Graphs of type (SB) and domination on their cartesian products

Projektna naloga pri predmetu Finančni praktikum

Jan Hrastnik, Matic Kremžar

11. november 2024

1 Uvod

Tema najine projektne naloge je 'Graphs of type (SB) and domination on their cartesian products' oziroma v slovenskem prevodu 'Grafi tipa (SB) in dominacija na njihovem kartezičnem produktu'.

Projektna naloga bo izvedena v programu SageMath. Obsežni izračuni bodo izvedeni s pomočjo spletne strani CoCalc.

2 Osnovna ideja in definicije

Delala bova z usmerjenimi grafi $G = (V, E)$, kjer je G množica vozlišč, E pa množica povezav grafa.

Definicija 1. *Graf G je tipa (SB), če je njegov premer enak 2 in ima dve sosednji vozlišči $v_1, v_2 \in V$, da velja:*

- *v_1 in v_2 nimata skupnega soseda,*
- *G ima vozlišče $v^* \in V$, ki ni sosednje v_1 ali v_2; torej $v^* \not\sim v_1$ in $v^* \not\sim v_2$.*

Zapišemo lahko particijo vozlišč grafa G kot

$$V(G) = v_1, v_2 \cup A_1 \cup A_2 \cup A^*,$$

kjer je A_1 množica vozlišč, ki so sosednja v_1, A_2 množica vozlišč, ki so sosednja v_2 in A^* množica vozlišč, ki niso sosednja niti v_1 niti v_2.

Definicija 2. *Podmnožica vozlišč $D \subseteq V$ grafa $G = (V, E)$ se imenuje* dominacijska množica *grafa, če je vsako vozlišče $v \in V$ grafa v množici D, ali pa je kakšno njemu sosednje vozlišče v D.* Dominacijsko število *$\gamma(G)$ grafa je velikost najmanjše dominacijske množice grafa.*

Definicija 3. *Kartezični produkt $G \square H$ grafov G in H je graf, za katerega velja:*

- *vozlišča grafa $G \square H$ so kartezični produkt $V(G) \times V(H)$,*
- *dve vozlišči (u, v) in (u', v') sta sosednji v grafu $G \square H$ natanko tedaj, ko je:*
  - *$u = u'$ in v je sosed v' v H,* ***ali***
  - *$v = v'$ in u je sosed u' v G.*

3 Načrt dela

1. Napisati postopek, ki preveri, ali je dani graf tipa (SB) in poiskati vse take grafe za $n = |V| \leq 10$. Prvi pogoj, ki je treba preverit tukaj, je ali ima graf premer 2. To lahko hitro preverimo s SageMath funkcijo *Graph.diameter()*, ki sama proba najti premer na čim bolj optimalen način. Drugi pogoj grafa tipa (SB) je težje za preverit. En način je, da uporabimo matriko sosednosti grafa in se sprehodimo po njej ter iščemo primer vozlišč h_1, h_2, ki bi ustrezale drugemu pogoju. A to bi vse skupaj imelo časovno zahtevnost $O(|V|^3)$, kjer je $|V|$ moč množice vozlišč. To pa presega časovno zahtevnost, ki jo imamo pri preverjanju prvega pogoja. Morda obstaja način da se preverjanje drugega pogoja združi s preverjanjem pri prvim, in se s tem pridobi na časovni zahtevnosti.

2. Naključno konstruirati grafe tipa (SB) za višje n. Pri tej nalogi imamo namig, ki izbere sosedni vozlišči h_1, h_2 in konstruira množice A_1, A_2, A^*, tako da velja da je A_1 množica vozlišč, ki so sosedna h_1. A_2 se definira analogno. A^* pa je množiča vozlišč, ki niso sosedna z h_1, h_2. Sedaj, ko dobimo te množice, začnemo naključno vstavljati povezave v množico $A_1 \cup A_2 \cup A^*$, dokler ne dobimo graf premera 2.

3. Pridobiti nov graf tipa (SB) iz obstoječega s pomočjo majhne modifikacije (na primer dodajanje ali odvzemanje vozlišč ali povezav). Pri tej nalogi imamo spet namig, ki deluje podobno kot prej. Konstruirajo se množice A_1, A_2, A^*, naključno dodamo/odvzamemo vozlišča/povezave v $A_1 \cup A_2 \cup A^*$, in potem dodajamo povezave v tej množici dokler ne dobimo graf tipa (SB).

4. Preveriti katere vrednosti lahko zavzame dominacijsko število kartezičnega produkta dveh grafov tipa (SB). Pri tej točki se bomo sklicovali na rezultate, dobljene iz prejšnih nalog.