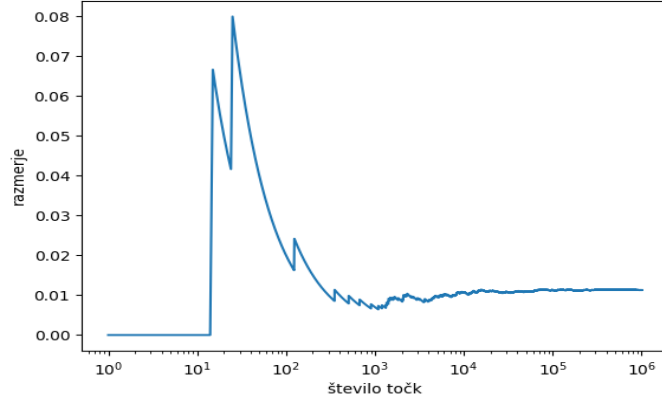
Slika 1: Prikaz oblike našega telesa.

Maso telesa izračunamo dokaj preprosto:

$$\frac{m_{telesa}}{m_{kocke}} = \frac{V_{telesa}}{V_{kocke}},$$

kjer lahko $\frac{V_{telesa}}{V_{kocke}}$ določimo z generiranjem naključnih števil in primerjanjem razmerja med številom točk, ki ustrezajo pogoju in številom vseh točk (slika 2). To razmerje se nekaj časa spreminja nato pa postane približno konstanto pri vrednosti (0.0105 ± 0.0005) . Sedaj lahko določimo maso telesa:

$$m_{telesa} = \frac{V_{telesa}}{V_{kocke}} \rho_0 V_{kocke} = 0.01 * 2^3 \rho_0 = (0.084 \pm 0.001) \rho_0$$

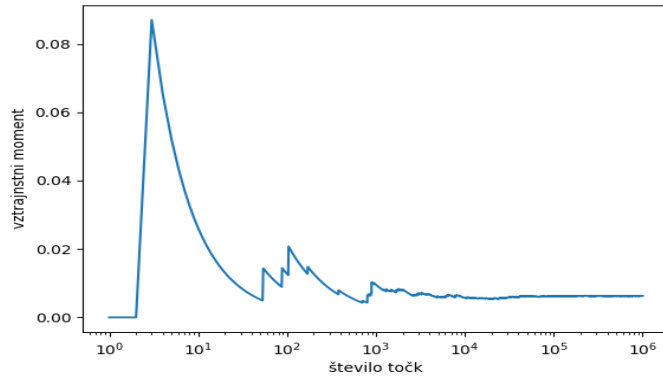


Slika 2: Prikaz razmerja med številom točk, ki ustrezajo pogoju in številom vseh točk.

Izračuna vztrajnostnega momenta se lotimo na podoben način:

$$J = \frac{\rho_0 V_{kocke}}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2 \delta_i,$$

kjer je $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ in $\delta = 1$, če je točka znotraj telesa in 0, če je točka izven telesa.



Slika 3: Prikaz ocene vztrajnostnega momenta v odvisnosti od števila točka, ki smo jih uporabili za izračun

Vztrajnostni moment lahko torej ocenimo na $(0.00625 \pm 0.00005)\rho_0$

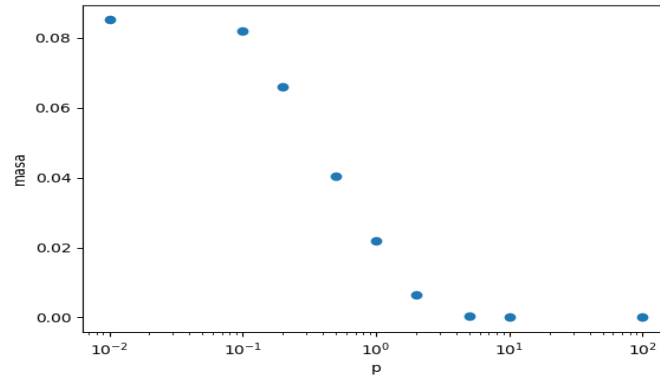
2.1.2 Spreminjajoča gostota: $\rho(r) = r^p$

Maso in vztrajnostni moment izračunamo podobno kot v prejšnem poglavju vztrajnostni moment.

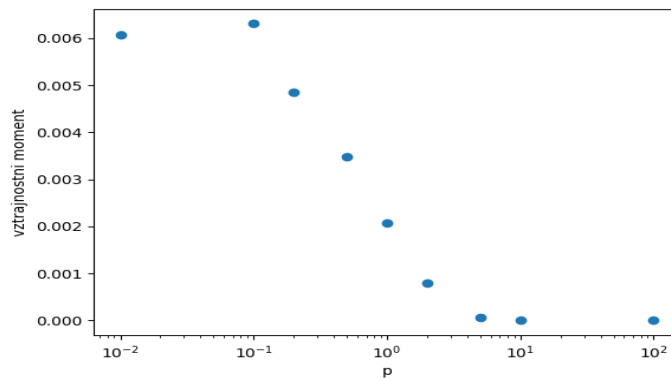
$$m = \frac{\rho_0 V_{kocke}}{N} \sum_{i=1}^N r_i^p \delta_i,$$

$$J = \frac{\rho_0 V_{kocke}}{N} \sum_{i=1}^N r_i^{2+p} \delta_i,$$

Pričakujemo, da bota z naraščanjem p-ja masa in vztrajnostni moment padala, saj v območju kjer enotske kocke, kjer se nahaja to telo večji p pomeni manjšo maso.



Slika 4: Prikaz ocene mase v odvisnosti od parametra p. N = 3000000

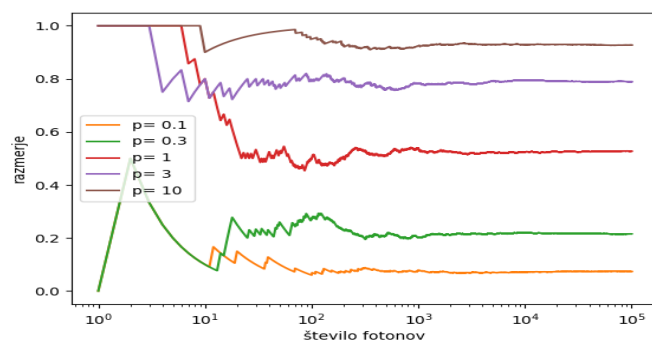


Slika 5: Prikaz ocene vztrajnostnega momenta v odvisnosti od parametra p. N = 3000000

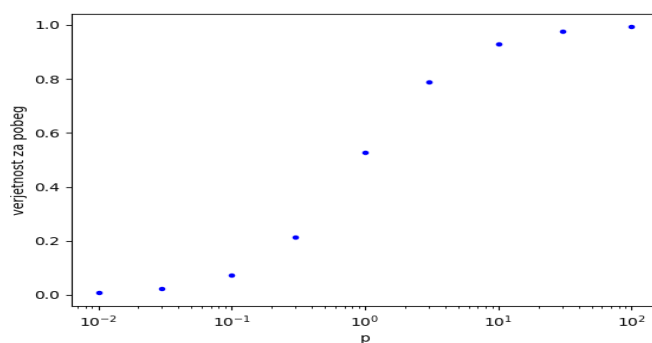
Opazimo, da je masa približno konstna za $0 < p < 10^{-1}$ nato eksponentno pada do $p \approx 10$, kjer pade skoraj na nič, nato pa je ponovno konstantna (saj se nemore zmanjšati pod 0). Podobno opazimo pri vztrajnostnem momentu, le da na temu grafu ena točka malce odstopa, kar nas seveda nesme preveč čuditi, saj uporabljamo naključna števila, kar omogča napako.

2.2 2. naloga

Zanima nas koliko fotonov uide iz krogle v odvisnosti od razmerja (p) med povprečno prosto pot in radijem krogle. Na sliki 6 je prikazano razmerje med pobeglimi in vsemi fotoni v odvisnosti od števila fotonov za nekaj različnih p -jev, kot pričakovano verjetnost za pobeg narašča z večanjem p .



Slika 6: Prikaz razmerja med pobeglimi in vsemi fotoni v odvisnosti števila fotonov za nekaj različnih p -jev

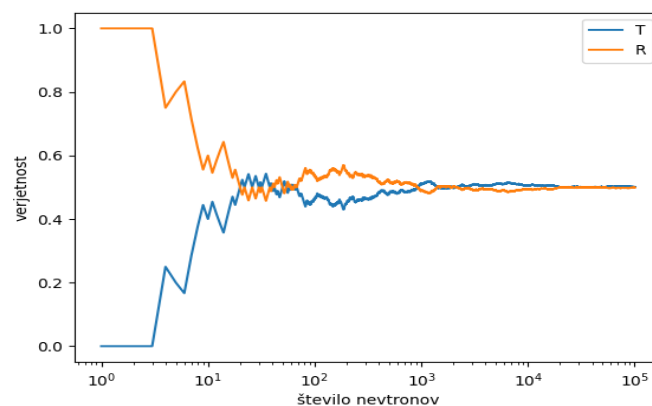


Slika 7: Prikaz verjetnosti za pobeg v odvisnosti od razmerja med povprečno prosto potjo in radijem krogle

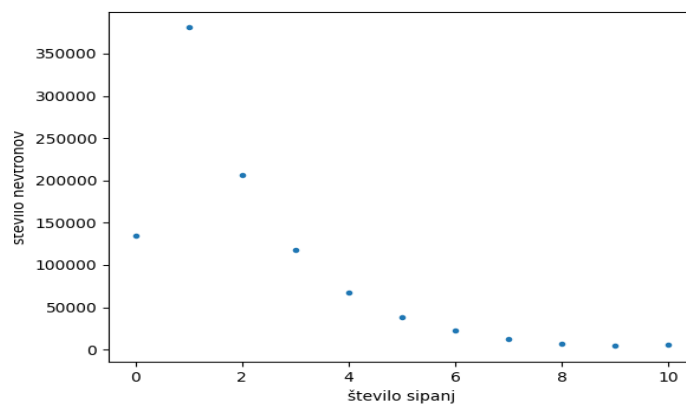
2.3 3. naloga

2.3.1 Enostaven model

Začnimo najprej s primerom ko se nevtroni sipljejo samo naprej in nazaj z enako verjetnosto, ter da je njihova prosta pot enaka polovici debeline nevtronskega reflektorja. Ponovno izvedemo simulacijo za veliko število nevtrnov in dobimo graf na sliki 8. Opazimo, da sta prepustnost in odbojnost $T = R = 0.5$. Zanima nas tudi porazdelitev po številu sipanj (slika 9).

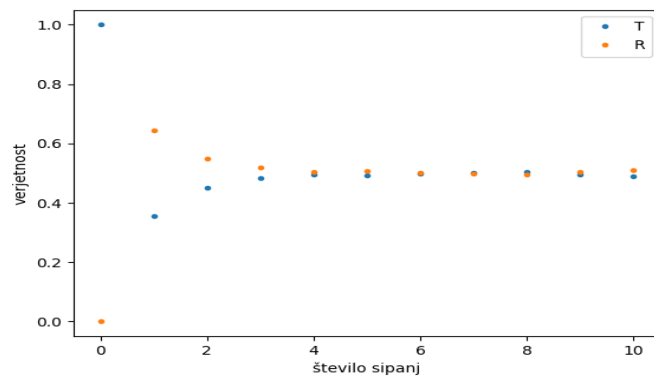


Slika 8: Prikaz ocene ta prepustnost in odbojnost v odvisnosti od števila nevtronov, ki sem jih uporabil v simulaciji.



Slika 9: Porazdelitev po številu sipanj (pod 10 sem dodal vse nevtrone, ki so se sipali desetkrat ali večkrat).

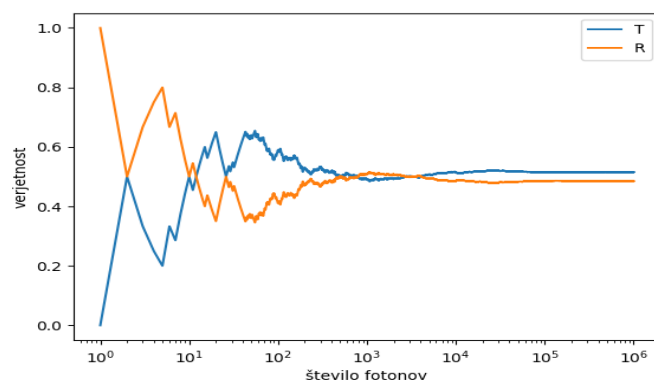
Pogledamo si lahko še kolikšna je prepustnost in odbojnost v odvisnosti od števila sipanj.



Slika 10: Prikaz ocene vztrajnostnega momenta v odvisnosti od števila točka, ki smo jih uporabili za izračun

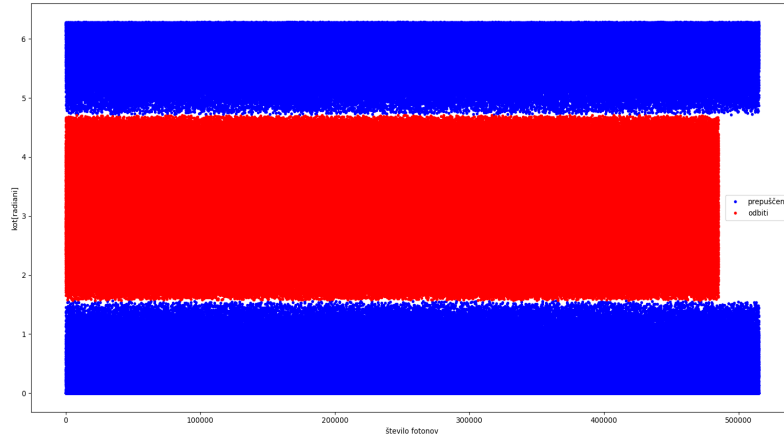
2.3.2 Izotropen model

Pri tem modelu sem predpostavil, da nevtroni priletijo v reflektor pravokotno na površino. Najprej bom prikazal rezultate za primer, ko je prosta pot enaka polovici debeline detektorja (slika 11).

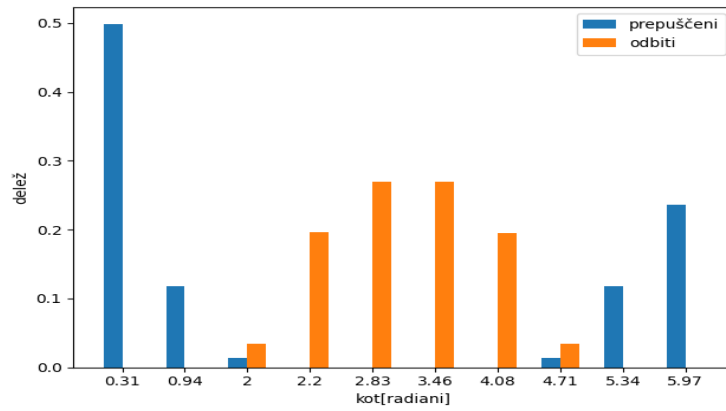


Slika 11: Prikaz ocene odbojnosti in prepustnosti za izotropni model (povprečna posta pot = $d/2$)

Opazimo, da prepustnost in odbojnost nista več enaki, reflektivnost je v tem primeru malo večja. Zanima nas še kotna porazdelitev izhodnih nevtronov.



Slika 12: Prikaz izhodnega kota za vsak nevtron pri izotropnem modelu

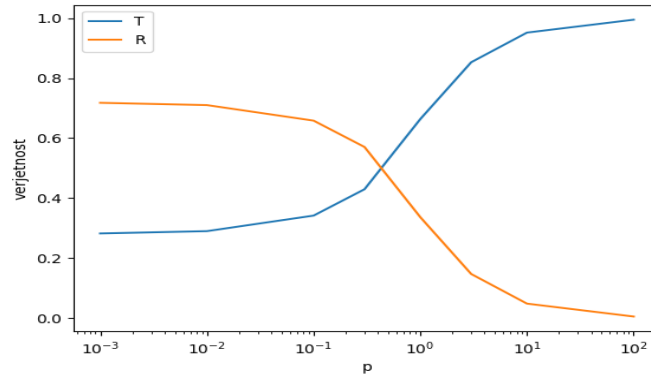


Slika 13: Porazdelitev po izhodnem kotu za izotropni model

Porazdelitev odbitih nevtronov je kot pričakovano simetrična na π . Medtem, ko bi morala biti porazdelitev prepuščenih nevtronov prav tako simetrična a zadni stolpec ni enak prvemu, zaradi neznanega razloga (verjetno napaka v kodi, ki je ne najdem). Prav tako ni težave v tem, da na sliki 13 izgleda kakor da imajo prepuščeni in odbiti enak izhodni kot (kar bi bilo seveda narobe, saj morajo imeti prepuščeni nevtroni izhodni kot $\in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$ medtem, ko imajo odbiti nevtroni izhodni kot $\in [\pi/2, 3\pi/2]$), saj je v in-

tervalih $[2\pi/5, 3\pi/5]$ in $[7\pi/5, 8\pi/5]$ kjer so na sliki 13 prisotni prepuščeni in odbiti nevtroni ustrezen izhodni kot za obe vrsti nevtronov. Da pa se izhodni kot prepuščenih in odbitih nevtronov ne prekriva pa lepo vidimo na sliki 12.

Poglejmo si še odvinost odbojnosti in prepustnosti od razmerja med povprečno prosto potjo in dolžino detektorja (slika 14).

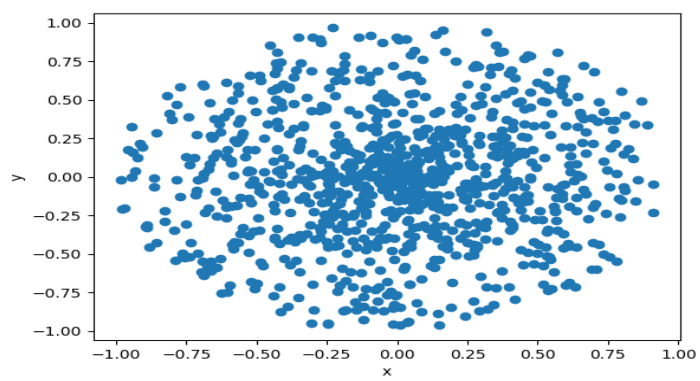


Slika 14: Prikaz ocene odbojnosti in prepustnosti za izotropni model v odvisnosti od razmerja med povprečno prosto potjo in debelino detektorja.

Limita $pot \gg d$ je kot pričakovano $T \approx 1$ in $R \approx 0$, medtem, ko me je limita $pot \ll d$ bolj presentila, saj sem pričakoval, da bo prepustnost veliko manjša kot je in zaradi tega odbojnost velik večja.

3 Zaključek

Pri tej nalogi smo se ukvarjali z integracijo s pomočjo metode Monte Carlo in generacijo naključnih števil. Naloga mi je bila zelo všeč, saj sem pri nekaterih nalogah prišel do rezultatov zelo hitro, za le te bi pa v eksaktnem reševanju potreboval veliko več truda in časa. Presenetilo pa je me generiranje naključnega radija kroglja, saj je le ta razporejen po $(U(0,1))^{1/3}$ ne pa kot $U(0,1)$, kot sem sprva predvideval. Po krajšem razmisleku, mi je sicer jasno zakaj je temu tako, a me je vseno presenetilo. Prikaz zakaj porazdelitev $U(0,1)$ ne deluje (v 2D) je na sliki 15. Opazimo, da so točke v središču korga posute precej bolj na gosto, kot proti obrobju, zato to ni dobra naključna porazdelitev.



Slika 15: Prikaz $r_i \sim U(0, 1)$